А. УИНТНЕР

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

А. УИНТНЕР

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Перевод с английского
Ю. А. РЯБОВА
Под редакцией
Г. Н. ДУБОШИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

531
У 37
УДК 521.1

THE ANALYTICAL FOUNDATIONS OF CELESTIAL MECHANICS

by

AUREL WINTNER

1941

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
LONDON: HUMPHREY MILFORD
OXFORD UNIVERSITY PRESS

$\frac{2\text{-}6\text{-}2}{148\text{-}67}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Книга А. Уинтнера принадлежит к разряду сочинений, в которых проблемы небесной механики трактуются с математической точки зрения как задачи качественной или аналитической теории дифференциальных уравнений.

Первой классической книгой такого характера является знаменитое сочинение А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики» *), которая явилась источником множества новых идей, оказавших впоследствии колоссальное влияние на все науки физико-математического цикла. Следующей книгой этого рода нужно признать «Динамические системы» Биркгофа **), третьей — предлагаемую книгу Уинтнера, за которой последовала небольшая, но весьма содержательная книжка К. Зигеля «Лекции по небесной механике» ***). Во всех этих книгах собраны главные результаты науки о движении небесных тел, рассеянные во множестве отдельных статей, мемуаров и специальных сочинений различных исследователей. Знакомство со всеми упомянутыми изданиями совершенно обязательно для специалиста в области современной небесной механики. Публикация на русском языке книги А. Уинтнера является поэтому полезной и своевременной.

Основное достоинство книги А. Уинтнера заключается в том, что все изложение материала опирается на современный математический аппарат и главные проблемы небесной механики связываются с современной теорией динамических систем, которая сама по себе, впрочем, вышла из недр небесной механики благодаря трудам А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Т. Леви-Чивита, Г. Д. Биркгофа и др.

Как указывает сам автор настоящей книги в своем предисловии, более трети его сочинения занимает сжатое изложение основ аналитической динамики.

Остальная часть книги, содержащая три главы, рассматривает главные проблемы небесной механики. При этом используются как сведения из аналитической динамики, изложенные в пер-

---

*) Готовится к изданию в русском переводе в издательстве «Наука» в серии «Классики естествознания».

**) Издана в русском переводе в 1936 г.

***) Издана в русском переводе в 1959 г.

вой трети книги, так и упомянутый выше математический аппарат.

Первая из этих трех глав (глава IV) посвящена задаче двух тел, т. е. теории невозмущенного кеплеровского движения. Здесь особенное внимание обращается на вопросы сходимости рядов и проблемы регуляризации.

В следующей главе (глава V) изложена общая задача многих тел (материальных точек, разумеется!), главным образом — трех. Особое внимание обращено на вопросы существования частных решений, проблемы регуляризации и общие свойства движения. Можно сказать, что в этой главе сделана попытка охватить все важнейшие результаты, полученные до 40-х годов нашего столетия при исследовании задачи трех или большего числа тел.

Сжатость изложения и использование современного математического аппарата позволили автору действительно коснуться всех важнейших проблем небесной механики.

В последней главе книги рассматривается ограниченная круговая задача трех тел с ее специальным случаем — задачей Хилла в приложении к теории движения Луны.

Книга А. Уинтнера несомненно представит большой интерес для студентов, аспирантов и специалистов по небесной механике, а также для лиц, занимающихся проблемами движения искусственных небесных тел.

Однако в книге затронуты не все важные вопросы современной небесной механики. Так, существенные вопросы устойчивости решений и теории периодических и почти периодических решений в книге А. Уинтнера не нашли себе места, и для их изучения читатель должен обращаться к другим сочинениям.

Нужно также заметить, что автор почти не упоминает в своей книге русских ученых, хотя многие их результаты имеют фундаментальное значение. Например, при рассмотрении рядов Хилла вовсе не упоминается, что доказательство сходимости этих рядов впервые еще в 1893 г. дал А. М. Ляпунов, который установил также пригодность этих рядов для теории движения Луны.

Г. Н. Дубошин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Более чем двенадцать лет тому назад я начал по предложению теперь покойного профессора Лихтенштейна работу над книгой, посвященной проблеме трех тел. По первоначальному плану предполагалось дать систематическое изложение методов и результатов теории периодических и родственных им частных решений ограниченной задачи трех тел и ее обобщений, а весь остальной материал сосредоточить вокруг этих фундаментальных решений.

Однако в процессе работы становилось все более и более ясно, что систематическому изложению математической теории периодических решений и вопросу о их применении к проблемам движения в солнечной системе, с одной стороны, и численным исследованиям Стремгрена, с другой стороны, должна предшествовать современная трактовка тех аналитических вопросов общей теории канонических систем, которые ведут свое происхождение от небесной механики и остаются для этой науки фундаментальными. После неоднократных обсуждений плана книги с профессором Биркгофом я еще более убедился в необходимости именно такого подхода. Я очень обязан профессору Биркгофу за тот дружеский и активный интерес, который он все время проявлял к этой книге.

Название книги указывает на то, что общие топологические методы при доказательстве теорем существования, ведущие свое начало от Пуанкаре, здесь не рассматриваются. Тем не менее, не будь исследований Леви-Чивита и Биркгофа, эта книга не могла бы быть написана.

Теория периодических решений иллюстрируется фактически лишь решениями Хилла в теории движения Луны. Последние играют такую важную историческую и методическую роль, что для них следовало сделать исключение.

Приблизительно первая треть книги основана на лекциях по аналитической механике, которые читались для студентов, специализирующихся по физике и математике. Поэтому я надеюсь, что эти главы могут служить в качестве введения в аналитическую динамику и в теорию возмущений. Всюду в этой книге особенно в главе VI) я имел перед собой цель не отпугнуть то вызывающее сожаление большинство молодых математиков, которые не имеют контакта с теоретической астрономией.

Глава I, возможно, необычна тем, что здесь рассматриваются только динамические операторы канонических систем дифференциальных уравнений без привлечения самих уравнений, которые лишь маскировали бы фактическое содержание приводимых формальных операций. Дифференциальные уравнения и их решения вводятся лишь в главе II. Соответственно метод вариации канонических постоянных в теории возмущений не связывается с известным уравнением в частных производных, которое выводится фактически лишь как побочный результат теории преобразований фазового пространства.

В главе II подчеркивается существенное различие между формальными вопросами, остающимися всегда локальными по своей природе, и проблемами в большом, которые и являются настоящими проблемами математической динамики. Хотя справедливо, что в большинстве случаев о возможной природе нелокальных проблем в небесной механике известно больше, чем об эффективном методе их решения, но разделы, где речь идет о природе нелокальных проблем, представляются все же необходимыми. Действительно, если бы эти разделы отсутствовали, то было бы едва ли возможным в последующих главах в случае задачи n тел даже указать, какие имеются актуальные проблемы и чтó следует рассматривать в настоящее время как псевдопроблемы.

В то время как главы I и II касаются произвольных канонических систем, в главе III учитывается специфическая квадратичная структура динамической функции Гамильтона. Единственным нетривиальным случаем, в котором сейчас доступны в явном виде формальные аналитические операции, является случай двух степеней свободы, и он рассматривается достаточно детально с целью его дальнейшего применения к ограниченной задаче трех тел.

В главе IV излагается задача двух тел в той мере, в какой она представляет теоретический интерес, и не затрагивается вопрос о практическом определении орбит. При анализе этого элементарного случая обращается особое внимание на тот факт, что выбор Ньютоном закона притяжения является исключительным во многих отношениях. Хотя исторические замечания отнесены в конец книги, но все же некоторые замечания было целесообразным поместить в текст этой главы, поскольку сейчас почти забыто, что развитие теории аналитических функций весьма сильно обязано, в частности, «элементарной» задаче двух тел.

Глава V является самой длинной в этой книге. Она несколько неоднородна, так как делается попытка охватить в ней все результаты, полученные до настоящего времени при анализе задачи трех или большего числа тел (если исключить теорию периодических и родственных им решений). Однако в некоторых случаях мне не удалось найти короткий путь изложения некоторых результатов, длинные доказательства которых имеются лишь в оригинальных статьях. В этих немногих случаях я довольствовался упоминанием (иногда лишь в виде исторических замечаний в конце книги) результатов без доказательства, но с объяснением значения результатов или причин возникновения трудностей при доказательстве, надеясь таким образом сохранить ту цель, которая преследуется этой книгой и которой бы противоречило воспроизведение длинных оригинальных доказательств изолированных обычно фактов. Вместе с тем я не колебался указывать на проблемы, которые напоминают сами о себе, но к решению которых я не нахожу подходящего пути. По существу все, что имеется в настоящее время более или менее законченного, по крайней мере принципиально,— это, с одной стороны, теория Зундмана парных и общих столкновений и, с другой стороны, теория гомографических решений. Соответственно эти два вопроса и анализируются достаточно подробно.

Глава VI, посвященная ограниченной задаче трех тел, сравнительно невелика лишь по той причине, что основа для нее была уже в достаточной мере заложена в предыдущих главах. Ограничения, которым подвергнут материал этой главы, указаны в начале этого предисловия. В разделах, посвященных теории движения Луны, рассматриваются фундаментальные математические вопросы теории движения Луны, и книга заканчивается на границе еще неведомой области «малых делителей» в классической небесной механике.

В примечаниях, которые собраны в приложении, делается попытка исправить некоторые традиционные ошибки. Действительно, даже классическая литература великого века Небесной Механики перенасыщена повторными открытиями уже известных результатов (иногда, действительно, сделанными заново, чего в других случаях с уверенностью сказать нельзя). Такие повторные открытия в течение последних ста лет привели к возникновению определенных претензий на приоритет в том или ином вопросе. Положение в ряде случае настолько сложное, что оно заслуживает детального исторического исследования. Подобная монографическая полнота не является, конечно, целью приложения, которое содержит, по всей видимости, ошибки (тем более объяснимые, поскольку литература, появившаяся до Лагранжа, была мне доступной лишь в небольшом объеме).

В случае пересечений в более или менее современных работах ссылки делались на работы лишь того автора, который, по моему мнению, первым открыл данный результат или метод.

Я решил прибегнуть к этому после того, как обнаружил, что, например, теория Пицетти гомографических решений неоднократно открывалась вновь в течение четверти века; точно так же результаты Гашо относительно характеристических показателей для либрационных решений, опубликованные в Comptes Rendus (1843), открывались вновь еще пять раз. Насколько неизбежными являются эти пересечения результатов, можно заключить, если представить всю обширность как астрономической, так и математической литературы по проблеме n тел; эта литература обычно известна вначале очень небольшому кругу лиц, но потом распространяется вместе с многими журналами по многим странам. Кроме того, искусные и целиком удовлетворительные исследования часто встречаются в статьях, которые написаны авторами, не являющимися ε-натренированными математиками, и, таким образом, требовательный читатель, имеющий желание разобрать статью внимательно, легко теряет терпение. Конечно, ситуация, противоположная этой, встречается так же часто.

Я приношу благодарность профессору Е. К. Хэвиленду (Линкольнский университет), докторам Е. Р. ван Кампену и Р. В. Кершнеру (Университет Джона Гопкинса) и д-ру В. Каплану (Мичиганский университет), внимательно прочитавшим рукопись или доказательства и оказавшим мне помощь своими ценными предложениями и советами. Я считаю себя в долгу перед Комитетом американского математического общества и перед Национальным научно-исследовательским комитетом, сделавшими возможным опубликование этой книги.

Аурел Уинтнер

Тэмворт, Н. Х.,
сентябрь 1940

ГЛАВА I
ДИНАМИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Будем называть вектором $a = (a_j)$ упорядоченную совокупность конечного числа скаляров a_j. Под m-вектором будем подразумевать вектор с m компонентами, расположенными в форме «столбца»:

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{Bmatrix},$$

но не «строки» $(a_1, \ldots, a_m)$. Если $b = (b_j)$ — другой m-вектор, то через $a \cdot b = b \cdot a$ обозначим скалярное произведение $\Sigma a_j b_j$. Если α — скаляр, то произведение $\alpha a = a\alpha$ представит m-вектор (αa_j).

Квадратную матрицу будем обозначать через $C = (c_k{}^i)$, причем индекс i есть номер строки и индекс k — номер столбца. Если число строк и столбцов равно m, то такую матрицу будем называть m-матрицей.

Если α — скаляр, то произведение $\alpha c = c\alpha$ представляет m-матрицу $(\alpha c_k{}^i)$. Операцию транспонирования матрицы $C = (c_k{}^i)$ будем обозначать штрихом $^{\backprime}$, так что $C^{\backprime} = (c_i{}^k)$*). Следовательно, если $C^{\backprime} = C$, то матрица C — симметрическая. Символом $B^{\backprime} A^{\backprime}$ представляется транспонированное произведение $AB (\neq BA)$ двух m-матриц. Определитель матрицы C будем обозначать через $\det C$, так что условие $\det C \neq 0$ характеризует неособенную матрицу C, т. е. такую, для которой существует обратная матрица

---

*) Обычный штрих $'$ в дальнейшем будет обозначать дифференцирование по времени t.

C^{-1}. Единичную матрицу будем обозначать через $E = (e_k{}^i)$, так что $e_i{}^i = 1$ и $e_k{}^i = 0$ при $k \neq i$.

Если величина A есть m-матрица и a — m-вектор, то Aa представит m-вектор, который можно рассматривать как результат применения к вектору a линейного преобразования A. Вместе с тем будем считать, что символ aA не имеет смысла.

Очевидно, что ABc, где A, B суть m-матрицы и c есть m-вектор, представит m-вектор Cc, причем $C = AB$. Аналогичным образом $a \cdot Cb$, где a, b суть m-векторы и C есть m-матрица, представит скаляр $a \cdot c$, причем $c = Cb$. По определению транспонированной матрицы $a \cdot cb = bC'a$.

Символом 0 будем обозначать не только число нуль, но также и нуль-вектор или нулевую матрицу.

§ 2. Все числа, переменные величины или функции, встречающиеся ниже, будем считать вещественными, если не оговорено (или если не вытекает из текста), что рассматривается область комплексных значений.

Множество $\mathbf{D}$ переменных m-векторов $x = (x_i)$ в пространстве декартовых координат будем называть областью, если это множество открытое, связное и не пустое.

Будем говорить, что скалярная, векторная или матричная функция $f = f(x)$ от x принадлежит к классу $C^{(\nu)}$, где ν — некоторое положительное целое число, если в рассматриваемой области f есть однозначная функция, все частные производные которой порядка не выше ν, существуют и непрерывны в области $\mathbf{D}$. В случаях, когда недоразумения возникнуть не могут, мы не будем явно указывать область $\mathbf{D}$. Класс $C^{(\nu+1)}$ содержится в классе $C^{(\nu)}$.

Если $f = f(x)$ есть скалярная, векторная или матричная функция класса $C^{(1)}$ и x_i есть один из компонентов m-вектора $x = (x_i)$, то символом f_{x_i} будем обозначать частную производную f по x_i. Вместе с тем символ f_x мы будем использовать лишь в том случае, если функция $f(x)$ является скаляром или m-вектором. В первом случае (когда f есть скалярная функция) символом $f_x \equiv f_x(x)$ будем обозначать градиент f по отношению к x. Таким образом, f_x представит собой m-вектор-функцию (f_{x_j}), для которой j-й компонент равен частной производной f_{x_i}. Во втором случае (когда $f = (f_k)$ есть m-вектор-функция m-вектора $x = (x_k)$) символ $f_x \equiv f_x(x)$ будет обозначать m-матрицу, строка которой с номером i состоит из компонентов градиента скалярной функции f_i по отношению к $x = (x_k)$.

§ 3. Очевидно, что для данной m-вектор-функции $y = y(x)$ класса $C^{(1)}$ существует скалярная функция $s = s(x)$, градиент которой $s_x(x)$ совпадает с $y(x)$ в том и только в том случае, если $y(x)$ удовлетворяет условию интегрируемости, т. е. условию симметрии $y'_x = y_x$ матрицы Якоби, причем y_x представляет собой гессиан $(s_{x_i x_k}) = (s_{x_k x_i})$ скалярной функции $s(x)$ класса $C^{(2)}$. Условие $y'_x = y_x$ является именно таким, при выполнении которого ротор $\operatorname{rot} y(x)$ обращается тождественно в нуль *).

Отсюда следует, что если данная матричная функция $A = A(x)$ класса $C^{(1)}$ обладает тем свойством, что для каждой скалярной функции $f = f(x)$ данного класса $C^{(\nu)}$ существует скалярная функция $\bar{f} = \bar{f}(x)$ такая, что $\bar{f}_x = Af_x$ (т. е. если при применении к любому градиенту преобразования $A(x)$ мы также получим некоторый градиент), то $A(x) = \mu E$, где μ есть скаляр, не зависящий от $x = (x_j)$, и E — единичная матрица **).

§ 4. Пусть наряду с m-матрицей $A = A(x)$ рассматривается m-вектор-функция $a = a(x)$, и пусть A и a таковы, что для каждой скалярной функции $f(x)$ некоторого класса $C^{(\nu)}$ можно найти такую скалярную функцию $\bar{f} = \bar{f}(x)$, чтобы было $\bar{f}_x = a + Af_x$. Тогда, если $\bar{f} = g$ соответствует случаю $f \equiv 0$, то видно, что a является градиентом g. Таким образом, Af_x при любой функции f есть градиент (и именно градиент функции $\bar{f} - g$). Из сказанного в § 3 тогда следует, что $A(x) = \mu E$, где $\mu = \mathrm{const}$. Наоборот, если существует скалярная функция $g(x)$ и постоянная μ такие, что $a = g_x$ и $A(x) = \mu E$, то $\bar{f} = g + \mu f$ при любой функции f удовлетворяет равенству $\bar{f}_x = a + Af_x$.

---

*) Под $\operatorname{rot} y \equiv \operatorname{rot} y(x)$ подразумевается матричная функция $y_x - y_x'$ переменной x, представляющая всегда кососимметрическую m-матрицу (и которая может быть заменена m-вектор-функцией x только для случая, когда $^1/_2 m(m-1) = m$, т. е. для обычного случая $m = 3$).

**) При доказательстве обозначим через $A_k(x)$ m-вектор, представляющий k-й столбец матрицы $A(x)$. Так как вектор $A(x)f_x(x)$ должен быть градиентом для каждого скалярного полинома $f = f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_k, \ldots \ldots, x_m)$ и, следовательно, для каждого скалярного полинома $f = f(x_k)$ одной переменной x_k, то, положив $g(x_k) = f_{x_k}(x_k)$, увидим, что вектор $g(x_k)A_k(x)$ представляет собой при любом k градиент любого скалярного полинома $g(x_i)$ относительно скаляра x_i. Отсюда следует, что если вектор-функции, представляющие собой градиенты, удовлетворяют условию интегрируемости, то каждый компонент вектора $A_k(x)$, кроме k-го, должен обращаться тождественно в нуль, а *k-й* компонент вектора $A_k(x)$ должен зависеть лишь от k-го компонента вектора $x = (x_i)$. Другими словами, m-матрица $A(x)$ должна представлять собой диагональную матрицу, в которой k-й диагональный элемент — обозначим его через $\alpha_k = \alpha_k(x)$ — является функцией лишь одного компонента x_k вектора $x = (x_i)$. Следовательно, утверждение, что $A(x) = \mu E$, где $\mu = \mathrm{const}$, эквивалентно условию $\alpha_i(x_i) = \alpha_k(x_k)$. Если же условие $\alpha_i(x_i) = \alpha_k(x_k)$ не удовлетворяется, то вектор $A(x)f_x(x)$ не может быть градиентом для одночленов $f(x) = x_i x_k$, где i, k произвольны.

В соответствии со сказанным выше m-вектор $a(x) + A(x)v(x)$ представляет собой градиент для каждой фиксированной пары a и A при *любом* градиенте $v = f_x$ тогда и только тогда, если заданный вектор $a(x)$ является градиентом, а заданная матрица $A(x)$ имеет вид μE, где E — единичная матрица и μ — скаляр, не зависящий от $x = (x_i)$.

§ 5. Пусть $x = (x_j)$ и $y = (y_j)$ суть два m-вектора. Отображение $y = y(x)$ области (x) на область (y) считается принадлежащим классу $C^{[\nu]}$, если оно является локально топологическим, а функция $y = y(x)$ и локально единственная обратная функция $x = x(y)$ принадлежат классу $C^{(\nu)}$. (Тогда отображение $x = x(y)$ обязательно принадлежит классу $C^{[\nu]}$.) Заметим, что локально топологическое отображение $y = y(x)$, определяемое вектор-функцией $y(x)$ класса $C^{(\nu)}$, может и не принадлежать классу $C^{[\nu]}$ (с таким примером, если $m = 1$, мы встречаемся при рассмотрении отображения $y = x^3$ области $-1 < x < 1$ на область $-1 < y < 1$). В силу известных теорем о неявных функциях отображение $y = y(x)$ будет принадлежать классу $C^{[\nu]}$ тогда и только тогда, когда функция $y(x)$ принадлежит классу $C^{(\nu)}$ и ее якобиан $\det y_x(x)$ не обращается в нуль в рассматриваемой области изменения x.

§ 6. Пусть $r = (r_i)$ есть n-вектор, $H = H(p)$ — скалярная функция класса $C^{(2)}$ и $p = (p_i)$ — другой n-вектор. Предположим, что в рассматриваемой области изменения p гессиан $\det\,(H_{p_i p_k}(p))$ не обращается в нуль. Так как гессиан представляет собой не что иное, как якобиан градиента $H_p(p)$ функции $H(p)$ по отношению к p, то отображение $r = r(p)$, определяемое функцией $r = H_p(p)$, принадлежит классу $C^{[1]}$. Оказывается, что отображение, определяемое обратной функцией $p = p(r)$, может быть представлено в той же самой форме, что и отображение $r = r(p) \equiv H_p(p)$, т. е. существует такая скалярная функция $L = L(r)$ класса $C^{(2)}$, что функция $p(r)$ представляет собой градиент $L_r(r)$.

Чтобы доказать это, определим $L = L(r)$, полагая

$$L(r) + H(p) = r \cdot p \qquad (r \cdot p = \Sigma r_i p_i), \tag{1}$$

причем $p = p(r)$ представляет собой локально единственную обратную функцию по отношению к $r = r(p)$. Таким образом,

$$L(r) = r \cdot p(r) - H(p(r)).$$

Так как $r = r(p) \equiv H_p(p)$, то разность $r - H_p\;(p(r))$ обращается тождественно в нуль и, следовательно, $L_r(r) = p(r)$ плюс два члена, сумма которых есть нуль. Этим доказано, что локально единственное обращение $p = p(r)$ отображения $r = H_p(p)$ может быть представлено с помощью скалярной функции $L(r)$ по формуле $p = L_r(r)$. Так как отображение $r = H_p(p)$ принадлежит классу $C^{[1]}$, то отображение $p = L_r(r)$ принадлежит к тому же классу, так что функция $L(r)$ принадлежит классу $C^{(2)}$. Кроме того, произведение гессианов для скалярных функций $L(r)$ и $H(p)$ равно

$$(L_{r_i r_k}(r))(H_{p_i p_k}(p)) \equiv E(= \text{единичной матрице}) \qquad (2)$$

в силу каждой из формул преобразования

$$r = H_p(p), \qquad p = L_r(r). \qquad (3)$$

Действительно, эти преобразования взаимно обратны и, следовательно, матрица Якоби одного из них является обратной по отношению к матрице Якоби другого преобразования. В силу (2) мы будем иметь, что не только $\det(H_{p_i p_k}(p)) \neq 0$ в области изменения p, но также и $\det(L_{r_i r_k}(r)) \neq 0$ в соответствующей области изменения r.

В приведенном только что доказательстве существования L функция $L(r)$ была определена посредством формулы (1). Однако то требование, чтобы локально единственное обратное отображение $p = p(r)$ преобразования $r = H_p(p)$ было равно $p = L_r(r)$, определяет не саму скалярную функцию $L(r)$, но только ее градиент $L_r(r)$. Отсюда следует, что если (1) не обращается в силу формулы $r = r(p) \equiv H_p(p)$ в тождество по p, то разность между обеими частями (1) равна константе в силу одной из двух (эквивалентных друг другу) формул преобразования (3). Ниже мы будем всюду предполагать, что эта произвольная аддитивная постоянная выбрана равной нулю.

§ 7. Пусть символ П обозначает операцию перестановки, при которой буквы p, H и r, L заменяются в формулировках § 6 буквами r, L и p, H соответственно. Тогда П заменяет предположение о том, что дана функция $H(p)$ класса $C^{(2)}$ с отличным от нуля гессианом, предположением о существовании функции $L(r)$ класса $C^{(2)}$ с отличным от нуля гессианом. Аналогичным образом П заменяет предположение о справедливости равенства $r = r(p) \equiv H_p(p)$ предположением о выполнении равенства $p = p(r) \equiv L_r(r)$. Формулы (1), (2), (3) переходят при перестановке П одна в другую. Отсюда следует, что вместо $H(p)$ и отображения $r = H_p(p)$ можно в качестве исходных взять функцию $L(r)$ и отображение $p = L_r(r)$. Тогда $H(p)$ определится с помощью (1), где r есть функция p, определяемая локально единственным обращением $r = r(p)$ данного отображения $p = L_r(r)$ класса $C^{[1]}$.

Так как двукратное применение II дает, очевидно, тождественную перестановку и так как формулы преобразования (3) суть локально единственные обращения друг друга, то ясно, что соответствие между $H(p)$ и $L(r)$ является инволюционным. Другими словами, если $L(r)$ соответствует $H(p)$, то $H(p)$ соответствует $L(r)$. Отсюда следует, что если $L_{\mathrm{I}}(r)$ соответствует $H_{\mathrm{I}}(p)$ и $H_{\mathrm{II}}(p)$ соответствует $L_{\mathrm{I}}(r)$ и вместе с тем $L_{\mathrm{II}}(r)$ соответствует $H_{\mathrm{II}}(p)$, то $H_{\mathrm{II}}(p) \equiv H_{\mathrm{I}}(p), L_{\mathrm{II}}(r) \equiv L_{\mathrm{I}}(r)$.

§ 8. Предположим, что одна из двух скалярных функций H, L (класса $C^{(2)}$ и обладающих отличным от нуля гессианом по отношению к n-векторам p, r) содержит некоторый l-вектор s в качестве параметра и что одна из n-вектор-функций $H_p(p, s)$, $L_r(r, s)$, рассматриваемых как функции $n + l$ скалярных переменных, принадлежит классу $C^{(1)}$. Тогда формулы § 6 перепишутся в виде

$$p = L_r(r, s), \qquad r = H_p(p, s), \tag{4}$$

$$L(r, s) + H(p, s) = r \cdot p, \tag{5}$$

$$(L_{r_i r_k}(r, s))\,(H_{p_i p_k}(p, s)) \equiv E. \tag{6}$$

Функция $r = H_p(p, s)$ определяет для любой фиксированной точки l-мерной области значений параметра s отображение класса $C^{[1]}$ n-мерной p-области на n-мерную r-область. Точно так же пара соотношений $r = H_p(p, s)$, $s = s$ определяет отображение класса $C^{[1]}$ $(n + l)$-мерной области (p, s) на $(n + l)$-мерную область (r, s). Обе формулы преобразований (4) эквивалентны друг другу.

Таким образом, $r = r(p, s)$ и $p = p(r, s)$. Если мы исключим из (5), например, p, то увидим, что переменный n-вектор r и постоянный l-вектор s связаны друг с другом скалярным тождеством

$$L(r, s) + H(p(r, s), s) - r \cdot p(r, s) = 0.$$

Дифференцируя это тождество по компонентам l-вектора $s = (s_i)$ и используя тот факт, что $r - H_p(p, s) = 0$ в силу (4), получим

$$L_s(r, s) + H_s(p, s) = 0 \tag{7}$$

(к чему приходим так же, как в § 6 при выводе соотношения $L_r(r) = p(r)$ из соотношения $L + H = p \cdot r$).

Таким образом, мы получили, что градиентное соотношение (7) удовлетворяется тождественно в силу (4) и (5). Однако оказывается, что соотношение (7) удовлетворяется также тождественно

(*i*) в силу только (4) или

(*ii*) в силу только (5).

Действительно, так как (7) есть тождество в силу (4) и (5), а (5) удовлетворяется, как это следует из сказанного в конце § 6, тождественно в силу (4) с точностью до аддитивной постоянной (которая уничтожается при дифференцировании, выполняемом при переходе от (5) к (7)), то ясно, что (7) удовлетворяется тождественно лишь в силу (4). Таким образом, (*i*) доказано. Что касается (*ii*), то достаточно заметить, что если три вектора r, p, s предполагаются взаимно независимыми, то градиент произведения $r \cdot p$ по отношению к s равен нулю. Следовательно, соотношение (7) удовлетворяется тождественно в силу одного лишь равенства (5).

Аналогично можно показать, что соотношения (4) представляют собой

(*i*) не только соотношения, определяющие отображение области (p, s) на область (r, s), но и

(*ii*) тождества, связывающие три вектора r, p, s, подчиненных одному лишь соотношению (5).

Такая двойственность возможной интерпретации градиентных соотношений (7) и (4) отражает фундаментальное свойство инволюционного преобразования (4). Обычно говорят, что отображение (4) области (p, s) на область (r, s) представляет собой контактное преобразование. Слово «контакт» связывается с однократным частным дифференцированием. Заметим, что соотношение (6) между частными производными второго порядка не обращается в тождество в силу одного только равенства (5).

ЛАГРАНЖЕВЫ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 9. Пусть **R** и **Q** суть области в пространствах изменения двух n-векторов $r = (r_i)$ и $q = (q_i)$ соответственно, а **T** — область изменения скалярной переменной t. Пусть $L = L(r, q, t)$ — такая скалярная функция, что n-вектор-функция $L_r(r, q, t)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ в области, являющейся произведением областей **R**, **Q**, **T** *). Обозначим штрихом $'$ полную производную «по времени» t.

Пусть $q(t)$ есть такая n-вектор-функция класса $C^{(2)}$ в области **T**, что «траектория» $q = q(t)$ в пространстве (q) лежит

---

*) Под произведением областей **R**, **Q**, **T** подразумевается множество точек $(2n+1)$-мерного пространства (r, q, t), для которого r, q, t являются точками областей **R**, **Q**, **T** соответственно.

внутри Q, а «скорость» $r = q'(t)$ лежит внутри R для всех t, принадлежащих интервалу T.

Тогда можно определить непрерывную в T n-вектор-функцию $[L]_q = ([L]_{q\,i})$ от t, положив

$$[L]_q = L'_{q'} - L_q, \quad [L]_{q_i} = L'_{q'_i} - L_{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

причем подразумевается, что $L(q', q, t)$ выражено в функции t. Индексы q, q_i в символах $[\ \ ]_q$, $[\ \ ]_{q_i}$ обозначают не частное дифференцирование, но просто принадлежат этим символам. Таким образом, i-компонент n-вектора $[L]_q$ равен

$$[L]_{q_i} = \sum q''_k L_{q_i' q_k'} + \sum q'_k L_{q_i' q_k} + L_{q_i' t} - L_{q_i}, \tag{2}$$

где суммирование ведется по индексу k от $k = 1$ до $k = n$, а индексами q'_j, q_j, t обозначается в правой части (2) частное дифференцирование функции

$$L = L(q', q, t), \tag{3}$$

где

$$q' = (q_i'), \quad q = (q_i).$$

n-вектор $[L]_q$ и его компоненты $[L]_{q_i}$ будем называть лагранжевыми производными от L вдоль траектории $q = q(t)$ в пространстве (q).

Из (2) или (1) можно легко вывести скалярное тождество

$$(-L + q'L_{q'})' = -L_t + q'[L]_q \qquad \left({}' = \frac{d}{dt}, \quad a \cdot b = \sum a_i b_i\right). \tag{4}$$

§ 9a. Тождество (4) указывает на скрытый параллелизм между t- и n-вектором $q = (q_i)$. Введем поэтому $(n+1)$-вектор $\mathrm{q} = (q_k)$, полагая $\mathrm{q}_0 = t$, $\mathrm{q}_1 = q_1, \ldots, \mathrm{q}_n = q_n$, и пусть $\mathrm{L}(\mathrm{q}', q) = L(q', q, t)$. Так как $\mathrm{q}_0 = t$, $\mathrm{q}_0' = 1$, $\mathrm{q}_0'' = 0$, то, применяя (2) к L, получим, что

$$[\mathrm{L}]_{\mathrm{q}_0} = -L_t, \quad [\mathrm{L}]_{\mathrm{q}_i} = [L]_{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n \quad (\mathrm{L} = L). \tag{1a}$$

Следовательно, тождество (4) можно переписать в следующей симметричной форме:

$$(-\mathrm{L} + \mathrm{q}'\mathrm{L}_{q'})' = q'[L]_q. \tag{4a}$$

§ 10. Пусть $\bar{q} = \bar{q}(q, t)$ есть n-вектор-функция класса $C^{(2)}$ в $(n+1)$-мерной области (q, t), имеющая отличный от нуля якобиан по отношению к q. Тогда

$$q = q(\bar{q}, t) \tag{5}$$

является отображением класса $C^{[2]}$ для каждого фиксированного t. Кривая $q = q(t)$, упомянутая в § 9, отображается на кривую $\bar{q} = \bar{q}(t)$ таким образом, что если Q обозначает якобиеву матрицу для q по отношению к $\bar{q}$ при фиксированном t, то

$$q' = Q\bar{q}' + q_t, \tag{6}$$

причем равенство

$$Q = q_{\bar{q}} \quad (\det Q \neq 0)$$

является тождеством относительно t в силу (5).

Имея функцию L, введенную в § 9, определим функцию $\bar{L}$ так, что

$$\bar{L}(\bar{q}', \bar{q}, t) \equiv L(q', q, t) \tag{7}$$

в силу (5) и (6). Тогда предположения о дифференцируемости для L, сделанные в § 9, будут выполнены также и для $\bar{L}$. Более того, исходя из (1) и (7), можно получить с помощью непосредственного дифференцирования, что *)

$$w = Q'^{-1}\bar{w}, \tag{8}$$

где

$$w = [L]_q, \quad \bar{w} = [\bar{L}]_{\bar{q}}, \quad Q = q_{\bar{q}} \quad (\det Q \neq 0).$$

§ **11.** Нет необходимости указывать, что функция $\bar{L}$, определяемая формулой (7), не совпадает с функцией $L(\bar{q}', \bar{q}, t)$. Даже если преобразование (5) — (6) очень близко к тождественному преобразованию $q = \bar{q}$, $q' = \bar{q}'$, то функция $L(\bar{q}', \bar{q}, t)$ не будет очень близка к функции $\bar{L}(\bar{q}', \bar{q}, t)$, т. е. к $L(q', q, t)$.

Действительно, пусть преобразование (5) — (6) очень близко к $\bar{q} = q$, $\bar{q}' = q'$ в том смысле, что (5) — (6) принадлежит семейству преобразований

$$\bar{q} = q + \varepsilon f + o(\varepsilon), \quad \bar{q}' = q' + \varepsilon f' + o(\varepsilon)\ ^{**}), \tag{9}$$

---

*) Правило преобразования (8) лагранжевых производных можно сформулировать, сказав, что в силу (6) и (7) n-вектор ведет себя при отображении (5) так же, как ковариантный тензор в одном лишь пространстве (q), а переменная t в формуле (5) не принимается во внимание. С другой стороны, правило преобразования (6) вектора скорости не соответствует преобразованию контрвариантного тензора в пространстве (q), если t входит явно в формулу (5), т. е. если $q_t \neq 0$.

**) Под $o(\varepsilon)$ подразумевается функция q', q, t, обладающая тем свойством, что отношение $o(\varepsilon)/\varepsilon$ стремится для всех рассматриваемых значений q', q, t равномерно к нулю при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что даже в случае аналитичности функции f первое из соотношений (9) не влечет за собой второе, так как производная по t от $o(\varepsilon)$ в первом соотношении может не быть функцией типа $o(\varepsilon)$; ср. с понятием «слабой окрестности» в вариационном исчислении.

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, не зависящий от q, q', t, а $f = f(q', q, t)$ — фиксированная n-вектор-функция, не содержащая ε и равная, очевидно, частной производной $\bar q_\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$. Условие, что $L(\bar q', \bar q, t)$ очень близка к $\bar L(\bar q', \bar q, t)$, соответствует соотношению

$$L(\bar q', \bar q, t) = \bar L(\bar q', \bar q, t) + o(\varepsilon), \tag{10}$$

которое должно было бы выполняться в силу (9). Однако это соотношение имеет место не для всех преобразований вида (9), но лишь для таких, в которых n-вектор $f = f(q', q, t)$ удовлетворяет при заданной скалярной функции $L = L(q', q, t)$ некоторому условию, а именно тому, что равенство

$$(f\cdot L_{q'})' \equiv f[L]_q, \tag{11}$$

где $f = f(q', q, t)$, $L = L(q', q, t)$, тождественно удовлетворяется в $(2n+1)$-мерной области (q', q, t).

Действительно, подставляя (9) в $L(\bar q', \bar q, t)$ и обозначая через $\lambda = \lambda(q', q, t)$ частную производную $L_\varepsilon(\bar q', \bar q, t)$ при $\varepsilon = 0$, увидим, что

$$\lambda = f\cdot L_q + f'\cdot L_{q'}.$$

Отсюда на основании (1) имеем

$$\lambda = -f\cdot [L]_q + (f\cdot L_{q'})'.$$

Следовательно, по формуле Тейлора

$$L(\bar q', \bar q, t) = L(q', q, t) + \varepsilon\{-f\cdot [L]_q + (f\cdot L_{q'})'\} + o(\varepsilon), \tag{12}$$

поскольку функция $L(\bar q', q', t)$ и ее производная $L_\varepsilon(\bar q', \bar q, t)$ обращаются при $\varepsilon = 0$ в $L(q', q, t)$ и $\{\ \} = \lambda$ соответственно. Так как формула (12) справедлива для любой функции $f = f(q', q, t)$, входящей в (9), то из (7) следует, что предположение (10) влечет за собой обращение в нуль коэффициента

$$\{\ \} = \lambda = \lambda(q', q, t)$$

при ε в формуле (12). Это доказывает, что (11) представляет собой условие для функции f, вытекающее из предположения о справедливости соотношения (10).

§ **11a.** Из вышесказанного следует, что если семейство преобразований (9) оставляет функцию $L(q', q, t)$ инвариантной при любом ε, т. е. если

$$L(\bar q', \bar q, t) \equiv L(q', q, t) \tag{13}$$

в силу (9), то n-вектор

$$f(q', q, t) = (\bar q_\varepsilon)_{\varepsilon=0}$$

удовлетворяет тождеству (11). Действительно, условие (13) является достаточным для того, чтобы выполнялось (10).

§ 12. Классический пример использования того факта, что (11) есть следствие (13), будет приведен в § 96.

Обращаясь к другому примеру, предположим, что (13) или по крайней мере (10) удовлетворяются и что

$$L_t \equiv 0, \quad f_t \equiv 0, \quad \text{т. е. } L = L(q', q), \quad f = f(q', q). \tag{14}$$

Пусть кривая $q = q(t)$, рассматриваемая в § 9, является замкнутой в пространстве (q), т. е. что $q(t) = q(t + \tau)$ для некоторого периода $\tau > 0$. Тогда

$$0 = \int_0^\tau f \cdot [L]_q \, dt, \tag{15}$$

где подынтегральное выражение рассматривается как функция t вдоль произвольной замкнутой кривой.

Действительно, $f(q'(t), q(t))$, $[L(q'(t), q(t))]_q$, рассматриваемые как функции t, имеют период τ, так что (15) вытекает из (11).

§ 13. Если $L_t \equiv 0$, т. е. $L = L(q', q)$, то

$$0 = \int_0^\tau q' \cdot [L]_q \, dt \tag{16}$$

для любой кривой того типа, который рассматривается в § 12. Действительно, (16) следует из (4) точно так же, как (15) следует из (11).

В частности, если семейство (9) определяется формулами

$$\bar{q} = q(t + \varepsilon), \qquad \bar{q}' = q'(t + \varepsilon),$$

то из $f \equiv (\bar{q}_\varepsilon)_{\varepsilon=0}$ следует $f = q'(t)$ и (15) сводится к (16). Это согласуется с § 9а.

§ 13а. Пусть $L_t \equiv 0$. Соединим две точки $q = q^{\mathrm{I}}$, $q = q^{\mathrm{II}}$ ориентированной кривой $q = q(t)$ класса $C^{(2)}$ в области (q). Тогда криволинейный интеграл

$$\int_{q^{\mathrm{I}}}^{\mathrm{II}} [L]_q \, dq \tag{17}$$

не зависит от пути интегрирования, а только от крайних точек q^{I},

q^{II} и значений q', q'' в этих точках при условии, что кривая $q(t)$ лежит внутри односвязной области. Этот результат лишь повторяет (16).

§ 14. Вместо того чтобы рассматривать единственную кривую $q = q(t)$, как это было сделано в § 9, рассмотрим семейство кривых $q = q(c, t)$, зависящее от некоторого числа $m (m \geqslant 1)$ параметров c_j, причем n-вектор-функция $q = q(c, t)$ m-вектора $c = (c_j)$ и времени t принадлежит классу $C^{(2)}$ в рассматриваемой $(m+1)$-мерной области (c, t). Пусть даны дополнительно две произвольные функции $t^{\mathrm{I}} = t^{\mathrm{I}}(c)$ и $t^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{II}}(c)$ класса $C^{(1)}$ такие, что (c, t^{I}) и (c, t^{II}) лежат в области (c, t), если c принадлежит области (c). Тогда, если $L = L(q', q, t)$ — скалярная функция, рассматривавшаяся начиная с § 9, то скаляр

$$S = \int_{t^{\mathrm{I}}}^{t^{\mathrm{II}}} L\,dt \equiv \int_{t^{\mathrm{I}}}^{t^{\mathrm{II}}} L(q'(c\ t), q(c, t), t)\,dt, \tag{18}$$

является функцией $S = S(c)$ класса $C^{(1)}$ в области (c).

По основной формуле вариационного исчисления мы будем иметь для функции $S(c)$ переменных $c_1, \ldots, c_m$ тождество

$$\delta S = \sum_{\nu=\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} (-1)^{\nu} (L - q' \cdot L_{q'})_{t=t^{\nu}} \delta t^{\nu} + \\ + \sum_{\nu=\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} (-1)^{\nu} (L_{q'})_{t=t^{\nu}} \cdot \delta(q)_{t=t^{\nu}} - \int_{t^{\mathrm{I}}}^{t^{\mathrm{II}}} ([L]_q \cdot \delta q)_{t=t^{\nu}}\,dt. \tag{19}$$

Оператор δ в этой формуле определяется следующим образом:

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} dc_j \frac{\partial}{\partial c_j}, \tag{20}$$

так что

$$dF(c, t) = F_t(c, t)\,dt + \delta F(c, t).$$

Меняя порядок дифференцирования, можно установить, что $(\delta F)' = \delta(F')$. Из (20) также видно, что $\delta F = dF$, если F является функцией одного c. Следовательно, тогда в (19) имеем

$$\delta S = dS, \quad \delta t^{\mathrm{I}} = dt^{\mathrm{I}}, \quad \delta t^{\mathrm{II}} = dt^{\mathrm{II}}.$$

С другой стороны, $\delta t \neq dt$, так как δF обращается в соответствии с (20) в нуль, если F является функцией одного только t, в частности, если $F = t$.

Очевидно, что сумма пяти выражений в формуле (19) для $\delta S = dS$ представляет собой пфаффиан вида

$$g_1 dc_1 + \ldots + g_m dc_m,$$

где $g_j = g_j(c_1, \ldots, c_m) \equiv g_j(c)$. Следовательно, формула (19) говорит лишь о том, что коэффициент $g_j(c)$ этого пфаффиана совпадает с частной производной S_{c_j} (c) функции S переменной c (так что, в частности, пфаффиан совпадает с полным дифференциалом). Соответственно с этим классическое доказательство Лагранжа формулы (19) заключается в непосредственном дифференцировании функции (18) по c_j, в последующем интегрировании по частям, опирающемся на определение (1) функции $[L]_q$ и на применении формулы $\delta(F') = (\delta F)'$ к $F(c, t) = q(c, t)$; ср. с доказательством формулы (12).

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 15. Рассматривая скалярную функцию $L(q', q, t)$ двух n-векторов $r (= q'), q$ и времени t, мы предположили (§ 9), что n-вектор-функция $L_r(r, q, t)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ в исследуемой области (r, q, t). Для последующего нужно предположить дополнительно, что якобиан компонентов L_{r_j} вектора L_r по отношению к компонентам r_i вектора r, т. е. гессиан $\det\,(L_{r_i r_k})$, не обращается в нуль ни в одной точке $(2n + 1)$-мерной области (r, q, t). Тогда можно отождествить функцию $L(r, q, t)$ с функцией $L(r, s)$, рассмотренной в § 8, причем параметрический вектор s (с произвольным числом l компонентов $s_1, \ldots, s_l$) имеет здесь компоненты, равные компонентам $q_1, \ldots, q_n$ вектора q и времени t, так что $l = n + 1$. Таким образом, при замене $r = (r_i)$ на $q' = (q_i')$ формулы (4), (5), (6) § 8 переходят в следующие:

$$p = L_{q'}(q', q, t), \tag{1_1}$$

$$q' = H_p(p, q, t), \tag{1_2}$$

$$L(q', q, t) + H(p, q, t) = q' \cdot p, \tag{2_1}$$

$$(L_{q_i' q_k'})\,(H_{p_i p_k}) = E, \tag{2_2}$$

тогда как формула (7) этого параграфа распадается на две формулы:

$$L_q(q', q, t) + H_q(p, q, t) = 0, \tag{3_1}$$

$$L_t(q', q, t) + H_t(p, q, t) = 0. \tag{3_2}$$

Векторные соотношения (1_1) — (1_2), (3_1) и скалярное соотношение (3_2) допускают двойную интерпретацию, объясненную в конце § 8. В соответствии с (2_2) условия

$$\det(L_{q_i'q_k'}(q', q, t)) \neq 0, \tag{4_1}$$

$$\det(H_{p_ip_k}(p, q, t)) \neq 0 \tag{4_2}$$

эквивалентны одно другому в силу формул преобразования (1_1) — (1_2). Последние же являются в силу изложенного в § 1 взаимно обратимыми и инволюционными.

В результате применения к кривой $q = q(t)$, рассмотренной в § 9, преобразования (1_1) или (1_2) эта кривая класса $C^{(2)}$ в n-мерной области (q) и вектор скорости $q' = q'(t)$ вдоль нее заменяются кривой $x = x(t)$ класса $C^{(1)}$ в $2n$-мерном пространстве (x), образованном $n + n$ компонентами двух n-векторов $p = (p_i)$, $q = (q_i)$. Другими словами, $x = (x_j)$ есть $2n$-вектор:

$$x = (x_i), \quad x_i = p_i, \quad x_{i+n} = q_i, \tag{5}$$

так что

$$H(p, q, t) = H(x, t).$$

§ **16.** Компоненты p_i n-вектора (1_1) обычно рассматриваются как «обобщенные импульсы», которые являются по отношению к данной функции $L(r, q, t)$ «канонически сопряженными» с компонентами $r_i = q_i'$ вектора «скорости» $r = q'$. Пространство (n-мерное) «обобщенных координат» q называется «позиционным пространством», а $2n$-мерное пространство (x), определенное посредством (5),— «фазовым пространством». Целое число n называется «степенью свободы». Наконец, L и H называются ассоциированными друг с другом функциями Лагранжа и Гамильтона соответственно.

Что касается представления лагранжевых производных с помощью функции Гамильтона, то из (1_1), (3_1) § 15 и из (1) § 9 видно, что

$$p' + H_q(p, q, t) = [L]_q, \tag{6}$$

тогда как в силу (1_2)

$$-q' + H_p(p, q, t) = 0. \tag{6_1}$$

Аналогичным образом (1_1), (2), (3) показывают, что формула (4) § 9 эквивалентна следующей:

$$H' - H_t = q' \cdot [L]_q.$$

§ **16a.** Вместо функции Лагранжа $L(q', q, t)$ с n степенями свободы рассмотрим функцию L^*, определяемую в соответствии с (5) формулой

$$L^*(x',x,t) = -H(x_1',\dots,x_{2n},t) + \sum_{i=1}^{m} x_i x_{i+n}'. \tag{7}$$

Таким образом, функция L^* имеет $2n$ степеней свободы, но вместе с тем содержит только n из $2n$ составляющих x_j' скорости, а $2n$ компонентов x_j вектора x в фазовом пространстве рассматриваются как компоненты вектора в $2n$-мерном позиционном пространстве.

Прибегая к определению лагранжевой производной для функции (7)

$$[L^*]_{x_j} = L^{*\prime}_{x_j'} - L^*_{x_j}, \qquad j = 1,\dots,2m,$$

получим, что

$$[L^*]_{x_i} = H_{x_i}(x,t) - x_{i+n}', \qquad [L^*]_{x_{i+n}} = H_{x_{i+n}}(x,t) + x_i',$$

$$i = 1,\dots,n. \tag{8}$$

Сравнивая формулы (8) и (5), видим, что n-векторные тождества (6), (6₁) могут быть записаны в симметричной форме

$$-q_i' + H_{p_i} = [L^*]_{p_i}, \qquad p_i' + H_{q_i} = [L^*]_{q_i}; \qquad i = 1,\dots,n. \tag{9}$$

Сравнение (7) и (2₁) показывает, что $L^* = L$ в силу (5).

§ 17. Из формул (6) § 10 и (1) § 15 следует, что если применить в позиционном пространстве преобразование (5) § 10, считая t переменным, то соответствующее точечное преобразование фазового пространства определится единственным образом. Такое распространение преобразований n-мерного пространства (q) на $2n$-мерное пространство (x) будет изучено в § 48.

Ниже будет рассмотрен более общий случай, а именно случай преобразований пространства (x), которые не обязательно вытекают непосредственно из преобразований пространства (q).

Если y обозначает $2n$-вектор, в который преобразовывается x, то эти преобразования имеют вид $y = y(x,t)$, где в соответствии с (5)

$$\left.\begin{aligned} &y = (y_j), \quad j = 1,\dots,2n, \\ &y_i = u_i, \quad y_{i+n} = v_i, \quad i = 1,\dots,n, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем $u = (u_i)$ и $v = (v_i)$ суть n-векторы, которые представляют новые импульсы и координаты соответственно.

Мы будем предполагать, что якобиан $y_x(x, t)$ для $2n$-вектор-функции $y(x, t)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ и не обращается в нуль в рассматриваемой $(2n+1)$-мерной области (x, t). Тогда отображения

$$y = y(x, t), \tag{11$_1$}$$

$$x = x(y, t) \tag{11$_2$}$$

двух фазовых пространств (x), (y) друг в друга принадлежат классу $C^{[1]}$ при каждом фиксированном t. В силу этих формул преобразования функция положения, определенная в пространстве (x, t), переходит в функцию положения в пространстве (y, t) и наоборот. Например, если $F = F(y, t)$ есть скалярная функция класса $C^{(1)}$, то частное дифференцирование дает в силу (11_1) или (11_2) тождество

$$F_x = \Gamma' F_y, \tag{12}$$

где $\Gamma = y_x$ $(\det \Gamma \neq 0)$. Предосторожность необходима лишь при преобразовании частной производной F_t по времени t *). Действительно, производная $F_t(y, t)$ при фиксированном y не совпадает в силу (11_1) с $F_t(y(x, t), t)$, где фиксировано x. Будем подразумевать (если не оговорено противное), что якобиева $2n$-матрица Γ, входящая в тождество (12), выражена с помощью (11_2) как функция y и t, а через Γ_t обозначим матрицу, получаемую при частном дифференцировании $4n^2$ элементов матрицы $\Gamma(y, t)$ по t при фиксированном y. Кроме того, через y_t будем обозначать $2n$-вектор y_t (y, t), получаемый после частного дифференцирования $y(x, t)$ по t при фиксированном x с последующей заменой x через y и t с помощью (11_2). Таким образом,

$$y_t = y_t(y, t), \tag{13$_1$}$$

$$y_x = \Gamma = \Gamma\,(y, t) \qquad (\det \Gamma \neq 0). \tag{13$_2$}$$

Пусть y_t также принадлежит классу $C^{(1)}$. Тогда с помощью непосредственного дифференцирования (см. § 2, § 1) найдем, что в силу формул преобразования (11_1)—(11_2) класса $C^{[1]}$ имеют место соотношения:

$$(y_x)_t = (y_t)_y(y_x), \tag{14$_1$}$$

$$y_x = (x_y)^{-1}, \tag{14$_2$}$$

$$y' = (y_x)x' + y_t, \tag{14$_3$}$$

---

*) Ср. с «лагранжевой» и «эйлеровой» точками зрения в кинематике непрерывных сред.

причем (14_1) и (14_2) при каждом фиксированном t суть тождества в фазовом пространстве, а (14_2) есть тождество по t вдоль любой кривой $y = y(t)$ или $x = x(t)$ класса $C^{(1)}$ в фазовом пространстве. Используя (13_1), (13_2), можно переписать (14_1), (14_2), (14_3) в виде

$$(y_t)_y = \Gamma_t\Gamma^{-1}, \tag{15_1}$$

$$x_y = \Gamma^{-1}, \tag{15_2}$$

$$y' = \Gamma x' + y_t. \tag{15_3}$$

§ 18. Нет необходимости говорить, что все эти тождества справедливы также и тогда, когда x или y суть векторы не в $2n$-мерном фазовом пространстве, а в пространстве с любым числом измерений m. С этой точки зрения формулы (11_1) и (15_3) не отличаются от формул (5) и (6) § 10, а формулы (12), (15_1), (15_2) могут быть использованы для проверки тождества (8) § 10.

Если $F^1, \ldots, F^l$ суть скалярные функции класса $C^{(1)}$, зависящие от m-вектора x и, возможно, от t, то через

$$(F_x^1, \ldots, F_x^l) \tag{15a}$$

будем обозначать «якобиеву матрицу», в которой столбцы являются градиентами функции F по отношению к x, так что эта матрица имеет m строк и l столбцов.

Будем называть функции $F^1, \ldots, F^l$ независимыми в рассматриваемой области, если матрица (15a) имеет ранг l в этой области *), т. е. в каждой точке области существует необращающийся в нуль минор с l столбцами и l строками (подразумевается, что $l \leqslant m$).

Будем называть функцию консервативной, если она не зависит явно от времени. Например, преобразование (11_1) — (11_2) назовем консервативным, если $y = y(x)$ и, следовательно, $x = x(y)$. Консервативные функции x отображаются с помощью консервативных преобразований в функции y, являющиеся также консервативными. Из (3_2), § 15 видно, что если функция Лагранжа L является консервативной ($L = L(q', q)$), то такой же будет функция Гамильтона $H = H(p, q)$, и наоборот.

§ 19. Положим $m = 2n$ и обозначим через $(e_k{}^i)$ и (0) единичную и нулевую n-матрицы соответственно.

---

*) В соответствии с общепринятой теоремой это определение независимости совпадает с классическим понятием, если пренебречь нигде не плотными множествами в пространстве x.

Пусть I обозначает постоянную $2m$-матрицу *)

$$I = \begin{pmatrix} (0) & (e_k^i) \\ -(e_k^i) & (0) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

так что $I^{\backslash} = -I$, $I^{-1} = -I$, $\det \mathrm{I} = 1$. Тогда в соответствии с (16), (5) и (6) $2n$-векторное соотношение

$$x' + \mathrm{I}H_x \equiv \begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} + \mathrm{I}\begin{pmatrix} H_p \\ H_q \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p' + H_q \\ q' - H_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [L]_q \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $p, q, H_q, H_p, [L]_q$ и 0 суть n-векторы, представляет собой тождество по t.

Ниже мы будем пользоваться при заданной функции Гамильтона $H = H(x, t)$ дифференциальным оператором ∇, определенным формулой

$$\nabla F = F_t + H_x \cdot \mathrm{I}F_x, \tag{18}$$

где $F = F(x, t)$ — скалярная функция класса $C^{(1)}$, так что ∇F представляет собой непрерывную скалярную функцию в $(2n+1)$-мерной области (x, t).

§ **20.** Если две скалярные функции F, G от $2n$-вектора $x = (x_j)$ принадлежат классу $C^{(1)}$, то можно определить непрерывную скалярную функцию $(F; G)$ от x, полагая

$$(F;\, G) = F_x \cdot \mathrm{I}G_x, \tag{19}$$

так что (в силу (16))

$$(F;\, G) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_i x_{i+n})} = -(G; F). \tag{19$_1$}$$

Таким образом, если F^1, F^2, F^3 принадлежат классу $C^{(1)}$, то

$$(F^1F^2;\, F^3) = (F^1;\, F^3)F^2 + (F^2;\, F^3)F^1, \tag{20$_1$}$$

$$(F^1 + F^2;\, F^3) = (F^1;\, F^3) + (F^2;\, F^3). \tag{20$_2$}$$

Пусть F^1, F^2, F^3 принадлежат классу $C^{(2)}$. Тогда, применяя (19) к функциям $F = (F^1;\, F^2)$; $G = F^3$, получим, что $((F^1;\, F^2);\, F^3)$ имеет вид

$$((F^1;\, F^2);\, F^3) = \{F^2,\, F^3;\, F^1\} - \{F^1,\, F^3;\, F^2\}, \tag{21}$$

---

*) Эта кососимметрическая матрица, играющая в дальнейшем фундаментальную роль, соответствует, как известно, нормальному виду произвольной неособенной кососимметрической билинейной формы. Другими словами, для любой неособенной кососимметрической матрицы S существует неособенная матрица T такая, что $T^{\backslash}ST = \mathrm{I}$.

причем через

$$\{G^1, G^2; G^3\} = \{G^2, G^1; G^3\}$$

обозначается некоторая трилинейная форма, составленная из частных производных G^1, G^2, G^3 и являющаяся симметричной по отношению к G^1, G^2. Даже без использования явного выражения для $\{G^1, G^2, G^3\}$ мы получим из (21)

$$((F^1; F^2); F^3) + ((F^2; F^3); F^1) + ((F^3; F^1); F^2) = 0. \qquad (22)$$

Так как $(F; \mathrm{const}) = 0$ в силу (19), то из (20_1), (20_2) с очевидностью вытекает, что если $F = F(F^1, \ldots, F^l)$ есть скалярная функция некоторого числа l независимых скалярных переменных F^k и если каждое из F^k и G суть заданные функции класса $C^{(1)}$ от $x = (x_i)$, то соотношение

$$(F(F^1, \ldots, F^m); G) = \sum_{k=1}^{l} (F^k; G) F_{F^k}(F^1, \ldots, F^m), \qquad (23)$$

где через F_{F^k} обозначена частная производная $F = F(F^1, \ldots, F^m)$ по F^k, представляет собой тождество по x при любой полиномиальной функции F, а следовательно, и для любой F класса $C^{(1)}$ в соответствующей области $(F^1, \ldots, F^m)$.

§ 21. Если заданная функция Гамильтона $H(x, t)$, а также три скалярные функции $F(x, t)$, $F^1(x, t)$, $F^2(x, t)$ и частные производные $F_t{}^1, F_t{}^2$ принадлежат классу $C^{(1)}$ в $(2n + 1)$-мерной области (x, t), то формулы (18) и (19) показывают, что соотношения

$$\nabla F = F_t + (H; F), \qquad (24_1)$$

$$(F^1; F^2)_t = (F_t^1; F^2) + (F^1; F_t^2) \qquad (24_2)$$

суть тождества в этой области. Отсюда следует, что если $F(x, t)$, $G(x, t)$ и заданная функция Гамильтона $H(x, t)$ принадлежат классу $C^{(2)}$, то

$$\nabla (F; G) = (\nabla F; G) + (F; \nabla G). \qquad (25)$$

Действительно, применяя (22) к функциям

$$F^1 = F, \qquad F^2 = G, \qquad F^3 = H$$

и выражая $(H; F)$ и $(G; H) = -(H; G)$ с помощью (24_1), легко получим, что в силу (20_2) и (24_2)

$$(H; (F; G)) = (\nabla F - F_t; G) - (\nabla G - G_t; F) \equiv$$
$$\equiv (\nabla F; G) + (F; \nabla G) - (F; G)_t.$$

Сравнивая это тождество с (24_1), придем к (25).

§ 22. Вместо билинейной дифференциальной операции (19), применяемой к паре скалярных функций F, G вектора $x = (x_j)$, можно рассмотреть «полярную» дифференциальную операцию, которая применяется к $2n$-вектору $y = (y_j)$, зависящему от двух скалярных переменных f, g. Если функция $y = y(f, g)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ в рассматриваемой двумерной области (f, g), то упомянутая билинейная операция связывает с $2n$-вектор-функцией $y = y\ (f, g)$ непрерывную скалярную функцию

$$[f; g] = y_f \cdot \mathrm{I} y_g, \tag{26}$$

так что (в силу (16))

$$[f;\ q] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i,\ y_{n+i})}{\partial(f,\ g)} = -[g;\ f].$$

Легко можно проверить, что из соотношения, аналогичного (21) и соответствующего (22), вытекает тождество

$$[f^1;\ f^2]_{f^3} + [f^2;\ f^3]_{f^1} + [f^3;\ f^1]_{f^2} = 0 \tag{27}$$

для любой $2n$-вектор-функции $x = x(f^1,\ f^2,\ f^3)$ класса $C^{(2)}$ трех скалярных переменных f^1, f^2, f^3 (нижние индексы f в (27) обозначают частное дифференцирование).

§ 23. Если функция $F = F(x)$ такова, что $(F; G) \equiv 0$ в рассматриваемой области (x), то говорят, что F находится в инволюции с $G = G(x)$. Тогда в силу (19) и функция G находится в инволюции с F.

В силу (23) любая функция $F = F(G)$ находится в инволюции с G. Если F^1, F^2, F^3 принадлежат классу $C^{(2)}$ и если F^1 находится в инволюции с F^2 и F^3, то в силу (22) F^1 находится также в инволюции с $(F^2; F^3)$.

Если функции $F^1, \ldots, F^l$ класса $C^{(1)}$

(i) находятся в инволюции друг относительно друга и

(ii) независимы в рассматриваемой $2n$-мерной области x,

то говорят, что эти функции образуют инволюционную систему. Если из условия (ii) и из § 18 (где $m = 2n$) вытекает лишь неравенство $l \leqslant 2n$, то из обоих условий (i) и (ii) следует, что $l \leqslant n$. Действительно, из (i) и определения (19) вытекает тождественное обращение в нуль матрицы $(F_x{}^i \cdot \mathrm{I} F_x{}^k)$ с l строками и l столбцами, где $2n$-матрица I является в силу (16) кососимметрической и неособенной. Вместе с тем из условия (ii) вытекает, что матрица (15а) с $2n$ строками и l столбцами должна иметь ранг l.

На основании же обычных свойств кососимметрических матриц (или же непосредственно используя выражение для I) получим, что если $l > n$, то (ii) противоречит (i).

Если (i) заменить более общим условием:

(ia) каждая из функций $(F^i;\ F^k)$ $(i, k = 1, \ldots, l)$ от x есть функция $F = F(F^1, \ldots, F^l)$ заданных l функций $F^1, \ldots, F^l$, то говорят, что $F^1, \ldots, F^l$ образуют в рассматриваемой области x *функциональную группу*. В случае такой функциональной группы нельзя заменить неравенство $l \leqslant 2n$ неравенством $l \leqslant n$.

Если t входит явно в F, то предполагается, что три определения этого параграфа справедливы при каждом фиксированном t и любых x в области (x, t).

§ 24. Определения § 23 могут быть проиллюстрированы на классическом примере, встречающемся в задаче многих тел. С этой целью рассмотрим $6n$ компонент x_j вектора x, обозначая их через

$$\xi_h,\ \eta_h,\ \zeta_h,\ \Xi_h,\ \mathrm{H}_h,\ \mathrm{Z}_h \qquad (h = 1, \ldots, n). \tag{28}$$

Выбрав n скалярных констант m_h и обозначая $\sum = \sum\limits_{h=1}^{n}$, определим $l = 9$ функций $F^1, \ldots, F^9$ по формулам

$$F_{\mathrm{I}}^{\xi} = \sum H_h\zeta_h - \sum Z\eta_h, \qquad F_{\mathrm{II}}^{\xi} = \sum \Xi_h, \qquad F_{\mathrm{III}}^{\xi} = \sum m_h\xi_h - t \sum \Xi_h, \tag{29_1}$$

$$F^1 = F_{\mathrm{I}}^{\xi}, \quad F^2 = F_{\mathrm{I}}^{\eta}, \ldots, \quad F^5 = F_{\mathrm{II}}^{\eta}, \ldots, \quad F^9 = F_{\mathrm{III}}^{\zeta}, \tag{29_2}$$

причем $F_\nu{}^\eta$, $F_\nu{}^\xi$ для $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ получаются из (29_1) циклической перестановкой ξ, η, ζ и Ξ, H, Z. Предполагается, что все $m_h > 0$.

Легко удостовериться в том, что если исключить из $6n$-мерного фазового пространства конечное число аналитических гиперповерхностей, то не только семейство (29_2) девяти функций, но и любое подсемейство этого семейства состоит из функций, являющихся независимыми в смысле определения в § 18. Применяя далее формулу (19) к паре функций $F = F^r$, $G = F^s$, определенных согласно (29_2), приходим к выводу, что матрица $((F^s;\ F^r))$ 9×9 скалярных функций $(F^s;\ F^r)$ равна в силу (29_1)

$$((F^s;\ F^r)) = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{I}} & \Phi_{\mathrm{II}} & \Phi_{\mathrm{III}} \\ \Phi_{\mathrm{II}} & 0 & M \\ \Phi_{\mathrm{III}} & -M & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\Phi_\nu = \begin{pmatrix} 0 & F_\nu{}^\zeta & -F_\nu{}^\eta \\ -F^\zeta & 0 & F_\nu{}^\xi \\ F_\nu{}^\eta & -F_\nu{}^\xi & 0 \end{pmatrix}$$

и 0 обозначает трехстрочечную нулевую матрицу, а M — произведение положительной скалярной постоянной Σm_h на трехстрочечную единичную матрицу. Сравнивая (30) с формулами в § 23 и пренебрегая упомянутыми выше гиперповерхностями, можно заключить, что девять функций (29_2) образуют функциональную группу, не являющуюся, однако, инволюционной системой. Этот же вывод справедлив для трех функций F_{I}, в то время как три функции F_{II}, а также три функции F_{III} образуют инволюционные системы. Кроме того, любая из функций F_{I} находится в инволюции с функцией F_{II} или функцией F_{III} тогда и только тогда, когда индексы ξ, η, ζ всех этих функций берутся одни и те же, а любая из функций F_{II} находится в инволюции с F_{III} тогда и только тогда, когда индексы ξ, η, ζ этих функций различны.

§ 25. Обращаясь к соответствующей паре преобразований (11_1) — (11_2) фазового пространства, можно ввести две кососимметрические $2n$-матрицы, являющиеся функциями положения в $(2n+1)$-мерной области $(y,\,t)$ и определяемые следующим образом: первая из этих матриц $((y_i;\,y_k))$ образована $(2n)^2$ скалярными функциями $(y_i;\,y_k)$, которые получим, полагая функции F и G в (19) равными двум произвольным компонентам $y_i = y_i(x,t)$, $y_k = y_k(x,t)$ $2n$-вектора (11_1) и выражая затем x, как и в § 17, с помощью (11_2) в виде функции от (y,t); вторая же матрица $([y_i;\,y_k])$ образована $(2n)^2$ скалярными функциями $[y_i;\,y_k]$, которые получим, полагая функции f и g в (26) равными двум произвольным компонентам y_i, y_k $2n$-вектора y. Таким образом, если индексы i и k относятся к строке и столбцу соответственно, то из определений (19), (26) и (16) видно, что две указанные $2n$-матрицы могут быть записаны как произведения

$$((y_i;\,y_k)) = y_x \mathrm{I} y^{\backprime}{}_x, \qquad ([y_i;\,y_k]) = x^{\backprime} \mathrm{I} x_y,$$

причем $\mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I} = \mathrm{I}^{-1}$. На основании ($13_2$) и ($15_2$) получим далее, что

$$((y_i;y_k)) = \Gamma\mathrm{I}\Gamma^{\backprime}, \qquad ([y_i;y_k]) = (\Gamma\mathrm{I}\Gamma^{\backprime})^{\backprime-1}, \tag{31}$$

так что обе матрицы (31) являются транспонированными обратными матрицами по отношению друг к другу и они могут быть выражены через якобиеву матрицу $\Gamma = y_x$.

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 26. Используя функцию Гамильтона $H = H(x,t)$ класса $C^{(1)}$ и преобразование (11_1)—(11_2), удовлетворяющее C-условиям § 17, и принимая во внимание (12), (13_1), (13_2), определим в $(2n+1)$-мерной области (y,t) $2n$-вектор-функцию $w = w^H$, полагая

$$w^H(y,t) \equiv w^H = \mathrm{I}y_t + \mathrm{I}^{-1}\Gamma\mathrm{I}\Gamma^{\backprime}H_y. \tag{1}$$

Если преобразование (11_1)—(11_2) фазового пространства (или, точнее говоря, вектор $y_t(y, t)$ и матричная функция $\Gamma(y, t)$, соответствующие этому преобразованию при произвольной функции H) обладает тем свойством, что для каждой функции $H = H(x, t)$ существует скалярная функция $K \equiv K^H = K^H(y, t)$, с помощью которой $2n$-вектор-функция (1) представима как градиент $K_y(y, t)$ по отношению к $2n$-вектору y, то (11_1)—(11_2) назовем каноническим преобразованием. Очевидно, что при заданной H функция $K = K^H$ или не существует, или же определяется с точностью до произвольной аддитивной функции одного лишь t. Поэтому две функции $K = K^H$ не будут рассматриваться как различные функции, если их разность не зависит от y.

Имея в виду выделенное разрядкой в приведенном определении слово «каждой», заметим, что функция K будет существовать для некоторой H и тогда, когда преобразование не является каноническим (например, таким является случай $H = \text{const}$ при любом преобразовании). Вопрос о том, каковы должны быть функции H, для которых K существует в случае заданного неканонического преобразования, мы рассматривать не будем (ответ на этот вопрос связан с теорией функциональных групп Ли).

§ 26а. Мы придем к $2n$-вектор-функции $w^H(y, t)$, а затем и к понятию канонического преобразования, если подвергнем операцию (17) произвольному преобразованию (11_1)—(11_2) с учетом того, что $2n$-вектор $x' + \mathrm{I}H_x(x, t)$ не является функцией положения в $(2n + 1)$-мерной области (x, t), поскольку она определена лишь по отношению к произвольной заданной в этой области кривой $(x(t), t)$ класса $C^{(1)}$.

Во-первых, из (15_3) и (12) видно, что (11_1) преобразует функцию $x' + \mathrm{I}H_x$ в сумму функций $\Gamma^{-1}y' - \Gamma^{-1}y_t$ и $\mathrm{I}\Gamma^{\backprime}H_y$, откуда, поскольку в силу (16) $\mathrm{I} = \mathrm{I}^{-1}$, имеем в соответствии с определением (1)

$$x' + \mathrm{I}H_x = \Gamma^{-1}\,\{y' + \mathrm{I}\mathrm{I}y_t + \mathrm{I}\mathrm{I}^{-1}\Gamma\mathrm{I}\Gamma^{\backprime}H_y\} \equiv \Gamma^{-1}\,\{y' + \mathrm{I}w^H\}. \quad (2)$$

Это означает, что неособенная якобиева матрица (13_2), независимо от того, является или не является преобразование (11_1) каноническим, преобразовывает вектор-функцию $x' + \mathrm{I}H_x$ переменного t в вектор-функцию $y' + \mathrm{I}w^H$ переменного t вдоль любой кривой класса $C^{(1)}$. Отсюда следует, что преобразование (11_1) является каноническим в том и только в том случае, если вектор $x' + \mathrm{I}H_x$ преобразовывается при произвольной функции Гамильтона $H(x, t)$ и вдоль произвольной кривойв вектор того же самого вида, т. е. в вектор $y' + \mathrm{I}K_y$, где новая функция Гамильтона $K \equiv K(y,t) = K^H$ зависит от H, но не зависит от выбора кривой.

§ 27. Далее покажем, что преобразование $y = y(x,t)$, $x = x(y,t)$, рассмотренное в § 17, является каноническим тогда и только тогда, когда существует скаляр μ, постоянный в рассматриваемой $(2n+1)$-мерной области и такой, что матричное соотношение

$$\Gamma \mathrm{I} \Gamma' = \mu \mathrm{I}, \tag{3}$$

где

$$\Gamma \equiv \Gamma(y,t) = y_x \qquad (\mathrm{I}^{-1} = \mathrm{I}' = -\mathrm{I}, \quad \det \mathrm{I} = +1)$$

удовлетворяется в этой области тождественно. В соответствии с (3_1) § 25 можно выразить это условие через одну из двух матриц $((y_i;\, y_k))$, $([y_i;\, y_k])$.

Применение к (3) теоремы умножения определителей показывает, что абсолютная величина постоянной μ определяется единственным образом якобианом $\det \Gamma\,(\neq 0)$, так как

$$(\det \Gamma)^2 = \mu^{2n}, \tag{4}$$

откуда

$$0 \neq |\det \Gamma(y,t)| = |\mu|^n = \mathrm{const}. \tag{4_1}$$

Функция Гамильтона $K = K(y,t)$, к которой приходим от функции Гамильтона $H(x,t)$ после канонического преобразования, выразится формулой

$$K = \mu H + R, \tag{5}$$

причем подразумевается, что в $H(x,t)$ переменная x выражена с помощью (11_2) через (y,t), а $R = R(y,t)$ является скалярной функцией, для которой $R_t(y,t)$ принадлежит классу $C^{(1)}$.

В заключение будет показано, что R и $2n$-вектор (13_1) § 17 связаны друг с другом тождеством

$$\mathrm{I} y_t = R_y, \tag{6}$$

где $y_t = y_t(y,t)$, $R = R(y,t)$.

Отсюда вытекает, что не только μ, но и R зависит только от канонического преобразования $y = y(x,t)$, но не от выбора H. В самом деле, функция $R = R(y,t)$ может быть получена на основании (6) при помощи квадратур в области y при фиксированном t, так что остается неопределенной лишь аддитивная функция t. Это согласуется в силу (5) с § 26. Поэтому две функции R будут рассматриваться тождественными, если их разность не зависит от y.

Имея в виду (3) и (5), назовем скаляры μ и $R(y, t)$, соответствующие каноническому преобразованию $y = y(x, t)$, множителем и остаточной функцией этого преобразования соответственно.

Доказательство утверждений этого параграфа будет приведено в §§ 28—30.

§ 28. Прежде всего легко видеть, что лемма, сформулированная в конце § 4, применима к (1), если положить a, A, f_x, m равными y_t, $\mathrm{I}^{-1}\Gamma\mathrm{I}\Gamma'$, H_y, $2n$ соответственно и сохранить t фиксированным. Из этой леммы тогда следует, что при преобразовании рассмотренного выше вида (§ 17) функция (1) § 26 будет представлять градиент $K_y = K_y(y, t)$ для соответствующей $K = K^n$ при любой H тогда и только тогда, когда $\mathrm{I}y_t$ равен градиенту R_y соответствующей функции $R(y, t)$, а $\mathrm{I}^{-1}\Gamma\mathrm{I}\Gamma'$ есть произведение единичной $2n$-матрицы и скаляра μ, не зависящего от y и зависящего только от параметра t. Другими словами, преобразование является каноническим тогда и только тогда, когда существуют соответствующие функции $R = R(y, t)$ и $\mu = \mu(t)$, удовлетворяющие формулам (6) и (3).

Наконец, подстановка (6) и (3) в (1) приводит к функции

$$w^H = R_y + \mathrm{I}^{-1}\mu\mathrm{I}H_y,$$

где $w^H = K_y$, $\mu_y \equiv 0$. Отсюда следует, что

$$K_y = (R + \mu H)_y,$$

и тогда мы придем к (5), пренебрегая произвольной аддитивной функцией одного лишь t.

§ 29. Критерий, доказанный в § 28, является вариантом критерия, приведенного в § 27, так как каждый из этих критериев является и необходимым и достаточным для того, чтобы преобразование было каноническим. Отличие состоит в том, что в § 28 допускается, а в § 27 не допускается зависимость μ от t.

Однако следует иметь в виду, что мы не можем найти для произвольно заданной пары R, μ преобразование $x = x(y, t)$, удовлетворяющее условиям (6), (3). Действительно,

$$y_t = y_t(y, t), \quad \Gamma = \Gamma(y, t) = y_x,$$

так что условия (6), (3) представляют собой очень сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных для $2n$-вектор-функции $x = x(y, t)$.

Кроме того, в § 30 мы увидим, что условие $\mu = \mathrm{const}$ является условием интегрируемости этих дифференциальных уравнений в частных производных (так, что изложенное в § 27 следует из результатов § 28). Так как для выбранной соответствующим образом $\mu = \mu(t)$ тождество (3) справедливо в силу результатов § 28 и так как из (3) следует (4), то достаточно доказать, что $(\det \Gamma)^2$ не может зависеть от t. В свою очередь, поскольку $\det \mathrm{I} = +1$, то

$$\det (\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma) = (\det \Gamma)^2,$$

и достаточно доказать, что матрица $\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma$ не может зависеть от t.

§ 30. В заключение покажем, что для произвольного преобразования $x = x(y, t)$, которое не обязательно удовлетворяет условию (3) при $\mu = \mu(t)$ и даже при $\mu = \mu(y, t)$, функция $R = R(y, t)$, удовлетворяющая условию (6), существует или не существует в зависимости от того, зависит или не зависит от t матрица $\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma$, где $\Gamma \equiv \Gamma(y, t) = y_x$.

Прежде всего в силу § 17 легко проверить, что если I есть матрица (16) § 19, то из (15_I) § 17 имеем

$$(\mathrm{I}y_t)_y = \mathrm{I}(y_t)_y, \tag{7}$$

так что

$$(\mathrm{I}y_t)_y = \mathrm{I}\Gamma_t\Gamma^{-1}.$$

Следовательно, матрица $(\mathrm{I}y_t)_y$ является симметрической тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{I}\Gamma_t\Gamma^{-1} = (\mathrm{I}\Gamma_t\Gamma^{-1})^{\backprime} \tag{8}$$

или

$$\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma_t + \Gamma_t^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma = 0.$$

Так как $\mathrm{I} = \mathrm{const}$, то последнее условие перепишется в виде $(\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma)_t = 0$. Отсюда следует, что матрица $(\mathrm{I}y_t)_y$ является симметрической тогда и только тогда, когда $2n$-матричная функция $\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma$ не зависит от t. Вместе с тем эта матрица является в силу сказанного в начале § 3 симметрической тогда и только тогда, когда вектор $\mathrm{I}y_t$ представляет собой градиент, т. е. тогда и только тогда, когда существует $R = R(y, t)$ такая, что равенство (6) удовлетворяется тождественно по y при любом фиксированном t. Доказательство можно считать на этом законченным.

Возвращаясь к § 29, можно сделать вывод о том, что утверждения, высказанные в § 27, доказаны теперь полностью.

§ 31. Из определения канонического преобразования (§ 26) видно, что совокупность всех канонических преобразований, определенных в одной и той же $(2n + 1)$-мерной области, образует группу. Правило составления якобиевых матриц Γ, остаточных функций R и множителей μ таково, что если Γ_1, R_1, μ_1 и Γ_2, R_2, μ_2

принадлежат двум каноническим преобразованиям, а Γ, R, μ — к каноническому преобразованию, к которому приходим в результате второго из этих преобразований после первого, то

$$\Gamma = \Gamma_2\Gamma_1, \tag{9$_1$}$$

$$\mu = \mu_1\mu_2, \tag{9$_2$}$$

$$R = \mu_2 R_1 + R_2. \tag{9$_3$}$$

Эти формулы легко вывести с помощью (3) и (6). Из (3) и (6) также видно, что если E обозначает единичную $2n$-матрицу, то $\Gamma \equiv E$, $\mu = 1$, $R \equiv 0$ соответствуют тождественному преобразованию $y = x$. Поэтому из (9_1), (9_2), (9_3) вытекает, что если Γ, R, μ принадлежат каноническому преобразованию, то

$$\Gamma^{-1}, \quad -\mu^{-1}R, \ \mu^{-1} \tag{10}$$

соответствуют обратному преобразованию.

§ 31a. Напомним, что преобразование является каноническим тогда и только тогда, когда

$$\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma = \mu\mathrm{I}, \tag{11}$$

где

$$\Gamma \equiv \Gamma(y, t) = y_x, \qquad \mu = \mathrm{const} \neq 0,$$

т. е. что (3) эквивалентно (11). Действительно, если

$$\Gamma\mathrm{I}\Gamma' = \mu\mathrm{I} \neq 0,$$

то, поскольку $\mathrm{I}^{-1} = -\mathrm{I}$, имеем

$$\Gamma^{\backprime} = \mu\mathrm{I}^{-1}\Gamma^{-1}\mathrm{I},$$

так что

$$\Gamma^{\backprime} = \mu\mathrm{I}\Gamma^{\backprime -1}\mathrm{I}^{-1}, \qquad \Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\Gamma = \mu\mathrm{I}.$$

§ 32. В §§ 62—63 будет доказано, что из (3) вытекает условие

$$\det\Gamma(y, t) = \mu^n \qquad (\mu = \mathrm{const} \neq 0), \tag{12}$$

которое в случае нечетного числа степеней свободы является более сильным, чем (4).

§ 33. Пусть x^ν и y^ν, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}$ суть четыре $2n_\nu$-вектора, и пусть $x^{\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$ и $y^{\mathrm{I}\,\mathrm{II}}$ обозначают $2(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}})$-векторы, полученные в результате объединения компонентов x^{I}, x^{II} и y^{I}, y^{II}. Если оба компонента преобразований $x^\nu = x^\nu(y^\nu, t)$ являются каноническими, причем μ^ν и $R^\nu = R^\nu(y^\nu, t)$ суть множителя и остаточные функции соответственно, и если $\mu^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{II}}$, то из § 27 видно, что преобразование $x^{\mathrm{I\,II}} = x^{\mathrm{I\,II}}(y^{\mathrm{I\,II}}, t)$ является также каноническим, для которого множитель и остаточная функция суть $\mu^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{II}}$ и $R^{\mathrm{I}} + R^{\mathrm{II}}$.

§ **34.** Каноническое преобразование $y = y(x, t)$, $x = x(y, t)$ называется полностью каноническим, если любая функция Гамильтона $H(x, t)$ преобразуется в функцию Гамильтона $K(y, t)$, совпадающую при $y = y(x, t)$ с $H(x, t)$, так что при любой H

$$K(y, t) = H(x(y, t), t), \tag{13}$$

т. е. (см. (5), (12))

$$\mu = 1, \qquad R(y, t) = 0 \qquad (\det \Gamma = 1).$$

Очевидно, что эти преобразования образуют подгруппу той группы, о которой говорилось в § 31.

§ **35.** Другую подгруппу получим, рассматривая канонические преобразования $x = x(y, t)$, являющиеся консервативными (см. конец § 18), так что $x = x(y)$. Из (6) видно, что и для этой подгруппы преобразований $R(y, t) = 0$, так что (5) сводится к $K = \mu H$. Из (13) поэтому следует, что консервативное каноническое преобразование является полностью каноническим тогда и только тогда, когда его множитель равен $+1$.

§ **35а.** Пусть: $F(x)$, $G(x)$ суть две скалярные функции x класса $C^{(1)}$, и пусть определение (19) § 20 записано в виде

$$(F; G)^x = F_x \mathrm{I} G_x,$$

причем верхний индекс x указывает на зависимость функции $(F; G)$ от системы координат x.

Если $y = y(x)$ — другая система координат, то в силу (12) § 17 получим, что

$$(F; G)^x = (\Gamma F_y) \cdot (\mathrm{I} \Gamma G_y),$$

так что в соответствии с § 1

$$(F; G)^x = F_y \cdot \Gamma^{\backprime} \mathrm{I} \Gamma G_y.$$

Следовательно, если только условие (11) выполняется, то независимо от конкретного вида функций F и G

$$(F; G)^x = \mu (F; G)^y.$$

В соответствии с этим консервативные канонические преобразования $y = y(x)$ характеризуются тем свойством, что скалярная функция $(F;\ G)$ остается относительно инвариантной*) при произвольных F и G, причем слово «относительно» указывает на появление произвольного постоянного множителя μ (так что $\mu = 1$ в случае абсолютной инвариантности).

§ 36. Если преобразование $x = x(y, t)$ является каноническим, а t_0 — некоторое фиксированное значение t, то консервативное преобразование $x = x(y, t_0)$ является также каноническим. Это видно из (3), если положить $\mu = \mathrm{const}$. Если же известно только, что преобразование $x = x(y, t)$ оказывается каноническим при любом фиксированном $t = t_0$, то оно может и не быть каноническим при переменном t, так как тогда ничто не гарантирует независимость μ от t, т. е. выполнения условий интегрируемости (8) системы (6). Из изложенного в §§ 28, 30 следует, что преобразование $x = x(y, t)$ лишь тогда удовлетворяет условию (3) при любых y и любом t и является, следовательно, каноническим, если оно удовлетворяет

(i) условию (3) при любом y и фиксированном $t = t_0$ и

(ii) условию (6) при любых y и t.

§ 37. Рассмотрим, наконец, подгруппу тех канонических преобразований, которые являются линейными и однородными относительно $2n$ координат фазового пространства, т. е. для которых $y = \Gamma x$, причем $\Gamma = \Gamma(t)$ — заданная в некотором t-интервале неособенная $2n$-матрица. Для этой подгруппы соотношения (3) и (6) сводятся к следующим:

$$\Gamma \mathrm{I} \Gamma^{\backprime} = \mu \mathrm{I}, \qquad \Gamma = \Gamma(t), \qquad \mu = \mathrm{const} \neq 0, \tag{14_1}$$

$$R = \frac{1}{2} y \mathrm{I} \Gamma' \Gamma^{-1} y. \tag{14_2}$$

Действительно, якобиева матрица

$$y_x = \Gamma \equiv \Gamma(y, t),$$

составленная для $y = \Gamma(t)x$, равна $\Gamma(t)$. Следовательно,

$$\Gamma_t = \frac{d\Gamma}{dt} \equiv \Gamma'$$

и

$$y_t = \Gamma' x,$$

где $x = \Gamma^{-1} y$. Остаточная функция $R = R(y, t)$ представляет собой в силу (6) квадратичную форму относительно $2n$ компонентов y_j вектора y (матрица формы (14_2) является функцией одного

---

*) Как следствие, инволюционная пара функций (§ 23) является канонически инвариантной.

лишь t, и если условие (14_1) для канонического преобразования $y = \Gamma(t)x$ удовлетворено, то эта матрица будет в силу (8) симметрической).

§ 38. Пусть, например, $2n$-матрица $\Gamma(t)$ имеет вид

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} P & (0) \\ (0) & P \end{pmatrix}, \qquad (15_1)$$

где $P = P(t)$ — ортогональная n-матрица, так что $P^{\backprime} = P^{-1}$ и $\Gamma I \Gamma^{\backprime} = I$. Условие (14_1) будет удовлетворено при $\mu = 1$, а условие (14_2) примет вид

$$2R(y, t) = u \cdot P'P^{\backprime} v - vP'P^{\backprime} u \qquad (P = P^{\backprime -1}), \qquad (15_2)$$

если через $u = (u_i)$, $v = (v_i)$ обозначить n-векторы, определенные в соответствии с (10) § 17.

Например, если n — четное и $P(t)$ есть n-матрица вида (состоящая из $n/2$ строк и столбцов)

$$P(t) = \begin{pmatrix} \Phi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \Phi \end{pmatrix},$$

где Φ есть ортогональная 2-матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix},$$

то, полагая в (15_2)

$$u_{2k-1} = \Xi_k, \qquad u_{2k} = \mathrm{H}_k, \qquad v_{2k-1} = \xi_k, \qquad v_{2k} = \eta_k,$$

получим

$$R(y, t) = \varphi'(t) \sum_{k=1}^{n/2} (\xi_k H_k - \eta_k \Xi_k). \qquad (16)$$

Если $\Gamma(t)$ есть 2-матрица, так что $n = 1$ и

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \qquad (17_1)$$

то условие $\det \Gamma(t) = \mu = \mathrm{const} \neq 0$ эквивалентно (14_1), а формула (14_2) при условии, что

$$y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

сводится к следующей:

$$2\mu R = D_{cd}u^2 + (D_{bc} - D_{ad})uv + D_{ab}v^2, \tag{17_2}$$

где

$$D_{fg} = f'g - g'f.$$

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПФАФФИАНЫ

§ 39. Если произвольное преобразование $y = y(x, t)$, $x = x(y, t)$ пары $2n$-векторов $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ в фазовом пространстве выражается с помощью четырех векторов

$$p = (p_i), \quad q = (q_i), \quad u = (u_i), \quad v = (v_i),$$

представляющих импульсы p_i, u_i и координаты q_i, v_i, то можно написать следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(p, q; t), \\ v &= v(p, q; t), \end{aligned}\right\} \tag{1_1}$$

$$\left.\begin{aligned} p &= p(u, v; t), \\ q &= q(u, v; t), \end{aligned}\right\} \tag{1_2}$$

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\Gamma(u, v; t) = y_x = \begin{pmatrix} u_p & u_q \\ v_p & v_q \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$I = \begin{pmatrix} (0) & (e_k^i) \\ -(e_k^i) & (0) \end{pmatrix} = -\mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I}^{-1}. \tag{4}$$

Пусть преобразование фазового пространства (1_1) принадлежит классу $C^{(1)}$ и является таким, что обе n-вектор-функции u_t, v_t принадлежат классу $C^{(1)}$ в рассматриваемой $(2n + 1)$-мерной области. В этом случае из условия (3) § 27 вытекает, что преобразование (1_1) — (1_2) будет каноническим тогда и только тогда, когда три n-векторных соотношения

$$\left.\begin{aligned} u_p u_q^{\backprime} = u_q u_p^{\backprime}, \quad v_q v_p^{\backprime} &= v_p v_q^{\backprime}, \\ u_p v_q^{\backprime} - u_q v_p^{\backprime} &= \mu(e_k^i), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\mu = \mathrm{const} \neq 0$, суть тождества по $(u, v; t)$ в силу (1_2). Первые два из этих условий выражают требование, чтобы произведения $u_p u_q^{\backprime}$ и $v_q v_p^{\backprime}$ представили симметрические матрицы. Заметим, что якобиевы n-матрицы, из которых составлена якобиева $2n$-матрица (3), могут иметь определители, равные нулю, если даже $\det \Gamma \neq 0$.

Если условие (5) удовлетворяется, то в силу (5) и (6) § 27 получим

$$K = \mu H + R, \tag{6}$$

$$v_t = R_u(u, v; t), \qquad -u_t = R_v(u, v; t), \tag{7}$$

где u_t, v_t получаются дифференцированием (1_1) по t при фиксированных p, q и замены p, q через u, v, t с помощью (1_2); см. (13_1) § 17.

§ 40. Назовем преобразование $(1_1)-(1_2)$ бинарным, если число степеней свободы $n = 1$, так что p, q, u, v суть скаляры. Тогда матрицы u_p, u_q, ... суть также скаляры и, следовательно, коммутативны, а поэтому знак транспонирования можно опустить. Первые два из условий (5) сводятся к $0 = 0$, а третье, как легко видеть, эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \equiv \mu = \mathrm{const} \neq 0, \tag{8}$$

где $u = u(p, q; t)$, $v = v(p, q; t)$.

Таким образом, бинарное преобразование (1_2) является каноническим тогда и только тогда, когда определитель якобиевой матрицы постоянен $(\neq 0)$.

§ 41. Из § 40 и § 35 ясно, что консервативное бинарное преобразование является полностью каноническим тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \equiv +1, \tag{9}$$

где $u = u(p, q)$, $v = v(p, q)$, т. е. тогда и только тогда, когда отображение (класса $C^{[1]}$) области плоскости (p, q) в область плоскости (u, v) сохраняет площадь *) и ориентацию.

Например, условие (9), если $p > 0$, удовлетворяется при

$$u = \sqrt{2p}\cos q, \quad v = \sqrt{2p}\sin q, \tag{10}$$

где $\sqrt{2p} \geqq 0$.

Вместе с тем переход от прямоугольных декартовых координат (u, v) на фазовой плоскости к полярным координатам p, q $(u = p\cos q,\ v = p\sin q)$ не является каноническим преобразованием, так как якобиан (8) равен тогда $p \neq \mathrm{const}$.

---

*) Если сохраняется только площадь, то якобиан (9), т. е. множитель μ, равен -1.

§ 42. В дальнейшем будем опять считать, что число n компонентов каждого из векторов $p = (p_i)$, $q = (q_i)$ в (2) произвольно.

Если $n = 1$, то каждое из преобразований $u = \pm q$, $v = \mp p$ является на основании § 41 полностью каноническим. В силу изложенного в § 33 такой вывод справедлив и для любого n.

Если $u_1, \ldots, u_n$ есть любая перестановка из $p_1, \ldots, p_n$, а $v_1, \ldots$ $\ldots, v_n$ — любая перестановка из $q_1, \ldots, q_n$, то преобразование $u = p$, $v = q$ является полностью каноническим. Это видно из § 33 (к такому выводу придем, если выберем n-матрицу P в (15_1) § 38 так, чтобы каждая из ее строк содержала в качестве элемента 1).

§ 42а. Операция добавления к p_i, q_i произвольных постоянных также представляет собой каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$, так как матрица $\Gamma = y_x$ является тогда единичной.

§ 43. Если соотношения между t и парой $2n$-векторов $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ не заданы, то

$$\omega = 2Rdt + \mu x \cdot \mathrm{I}dx + y\mathrm{I}dy \quad [\text{см. } (4)] \tag{11}$$

представляет при произвольно заданных скалярных функциях R, μ переменных t, x, y скалярный пфаффиан с $(4n + 1)$ независимыми переменными. Предположим, что при любом фиксированном t задано соотношение между x и y вида

$$F(t; x, y) = 0, \tag{12}$$

где $F = (F_j)$ есть $2n$-вектор, а компоненты F_j при любом фиксированном t независимы в указанном в § 18 смысле. Тогда пфаффиан с $(4n + 1)$ переменными становится в силу (12) пфаффианом с $(2n + 1)$ переменными. Будем предполагать, что $F_t(t;\ x, t)$ принадлежит классу $C^{(1)}$ в $(4n + 1)$-мерной области. Тогда (12) при любом фиксированном t неявно определяет локально топологическое отображение $2n$-мерных фазовых пространств x и y одного на другое. При этом отображающие функции и их частные производные по t принадлежат классу $C^{(1)}$ в соответствующих $(2n + 1)$-мерных областях.

Ниже будет показано, что отображение, неявно определяемое (12), является каноническим тогда и только тогда, когда существует постоянная $\mu \neq 0$ и скалярная функция R такая, что пфаффиан с $2n + 1$ переменными, к которому сводится пфаффиан (11) с $4n + 1$ переменными, есть полный дифференциал*).

---

*) Это характерное свойство канонических преобразований эквивалентно определению Ли контактного преобразования при условии, что t рассматривается как дополнительная координата, которая может быть подвергнута преобразованию так же, как и остальные $2n$ координат фазового пространства (см., например, § 9а).

Заметим, что это свойство пфаффиана инвариантно. Действительно, оно характеризуется симметричностью якобиевой матрицы для вектор-функции, определяемой ковариантными коэффициентами пфаффиана, т. е. тождественным обращением в нуль ротора для этой функции (см. начало § 3).

Таким образом, сказанное следует из того факта, что ротор есть тензор *).

В силу упомянутой только что инвариантности достаточно рассматривать (11) в предположении, что соотношение (12) дает нам функцию $y = y(x, t)$ в явном виде.

При вычислениях будем использовать всегда тот факт, что $a \cdot Cb = b \cdot C^{\backprime} a$ в соответствии с § 1 и что $\mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I} = \mathrm{I}^{-1}$.

§ 44. Прежде всего из (15₃) § 17 видно, что независимо от того, является или не является преобразование $y = y(x, t)$, неявно определяемое с помощью (12), каноническим, пфаффиан (11) с $(4n + 1)$ переменными можно представить в силу (12) в виде

$$\omega = Tdt + X \cdot dx, \tag{13}$$

причем

$$T = 2R - y\mathrm{I}y_t, \tag{14$_1$}$$

$$X = -\mu \mathrm{I}x + \Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y, \tag{14$_2$}$$

где $R(t, x, y)$, $\mu = \mu(t, x, y)$ суть скалярные функции, входящие в (11), а точка обозначает скалярное умножение X на dx. Предполагается, что скаляр T, определяемый согласно (14₁), и $2n$-вектор (ковариантный) X, определяемый согласно (14₂), выражены посредством $y = y(x, t)$ как функции (x, t). Таким образом, формула (13) есть пфаффиан с $2n + 1$ независимыми переменными $x_1, \ldots, x_{2n}, t$.

В силу изложенного в начале § 3 пфаффиан (13) является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда якобиева матрица по t и x для $(2n + 1)$-вектора, образованного скаляром T и $2n$ компонентами функции X, является симметрической при любых x, t. Так как условие симметричности выражается следующими двумя условиями:

$$X_t = T_x, \tag{15$_1$}$$

$$X_x = X_x^{\backprime}, \tag{15$_2$}$$

то критерий, приведенный в § 43, будет доказан, если удастся показать, что оба условия (15₁) и (15₂), вместе взятые, эквива-

---

*) Мы не в праве сказать, что этот элементарный факт соответствует условию представимости ротора в виде разности двух ковариантных производных, так как такое условие предполагает привлечение дифференциальной геометрии. Однако в любом случае можно проверить его непосредственно.

лентны условию (3) § 27, где $\mu = \text{const}$. Следовательно, если учесть изложенное в §§ 28, 30, то достаточно доказать, что

(*i*) если в (11) $\mu = \mu(t)$, то векторное соотношение (15_1) эквивалентно условию существования функции R, удовлетворяющей тождеству (6) § 27;

(*ii*) если в (11) μ не зависит от t, то матричное соотношение (15_2) эквивалентно условию (3) § 27, т. е. условию

$$\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}\,\Gamma = \mu\,\mathrm{I} \qquad (\text{см. § 31a}).$$

§ 44a. Прежде всего градиент $(y\cdot \mathrm{I}y_t)_x$ от $y\cdot \mathrm{I}y_t \equiv -y_t\mathrm{I}y$, очевидно, равен

$$(y_x)^{\backprime}\mathrm{I}y_t - (y_t)^{\backprime}{}_x\mathrm{I}y.$$

Но $(y_t)_x = (y_x)_t$, и так как $y_x = \Gamma$ в силу (3), то из (14_1) следует, что

$$T_x = 2R_x - \Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y_t + \Gamma^{\backprime}{}_t\mathrm{I}y,$$

где в силу (12) § 17 $R_x = \Gamma^{\backprime}R_y$. Так как x и t образуют $(2n+1)$-мерную область независимых переменных, то производная x_t ($\not\equiv x'$) тождественно равна нулю. Следовательно, из (14_2) ясно, что если $\mu_t \equiv 0$, т. е. если $\mu = \mu(x)$, то (15_1) эквивалентно соотношению

$$(\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)_t = T_x$$

или (если использовать приведенное выше выражение для T_x)

$$(\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)_t = 2\Gamma^{\backprime}R_y - \Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y_t + \Gamma^{\backprime}{}_t\mathrm{I}y.$$

Так как

$$(\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)_t \equiv \Gamma^{\backprime}{}_t\mathrm{I}y + \Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y_t,$$

то последнее соотношение эквивалентно следующему:

$$2\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y_t = 2\Gamma^{\backprime}R_y$$

или

$$\mathrm{I}y_t = R_y,$$

что и доказывает (*i*) § 44.

Заметим далее, что если $\mu_x \equiv 0$, т. е. если $\mu = \mu(t)$, то в силу (14_2)

$$X_x = -\mu\mathrm{I} + (\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)_x,$$

и так как $\mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I}$, то ($15_2$) эквивалентно тогда соотношению

$$\frac{1}{2}\{(\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)_x - (\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y)^{\backprime}{}_x\} = \mu\mathrm{I}.$$

Но Γ определяется как якобиева матрица y_x точечного преобразования $y = y(x, t)$ при фиксированном t, тогда как $2n$-матрица

$\{\ \}$, входящая в приведенную только что формулу, представляет при условии выполнения (15_2) ротор $2n$-вектор-функции $\Gamma^{\backprime}\mathrm{I}y$ от $2n$-вектора x при фиксированном t. Так как ротор преобразовывается при точечном преобразовании так же, как и тензор (§ 43), то можно считать доказательство условия (*ii*) § 44 законченным.

Этим самым доказано утверждение о свойстве пфаффиана, высказанное в § 43.

§ 45. Используя обозначения (2) § 39, можно записать (12) в виде

$$F_j(t, p, q, u, v) = 0, \qquad j = 1, \ldots, 2n, \tag{16}$$

а если через $a \cdot db$ обозначить

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, db_i,$$

то (11) примет вид

$$\frac{1}{2}\omega = R\, dt + \frac{1}{2}\mu(p \cdot dq - q \cdot dp) - \frac{1}{2}(u \cdot dv - v \cdot du) \quad (\text{см. } (4)). \tag{17}$$

Следовательно, в силу критерия, указанного в § 43, преобразование (1_1)—(1_2), неявно определяемое соотношением (16), является каноническим тогда и только тогда, когда существует функция $R = R(t, p, q, u, v)$ и постоянная $\mu\,(\neq 0)$ такие, что пфаффиан (17) представляет собой с учетом (16) полный дифференциал.

Этот критерий остается без изменений, если добавить к пфаффиану (17) полный дифференциал

$$df = f_t dt + f_p dp + f_q \cdot dq + f_u \cdot du + f_v \cdot dv$$

любой скалярной функции $f = f(t, p, q, u, v)$. Полагая, в частности,

$$f = \frac{1}{2}\mu p \cdot q \pm \frac{1}{2} u \cdot v,$$

где $\mu = \mathrm{const}$, видим, что критерий остается справедливым, если (17) заменить любым из пфаффианов ω_+, ω_-, определяемых формулами

$$\omega_+ = Rdt + \mu p \cdot dq + v \cdot du, \tag{18_1}$$

$$\omega_- = Rdt + \mu p \cdot dq - u \cdot dv. \tag{18_2}$$

§ 45а. Так как критерии канонического преобразования, указанные в §§ 27, 28, 36, 45, все эквивалентны друг другу, то при рассмотрении той или иной задачи может лишь возникать вопрос, какой из этих критериев наиболее удобен. Критерий, основанный на анализе пфаффиана, приспособлен, конечно, для тех случаев, когда преобразование определяется неявным образом при помощи $2n$ независимых соотношений (16), связывающих $4n+1$ переменных t, p_i, q_i, u_i, v_i.

§ 46. Пусть $S=S(t, q, u)$ — некоторая скалярная функция класса $C^{(2)}$ в $(2n+1)$-мерной области (t, q, u). Предположим, что n-строчная матрица (*«полярный гессиан»* $(S_q)_u$) является неособенной, т. е. что

$$\det(S_{q_i u_k}) \neq 0, \tag{19}$$

где

$$S_{q_i u_k} = S_{u_k q_i}(t, q, u), \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда пара n-векторных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} p - S_q(t, q, u) = 0, \\ v - S_u(t, q, u) = 0 \end{array}\right\} \tag{20}$$

определяет каноническое преобразование (1_1) — (1_2). При этом

$$\mu = 1, \qquad R = S_t, \tag{21}$$

так что в силу (6)

$$K = H + S_t.$$

Чтобы это доказать, отождествим (16) с (20), т. е. положим

$$F_i \equiv p_i - S_q, \qquad F_{i+n} \equiv v_i - S_{u_i},$$

где $i=1, \ldots, n$, $S=S(t, q, u)$. Отсюда следует, что якобиан функций $F_1, \ldots, F_n$, $F_{n+1}, \ldots, F_{2n}$ по отношению к переменным $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ сводится к n-строчному якобиану

$$(-1)^n \det(S_{q_i u_k}),$$

а в силу (19) он отличен от нуля. Следовательно, если учесть соответствующее замечание, сделанное в § 43, то становится ясным, что (20) определяет неявным образом преобразование (1_1)—(1_2). Это преобразование является каноническим и его остаточная функция и множитель суть S_t и 1 соответственно, поскольку пфаффиан (18_1) представляет собой в силу (20) полный дифференциал $dS(t, q, u)$, если положить $R=S_t$, $\mu=1$.

Следует, однако, предостеречь от того ошибочного утверждения*), что для каждого канонического преобразования с множи-

---

*) Эта ошибка допускается, в частности, в тех руководствах по квантовой теории, которые претендуют на упрощение теории канонических преобразований.

телем $\mu = 1$ существует функция $S = S(t, q, u)$, с помощью которой это преобразование представимо в виде (20). В самом деле, из § 45 следует, что преобразование, определенное неявным образом, является каноническим с множителем $\mu = 1$ тогда и только тогда, когда пфаффиан

$$R\,dt + p\cdot dq + v\cdot du$$

есть полный дифференциал. Однако отсюда еще не вытекает факт существования функции $S = S(t, q, u)$, для которой справедливы условие (19) и соотношения

$$S_t = R, \qquad S_q = p, \qquad S_u = v.$$

Например, преобразование $p = v$, $q = -u$ является каноническим с множителем $\mu = 1$, однако функция $S(t, q, u)$, удовлетворяющая соотношениям (20), не существует.

Вместе с тем из изложенного в § 42 ясно, что можно начинать с выбора функции S, содержащей вместо u_i и q_i любые $2n$ из $4n$ переменных p_i, q_i, u_i, v_i, т. е. произвольную пару из p, q, u, v.

Например, если $S = S(t, q, v)$, то условие (19) заменяется следующим:

$$\det(S_{q_i v_k}) \neq 0, \tag{22}$$

где

$$S_{q_i v_k} = S_{v_k q_i}(t, q, v), \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда, если использовать (18_2) вместо (18_1), то получим, что соотношения

$$\left.\begin{aligned} p - S_q(t, q, v) = 0,\\ u + S_v(t, q, v) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

определяют каноническое преобразование, для которого остается справедливым (21).

В соответствии с (21) и с изложенным в § 34 эти преобразования являются полностью каноническими тогда и только тогда, когда S не содержит t.

РАСШИРЕНИЕ КООРДИНАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 47. Рассмотрим, как и в § 10, отображение двух n-мерных позиционных пространств q, $\bar{q} \equiv v$ одного в другое, так что

$$v = v(q, t), \tag{1}$$

$$\det J \neq 0, \tag{2}$$

где $J = v_q = J(q, t)$.

Предположим, что n-вектор-функция $v(q, t)$ принадлежит классу $C^{(2)}$ в $(n + 1)$-мерной области (q, t).

Можно расширить различным образом координатное преобразование (1) с целью получить преобразование вида (1_1)—(1_2) § 39 $2n$-мерных фазовых пространств (2) § 39, причем выбор функций $u = u(p, q, t)$ практически неограничен. Оказывается, что среди таких расширенных преобразований всегда существуют канонические преобразования. Этот вывод может быть извлечен, в частности, из критерия (17) § 45, который также показывает, что каноническое дополнение $u = u(p, q, t)$ к данному координатному преобразованию $v = v(q, t)$ определяется функцией $v(q, t)$ неединственным образом; при $\mu = \mathrm{const} \neq 0$ на функцию R ограничения не накладываются.

§ 48. При заданном преобразовании (1) можно выбрать канонически расширенное преобразование

$$u = u(p, q, t), \qquad v = v(q, t) \tag{3}$$

таким образом, что μ равно $+1$, а u является однородной и линейной функцией p, именно

$$u = J^{\backprime -1}p \qquad (\text{см. } (2)).$$

Можно также выбрать

$$\mu = 1, \qquad R = v_t \cdot J^{-1}p, \tag{4}$$

так что в силу (1)—(2) $R = R(p, q, t)$.

Тогда каноническое преобразование вида (3), которое назовем каноническим расширением данного координатного преобразования (1), определится следующими формулами:

$$u = J^{\backprime -1}p, \qquad v = v(q, t), \tag{5_1}$$

$$J = J(q, t), \qquad J = v_q, \ \det J \neq 0, \tag{5_2}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} J^{\backprime -1} & (J^{\backprime -1}p)_q \\ (0) & J \end{pmatrix}. \tag{5_3}$$

Действительно, в силу (1)—(2) имеем

$$dv = Jdq + v_t\,dt.$$

Так как (см. § 1)

$$(Aa) \cdot (Bb) = a \cdot A^{\backprime}Bb,$$

то, если $u = J^{\backprime -1}p$, имеем

$$u \cdot dv = p \cdot dq + v_t \cdot J^{-1}p\,dt.$$

Подставляя последнюю формулу и (4) в (18_2) § 45, видим, что ω_- обращается в полный дифференциал, а именно в нуль. Следовательно, (5_1) представляет каноническое преобразование, соответствующее множителю и остаточной функции (4). Формула (5_3) вытекает сразу из (5_1)—(5_2), если учесть (1_1)—(3) § 39.

В соответствии с (5_2) это каноническое расширение преобразования (1) может быть получено, если рассматривать импульсы $p_1, \ldots, p_n$ при каждом фиксированном t как компоненты ковариантного вектора в пространстве координат $q_1, \ldots, q_n$.

§ 49. Предположим, в частности, что данное координатное преобразование является консервативным, т. е. $v = v(q)$. Тогда формулы (5_1) — (5_2) сводятся к следующим:

$$u = J'^{-1}p, \qquad v = v(q), \tag{6}$$

где

$$J = v_q = J(q), \ \det J \neq 0,$$

и так как $v_t \equiv 0$, то в соответствии с (4) $\mu = 1$, $R \equiv 0$.

Таким образом, каноническое расширение (6) консервативного координатного преобразования является консервативным и полностью каноническим (см. § 34) *).

§ 49а. Из определения тензора очевидно, что если преобразование пространства является инволюционным **), то таким же является преобразование тензоров пространства. Так как (6) определяет для каждого координатного преобразования $v = v(q)$ импульсы, как компоненты ковариантного вектора в позиционном пространстве, то каноническое расширение любого инволюционного координатного преобразования $v = v(q)$ также является инволюционным.

§ 50. Предположим, в частности, что $v = v(q)$ осуществляет инволюционную операцию преобразования, обратного радиус-век-

---

*) Отсюда вытекает, что отображения $2n$-мерных фазовых пространств (p, q), (u, v) друг в друга сохраняют объем и ориентацию ($\mu = +1$).

Что касается производных по времени, то в ряде задач (см., например, §§ 122—124а, 448—501) часто объединяют переход от позиционного пространства $q = (q_1, \ldots, q_n)$ к $(v = v_1, \ldots, v_n)$ с переходом от t к другой переменной $\bar t$ (играющей роль времени), которая определяется из условия, что локальная дисторсия оси времени пропорциональна локальной дисторсии позиционного пространства:

$$\frac{d\bar t}{dt} = \frac{dv_1 \cdot dv_2 \ldots dv_n}{dq_1 \cdot dq_2 \ldots dq_n},$$

откуда

$$\bar t' = \det J \qquad (J = v_q).$$

Подробно о правиле ввода переменной $\bar t$ см. § 18. Частный случай, когда $\frac{d\bar t}{dt} = \det J$, является основным правилом (11_2) § 230, где $n = 2$.

**) Преобразование $s = f(r)$ называется инволюционным, если оно совпадает со своим обращением $r = f(s)$, так что $f(f(r)) = r$.

торам, т. е. что $v = q/|q|^2$, где $|q| = \sqrt{q \cdot q} > 0$. Тогда, обозначая через $r_i r_k$ произведение двух компонент n-вектора $r = (r_j)$, имеем

$$J = (|v|^2 e_{ik} - 2v_i v_k), \qquad (7_1)$$

$$J'^{-1} = (|q|^2 e_{ik} - 2q_i q_k), \qquad (7_2)$$

$$J = J', \qquad (7_3)$$

где (e_{ik}) — единичная n-матрица. Действительно, частное дифференцирование функции $v = q/|q|^2$ показывает, что якобиева матрица $J = v_q$ равна сумме матриц $-2|q|^{-4}(q_i q_k) + |q|^{-2}(e_{ik})$.

Следовательно, (7_1) вытекает из формулы

$$v_l = \frac{q_l}{|q|^2}, \qquad l = i, k,$$

причем $|v|^2 = |q|^{-2}$. Формула же (7_2) следует из (7_1) без всяких вычислений, если учесть, что преобразование $v = q \,/\, |q|^2$ является инволюционным.

В соответствии с (6) и (7_2) каноническое расширение преобразования $v = q \,/\, |q|^2$ определяется формулами

$$v = \frac{q}{|q|^2}, \qquad u = |q|^2 p - 2\sigma q, \qquad (8_1)$$

где $\sigma = p \cdot q \, (q \neq 0)$.

Так как преобразование $v = q/|q|^2$ является инволюционным, то в силу изложенного в § 49а таким же является и расширенное преобразование (8_1). Следовательно, обращение (8_1) определяется формулами

$$q = \frac{v}{|v|^2}, \qquad p = |v|^2 \cdot u - 2\tau v, \qquad (8_2)$$

где $\tau = u \cdot v \; (v \neq 0)$. Из (8_1)—(8_2) видно, что

$$\left. \begin{aligned} & |q|^2 |v|^2 = 1, \\ & |p|^2 |q|^2 = |u|^2 |v|^2, \qquad p \cdot q + u \cdot v = 0, \end{aligned} \right\} \qquad (8_0)$$

т. е. $\sigma = -\tau$.

§ 51. Если число степеней свободы $n = 1$, то полностью каноническое преобразование (6) можно представить формулами

$$v = \int^{q} s(\bar{q}) \, d\bar{q}, \qquad u = \frac{p}{s(q)}, \qquad (9)$$

где $s = s(q) \neq 0$ — скалярная функция. Частным случаем (9) является преобразование

$$v = sq, \qquad u = \frac{p}{s}, \tag{10}$$

где $s = \mathrm{const} \neq 0$.

Если число степеней свободы $n = 2$, а импульсы p_1, p_2, u_1, u_2 и координаты q_1, q_2, v_1, v_2 обозначены через Ξ, H, X, Y, и ξ, η, x, y соответственно, то полностью каноническое преобразование представится формулами

$$\left.\begin{aligned} &x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta), \\ &X = \frac{y_\eta \Xi - y_\xi \mathrm{H}}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}, \qquad Y = \frac{-x_\eta \Xi + x_\xi \mathrm{H}}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где знаменатель равен $\det J (\neq 0)$. В частности, каноническое расширение координатного преобразования, соответствующего переходу к полярным координатам, представится формулами

$$\left.\begin{aligned} &x = \rho \cos \vartheta, \qquad y = \rho \sin \vartheta, \\ &X = P \cos \vartheta - \Theta \rho^{-1} \sin \vartheta, \qquad Y = P \sin \vartheta + \Theta \rho^{-1} \cos \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Эти формулы мы получим из (11) после замены $\xi, \eta, \Xi, \mathrm{H}$ на $\rho, \vartheta, \mathrm{P}, \Theta$.

Если прибегнуть к комплексным переменным

$$\left.\begin{aligned} &z = x + iy, \qquad \zeta = \xi + i\eta, \\ &Z = X + iY, \qquad Z = \Xi + iH, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

то координатное преобразование $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ можно интерпретировать как отображение $z = z(\zeta)$ одной комплексной плоскости на другую.

Предположим, что $z = z(\zeta)$ есть регулярная аналитическая функция *). Тогда отображение является всюду конформным, так как в силу уравнений Коши — Римана $x_\xi = y_\eta$, $x_\eta = -y_\xi$ имеем $\det J = |z_\zeta|^2 \neq 0$. Таким образом, полностью каноническое преобразование (11) сводится в силу (13) к следующему:

$$z = z(\zeta), \qquad Z = \frac{\mathrm{Z} z_\zeta(\zeta)}{|z_\zeta(\zeta)|^2}, \tag{14}$$

где $z_\zeta = \dfrac{dz}{d\zeta} \neq 0$.

---

*) Это условие не удовлетворяется для (12), так как $x + iy = \rho e^{i\vartheta}$ не является аналитической функцией $\rho + i\vartheta$. Однако можно положить $x + iy = e^{\xi + i\eta}$, $e^\xi = \rho$, $\eta = \vartheta$ и тогда применить (9) к $s(q) = e^q$.

§ 52. Так как $x+iy=z(\xi+i\eta)$, где $x_\zeta=y_\eta$, $x_\eta=-y_\zeta$, то имеем

$$x^2+y^2=|z(\xi+i\eta)|^2\equiv|z|^2, \tag{15$_1$}$$

$$4|z_\zeta|^2=|z^2|_{\xi\xi}+|z^2|_{\eta\eta} \tag{15$_2$}$$

и в силу (14) и (13)

$$X^2+Y^2=\frac{\Xi^2+\mathrm{H}^2}{|z_\zeta|^2}, \tag{16$_1$}$$

$$xY-yX=\frac{|{}^1\!/_2z^2|_\xi\,\mathrm{H}-|{}^1\!/_2z^2|_\eta\,\Xi}{|z_\zeta|^2}. \tag{16$_2$}$$

Наконец, так как $\dfrac{dz}{dt}\equiv z'=z_\zeta\zeta'$, то

$$x'^2+y'^2=|z_\xi(\xi+i\eta)|^2(\xi'^2+\eta'^2), \tag{17$_1$}$$

$$xy'-yx'=\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi\eta'-\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta\xi'. \tag{17$_2$}$$

Эти формулы применим теперь к функции Лагранжа

$$L=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)+(xy'-yx')f(x,y)+U(x,y), \tag{18}$$

где f, U суть заданные функции (класса $C^{(2)}$) двух координат x, y. В соответствии с изложенным в § 15 связанную с L функцию Гамильтона H получим, выражая в $x'L_{x'}+y'L_{y'}-L$ переменные x', y', x, y через $L_{x'}$, $L_{y'}$, x, y. Если обозначить далее импульсы $L_{x'}$, $L_{y'}$ через X, Y, то в силу (16) получим

$$X=x'-yf,\qquad Y=y'+xf, \tag{19$_1$}$$

$$x'=X+yf,\qquad y'=Y-xf, \tag{19$_2$}$$

причем (19$_2$) эквивалентно (19$_1$). Так как

$$H=x'X+y'Y-L,$$

то из (18) и (19$_2$) сразу найдем, что функция Гамильтона равна

$$H=\frac{1}{2}(X^2+Y^2)-(xY-yX)f(x,y)-$$

$$\left.-\quad U(x,y)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)[f(x,y)]^2\right\}. \tag{20}$$

Введем в (20) новые координаты ξ, η и новые импульсы Ξ, H с помощью (13)—(14), причем под $\zeta=\zeta(z)$ будем понимать локально единственное обращение данной аналитической функции

$z = z(\zeta)$. Так как преобразование (14) является полностью каноническим, то от (20) мы перейдем к функции Гамильтона K, тождественно совпадающей с (20) в силу (14); см. § 34. Следовательно, если обозначить K опять через H, то из (16_1)—(16_2) видно, что (20) преобразовывается с помощью (14) в функцию

$$H = |z_\zeta|^{-2}\left\{\frac{1}{2}(\Xi^2 + \mathrm{H}^2) - \left(\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi \mathrm{H} - \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta \Xi\right)f - \right.$$
$$\left. - |z_\zeta|^2\left(U - \frac{1}{2}|z|^2 f^2\right)\right\}, \qquad (21)$$

где $|z_\zeta|^2$, $|z^2|_\xi$, $|z^2|_\eta$, $f = f(x, y)$, $U = U(x, y)$ должны быть выражены с помощью соотношения $x + iy \equiv z = z(\xi + i\eta)$ как функции ξ, η.

В соответствии с изложенным в § 10 функция Лагранжа $\bar{L}$, в которую преобразуется L после применения координатного преобразования $z = z(\xi)$, может быть получена, если выразить L через переменные ξ, η. Другими словами, $\bar{L} = L$ в силу $z = z(\zeta)$ и дифференциального соотношения $z' = z_\zeta(\zeta)\zeta'$. Обозначая $\bar{L}$ опять через L, получим в силу (17_1)—(17_2)

$$L = \frac{1}{2}|z_\zeta|^2(\xi'^2 + \eta'^2) + \left(\left|\frac{1}{2}z^2\right|_\xi \eta' - \left|\frac{1}{2}z^2\right|_\eta \xi'\right)f + U, \qquad (22)$$

где $|z_\zeta|^2$, $|z^2|_\xi$, $|z^2|_\eta$, $f = f(x, y)$, $U = U(x, y)$ должны быть выражены с помощью соотношения $x + iy \equiv z = z(\xi + i\eta)$ как функции ξ, η.

§ 53. На основании изложенного в § 15 легко удостовериться в том, что (21) и (22) образуют в соответствии с определением в § 16 пару связанных друг с другом функций Лагранжа и Гамильтона точно так же, как (18) и (20). По существу, если учесть последнее замечание § 48, то этот факт очевиден для любого канонического расширения координатного преобразования и для любого n.

Если число степеней свободы $n > 2$, то формулы (8_1) представляют собой лишь нетривиальную аналогию (14), так как известно, что, за исключением перемещения, вращения, отражения и изменения единицы длины, инверсия $v = q/|q|^2$ является единственным конформным отображением евклидова пространства с числом измерений $n > 2$ (Лиувилль).

В §§ 54—56 мы приводим с целью дальнейшего использования некоторые классические координатные преобразования $v = v(q)$ типа $z = z(\zeta)$, которые будут использованы далее. Их канонические расширения следуют из (14) или (6).

§ **54.** Пусть H^{ξ_0} и E^{η_0} обозначают кривые на плоскости (x, y), соответствующие линиям $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ на плоскости (ξ, η), если

$$x = -\mu + \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta, \tag{23}$$

где μ — заданная постоянная (не надо смешивать ее с множителем канонического преобразования). В соответствии с (13) можно записать координатное преобразование (23) в виде

$$x + iy \equiv z = z(\zeta) \equiv -\mu + (\xi + i\eta)^2, \tag{24}$$

так что

$$|z_\zeta|^2 = 4(\xi^2 + \eta^2).$$

Таким образом, условие $\det J \equiv |z_\zeta|^2 \neq 0$ в (14) удовлетворяется всюду, за исключением точки $\zeta = 0$, которая соответствует значению $z = -\mu$ и которая является, как и точка $\zeta = \infty$ (соответствующая значению $z = \infty$), точкой разветвления первого порядка (т. е. такой, где соединяются два листа римановой поверхности).

Всюду, за исключением этих двух точек разветвления, соответствие между плоскостями (x, y) и (ξ, η) типа один к двум *).

В соответствии с этим (23) показывает, что если $\xi \neq 0$, то H^ξ, а если $\eta \neq 0$, то E^η представляют такие параболы, что $H^\xi = H^{-\xi}$ и $E^\eta = E^{-\eta}$. Эти параболы имеют общий фокус $(x, y) = (-\mu, 0)$, а их оси симметрии совпадают с осью x, причем для первой параболы направление оси симметрии (от фокуса к вершине) совпадает с положительным направлением оси x, а для второй параболы — с отрицательным. Таким образом, H^0 и E^0 суть полупрямые (двойные), на которые делится общим фокусом ось x. Мы получим также, что отображение (23) — (24) удваивает углы в точке $(\xi, \eta) = (0, 0)$, а кривые H^ξ, E^η пересекаются в любой точке $(\xi, \eta) \neq 0$ под прямым углом. Последний факт очевиден, поскольку преобразование является конформным.

Координаты ξ, η, определяемые согласно (24), представляют собой обычные параболические координаты.

§ **55.** Координатное преобразование (24), простое в локальном, может оказаться неудобным в большом (см. § 451). Отображение, также локально эквивалентное, но часто более удобное, чем (24), в большом, мы получим, если подвергнем $z + \mu$ и ζ в (24) одному и тому же линейному преобразованию l. При этом последнее должно быть выбрано так, чтобы точки $-\mu$, $1 - \mu$, ∞, где μ — заданное число, отображались в $0, \infty, 1$ соответственно. Тогда это

---

*) То есть одной точке на плоскости (x, y) соответствуют две точки на плоскости (ξ, η). (*Прим. перев.*)

преобразование определится формулой

$$z = \frac{\zeta^2 + \mu(1-\mu)}{2\zeta - (1-2\mu)}, \tag{25}$$

так как именно тогда $l(z) = (l(\zeta))^2$, где

$$l(\zeta) = \frac{\zeta + \mu}{\zeta - 1 + \mu}.$$

Согласно (25) соответствие между плоскостями (x, y) и (ξ, η), где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, также типа один к двум всюду, за исключением двух точек разветвления P_1, P_2 первого порядка. Обе эти точки соответствуют, однако, конечным значениям z, и их образы Π_1, Π_2 соответствуют конечным ζ. Действительно, из (25) видно, что

$$P_1 : (-\mu, 0),\ P_2 : (1-\mu, 0);\ \Pi_1 : (-\mu, 0),\ \Pi_2 : (1-\mu, 0), \tag{26}$$

причем в точках Π_1, Π_2, соответствующих точкам P_1, P_2 плоскости, обращается в нуль производная z_ζ, т. е. Π_1 и Π_2 суть сдвоенные точки этого отображения типа один к двум. В соответствии с этим нет точек разветвления на бесконечности.

Действительно, (25) показывает, что две различные точки

$$\Pi_0 : (\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \mu, 0\right), \qquad (\xi, \eta) = \infty, \tag{27}$$

соответствуют точке $(x, y) = \infty$.

Пусть $r_\nu = r_\nu(x, y)$ и $\rho_\varkappa = \rho_\varkappa(\xi, \eta)$, где $\nu = 1, 2$ и $\varkappa = 1, 2$ обозначают расстояние от P_ν до переменной точки $P : (x, y)$ и от $\Pi_\varkappa$ до переменной точки $\Pi : (\xi, \eta)$ в плоскостях z и ζ соответственно. Тогда r_1, r_2 и ρ_1, ρ_2 играют роль биполярных координат на плоскостях z и ζ соответственно, причем P_1, P_2 и Π_1, Π_2 суть полюсы. Из (26) и (27) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= \left(\xi + \mu - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\zeta + \mu)^2 + \eta^2, \\ \rho_2^2 &= (\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

причем

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \qquad r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2.$$

Следовательно, в соответствии с (25)

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\rho_1^2}{\rho_0}, \qquad r_2 = \frac{1}{2}\frac{\rho_2^2}{\rho_0}, \tag{29$_1$}$$

$$|z_\zeta| = \frac{1}{2}\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0^2}. \tag{29$_2$}$$

§ 56. Другое координатное преобразование, аналогичное в какой-то мере (23), однако более сложное, определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= -\mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta, \\ y &= \frac{1}{2}\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $\mathrm{ch}\,w = \cos iw$, $\mathrm{sh}\,w = -i\sin iw$. Формула, соответствующая (24) или (25), имеет следующий вид:

$$x + iy \equiv z = z(\zeta) \equiv -\mu + \frac{1}{2}\{1 + \cos(\xi + i\eta)\}\ (\mu = \mathrm{const} \gtreqless 0). \tag{31}$$

С помощью (31) легко удостовериться в том, что

$$|z|^2 = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\mathrm{ch}\,\eta\cos\xi + \frac{1}{8}(\mathrm{ch}\,2\eta + \cos 2\xi), \tag{32$_1$}$$

$$|z_\zeta|^2 = \left|\sin\frac{1}{2}(\xi + i\eta)\cos\frac{1}{2}(\xi + i\eta)\right|^2 = \frac{1}{8}(\cos 2\eta - \cos 2\xi). \tag{32$_2$}$$

Мы не будем рассматривать в дальнейшем точки $(\xi, \eta) = \infty$ и $(x, y) = \infty$. Этим самым исключаются, в частности, логарифмические точки разветвления на римановой поверхности обратной функции $\zeta = \zeta(z)$. Остальные точки разветвления, т. е. те точки (конечные), для которых $z_\zeta = -{}^1/_2 \sin\zeta$, соответствуют значениям $\zeta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ и имеют первый порядок, так как для них $z_{\zeta\zeta} \equiv -{}^1/_2\cos\zeta \neq 0$ при тех же ζ. Пусть S обозначает плоскость (x, y), а Σ^k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — полосу $2k\pi \leqslant \xi \leqslant (2k + 1)\pi$, параллельную оси η на плоскости (ξ, η). Пусть также P_1, P_2 и $\Pi_1{}^k, \Pi_2{}^k$ суть пары различных точек $(x, y) = (-\mu, 0)$, $(x, y) = (1 - \mu, 0)$ и $(\xi, \eta) = (2\pi k + {}^1/_2, 0)$, $(\xi, \eta) = (2\pi k, 0)$ на S и Σ^k соответственно (точки P_1, P_2 — те же, что и в § 55). Согласно (31) соответствие между S и Σ^k

принадлежит типу один к двум при любом фиксированном k всюду, за исключением точек разветвления P_1, P_2 и их образов Π_1, Π_2. При этом точка $\Pi_\nu{}^k \in \Sigma^k$ отображается при любом k и при $\nu = 1, 2$ в единственную точку P_ν на S.

Для того чтобы описать, как это было сделано в § 54, кривые $\xi = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$ на плоскости (x, y), удобно заменить преобразование (31) S и Σ^k, принадлежащее почти всюду к типу один к двум, другим преобразованием, принадлежащим почти всюду к типу один к четырем. Для этого заменим x, y биполярными координатами r_1, r_2 с полюсами в точках P_1, P_2, т. е. положим (как и в § 55)

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \left|(x+\mu)^2 + y^2\right|^{1/2} \geqslant 0, \\ r_2 &= \left|(x-1+\mu)^2 + y^2\right|^{1/2} \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

В этом случае $r_1 + r_2 \geqslant 1$, причем $r_1 + r_2 = 1$ тогда и только тогда, когда точка (x, y) лежит на оси x между полюсами P_1, P_2. В то же время $r_\nu = 0$ тогда и только тогда, когда точка (x, y) совпадает с P_ν, $\nu = 1, 2$. Если исключить эти точки оси x и только эти точки, то соответствие между (r_1, r_2) и (x, y) будет типа один к двум, так как точки (x, y), $(x, -y)$ и только они имеют одни и те же биполярные координаты (r_1, r_2). Таким образом, учитывая, что соответствие (31) между S и Σ^k почти всюду типа один к двум, можем заключить, что соответствие между (r_1, r_2) и точками (ξ, η) любой фиксированной полосы Σ^k почти всюду типа один к четырем. Таким образом, удобнее считать, что полоса Σ^k состоит из четырех конгруэнтных полуполос. Квадратные корни (33) могут быть с помощью координат ξ, η униформизированы *). Действительно,

$$r_1 + r_2 = \mathrm{ch}\,\eta, \quad r_1 - r_2 = \cos\xi, \tag{34}$$

---

*) Это справедливо для координат ξ, η, определяемых согласно (31), но не для координат, определяемых в соответствии с (24) или (25). Что касается (25), то см. (29_1) и (28).

Следует упомянуть, что (34) позволяет выразить $x'^2 + y'^2$ через r_1', r_2'. Прежде всего из (32_2) и (34) видно, что $|z_\zeta|^2 = r_1 r_2$ и, следовательно, в силу (17_1)

$$x'^2 + y'^2 = r_1 r_2 (\xi'^2 + \eta'^2). \tag{A}$$

Кроме того, из (34) видно, что

$$\begin{aligned} r_1' + r_2' &= \eta'\,\mathrm{sh}\,\eta, & r_1' - r_2' &= -\xi' \sin\xi, \\ \mathrm{sh}^2\eta &= (r_1 + r_2)^2 - 1, & \sin^2\xi &= 1 - (r_1 - r_2)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (A) сводится к следующему:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - \frac{1}{4} r_0^2}\, q_1'^2 + \frac{q_2^2 - q_1^2}{q_2^2 - \frac{1}{4} r_0^2}\, q_2'^2, \tag{35}$$

так что r_1, r_2 суть целые функции от ξ, η. Для этого заметим, что согласно (31)

$$(x+\mu)\pm iy = \cos^2\frac{1}{2}(\xi \pm i\eta),$$

$$(x-1+\mu)\pm iy = -\sin^2\frac{1}{2}(\xi \pm i\eta).$$

Следовательно, (33) можно переписать в виде

$$r_1 = \cos\frac{1}{2}(\xi + i\eta)\cos\frac{1}{2}(\xi - i\eta),$$

$$r_2 = \sin\frac{1}{2}(\xi + i\eta)\sin\frac{1}{2}(\xi - i\eta),$$

что и доказывает (34).

Так как все полосы Σ^k эквивалентны одна другой, то достаточно рассмотреть полосу Σ^0, т. е. область $0 \leqslant \xi < 2\pi$, $-\infty < \eta < +\infty$ на плоскости (ξ, η). Пусть через H^{ξ_0} и E^{η_0} обозначаются для заданной точки (ξ_0, η_0) кривые, соответствующие согласно (34) и (33) линии $-\infty < \eta < +\infty$, $\xi = \xi_0$ и сегменту $0 \leqslant \xi < 2\pi$, $\eta = \eta^0$ соответственно. Кривые H^ξ и E^η будут определены тогда при $0 \leqslant \xi < 2\pi$, $-\infty < \eta < +\infty$. Так как r_1, r_2 суть биполярные координаты на плоскости (x, y) с полюсами в $P_1 = (-\mu, 0)$ и $P_2 = (1-\mu, 0)$, то из (34) видно, что если η имеет фиксированное, отличное от нуля значение, то E^η представляет собой эллипс с фокусами в P_1 и P_2. Так как $\operatorname{ch}\eta$ является монотонно возрастающей функцией $|\eta|$ и стремится при $\eta \to \pm 0$ и $\eta \to \pm\infty$ к $+1$ и $+\infty$ соответственно, то из (34) также видно, что совокупность всех эллипсов $\mathrm{E}^\eta(-\infty < \eta < +\infty)$ покрывает плоскость (x, y) дважды, если пренебречь линией E^0 между P_1 и P_2, соединяющей два семейства E^η и $\mathrm{E}^{-\eta}$, $\eta > 0$ с $\mathrm{E}^\eta = \mathrm{E}^{-\eta}$. (Однако E^η и $\mathrm{E}^{-\eta}$ обладают в соответствии с их параметрическим представлением (30) через ξ различной ориентацией.) Аналогичным образом и также на основании (34) можно сделать вывод, что если только $\xi \neq {}^1\!/_2\pi$, $\xi \neq {}^3\!/_2\pi$, то кривая H^ξ представляет собой ветвь гиперболы с фокусами P_1, P_2, а вся совокупность ветвей гиперболы H^ξ $(0 \leqslant \xi < 2\pi)$ покрывает плоскость (x, y) дважды, если не учитывать $\mathrm{H}^{1/2\pi}$ и $\mathrm{H}^{3/2\pi}$ (линии, соединяющие два

где

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{r_1 \pm r_2}{2},$$

причем через r_0 обозначается фиксированное расстояние между полосами P_1, P_2, равное в рассматриваемом случае единице.

семейства гиперболы или, точнее говоря, четыре семейства ветвей гипербол).

Таким образом, рассмотренное отображение определяет на плоскости (x, y) так называемые эллиптические координаты, причем координатная сетка составлена из софокусных эллипсов и гипербол. Параболические координаты (см. § 54) можно рассматривать как предельный случай*).

КАНОНИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

§ 57. Ниже мы будем считать, что m-матрица составлена из m^2 постоянных.

Если A — некоторая m-матрица, то матричный ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}$, где $A^0 = (e_k{}^i)$, сходится и определяет m-матрицу, которую будем обозначать через e^A или $\exp A$. Очевидно, что $\exp(A^{\backprime}) = (\exp A)^{\backprime}$, а если T — неособенная матрица, то

$$\exp(TAT^{-1}) = T(\exp A)T^{-1}.$$

Кроме того, $e^{A+B} = e^A e^B$ каждый раз, когда $AB = BA$. Полагая $B = -A$, получим, что $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ существует при любой A.

Выбирая T таким образом, что TAT^{-1} имеет нормальную жорданову форму, можно сделать вывод, что если α — характеристическое число для A, то e^α — характеристическое число для e^A, имеющее ту же кратность, что и α.

Если не утверждается противное, то все матрицы будем предполагать вещественными. Конечно, при рассмотрении матриц в жордановой форме и наличии комплексных характеристических чисел ограничиться вещественной областью уже нельзя.

§ 58. В вещественной области свойства симметрии, кососимметрии и ортогональности определяются соотношениями $A^{\backprime} = A$, $A^{\backprime} = -A$ и $A^{\backprime} = A^{-1}$, где $A^{\backprime} \overset{\rightharpoonup}{=} (a^k_i)$, если $A = (a^i_k)$. Эти свойства инвариантны по отношению к ортогональным преобразованиям A и из них вытекает соответственно, что все характеристические числа матрицы A вещественны, чисто мнимы (включая 0) или равны по абсолютной величине 1. Если $A^{\backprime} = A$ и если все характе-

---

*) К такому выводу придем также, если запишем $\operatorname{ch} z$ в виде $\frac{1}{2}(Z + Z^{-1})$, где $Z = e^z$. Действительно, тогда точки разветвления для функции, получаемой при инверсии рациональной функции $\frac{1}{2}(Z + Z^{-1})$, суть $+1$ и -1. Если их обозначить через a и b и положить $a = 0$, $b = \infty$, то мы пришли бы к функции Z^2, определяющей параболические координаты.

ристические числа матрицы A положительны (следовательно, $\det A > 0$), то A называют положительно определенной матрицей. Понятия «не отрицательная определенная» и «положительная полуопределенная» отнесем к матрице $A = A^{\backprime}$, для которой характеристические числа все не отрицательны или все не отрицательны, но не все положительны соответственно. Матрица A будет положительно определенной тогда и только тогда, когда существует неособенная матрица B такая, что $A = BB^{\backprime}$, причем $\det B = 0$ в случае полуопределенной матрицы A. Если $A^{\backprime} = A^{-1}$ (следовательно, $\det A = \pm 1$), то A называется матрицей вращения ($\det A = 1$) или отражения ($\det A = -1$).

Нормальную форму произвольной вещественной матрицы M получим ортогональным преобразованием, основываясь на том, что если $m > 2$, то существует матрица вращения R такая, что, полагая $(RMR^{-1}) = (c_k{}^i)$, имеем $c_k{}^1 = 0$, $c_k{}^2 = 0$ при всех $k > 2$.

§ 59. Для каждой неособенной m-матрицы A существует только одна положительно определенная матрица P и только одна ортогональная матрица O такие, что $A = PO$ (при этом $\det P > 0$, а $\det O = \pm 1$ и имеет тот же знак, что и $\det A$) *).

Так как $AA^{\backprime}$ — положительно определенная матрица (§ 58), то существование и единственность такого «полярного разложения» $A = PO$ вытекают сразу, как только будет показано, что для любой заданной положительно определенной матрицы Q существует только одна положительно определенная матрица P такая, что $P^2 = Q$. Действительно, если $AA^{\backprime} = P^2$, причем $P = P^{\backprime}$, то матрица O, определенная как произведение $O = P^{-1}A$, является такой, что $OO^{\backprime} = (e_k{}^i)$, и наоборот. Однако ортогональное преобразование произвольной неотрицательно определенной матрицы Q к диагональному виду показывает, что независимо от того, имеет или не имеет Q кратные характеристические числа, существует только одна неотрицательно определенная матрица P такая, что $P^2 = Q$. Так как P, а вместе с тем и P^2 являются положительно определенными или полуопределенными, то доказательство можно считать полным (можно упомянуть, что если $A = O$, то существует только одна положительно полуопределенная матри-

---

*) Если $m = 3$, то единственный выбор P и O для любой неособенной матрицы A хорошо известен в кинематике континуумов, где показывается, что каждая линейная деформация A с положительным определителем может быть разложена единственным образом на вращение O и на расширение P вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. Аналогичным образом, если $m = 4$, то имеется теорема, согласно которой преобразование Лоренца с положительным определителем разлагается на два — трехмерные евклидовы вращения и положительно определенное бинарное преобразование Лоренца.

ца P, но более одной ортогональной матрицы O такой, что $A = PO$).

Разложение $A = PO$ эквивалентно разложению $A = \mathbf{OP}$, где $\mathbf{O} = O$, $\mathbf{P} = O^{-1}PO$. Очевидно, что $\mathbf{P} = P$ и $\mathbf{O} = O$ тогда и только тогда, когда $AA^{\backprime} = A^{\backprime}A$.

§ 60. Пусть C — постоянная $2n$-матрица $(m = 2n)$. Назовем ее канонической матрицей, если линейное консервативное преобразование $y = Cx$ является каноническим в смысле определения, данного в § 27. Поскольку якобиева матрица y_x равна в данном случае C, то из § 27 вытекает, что C является канонической матрицей тогда и только тогда, когда существует скалярный множитель $\mu \neq 0$ такой, что

$$C\mathrm{I}C^{\backprime} = \mu\mathrm{I}, \qquad (1_1)$$

где

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} (0) & (e^i_k) \\ -(e^i_k) & (0) \end{pmatrix} = -\mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I}^{-1}. \qquad (1_2)$$

В силу изложенного в §§ 31, 32 отсюда следует, что

$$\det C = \mu^n \ (\neq 0), \qquad (2_1)$$

$$C^{\backprime}\mathrm{I}C = \mu\mathrm{I}, \qquad (2_2)$$

$$C^{-1}\mathrm{I}C^{-1\backprime} = \mu^{-1}\mathrm{I}, \qquad (2_3)$$

так что матрицы $C^{\backprime}$ и C^{-1} будут также каноническими. В соответствии с § 34 назовем матрицу C полностью канонической, если соотношение (1_1) справедливо при $\mu = 1$ (тогда в силу (2_1) имеем $\det C = 1$). В частности, полностью канонической является матрица I, определенная согласно (1_2).

Если написать (2_3) в виде

$$\mu C^{-1} = \mathrm{I}C^{\backprime}\mathrm{I}^{-1},$$

то можно заключить, что если α есть характеристическое число полностью канонической матрицы C, то α^{-1} является также ее характеристическим числом, причем α и α^{-1} имеет одну и ту же кратность и даже соответствуют инвариантным множителям одной и той же степени. Правда, случай, когда $\alpha = \alpha^{-1}$, т. е. $\alpha = \pm 1$, требует особого рассмотрения. Таким образом, можно с уверенностью утверждать лишь то, что все инвариантные множители полностью канонической матрицы C при $\alpha \neq \pm 1$ распадаются на пары (α, α^{-1}). То же самое относится, конечно, и к парам $(\alpha, \bar{\alpha})$, если $\alpha \neq \bar{\alpha}$, т. е. если матрица (вещественная) C имеет комплексное характеристическое число α, то она имеет также и комплексно сопряженное характеристическое число $\bar{\alpha}$.

Согласно § 31 канонические матрицы C образуют группу, а их множители μ являются мультипликаторами для операции умножения элементов группы.

§ 60а. Для любой симметрической $2n$-матрицы H матрица $\exp(\mathrm{I}H)$ является полностью канонической. Действительно, если $l = 0, 1, 2$ и $H^{\backprime} = H$, то из (1_2) следует, что

$$[(\mathrm{I}H)^l]^{\backprime} = (-H\mathrm{I})^l$$

и

$$[(\mathrm{I}H)^l]^{\backprime} = \mathrm{I}(-\mathrm{I}H)^l\mathrm{I}^{-1} \equiv [\mathrm{I}(-\mathrm{I}H)\mathrm{I}^{-1}]^l.$$

В силу § 57 отсюда вытекает, что

$$[\exp(\mathrm{I}H)]^{\backprime} = \mathrm{I}[\exp(-\mathrm{I}H)]\mathrm{I}^{-1}.$$

Поскольку $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, то, очевидно, что соотношение (2_3) удовлетворяется при $C = \exp(\mathrm{I}H)$, $\mu = 1$.

§ 61. Покажем, что если соотношение $C = PO$ есть единственное полярное разложение канонической матрицы C с множителем μ (см. § 59), то

$$O\mathrm{I}O^{\backprime} = \operatorname{sgn}\mu\cdot\mathrm{I}, \qquad P\mathrm{I}P^{\backprime} = |\mu|\cdot\mathrm{I}, \tag{3}$$

где $\operatorname{sgn}\mu = \mu / |\mu|$. Другими словами, матрицы P и O являются также каноническими и соответствуют *) множителям $|\mu|$ и $\operatorname{sgn}\mu$.

Для доказательства выразим посредством P, O, μ четыре неособенные матрицы O_1, O_2; P_1, P_2, полагая

$$\left.\begin{aligned} O_1 &= \mathrm{I}, & O_2 &= \operatorname{sgn}\mu\cdot O\mathrm{I}O^{-1}, \\ P_1 &= P, & P_2 &= |\mu|\cdot O_2P^{-1}O^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Так как $\mathrm{I}^{\backprime} = \mathrm{I}^{-1}$ согласно (1_2) и $O^{\backprime} = O^{-1}$ по предположению, а матрица P и, следовательно, и P^{-1} положительно определенны, то матрицы O_1 и O_2 являются ортогональными, а P_1 и P_2 положительно определенными. Вместе с тем, подставляя $C = PO$ в (2_2), получим соотношение

$$O^{-1}P\mathrm{I}PO = \mu\mathrm{I},$$

которое с учетом определений (4) и (2_2) перепишется в виде $P_1O_1 = P_2O_2$. Поэтому из единственности полярного разложения (см. § 59) неособенной матрицы $P_1O_1 = P_2O_2$ следует, что $O_1 = O_2$

---

*) Положив $C = P$, придем к выводу, что любая положительно определенная каноническая матрица имеет положительный множитель.

и $P_1 = P_2$. Кроме того, из (4) и (1_2) видно, что данные матрицы удовлетворяют соотношениям (3).

Полученный результат может трактоваться как взаимно однозначная параметризация $C = PO$ группы всех канонических матриц C с помощью пар P, O канонических положительно определенных и канонических ортогональных $2n$-матриц. Ясно, что такие матрицы O (но не P) образуют группу.

Подставляя в (1) вместо C произвольную ортогональную $2n$-матрицу $O = O^{-1'}$ и используя (1_2), можно легко проверить, что эта матрица является канонической тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{array}{ll} O = \begin{pmatrix} (a_k^i) & (b_k^i) \\ -(b_k^i) & (a_k^i) \end{pmatrix}, & \mu = +1 \\ \text{или} & \\ O = \begin{pmatrix} (a_k^i) & (b_k^i) \\ (b_k^i) & -(a_k^i) \end{pmatrix}, & \mu = -1, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

где $(a_k{}^i)$, $(b_k{}^i)$ — произвольные n-матрицы, подчиненные только условию $\det O = \pm 1$.

§ **62.** Теперь можно легко доказать утверждение, высказанное в § 32. Оно заключается в том, что соотношение $|\det C| = |\mu|^n$, вытекающее с очевидностью из (1_1), всегда можно заменить соотношением (2_1).

Это утверждение достаточно доказать для всех канонических $2n$-матриц C, множитель которых положителен. Такая возможность следует из (9_1) — (9_2) § 31, если умножить данную каноническую $2n$-матрицу C с отрицательным множителем на матрицу

$$G = \begin{pmatrix} (e_k^i) & (0) \\ (0) & -(e_k^i) \end{pmatrix}$$

Действительно, легко удостовериться, что G является канонической $2n$-матрицей с множителем -1 и определителем $(-1)^n$.

Поэтому достаточно доказать (2_1) для любой канонической матрицы C с положительным множителем. Из изложенного в § 61 далее следует, что достаточно доказать (2_1) для каждой положительно определенной матрицы $C = P$ и каждой ортогональной матрицы $C = O$ с множителем $+ 1$. Однако определитель для P всегда положителен, и в силу примечания в § 61 множитель любой матрицы $C = P$ также положителен. Следовательно, остается лишь показать, что матрица $C = O$ с множителем $+ 1$ не может иметь отрицательный определитель

§ 62а. Так как любая матрица $C = O$ с множителем $+1$ имеет вид первой из двух матриц (5), то очевидно, что если через F обозначить $2n$-матрицу (комплексную, унитарную)

$$F = \frac{1}{\sqrt{(2n)}} \begin{pmatrix} (e_k^i \sqrt{-1}) & (e_k^i) \\ (e_k^i) & (e_k^i \sqrt{-1}) \end{pmatrix},$$

то

$$FOF^{-1} = \begin{pmatrix} a_k^i + b_k^i \sqrt{-1} & (0) \\ (0) & (a_k^i - b_k^i \sqrt{-1}) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, det (FOF^{-1}) равен произведению двух комплексно-сопряженных чисел det $(a_k{}^i \pm b_k{}^i \sqrt{-1})$ и не может быть отрицательным. Так как det $(FOF^{-1}) = \det O$, то формула (12) § 32 доказана.

§ 63. Если линейное преобразование $y = Cx$ $2n$-вектора $x = (x_j)$ в $2n$-вектор $y = (y_j)$ состоит из преобразования n-векторов $p = (p_i) \equiv (x_i)$ и $q = (q_i) \equiv (x_{i+n})$, представляющих импульсы и координаты, в соответствующие n-векторы $u = (u_i) \equiv (y_i)$, $v = (v_i) \equiv (y_{i+n})$, то матрица C будет полностью канонической тогда и только тогда, когда преобразование координат контрградиентно *) преобразованию импульсов. Это ясно из последнего замечания в § 48, но более непосредственно следует из § 60. Действительно, легко проверить с помощью (1_2), что (1_1) удовлетворяется при

$$C = \begin{pmatrix} (a_k^i) & (0) \\ (0) & (b_k^i) \end{pmatrix} \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда

$$(a_k{}^i)' = (b_k{}^i)^{-1} \text{ **)}.$$

---

*) Два линейных преобразования, определяемых матрицами A и B, называются контрградиентными, если $A = B'^{-1}$. В частности, ортогональные матрицы и только они определяют линейные преобразования, контрградиентные друг к другу. Вообще, если мы переходим от «точечных координат» к «линейным координатам», то следует заменить B на $A = B'^{-1}$ См. также два соотношения (31) § 25.

**) Приведем примеры матриц $(a_k{}^i)$, $(b_k{}^i)$, $2n = 6$, удовлетворяющих этому условию:

$$\left(a_k^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \left(b_k^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

или (если r_2, r_3 произвольны и $r_1 \neq 0$)

$$\left(a_k^i\right) = \frac{1}{r_1} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 & -r_3 \\ 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 \end{pmatrix}, \quad \left(b_k^i\right) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Обобщение (7) или (8) на случай $2n \geqslant 8$ очевидно.

Если матрица $(a_k{}^i)$ преобразования импульсов совпадает с матрицей $(b_k{}^i)$ преобразования координат, то имеем $(a_k{}^i)^\backprime = (a_k{}^i)^{-1}$, т. е. n-матрица $(a_k{}^i) = (b_k{}^i)$ ортогональна (см. (15_1) § 38).

§ 64. Пусть Q — симметрическая $2n$-матрица частного вида

$$Q = \begin{pmatrix} (r_k^i) & (0) \\ (0) & (s_k^i) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $Q^\backprime = Q$, т. е. $r_k{}^i = r_i{}^k$, $s_k{}^i = s_i{}^k$.

Предположим далее, что по крайней мере одна из двух симметрических n-матриц $(r_k{}^i)$, $(s_k{}^i)$, например, $(r_k{}^i)$, является положительно определенной. Тогда существует полностью каноническая матрица C такая, что матрица $C^\backprime QC$ имеет диагональную форму.

Для доказательства этого утверждения (являющегося основным в теории малых колебаний) достаточно показать, что существуют две матрицы $(a_k{}^i)$, $(b_k{}^i)$, удовлетворяющие условию (6), и что оба произведения

$$(a_k{}^i)^\backprime (r_k{}^i)(a_k{}^i), \tag{10_1}$$

$$(b_k{}^i)^\backprime (s_k{}^i)(b_k{}^i) \tag{10_2}$$

представляют собой диагональные матрицы. Однако поскольку $(r_k{}^i)$ — положительно определенная матрица, то в соответствии с изложенным в § 59 существует неособенная симметрическая и положительно определенная матрица $(c_k{}^i)$, для которой $(c_k{}^i)^2 = (r_k{}^i)$. Очевидно, что произведение $(c_k{}^i)(s_k{}^i)(c_k{}^i)$ представит симметрическую матрицу и может быть поэтому записано в виде $(f_k{}^i)(d_k{}^i)(f_k{}^i)^{-1}$, где $(f_k{}^i)^{-1} = (f_k{}^i)^\backprime$ — ортогональная, а $(d_k{}^i)$ — диагональная матрицы. Следовательно, если положить $(a_k{}^i)$ и $(b_k{}^i)$ равными

$$(a_k{}^i) = (c_k{}^i)^{-1}(f_k{}^i),$$

$$(b_k{}^i) = (c_k{}^i)(f_k{}^i),$$

то условие (6) удовлетворяется, матрица (10_2) будет диагональной, а (10_1) представит единичную диагональную матрицу, что и доказывает приведенное выше утверждение о свойствах произведений (10_1), (10_2).

§ 64а. Пусть матрица Q имеет опять вид (9), но относительно матриц $(r_k{}^i)$ и $(s_k{}^i)$ предположим, что они коммутативны. Тогда также можно утверждать о существовании полностью канонической матрицы C такой, что произведение $C'QC$ представит диагональную матрицу.

Этот критерий (играющий в частном случае $(r_k{}^i)+(s_k{}^i)=(0)$ большую роль в теории линейных вековых возмущений) также может быть доказан с помощью выбора матрицы C частного вида (6). Действительно, последнее замечание в § 63 показывает, что достаточно доказать существование такой ортогональной матрицы $(a_k{}^i)$, для которой оба произведения (10_1), (10_2) представят диагональные матрицы, если только положить $(b_k{}^i)=(a_k{}^i)$. Однако существование такой ортогональной матрицы $(a_k{}^i)$ вытекает, как известно, из предположения о том, что симметрические матрицы $(r_k{}^i)$, $(s_k{}^i)$ коммутативны.

ВРАЩЕНИЯ

§ 65. Для $m+m$-скаляров a_i, b_i мы имеем очевидное тождество $\left(\text{если } \sum=\sum\limits_1^m\right)$:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i b_i \\ \sum a_i b_i & \sum b_i^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum\sum\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix}^2, \qquad (1)$$

откуда

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right).$$

Ниже мы будем рассматривать 3-векторы в евклидовом пространстве и подразумевать, что при вращениях в этом пространстве (представляемых ортогональными 3-матрицами, с 3^2 постоянными элементами и определителем, равным $+1$) эти «векторы» преобразуются по такому же закону, что и тензоры.

Так как $m=3$, то для двух векторов a, b определены не только скалярное произведение $a\cdot b=b\cdot a$, но и векторное произведение $a\times b=-b\times a$. Полагая $|c|=\sqrt{c^2}\geqslant 0$, где $c^2=c\cdot c$, получим из (1), что

$$|a\cdot b|^2+|a\times b|^2=|a|^2|b|^2, \qquad (2)$$

откуда

$$|a\times b|\leqslant|a|\,|b|, \qquad |a\cdot b|\geqslant|a|\,|b|. \qquad (2_1)$$

Тождество (2) можно легко обобщить на случай четырех 3-векторов

$$(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)=(a\times b)(c\times d). \qquad (3)$$

Если $v = v(t)$ — не обращающаяся в нуль векторная функция класса $C^{(1)}$ в t-интервале, то скаляр $|v(t)|$ также принадлежит классу $C^{(1)}$, поскольку из равенства $|v|^2 = v^2$ вытекает, что

$$|v|\,|v|' = vv', \tag{4}$$

откуда в силу (2)

$$\big|\,|v|'\big| \leqslant |v'|. \tag{4$_1$}$$

§ 66. Пусть ортогональная 3-матрица Ω (для которой определитель равен $+1$) представляет функцию $\Omega(t)$ класса $C^{(2)}$. Так как $\Omega^{\backprime}\Omega$ — единичная матрица, то $(\Omega^{\backprime}\Omega)' \equiv 0$ и $\Omega^{-1}\Omega' = -(\Omega^{-1}\Omega')^{\backprime}$. Следовательно, матрица $\Omega^{-1}\Omega'$ является кососимметрической, а $\Omega = \Omega(t)$ определяет 3-вектор $S = S(t)$ и 3-матрицу $\Sigma = \Sigma(t)$, для которых

$$\left.\begin{gathered} S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma \equiv \Omega^{-1}\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -s_2 & s_2 \\ s_2 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix} = -\Sigma', \\ \Omega^{\backprime} = \Omega^{-1}. \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Следовательно,

$$\Sigma' = (\Omega^{\backprime}\Omega')' = \Omega^{\backprime}\Omega'' + \Omega^{\backprime\prime}\Omega' = \Omega^{-1}\Omega'' - \Sigma\Omega^{\backprime}\Omega' = \Omega^{-1}\Omega'' - \Sigma^2,$$

т. е.

$$\Omega^{-1}\Omega'' = \Sigma' + \Sigma^2, \tag{6}$$

где

$$\Sigma^2 = (s_1 s_k - |S|^2 e_{ik}), \qquad |S|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

§ 67. Формулы (5) определяют при любой заданной матрице $\Omega(t) \equiv \Omega^{\backprime -1}(t)$ матрицу $\Sigma(t) \equiv -\Sigma^{\backprime}(t)$, а вместе с тем и вектор $S(t)$. Однако можно начать с задания произвольного вектора $S(t)$, а затем определить матрицу $\Omega(t)$, удовлетворяющую формулам (5). При этом матрица $\Omega(t)$ определится при заданном $S(t)$ и начальном значении $\Omega(0)$ (за которое может быть выбрана произвольная ортогональная матрица с определителем, равным $+1$) единственным образом.

Действительно, если $S(t)$, а вместе с тем и $\Sigma(t)$ даны, то условие $\Omega^{-1}\Omega' = \Sigma$ представляет собой не что иное, как линейное однородное дифференциальное уравнение для $\Omega(t)$. Следовательно, может существовать лишь единственная матрица $\Omega(t)$, соответствующая $S(t)$ или $\Sigma(t)$ и равная при $t = 0$ заданной матрице $\Omega(0)$. Вместе с тем такая матрица $\Omega(t)$ всегда существует, и так как $\Omega^{-1}\Omega' = \Sigma$, то она равна

$$\Omega \equiv \Omega(t) = \Omega(0)\exp\int_0^t \Sigma(\bar{t})\,d\bar{t}. \tag{7}$$

Действительно, интеграл от кососимметрической матрицы также является кососимметрической матрицей, а из § 60а с очевидностью следует, что e^{Θ} является ортогональной матрицей с определителем, равным $+1$, в случае любой кососимметрической матрицы Θ.

§ **68.** Нетрудно также показать, что вектор $S = S(t)$, соответствующий матрице $\Omega = \Omega(t)$, удовлетворяет условиям, указанным в § 65. Для этого достаточно лишь доказать (см. (5)), что если кососимметрическая матрица $\Omega^{\backprime}\Omega' = \Sigma = \Sigma(t)$ соответствует матрице $\Omega = \Omega(t)$, а следовательно, матрица $\bar{\Omega}^{\backprime}\bar{\Omega}' = \bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}(t)$ соответствует матрице $\bar{\Omega} = P\Omega P^{-1}$, где $P^{-1} = P^{\backprime} = \mathrm{const}$, то $\bar{\Sigma} = P\Sigma P^{-1}$. Действительно, матрица $\bar{\Sigma} = \bar{\Omega}^{\backprime}\bar{\Omega}'$ может быть записана в виде

$$(P\Omega P^{\backprime})^{\backprime}(P\Omega P^{\backprime}P)' = (P\Omega^{\backprime}P^{\backprime})(P\Omega' P^{\backprime}) = P\Omega^{\backprime}\Omega' P^{\backprime} = P\Sigma P^{-1}.$$

§ **69.** Тот факт, что соотношения, приведенные в §§ 66—67, являются ковариантными при преобразованиях $P = \mathrm{const}$ группы вращений, станет теперь очевидным, так как будет показано, что матричные операции в § 65 эквивалентны операциям с произведениями векторов.

С этой целью обозначим через $\Xi = \Xi(t)$ вектор, в который преобразуется вектор $X = X(t)$ евклидового пространства вращением $\Omega = \Omega(t)$ этого пространства. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Xi = \Omega X, \quad \Omega^{\backprime -1}\Omega(t) = \Omega = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{pmatrix}, \\ &X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Предположим, что функции $\Omega(t)$, $X(t)$ переменной t, а следовательно, и $\Xi(t)$ принадлежат классу $C^{(2)}$.

Очевидно, что знаки компонентов s_1, s_2, s_3 вектора $S = S(t)$, определяемого согласно (5), должны быть выбраны так, чтобы

$$\Sigma X = S \times X, \qquad (9_1)$$

$$\Sigma' X = S' \times X, \qquad (9_2)$$

$$\Sigma^2 X = (S \cdot X)S - (S \cdot S)X, \qquad (9_3)$$

где крестом и точкой обозначены векторное и скалярное умножение соответственно. При этом TX, где $T = \Sigma$, $\Sigma', \Sigma^2 (\Sigma' = \frac{d\Sigma}{dt}$,

$\Sigma^2 = \Sigma\Sigma$), обозначает вектор, в который преобразуется вектор X после преобразования с помощью матрицы T. Так как при дифференцировании матрицы Σ получим в соответствии с (8)

$$\Xi' = \Omega' X + \Omega X',$$

$$\Xi'' = \Omega X'' + 2\Omega' X' + \Omega'' X,$$

то из (5) и (6) видно, что

$$\Omega^{-1}\Xi' = X' + \Sigma X, \qquad (10_1)$$

$$\Omega^{-1}\Xi'' = X'' + 2\Sigma X' + (\Sigma' + \Sigma^2)X. \qquad (10_2)$$

Наконец, из (8), (9_1), (10_1), (9_2) и (10_2) получим

$$\Omega^{-1}\Xi' = X' + S \times X, \qquad (11_1)$$

$$\Omega^{-1}(\Xi \times \Xi') = X \times (X' + S \times X), \qquad (11_2)$$

$$\Omega^{-1}\Xi'' = X'' + 2S \times X' + S' \times X + (S \cdot X)S - (S \cdot S)X. \qquad (11_3)$$

Разумеется, через $A + B \times C + D$ обозначается матрица $A + (B \times C) + D$.

Заметим, что в силу (5) получим $S(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Omega(t) = \mathrm{const}$.

§ 70. Ниже мы будем отождествлять евклидово пространство, упомянутое в § 69, с пространством вектора Ξ, определяемого согласно (8). Таким образом, $X = \Omega^{-1}\Xi$ — координатный вектор во «вращающейся» системе координат (x, y, z), в который ортогональная матрица $\Omega^{-1} = \Omega^{-1}(t)$ (с определителем, равным $+1$) преобразует «не вращающуюся» систему координат (ξ, η, ζ). Соответственно этому можно подразумевать под $X = X(t)$ и $\Xi = \Xi(t) = \Omega(t)X(t)$ заданные траектории одной и той же частицы в двух системах координат, а под векторами Ξ' или Ξ'' и X' или X'' — абсолютные и относительные скорости или ускорения частицы.

Так как компоненты этих векторов скорости и ускорения параллельны координатным осям ξ, η, ζ и x, y, z соответственно, то из (8), т. е. из формулы $X = \Omega^{-1}\Xi$, с очевидностью следует, что проекции абсолютной скорости и абсолютного ускорения на оси x, y, z вращающейся системы координат равны компонентам векторов $\Omega^{-1}\Xi'$ и $\Omega^{-1}\Xi''$ соответственно.

Этот факт указывает на кинематический смысл формул (10_1), (10_2) или (11_1), (11_3).

§ 71. Для данной траектории $\Xi = \Xi(t)$ частицы в невращающейся системе координат (ξ, η, ζ) можно всегда выбрать вращение $\Omega(t)$ такое, что частица будет оставаться при любом t в плоскости (x, y) вращающейся системы координат $\Omega^{-1}(t)\Xi \equiv \equiv X : (x, y, z)$, т. е. будем иметь $z(t) \equiv 0$. При условии такого выбора $\Omega(t)$ соотношения (11_1), (11_2) приводятся с учетом (5) и (8) к виду

$$\Omega^{-1}\Xi' = \begin{pmatrix} x' - s_3 y \\ y' + s_3 x \\ s_1 y - s_2 x \end{pmatrix}, \qquad (12_1)$$

$$\Omega^{-1}(\Xi \times \Xi') = \begin{pmatrix} s_1 y^2 - s_2 xy \\ s_2 x^2 - s_1 xy \\ xy' - yx' + s_3(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \qquad (12_2)$$

поскольку также $z'(t) \equiv 0$, если $z(t) \equiv 0$.

Заметим, что условие $z(t) \equiv 0$ может быть удовлетворено для любой заданной функции $\Xi = \Xi(t)$ при существенно различном выборе $\Omega(t)$, так как можно преобразовать любое заданное вращение $\Omega(t)$ с помощью произвольного $\Omega_0 = \Omega_0(t)$ так, что ось z вращающейся координатной системы $X : (x, y, z)$ остается неизменной.

§ 72. То условие, что плоскость (x, y) вращающейся системы координат (x, y, z) вращается, оставаясь в плоскости (ξ, η) невращающейся координатной системы (ξ, η, ζ), может быть записано с помощью трех эквивалентных друг другу соотношений:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (13_1)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \varphi', \qquad (13_2)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix}. \qquad (13_3)$$

Действительно, соотношение (13_1) представляет собой тождество по t при соответствующей $\varphi = \varphi(t)$ тогда и только тогда, когда $z \equiv \zeta$. Условие же (13_2) является в силу (7) необходимым и достаточным для того, чтобы имело место (13_1).

Наконец, (13_3) эквивалентно в силу (5) условию (13_2).

§ **73.** Пусть траектория $\Xi = \Xi(t)$, рассмотренная в § 70, лежит в неизменной плоскости невращающейся координатной системы $\Xi : (\xi, \eta, \zeta)$. Тогда можно выбрать эту плоскость в качестве плоскости (x, y) вращающейся координатной системы $X : (x, y, z)$, удовлетворяющей условиям, при которых $z(t) \equiv 0$.

Учитывая условия (13_1), (13_2) и формулы (8), получим, что (11_1) и (11_3) могут быть записаны в виде

$$\Omega^{-1}\Xi' = \begin{pmatrix} x' - \varphi' y \\ y' + \varphi' x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (14_1)$$

$$\Omega^{-1}\Xi'' = \begin{pmatrix} x'' - 2\varphi' y' - \varphi'^2 x - \varphi'' x \\ y'' + 2\varphi' x' - \varphi'^2 y - \varphi'' x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (14_2)$$

в то время как (11_2) сводится к скалярному соотношению

$$\xi\eta' - \eta\xi' = xy' - yx' + \varphi'(x^2 + y^2). \qquad (14_3)$$

Действительно, тогда $z(t) \equiv 0$, $z'(t) \equiv 0$ и $z''(t) \equiv 0$.

§ **74.** Сравнивая §§ 68 и 72, можно заключить, что вращение, определяемое функцией $\Omega(t)$, является вращением вокруг подобранной соответствующим образом неподвижной оси тогда и только тогда, когда существует ортогональная матрица P, не зависящая от t и такая, что все элементы третьей строчки и третьего столбца кососимметрической матрицы $P\Sigma(t)P^{-1}$, где $\Sigma = \Omega^{-1}\Omega'$, равны нулю при всех t.

§ **75.** Из последнего замечания в § 58 вытекает, что любая кососимметрическая 3-матрица может быть приведена с помощью ортогонального преобразования к нормальной форме, причем все элементы третьей строки оказываются равными нулю. Поэтому из изложенного в § 72 следует, что $\Omega(t)$ определит вращение относительно некоторой неподвижной оси, если $\Sigma = \mathrm{const}$, т. е. все три компоненты s_i вектора S не зависят от t. (Это условие достаточное, но необходимое.) Согласно (7) такое вращение характеризуется функцией $\Omega(t) = \Omega(0)e^{t\Sigma}$, где Σ — произвольная кососимметрическая постоянная матрица.

§ **76.** В последующем t имеет произвольное фиксированное значение, а рассматриваемые матрицы постоянны. Для произвольной кососимметрической матрицы Θ положим

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

так что

$$\Theta^2 = (d_i d_k) - |D|^2 \mathrm{E},$$

где Е — единичная матрица и $|D|^2 = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^{1/2} \geqslant 0$ (см. (5), (6)).

Покажем, что 3-матрица Ω является ортогональной с определителем, равным $+1$, тогда и только тогда, когда существует кососимметрическая матрица Θ такая, что *)

$$\Omega = e^{\Theta}, \tag{16$_1$}$$

$$\Omega = \mathrm{E} + \frac{\sin|D|}{|D|}\Theta + \frac{1-\cos|D|}{|D|^2}\Theta^2. \tag{16$_2$}$$

Прежде всего с помощью (15) легко проверить, что

$$\det(\lambda \mathrm{E} - \Theta) = \lambda^3 + |D|^2\lambda.$$

Так как каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, то

$$\Theta^3 + |D|^2\Theta = 0$$

и

$$\Theta^{n+3} = -|D|^2\Theta^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Следовательно,

$$\Theta^{2n+1} = (-|D|^2)^n\Theta,$$

$$\Theta^{2n+2} = (-|D|^2)^n\Theta^2,$$

и, таким образом,

$$e^{\Theta} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Theta^n}{n!} = \mathrm{E} + \frac{\Theta}{|D|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n|D|^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\Theta^2}{|D|^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n|D|^{2n}}{(2n)!}\right). \tag{17}$$

Так как два последних ряда представляют $\sin|D|$ и $\cos|D|$ соответственно, то ясно, что (16$_2$) эквивалентно (16$_1$).

Далее заметим, что если матрица Θ определяется согласно (15) при частных значениях $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = \varphi$, то в соответствии с (17) матрица e^{Θ} может быть записана в виде (13$_1$).

---

*) Формулу (16$_2$) можно записать в виде

$$\Omega = \mathrm{E} + \Theta\,\mathrm{si}\,|D| + \frac{1}{2}\Theta^2\,\mathrm{si}^2\,\frac{1}{2}|D|,$$

где

$$\mathrm{si}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, для любой функции Ω вида (13_1) существует матрица $\Theta = -\Theta'$, удовлетворяющая соотношению (16_1). Если Ω — ортогональная матрица с определителем, равным $+1$, не представимая в частном виде (13_1), то в силу последнего замечания в § 58 существует ортогональная матрица P такая, что произведение $\mathrm{P}\Omega\mathrm{P}^{-1}$ приводится к (13_1). Однако в силу изложенного в § 57 имеем

$$\exp(\mathrm{P}\Theta\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{P}e^{\Theta}\mathrm{P}^{-1},$$

причем матрица $\mathrm{P}\Theta\mathrm{P}^{-1}$ является кососимметрической всякий раз, когда P — ортогональная и Θ — кососимметрическая матрица. Следовательно, для каждой ортогональной матрицы Ω с определителем, равным $+1$, существует кососимметрическая матрица Θ, удовлетворяющая соотношению (16_1). Справедливость обратного утверждения была уже отмечена в конце § 67.

§ 77. Пусть через I_i $(i = 1, 2, 3)$ обозначены матрицы, полученные по формуле (15) при $d_k = 1$ $(k = i)$, $d_k = 0$ $(k \neq i)$. Тогда произвольные матрицы Θ и Ω могут быть записаны с учетом (16_1) в виде

$$\Theta = d_1\mathrm{I}_1 + d_2\mathrm{I}_2 + d_3\mathrm{I}_3, \tag{18_1}$$

$$\Omega = \exp(d_1\mathrm{I}_1 + d_2\mathrm{I}_2 + d_3\mathrm{I}_3). \tag{18_2}$$

Так как в соответствии с (15) и (17) имеем

$$\left.\begin{aligned} &e^{\varphi\mathrm{I}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad e^{\varphi\mathrm{I}_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \\ &e^{\varphi\mathrm{I}_3} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

то ортогональная матрица $e^{\varphi\mathrm{I}_i}$ осуществляет поворот декартовой системы координат вокруг координатной оси i на угол φ $(i = 1, 3)$ или $-\varphi$ $(i = 2)$.

§ 78. Из изложенного в § 57 видно, что формула

$$\Omega = e^{\vartheta_1\mathrm{I}_1}e^{\vartheta_2\mathrm{I}_2}e^{\vartheta_3\mathrm{I}_3} \tag{20}$$

при $\vartheta_i = d_i$ $(i = 1, 2, 3)$ не эквивалентна (18_2). Однако справедлив тот факт, что 3-матрица Ω является ортогональной с определителем $+1$ тогда и только тогда, когда эта матрица может быть представлена с помощью трех чисел ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 в виде (20). Фактически выражение (20) не отличается существенно от обычного представления (21) матрицы Ω (в несимметричной форме), приведенного ниже.

Из рис. 1 видно, что от одного какого-либо положения $\Xi : (\xi, \eta, \zeta)$ декартового трехгранника можно прийти к другому $X : (x, y, z)$ с помощью поворота трехгранника на соответствующие углы сначала вокруг оси ζ, затем вокруг оси ξ в ее новом положении и, наконец, вокруг оси ζ в ее новом положении. То же самое можно сказать о переходе от $X : (x, y, z)$ к $\Xi : (\xi, \eta, \zeta)$. Если учесть (19), то можно заключить, что 3-матрица Ω ортогональна и $\det \Omega = +1$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена с помощью трех «эйлеровых углов» ι, ν, ω как произведение

$$\Omega = e^{\nu I_3} e^{\iota I_1} e^{\omega I_3}. \qquad (21)$$

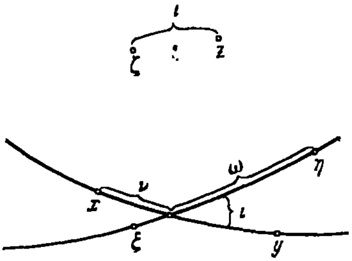

Рис. 1.

Так как $(e^{\Theta})^{-1} = e^{-\Theta}$ (см. § 57), то из (15), (16) видно, что при переходе от Ω к Ω^{-1} меняются знаки величины d_i. Вместе с тем $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}\Gamma^{-1} = (\mathrm{AB}\Gamma)^{-1}$. Следовательно, учитывая (21), получим, что

$$\Omega^{\backprime} = \Omega^{-1} : \{\iota, -\omega, -\nu\}, \qquad (22)$$

если $\Omega : (\iota, \nu, \omega)$. В силу (19) произведение $e^{\nu I_3} e^{\iota I_1}$ равно

$$e^{\nu I_3} e^{\iota I_1} = \begin{pmatrix} \cos\nu & -\cos\iota\sin\nu & \sin\iota\sin\nu \\ \sin\nu & \cos\iota\cos\nu & -\sin\iota\cos\nu \\ 0 & \sin\iota & \cos\iota \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Умножая (23) справа на матрицу $e^{\omega I}$, получим, учитывая (19), следующее явное выражение для матрицы (21):

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\nu\cos\omega - \\ -\sin\nu\sin\omega\cos\iota\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos\nu\sin\omega - \\ -\sin\nu\cos\omega\cos\iota\end{matrix} & \sin\nu\sin\iota \\ \begin{matrix}\sin\nu\cos\omega + \\ +\cos\nu\sin\omega\cos\iota\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\nu\sin\omega + \\ +\cos\nu\cos\omega\sin\iota\end{matrix} & -\cos\nu\sin\iota \\ \sin\omega\sin\iota & \cos\omega\sin\iota & \cos\iota \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Очевидно, что (24) эквивалентно основной формуле сферической тригонометрии. Элементы этой матрицы представляют собой не что иное, как девять направляющих косинусов (см. рис. 1).

ГЛАВА II
ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

ЛОКАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 79. В последующем будем обозначать через **X** заданную область изменения m-вектора $x = (x_i)$ в евклидовом пространстве, а через $f(x)$ — заданную m-вектор-функцию $f = (f_i)$, принадлежащую в **X** некоторому классу $C^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$.

Обозначим через $|y|$ длину (евклидову) m-вектора y. Тогда для каждой точки x^0 области **X** найдется, очевидно, положительное число $\alpha = \alpha(x^0)$, не превосходящее b/B, где $b = b(x^0)$ — столь малое положительное число, что окрестность $|x - x^0| < b$ точки x^0 содержится в **X**, а $|f(x)|$ обладает при $|x - x^0| < b$ конечной верхней границей $B = B(x^0, b(x^0)) = B(x^0)$. Так же очевидно, что число α (>0) может быть выбрано независимым от x^0, если x^0 принадлежит некоторой замкнутой и ограниченной *) подобласти в **X**.

Известно, что система m обыкновенных дифференциальных уравнений, записанная в виде

$$x' = f(x), \tag{1}$$

обладает одним и только одним решением $x = x(t)$ **), которое в произвольно заданный момент $t = t^0$ достигает произвольно заданной точки x^0 области **X**. Это решение $x = x(t)$ системы (1) существует, по крайней мере, при $t^0 - \alpha < t < t^0 + \alpha$, где $\alpha = \alpha(x^0) = b/B$. Наконец, $|x(t) - x^0| < b$ при $|t - t^0| < \alpha$.

Если обозначить через Δ дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} f_i(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2a}$$

---

*) При этом подразумевается компактность этой подобласти **X**, т. е. применимость в ней теоремы покрытия Гейне — Бореля.

**) Заметим, что этому решению соответствует некоторая траектория в области изменения x, допускающая единственное параметрическое представление $x = x(t)$.

где $(f_i) = f$, $(x_i) = x$, то в соответствии с (1) интегральные кривые $x = x(t)$ отличаются от произвольных кривых $x = x(t)$ в пространстве x тем, что вдоль интегральной кривой удовлетворяется соотношение

$$(F(x,t))' = \Delta F(x, t), \tag{2}$$

где $F(x, t)$ — произвольная скалярная или векторная функция класса $C^{(1)}$ в $(m+1)$-мерной области (x, t).

Так как правая часть (1) не содержит явно время t, то из теоремы единственности следует, что решение $x = x(t)$, рассматриваемое как функция от $x^0 = x(t^0)$, t^0, t, является функцией лишь x^0 и $t - t^0$, т. е.

$$x = \mathrm{x}(x^0, t - t^0), \qquad (\mathrm{x}(x^0, 0) = x^0). \tag{3}$$

Также известно, что если $f(x)$ принадлежит классу $C^{(\nu)}$ в X, то m-вектор-функция $\mathrm{x}(x^0, t)$ — решение (1), а также частная производная $\mathrm{x}_t(x^0, t)$ принадлежат классу $C^{(\nu)}$ в $(m+1)$-мерной области (x^0, t). Эта область представляет собой произведение *) пространства X^* на интервал $-\alpha < t < \alpha$, причем X^* есть некоторая область, состоящая из тех точек x^0 области X, замыкание которых ограничено и содержится в X, так что число $\alpha > 0$ выбирается для всех x^0 в X^* независимо от x^0.

Наконец, известно, что якобиева матрица x_{x^0} является в рассматриваемой $(m+1)$-мерной области (x^0, t) неособенной, т. е. что

$$\det \mathrm{x}_{x^0}(x^0, t) \neq 0 \qquad (\mathrm{x}_{x^0}(x^0, 0) = E). \tag{4}$$

Таким образом, если подставить (3) в (1) и продифференцировать полученное n-векторное тождество по каждому из n компонентов x^0, то с учетом правила дифференцирования определителей получим **), что

$$(\lg \det \mathrm{x}_{x^0})' = \operatorname{div} f. \tag{4a}$$

Заметим, что если $t - t^0$ фиксировано и $|t - t^0| < \alpha$, то в соответствии с (4) отображение (3) области x^0 на область x в X^* принадлежит классу $C^{[\nu]}$ в смысле определения, данного в § 5.

Обратное отображение определяется формулой

$$x^0 = \mathrm{x}(x, t^0 - t), \tag{5}$$

где x — та же функция, которая выписана в (3). Действительно, каждой точке области X и каждому моменту t соответствует одна и только одна интегральная кривая, так что эквивалентность (5)

---

*) См. примечание к § 9.

**) Расходимость $\operatorname{div} f$ для $f = f(x)$ определяется как след якобиевой матрицы f_x (о следе матрицы см. примечание к § 137).

и (3) следует из возможности замены начального положения конечным, и наоборот.

Конечно, переход от (3) к (5) является законным лишь тогда, когда x^0 лежит в некоторой области $\mathbf{X}^*$, которая обладает ограниченным замыканием, содержащимся в $\mathbf{X}$, а значения $|t-t^0|$ меньше некоторой постоянной, зависящей от $\mathbf{X}^*$. В частности, нельзя быть уверенным в существовании фиксированного $t(\neq t^0)$ такого, что функция (3) определена при этом t и всех x^0, принадлежащих $\mathbf{X}$. Этот факт ведет к очевидным осложнениям. Мы не будем их всегда подчеркивать, но о них нельзя забывать.

§ 80. Пусть дана l-вектор-функция $G=G(x, t)$ класса $C^{(1)}$ в рассматриваемой $(m+1)$-мерной области (x, t). Предположим, что

(i) в этой области существует по крайней мере одна точка (x, t), в которой $G(x, t)=0$, и

(ii) если $x=x(t)$ — некоторая интегральная кривая для (1), то условие $G(x(t), t)=0$ или удовлетворяется при всех t, или, наоборот, не удовлетворяется ни при каком t вдоль этой интегральной кривой.

Тогда система l соотношений, отвечающих условию $G(x, t)=0$, называется инвариантной системой для уравнений (1). Из (2) видно, что (i), (ii) можно также выразить, потребовав, чтобы

(ia) l-векторное условие $G(x, t)=0$ не было противоречивым в $(m+1)$-мерной области (x, t);

(iia) условие $\Delta G(x, t)$ удовлетворялось тождественно в области (x, t) в силу $G(x, t)=0$.

Скалярная инвариантная система ($l=1$) называется инвариантным соотношением. Если $l>1$, то каждое из l скалярных соотношений, составляющих инвариантную систему $G(x, t)=0$, может не представлять собой инвариантное соотношение. Например, если $x=\xi(t)$ — некоторое частное решение (1), то $G(x, t)=0$, где $G(x, t)\equiv x-\xi(t)$ представляет собой, очевидно, инвариантную систему $l=m$ уравнений.

§ 81. Множество $\mathbf{X}^*$, которое состоит из точек x, лежащих в области $\mathbf{X}$, и содержит по крайней мере одну точку, называется инвариантным множеством для (1), если оно обладает следующим свойством: для каждой точки x^* множества $\mathbf{X}^*$ существует достаточно малое положительное число $\rho=\rho(x^*)$ такое, что если $x=x(t)$ — некоторое решение, для которого $x^*=x(t^*)$ при соответствующем $t=t^*$, то точка $x(t)$ принадлежит множеству $\mathbf{X}^*$ для всех t, при которых $|x(t)-x^*|<\rho$.

Очевидно, что если инвариантное соотношение $G=0$ консервативно в указанном в § 18 смысле, т. е. если G зависит только от x вместо того, чтобы быть функцией x и t, то $G(x)=0$ представит уравнение, определяющее инвариантное множество. По существу, понятия инвариантного множества и консервативной инвариантной системы, по-видимому, едва ли различимы. Однако замкнутое инвариантное множество $\mathbf{X}^* : G(x) = 0$ может иметь для (1) довольно сложную структуру даже тогда, если функции $f(x)$ и $G(x)$ очень гладкие (так что этот вопрос приобретает интерес лишь в случае ограничения аналитичности).

§ 82. В соответствии с изложенным в § 80, соотношение $G(x, t) = 0$ является в случае скалярной функции $G \equiv 0$ класса $C^{(1)}$ инвариантным тогда и только тогда, когда оно определяет в области (x, t) гиперповерхность, на которой функция $\Delta G(x, t)$ от (x, t) обращается тождественно в нуль. Возможен такой случай, что функция $\Delta F(x, t)$, соответствующая некоторой скалярной функции $F(x, t)$ класса $C^{(1)}$, обращается в нуль не только на гиперповерхности $F(x, t) = 0$, но и во всей области (x, t). В противоположность сказанному в § 80 это будет тогда и только тогда, когда соотношение $\Delta F(x, t) = 0$ удовлетворяется тождественно само по себе (а не в силу соотношения $F(x, t) = 0$, что требовалось бы согласно (*iia*) § 80). Функция $F(x, t)$ представляет тогда решение линейного уравнения в частных производных $\Delta F = 0$, записываемого согласно (2а). Так как каждое начальное условие (x^0, t^0) определяет интегральную кривую $x = x(t)$, то из (2) видно, что указанный случай имеет место тогда и только тогда, когда $(F(x(t), t))' = 0$, т. е. когда $F(x(t), t) = c = \mathrm{const}$ вдоль каждой интегральной кривой $x = x\ (t)$ уравнения (1). Тогда скалярную функцию $F(x, t)$ (не вырождающуюся в постоянную в $(m + 1)$-мерной области (x, t) или соотношение $F(x, t) = c$, где c — произвольная постоянная, называют интегралом уравнения (1).

Разумеется, значение c, соответствующее какой-то определенной интегральной кривой $x = x(t)$, является в силу равенства $F(x^0, t^0) = c$ функцией начальных условий $x^0 = x(t^0)$, t^0. Если c имеет фиксированное значение c_0, то соотношение $F(x, t) = c_0$ не есть интеграл, а записанное в виде

$$G(x, t) \equiv F(x, t) - c_0 = 0$$

оно представляет лишь инвариантное соотношение. Действительно, если функция $G(x, t)$ есть интеграл, то она не должна содержать постоянную интегрирования.

В соответствии с изложенным в § 18 назовем интеграл $F(x, t)$ консервативным, если он не содержит t. Тогда $F(x) = c_0$, где $c_0 = f(x_0)$, определяет интегральную гиперповерхность, проходящую через точку $x = x^0$. Эта «гиперповерхность» может состоять из единственной точки и представляет всегда инвариантное множество (см. § 81).

Очевидно, что любая скалярная функция интегралов уравнения (1) также представляет собой интеграл уравнения, если только она принадлежит классу $C^{(1)}$ и не вырождается в постоянную. Следовательно, можно рассматривать l интегралов $F_1, \ldots, F_l$ как независимые, если только функции $F_1(x, t), \ldots, F_l(x, t)$ являются независимыми в указанном в § 18 локальном смысле.

Из формулы (5), представляющей обращение (3), видно, что скалярные компоненты m-вектор-функции $\mathrm{x}(x, t^0 - t)$ представляют собой m интегралов уравнения (1), причем эти m интегралов являются в силу (4) независимыми.

Все упомянутые m независимых интегралов могут не зависеть от t лишь в том случае, если $f(x) \equiv 0$. Действительно, пусть уравнение (1) имеет m независимых консервативных интегралов $F_1(x) = c_1, \ldots, F_m(x) = c_m$. Тогда любая интегральная кривая должна представлять собой линию пересечения гиперповерхностей $F_i(x) = c_i$, причем $c_i = F_i(x(t^0))$. Так как m-функции $F_1, \ldots, F_m$ являются независимыми, а гиперповерхности лежат в m-мерном пространстве x, то, полагая $c = (c_i)$, получим, что $x(t) = c$ вдоль каждой интегральной кривой $x = x(t)$. Отсюда следует, что в уравнении (1) $f(x) \equiv 0$. Наоборот, если $f(x) \equiv 0$, то равенства $x_1 = c_1, \ldots, x_m = c_m$ представляют собой m независимых консервативных интегралов системы (1).

Хотя m консервативных независимых интегралов уравнения (1) существуют лишь при условии, что $f(x) \equiv 0$, однако это уравнение всегда имеет $m - 1$ консервативных независимых интегралов $F_1(x), \ldots, F_{m-1}(x)$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно исключить соответствующим образом $t^0 - t$ из m независимых интегралов, представляющих компоненты m-векторного соотношения (5). Разумеется, что полученные таким образом $m - 1$ независимых интегралов $F_1(x), \ldots, F_{m-1}(x)$ имеют лишь чисто локальное значение не только по отношению к t (см. конец § 79), но и по отношению к x.

§ 83. Несмотря на возможные осложнения, о чем упоминалось в конце § 79, говорят иногда о семействе всех решений $x = x(t)$ уравнения (1) и называют (3) общим решением (вместе с тем формула (5), где t^0 фиксировано, представляет m интегралов этого уравнения).

Решение $x = x(t)$ уравнения (1) назовем равновесным решением, если траектория $x = x(t)$ представлена в области x одной точкой $x = x^0 = x(t^0)$. Это будет тогда и только тогда, когда $f(x^0) = 0$, поскольку равенство $x'(t) = 0$ не может выполняться для единственного значения $t = t^0$, если оно не выполняется для всех t, так что $x(t) \equiv x^0$. Действительно, пусть функция $x = x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) в некотором t-интервале, содержащем момент $t = t^0$. Если $x'(t^0) = 0$, то $0 = f(x^0)$ и, таким образом, $x(t) \equiv x^0$ есть одно (и только одно в силу единственности) решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t^0) = x^0$. В соответствии с этим точка $x = x^0$ пространства x называется точкой равновесия, если $f(x^0) = 0$. В частности, исключительный случай существования m независимых консервативных интегралов (§ 82) можно рассматривать как такой, когда любая точка x есть точка равновесия.

Следует отметить, что если решение $x = x(t)$ уравнения (1) не является равновесным, то соответствующая интегральная кривая в пространстве x имеет при каждом t касательную и не имеет точек возврата. Действительно, если это не так, то мы получили бы, что $x'(t_0) = 0$ при некотором $t = t^0$ и, следовательно, $x'(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv x(t^0)$.

§ 84. Без потери общности можно положить $t^0 = 0$, так что общее решение (3) уравнения (1) запишется в виде $x = \mathrm{x}(x^0, t)$, где $x^0 = \mathrm{x}(x^0, 0)$. Предположим, что дано частное решение $x = \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)$, соответствующее некоторому фиксированному $x^0 = \bar{x}^0$, и пусть известно, что оно существует не только в некотором малом t-промежутке в силу локальной теоремы существования (§ 79), но и в достаточно широком промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$. Подразумевается, что точка $x = \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)$ принадлежит при $0 \leqslant t \leqslant M$ рассматриваемой области X, введенной в § 79.

Покажем, что сколь велико ни было бы данное число $M \neq \infty$), можно выбрать такое малое $\delta > 0$, что решение $x = \mathrm{x}(x^0, t)$ уравнения (1) существует во всем промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$, если начальное условие $\mathrm{x}(x^0, 0) = x^0$ удовлетворяет неравенству $|x^0 - \bar{x}^0| < \delta$.

С этой целью рассмотрим при произвольном $\eta > 0$ область X_η тех точек пространства x, для которых $|x - \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)| < \eta$ по крайней мере при одном значении t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$. Так как множество X, введенное в § 79, открытое, то можно выбрать положительное η столь малым, что X_η содержится в замкнутом и ограниченном подмножестве множества X. Тогда положительное число α, указанное в § 79, можно выбрать так, что оно будет пригодным для любой точки $x = x_0$ области X_η. Другими словами, если $x = x_0$ — некоторая точка X_η, а $t = t_0$ — некоторая точка оси t, то решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, существует во всяком случае в интервале $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$, где α не зависит от x_0 и t. Выберем t_0 внутри промежутка $0 \leqslant t \leqslant M$. Тогда, поскольку значения x_0 и t_0 определяют вместе одно и только одно локальное решение, видно, что справедливость высказанного выше утверждения следует из теории покрытия Гейне-Бореля.

Так как функция $\mathrm{x}(x^0, t)$ в силу изложенного в § 79 непрерывна, а следовательно, равномерно непрерывна на каждом замкнутом и ограниченном множестве, то при любом $\varepsilon > 0$ можно утверждать о существовании такого $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что

$$|\mathrm{x}(x', t) - \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)| < \varepsilon$$

при $0 \leqslant t \leqslant M$ всякий раз, когда $|x^0 - \bar{x}^0| < \delta$.

Заметим, что все это справедливо независимо от того, насколько велик конечный фиксированный промежуток $[0, M]$, на котором предполагается существование частного решения $\mathrm{x}(\bar{x}^0, t)$.

§ 85. Так как функция $\mathrm{x}(x^0, t)$ принадлежит согласно изложенному в § 79 к классу $C^{(\nu)}$, где $\nu \geqslant 1$, то, применяя формулу Тейлора, получим, что

$$\mathbf{x}(x^0, t) = \mathrm{x}(\bar{x}^0, t) + R(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0)\,^{*)} \tag{6}$$

равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$ при $x^0 \to \bar{x}^0$, причем

$$R(t) = (\mathrm{x}_{x^0}(x^0, t))_{x^0 = \bar{x}^0} \tag{7}$$

обозначает *якобиеву матрицу* для $\mathrm{x}(x^0, t)$ по x^0, вычисленную при $x^0 = \bar{x}^0$. В силу (4) $R(0) = E$. Можно рассматривать формулу (6) как приближенное представление общего решения $\mathrm{x}(x^0, t)$.

Весьма существенным является то обстоятельство, что для составления матрицы (7), а вместе с тем и приближенной формулы (6) требуется знание общего решения не исходной системы (1), а лишь линейной системы

$$\xi' = A(t)\xi, \tag{8}$$

где $A(t)$ — известная m-матричная функция t, а именно якобиева $f_{\mathrm{x}}(x)$ вдоль данного частного решения $x = \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)$ системы (1):

$$A(t) = (f_{\mathrm{x}}(x))_{x = \mathrm{x}(\bar{x}^0, t)}. \tag{9}$$

Действительно, пусть ξ_i есть i-й компонент m-вектора $\xi = \xi(t)$, удовлетворяющего системе (8), и пусть через $\xi^k(t)$ обозначено при фиксированном $k (= 1, \ldots, m)$ частное решение этой системы, удовлетворяющее m начальным условиям $\xi_i^k(0) = e_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, причем e_{ik} — единичная матрица. Тогда если m решений $\xi^1(t), \ldots, \xi^m(t)$ известны, то, поскольку k-й столбец матрицы

---

*) О символе o см. примечание в § 11.

$R(t)$ составляется из компонентов вектора $\xi^k(t)$, становится известной и эта матрица. Это утверждение эквивалентно условию

$$R'(t) = A(t)R(t), \tag{10}$$

причем $R(0) = E$ в силу (7). Справедливость же этого условия может быть доказана следующим образом.

В соответствии с изложенным в § 79 классу $C^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$, принадлежит не только функция $\mathrm{x}(x^0, t)$, но и ее производная $\mathrm{x}_t(x^0, t) \equiv x'(x^0, t)$. Следовательно, в силу (6)

$$\mathrm{x}'(x^0, t) = \mathrm{x}'(\bar{x}^0, t) + R'(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0|) \tag{11}$$

равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$ при $x^0 \to \bar{x}^0$. Кроме того, функция $x(t) = \mathrm{x}(x^0, t)$ представляет собой решение системы (1) при произвольном x^0, в частности, и при $x^0 = \bar{x}^0$. Таким образом,

$$\mathrm{x}'(x^0, t) - \mathrm{x}'(\bar{x}^0, t) = f(\mathrm{x}(x^0, t)) - f(\mathrm{x}(\bar{x}^0, t)).$$

Однако, учитывая (6) и (9) и применяя формулу Тейлора, получим, что

$$f(\mathrm{x}(x^0, t)) = f(\mathrm{x}(\bar{x}^0, t)) + A(t)R(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0|).$$

Следовательно,

$$\mathrm{x}'(x^0, t) - \mathrm{x}'(\bar{x}^0, t) = A(t)R(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0|)$$

или (согласно (11))

$$R'(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0|) = A(t)R(t)(x^0 - \bar{x}^0) + o(|x^0 - \bar{x}^0|),$$

что и доказывает полностью (11), поскольку x^0 — произвольный постоянный вектор, близкий к $\bar{x}^0$.

§ 86. В соответствии с (9) матрица $A(t)$ коэффициентов системы (8) m однородных линейных скалярных дифференциальных уравнений для $\xi = (\xi_i)$ определяется для заданной системы (1) однозначно данным решением $x = \mathrm{x}(x^0, t)$. Это частное решение будем обозначать далее $\bar{x}(t)$. Систему (8) с матрицей коэффициентов (9) будем называть «системой уравнений Якоби, соответствующей данному решению $x = \bar{x}(t)$ системы (1)». Любое же решение $\xi = \xi(t)$ системы (8) (а не только какое-либо из m решений $\xi = \xi^k(t)$, рассмотренных в § 85) назовем «смещением решения $x = \bar{x}(t)$ системы (1)» *). По существу, подразумевается при этом инфинитезимальное смещение, так как указанная терминология предназначена только для описания следующего факта.

---

*) В литературе (8) часто называют уравнениями в вариациях, а $\xi = \xi(t)$ — вариацией решения $x = \bar{x}(t)$. (*Прим. перев.*)

Пусть $\xi = \xi(t)$ — некоторая m-вектор-функция класса $C^{(1)}$ в промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$, и пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр, не зависящий от t. Тогда функция $\bar{x}(t) + \varepsilon\xi(t)$ от t удовлетворяет уравнению (1) с точностью до членов выше первого порядка относительно ξ в том и только в том случае, если $\xi(t)$ представляет собой смещение решения $x = \bar{x}(t)$ системы (1). Другими словами, данный m-вектор $\xi(t)$ будет или не будет обладать тем свойством, что равномерно по t при $0 \leqslant t \leqslant M$

$$(\bar{x}(t) + \varepsilon\xi(t))' = f(\bar{x}(t) + \varepsilon\xi(t)) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

в зависимости от того, представляет или не представляет этот вектор решение системы (8). Для доказательства достаточно обратить внимание на то, что в силу (9) и формулы Тейлора имеем

$$f(\bar{x}(t) + \varepsilon\xi(t)) = f(\bar{x}(t)) + \varepsilon A(t)\xi(t) + o(\varepsilon),$$

и, поскольку по предположению $\bar{x}'(t) = f(\bar{x}(t))$, (12) эквивалентно соотношению

$$\varepsilon\xi'(t) = \varepsilon A(t)\xi(t) + o(\varepsilon).$$

Так как $\xi(t)$ и $A(t)$ не зависят от ε, то отсюда следует, что (12) эквивалентно (8).

§ 87. Пусть $x = x(t, \varepsilon)$ есть n-вектор-функция класса $C^{(1)}$ в прямоугольнике $0 \leqslant t \leqslant M$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mathrm{const}$, и пусть эта функция при каждом фиксированном ε удовлетворяет уравнению (1) и обращается при $\varepsilon = 0$ в рассмотренное выше решение $\bar{x}(t)$. Тогда частная производная

$$\xi(t) = x_\varepsilon(t, 0) \tag{13}$$

представит решение системы (8). Доказательство такое же, какое приводилось в конце § 86.

Так как в соответствии с § 84 каждое решение $\bar{x}(t)$ можно включить в выбранное надлежащим образом семейство решений $x(t, \varepsilon)$ и так как, в частности, m решений $\xi^k(t)$ системы (8), рассмотренных в § 85, имеют вид (13), то сразу видно, что и любое решение $\xi(t)$ системы (8) может быть представлено с помощью семейства $x(t, \varepsilon)$ в виде (13).

Если $F(x)$ — интеграл системы (1), то $F(x(t, \varepsilon))$ является в силу § 82 функцией одного только ε.

Следовательно, составляя производную от $F(x(t, \varepsilon))$ по ε при $\varepsilon = 0$, найдем, что скалярное произведение

$$\xi(t) \cdot F_x(\bar{x}(t)) = \mathrm{const} \tag{14}$$

вдоль решения (13) системы (8), а следовательно, и вдоль любого решения $\xi(t)$ этой системы.

Заметим теперь, что если $\bar{x}(t)$ есть решение системы (1), то функция $x(t+\text{const})$ также представляет решение (1). Применяя формулу (13) к семейству $x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t+\varepsilon)$, получим, что система (8) всегда допускает решение

$$\xi = \bar{x}'(t). \tag{15}$$

§ 88. Если $y = y(x)$ — отображение класса $C^{[2]}$ области x на область y (см. § 5), то система (1) и ее интегральная кривая $x = \bar{x}(t)$ преобразуются в систему $y' = g(y)$ и в соответствующую интегральную кривую $y = \bar{y}(t)$. Пусть $\eta(t)$ — произвольное смещение решения $\bar{y}(t)$ системы $y' = g(y)$, так что в соответствии с (8) и (9)

$$\eta' = B(t)\eta, \tag{16}$$

где

$$B(t) = (g_y(y))_{y=\bar{y}(t)}. \tag{17}$$

Тогда если $S(t)$ обозначает матрицу, аналогичную матрице $R(t)$ в формуле (7), то $S(t)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (10):

$$S'(t) = B(t)S(t).$$

Явная связь между $S(t)$ и $R(t)$ чрезвычайно сложна и ее нельзя вывести с помощью якобиевой матрицы $y_x \equiv J = J(t)$ отображения $y = y(x)$ вдоль интегральной кривой $x = \bar{x}(t)$. Соответственно связь между коэффициентами матриц (9) и (7) соответствующих якобиевых систем (8), (16) не выражается только через матрицу J.

К счастью, матричное дифференциальное уравнение

$$T'(t) = B(t)T(t) \tag{16$_1$}$$

имеет решение $T(t)$, находимое более легко, чем частное решение $\text{T}(t) = S(t)$, рассмотренное выше. Действительно, функция $J(t)R(t)$ также удовлетворяет уравнению (16$_1$), т. е.

$$\tilde{R}'(t) = B(t)\tilde{R}(t), \tag{18}$$

где

$$\tilde{R}(t) = J(t)R(t), \qquad J(t) = y_x(\bar{x}(t)), \qquad \det J \neq 0. \tag{18$_1$}$$

Этот факт легко проверить с помощью (9), (10), (17) и выражения $g(y)$ через $f(x)$ и якобиеву матрицу $J = y_x$.

§ 89. Для того чтобы якобиева система (8), соответствующая решению $x = \bar{x}(t)$, имела постоянную матрицу A коэффициентов, достаточно, как видно из (9), чтобы решение $\bar{x}(t)$ системы (1) не зависело от t, т. е. было бы равновесным решением. В этом случае интегрирование системы (8) требует лишь нахождения характеристических чисел и инвариантных множителей матрицы A.

Характеристические числа матрицы A, т. е. корни s уравнения $\det(sE - A) = 0$, назовем характеристическими показателями уравнения $\xi' = A\xi$. Про чисто мнимые показатели (включая нуль) говорят, что они устойчивого типа. Очевидно, что если любое решение $\xi(t)$ уравнения $\xi' = A\xi$ остается ограниченным при $t \to \pm\infty$, то все характеристические показатели должны быть устойчивого типа. Обратное утверждение несправедливо, так как уже в случае одного кратного инвариантного множителя матрицы A общее решение уравнения $\xi' = A\xi$ содержит «вековые» члены.

Ясно, что уравнение $\xi' = A\xi$ тождественно якобиевой системе по отношению к любому решению $\xi = \bar{\xi}(t)$.

§ 90. Начиная с § 79 мы предполагали, что правая часть уравнения (1) не зависит явно от t. Однако это не приводит к потере общности, так как можно рассматривать t как $(m+1)$-ю переменную x_{m+1}. Действительно, пусть вместо (1) дано уравнение $x' = f(x, t)$, где $f = (f_i)$, $x = (x_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда, полагая $f_0 = 1$, $x_0 = t$ (так что $x_0{}^0 = t^0$), заменяем уравнение $x' = f(x, t)$ следующим:

$$^*x' = {}^*f(^*x),$$

где $^*f = (f_j)$, $^*x = (x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Например, можно сказать, что (14) является интегралом системы (8), если только $F_x(\bar{x}(t))$ не обращается в нуль при всех t (см. § 82).

ГАМИЛЬТОНОВЫ И ЛАГРАНЖЕВЫ СИСТЕМЫ

§ 91. Пусть $H = H(x, t)$ — функция Гамильтона, для которой $H_x(x, t)$ принадлежит к классу $C^{(1)}$ в $(2n+1)$-мерной области (x, t). Тогда система (см. обозначения в § 19)

$$x' + \mathrm{I}H_x(x, t) = 0 \qquad (\mathrm{I}^{-1} = -\mathrm{I}) \tag{1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p' &= -H_q(p, q, t), \\ q' &= H_p(p, q, t) \end{aligned}\right\} \tag{1$_1$}$$

называется соответствующей гамильтоновой системой уравнений.

Очевидно, что две такие системы, соответствующие функциям Гамильтона H_1 и H_2, эквивалентны одна другой тогда и только тогда, когда разность $H_1 - H_2$ не зависит от x. Поэтому, если система (1) консервативна, т. е. если $H_x(x, t)$ не зависит от t, то можно полагать, что и функция $H(x, t)$ консервативна, т. е. что $H_t \equiv 0$.

Полагая $f(x, t) = -\mathrm{I}H_x(x, t)$, можно записать (1) в виде

$$x' = f(x, t). \tag{1_2}$$

В частности, если $F = F(x, t)$ — некоторая функция класса $C^{(1)}$ в $(2n+1)$-мерной области (x, t), то полная производная по t функции $F(x, t) = F(x(t), t)$ вдоль любой интегральной кривой $x = x(t)$ системы (1) равна в силу (19) § 20

$$F' = F_t + F_x \cdot x' = F_t - F_x \cdot \mathrm{I}H_x \equiv F_t + (H; F),$$

так что в силу (24_1) § 21 $F' = \nabla F$. Это означает, что в случае гамильтоновой системы можно заменить Δ в (2) § 79 на ∇, т. е. что при любой функции $F = F(x, t)$ имеем

$$\Delta F = F' = F_1 + (H; F)\ \nabla F \tag{2}$$

вдоль интегральной кривой $x = x(t)$ системы (1).

§ 92. В соответствии с (25) § 21 функция $\nabla(F^1; F^2)$ переменных x, t обращается тождественно в нуль каждый раз, когда обращаются в нуль ∇F^1 и ∇F^2 (функции F^1 и F^2 предполагаются класса $C^{(2)}$). Поэтому из (2) и из определения интеграла (§ 82) следует, что если F^1 и F^2 суть интегралы системы (1), то либо функция $(F^1; F^2)$ переменных x и t сводится к постоянной (например, это будет тогда, когда F^1 и F^2 находятся в инволюции; см. § 23), либо $\nabla(F^1; F^2)$ также является интегралом системы (1). В последнем случае $(F^1; F^2)$ может не являться новым интегралом системы (1), т. е. независимым по отношению к F^1 и F^2 (см. §§ 23—24).

Из (2) и изложенного в § 82 видно, что консервативная функция $F(x)$ класса $C^{(1)}$, не являющаяся постоянной, есть интеграл системы (1) тогда и только тогда, когда она находится в инволюции с функцией Гамильтона $H(x, t)$ при любом фиксированном t. Так как $(G; G) \equiv 0$ (см. § 20), то из (2) также видно, что если $H(x, t) \equiv 0$ (т. е. если $f \equiv 0$; см. § 82), то сама функция $H(x, t)$ является интегралом системы (1) в том и только в том случае, когда $H_t \equiv 0$. Таким образом консервативные гамильтоновы системы вида (1) характеризуются существованием «интеграла энергии»

$$H(x) = h, \tag{3}$$

где $h = \mathrm{const} = H(x^0)$, так что постоянная h интеграла энергии является функцией класса $C^{(2)}$ от $2n$ начальных значений, соответствующих $2n$-вектору $x^0 = x(t^0)$.

§ 93. Неконсервированная гамильтонова система (1) с n степенями свободы может быть заменена консервативной гамильтоновой системой

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{p}_j' = -\mathrm{H}_{\mathrm{q}_j}(\mathrm{p},\mathrm{q}),\\ &\mathrm{q}_j' = \mathrm{H}_{\mathrm{p}_j}(\mathrm{p},\mathrm{q})\\ &(j = 0, 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

с $(n+1)$ степенями свободы, где $\mathrm{q}_j = q_i$, $\mathrm{p}_j = p_i$ для $j = i > 0$ (см. также §§ 9а, 90). К такой системе мы придем, если примем время t за $(n+1)$-ю координату и определим консервативную функцию Гамильтона $H(p, q)$, положив

$$\mathrm{H}(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = H(p, q; q_0) + \mathrm{p}_0, \qquad (5)$$

$$q_0 = t,$$

где p_0 пока произвольно. Очевидно, что та группа уравнений (4), в которых $j > 0$, совпадает с уравнениями (1). При $j = 0$ мы получим уравнения

$$\mathrm{p}_0' = -H_t(p, q, t), \quad q_0' = 1,$$

так что

$$(\mathrm{H}(\mathrm{p}, \mathrm{q}))' = 0 \qquad q_0 = t - \bar{t}.$$

Следовательно, постоянная интегрирования, $\bar{t}$ должна быть взята равной нулю. Равенство $(H(p, q))' = 0$ удовлетворяется вдоль любого решения консервативной системы (4), так как эта система имеет интеграл энергии $\mathrm{H}(\mathrm{p}, q) = \mathrm{h} = \mathrm{const}$. Поскольку к H и H можно добавить произвольные постоянные, то выберем $h = 0$, так что $\mathrm{H}(\mathrm{p}, q) = 0$. Тогда из (5) видно, что импульс p_0, канонически сопряженный с координатой $\mathrm{q}_0 = t$, равен $p_0 = -H(p, q, t)$.

§ 94. Предположим, что функция Гамильтона (1) обладает в $(2n+1)$-мерной области (p, q, t) не обращающимся в нуль n-строчным гессианом $\det(H_{p_ip_k}(p, q, t))$. Тогда гамильтоновы величины $p, q, H(p, q, t)$ и $\det(H_{p_ip_k}) \neq 0$ оказываются в силу преобразования (1_1)—(1_2) § 15 эквивалентными лагранжевым величинам q', q, $L(q', q, t)$ и $\det(L_{q_i'q_k'}) \neq 0$ соответственно. Так как соотношение (17) § 19 удовлетворяется в силу этого точечного преобразования тождественно, то гамильтонова система

$$x' + \mathrm{I}H_x = 0$$

для интегральных кривых $x = x(t)$ в $2n$-мерном фазовом пространстве $x = (p, q)$ эквивалентна лагранжевой системе

$$[L]_q = 0 \tag{6}$$

$$\left([L]_{q_i} \equiv \sum_k q_k{}'' L_{q_i' q_k'} + \sum_k q_k{}' L_{q_i' q_k} + L_{q_i' t} - L_{q_i};\ \text{см. § 9}\right)$$

для интегральных кривых $q = q(t)$ в n-мерном позиционном пространстве q. При этом эквивалентные уравнения (1) и (6) будут первого и второго порядка соответственно.

Так как $\det(L_{q'_i q'_k}(q', q, t)) \neq 0$ в $(2n + 1)$-мерной области (q', q, t), то (6) можно разрешить по отношению к q''. Поэтому если через $z = (z_j)$ обозначен $2n$-мерный вектор с компонентами $z_i = q_i$, $z_{i+n} = q_i$, $i = 1, \ldots, n$, равными компонентам n-векторов $r = q'$ и q, то (6) можно переписать в виде

$$z' = g(z, t).$$

К этому уравнению применимы результаты, полученные в § 90 и предыдущих. Заметим, что если записать (1) и (6) в виде

$$x' = f(x, t), \quad z' = g(z, t)$$

и если f принадлежит классу $C^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$, то функция g может и не принадлежать тому же классу $C^{(\nu)}$. Это обстоятельство оказывается особенно неприятным в случае $\nu = 1$, и оно показывает, что уравнения (1) более предпочтительны, чем (6). Если $\det(H_{p_i p_k})$ или $\det(L_{q'_i q'_k})$ обращаются в нуль, то *) переход от (1) к (6) или от (6) к (1) уже не может быть определен формулами § 15. Локальные теоремы существования (§§ 79—90) применимы к (1) также и тогда, когда $\det(H_{p_i p_k}) = 0$, однако они неприменимы к (6), если $\det(L_{q'_i q'_k}) = 0$. Поэтому в случаях, когда рассматриваются не только уравнения (1), но и (6), будем предполагать, что оба упомянутых гессиана не обращаются в нуль.

Следует указать, что если $G(q)$ — скалярная функция класса $C^{(2)}$ в позиционном пространстве, то к L в системе (6) можно добавить не только постоянную, но также и линейную форму $G_q(q)q' \equiv (G(q))'$ переменных q_i', так как $[G_q \cdot q']_q \equiv 0$ по определению $[\ \ ]_q$.

§ 95. Если $q = q(\bar{q}, t)$ — координатное преобразование типа, рассмотренного в § 10, и если в соответствии с § 10 определена

---

*) Однако из вариационного исчисления известно, что в частном случае, когда $\lambda L(q', q) \equiv L(\lambda q', q)$, $\lambda > 0$, $\det(h_{q'_i q'_k}) = 0$, не возникает фактически трудностей, если ранг матрицы $(L_{q_i q'_k})$ равен $n - 1$.

функция $\bar{L}(\bar{q}', \bar{q}, t)$, то формула (8) § 10 показывает, что лагранжевы уравнения инвариантны. Это справедливо, конечно, при условии, что $\det q_{\bar{q}} \neq 0$. В § 343 будет приведен интересный для астрономии (а в §§ 340—342 более общий) пример того, насколько неверными могут быть результаты, если заменить уравнения $[\mathrm{L}]_q = 0$ уравнениями $[\bar{L}]_q = 0$ в случае, когда n скалярных соотношений, определяющих преобразование $q = q(\bar{q}, t)$ или $q = q(\bar{q})$, являются зависимыми, так что якобиан $\det q_q \equiv 0$.

Инвариантность лагранжевой системы (6) при применении преобразования $q = q(\bar{q}, t)$ класса $C^{[2]}$, а также последнее замечание в § 94 становятся очевидными, если заметить, что система (6) эквивалентна (если исключить из рассмотрения разрывные экстремали) условию

$$\bar{\delta} \int L(q', q, t)\, dt = 0 \qquad (7)$$

для экстремалей $q = q(t)$ с фиксированными границами *), выводимому в вариационном исчислении.

§ 96. Если для данной функции $L(q', q, t)$ известно семейство координатных преобразований, зависящее от параметра ε, стремящееся к тождественному преобразованию при $\varepsilon \to 0$, удовлетворяющее условиям дифференцируемости § 11 и оставляющее функцию $L(q', q, t)$ инвариантной в смысле § 11а, или по крайней мере в смысле § 11, то лагранжевы уравнения $[\mathrm{L}]_q = 0$ имеют интеграл

$$f(q', q, t) \cdot L_{q'}(q', q, t) = \mathrm{const} \qquad (\text{если } f \cdot L_{q'} \not\equiv \mathrm{const}), \qquad (8)$$

где n-вектор-функция f есть результат дифференцирования формул преобразования по ε и последующей подстановки $\varepsilon = 0$. Действительно, (8) вытекает из (11) § 11, поскольку $[L]_q = 0$.

§ 96а. Используя (4) § 9 вместо (11) § 11, увидим, что система (6) имеет интеграл

$$-L + q' \cdot L_{q'} = h = \mathrm{const} \qquad (\text{если } -L + q' \cdot L_{q'} \not\equiv \mathrm{const}) \qquad (9)$$

тогда и только тогда, когда $L_t \equiv 0$, т. е. когда $L = L(q', q)$. Однако ничего нового нам это не дает, так как (9) совпадает с интегралом энергии (3) (см. (1_1), (2_1) § 15).

§ 97. Рассмотрим, как и в § 14, две функции $t^{\mathrm{I}}(c)$ $t^{\mathrm{II}}(c)$ и семейство кривых $q = q(c, t)$, удовлетворяющих условию дифференцируемости § 14. Предположим далее, что m $(\geqslant 1)$ компонентов

---

*) В силу этого ограничения символ $\bar{\delta}$ в (7) означает, что величины $t^{\nu}(c)$ и $q(t^{\nu}(c))$ в § 14 предполагаются не зависящими от c.

параметрического вектора $c = (c_j)$ будут постоянными интегрирования для лагранжевой системы $[L]_q = 0$, где $L = L(q', q, t)$, так что кривые $q = q(c, t)$ для каждого фиксированного c являются интегральными кривыми данной лагранжевой системы $[L]_q = 0$. Тогда формула (19) § 14 сводится в силу (1_1)—(2_1) § 15 к следующей:

$$\delta S = -(H)_{t=t^{\mathrm{II}}}\delta t^{\mathrm{II}} + (H)_{t=t^{\mathrm{I}}}\delta t^{\mathrm{I}} + (p)_{t=t^{\mathrm{II}}}\delta(q)_{t=t^{\mathrm{II}}} - \\ -(p)_{t=t^{\mathrm{I}}}\delta(q)_{t=t^{\mathrm{I}}}, \qquad (10)$$

где в соответствии с (18) § 14 и (20) § 14

$$S \equiv S(c) = \int\limits_{t^{\mathrm{I}}(c)}^{t^{\mathrm{II}}(c)} L(q'(c,t), q(c,t), t)\,dt, \qquad (11_1)$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial c_j} dc_j. \qquad (11_2)$$

Если, в частности, система консервативна, то соотношение (9) выполняется для любого решения с постоянной интеграла энергии, равной $h = H$ (и являющейся, разумеется, функцией $h = h(c)$ постоянных интегрирования c_j). Поэтому (10) перепишется в виде

$$\delta S(c) = -h\delta t^{\mathrm{II}} + h\delta t^{\mathrm{I}} + (p)_{t=t^{\mathrm{II}}}\delta(q)_{t=t^{\mathrm{II}}} - (p)_{t=t^{\mathrm{I}}}\delta(q)_{t=t^{\mathrm{I}}}. \qquad (12)$$

Заметим, что постоянные интегрирования не обязательно независимы, т. е. их число m не обязательно меньше числа степеней свободы системы n.

Мы используем в дальнейшем дополнительно тот факт, что для функции, зависящей лишь от c_j, и, в частности, для $f = c$ справедливо в силу (11_2) соотношение $\delta f(c) = df(c)$

§ 98. Предположим, что семейство $q = q(c, t)$, рассмотренное в § 97, имеет следующую частную структуру:

$$q = q(c, t) \equiv q(q^0, \bar{q}, t^0, \bar{t}, t), \quad q^0 = (q)_{t=t^0}, \quad \bar{q} = (q)_{t=\bar{t}}, \qquad (13)$$

где $t^0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, так что постоянные $q^0 = (q_i^0)$, $\bar{q} = (\bar{q}_i)$ определяют «начальное» и «конечное» положения в позиционном пространстве на интегральных кривых семейства (13). Величины t^0, $\bar{t}$ суть две дополнительные постоянные интегрирования, которые можно рассматривать как независимые параметры.

В соответствии с (13) m параметров c_j § 97 могут быть выражены через $2n + 2$ постоянных интегрирования q_i^0, $\bar{q}_i$, t^0, $\bar{t}$. Следовательно, положив $t^0 = t^{\mathrm{I}}$, $\bar t = t^{\mathrm{II}}$, можем записать (11_1) в виде

$$S \equiv S(q^0, \bar q, t^0, \bar t) = \int_{t^0}^{\bar t} L(q', q, t)\,dt, \tag{14}$$

где $q = q(q^0, \bar q, t^0, \bar t)$. В то же время соотношение (10) сводится в силу последнего замечания в § 97 к следующему:

$$dS = -(H)_{t=\bar t}\cdot d\bar t + (H)_{t=t^0}\cdot dt^0 + (p)_{t=\bar t}\cdot d\bar q - (p)_{t=t^0}\cdot dq^0.$$

Из этого соотношения видно, что частные производные функции (14) равны

$$S_{q^0} = -(p)_{t=t^0}, \qquad S_{\bar q} = (p)_{t=\bar t}, \tag{15$_1$}$$

$$S_{t^0} = (H)_{t=t^0}, \qquad S_{\bar t} = -(H)_{t=\bar t}. \tag{15$_2$}$$

§ 99. Если функция L консервативна $L = L(q', q)$, то согласно изложенному выше (см. § 79) величины $\bar t$ и t^0 входят в (13) лишь в виде разности $\bar t - t^0$. Вместе с тем в силу (3) функция H равна вдоль любой интегральной кривой значению h, не зависящему от t. Следовательно, (13) и (15_2) можно записать в виде

$$q = q(q^0, \bar q, \bar t - t^0, t), \tag{16$_1$}$$

$$S_{t^0} = h, \qquad S_{\bar t} = -h. \tag{16$_2$}$$

Подстановка (16_1) в (9) показывает, что постоянная энергии h является функцией постоянных интегрирования q^0, $\bar q$.

Последние определяют в силу (13) два различных положения на одной и той же интегральной кривой в позиционном пространстве.

Учитывая (16_1), увидим, что h — функция одного лишь q^0:

$$h = h(q^0), \qquad q^0 = (\overset{0}{q_i}). \tag{17}$$

Используя (14) и (17), определим функцию W постоянных интегрирования q^0, $\bar q$, t^0, t по формуле

$$W = S + h(q^0)(\bar t - t^0) \equiv \int_{t^0}^{\bar t} (L + h)\,dt, \tag{18}$$

так что W не зависит от t^0 и $\bar t$, т. е. $W = W(q^0, \bar q)$.

Действительно, (16_2) показывает, что частные производные суммы (18) по t^0 и $\bar t$ обращаются тождественно в нуль. Так как функция S выражается через q^0, $\bar q$, t^0, $\bar t$, то ее частная производная S_h с учетом (17) также равна тождественно нулю. Таким образом, из (18) получим, что

$$\bar t - t^0 = W_h(q^0, \bar q). \tag{19}$$

Кроме того, S является линейной функцией разности $\bar{t}-t^0$, а не величин $\bar{t}$ и t^0 в отдельности. Наконец, подынтегральное выражение в (18) равно $p\cdot q'$ в силу интеграла энергии $H=h$ и соотношения $L=-H+p\cdot q'$ (см. § 15). Следовательно,

$$\int\limits_{t^0}^{\bar{t}} L(q',q)\,dt = S \equiv S(q^0,\bar{q},\bar{t}-t^0), \tag{20₁}$$

$$W(q^0,\bar{q}) = \int\limits_{t^0}^{\bar{t}} p\cdot q'dt. \tag{20₂}$$

Формула (20₂) показывает, что криволинейный интеграл $\int p\cdot dq$ есть функция точек q^0, $\bar{q}$ на концах интегральной кривой в позиционном пространстве *).

§ 100. Переходя к другому примеру приложения § 97, предположим **), что данное семейство частных решений $q=q(c,t)$ консервативной лагранжевой системы $[L]_q=0$ состоит из замкнутых кривых в n-мерной области q и, следовательно, $q(c,t+\tau)\equiv q(c,t)$ для каждого c и некоторого периода $\tau=\tau(c)>0$.

Предположим далее, что функция $\tau=\tau(c)$ от c принадлежит классу $C^{(1)}$ ***). Тогда τ — однозначная функция лишь постоянной интеграла энергии h, т. е. период $\tau(c)$ зависит не от отдельных постоянных интегрирования c_j, составляющих $c=(c_j)$, а лишь от их комбинации $h=h(c)$.

Для доказательства заметим сначала, что поскольку $q(c,t)$ имеет период $\tau=\tau(c)$, то $q'(c,t)$ и $p=p(c,t)$ также имеют тот же период (см. (1₁) § 15, где по предположению функция L не зависит явно от t). Следовательно, полагая $t^{\mathrm{II}}(c)=\tau(c)$, $t^{\mathrm{I}}(c)=0$

---

*) Это замечание вместе с изложенным в § 13а представляет собой основу теории поля в вариационном исчислении. Однако соотношения §§ 98, 99 значительно менее содержательны, чем соответствующие соотношения теории поля. Фактически соотношения в §§ 98—99 не связаны с понятием и с существованием поля экстремалей (Бельтрами, Вейерштрасс, Пуанкаре, Гильберт) и были выведены значительно раньше (Гамильтон, Якоби).

**) Результат этого параграфа, часто вновь открываемый в математической литературе, восходит к ранним усилиям в области классической статистической механики, когда старались отыскать аналогию между теоремами обычной (т. е. не статистической) механики и вторым законом термодинамики.

***) Это предположение существенно. Оно не удовлетворяется при фиксированном $c=\bar{c}$, если, например, $\tau(c)$ ведет себя в окрестности $c=\bar{c}$ так, как $|c-\bar{c}|^{1/2}$ или как кубичный корень из $(c-\bar{c})^2$. Этим объясняется тот факт, что для семейства периодических решений ограниченной проблемы трех тел период является однозначной функцией постоянной интеграла энергии лишь в некоторой локальной области, но не в большой.

в (11_1), увидим, что соотношение (12) сведется в силу (11_2) к следующему:

$$\delta S(c) = -h(c)\delta\tau(c).$$

Действительно, второй член в правой части (12) тождественно обращается в нуль, а третий сокращается с четвертым. Так как символ (11_2), применяемый к функциям лишь одного c, может быть заменен символом d полного дифференцирования в области изменения c, то $dS = -h\,d\tau$. Так как

$$d(h\tau) = h\,d\tau + \tau\,dh,$$

то, обозначая через $W = W(c)$ функцию $S + \tau h$ от c *), можем написать $dW = \tau\,dh$. Теперь $dW(c) = \tau(c)\,dh(c)$ показывает, что если m постоянных интегрирования c_j, входящих в $h = h(c)$, варьируются таким образом, что $h(c)$ остается без изменений, то $W(c)$ также не изменяется. Это означает, что W — функция одного лишь h. Это справедливо также и для производной W по h. Так как соотношение $dW = \tau\,dh$ показывает, что эта производная существует и равна именно периоду τ, то доказательство можно считать законченным. Также видно, что τ не зависит от h (т. е. все решения семейства имеют общий период) тогда и только тогда, когда функция $W = W(h)$, а вместе с тем и функция $S(h) \equiv W(h) - \tau(h)h$ линейны относительно h.

§ **101.** Предполагая далее, что системы (1) и (6) обе консервативны, можем применить результаты, изложенные в § 85, к какому-либо определенному решению $x = \bar{x}(t)$ системы (1) или к соответствующему решению $q = \bar{q}(t)$ системы (6). Из определений (8) — (9) § 85 сразу видно, что уравнения Якоби, определяющие смещение решения $x = \bar{x}(t)$ системы (1) или решения $q = \bar{q}(t)$ системы (6), представляют собой также гамильтонову или лагранжеву систему соответственно, а именно

$$\mathrm{I}\xi' = \mathrm{H}_\xi, \quad \mathrm{H}(\xi, t) = \frac{1}{2}\xi \cdot H_{xx}(\bar{x}(t))\,\xi \qquad (21_1)$$

или

$$[\mathrm{L}]_\varkappa = 0, \quad \mathrm{L}(\varkappa', \varkappa, t) = \frac{1}{2}\zeta L_{zz}(\bar{z}(t))\,\zeta. \qquad (21_2)$$

В этих уравнениях $2n$-матрицы квадратичных форм H, L представляют собой матрицы Гесса гамильтоновой или лагранже-

---

*) Здесь функция W вводится произвольно. Однако ниже, в §§ 116а, 118 мы увидим, что эта функция имеет более глубокий и более общий смысл. См. также (18) — (20) § 99.

вой функции $H(x)$, $L(z)$ вдоль данного решения, а $x = (x_j)$, $z = (z_j)$ суть $2n$-векторы с компонентами

$$x_i = p_i, \quad x_{i+n} = q_i,$$

$$z_i = q_i, \quad z_{i+n} = q_i.$$

Наконец, ξ и ζ представляют собой смещения решений $x = \bar{x}(t)$, $z = \bar{z}(t)$ соответственно (см. § 86), причем $\zeta = (\varkappa', \varkappa)$.

Легко далее проверить, что гамильтонова и лагранжева функции H и L связаны друг с другом в смысле определения, данного в § 15.

Так как система (1), где $H_t \equiv 0$, обладает интегралом (3), то из (14) § 87 видно, что уравнения в вариациях для решения $x = \bar{x}(t)$ системы (1) имеют интеграл

$$\xi \cdot H_x(\bar{x}(t)) = \mathrm{h}, \tag{22}$$

где $\mathrm{h} = \mathrm{const}$, если $H_x(x) \equiv 0$.

§ 102. Если смещение решения $x = \bar{x}(t)$, т. е. решение $\xi = \xi(t)$ уравнений (21_1) таково, что постоянная h интеграла (22) обращается в нуль, то $\xi = \xi(t)$ называется изоэнергетическим смещением решения $x = \bar{x}(t)$. Это означает, по существу, что те смещения (т. е. согласно § 86 те инфинитезимальные смещения), для которых постоянная энергии $h = H(\bar{x}(t))$, соответствующая данному решению, удовлетворяет соотношению

$$H(\bar{x}(t) + \mathrm{h}\xi(t)) = h + o(|\mathrm{h}|),$$

характеризуются обращением в нуль постоянной h интеграла (22). В то же время для любого смещения, т. е. для любого решения $\xi = \xi(t)$ уравнений (21_1) и для соответствующей этому решению постоянной h интеграла (22) справедливо соотношение

$$H(\bar{x}(t) + \mathrm{h}\xi(t)) = h + O(|\mathrm{h}|)^{*)}$$

Рассуждения при доказательстве этого утверждения те же, что и в конце § 86. Из изложенного в § 86 далее видно, что и при $\mathrm{h} = 0$ и при $\mathrm{h} \neq 0$ функция $\bar{x}(t) + \mathrm{h}\xi(t)$ не представляет собой решение системы (1), (поэтому $o(|\mathrm{h}|)$, $O(|\mathrm{h}|)$ должны рассматриваться так же, как функции t), однако оценки $o(|\mathrm{h}|)$, $O(|\mathrm{h}|)$ удовлетворяются равномерно в промежутке $0 \leqslant t \leqslant M$ (см. § 86).

Эти факты становятся понятными, если рассмотреть, как и в § 87, семейство решений $x = x(t, \varepsilon)$ системы (1), обращающихся при $\varepsilon = 0$ в решение $x = \bar{x}(t)$. Очевидно, что для решений этого

---

*) Под $O(\varepsilon)$ и $o(\varepsilon)$ подразумеваются такие величины, что $|O(\varepsilon)/\varepsilon| < \mathrm{const}$, $|o(\varepsilon)/\varepsilon| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

семейства постоянная интеграла энергии (3) является функцией $h = h(\varepsilon)$ параметра ε. Предположим теперь, что данное семейство состоит из изоэнергетических решений системы (1), т. е. что h не зависит от ε. Тогда частные смещения $\xi(t)$ решения $x(t, \varepsilon)$, находимые по формуле (13) § 87, представят изоэнергетические смещения для $\bar{x}(t) \equiv x(t, 0)$, поскольку очевидно, что постоянная h интеграла (22) обращается в нуль. То же самое справедливо и тогда, когда производная от $h(\varepsilon)$ обращается в нуль только при $\varepsilon = 0$, но не при любом ε.

Так как для решений $\bar{x}(t)$, $\bar{x}(t + \varepsilon)$ системы (1) постоянная энергии не зависит в силу (3) от ε, то смещение $\xi(t) = \bar{x}'(t)$, упоминавшееся в конце § 87, является изоэнергетическим.

РЕШЕНИЯ И КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 103. Значение теории, развитой в §§ 27—46, заключается в том, что преобразование фазового пространства, рассмотренное в § 17, переводит любую систему Гамильтона также в систему Гамильтона тогда и только тогда, когда это преобразование является каноническим.

Это вытекает из изложенного в § 26а, где соотношение (2), если положить в нем $\Gamma = y_x$, удовлетворяется тождественно для любого преобразования $y = y(x, t)$. Если преобразование $y = y(x, t)$ является каноническим, то в силу изложенного в § 27 системы

$$\mathrm{I}x' = H_x(x, t), \tag{1$_1$}$$

$$\mathrm{I}y' = K_y(y, t), \tag{1$_2$}$$

где

$$K = \mu H(x(y, t), t) + R(y, t),$$

являются эквивалентными друг другу при любой $H(x, t)$, причем множитель μ и функция R зависят только от преобразования $y = y(x, t)$, но не от $H(x, t)$. Действительно, в силу § 27

$$\Gamma \mathrm{I} \Gamma^{\backprime} = \mu \mathrm{I}, \tag{2$_1$}$$

$$\mathrm{I}y_t = R_y, \tag{2$_2$}$$

где

$$y_t = y_t(y, t), \qquad R(y, t),$$

причем функция $\Gamma = \Gamma(y, t)$ представляет собой якобиеву $2n$-матрицу y_x, а $y_t = y_t(y, t)$ — частную производную, определенную в § 17.

В дальнейшем мы будем использовать следующее свойство соотношения (2$_2$), представляющего необходимое условие для того, чтобы преобразование $y = y(x, t)$ являлось каноническим.

Если заменить в (2_2) частную производную $y_t = y_t(y, t)$ в $(2n+1)$-мерном пространстве (y, t) полной производной $y' = y'(t)$ вдоль кривой в фазовом пространстве, то (2_2) представит тогда не что иное, как гамильтонову систему с функцией Гамильтона R. Описывая это свойство, обычно говорят, что канонические преобразования являются контактными преобразованиями.

§ 104. Пусть $x = x(c, t)$ — общее решение системы (1_1), причем, в отличие от изложенного в § 83 $2n$ постоянных интегрирования c_j, составляющие вектор $c = (c_j)$, не обязательно являются начальными значениями $x_i{}^0 = x_i(t_0)$, но могут быть произвольными независимыми комбинациями последних.

Другими словами, x^0 заменяется произвольным вектором $c = (c^0)$ с не обращающимся в нуль якобианом $\det c_{x^0}$. Разумеется, вектор $c = c(x^0)$, а следовательно, и соответствующее общее решение $x = x(c, t)$ должны удовлетворять необходимым условиям дифференцируемости.

Если множество c постоянных интегрирования c_i для системы (1_1) таково, что преобразование c в x, определяемое формулой общего решения $x = x\ (c,\ t)$, является каноническим преобразованием с множителем $\mu = 1$, то c_j называются каноническими постоянными интегрирования для (1_1).

Оказывается, что этот случай имеет место тогда и только тогда, когда консервативное преобразование $x = x(c,\ t_0)$ при выбранном соответствующим образом t_0 является каноническим с множителем $\mu = 1$.

Необходимость этого условия очевидна из первого замечания в § 36, которое также показывает, что если существует одно t_0, то тогда можно выбирать t_0 произвольно. Для того чтобы доказать достаточность этого условия, изменим обозначения, полагая y, x, R вместо x, c, H соответственно. Тогда вместо уравнения (1_1) и его общего решения $x = x(c, t)$ имеем

$$Iy' = R_y(y, t), \tag{3_1}$$

$$y = y(x, t). \tag{3_2}$$

Таким образом,

$$Iy'(x, t) = R_y(y(x, t), t),\quad y'(x, t) \equiv y_t(x, t).$$

Следовательно, если функция $x = x(y, t)$ является обратной по отношению к (3_2), то, положив

$$R(y,\ t) = R(y(x(y,\ t),\ t),\ t),$$

$$y_t(y,\ t) = y_t(x(y,\ t),\ t)$$

и учитывая соглашение о дифференцируемости в § 17, увидим, что условие (2_2) § 103 удовлетворяется. Другими словами, условие (i) § 36 заключается в требовании существования такого t_0.

при котором консервативное преобразование $y = y(x, t_0)$ является каноническим. Так как это условие, по предположению, удовлетворяется, то доказательство можно считать законченным.

§ 104а. В силу § 104 переход от начальных значений переменных гамильтоновой системы к каким-либо каноническим постоянным интегрирования представляет собой консервативное каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$. Однако в силу изложенного в § 35 это преобразование является тогда полностью каноническим (т. е. таким, при котором функция Гамильтона не изменяется, см. § 34).

§ 105. Если $x = x(x^0, t)$ — общее решение какой-либо определенной канонической системы вида (1_1), в котором роль постоянных интегрирования играют $2n$ начальных значений $x_i{}^0$ в момент $t = t_0$, то $y = y(x, t)$, где $y = x^0$, есть каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$ и остаточной функцией R такой, что R совпадает с функцией Гамильтона H системы (1_1).

Действительно, применяя критерий, указанный в § 104, к $c = x^0$ и замечая, что $x = x(x^0, t_0)$ представит тождественное преобразование $x = x^0$ (являющееся каноническим с множителем $\mu = 1$), увидим, что постоянные интегрирования $x_i{}^0$ являются для системы (1_1) каноническими. Это означает, что $y = y(x, t)$, где $y = x^0$, есть каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$.

Так как остаточная функция $R(y, t)$ зависит только от преобразования $y = y(x, t)$, но не от преобразуемой канонической системы, то можно определить R, применяя преобразование $y = y(x, t)$ к какой-либо частной системе.

Выберем такую систему вида (1_1), общее решение которой представит вектор-функцию, обратную по отношению к $y = y(x,t)$, где $y = x^0$. Поскольку тогда $x^0 = \mathrm{const}$, $\mu = 1$, система (1_2) вырождается в следующую:

$$0 = H_y + R_y.$$

В силу § 27 получим отсюда $R = -H$, что и требовалось доказать.

§ 105а. Так как из условия $\mu = 1$ вытекает в силу § 32, что $\det \Gamma = 1$, то отображение $x = x(x^0, t)$ области $x^0 = x(t_0)$ на область $x = x(t)$ в $2n$-мерном фазовом пространстве сохраняет при любом фиксированном t не только объем, но и ориентацию независимо от гамильтоновой функции $H(x, t)$ системы (1_1). Вместе с тем формула $x = x(x^0, t)$ определяет в силу § 34 полностью каноническое преобразование лишь тогда, когда $R \equiv 0$. Однако, поскольку $R = -H$, в этом случае получим, что $H \equiv 0$, т. е. что (1_1) вырождается в тривиальную систему, для которой любое решение есть равновесное решение (см. § 82).

§ 106. Предположим, что дана гамильтонова система

$$I\mathbf{x}' = \mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{x}, t),$$

общее решение которой зависит от совокупности $x = (x_i)$ канонических постоянных интегрирования x_i. Тогда если к произвольной гамильтоновой системе

$$\mathrm{I}x' = H_x(x, t)$$

применить преобразование $y = \mathbf{x}(x, t)$, то мы придем к гамильтоновой системе

$$\mathrm{I}y' = K_y(y, t)$$

с гамильтоновой функцией $K(y, t)$, равной $K = H + \mathbf{H}$. Действительно, мы имеем $\mu = 1$. Поэтому соотношение $K = H + \mathbf{H}$ эквивалентно в силу (1_2) условию, что остаточная функция для преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, t)$ равна $\mathbf{H}$ или же (см. § 31) что остаточная функция для преобразования $x = x(\mathbf{x}, t)$ равна $-\mathbf{H}$. Однако этот факт очевиден из изложенного в § 105 (и в § 104а), поскольку формула $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, t)$ представляет общее решение системы

$$\mathrm{I}\mathbf{x}' = \mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{x}, t),$$

выраженное с помощью совокупности $x = (x_i)$ канонических постоянных интегрирования.

§ 107. Очевидно, что можно сформулировать изложенное в § 106 также в обратном порядке.

Пусть известно общее решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, t)$ некоторой частной гамильтоновой системы

$$\mathrm{I}\mathbf{x}' = \mathbf{H}_\mathbf{x}(\mathbf{x}, t),$$

выраженное с помощью $2n$ канонических постоянных интегрирования x_i. Тогда если применить к любой гамильтоновой системе $\mathrm{I}y' = K_y(y, t)$ преобразование $y = \mathbf{x}(x, t)$, то мы придем к гамильтоновой системе $\mathrm{I}x' = H_x(x, t)$ с функцией Гамильтона

$$H(x, t) = K(\mathbf{x}(x, t), t) - \mathbf{H}(\mathbf{x}(x, t), t). \tag{4}$$

Этот результат представляет собой знаменитое правило «вариации постоянных интегрирования (канонических)» в теории возмущений.

§ 108. Пусть дана любая гамильтонова система вида (1_1) с

$$H(x,t)=H(p,q,t),\qquad x_i=p_i,\qquad x_{i+n}=q_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

Тогда теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (Коши, Гамильтон, Якоби) связывает эту систему с уравнением (так называемым уравнением Якоби.— *Прим. перев.*)

$$S_t+H(S_q,q,t)=0\qquad (q=(q_i),\quad i=1,\dots,n)\qquad (5)$$

относительно неизвестной скалярной функции $S=S(q,t)$ в рассматриваемой $(n+1)$-мерной области (q,t). Интегральные кривые системы (1_1) являются «характеристиками» этого дифференциального уравнения в частных производных, содержащего лишь частные производные S_t, S_{q_1}, ..., S_{q_n} неизвестной функции S, но не саму функцию S *).

Если v_1, ..., v_n — постоянные интегрирования и функция

$$S=S(t,q,v),\qquad (6)$$

где $q=(q_i)$, $v=(v_i)$, представляет при фиксированном v решение (5) и если эта функция принадлежит классу $C^{(2)}$ в $(2n+1)$-мерной области (t, q, v), причем в этой области определитель n-го порядка

$$\det(S_{q_i v_k}(t,q,v))\neq 0\qquad (S_{q_i\ k}=S_{v_k\ i},\ i,k=1,\dots,n),\qquad (7)$$

то $S(t,q,v)$ называется полным интегралом уравнения (5).

§ 109. Пусть имеется некоторый полный интеграл (6) уравнения (5). Тогда если мы положим

$$\left.\begin{aligned} S_q(t,q,v)&=p,\\ S_v(t,q,v)&=-u \end{aligned}\right\}\qquad (8)$$

и

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=x,\quad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=y,$$

---

*) Не следует смешивать уравнение (почти всегда нелинейное) в частных производных (5) первого порядка относительно функции, зависящей от $(n+1)$ независимых переменных t, q_i, с линейным уравнением в частных производных

$$\nabla F=F_t+(H;F)=0,$$

которое определяет интегралы $F(x,t)$ системы (1_1), зависящие от $2n+1$ переменных t, $x_i=p_i$, $x_{i+n}=q_i$ (см. (2) § 91 и § 82).

то компоненты $y_i = u_i$, $y_{i+n} = v_i$ $2n$-вектора y образуют совокупность канонических постоянных интегрирования для (1_1).

Действительно, соотношения (7), (8) совпадают с (22), (23) § 46, независимо от того, удовлетворяет или нет функция (6) уравнению (5). Следовательно, формулы (8) определяют каноническое преобразование $y = y(x, t)$ с множителем $\mu = 1$ и остаточной функцией $R = S_t$ (см. (21) § 46). Однако поскольку функция (6) удовлетворяет, по определению, уравнению (5) при фиксированном v, то первая из формул (8) дает, что $S_t + H = 0$, где $H = H(p, q, t)$. Так как $R = S_t$, $\mu = 1$, то $\mu H + R = 0$, т. е. гамильтонова функция $K = K(y, t)$ системы (1_2), в которую преобразовывается система (1_1) при подстановке $y = y(x, t)$, обращается тождественно в нуль. Другими словами, преобразование $y = y(x, t)$ таково, что $\mathrm{I}y' \equiv 0$, т. е. $y'(t) \equiv 0$ вдоль любой интегральной кривой $x = x(t)$ системы (1_1). Таким образом, поскольку преобразование $y = y(x, t)$ является каноническим с множителем $\mu = 1$, то $2n$ компонент вектора y будет ничем иным, как постоянными интегрирования и именно каноническими постоянными интегрирования для системы (1_1).

§ 110. Доказанный результат можно интерпретировать двояким образом. Действительно, утверждается, что если функция (6) есть полное решение уравнения (5) и если через $y = y(x, t)$ обозначается локально топологическое преобразование, которое неявно определено формулами (8), то

(i) компоненты $y_i(x, t)$ вектора $y = y(x, t)$ представляют собой $2n$ независимых интегралов системы (1_1) или же, другими словами, функция $x = x(y, t)$ есть общее решение системы (1_1) с $2n$ независимыми постоянными интегрирования y_i;

(ii) величины y_i образуют совокупность канонических постоянных интегрирования для системы (1_1).

Очевидно, что утверждение (i) нельзя рассматривать как результат, который можно было бы практически использовать для интегрирования системы, поскольку полный интеграл уравнения в частных производных (5) найти едва ли легче, чем общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1_1) *). Поэтому фактическая ценность результата заключается не

---

*) Фактически единственное известное в данный момент доказательство существования полного интеграла уравнения (5) опирается на существование общего решения системы (1_1). Кроме того, такое доказательство получаемое при помощи теории характеристик Коши, предполагает, что функция $H(x, t)$ принадлежит классу $C^{(2)}$. Если же эта функция принадлежит лишь классу $C^{(1)}$ и даже удовлетворяет дополнительно условию Липщица, то об уравнении (5) ничего не известно. Вместе с тем последнее предположение о свойствах H, как известно, достаточно для анализа системы (1_1).

в (i), а скорее в (ii), т. е. в правиле, по которому можно найти различные комбинации постоянных интегрирования (канонических), как только становится известно полное или общее решение уравнения (5) (или системы (1_1)). К этим каноническим постоянным интегрирования применимо основное правило, указанное в § 107.

§ 111. Рассмотрим семейство интегральных кривых системы (1_1), описанное в начале § 98. Любая кривая этого семейства характеризуется начальным и конечным положениями в позиционном пространстве. Заменив $\bar{q}, \bar{t}$ на q, t и положив $t^0 = 0$, можем переписать определение (14) § 98 в виде

$$S(q, t, q^0) = \int_0^t L\, d\bar{t}, \tag{9}$$

где подразумевается, что интегрирование ведется вдоль интегральной кривой от начальной $(q^0, 0)$ до конечной (q, t) точки в позиционном пространстве.

Интеграл (9) называют действием по Гамильтону по отношению к данному семейству.

Заметим, что функция S, определяемая согласно (9), представит решение уравнения (5), причем компоненты вектора q^0 играют роль постоянных интегрирования. Действительно, тождества (15_1)—(15_2) § 98 перепишутся при принятых обозначениях в виде

$$S_q = p, \tag{10_1}$$

$$S_t = -H(p, q, t), \tag{10_2}$$

$$S_{q^0} = -p^0. \tag{10_3}$$

Подстановка (10_1) в (10_2) показывает, что функция (9) удовлетворяет уравнению (5) при любом фиксированном q^0.

§ 112. Пусть, в частности, найдено такое семейство интегральных кривых, для которых функция (9) удовлетворяет условию (7) при $v = q^0$. Тогда можно заключить, что уравнение в частных производных (5) обладает полным интегралом, который использовался в § 109. Пусть теперь существование (локальное) интегральных кривых, для которых функция (9) удовлетворяет условию

$$\det\left(S_{q_i q_k^0}(q, t, q^0)\right) \neq 0, \quad i, k = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

может быть доказано *) в предположении, что $H(x, t)$ принадлежит классу $C^{(2)}$. Тогда существование семейства интегральных кривых, для которых функция (9) удовлетворяет условию (11), равносильно существованию (локальному) полей в вариационном исчислении. Этот результат, утверждающий большее, чем просто существование полного интеграла уравнения (5), будет использован однако лишь для цели, упомянутой в конце § 110, и, следовательно, только в тех случаях, когда можно получить полное решение в явном виде (см., например, §§ 214, 221, 248).

§ 113. Сравнивая (10_1), (10_3) и (8), получим, что $p^0 = u$, $q^0 = v$. Поэтому результат, изложенный в § 105, можно рассматривать как частный случай результата, указанного в § 109, когда полный интеграл (6) уравнения (5) представляет собой действие по Гамильтону (9), удовлетворяющее условию (11). По существу в §§ 105 и 109 изложены одни и те же идеи, так как в обоих случаях речь идет о выборе канонического преобразования, которое переводит данную гамильтонову систему (1_1) в другую гамильтонову систему (1_2), для которой функция Гамильтона $K(y, t) = K(u, v, t)$ обращается тождественно в нуль.

Иногда (см., например, § 117) целесообразно заменить требование, чтобы K обращалось в (1_2) в нуль, менее жестким, а именно, с тем чтобы функция K зависела произвольным образом от обобщенных координат v_i и времени t, но не содержала обобщенные импульсы u_i, $i = 1, \ldots, n$.

В этом случае система (1_2) интегрируется также тривиальным образом. Действительно, система (1_2) примет тогда вид

$$\left.\begin{aligned} v' &= K_u(v, t) \equiv 0, \\ u' &= -K_v(v, t), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

так что если $v^0 = (v_i^0)$, $u^0 = (u_i^0)$ суть $n + n$ произвольных постоянных интегрирования, то общее решение $u = u(t)$, $v = v(t)$ этой системы представится формулами

$$\left.\begin{aligned} v &= v^0, \\ u &= u^0 - \int_{t^0}^{t} K_v(v^0, \bar{t})\,d\bar{t} \equiv u^0 - \left(\int_{t^0}^{t} K(v^0, \bar{t})\,d\bar{t}\right)_{v^0} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

и его нахождение сводится к квадратурам. Возможность такого преобразования (локального) любой гамильтоновой системы к три-

---

*) См. примечание к § 110.

виальному виду (12) вытекает из того, что уже при $K(u, v, t) \equiv 0$ в (1_2) мы приходим к частному случаю системы (12). Правда, проблема определения канонического преобразования, приводящего гамильтонову систему (1_1) к виду (12), не отличается от проблемы интегрирования этой системы (см. § 110).

§ **114.** Ниже мы будем рассматривать случай консервативной гамильтоновой функции $H(x, t)$. Уравнения (1_1) и (5) запишутся тогда в виде

$$\left.\begin{aligned} p' &= -H_q(p, q), \\ q' &= H_p(p, q), \end{aligned}\right\} \tag{14_1}$$

$$S_t + H(S_q, q) = 0. \tag{14_2}$$

Если h — некоторая фиксированная постоянная и $W(q, h)$ — некоторый интеграл уравнения в частных производных

$$H(W_q, q) = h \tag{15}$$

в n-мерной области q, то функция

$$S = -ht + W \tag{16}$$

представляет, очевидно, интеграл уравнения (14_2). Также очевидно, что если $S = S(q, t)$ — интеграл уравнения (14_2), то функция W, определенная согласно (16), есть интеграл уравнения (15). Кроме того, можно показать, что определенная таким образом функция W не зависит явно от t, т. е. что любой интеграл $S(q, t)$ уравнения (14_2) есть линейная функция t (см. § 115, а также §§ 99, 111).

Пусть уравнения (14_1) подвергнуты каноническому преобразованию, представляющему собой каноническое расширение данного преобразования $\bar{q} = \bar{q}(q)$ в позиционном пространстве. Тогда гамильтонова функция преобразуется как инвариантный вектор, а импульсы — как компоненты ковариантного вектора в позиционном пространстве (см. § 48). Так как градиент W_q функции $W = W(q)$ также преобразуется как ковариантный вектор, то описанное выше соответствие между уравнениями (15) и (14_1) сохраняется при любом координатном преобразовании и его каноническом расширении.

§ **115.** Если $S = S(t, q, v)$ — полный интеграл уравнения (14_2), то он является линейной функцией t, т. е. функция W, определенная согласно (16), не зависит от t.

Действительно, если $S(t, q, v)$ — полный интеграл (14_2), то соотношения (8) § 109 определяют общее решение системы (14_1), зависящее от постоянных интегрирования u, v. Поскольку подстановка в (14_2) величины S_q, определяемой согласно (8), показывает, что S_t совпадает с $H(p, q)$, и поскольку система (14_1) имеет интеграл энергии $H(p, q) = \text{const}$, то ясно, что S_t не может зависеть явно от времени. Учитывая также (16), придем окончательно к выводу, что $W_t \equiv 0$.

Можно также сделать вывод, что фиксированная постоянная h в (15) совпадает с постоянной интеграла энергии $H(p, q) = \text{const}$ системы (14_1).

§ 116. Пусть функция

$$W = W(q, v), \tag{17}$$

где $q = (q_i)$, $v = (v_i)$, а $v_1, \ldots, v_n$ рассматриваются как постоянные интегрирования, принадлежит классу $C^{(2)}$ в рассматриваемой области (q, v). Тогда если, с одной стороны,

$$\det(W_{q_i v_k}(q, v)) = 0 \quad (W_{q_i v_k} = W_{v_k q_i}) \quad i, k = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

а с другой стороны, в результате подстановки (17) в левую часть уравнения (15) мы придем к функции, зависящей лишь от v, то (17) называется полным интегралом уравнения (15). Постоянная

$$h = h(v) \tag{19}$$

в уравнении (15) представит тогда функцию n постоянных интегрирования v_i.

Из изложенного в § 115 видно, что формулы (16) и (15) устанавливают взаимное соответствие между полными интегралами (6) и (17) уравнений (5) и (15). Действительно, поскольку в силу (16) при $h_q \equiv 0$ имеем

$$S_{q_i v_k} \equiv W_{q_i v_k}, \tag{20}$$

то условия (7), (18) полноты интегралов эквивалентны друг другу. Отсюда следует, что если функция (17) — полный интеграл уравнения (15), то соотношения

$$p = W_q\ (q, v), \qquad u = h_v(v)t - W_v(q, v) \tag{21}$$

определяют (неявно) при фиксированном t такое локально топологическое соответствие между (p, q) и (u, v), что функции $p = p(t)$, $q = q(t)$ представят общее решение системы (14_1), зависящее от канонических постоянных интегрирования u, v. Это становится очевидным из изложенного в § 109, если учесть, что (21) совпадает с (8) в силу (16) и (19).

§ 116а. Предположим, в частности, что одна из n постоянных интегрирования v_i в данном полном интеграле (17) уравнения (15) представляет собой постоянную энергии h. Пусть, например, $h = v_n$. Тогда $h_{v_n} = 1$, $h_{v_k} = 0$, $k < n$ (см. (19)). Подставляя эти величины в (21), обозначая постоянную u_n через t^0 и заменяя u_i, v_i на P_i, Q_i соответственно, получим, что

$$\left.\begin{aligned} p_i &= W_{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ P_l &= -W_{Q_l}, \quad l = 1, \ldots, n-1, \quad t - t^0 = W_h, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $W = W(q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ есть неявное представление общего решения системы (14_1), зависящего от $2n$ канонических постоянных интегрирования

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{n-1},\ P_n \equiv t^0;\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{n-1},\ Q_n \equiv h \tag{23}$$

§ 117. В соответствии с изложенным в § 110 смысл формул (21) или их частного случая (22) заключается в том, что они дают возможность найти каноническую совокупность постоянных интегрирования. В тех задачах, в которых такая операция не представляет существенного интереса, часто бывает целесообразно использовать известное полное решение уравнения (15) несколько иначе. Пусть $W = W(q, \omega)$ — некоторая скалярная функция двух n-векторов $q = (q_i)$, $\omega = (\omega_i)$ класса $C^{(2)}$, причем $\det(W_{q_i q_k}) \neq 0$. Тогда формулы

$$p = W_q(q, \omega), \qquad \chi = W_\omega(q, \omega) \tag{24}$$

определяют полностью каноническое преобразование (p, q) в (ω, χ). Это очевидно из общего правила (20)—(21) § 46, если положить $u = \omega$, $v = \chi$, $S = W$, так что $S_t \equiv 0$. Соответственно с этим преобразование (24) переводит любую систему вида (14_1) в следующую:

$$\omega' = -K_\chi, \qquad \chi' = K_\omega, \tag{25}$$

где $K = K(\omega, \chi) \equiv H(p, q)$ в силу (24). Следовательно,

$$K(\omega, \chi) \equiv H(W_q(q, \omega), q)$$

в силу $\chi = W_\omega(q, \omega)$. Таким образом, если данная функция $W(q, \omega)$ есть полный интеграл уравнения (17), причем компоненты ω_i вектора ω играют роль n постоянных интегрирования (вместо v_i), то $K(\omega, \chi) \equiv h(\omega)$ в силу (15) и (19). Тогда система (25) сводится к следующей:

$$\omega' = 0, \qquad \chi' = h_\omega(\omega)$$

и имеет, следовательно, общее решение

$$\omega = \omega^0, \qquad \chi = \nu t + \chi^0, \tag{26}$$

где $\nu = h_0(\omega^0) = \mathrm{const}$, а компоненты двух n-векторов ω^0, χ^0 суть постоянные интегрирования (не канонические, так как вектор, канонически сопряженный с ω, равен $\chi = \nu t + \chi^0$).

Такова желаемая нормальная форма *) общего решения системы (14_1). Разумеется, опять остается справедливым последнее замечание, сделанное в § 113. Действительно (25) — (26) есть частный случай (12) — (13), если поменять между собой роль обобщенных координат v, χ и обобщенных импульсов u, ω.

§ **118.** Из §§ 114—116 видно, что соображения, изложенные в § 111, можно полностью применить и к уравнению (15) (см. также §§ 98, 99). Тогда v в (17), (19) положим равной $v = q^0$, а функция (9) заменится следующей **):

$$W(q, q^0) = ht + S(q, t, q^0) = \int\limits_0^t p \cdot q' d\bar{t}, \tag{27}$$

где $h = h(q^0)$ (см. (16) § 114 и (17), (18), (20_2) § 99).

Пусть, в частности, значение h в (15) заранее задано. Тогда (19) показывает, что постоянная энергия $h = h(v) \equiv h(q^0)$ для интегральных кривых, составляющих семейство, которое было рассмотрено в § 111, должна быть выбрана независимо от q^0. Функция (27) называется тогда изоэнергетическим действием ***), соответствующим изоэнергетическому семейству решений.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ **119.** Предшествующие понятия и соображения имели локальный характер. Это замечание относится также и к § 84, где предполагалось (но не доказывалось), что частное решение $x = x(t)$ системы

$$x' = f(x), \qquad (x = (x_i), \qquad f = (f_i), \qquad i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

---

*) Эта нормальная форма, введенная Пуанкаре, полезна, например, при рассмотрении формальных тригонометрических разложений в небесной механике.

Обобщенные координаты χ_i и обобщенные импульсы ω_i представляют собой с точностью до тривиальных нормирующих множителей угловые координаты и канонически сопряженные моменты действия в классической квантовой теории (обычно физики обозначают $\chi = w$, $\omega = J$).

**) По этому поводу см. последнее из соотношений (22) § 116 и (19) § 99.

***) Функцию W называют обычно действием по Лангранжу. (*Прим. перев.*)

существует в t-промежутке произвольно большой, но фиксированной длины $M < +\infty$. Понятия, которые будут рассмотрены теперь, касаются проблем исследования на бесконечной оси t, т. е. проблем исследования в большом, для которых нельзя, очевидно, применить общую теорию, аналогичную рассмотренной в § 79 или в § 84.

Частное решение $x = x(t)$ системы (1) назовем неограниченно продолжаемым, если оно существует при $-\infty < t < +\infty$. Разумеется, значения $x(t)$ при любом t должны находиться в области X, в которой задана функция $f(x)$ класса $C^{(\nu)}$, $\nu \geqslant 1$, и что производная $x'(t)$ конечна при любом $t = \bar{t}$ (иначе функция $x(t)$ не будет удовлетворять системе (1) при $t = \bar{t}$). Например, если $m = 1$, $f(x) = x^2$ и X: $-\infty < x < \infty$, то неограниченно продолжаемым является лишь равновесное решение $x(t) \equiv 0$. Все остальные решения имеют вид $x(t) = (\bar{t} - t)^{-1}$. Если положить $f(x) \equiv 1$, то все решения системы неограниченно продолжаемы, но не являются ограниченными.

Если $x(t)$ — неограниченно продолжаемое решение, то таково же и решение $x(t - t^0)$ при любом $t^0 = \text{const}$, и мы будем рассматривать $x(t - t^0)$ и $x(t)$ как одно и то же решение. Если две неограниченно продолжаемые интегральные кривые имеют по крайней мере одну общую точку в области X, то эти две кривые тождественны друг другу в силу единственности локальной начальной задачи для системы (1). Разумеется, под неограниченно продолжаемой интегральной кривой понимают множество точек $x = \bar{x}$, которые могут быть представлены с помощью неограниченно продолжаемого решения $x(t)$ по формуле $\bar{x} = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$. Неограниченно продолжаемая интегральная кривая не обязательно замкнута в X. Очевидно, что любая точка равновесия (§ 83) есть неограниченно продолжаемое решение и что любая неограниченно продолжаемая интегральная кривая представляет инвариантное множество для системы (1) (см. § 81).

§ 120. Каждое множество X^* точек x, состоящее из совокупности (конечной или бесконечной) точек неограниченно продолжаемых интегральных кривых, является инвариантным множеством. Назовем такое множество X^* неограниченно продолжаемым инвариантным множеством для системы (1). Разумеется, X^* должно представлять собой подмножество области X, в которой задана $f(x)$.

Например, пусть $m = 2$, и пусть система (1) имеет вид

$$x_1' = \frac{1}{x_2}, \quad x_2' = 1,$$

где X: $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 < x_2 < +\infty$. Ее общее решение следующее:

$$x_1(t) = \lg(t - \bar{t}) + \text{const}, \qquad x_2(t) = t - \bar{t}.$$

Можно сделать вывод, что неограниченно продолжаемых решений в данном случае нет и что область X не может содержать неограниченно продолжаемое инвариантное множество.

Вместе с тем пусть, например, $m = 1$, $f(x) = 1$, область X: $-\infty < x < +\infty$. Тогда вся область X является неограниченно продолжаемым инвариантным множеством X^*. Отсюда вытекает, что X^* не обязательно представляет собой ограниченное множество. Если же X^* ограниченно, то оно может не быть компактным, т. е. замкнутым.

Используя соображения, аналогичные приведенным выше в § 84, легко получим, что если подмножество X^+ множества X компактно (т. е. оно таково, что применима теорема Гейне — Бореля) и если X^+ представляет собой инвариантное множество (см. § 81), то тогда это множество является неограниченно продолжаемым и инвариантным подмножеством X^*.

§ 121. Для любого неограниченно продолжаемого инвариантного множества X^* системы (1) и при любом вещественном t можно определить взаимно однозначное преобразование τ^t множества X^* самого в себя, полагая

$$x(t) = \tau^t x^0,$$

где x^0 — некоторая точка множества X^* и $x(t)$ — решение системы (1), для которого $x(t^0) = x^0$. Действительно, точка $\tau^t x^0$ множества X^*, определенная таким образом, не зависит от выбора t^0 (см. § 119). Из факта существования и единственности решения системы (1) также вытекает, что для произвольных t_1, t_2 и для любой точки x^0 множества X^* имеем

$$\tau^{t_1} x(t_2) = \tau^{t_2+t_1}.$$

Это значит, что $\tau^{t_1}\tau^{t_2} = \tau^{t_1+t_2}$. Таким образом, преобразования τ^t множества X^*, соответствующие различным значениям t, образуют группу (циклическую). Действительно, положим $t_1 = t$, $t_2 = -t$. Тогда, поскольку τ^0 — тождественное преобразование множества X^* самого в себя, то τ^{-t} является преобразованием, обратным к τ^t (см. § 79).

Если X — множество точек $\bar{x}$, принадлежащее X^*, то через $\tau^t\bar{\mathrm{X}}$ обозначим множество всех точек $\tau^t\bar{x}$ при заданном t. Таким образом, $\bar{\mathrm{X}}$ представит инвариантное множество для системы (1) в смысле определения в § 81 тогда и только тогда, когда $\tau^t\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{X}$

при любом t. Заметим, что инвариантное множество $\overline{\mathbf{X}}$, состоящее из одной точки $\bar{x}$, представляет собой точку равновесия $x(t) \equiv \equiv \bar{x} = \text{const}$ (см. § 83).

§ 121а. В предыдущих параграфах, а также и ниже можно рассматривать область (x) для системы (1) не как множество, содержащееся в m-мерном евклидовом пространстве x, а скорее как область, имеющую евклидову структуру лишь в окрестности каждой точки, но не в большом.

Пусть, например, данная область m-вектор-функции $f(x)$ есть все евклидово пространство, и пусть существует r ($\leqslant m$) положительных постоянных $\pi_1, \ldots, \pi_r$ таких, что при замене x_j на $x_j + \pi_j$, $j = 1, \ldots, r$, функция $f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_m)$ не изменяется. Тогда можно рассматривать $x_1, \ldots, x_r$ не только как линейные, но также, как угловые переменные, определяемые с точностью до $\operatorname{mod} \pi_1, \ldots, \operatorname{mod} \pi_r$. Если, в частности, $r = m$, то топологическую структуру области $\mathbf{X}$ в большом можно выбрать различными способами. Два крайних случая — евклидово пространство и тор. Это справедливо при произвольных $\pi_1, \ldots, \pi_r$, если $f(x)$ не зависит от x, т. е. если

$$x' = \lambda = \text{const}, \tag{2}$$

так что $x(t) = \lambda t + x_0$.

Соответствующие замечания относятся к преобразованию $\mathbf{X}$ с помощью разрывных групп преобразований, при которых правая часть в (1) § 118 остается инвариантной.

Другое обобщение результатов, изложенных в §§ 119—121, можно получить, допуская, что $\mathbf{X}$ представляет собой не область в смысле определения в § 2, но состоит из открытого множества и из некоторых или всех граничных точек этого открытого множества. В таких случаях будем говорить, что $\mathbf{X}$ — замкнутая или частично замкнутая область.

§ 122. Особенно интересны такие системы (1), для которых m-строчный якобиан (4) § 79 (будем его обозначать через $D(x^0, t)$) не зависит от x^0 и t. Такие специальные системы (лиувиллевы) можно назвать системами, сохраняющими объем. Действительно, если $D(x^0, t) \equiv \text{const}$, то, полагая в (4) § 79 $t = 0$, получим, что $D(x^0, t) \equiv 1$. Если считать, что общее решение (3) § 79 системы $x' = f(x)$ определяет «поток» в пространстве x, то условие $D(x^0, t) \equiv 1$ соответствует несжимаемым потокам.

Хотя формула (4) § 79 определяет $D(x^0, t)$ в зависимости от общего решения (3) § 79 системы $x' = f(x)$, однако можно определить, является ли эта система сохраняющей объем, независимо от общего решения. Для этого достаточно вычислить диагональные элементы якобиевой матрицы для $f(x)$ и установить, выполняется или не выполняется условие $\operatorname{div} f(x) = 0$. Действительно, из (4а) § 79 видно, что $D(x^0, t)$, т. е. определитель (4) § 79, не зависит от t при любом x^0 тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ *).

Если $x' = f(x)$ — каноническая система с $n = {}^1/_2 m$ степенями свободы, то условие $D(x^0, t) \equiv 1$ удовлетворяется в силу изложенного в § 105а. В соответствии с этим удовлетворяется и условие $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$, поскольку компоненты $2n$-вектора $f(x)$ имеют вид $-H_{x_{k+n}}(x)$, $H_{x_k}(x)$, $k = 1, \ldots, n$.

§ **122а.** Заметим, что если $m = 2$ (и только в этом случае), то условие $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы система $x' = f(x)$ была канонической. Действительно, пусть через u, v и g, h обозначены компоненты $2n$-векторов x и $f(x)$ соответственно. Тогда $\operatorname{div} f = g_u + h_v$ и условие $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ совпадает с условием существования скалярной функции $H = H(x)$ такой, что $g = -H_v$, $h = H_u$.

На этот факт опирается принцип последнего множителя Якоби в случае систем, сохраняющих объем. Действительно, предположим, что для системы $x' = f(x)$ известны $n - 2$ независимых консервативных интегралов $F_1(x), \ldots, F_{n-2}(x)$. Обозначим через $\mathbf{R} = \mathbf{R}\ (c_1, \ldots, c_{n-2})$ пересечение (двумерное) гиперповерхностей $F_1(x) = c_1, \ldots, F_{n-2}(x) = c_{n-2}$, соответствующих фиксированным значениям $c_1, \ldots, c_{n-2}$. Так как последние могут быть выбраны произвольно, то легко заметить, что проекция на $\mathbf{R}$ n-мерного несжимаемого потока в пространстве x также обладает свойством несжимаемости **).

В соответствии с этим поток на поверхности $\mathbf{R}$ определяется двумя скалярными дифференциальными уравнениями

$$u' = g(u, v), \qquad v' = h(u, v),$$

где $g_u + h_v = 0$. Однако последнее условие означает, что эта система является консервативной канонической с одной степенью

---

*) Например, из (25) § 232 получим, что если система $x' = f(x)$ задана согласно (24) § 232, где $m = 3$, то $D(x^0, t) \equiv 1$.

В связи с этим возникает вопрос, в каком случае трехмерный несжимаемый поток является изоэнергетическим, описываемым канонической системой (консервативной) с двумя степенями свободы. Эта проблема, строго сформулированная и поставленная, а также ее многомерные аналоги до сих пор не решены. По-видимому, эти проблемы связаны с вопросами из области топологического анализа, где исследования всегда весьма сложны.

**) Нетрудно обнаружить, что громоздкие якобианы в классическом варианте метода последнего множителя Якоби служат именно цели нахождения явного аналитического представления измерений двумерных областей, определяемых при проектировании.

свободы, и поскольку имеется интеграл энергии, она может быть решена с помощью одной квадратуры.

Заметим, что эти соображения имеют чисто локальный характер.

§ **123.** Пусть через $\mu(S)$ обозначается мера объема в подмножестве S (измеримом по Лебегу) m-мерного евклидового пространства переменной x, удовлетворяющей системе (1). Предположим, что данное неограниченное инвариантное множество X^* системы (1) имеет меру $\mu(X^*)$, отличную и от 0 и от $+\infty$. Кроме того, пусть функция $f(x)$ в уравнении (1) удовлетворяет условию $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ § 122 для сохранения меры μ, так что (если использовать обозначения § 121) $\mu(\tau^t S) = \mu(S)$, $-\infty < t < +\infty$, для любого измеримого подмножества $S \in X^*$. Тогда множество тех точек $x^0 \in X^*$, для которых интегральная кривая $x = x(t) \equiv \tau^t x^0$ в X^* не обладает асимптотической функцией распределения $\Psi_{x^0} = \Psi_{x^0}(S)$, есть множество с нулевым объемом, т. е. с мерой $\mu = 0$.

Этот результат и представляет собой знаменитую эргодическую теорему Биркгофа (точнее говоря, ее аналог), которая, по существу, не имеет ничего общего с дифференциальными уравнениями, а является теоремой, относящейся к общей теории лебеговой меры. Ее доказательство выходит за рамки этой книги.

Приведенная выше формулировка теоремы для случая рассматриваемого евклидова пространства включает в себя понятие асимптотической функции распределения, которая определяется следующим образом.

Под функцией распределения $\varphi = \varphi(S)$ в X^* подразумевается функция, которая каждому борелеву множеству S (т. е. каждому открытому множеству S и каждому закрытому множеству S), содержащемуся в X^*, ставит в соответствие вещественное неотрицательное значение $\varphi(S)$, причем так, что

$$\varphi(S_1) + \varphi(S_2) + \ldots = \varphi(S_1 + S_2 + \ldots)$$

каждый раз, когда множества S_1, S_2, ... не пересекаются, а $\varphi(X^*) = 1$. Известно, что если разрывные множества D с функциями распределения φ в X^* определены условием $\varphi(D^0) \neq \varphi(D_0)$, где D^0 и D_0 суть замыкание и внутренняя часть множества D соответственно, то те борелевы подмножества $S \in X^*$, которые представляют собой разрывные множества D, являются исключительными в такой же мере, как и точки разрыва монотонной функции одной вещественной переменной.

Функцию распределения $\varphi = \varphi(S) = \varphi_{uv}(S)$ можно получить, очевидно, следующим образом. А именно, пусть даны в X^*

фиксированная интегральная кривая $x = x(t)$ и два конечных момента $t = u$, $t = v(>u)$. Тогда функцию $\varphi_{uv}(S)$ относительно борелева множества $S \in X^*$ и данной интегральной кривой $x = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, определим как отношение $\{u, v\}/(v-u)$, где через $\{u, v\}$ обозначена мера тех точек данного t-интервала длины $v-u$, для которых точка $x(t)$ принадлежит S. Так как, по предположению, интегральная кривая $x = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, лежит в X^*, то $\varphi_{uv}(S)$ представляет собой вероятность того, что какая-либо точка рассмотренного отрезка интегральной кривой $x(t)$ (соответствующего значениям $u < t < v$) лежит в подмножестве S, принадлежащем X^*. Говорят, что интегральная кривая обладает асимптотической функцией распределения $\psi = \psi(S)$, если существует соответствующая асимптотическая вероятность. Иными словами, подразумевается существование функции распределения $\psi = \psi(S)$ в X^* такой, что для любого фиксированного не разрывного множества S значение $\psi_{uv}(S)$ стремится к пределу $\psi(S)$ при $v \to +\infty$, $-u \to +\infty$.

Конечно, асимптотическая функция распределения $\psi(S)$ (если она вообще существует) зависит от выбора интегральной кривой $x(t)$ или, другими словами, от выбора начального значения x^0, принадлежащего X^* и определяющего $x(t)$ в силу соотношения $x(t) = \tau^t x^0$ (см. § 121). Поэтому эту функцию будем обозначать через ψ_{x^0}.

Теорема Биркгофа утверждает, что при условиях $\operatorname{div} f(x) = 0$ и $0 < \mu(X^*) < +\infty$, упоминавшихся выше, асимптотическая функция распределения $\psi_{x'}$ существует для всех тех интегральных кривых $x(t) = \tau^t x^0$ в X^*, для которых точка не принадлежит множеству с нулевой μ-мерой. Другими словами, «почти все» интегральные кривые, лежащие в неограниченно продолжаемом инвариантном множестве X^*, обладают асимптотической функцией распределения *).

В частности, легко заметить, что если борелево множество произвольное фиксированное, то функция $\psi_x(S)$ переменной x

---

*) Ввиду крайней исключительности «устойчивого» движения в обычном смысле (см. ниже § 131), а также ввиду запросов статистической механики естественно ввести на основе эргодической теоремы понятие «распределенной устойчивости» решения $x(t) = \tau^t x^0$ следующим образом: точка x^0 не принадлежит к исключенному множеству меры нуль и обладает тем свойством, что если переменная точка $x \in X^*$ стремится к x^0 произвольным образом (избегая, конечно, точки исключенного множества меры нуль), то $\psi_x(S) \to \psi_{x^0}(S)$ для любого непрерывного множества S, соответствующего асимптотической функции распределения ψ_{x^0} для решения $x(t) = \tau^t x^0$. Чтобы это условие удовлетворялось почти для всех x^0, достаточным (но ни в коей мере не необходимым) условием является транзитивность τ^t (см. конец § 124a).

является интегрируемой (по обычной лебеговой мере μ) и ее интеграл по всей области X^* равен $\mu(S)/\mu(X^*)$.

§ **123а.** Другой теоремой, справедливой при тех же самых предположениях, при которых имеет место эргодическая теорема, является «теорема возвращения» Пуанкаре. В этой теореме утверждается, что в предположениях, указанных в § 123, меру нуль имеет множество тех точек x^0, которые принадлежат X^* и для которых не выполняется следующее условие: полагая $x(t) = \tau^t x^0$, можно найти для любого заданного $\bar{t}$ и для любого $\varepsilon > 0$ бесконечное число значений $t_n = t_n(\bar{t}, \varepsilon)$, стремящихся при $n \to \pm\infty$ к $\pm\infty$ и таких, что $|x(t_n) - x(\bar{t})| < \varepsilon$ при любом n.

«Теорема возвращения» Пуанкаре не вытекает, очевидно, из формулировки эргодической теоремы. Однако она является качественным следствием некоторого количественного результата (см. § 124), который в соединении с эргодической теоремой позволяет уточнить последнюю.

§ **124.** Это уточнение можно сформулировать следующим образом. А именно, пусть x^0 — точка, не принадлежащая к множеству меры нуль, упоминаемому в эргодической теореме. Через Σ_{x^0} обозначим множество точек $\bar{x}$, принадлежащих X^* и обладающих тем свойством, что любое открытое множество, содержащее $\bar{x}$, обладает положительной асимптотической вероятностью. Другими словами, точки $\bar{x}$ таковы, что условие $\psi_{x^0}(S) > 0$ выполняется каждый раз, когда S есть сфера $|x - \bar{x}| < \rho$ с центром в $\bar{x}$ и с произвольно малым, но фиксированным радиусом ρ.

Обозначим через P_{x^0} замыкание интегральной кривой $x(t) = \tau^t x^0$, $-\infty < t < +\infty$, при некотором фиксированном x^0 или, иными словами, совокупность тех точек множества X^*, которые или принадлежат кривой $x(t) = \tau^t x^0$ или являются предельными для точек этой кривой. Хотя само собой очевидно, что Σ_{x^0} содержится в P_{x^0}, однако и из эргодической теоремы и из теоремы возвращения, вместе взятых, не вытекает, что $\Sigma_{x^0} = P_{x^0}$ почти для всех x^0.

Тем не менее $\Sigma_{x^0} = P_{x^0}$ почти для всех x^0. В этом утверждении и заключается уточнение эргодической теоремы.

К такому результату, непосредственно не вытекающему из содержания самой эргодической теоремы, можно прийти после внимательного анализа доказательства Биркгофа, если учесть свойства непрерывности групп преобразований τ^t (которые всегда гарантируются благодаря условиям, налагаемым на правые части исходных дифференциальных уравнений) *).

---

*) Если использовать результаты Адамара, то из равенства $\Sigma_{x^0} = P_{x^0}$ вытекает, что подмножество Σ_{x^0}, принадлежащее к замкнутому, эргодиче-

§ 124а. Естественно поставить вопрос о том, как можно характеризовать частный случай, когда асимптотическая вероятность $\psi_{x^0}(S)$ совпадает с евклидовой мерой объема $\mu(S)$ множества S для почти всех x^0 и для любого борелева множества S, принадлежащего X^* (в силу последнего замечания в § 123 этот случай имеет место тогда и только тогда, когда асимптотическая вероятность для данного S не зависит от x^0 почти для всех x^0). Оказывается, что ответ заключается в так называемом условии метрической транзитивности. Это условие соответствует требованию, чтобы рассматриваемое множество X^* не содержало каких-либо измеримых инвариантных множеств $\widetilde{X}$, для которых $\mu(\widetilde{X})$ не равно ни нулю, ни мере $\mu(X^*)$ для всего X^*.

Интегральная кривая $x(t) = \tau^t x^0$ называется регионально транзитивной в X^*, если $P_{x^0} = X^*$. Сама система называется зонально транзитивной в X^*, если условие $P_{x^0} = X^*$ имеет место почти для всех x^0, принадлежащих X^*. В соответствии с § 124 этот случай имеет место тогда и только тогда, когда $\Sigma_{x^0} = X^*$ почти для всех x^0, принадлежащих X^*. Это условие, очевидно, выполняется в случае равномерно распределенной метрической транзитивности.

§ 125. Для лучшего понимания материала, изложенного в §§ 126—130, рассмотрим прежде всего пример системы (1) при $m = 4$, где правые части суть частные производные $H_{x_i}(x)$ от квадратичной формы

$$H(x) \equiv H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} (x_j^2 + \omega_j^2 x_{j+2}^2), \tag{3}$$

причем $\omega_j = \text{const} > 0$. Она записывается тогда в виде

$$x_j' = -H_{x_{j+2}}(x), \quad x_{j+2}' = H_{x_j}(x), \quad j = 1, 2, \quad \left(\frac{1}{2} m = 2\right), \tag{4}$$

скому и неограниченно продолжаемому множеству X^*, является инвариантным множеством. Поэтому из определения множества P_{x^0} следует, что если x^0, y^0 суть две точки, не принадлежащие к исключенному множеству нулевой меры, и если инвариантные множества Σ_{x^0}, Σ_{y^0} имеют по крайней мере одну общую точку, то одно из них обязательно содержит другое.

Фактически, возможно, что в этом случае множества Σ_{x^0} и Σ_{y^0} попросту совпадают друг с другом. В соответствии с терминологией Биркгофа, эта возможность выражается словами, что если x^0 не принадлежит множеству с нулевой мерой, то интегральная кривая «минимальная». Согласно теореме Биркгофа это минимальное свойство фиксированной интегральной кривой $x(t) = \tau^t x^0$ можно характеризовать и непосредственно следующим образом.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $l = l_\varepsilon > 0$ такое, что при любом t_0 можно найти в любом заданном t-интервале длины l момент $\bar{t}$, в который $|x(\bar{t}) - x(t_0)| < \varepsilon$.

так что

$$x'_{j+2} = x_j, \quad x''_{j+2} + \omega_j^2 x_{j+2} = 0.$$

Обозначая все 4-мерное евклидово пространство через **X**, заключаем на основании § 89, что само **X** представляет собой неограниченно продолжаемое инвариантное множество **X*** в смысле определения, данного в § 120. Нетрудно найти явное выражение общего решения $x(t) = \mathrm{x}(x^0, t)$, $x^0 = x(0)$. Дальнейший переход от (3) § 79 к (5) § 79 показывает, что в данном случае система (4) имеет $m = 4$ независимых интеграла

$$x_j \cos \omega_j t + x_{j+2}\omega_j \sin \omega_j t = \overset{0}{x_j}, \qquad (5_j)$$

$$x_{j+2} \cos \omega_j t - x_j \omega_j^{-1} \sin \omega_j t = \overset{0}{x}_{j+2}, \qquad (5_{j+2})$$

где $j = 1, 2$. В силу изложенного в конце § 82 исключение t в этих интегралах позволит получить $m - 1 = 3$ независимых консервативных интеграла

$$F_k(x) = c_k (= \mathrm{const}).$$

Прежде всего, исключая t в (5_j), (5_{j+2}), получим два интеграла

$$F_j(x) \equiv x_j^2 + \omega_j^2 x_{j+2}^2 = c_j (\geqslant 0), \quad j = 1, 2.$$

Если $c_j \neq 0$, то гиперповерхность $F_j(x) = c_j$ представляет собой в **X** гиперцилиндр. Пересечение двух гиперповерхностей в $F_j(x) = c_j$ представляет собой тор (если ни одно из c_j не равно нулю). В любом случае $F_j(x) = c_j$ представляет алгебраическую поверхность (ее вещественную часть) как при $j = 1$, так и при $j = 2$. Это справедливо при любых численных значениях постоянных $\omega_j > 0$ в (3).

С другой стороны, структура последнего консервативного интеграла $F_3(x)$ очень сильно зависит от того, является ли отношение ω_1/ω_2 рациональным (случай *i*) или иррациональным (случай *ii*).

Пусть в случае (*i*) наибольший общий делитель ω_1 и ω_2 равен ω, так что $\omega_j = l_j\omega$, где l_1, l_2 — взаимно простые числа. Так как четыре функции $\sin \omega_j t$, $\cos \omega_j t$, $j = 1, 2$, выражаются рационально через $u = \operatorname{tg} {}^1/_2 \omega t$, то, исключая t, например, из (5_1) и (5_2), придем к интегралу $F_3(x)$ такому, что $F_3(x) = c_3$ представляет алгебраическую гиперповерхность (ее вещественную часть) в **X**. Грубо говоря, эта поверхность имеет тем больше самопересечений, чем выше порядок соизмеримости ω_1/ω_2, т. е. чем больше $|l_1 - l_2|$.

Существенным для дальнейшего является не алгебраический характер этой гиперповерхности, а именно тот факт, что она имеет лишь конечное число различных «ветвей».

В случае (*ii*) для любого $\varepsilon > 0$ существует *) пара целых чисел $l^{(i)} = l^{(j)}(\varepsilon)$, $j = 1, 2$, такая, что

$$|\omega_1 l^{(1)} + \omega_2 l^{(2)}| > |l^{(1)}| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$ **), выводим, что интеграл $F_3(x)$, получаемый при исключении t из (5_1) и (5_2), обладает следующим свойством.

В 4-мерном пространстве X существует такая область, что если x^0 — любая точка этой области, то гиперповерхность (вещественная и обязательно аналитическая) $F_3(x) = c_3 = F_3(x^0)$ имеет в окрестности точки $x = x^0$ бесчисленное количество различных «ветвей», которые не соответствуют, однако, локальному разветвлению в окрестности точки $x = x^0$. Это специфическое обстоятельство будет объяснено подробнее в § 126.

§ 126. В дальнейшем предположим, что область (возможно, включающая полностью или частично свои граничные точки) X, в которой задана однозначная (класса $C^{(1)}$) n-вектор-функция f точки x, представляет собой неограниченно продолжаемое множество X* системы (1) (см. § 120).

Пусть $F(x)$ — однозначная скалярная функция точки x в X, принадлежащая классу $C^{(1)}$ и не обращающаяся нигде в X в постоянную. Точку x, в которой градиент $F_x(x)$ обращается в нуль, назовем критической точкой для $F(x)$.

Множество таких точек, если они имеются, нигде не плотно в X. Через $\mathbf{F}^{x^0}$ обозначим «гиперповерхность» $F(x) = \text{const}$, которая проходит через точку x^0, принадлежащую X, или же, говоря точнее, множество всех тех точек, принадлежащих X, для которых $F(x) = c = F(x^0)$.

В частности, x^0 будет изолированной точкой множества $\mathbf{F}^{x^0}$ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ имеет при $x = x^0$ изолированный относительный экстремум. Если x^0 — критическая точка произвольного вида для функции $F(x)$, то топологическая структура множества $\mathbf{F}^{x^0}$ в окрестности x^0 может быть весьма сложной ***). Вместе с тем, если точка x^0 не является особой для $F(x)$, то теорема существования неявной функции в окрестности

---

*) См. примечание к § 127а.

**) И применяя соображения, основанные непосредственно на рассмотрении диофантовых приближений; см., например, третье примечание к § 126.

***) Заметим, что $\mathbf{F}^{x^0}$ может представлять нигде не плотное множество даже тогда, когда $F(x)$ имеет класс $C^{(\infty)}$ (т. е. класс $C^{(\nu)}$ при любом ν). Если $F(x)$ — аналитическая функция в X и x^0 — особая точка для $F(x)$, то число измерений гиперповерхности $\mathbf{F}^{x^0}$ в окрестности x^0 может быть любым от нуля до $m - 1$; в случае же нескольких критических точек (при анализе в большом) имеется строгое ограничение, налагаемое хорошо известным индексовым соотношением Морса.

x^0 показывает, что F^{x^0} состоит в окрестности x^0 из связного куска («ветви») некоторой $(m-1)$-мерной поверхности (т. е. гиперповерхности) с определенной нормалью и не самопересекающейся.

Но как же тогда возможно, чтобы для интеграла $F_3(x) = c_3$ система (4) обладала бы в окрестности x^0 в случае (*ii*), рассмотренном в конце § 124, бесконечно большим числом «ветвей», по крайней мере, если x^0 выбрано в некоторой x^0-области? (Такое обстоятельство представляется парадоксальным, так как F^{x^0} получается с помощью исключения t из аналитических соотношений (5_1) — (5_2) и соображения, основанные на аналитичности, свидетельствуют о том, что рассматриваемая область для x^0 может не содержать особых точек функции $F_3(x)$, регулярной при $x = x^0$.)

Ответ опирается на замечание, приведенное в конце § 82. Пусть $x = x(t)$ — интегральная кривая, проходящая через точку $x^0 = x(0)$, и предположим, что x^0 не является точкой равновесия системы (1). Тогда равенство $x(t^{(1)}) = x(t^{(2)})$ не может иметь места, если $t^{(1)} \neq t^{(2)}$. Вместе с тем вполне могут существовать две последовательности значений t_n^{I}, t_n^{II}, стремящихся вместе с n к ∞, такие, что

$$|x(t)-x^0| < \frac{1}{n} \quad \text{или} \quad |x(t)-x^0| > \mathrm{const} > 0$$

при $t_n^{\mathrm{I}} \leqslant t \leqslant t_{n+1}^{\mathrm{I}}$, $t_m^{\mathrm{II}} \leqslant t \leqslant t_{n+1}^{\mathrm{II}}$ соответственно (относительно значений t вне этих промежутков ничего не говорится). Если применить теперь локальные теоремы существования в t-окрестности любого $t^n = {}^1/_2(t_n^{\mathrm{I}} + t_{n+1}^{\mathrm{I}})$ и в x-окрестности любого $x^{(n)} = x(t^n)$, то поскольку $|x^{(n)} - x^0| \to 0$, ничто не препятствует накоплению *) **различных** ветвей гиперповерхности F^{x^0} в окрестности x^0. Этот факт может привести [с большей вероятностью, чем исключение t в окрестности ${}^1/_2(t_n^{\mathrm{II}} + t_{n+1}^{\mathrm{II}})$] к появлению удаленных особых точек (или даже особенностей), соответствующих далеким «разветвлениям» гиперповерхности F^{x^0}. Появляющиеся благодаря этим далеким разветвлениям **) ветви могут при их

---

*) Это положение можно сравнить с тем, которое возникает в случае функции $z = z(w)$, обратной по отношению к трансцендентной целой функции $w = w(z)$. Функция $z = z(w)$ обладает тем свойством, что, хотя некоторая точка $w = w^0$ является регулярной всюду на римановой поверхности, но значения z, принимаемые функцией $z(w)$ в окрестности w^0 на различных листах, образуют z-области с точкой накопления $z = z(w^0)$.

**) Это положение можно было бы сравнить с тем, которое возникает в случае неразветвленных абелевых интегралов. Эти интегралы, хотя и униформизируются в локальном смысле римановыми поверхностями подынтегральных алгебраических функций, являются неоднозначными функциями точки на римановой поверхности. Правда, фактически положение ближе к тому, которое возникает при гиперболической инверсии проблемы Якоби (см. примечание к § 128).

продолжении вдоль интегральной кривой легко достичь точек $x^{(n)}$, соответствующих значениям $^1/_2(t_n^{\mathrm{I}} + t_{n+1}^{\mathrm{I}})$, и накопляться в окрестности x^0.

§ 127. Пример в § 125 является достаточно простым и позволяет думать, что факт, изложенный в предыдущем параграфе, соответствует не «вырожденному», а довольно общему случаю, когда функция в системе (1) достаточно произвольна.

Однако хотя этот факт и отражает основное убеждение современной динамики, но, несмотря на все усилия, удовлетворительного его доказательства еще нет. Убеждение это состоит в том, что система общего вида в силу постулатов классической статистической механики, но прежде всего в силу исследований Пуанкаре, Адамара, Леви-Чивита и Биркгофа, а также в силу результатов подробных исследований, относящихся к группам Фукса или к геодезическим линиям на поверхностях отрицательной кривизны, характеризуется если не метрической, то региональной транзитивностью (§ 124а).

§ 127а. Рассмотрим, например, уравнения (2) § 121а в предположении, что X — тор, $0 \leqslant x_1 < 1, \ldots, 0 \leqslant x_m < 1$, полученный редукцией по модулю $(\pi_1, \ldots, \pi_m) = (1, \ldots, 1)$. Предположим, что $s = m$, где целое неотрицательное число $s (\leqslant m)$ таково, что в рациональном поле существует только s линейно независимых чисел λ_i, образующих компоненты m-вектора $f(x) = \lambda = \mathrm{const}$. Тогда каждая интегральная кривая представляет собой локсодрому, регионально транзитивную *) в X.

§ 128. Используя предположения и обозначения § 126, придем к выводу, что если $m = 2$, то F^{x^0} представляет собой интегральную кривую, проходящую через x^0. Если же $m > 2$, то эту интегральную кривую можно представить как общую часть $m - 1$ множеств F^{x^0}, соответствующих $m - 1$ независимым консервативным интегралам $F_j(x)$ (см. § 82). Поэтому какой-либо интеграл $F(x)$ имеет значение постольку, поскольку он позволяет сделать вывод о возможном положении в будущем (или в прошедшем)

---

*) В силу так называемой теоремы аппроксимации Кронекера (при $m = 2$ получим обычное свойство непрерывных дробей; см. неравенство для $l^{(1)}, l^{(2)}$ в случае (*ii*) § 125).

Фактически в этом случае имеет место не только региональная (Кронекер), но и метрическая (Вейль) транзитивность (см. § 124а). Известно (X. Бор), что в данном случае из региональной транзитивности непосредственно вытекает и метрическая транзитивность. Заметим, что множество нулевой меры, исключенное в §§ 123—124, является в данном случае пустым.

точки $x = x(t)$ на интегральной кривой, проходящей через x^0 при $t = 0$ (случай точки равновесия $x(t) \equiv x^0$ при этом не исключается). С этой точки зрения знание интегралов вида $F_3(x) = c$ в случае (ii) § 125 или $F(x_1, x_2)$ § 127а оказывается совершенно бесполезным.

Те интегралы системы (1), которые не являются бесполезными в этом смысле, назовем изолированными *). Подробное и явное определение изолированного интеграла предполагает выбор топологии в большом для рассматриваемого неограниченно продолжаемого инвариантного множества. По существу, вся эта проблема имеет значение лишь при условии ограничений аналитичности рассматриваемых функций.

Для того чтобы интеграл (1) был изолированным, однозначность функции $F(x)$ в X, т. е. отсутствие точек самопересечения на поверхности F^{x^0} при любом x^0, не является ни необходимым, ни достаточным условием. Об этом свидетельствуют примеры изолированного интеграла $F_3(x)$ в случае (i) § 125 и неизолированного интеграла $F(x_1, x_2)$ в конце § 127а.

§ **129.** В классических работах был получен ряд результатов отрицательного характера. Одним из них является наиболее простая теорема Брунса, уточненная затем Пенлеве. Эта простейшая теорема утверждает, что система вида $x' = f(x)$ в задаче трех и большего числа тел (в прямоугольных координатах) не обладает консервативными алгебраическими интегралами $F(x)$, отличными от алгебраических комбинаций семи известных еще в середине XVIII в. интегралов. Следует, однако, сказать, что подобный изящный отрицательный результат не имеет какого-либо значения в динамике. Для динамики важно выявить все те независимые интегралы $F(x)$, которые являются изолированными. Однако если даже $f(x)$ в системе (1) — алгебраическая функция, то алгебраичность интеграла $F(x)$ этой системы является хотя и достаточным, но ни в какой мере не необходимым условием его изолированности.

§ **130.** Пусть система (1) скалярных дифференциальных уравнений имеет l, но не имеет $l + 1$ изолированных интегралов $F(x)$.

---

*) К сожалению, в математической литературе используется термин «однозначный» интеграл. Он отражает фактическое положение менее точно, чем термин «изолированный» интеграл, и является часто причиной непонимания физиками-теоретиками результатов Пуанкаре относительно «однозначных интегралов».

По существу, Пуанкаре заимствовал термин «однозначность» из известных работ Якоби, касающихся обращения эллиптических и гиперэллиптических интегралов.

Тогда, если исключить тривиальный случай $f(x) \equiv 0$, когда число независимых консервативных интегралов равно m вместо $m-1$ в любом другом случае (см. конец § 82), то система (1) называется $(m-1-l)$-кратно примитивной или l-кратно импримитивной. В случае $l=0$ система (1) называется примитивной. Идеальным случаем, когда все $m-1$ независимых локально интегралов $F(x)$ имеют значение также в большом, является случай $(m-1)$-кратно примитивной системы. В то же время условие $l=0$ является, очевидно, необходимым (и, насколько можно судить по известным результатам, по-видимому, достаточным) условием существования интегральных кривых, регионально транзитивных в **X** (см. § 127).

В примере с тором (см. § 127а) $l = m - s$, так что система примитивна в случае линейной независимости $X_i (s = m)$. В примере, приведенном в § 125, где $m = 4$, имеем $l = 3$ и $l = 2$ в случаях (i) и (ii) соответственно. Система (4) является, следовательно, в первом случае (ω_1/ω_2 рациональное) нуль кратно примитивной и во втором случае (ω_1/ω_2 иррациональное) однократно примитивной *).

ТОЧКИ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 131. Имеется около десятка различных определений «устойчивости», которые все полезны, но которые мало связаны (если вообще связаны) друг с другом. Каждое определение требует существования различных желаемых свойств либо одного решения, либо совокупности решений.

Одно из самых ранних определений устойчивости данного решения $x = \bar{x}(t)$ системы $x' = f(x)$ заключается в распространении требований, указанных в конце § 84 и относящихся к фиксированному интервалу, на бесконечный интервал $-\infty < t < +\infty$. Другими словами, решение $x = \bar{x}(t)$ системы $x' = f(x)$ называется устойчивым в этом смысле, если оно обладает следующими свойствами: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ такое, что любое решение $x = x(t)$ системы $x' = f(x)$ с начальным значением $x(0)$, подчиненным неравенству $|x(0) - \bar{x}(0)| < \delta$,

(i) неограниченно продолжаемо в указанном в § 119 смысле и

(ii) удовлетворяет неравенству $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ при всех $-\infty < t < +\infty$. (Полагая $t = 0$, получим, что $\delta \leqslant \varepsilon$; выбирая $x(0) = \bar{x}(0)$, получим, что решение $x = \bar{x}(t)$ само должно быть неограниченно продолжаемым.)

---

*) Статистический подход к динамическим системам заданной степени импримитивности развит в теории Леви-Чивита, названной Эренфестом теорией адиабатических инвариантов.

Это определение устойчивости представляется на первый взгляд наиболее естественным. Но фактически оно весьма неестественно, поскольку требует слишком многого. По существу, все результаты геометрической теории Пуанкаре вещественных дифференциальных уравнений, а также аналогичной теории (но более сложной) преобразований поверхностей (Пуанкаре, Адамар, Леви-Чевита, Биркгоф) указывают на то, что условие (*ii*) выполняется лишь в исключительно редких случаях. Даже в ограниченной проблеме трех тел неизвестно ни одно устойчивое в этом смысле решение.

Положение таково (и именно в интересных случаях), что условие (*ii*) нарушается в силу появления периодических членов с несоизмеримыми периодами. Эти соображения опираются на свойства иррациональных чисел и применимы непосредственно после введения угловых переменных. Единственный полезный критерий, являющийся достаточным для выполнения условий (*i*) — (*ii*), относится лишь к случаю, когда исследуемое на устойчивость решение $x = \bar{x}(t)$ системы $x' = f(x)$ является равновесным в смысле определения, данного в § 83.

§ 132. Для того чтобы сформулировать этот критерий, рассмотрим последовательность множеств $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ в пространстве x, причем Σ_n стягивается при $n \to \infty$ в точку x^0 (заданную), являющуюся внутренней точкой любого Σ_j*), $j = 1, 2, 3, \ldots$ Предположим, что точка x^0 представляет собой точку равновесия системы $x' = f(x)$, т. е. что $f(x^0) = 0$. Предположим также, что любое Σ_n является инвариантным множеством этой системы (в смысле определения в § 81). Тогда эта точка равновесия представляет собой устойчивое (в смысле определения в § 131) решение системы $x' = f(x)$. К такому выводу легко прийти, если сопоставить определение инвариантного множества с последним замечанием в § 120.

§ 133. Достаточное условие устойчивости точки равновесия, указанное в § 132, является также и необходимым. Другими словами, если точка равновесия $x(t) \equiv x^0$ системы $x' = f(x)$ устойчива, то существует последовательность инвариантных множеств Σ_n (открытых областей), стягивающихся при $n \to \infty$ в точку x^0.

Для того чтобы это показать, обозначим через $S(\eta)$ сферу $|x - x^0| < \eta$, а через $S^t(\eta)$ обозначим при достаточно малом фиксированном $\eta > 0$ и фиксированном t такое множество в пространстве x, что имеются интегральные кривые системы $x' = f(x)$,

---

*) Если $S(\eta)$ есть сфера радиуса η с центром в x^0, то каждая точка сферы $S(\eta_n)$ лежит в Σ_n при достаточно малом $\eta_n > 0$.

При каждом $\eta > 0$ существует целое число N_η такое, что Σ_n содержится в $S(\eta)$ при всех $n > N_\eta$.

проходящие при $t = 0$ через некоторую точку сферы $S(\eta)$, а при указанном фиксированном t — через некоторую точку множества $S^t(\eta)$. Пусть $R(\eta)$ — множество тех точек пространства x, которые содержатся по крайней мере в одном из множеств $S^t(\eta)$, для которого η фиксировано, а t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Другими словами, $R(\eta)$ представляет собой совокупность неограниченно продолжаемых кривых (и именно тех, которые проходят через точку сферы $S(\eta)$ при $t = 0$). Следовательно, $R(\eta)$ представляет собой инвариантное множество. Вместе с тем $R(\eta)$ стягивается при $\eta \to 0$ к точке x^0, поскольку, по предположению, x^0 — устойчивая точка равновесия системы $x' = f(x)$. Наконец, так как сфера $S(\eta)$ содержится в $R(\eta)$, то x^0 — внутренняя точка $R(\eta)$. Следовательно, полагая, например, $\Sigma_n = R(n^{-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, мы и получим последовательность, существование которой надо было доказать.

§ 134. Пусть $x(t) \equiv x^0$ — равновесное решение системы $x' = f(x)$, и пусть эта система обладает консервативным интегралом $F(x) = \mathrm{const}$ таким, что функция $F(x)$ имеет при $x = x^0$ изолированный максимум или изолированный минимум. Тогда решение $x(t) \equiv x^0$ устойчиво в указанном в § 131 *) смысле.

Для доказательства достаточно рассмотреть только случай минимума, так как всегда можно заменить $F(x)$ на $-F(x)$. Можно также предположить, что $F(x^0) = 0$ ввиду допустимости замены $F(x)$ на $F(x) + \mathrm{const}$. Таким образом, можно считать, что $F(x) > 0$ при всех x, достаточно близких к x^0, но не равных x^0. В силу непрерывной зависимости функции $F(x)$ от x существует при любом достаточно малом ζ область $\Sigma = \Sigma(\zeta)$, содержащая окрестность точки x^0, стягивающаяся в эту точку при $\zeta \to 0$ и такая, что $F(x) < \zeta$, если x лежит внутри $\Sigma(\zeta)$, и $F(x) = \zeta$, если x лежит на границе этой области. Так как $F(x) = \mathrm{const}$ — интеграл системы $x' = f(x)$, то из §§ 80—82 следует, что $\Sigma(\zeta)$ представляет собой инвариантное множество этой системы при любом малом (фиксированном) $\zeta > 0$. Таким образом, если положить, например, $\Sigma_n = \Sigma(\zeta_n)$ и $\zeta_n = {}^1/_n$, то условия, налагавшиеся в § 132 на последовательность Σ_n, $n = 1, 2, \ldots$, выполняются, что доказывает теорему.

§ 134а. Предположим, в частности, что система $x' = f(x)$ имеет вид (1) § 91, где $H_t \equiv 0$, и что $H(p, q) = T - U$, где T — положи-

---

*) Отсюда вытекает, что солнечная система устойчива, если учитывать лишь «вековые» возмущения. (Устойчивость солнечной системы в предположении, что учитываются лишь линейные вековые возмущения, была показана Лагранжем (и Лапласом). Вывод, что в силу теоремы Миндинга (и Дирихле) эти результаты можно обобщить на случай учета всех нелинейных вековых возмущений, был сделан Брунсом.)

тельно определенная квадратичная форма компонентов $p_1, \ldots, p_n$ вектора p, а U — функция вектора $q = (q_1, \ldots, q_n)$, имеющая при $q = (0, \ldots, 0)$ изолированный максимум. Тогда интеграл $F(x) = \mathrm{const}$, определяемый формулой (3) § 92, имеет, очевидно, при $x = 0$ изолированный минимум, и, таким образом, теорема, изложенная в § 134, применима.

Заметим, что эта теорема может быть применима к консервативной канонической системе и тогда, когда условиям § 134 удовлетворяет не интеграл энергии (3) § 92, но какой-нибудь другой*) интеграл $F(x) = \mathrm{const}$.

§ 135. Следует указать, что достаточные условия устойчивости точки равновесия $x(t) \equiv x^{(0)}$, приведенные в § 134, не являются необходимыми. Пусть, например, дана консервативная каноническая система с одной степенью свободы и с гамильтонианом

$$H(x) = H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - U(q),$$

где

$$U(q) = \begin{cases} \exp(-q^{-2})\cos(q^{-1}), & q \neq 0, \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

(так что производные функции $U(q)$ существуют при любом q). Тогда $p \equiv 0$, $q \equiv 0$ есть равновесное решение, так как $H_p(0, 0) = 0$, $H_q(0, 0) = 0$. Это решение устойчиво, так как рассматривая сечения поверхности $H = H(p, q)$ в декартовом пространстве (p, q, H) соответствующей последовательностью плоскостей $H = h_n (= \mathrm{const})$, легко убедимся в том, что условия § 132 выполняются. Действительно, последовательность $h_1, h_2, \ldots$ постоянных энергии можно выбрать так, что: 1) h_n стремится при $n \to \infty$ к нулю, т. е. к постоянной этого интеграла $h = 0$, соответствующей точке $p = 0$, $q = 0$; 2) «кривая» $H(p, q) = h_n$ на плоскости (p, q) имеет замкнутую ветвь, окружающую область Σ_n, которая в свою очередь содержит в себе точку $(p, q) = (0, 0)$ и стягивается при $n \to \infty$ в эту точку. Тем не менее из определения функции $U(q)$ вытекает, что функция

$$H = \frac{1}{2}p^2 - U(q)$$

(играющая роль функции $F(x)$, рассмотренной в § 134) не имеет в точке $(p, q) = (0, 0)$ ни максимума, ни минимума. Вместе

---

*) Хорошей иллюстрацией этого является проблема, упомянутая в примечании к § 134. В этой проблеме выбираемый интеграл $F(x) = \mathrm{const}$ представляет собой не интеграл энергии, а интеграл, гарантирующий постоянство кинетического момента.

с тем эта система не может иметь консервативных интегралов, не зависящих от интеграла энергии $H(p, q) = \text{const}$, так как этот интеграл является уравнением интегральной кривой на плоскости (p, q).

§ 135а. Легко заметить, что в разобранном примере устойчивая точка равновесия является точкой накопления как устойчивых, так и неустойчивых точек равновесия. По существу, неизвестно, являются ли или не являются достаточные условия § 134 необходимыми, когда нет накопления точек равновесия (например, в случае аналитичности системы). См. также § 477.

§ 136. Предположим, что система $x' = f(x)$ имеет равновесное решение $x(t) \equiv x^0$, и пусть A — постоянная m-матрица, представляющая собой якобиеву матрицу m-вектора $f(x)$, вычисленную при $x = x^0$. Тогда уравнения Якоби имеют вид (см. § 89) $\xi' = A\xi$. Следовательно, можно ожидать, что точка равновесия x^0 устойчива в указанном в § 131 смысле тогда, когда характеристические показатели для решений уравнений Якоби устойчивы (см. § 89), а матрица A не имеет кратных элементарных делителей. Действительно, эти два условия, налагаемые на матрицу A, являются, очевидно, необходимыми и достаточными для ограниченности любого решения $\xi = \xi(t), -\infty < t < +\infty$, системы $\xi' = A\xi$.

Поэтому эти условия в случае постоянной матрицы A выглядят как будто достаточными для устойчивости (в указанном в § 131 смысле) точки равновесия x^0 системы $x' = f(x)$.

Однако простые примеры (канонических систем) показывают, что такое утверждение ошибочно.

§ 136а. Рассмотрим консервативную систему

$$x_j' = -H_{x_{j+2}}, \qquad x_{j+2}' = H_{x_j}, \tag{1_1}$$

где

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2) - (x_2^2 + x_4^2) + \frac{1}{2}(x_4 x_3^2 - x_4 x_1^2 - 2x_1 x_2 x_3) \tag{1_2}$$

с $n = {}^1/_2 m = 2$ степеням свободы. Так как все четыре частные производные H_{x_i} функции (1_2) обращаются в нуль в начале координат, то $x(t) \equiv 0$ есть равновесное решение системы (1_1).

В соответствии с изложенным в § 101 мы получим соответствующие уравнения Якоби, заменяя в (1_1) x на ξ и сохраняя в H лишь квадратичные члены. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll}\xi_1' = -\xi_3, & \xi_2' = 2\xi_4,\\ \xi_3' = \xi_1, & \xi_4' = -2\xi_2.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Из них видно, что четыре собственных числа матрицы A равны $s = \pm\sqrt{-1}$, $s = \pm 2\sqrt{-1}$. Они все различны и устойчивого типа (см. § 89). Тем не менее точка равновесия $x = 0$ системы (1_1) не является устойчивой в смысле определения в § 131.

Действительно, вычисляя четыре частные производные функции (1_2), легко убедимся в том, что система (1_1) допускает частное решение

$$x_1(t) = \sqrt{2}\, t^{-1}\cos t, \qquad x_2(t) = -t^{-1}\cos 2t,$$

$$x_3(t) = \sqrt{2}\, t^{-1}\sin t, \qquad x_4(t) = t^{-1}\sin 2t.$$

Это решение стремится при $t \to \pm\infty$ к точке равновесия $x = 0$, но в то же время $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обращаются в бесконечность при $t \to \pm 0$. Так как система консервативна, то $x(t)$ можно заменить на $x(t - t_0)$, где t_0 — произвольная постоянная. Выбирая t_0 большим, приходим к выводу, что для решения $x(t) \equiv 0$ не выполняется ни одно из условий (i), (ii) § 131.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

§ 137. Пусть дана линейная система $\xi' = A(t)\xi$, где $\xi = \xi(t)$ — неизвестный m-вектор и $A(t)$ — заданная m-матрица, предполагаемая непрерывной, например, при $0 \leqslant t \leqslant t^*$ (или $t^* \leqslant t \leqslant 0$). В случае такой системы осложнения, упомянутые в конце § 79, возникнуть не могут. Действительно, решение $\xi(t)$ существует при всех t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t^*$ и является единственным независимо от начального условия $\xi(0)$.

По существу функция $\xi(t)$ может быть получена как результат линейного преобразования вектора $\xi(0)$ с помощью m-матрицы $R(t)$, причем определитель $\det R(t)$ выражается с помощью следа *) матрицы $A(t)$. Если

$$\xi' = A(t)\xi, \qquad (1_1)$$

то

$$\xi(t) = R(t)\xi(0), \qquad (1_2)$$

$$\det R(t) = \exp\int_0^t \operatorname{tr} A(\bar{t})\, d\bar{t}. \qquad (1_3)$$

---

*) След m-матрицы $B = (b_{ik})$ определяется формулой

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{m}.$$

Действительно, применение к (1_1) метода последовательных приближений показывает, что при всех $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$R(t)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k(t), \tag{2_1}$$

$$D_{k+1}(t)=\int_0^t A(\bar{t})D_k(\bar{t})\,d\bar{t}, \qquad D_0=E, \tag{2_2}$$

где E — единичная матрица. Для матричного ряда (2_1), члены которого определяются рекуррентной формулой (2_2), а также для ряда, получающегося при почленном дифференцировании

$$R'=\Sigma D_k'(t),$$

существует (во всем промежутке $0 \leqslant t \leqslant t^*$) сходящийся мажорантный экспоненциальный ряд, не зависящий от t.

Подстановка (1_2) и (2_1) в (1_1) приводит далее к тождеству

$$R'(t)\equiv A(t)R(t).$$

Дифференцируя определитель $\det R(t)$, получим далее, что

$$(\det R)'=(\det R)\,(\operatorname{tr} A).$$

Это доказывает (1_3), поскольку $R(0)=E$ в силу (2_1)—(2_2).

§ 138. Матрица $X(t)$, столбцы которой составлены из m линейно независимых решений $\xi(t)$ системы (1_1), называется фундаментальной матрицей этой системы. Очевидно, что

$$X'(t)=A(t)X(t), \qquad \det X(t)\neq 0.$$

Следовательно, другая m-матрица $Z(t)$ будет фундаментальной для (1_1) тогда и только тогда, когда существует постоянная матрица C такая, что $Z(t)=X(t)C$ и $\det C\neq 0$ (принцип суперпозиции). Поскольку $R'(t)=A(t)R(t)$ в силу § 137 и поскольку определитель $\det R(t)$, определяемый согласно (1_3), не может обращаться в нуль, то $R(t)$ является фундаментальной матрицей. Таким образом, для определения фундаментальной матрицы $X(t)$ системы (1_1) может быть использована любая из двух эквивалентных друг другу формул

$$X'(t)=A(t)X(t), \qquad \det X(t)\neq 0, \tag{3_1}$$

$$X(t)=R(t)C, \qquad \det C\neq 0 \qquad (R(0)=E), \tag{3_2}$$

где C — неособенная постоянная матрица, определяемая единственным образом в зависимости от $X(t)$. Действительно, поскольку

$\det R(t) \neq 0$ в силу (1_3), то $C = R^{-1}X$. Из (3_2) и (1_2) также видно, что $\det X \neq 0$ при всех t, так что если m решений $\xi(t)$ системы (1_1) линейно независимы при одном t, то они также линейно независимы при всех t.

§ 139. Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1_1) и C — некоторая неособенная постоянная матрица. В силу изложенного в § 138, умножая $X(t)$ на C, придем к другой фундаментальной матрице $Z(t) = X(t)C$ системы (1_1). Вместе с тем умножение C на $X(t)$, т. е. переход от $X(t)$ к $Y(t) = CX(t)$, соответствует линейному преобразованию системы (1_1) и переходу от (1_1) к системе $Y'(t) = CAC^{-1}\,Y(t)$. Мы получим, таким образом, следующие формулы:

$$Y'(t) = B(t)Y(t), \tag{4_1}$$

$$B(t) = CA(t)C^{-1}, \tag{4_2}$$

$$Y(t) = CX(t). \tag{4_3}$$

Очевидно, приведенные выше соображения остаются справедливыми и в случае комплексных $A(t), C$. Матрицу $A(t)$ будем предполагать, правда, всегда вещественной, но если некоторая вещественная матрица, определяемая в зависимости от $A(t)$, имеет комплексные характеристические числа, то матрицу C удобнее выбирать комплексной (см. § 144).

§ 140. Допустим, что матрица $A(t)$ в системе (1_1) непрерывная и периодическая при $-\infty < t < +\infty$, так что $A(t) = A(t+\tau)$. Предположим, что период τ, определяемый вообще не единственным образом *), фиксирован. Так как система (3) не изменяется, если вместо t положить $t+\tau$, то если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (1_1), то $X(t+\tau)$ — также фундаментальная матрица этой системы. Из изложенного в § 138 поэтому следует, что для любой фундаментальной матрицы $X(t)$ системы (1_1) существует неособенная постоянная матрица $\Gamma = \Gamma_X$ такая, что соотношение

$$X(t+\tau) = X(t)\Gamma_X \tag{5}$$

удовлетворяется тождественно. Матрица Γ_X называется матрицей монодромии, соответствующей фундаментальной матрице $X(t)$ (и заданному периоду τ матрицы A). В частности,

$$\Gamma_R = R(\tau), \tag{6}$$

так как $R(0) = E$ в силу (1_2).

---

*) Любая величина, кратная τ, также представляет собой период.

§ **141.** В соответствии с изложенным в § 138 наиболее общая фундаментальная матрица системы (1_1) имеет вид $X(t)C$, где $C = \mathrm{const}$ и $\det C \neq 0$. Матрица монодромии Γ_{XC} для $X(t)C$ равна согласно (5)

$$\Gamma_{XC} = C^{-1}\Gamma_X C. \tag{7}$$

Пусть Γ — постоянная матрица монодромии для некоторой фундаментальной матрицы системы (1_1). Тогда какая-либо другая постоянная матрица монодромии для некоторой другой фундаментальной матрицы системы (1_1) представляется обязательно в виде $C\Gamma C^{-1}$ (C — некоторая постоянная неособенная матрица), т. е. имеет те же самые характеристические числа и те же элементарные делители (инвариантные множители), что и матрица Γ. Эти характеристические числа (с соответствующими кратностями) и элементарные делители называются инвариантами группы монодромии для системы (1_1), причем эта группа определяется согласно (7) в зависимости от фиксированного периода τ матрицы $A(t)$ (см. (5)).

§ **142.** Характеристические числа матрицы Γ_X (не зависящие от выбора $X(t)$) называются мультипликаторами*) системы (1_1) по отношению к периоду τ. Ни один из этих мультипликаторов не обращается в нуль, так как их произведение равно $\det \Gamma$ в соответствии с уравнением $\det(sE - \Gamma) = 0$, где $\det \Gamma \neq 0$ в силу (5), (7).

Поскольку мультипликаторы могут быть определены как характеристические числа матрицы (6), вещественной в силу (2_1)—(2_2), то очевидно, что комплексные мультипликаторы встречаются лишь парами (сопряженными). Такое же замечание относится и к элементарным делителям, соответствующим комплексным мультипликаторам.

§ **143.** Обозначая мультипликаторы системы (1_1) через s_j, $j = 1, \ldots, m$, и учитывая, что любое $s_j \neq 0$, введем в рассмотрение m чисел λ_j, $j = 1, \ldots, m$, соответствующих данному периоду τ, полагая

$$\lambda_j = \frac{1}{\tau} \lg s_j, \tag{8}$$

так что

$$s_j = e^{\lambda_j \tau} (\neq 0), \quad j = 1, \ldots, m.$$

---

*) Их называют также часто корнями характеристичного (или характеристического) уравнения. (*Прим. перев.*)

Разумеется, m чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, называемых характеристическими показателями системы (1_1), определены только с точностью до целых кратностей $2\pi i/\tau$. Два характеристических показателя считаются равными, если их разность равна целой кратности $2\pi i/\tau$. В частности, $s_j = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_j = 0$ (или $\lambda_j = 2\pi i/\tau$), а $s_j = -1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_j = \pi i/\tau$.

Если $|s_j| = 1$, то такой мультипликатор (вещественный или комплексный) и соответствующий ему характеристический показатель λ_j принадлежат к устойчивому типу. В соответствии с (8) это будет тогда и только тогда, когда λ_j — чисто мнимое число (включая 0). Из (8) также видно, что в случае вещественного λ_j и $\tau > 0$ имеем $\lambda_j > 0$, $\lambda_j = 0$ или $\lambda_j < 0$, если $s_j > 1$, $s_j = 1$ или $0 < s_j < 1$ соответственно. Следовательно, в тех случаях, когда λ_j не может быть выбрано вещественным или чисто мнимым, то или $s_j < 0$ или $s_j = a_j + ib_j$, где $a_j \neq 0$, $b_j \neq 0$ вещественные. При этом из (8) видно, что $s_j < 0$ тогда и только тогда, когда мнимая часть λ_j равна $\pi i/\tau$.

§ **144.** Поскольку Γ_X можно заменить любой матрицей вида (7), то можно предположить, что фундаментальная матрица $X(t)$ системы (1_1) выбрана так, что соответствующая матрица монодромии Γ_X имеет нормальную жорданову форму. Тогда диагональные элементы матрицы Γ_X равны мультипликаторам $s_1, \ldots, s_m$, а элементы, располагающиеся по линии, параллельной диагонали и граничащей с нею сверху, равны 0 или 1 (возможно, только 0 или только 1); все же остальные элементы равны нулю. Пусть s — один из мультипликаторов s_j, и пусть его кратность равна $l (\geqslant 1)$. Тогда можно предположить, что первые l диагональных элементов матрицы Γ_X равны s. Пусть s принадлежит при этом различным элементарным делителям с кратностями $h_1, \ldots, h_d$ соответственно, так что $h_1 + \ldots + h_d = l$, причем $l \geqslant 1$, $d \geqslant 1$ и любое $h \geqslant 1$. Предположим, что первая клетка рассматриваемой матрицы Γ_X (имеющей жорданову форму) соответствует кратности h_1. Тогда, если обозначить через $\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)$ m-векторы, составляющие столбцы m-матрицы $X(t)$, то из (5) видно, что

$$\xi_1(t+\tau) = s\xi_1(t), \tag{9_1}$$

$$\xi_g(t+\tau) = \xi_{g-1}(t) + s\xi_g(t), \quad g = 2, \ldots, h_1, \tag{9_2}$$

причем в случае простого элементарного делителя $(h_1 = 1)$ сохраняется только (9_1). Из (8) же следует, что (9_1)—(9_2)

эквивалентны формулам

$$\xi_1(t) = e^{\lambda t}\varphi_{11}(t), \qquad (10_1)$$

$$\xi_g(t) = e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{g} t^{k-1}\varphi_{gk}(t), \quad g = 2, \ldots, h_1, \qquad (10_2)$$

где λ — соответствующий мультипликатору s характеристический показатель, $\varphi_{gk}(t)$ — некоторые m-вектор-функции t, имеющие общий период τ, и $\varphi_{gg}(t) \not\equiv 0$ при $g = 1, \ldots, h_1$. Рассматривая далее аналогичным образом все остальные из $d-1$ ($\geqslant 0$) клеток в Γ_X, которые соответствуют характеристическому числу s, а также клетки, соответствующие различным s_j, $j = 2, \ldots, m$, придем к следующим результатам.

§ 144а. Число $s = e^{\lambda\tau}$ является мультипликатором системы (1_1) тогда и только тогда, когда эта система обладает решением вида $\xi(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — периодическая функция t, имеющая общий с $A(t)$ период τ и $\varphi(t) \not\equiv 0$.

Общее решение системы (1_1) представляет собой линейную комбинацию m линейно независимых решений вида $e^{\lambda t}\varphi(t)$ тогда и только тогда, когда все элементарные делители группы монодромии простые. Если по крайней мере один из элементарных делителей кратный, то в общем решении системы (1_1) появляются «вековые» члены, т. е. члены, содержащие наряду с периодическими или показательными функциями t рациональные полиномы по t. Если кратность такого элементарного делителя равна $h \geqslant 2$, то наивысшая степень полиномов по t, появляющихся в общем решении, равна $h-1$.

§ 145. Пусть $A(t)$ не зависит от t. Тогда (1_1), (2_1), (1_2) перепишутся в виде *)

$$\xi' = A\xi \qquad (A = \mathrm{const}), \qquad (11_1)$$

$$R(t) = e^{tA}, \qquad (11_2)$$

$$\xi(t) = e^{tA}\xi(0). \qquad (11_3)$$

Так как условие $A(t+\tau) = A(t)$ удовлетворяется при $A = \mathrm{const}$ для любого τ и так как функции $\varphi_{gk}(t)$ в (10_1), (10_2) имеют период τ, то они — постоянные.

Характеристические показатели λ, определявшиеся для (10_1) — (10_2) с точностью до целых кратностей $2\pi i/\tau$ (см. § 143), в данном

---

*) Действительно, из (2_2) мы получим тогда, что $D_k(t) = \frac{(tA)^k}{k!}$. Следовательно, (11_2) совпадает с определением e^B в § 57, если положить $B = tA$.

случае определяются уже единственным образом, так как величина $2\pi i/\tau$ тогда произвольна.

Фактически $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются не чем иным, как характеристическими числами матрицы A (см. § 89).

Вместе с тем группа монодромии, а следовательно, и совокупность мультипликаторов $s_1, \ldots, s_m$ никак не определяются, поскольку τ в (5) теперь произвольно.

§ 146. Пусть дано некоторое решение $x=x(t)$ системы $x'= f(x)$. Соответствующую систему Якоби (8) § 85 отождествим с (1_1) § 137. Тогда (10) § 85 показывает, что фундаментальная матрица (2_1) § 137 совпадает с матрицей (7) § 85. Этот факт имеет в силу (6) § 85 большое значение в приложениях.

§ 147. Предположим, в частности, что данное решение $x=x(t)$ системы $x'=f(x)$ является периодическим с периодом τ. Тогда условие $A(t+\tau)=(At)$ (§ 140) выполняется*), и можно говорить о характеристических показателях $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ для данного периодического решения $x(t)$, соответствующих фиксированному периоду τ функции $A(t)$. Справедлив результат, что эти характеристические показатели или соответствующие мультипликаторы, а также элементарные делители группы монодромии остаются неизменными, если подвергнуть пространство x преобразованию $y= y(x)$, рассмотренному в § 88.

С целью доказательства заметим сначала, что преобразованная система Якоби (16) § 88 обладает в силу (18) § 88 фундаментальной матрицей вида

$$Y(t)=J(t)X(t), \qquad (11_4)$$

где $X(=R)$ — фундаментальная матрица исходной системы Якоби (8) § 85, а J — якобиева матрица $y_x=y_x(x)$ преобразования $y=y(x)$ вдоль данного периодического решения $x=x(t)$ системы $x'=f(x)$. Матрица $J(t)$ неособенная и периодическая с периодом τ. В силу (11_4) имеем

$$Y(t+\tau)=J(t)X(t+\tau).$$

Используя (5) § 140, перепишем это соотношение в виде

$$Y(t+\tau)=J(t)X(t)\Gamma_X.$$

Кроме того, по определению матрицы монодромии, имеем

$$Y(t+\tau)=Y(t)\Gamma_X.$$

Сопоставляя последние два выражения и учитывая (11_4), полу-

---

*) Но $A(t)$ может оказаться периодической функцией и в случае непериодического решения $x(t)$.

чим, что $\Gamma_Y = \Gamma_X$. Сформулированный в начале параграфа результат доказан.

§ **148.** Если данное периодическое решение $x(t)$ системы $x' = f(x)$ не есть равновесное решение, т. е. если $x(t) \neq \text{const}$, то по крайней мере один из мультипликаторов соответствующей системы в вариациях равен $s = 1$. В силу § 143 это утверждение эквивалентно тому, что по крайней мере один из характеристических показателей равен нулю. Следовательно, первый из критериев § 144а показывает, что тогда система Якоби $\xi' = A(t)\xi$ обладает решением $\xi = \xi(t)$, периодическим с периодом τ и имеющим форму $\xi = \varphi(t)$, причем $\varphi(t+\tau) = \varphi(t) \not\equiv 0$. Однако поскольку, по предположению, $x(t+\tau) = x(t) \neq \text{const}$, то в силу изложенного в конце § 87 можно положить $\varphi(t) = x'(t)$.

§ **149.** Предположим, что данное периодическое решение $x(t) = x(t+\tau) \neq \text{const}$ системы $x' = f(x)$ принадлежит семейству периодических решений $x = x\left(\frac{t}{\tau(\varepsilon)}, \varepsilon\right)$ этой системы. При этом $x(u, \varepsilon)$ — функция двух переменных, имеющая непрерывные частные производные первого порядка, а период $\tau = \tau(\varepsilon)$, рассматриваемый как функция постоянной интегрирования ε (которая равна нулю для данного решения $x(t)$), имеет непрерывную производную $\tau_\varepsilon(\varepsilon)$, отличную от нуля при $\varepsilon = 0$. Применение к семейству $x(t, \varepsilon) = x\left(\frac{t}{\tau(\varepsilon)}, \varepsilon\right)$ правила, изложенного в § 87, показывает, что система Якоби $\xi' = A(t)\xi$, соответствующая решению $x = x(t)$, сама обладает решением

$$\xi(t) = \psi(t) + t\varphi(t), \tag{12}$$

где

$$\psi(t) = x_\varepsilon(t, 0), \qquad \varphi(t) = ax'(t), \qquad a = -\frac{\tau_\varepsilon(0)}{\tau^2(0)}.$$

Так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ имеют, очевидно, период $\tau = \tau(0)$ и так как $\varphi(t) \not\equiv 0$ в силу условия $x(t) \neq \text{const}$, то из второго из критериев § 144а следует, что система Якоби $\xi' = A(t)\xi$ обладает не только периодическим решением $\xi = x'(t)$, указанным в § 148, но и вековым решением (12), соответствующим характеристическому показателю $\lambda = 0$. Таким образом, по крайней мере два характеристических показателя равны нулю, т. е. по крайней мере два мультипликатора равны 1.

§ **150.** Предположим, что линейная система (1_l) является канонической, так что m-вектор ξ представляет собой $2n$-вектор, образованный n импульсами и n координатами. Эту систему можно записать в виде (см. § 91)

$$\xi' + \mathrm{I}H_\xi = 0,$$

в которой функция Гамильтона $H = H(\xi, t)$ является квадратичной формой $^1/_2\xi\cdot\mathrm{H}(t)\xi$, соответствующей заданной симметрической $2n$-матрице $\mathrm{H} = \mathrm{H}(t)$. В соответствии с этим

$$\mathrm{I}\xi' = \mathrm{H}(t)\xi, \qquad (13_1)$$

т. е.

$$\xi' = -\mathrm{IH}(t)\xi,$$

причем

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\backprime}, \quad \mathrm{I}^{\backprime} = -\mathrm{I} = \mathrm{I}^{-1}, \qquad (13_2)$$

так что матрица $A(t)$ в системе (1_1) связана с $\mathrm{H}(t)$ формулой $A(t) = -\mathrm{IH}(t)$. В соответствии с § 105а преобразование $\xi(0)$ в $\xi(t)$ является каноническим с множителем $\mu = 1$. Сравнение (1_2) § 137 с § 37 показывает далее, что (14_1) § 37 удовлетворяется при $\mu = 1$ и $\Gamma(t) = R(t)$, причем $R(t)$ определяется согласно (2_1)—(2_2) § 137. Другими словами, $R(t)$ представляет собой при любом фиксированном t полностью каноническую матрицу (§ 60).

§ 151. Предположим, в частности, что матрица $\mathrm{H}(t)$ в (13_1) удовлетворяет условию $\mathrm{H}(t+\tau) = \mathrm{H}(t)$ при фиксированном $\tau \neq 0$. В соответствии с (6) и с последним замечанием в § 150 матрица монодромии Γ_R является полностью канонической. Так как характеристические числа этой матрицы (т. е. $2n$ мультипликаторов $s_1, \ldots, s_{2n}$) и ее элементарные делители являются инвариантами группы монодромии (см. §§ 141—142), то из § 60 следует, что если s — мультипликатор, вещественный или комплексный, то s^{-1} — также мультипликатор, соответствующий (если $s \neq \pm 1$) элементарным делителям той же степени, что и s (и имеющий, в частности, ту же кратность). Учитывая изложенное в § 143, можно сказать, что если система (13_1) имеет характеристический показатель, равный λ, то она также имеет характеристический показатель, равный $-\lambda$. При этом, если λ не равно целой кратности $2\pi i/\tau$ или $\pi i/\tau$, то $-\lambda$ имеет ту же самую кратность и соответствует вековым членам той же степени, что и λ. Кроме того, кратность мультипликатора $s = -1$ (т. е. характеристического показателя $\lambda = \pi i/\tau$), а следовательно, и мультипликатора $s = +1$ $(\lambda = 2\pi i/\tau)$ всегда четная. Это вытекает из того, что произведение всех $2n$ мультипликаторов совпадает с определителем полностью канонической матрицы Γ_R и в силу (12) § 32 равно $+1$.

Наряду с тем, что мультипликаторы встречаются парами (s, s^{-1}), имеет место и тот факт (см. § 142), что каждому комплексному s соответствует сопряженный мультипликатор $\bar{s}$ той же кратности и соответствующий такому же элементарному делителю. Поэтому из изложенного в § 143 следует, что если система (13_1) имеет комплексный (не вещественный или чисто мнимый) характеристический показатель λ, то не только $-\lambda$, но и λ, а следовательно, и $-\bar{\lambda}$ также будут характеристическими показателями этой системы. Четыре различных характеристических показателя $\pm\lambda$, $\pm\bar{\lambda}$ имеют при этом одну и ту же кратность и могут порождать вековые члены одной и той же степени (см. §§ 144—144а).

§ 152. Пусть дано решение $x = x(t)$ консервативной канонической системы с n степенями свободы. Тогда соответствующая система Якоби также (см. § 101) каноническая, и она может быть, следовательно, записана в виде (13_1) § 150. Если к тому же $x(t+\tau) = x(t)$, то рассуждения, аналогичные приведенным в §§ 146—147, показывают, что $\mathrm{H}(t+\tau) = \mathrm{H}(t)$.

Если при этом существует функция Лагранжа (см. § 94), то гамильтонова и лагранжева формы (21_1)—(21_2) § 101 уравнений в вариациях обладают одними и теми же инвариантами группы монодромии. Действительно, переход от гамильтоновой к лагранжевой форме уравнений движения выполняется в силу изложенного в §§ 6—8 с помощью преобразования, рассмотренного в § 147. Если данное периодическое решение не представляет собой точку равновесия, то на основании сказанного в § 148 можно гарантировать, что по крайней мере один, а следовательно, в силу § 151 по крайней мере два из мультипликаторов $s_1, \ldots, s_{2n}$ равны 1. Таким образом, по крайней мере два из характеристических показателей $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ равны нулю.

§ 153. Предположим, наконец, что данное решение $x = x(t)$ есть равновесное решение, так что в (13_1)—(13_2) $\mathrm{H}(t) = \mathrm{const}$. Тогда характеристические показатели определяются в соответствии с § 145 единственным образом как характеристические числа матрицы $A = -\mathrm{IH}$ (мультипликаторы s тогда не определяются). Можно утверждать, что результаты, изложенные в § 151 по отношению к характеристическим показателям, остаются справедливыми. Действительно, для этого достаточно показать, что матрицы $-A$ и A или (что означает то же самое) матрицы $-A$ и A' имеют те же самые элементарные делители, т. е. что $-A = T^{-1}A'T$ при соответствующим образом выбранной T. Однако $A = -\mathrm{IH}$, так что в силу (13_2) можно положить $T = \mathrm{I}$.

Так как матрица $R(t)$ является в силу § 150 полностью канонической при любом t и так как она определяется в данном случае по формуле (11_2), где $A = -\mathrm{IH}$, то матрица $e^{-t\mathrm{IH}}$ будет полностью канонической при любом t каждый раз, когда $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$.

Справедливость же последнего факта следует из § 60а, так как матрица $-t\mathrm{H}$ симметрическая при любом t.

§ 153а. Следует указать, что хотя матрица e^{IH} и будет канонической с множителем $\mu = 1$ при любой $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\backprime}$, но не любая каноническая матрица с множителем $\mu = 1$ может быть записана с помощью соответствующей матрицы $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\backprime}$ в виде e^{IH}. Задача о выделении матриц, представляемых в виде e^{IH}, сейчас решена, и она связана с результатами, которые упоминаются в § 154а.

§ 154. Пусть $\mathrm{F} = \mathrm{const}$ — симметрическая $2n$-матрица, отличная от нулевой матрицы (0), но определитель которой может обращаться в нуль. Если G — другая такая же матрица, то из изложенного в § 23 и из (19) § 20 следует, что квадратичные формы ${}^1\!/_2\xi\cdot\mathrm{F}\xi$ и ${}^1\!/_2\xi\cdot\mathrm{G}\xi$ находятся в инволюции одна относительно другой и тогда и только тогда, когда $\xi\cdot\mathrm{GIF}\xi = 0$. Это означает, что матрица GIF — кососимметрическая, т. е. что $\mathrm{GIF} = \mathrm{FIG}$. Поэтому из § 92 вытекает, что квадратичная форма ${}^1\!/_2\xi\cdot\mathrm{F}\xi$ представит собой интеграл линейной консервативной канонической системы $\mathrm{I}\xi' = \mathrm{H}\xi$ (см. § 153) тогда и только тогда, когда $\mathrm{HIF} = \mathrm{FIH}$.

Такой результат справедлив и тогда, когда квадратичная форма ${}^1\!/_2\xi\cdot\mathrm{F}\xi$ представляет собой квадрат линейной формы $\mathrm{f}\cdot\xi$, в которой $2n$-вектор $\mathrm{f} = \mathrm{const} \neq 0$.

Подстановка линейной формы $\mathrm{f}\cdot\xi$ в систему $\xi' = -\mathrm{IH}\xi$ показывает, что эта форма будет ее интегралом тогда и только тогда, когда $\mathrm{HIf} = 0$, т. е. если $\mathrm{Hg} = 0$, $\mathrm{f} = -\mathrm{Ig}$.

Таким образом, условие $\det \mathrm{H} = 0$ является необходимым и достаточным для существования линейного интеграла $\mathrm{f}\cdot\xi$. Число таких независимых линейных интегралов совпадает с числом $(\geqslant 0)$ линейно независимых решений g однородного уравнения $\mathrm{Hg} = 0$, где $\mathrm{g} = \mathrm{If}$.

§ 154а. Если $C = \mathrm{const}$ — некоторая полностью каноническая матрица, то функция Гамильтона ${}^1\!/_2\xi\cdot\mathrm{H}\xi$ системы (13_1) преобразовывается подстановкой $\xi = C\eta$ в ${}^1\!/_2\eta\cdot\mathrm{K}\eta$, где $\mathrm{K} = C^{\backprime}\mathrm{H}C$ (см. §§ 37, 60). Таким образом, возникает вопрос, к какой нормальной форме можно прийти при данной $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\backprime} = \mathrm{const}$ после замены H на $C^{\backprime}\mathrm{H}C$, причем C — постоянная полностью каноническая матрица, подобранная соответствующим образом. Ответ на этот вопрос, а также на аналогичный вопрос о нормальной форме самой матрицы был получен вообще лишь недавно. Используемые при этом выкладки слишком длинны, чтобы их можно было здесь привести. Что касается канонических нормальных форм некоторых матриц H частного вида, то см. §§ 64, 64а, где $\mathrm{H} = Q$.

ГЛАВА III

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И ЛАГРАНЖА

§ 155. Будем считать, что функция Лагранжа $L(q', q, t)$ соответствует динамической системе (не релятивистской), если n-матричная функция Гесса $(L_{q_i' q_k'})$ (см. § 15) не содержит q' и является положительно определенной *). Эти свойства инвариантны по отношению к преобразованию, рассмотренному в § 10. В силу § 9а можно предположить без потери общности, что $L_t \equiv 0$.

Таким образом, мы будем рассматривать только те функции Лагранжа, которые имеют вид

$$L(q', q) \equiv L = \frac{1}{2} \sum \sum g_{ik}(q) q_i' q_k' + \sum f_i(q) q_i' + U(q) \qquad (1)$$

$$\left(\sum = \sum_1^n \right),$$

где $g_{ik} = g_{ki}$, f_i, U суть $^1/_2 n(n+1) + n + 1$ заданных скалярных функций точки $q = (q_i)$ в позиционном пространстве и

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum \sum g_{ik}(q) q_i' q_k' > 0, \quad \text{если} \quad \sum q_i'^2 \neq 0, \qquad (2_1)$$

$$g_{ik} = L_{q_i' q_k'} = T_{q_i' q_k'} = g_{ki}. \qquad (2_2)$$

В соответствии с (1) и изложенным в § 96а интеграл энергии лагранжевой системы $[L]_q = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum \sum g_{ik}(q) q_i' q_k' - U(q) = h = \text{const}$$

или

$$T(q', q) - U(q) = h, \qquad (3)$$

---

*) Это дополнительное предположение, которое выражается неравенством (2_1), мы не будем использовать до § 166. Поэтому здесь достаточно полагать, что $\det(L_{q_i' q_k'}) = \det(g_{ik}) \neq 0$.

где h — постоянная энергии. Это соотношение не содержит коэффициентов $f_i(q)$ линейной относительно скоростей $q_1', \ldots, q_n'$ части функции (1). Такие члены соответствуют силам, не выполняющим работу, например, кориолисовым силам (см. § 231). В соответствии с (3), (2_1) величины T и $-U$ называют кинетической и потенциальной энергией соответственно, а саму функцию U называют силовой функцией.

§ **156.** Очевидно, что уравнения $[L]_q = 0$ не изменятся, если добавить к $U(q)$ постоянную. Единственным результатом такого добавления будет сдвиг нулевого уровня постоянной энергии h. Кроме того, эти уравнения также не изменятся, если добавить к каждому коэффициенту $f_i(q)$ производную скалярной функции $G(q)$. Действительно, тогда к функции (1) будут добавлены члены

$$\sum_i G_{q_i}(q) q_i' \equiv (G(q))',$$

которые, как отмечено в конце § 94, могут быть опущены. В соответствии с этим, если вектор (f_i) представляет собой градиент, то функцию $G(q)$ можно выбрать так, что все линейные члены относительно $q_1', \ldots, q_n'$ в (1) обратятся в нуль. В этом частном случае, т. е. если (1) приводится к

$$L = T(q', q) + U(q),$$

динамическая система $[L]_q = 0$ называется динамической системой обратимого типа, а в противном случае необратимого типа. Основанием для такой терминологии служит тот факт, что если система $[L]_q = 0$ имеет решение $q = q(t)$, то функция $q = q(-t)$ также будет решением тогда и только тогда, когда (1) сводится к $T + U$. Это будет показано в § 163.

Вместе с тем если $q = q(t)$ — решение уравнений $[L]_q = 0$, то $q = q(t - t^0)$ — также есть решение этих уравнений при любом $t^0 = \mathrm{const}$, представляющее ту же самую интегральную кривую в позиционном пространстве (и соответствующее, в частности, той же самой постоянной энергии h), что и $q = q(t)$. Это следует из того, что функция (1) консервативна, и система $[L]_q = 0$ не содержит явно время t.

§ **157.** Так как матрица

$$(L_{q_i' q_k'}) \equiv (g_{ik}(q)) = (g_{ki})$$

является в силу (2_1) — (2_2) положительно определенной при любом q, то условие $\det(L_{q_i' q_k'}) \neq 0$, приводимое в § 15, удовлетворяется. Обратная матрица $(g_{ik})^{-1}$, которую мы обозначим через

$$(g^{ik}) = (g^{ik}(q)) = (g^{ki}),$$

также положительно определенная. Кроме того, из (1) § 155 и (1_1) — (1_2) § 15 имеем

$$L_{q'_i} \equiv p_i = \sum g_{ik} q'_k + f_i, \tag{4}$$

т. е.

$$H_{p_i} \equiv q'_i = \sum (p_k - f_k) g^{ik}, \tag{4_1}$$

поскольку $(g^{ik}) \equiv (g_{ik})^{-1}$. Следовательно, полагая

$$f^i(q) \equiv f^i = \sum g^{ik} f_k, \tag{5}$$

т. е.

$$f_i(q) \equiv f_i = \sum g_{ik} f^k, \tag{5_1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} V(q) &= V = U - \frac{1}{2}\sum\sum g^{ik} f_i f_k, \\ U(q) &\equiv U = V + \frac{1}{2}\sum\sum g_{ik} f^i f^k, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

можем на основании (2_1) § 15 заключить, что функция Лагранжа (1) § 155 соответствует функции Гамильтона

$$H(p, q) \equiv H = \frac{1}{2}\sum\sum g^{ik}(q) p_i p_k - \sum f^i(q) p_i - V(q). \tag{7}$$

Так как $(H_{p_i p_k}) = (g^{ik})$, то можно сделать вывод, что динамическая система может быть охарактеризована не только функцией L вида (1), но также и функцией Гамильтона H вида (7).

При этом если L является в соответствии с (1) полиномом второй степени относительно скоростей с коэффициентами g_{ik}, f_i, U, зависящими лишь от $q = (q_i)$, причем члены второго порядка образуют положительно определенную квадратичную форму (2), то H является полиномом второй степени относительно импульсов $p_1, \ldots, p_n$ с коэффициентами g^{ik}, f^i, V, зависящими только от $q = (q_i)$, причем

$$\frac{1}{2}\sum\sum g^{ik}(q) p_i p_k > 0, \quad \text{если} \quad \sum p_i^2 \neq 0, \tag{8_1}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum\sum (p_i - f_i)(p_k - f_k) g^{ik}. \tag{8_2}$$

Формулы (8_1), (8_2) эквивалентны (2_1) в силу (4).

Наконец, из (4), (5), (6), (8_2) вытекает, что (3) и (7) можно переписать в виде

$$H(p, q) = h, \tag{9_1}$$

$$H(p, q) = T - U(q), \tag{9_2}$$

где $T = T(p, q)$ в силу (8_2).

§ 158. Из (5) видно, что для обратимой системы (см. § 156) не только $(f_i) \equiv (0)$, но и $(f^i) \equiv (0)$. В силу (4) обратимая система характеризуется также соотношениями

$$L_{q'_i} \equiv p_i = \sum q_{ik} q'_k, \quad \text{т. е.} \quad H_{p_i} \equiv q'_i = \sum g^{ik} p_k \tag{10}$$

или (в силу (3), (7), (8_2)) также

$$L(q', q) = T + U, \tag{11_1}$$

$$H(p, q) = T - U, \tag{11_2}$$

$$\sum \sum g_{ik} q'_i q'_k = 2T = \sum \sum g^{ik} p_i p_k. \tag{11_3}$$

Из (6) далее ясно, что условие $(f^i) \equiv 0$ эквивалентно равенству $U = V$. В соответствии с (11_2) уравнения Гамильтона

$$q'_i = H_{p_i}, \quad p'_i = -H_{q_i} \tag{12}$$

сводятся к следующим:

$$q'_i = T_{p_i}, \quad p'_i = U_{q_i} - T_{q_i},$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum \sum g^{ik}(q) p_i p_k, \quad U = U(q).$$

Поскольку $\sum p_i T_{p_i} \equiv 2T$, из (12) и из (10) видно, что

$$\left(\sum p_i q_i \right)' = - \sum q_i (T_{q_i} - U_{q_i}) + 2T, \tag{13_1}$$

$$\sum p_i q_i = \sum \sum g_{ik} q_i q'_k. \tag{13_2}$$

§ 159. В частности, если все $g_{ik} = g_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ суть однородные функции некоторой степени α, то, поскольку $(g_{ik})^{-1} = (g^{ik})$, гамильтонова кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum g^{ik} p_i p_k$$

является однородной функцией координат $q_1, \ldots, q_n$ степени $-\alpha$, так что $\sum q_i T_{q_i} = -\alpha T$. Формулы $(13_1)-(13_2)$, $(9_1)-(9_2)$ показывают тогда, что соотношение

$$\left(\sum\sum g_{ik} q_i q_k'\right)' = (\alpha+2)(U+h)+\sum q_i U_{q_i} \tag{14}$$

удовлетворяется тождественно по t вдоль любого решения $q = q(t)$ с постоянной энергии, равной h *).

В важном частном случае $\alpha = 0$ правая часть (14) может быть записана в виде

$$2(U+h)+\sum q_i U_{q_i}, \tag{15_1}$$

или

$$(\beta+2)U+2h, \tag{15_2}$$

или

$$2(U^*+h)+\sum q_i U^*_{q_i} \tag{15_3}$$

в зависимости от того, является ли функция $U = U(q_1, \ldots, q_n)$ произвольной, однородной некоторой степени β (например, $U \equiv 0$) или такой, что существует $U^* = U^*(q_1, \ldots, q_n)$, для которой $U - U^*$ является однородной функцией степени $\beta = -2$.

Если α произвольно и U — однородная функция степени $\beta = -\alpha - 2$ (в частности, $U \equiv 0$), то (14) показывает, что система уравнений $[L]_q = 0$ имеет, кроме интеграла энергии (3), еще интеграл **)

$$\sum\sum g_{ik} q_i q_k' + \beta t\left(\frac{1}{2}\sum\sum g_{ik} q_i' q_k' - U\right) = \text{const} \tag{16}$$

$$(\beta = -\alpha - 2).$$

---

*) Тождество (14) имеет значение в статистической механике («теорема о вириале»).

**) Если любая производная U_{q_i} является однородной функцией степени $\gamma = -1$ (для этого достаточно, но не необходимо, чтобы функция U была однородной функцией степени $\beta = 0$), то система уравнений $[L]_q = 0$ обладает интегралом $\Sigma q_i U_{q_i} = \text{const}$ (если только не все U_{q_i} обращаются тождественно в нуль). Этот результат справедлив и тогда, когда коэффициенты q_{ik} в (1) не являются однородными функциями некоторой степени α, а также в случае необратимости системы. Действительно, поскольку

$$F = -\sum q_k F_{q_k},$$

где $F = U_{q_i}$, то

$$U_{q_i} + \sum q_k U_{q_i q_k} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\left(\sum q_i U_{q_i}\right)' \equiv 0.$$

§ 160. Предположим, что $U(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция некоторой степени β, или же что все производные $U_{q_i}(q)$ суть однородные функции одной и той же степени $\gamma (= \beta - 1)$. Последнее предположение является, если $\beta = 0$, более общим. Пусть далее все g_{ik} не зависят от q, так что уравнения (12) сводятся к следующим:

$$q_i' = \sum g^{ik} p_k,$$

$$p_i' = U_{q_i}$$

или

$$q_i'' = K_i(q),$$

где

$$K_i = \sum g^{ik} U_{q_k}.$$

Так как все $K_i = K_i(q, \ldots, q_n)$ являются однородными функциями одной и той же степени γ, то естественно искать пару фиксированных скалярных функций $u = u(t)$, $v = v(t)$ времени t, которые обладают тем свойством, что если $q_i = q_i(t)$ — какое-либо решение уравнений движения $q_i'' = K_i(q)$, то $q_i = v(t) q_i(u(t))$ — также решение этих уравнений («динамическое подобие»).

Будем предполагать, что функции $u = u(t)$, $v = v(t)$ имеют непрерывные вторые производные $u''(t)$, $v''(t)$ и что $v(t) > 0$, $u'(t) > 0$. В частности, можно принять $u = u(t)$ за независимую переменную вместо t, так что $t = t(u)$.

Поскольку все K_i — однородные функции степени $\gamma (= \beta - 1)$, легко можно установить с помощью непосредственной подстановки, что если $q_i = q_i(t)$ — некоторое решение системы $q_i'' \equiv K_i(q)$, то $q_i = v(t) q_i(u(t))$ будет решением этой системы тогда и только тогда, когда соотношение

$$v^\gamma \frac{d^2 q_i}{du^2} \left(\frac{dt}{du}\right)^3 = \frac{d^2(vq_i)}{du^2} \frac{dt}{du} - \frac{d(vq_i)}{du} \frac{d^2 t}{du^2},$$

где $t = t(u)$ удовлетворяется тождественно по u. Сравнивая же далее коэффициенты при $\dfrac{d^j q_i}{du^j}$ $(j = 0, 1, 2)$, получим, что две функции u, v переменной t обладают желаемым свойством по отношению к решению $q_i = q_i(t)$ системы $q_i'' = K_i$ в том случае, если две функции t, v переменной u удовлетворяют следующим трем условиям:

$$\frac{v}{\dot{t}^2} = v^\gamma, \qquad (17_1)$$

$$2\dot{v}\dot{t} - v\ddot{t} = 0, \qquad (17_2)$$

$$\ddot{v}\dot{t} - \ddot{t}\dot{v} = 0, \qquad (17_3)$$

где точками обозначается дифференцирование по u.

Из (17_3) вытекает, что отношение $\dot{v}/\dot{t}$ равно постоянной величине, например c. Дифференцируя далее (17_1) по u и подставляя получающееся выражение для $\ddot{t}$ в (17_2), видим, что поскольку $\beta = \gamma + 1$, то три условия (17_k) для двух функций $t(u)$, $v(u)$ эквивалентны следующим:

$$\dot{t}^2 = v^{2-\beta}, \qquad (18_1)$$

$$4\dot{t}^2\dot{v} = (2 - \beta)v^{2-\beta}\dot{v}, \qquad (18_2)$$

$$\dot{v} = c\dot{t}. \qquad (18_3)$$

Выберем постоянную интегрирования c равной нулю. Тогда из (18_3) следует, что v равно положительной постоянной, например, $\lambda (> 0)$, соотношение (18_2) сводится к $0 = 0$, а соотношение (18_1) к

$$\frac{dt}{du} = \lambda^{1-\frac{\beta}{2}}.$$

Следовательно, все условия удовлетворяются при

$$v = \lambda = \text{const} > 0, \qquad u = \lambda^{\frac{\beta}{2}-1}\, t,$$

так что, если $q_i = q_i(t)$ — решение системы $[L]_q = 0$, то функция

$$q_i = \lambda q_i(\lambda^{\frac{\beta}{2}-1}\, t), \qquad (18_4)$$

где λ — любая положительная постоянная, также представляет собой решение системы $[L]_q = 0$.

Если $\beta \neq 0$, так что $U(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция степени β, то из (3) видно, что постоянная энергии для решения (18_4) в λ^β раз больше, чем постоянная энергии h для решения $q_i(t)$.

§ 160а. Если система $[L]_q = 0$ имеет семейство периодических решений, которые удовлетворяют некоторым условиям дифференцируемости, то период решения этого семейства является в силу изложенного в § 100 функцией $\tau = \tau(h)$ только от постоянной энергии h. Если динамическая система принадлежит к типу, рассмотренному в § 160, и если $\beta \neq 0$, то функция $\tau = \tau(h)$ может быть выражена явно.

Действительно, если расширить семейство периодических решений путем введения дополнительного параметра λ, то из изложенного в конце § 160 вытекает, что период и постоянная энергия окажутся равными $\lambda^{1-\frac{\beta}{2}}\tau(h)$ и $\lambda^{\beta}h$ соответственно. Следовательно, произведение

$$\tau(h)\lambda^{1-\frac{\beta}{2}}$$

должно быть функцией величины $\lambda^{\beta}h$, причем λ — произвольное положительное число. Это означает, что для решений семейства период $\tau(h)$ пропорционален $|h|$ в степени $(\beta^{-1} - {}^1\!/_2)$.

§ **161.** Поскольку соображения, касающиеся формул (18_1)—(18_3) в предыдущем параграфе, основаны на предположении, что $c = 0$, остается проанализировать, в какой мере результаты этого параграфа являются полными.

Прежде всего, если $\beta \neq -2$, то c следует положить равным нулю. Действительно, так как, по предположению, $v > 0$, $\dot t > 0$, то из (18_1) вытекает, что (18_2) имеет место при $\beta \neq -2$, если только $\dot v \equiv 0$ и, следовательно, $c = 0$ (см. (18_3), где $\dot t > 0$).

Пусть, однако, $\beta = -2$. Тогда (18_2) удовлетворяется в силу (18_1) тождественно и в том случае, если $\dot v \not\equiv 0$, так что постоянную c можно выбирать в (18_3) произвольно. Три условия (18_k) сводятся тогда к следующим:

$$u'^2 = v^{\beta-2}, \qquad v'\dot t = ct$$

или (поскольку $\beta = -2$, $\dot t > 0$)

$$u' = v^{-2}, \qquad v' = c,$$

где $u = u(t)$, $v = v(t)$. Можно сделать, таким образом, вывод, что все эти условия удовлетворяются при

$$u(t) = \int \frac{dt}{v^2(t)}, \qquad v(t) = ct + b,$$

где $b, c(\neq 0)$ — произвольные постоянные. В частности, если $q_i = q_i(t)$ — решение системы $[L]_q = 0$, то $q_i = \pm t q_i\left(\frac{1}{t}\right)$ также решение.

Сопоставляя этот результат с теми, которые рассматривались в § 96 (и § 9а), можно ожидать, что если $\beta = -2$, то существуют два независимых интеграла, соответствующих паре произвольных постоянных b, c, и что если $\beta \neq -2$, то этих интегралов нет. Эти два интеграла системы $[L]_q = 0$ можно записать в явном виде. Действительно, один из них совпадает с (16) при $\alpha = 0$, а другой имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum\sum g_{ik}(q_iq_k - 2tq_iq_k' + t^2q_i'q_k') - t^2U = \text{const} \qquad (16a)$$

и является очевидным следствием (16) и (3), поскольку g_{ik} — постоянные.

§ **162.** Если $U(q_1, \ldots, q_n)$ — однородная функция некоторой степени β и коэффициенты g_{ik} не зависят от q (следовательно, $\alpha = 0$), то

$$\frac{1}{2}J'' = (\beta + 2)U + 2h, \qquad (19_1)$$

$$J(q) \equiv J = \sum\sum g_{ik}q_iq_k. \qquad (19_2)$$

Действительно, (19_1) совпадает в силу (15_2) и определения (19_2) с (14).

Если, в частности, $\beta = -2$, то (19_1) сводится к $J'' = 4h$, так что

$$J(t) = 2ht^2 + \text{const}\cdot t + \text{const}.$$

Сравнивая эту формулу с (19_2), получим, что в исключительном случае $\beta = -2$ (§ 161) только те решения $q = q(t)$ системы $[L]_q = 0$ остаются ограниченными при $t \to \pm\infty$, вдоль которых (19_2) не зависит от t. Обращение в нуль постоянной энергии h — необходимое условие для этих решений.

В частности, если $\beta = -2$, то для любого периодического решения $J(t) = \text{const}$, $h = 0$.

§ **163.** Возвращаясь к общему случаю, когда g_{ik}, f_i зависят от q (см. § 155), определим функции $\mathrm{P}_{ik} = -\mathrm{P}_{ki}$, $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ точки q в позиционном пространстве, полагая

$$\mathrm{P}_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}, \qquad (20_1)$$

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}. \qquad (20_2)$$

Подставляя (1) § 155 в (6) § 94, придем к явной записи n лагранжевых уравнений $[L]_{q_i} = 0$ в случае произвольной консервативной динамической системы с n степенями свободы

$$[L]_{q_i} \equiv \sum_k g_{ik} q_k'' + \sum_j \sum_k \Gamma_{jki} q_j' q_k' + \sum_k \mathrm{P}_{ik} q_k' - U_{q_i} = 0. \quad (21)$$

Левые части этих уравнений линейны относительно ускорений q_i'' и содержат члены второй степени относительно скоростей q_i'. Так как $(g_{ik})^{-1} = (g^{ik})$, то (21) можно разрешить относительно q_i'':

$$q_i'' = -\sum_j \sum_k \Gamma^i_{jk}(q) q_j' q_k' - \sum_k \mathrm{P}^i_k(q) q_k' + \sum_k g^{ik}(q) U_{q_k}(q), \quad (22)$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il} \Gamma_{jkl} = \Gamma^i_{kj}$$

и

$$\mathrm{P}^i_k = \sum_l g^{il} \mathrm{P}_{lk} \qquad (\neq -\mathrm{P}^k_i).$$

Для дальнейших приложений полезно заметить, что если начальные значения при $t = t^0$ суть $q(t^0) = q^0$, $q'(t^0) = q'^0$, то имеем

$$q_i'(t) = q_i''(t^0)(t - t^0) + o(|t - t^0|) \quad \text{при} \quad t \to t^0 \pm 0, \quad (23_1)$$

и

$$q_i''(t^0) = \sum g^{ik}(q^0) U_{q_k}(q^0), \quad (23_2)$$

если $q'^0 = 0$. Первая формула следует из формулы Тейлора, а (23_2) — из (22).

Заменяя t на $-t$, увидим, что n уравнений (21) при этом не изменяются тогда и только тогда, когда все $\Sigma \mathrm{P}_{ik} q_k' = 0$. Для произвольного решения $q = q(t)$ последнее условие будет иметь место тогда и только тогда, когда все $\mathrm{P}_{ik} = 0$. Формула же (20_1) показывает, что все $\mathrm{P}_{ik}(q) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда вектор $(f_1, \ldots, f_n)$ является градиентом некоторой функции $G = G(q)$. Этим самым доказано утверждение, касающееся обратимых систем, приведенное в § 156.

§ 164. Можно считать, что в рассматриваемой n-мерной области изменения q справедлива риманова геометрия, определяемая ковариантным метрическим тензором (g_{ik}). Тогда (f^i) и (f_i) представляют собой в силу (5) контрвариантные и ковариантные компоненты одного и того же вектора. Формула (20_2) определяет символы Кристоффеля для g_{ik}, а (20_1) — вихрь (ковариантный) вектора $f = (f_i)$. Кроме того, (4) показывает, что импульсы p_i соответствуют ковариантным векторам (см. § 48), так что их индекс i выписан правильно (внизу). В то же время скорости q_i' соответствуют контрвариантным векторам, так что их индекс следовало бы ставить вверху. В этом сысле формулы в §§ 155, 157 говорят о том, что теория Лагранжа является контрвариантной, а теория Гамильтона — ковариантной. Однако из формул в § 158 видно, что кинетическая энергия T является в рамках такого тензорного подхода инвариантной (и тогда $U = V$) тогда и только тогда, когда система обратима. При этом условие $(f_i) \equiv 0$ является для динамической системы таким, при котором (p_i) и (q_i') суть ковариантное и контрвариантное представления одного и того же вектора (см. § 15).

§ 165. Для того чтобы можно было применить результаты, изложенные в §§ 79—98, следует заменить, как и в § 94, n-мерное позиционное пространство $q = (q_i)$, $2n$-мерным пространством $(q', q) = z = (z_j)$, где $z_i = q_i'$, $z_{i+n} = q_i$. В частности, точка равновесия $q = q^0$ в позиционном пространстве должна быть определена как решение уравнений (22) при начальных условиях $q(t^0) = q^0$, $q'(t_0) = 0$ (см. § 83).

Уравнения (22) обладают таким решением тогда и только тогда, когда все n скалярных сумм (23_2) обращаются в нуль, так что, поскольку $\det g^{ik} \neq 0$, точки равновесия q^0 характеризуются обращением в нуль градиента $U_q(q^0)$. Из (23_1)—(23_2) также видно, что если интегральная кривая $q = q(t)$ достигает при $t = t^0$ точки $q(t^0)$ позиционного пространства, в которой вектор скорости $q'(t)$ обращается в нуль, то возможны два случая:

а) градиент $U_q(q(t^0))$ равен нулю, $q'(t) \equiv 0$ и точка $q(t^0)$ является точкой равновесия;

б) градиент $U_q(q(t^0))$ отличен от нуля и тогда $q'(t) \neq 0$ при любом t, отличном от t^0, хотя и сколь угодно близком к t^0. Точка $q(t^0)$ не является тогда точкой равновесия.

§ 166. В силу изложенного в § 83 интегральная кривая в пространстве (q', q) имеет в любой точке определенную касательную (т. е. не имеет точек возврата), если только эта интегральная кривая не вырождается в единственную точку пространства (q', q), т. е. не представляет собой равновесного решения. Однако переход от $2n$-мерного пространства к n-мерному пространству q связан с проектированием интегральной кривой, и поэтому нельзя быть уверенным в существовании непрерывной касательной в позиционном пространстве. В § 170 будет показано, что решение $q = q(t)$, не вырождающееся в единственную точку позиционного пространства, имеет при заданном $t = t^0$ непрерывную касательную, если вектор скорости $q'(t)$ не обращается при $t = t^0$ в нуль, и точку возврата, если $q'(t^0) = 0$.

ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ

§ 167. Пусть задана произвольная функция Лагранжа вида (1) § 155. Обозначим через $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{N}_h$, $\mathbf{Z}_h$ множества тех точек n-мерного позиционного пространства, в которых сумма силовой функции $U(q)$ и произвольного фиксированного числа h положительна, отрицательна или равна нулю соответственно. Разумеется, одно или два из этих трех множеств (но не все три) могут оказаться при заданном h пустыми. Из (3) § 155, видно, что

(i) если $q(t)$ — некоторая интегральная кривая с энергией h, то при любом t точка $q = q(t)$ принадлежит множеству $\mathbf{P}_h + \mathbf{Z}_h$.

Действительно, из (2_1) § 155 следует, что ни при каком t точка $q = q(t)$ не может принадлежать множеству $\mathbf{N}_h$. Из (3) § 155 также видно, что

(ii) если $q = q(t)$ — некоторая интегральная кривая с энергией h, то вектор скорости $q'(t)$ обращается при заданном t^0 в нуль тогда и только тогда, когда точка $q(t^0)$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}_h$.

Поэтому множество $\mathbf{Z}_h$ называется множеством нулевой скорости, соответствующим уровню энергии h. Если $h_1 \neq h_2$, то $\mathbf{Z}_{h_1}$ и $\mathbf{Z}_{h_2}$ не имеют общих точек, поскольку

(iii) каждая данная точка $q = q^*$ позиционного пространства может принадлежать одному и только одному множеству $\mathbf{Z}_h$, а именно тому, для которого $h = U(q^*)$. В силу изложенного в § 165 отсюда вытекает, что

(iv) точка q^0 представляет собой равновесное решение с энергией h тогда и только тогда, когда $U_q(q^0) = 0$ и $U(q^0) = -h$; поэтому

(v) если $q = q(t)$ — интегральная кривая с энергией h и если существует $t = t^0$ такое, что точка $q(t^0)$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}_h$, а $U_q(q(t^0)) = 0$, то $q(t)$ есть равновесное решение $q(t) \equiv \equiv q(t^0)$. Из ($iv$) далее следует, что

(vi) если интегральная кривая $q = q(t)$ с энергией h соответствует равновесному решению, то или точка $q(t)$ не принадлежит $\mathbf{Z}_h$ ни при каком t, или эта кривая достигает множества $\mathbf{Z}_h$ при некотором $t = t^0$, при котором $U_q(q(t^0)) \neq 0$.

Разумеется, значение t^0 предполагается при этом конечным. В § 186 будет показано, что точка $q(t)$ решения $q = q(t)$, являющегося равновесным и соответствующим энергии h, может неограниченно приближаться к $\mathbf{Z}_h$ при $t \to \infty$. Из последнего замечания в § 165 следует тогда лишь то, что

(vii) если для интегральной кривой $q = q(t)$ с энергией h точки $q(t_n)$, соответствующие бесчисленному множеству различных значений $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ или $t_1 > t_2 > t_3 > \ldots$, принадлежат

Z_h и если $|t_n|$ не стремится к ∞ при $n \to \infty$, то $q(t)$ представляет собой равновесное решение.

§ **168.** Пусть q^* — некоторая точка n-мерной области изменения q, а ε — достаточно малое положительное число. Обозначим тогда через $Z^\varepsilon(q^*)$ множество тех точек q, для которых

$$|q-q^*| < \varepsilon, \qquad -U(q) = h, \tag{1}$$

где $h = -U(q^*)$,

$$|q-q^*| = \left[\sum (q_i - q_i^*)^2\right]^{1/2}.$$

Это множество представляет собой часть (лежащую в ε-окрестности q^*) того множества Z_h, которому принадлежит точка q^* (см. (*iii*) § 167). Следует различать при этом два случая, когда градиент силовой функции или обращается в нуль в заданной точке позиционного пространства (случай I) или не обращается (случай II).

I. Предположим сначала, что q^* — точка равновесия. Тогда $U_q(q^*) = 0$ (см. § 165) и формула Тейлора для разности $U(q) - U(q^*)$ не содержит линейных членов. Из определения множества $Z^\varepsilon(q^*)$ видно, что его структура (размерность и т. д.) зависит от членов высшего порядка. Обычный случай тот, когда $Z^\varepsilon(q^*)$ состоит из конечного числа $(n-1)$-мерных областей, пересекающихся друг с другом вдоль $(n-2)$-мерных подобластей «гиперповерхности» $Z^\varepsilon(q^*)$. Из (I) также видно, что $Z^\varepsilon(q^*)$ состоит или не состоит из одной точки q^* в зависимости от того, является или не является эта точка изолированным экстремумом силовой функции $U(q)$.

II. Если q^* не есть точка равновесия, то структура $Z^\varepsilon(q^*)$ определяется единственным образом. Действительно, в этом случае $U_q(q^*) \neq 0$ (см. § 165). Следовательно, к (I) применима локальная теорема существования неявной функции. Эта теорема показывает, что $Z^\varepsilon(q^*)$ состоит из $(n-1)$-мерной поверхности, содержащей q^*, не имеющей линий самопересечения и обладающей в каждой точке конечной и непрерывной нормалью. Из (I) также видно, что поскольку градиент $U_q(q)$ отличен от нуля при $q = q^*$ (следовательно, и при $|q-q^*| < \varepsilon$), то гиперповерхность $U(q) = -h$, проходящая через q^* (т. е. множество Z_h), разделяет ε-окрестность точки q^* на две n-мерные области q, в одной из которых $U(q) + h > 0$, а в другой $U(q) + h < 0$.

§ **169.** Сопоставляя последнее замечание в § 168 с (*i*), (*vi*), (*vii*) § 167 и полагая $q^* = q(t^0)$, придем к выводу, что если для интегральной кривой $q = q(t)$ с энергией h вектор скорости q' обращается при $t = t^0$ в нуль, то возможны два случая:

(I) интегральная кривая вырождается в единственную точку $q(t) \equiv q(t^0)$; этот случай характеризуется обращением в нуль $U_q(q)$ в точке $q = q(t^0)$ множества $\mathbf{Z}_h$;

(II) решение не является равновесным, т. е. $U_q(q(t^0)) \neq 0$; точки интегральной кривой $q = q(t)$ и при $t > t^0$ и при $t < t^0$ (во всяком случае, при достаточно малых $|t - t^0|$) лежат по одну и ту же сторону от гиперповерхности $\mathbf{Z}_h$.

В соответствии со сказанным интегральная кривая с энергией h никогда не может пересечь гиперповерхность $\mathbf{Z}_h$, так как эта кривая или вырождается в единственную точку, принадлежащую $\mathbf{Z}_h$, или как бы «отражается» от этой гиперповерхности (если вообще ее достигает).

§ 170. В упомянутом только что случае интегральная кривая «отражается» от гиперповерхности $\mathbf{Z}_h$ (а также «падает» на нее) в направлении трансверсали к $\mathbf{Z}_h$, определяемой римановой метрикой (g_{ik}) позиционного пространства (см. § 164). Это означает, другими словами, следующее. Пусть для интегральной кривой $q = q(t)$ с энергией h существует такое $t = t^0$, что точка $q(t^0) = q^0$ принадлежит $\mathbf{Z}_h$, но $U_q(q^0) \neq 0$, т. е. что $q'(t^0) = 0$, но $q'(t) \neq 0$ при малых $t - t^0 \gtrless 0$. Тогда $q'(t) \to 0$ как при $t \to t^0 + 0$, так и при $t \to t^0 - 0$, причем тангенциальный вектор $q'(t) \,/\, |q'(t)|$ вдоль кривой в позиционном пространстве направлен в точке q^0 вдоль риманового перпендикуляра к $\mathbf{Z}_h$.

Поскольку вектор нормали к гиперповерхности $\mathbf{Z}_h$: $-U(q) = h$ в точке $q^0 = q(t^0)$ определяется формулой

$$\pm \frac{U_q(q^0)}{|U_q(q^0)|},$$

для доказательства высказанного выше утверждения достаточно проверить, что

$$\left| \sum q_i'(t) U_{q_i}(q^0) \right| \left\{ \sum \sum g_{ik}(q^0) q_i'(t) q_k'(t) \right\}^{-1/2} \times$$
$$\times \left\{ \sum \sum g^{ik}(q^0) U_{q_i}(q^0) U_{q_k}(q^0) \right\}^{-1/2} \to 1,$$
$$t \to t^0 \pm 0.$$

Это соотношение вытекает из $(23_1)-(23_2)$, поскольку $(g^{ik}) = (g_{ik})^{-1}$.

Утверждение в § 166 о необходимости появления точек возврата в случае $q'(t^0) = 0 \neq q'(t)$ представляет собой естественное следствие доказанного. Противоположное утверждение также является очевидным.

§ 171. Пусть задано фиксированное значение h. Определим функцию Лагранжа M, полагая

$$M(q', q, h) = 2T^{1/2}(U+h)^{1/2} + \sum f_i q_i' \equiv$$

$$\equiv \left(\sum\sum g_{ik}(q) q_i' q_k' \right)^{1/2} (2U(q) + 2h)^{1/2} + \sum f_i(q) q_i', \qquad (2)$$

где функции g_{ik}, f_i, U переменной $q = (q_i)$ являются, как и в § 155, коэффициентами данной лагранжевой функции L:

$$L(q, q') = T + \sum f_i(q) q_i' + U(q), \qquad (3_1)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum\sum g_{ik}(q) q_i' q_k' > 0, \qquad (3_2)$$

если $q' \neq 0$. Система $[L]_q = 0$ обладает интегралом энергии $T - U = h$ и, следовательно,

$$T^{1/2} = (U+h)^{1/2} > 0, \qquad (4)$$

если $q' \neq 0$, т. е. если $T = U + h \neq 0$. Смысл (4) заключается, конечно, в том, что разность $T - U$ равна вдоль любой интегральной кривой $q = q(t)$ системы $[L]_q = 0$ соответствующей постоянной h (см. § 82).

Рассмотрим теперь не только *интегральные* кривые с постоянной энергии h, но и *любую* такую кривую $q = q(t)$, что n-векторфункция $q(t)$ принадлежит в рассматриваемом интервале классу $C^{(2)}$, обладает не обращающейся в нуль производной $q'(t)$ и обращает соотношение (4) в тождество по t при некотором значении h. Другими словами, допустим, что функция $q = q(t)$ удовлетворяет лишь интегралу энергии $T - U = h$ системы $[L]_q = 0$ при некотором фиксированном $h = \mathrm{const}$, но не обязательно удовлетворяет самой системе $[L]_q = 0$. Покажем, что вдоль любой такой кривой $q = q(t)$ в позиционном пространстве равенство

$$[L]_q = [M]_q \qquad (q' \neq 0) \qquad (5)$$

удовлетворяется тождественно по t в силу (4).

Поскольку члены $\Sigma f_i q_i'$ являются общими для обеих функций Лагранжа (3_1) и (2), то равенство (5) эквивалентно следующему:

$$T + U = 2T^{1/2}(U+h)^{1/2}.$$

Следовательно, учитывая определение лагранжевой производной (см. (1) § 9), получим, что (5) имеет место, если в силу (4)

$$\left.\begin{aligned} T'_{q'} &= \{(2T)^{1/2}(2U+2h)^{1/2}\}'_{q'}, \\ T_q + U_q &= \{(2T)^{1/2}(2U+2h)^{1/2}\}_q \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(где $U_{q'} \equiv 0$, поскольку U — функция одного лишь $q = (q_i)$). Формула (3_2) показывает далее, что для функции

$$\{\} = \{(2T)^{1/2}(2U+2h)^{1/2}\}$$

переменных q, q' справедливы соотношения

$$\{\}_{q'} = (2T)^{-1/2}(2U+2h)^{1/2}T_{q'},$$
$$\{\}_q = (2T)^{-1/2}(2U+2h)^{1/2}(T_q + U_q).$$

Однако эти соотношения совпадают в силу (4) с (6), поскольку

$$(2T)^{-1/2}(2U+2h)^{1/2} \equiv 1, \qquad 1' \equiv 0.$$

Этим самым (5) доказано.

§ 172. Пусть $q = q(t)$ — некоторая (не обязательно интегральная) кривая класса $C^{(2)}$, вдоль которой $q'(t) \neq 0$, и равенство $T - U = h$ удовлетворяется при некотором $h = \mathrm{const}$ тождественно по t. Тогда, интегрируя функции Лагранжа (3) и (2) вдоль этой кривой, получим

$$S = -ht + W, \qquad (7_1)$$

где

$$S = \int_0^t L(q', q)\,d\tilde{t}, \qquad (7_2)$$

$$W = \int_0^t M(q', q, h)\,d\tilde{t}. \qquad (7_3)$$

Действительно, сравнивая (7_2), (7_3) с (3_2), (2), приходим к выводу, что (7_1) эквивалентно следующему соотношению:

$$\int_0^t (T + U)\,d\tilde{t} = -ht + 2\int_0^t T^{1/2}(U+h)^{1/2}\,d\tilde{t},$$

которое удовлетворяется, очевидно, тождественно, если имеет место (4). Отсюда вытекает справедливость не только (7_1), но и следующих формул:

$$W = 2\int_0^t T\,d\tilde{t} + \int_0^t \sum f_i q_i\,d\tilde{t}, \tag{8_1}$$

$$W = \int_0^t \sum p_i q_i'\,d\tilde{t} \qquad (p_i = L_{q_i'}), \tag{8_2}$$

причем (8_2) есть следствие (8_1) (ср. (3_2) § 171 и (4) § 157). Рассматривая условие (7) § 95 для обеих функций (7_2) и (7_3) и учитывая (7_1), получим, что поскольку разность $T - U$ равна, по предположению, фиксированной постоянной, то $\bar{\delta} h = 0$ и, следовательно, $\bar{\delta} S \equiv \bar{\delta} W$. Из ($7_2$), ($7_3$) видно, что последнее тождество эквивалентно (5), откуда вытекает новое доказательство (5).

Интеграл (7_2) называется действием (по Гамильтону), а интеграл (7_3) — изоэнергетическим действием, соответствующим данной кривой $q = q(t)$. Разумеется, интеграл (7_2) (но не (7_3)) можно рассматривать и тогда, когда кривая $q = q(t)$ не удовлетворяет соотношению $T -- U = h$.

§ **173.** *Из* тождества $\bar{\delta} S \equiv \bar{\delta} W$, т. е. из соотношения (5) следует вывод, который часто называют принципом Мопертюи*). Подразумевается при этом тот факт (с очевидностью вытекающий из § 171), что решения $q = q(t)$ лагранжевых уравнений $[L]_{q_i} = 0$, соответствующие постоянной энергии h, совпадают с решениями $q = q(t)$ лагранжевых уравнений $[M]_{q_i} = 0$, удовлетворяющими соотношению $T - U = h$. (В § 176 мы увидим, что это соотношение является инвариантным соотношением для системы $[M]_q = 0$; см. § 80.)

Заметим, что сказанное выше справедливо лишь тогда, когда $q'(t) \neq 0$ (см. § 171). Действительно, если $q'(t) = 0$, то величина $T^{-1/2}$, используемая в конце § 171, теряет свой смысл (см. (3_2)). В соответствии с изложенным в § 169 условие $q'(t) \neq 0$ в принципе Мопертюи исключает, с одной стороны, точки равновесия, а с другой стороны, t-интервалы (если они имеются), содержащие значения $t = t^0$, при которых интегральная кривая в позиционном пространстве имеет точку возврата. Другими словами, надо предположить (см. § 168), что ни при каких t в рассматриваемом t-интервале точка $q(t)$ интегральной кривой с постоянной энергии h не принадлежит множеству $\mathbf{Z}_h$.

---

*) Фактическое содержание этого «принципа» не было совсем ясным Мопертюи. Точная формулировка, приведенная в тексте, принадлежит Якоби и его предшественникам Эйлеру и Лагранжу.

§ **174.** Лагранжевы уравнения $[L]_{q_i} = 0$ можно разрешить относительно q_i'' (см. (22) § 163), однако этого нельзя сделать в случае лагранжевых уравнений $[M]_{q_i} = 0$. Кроме того, если лагранжева функция L связана с функцией Гамильтона (7) § 157 в смысле определения в § 15, то это не имеет места в случае лагранжевой функции M. Эти утверждения вытекают из того факта, что гессиан $\det(M_{q'_i q'_k}) \equiv 0$. Справедливость же последнего тождества очевидна, поскольку $M = M(q', q, h)$ — однородная функция первой степени относительно n компонент скорости $q_1', \ldots$ $\ldots, q_n'$ или, точнее говоря,

$$\lambda M(q', q, h) = M(\lambda q', q, h) \tag{9}$$

при любом $\lambda > 0$ *).

§ **175.** Из однородности, выражаемой соотношением (9), вытекает, что в то время как уравнения Лагранжа $[L]_{q_i} = 0$ инвариантны (см. § 95) по отношению к преобразованиям координат, лагранжевы уравнения $[M]_{q_i} = 0$ инвариантны не только по отношению к преобразованиям координат, но и по отношению к преобразованиям времени. Действительно, если $\bar{t} = \bar{t}(t)$ = некоторая функция, обладающая в рассматриваемом t-интервале положительной непрерывной производной $\bar{t}'(t)$, и если обозначить точкой дифференцирование по новой переменной $\bar{t}$ (так что $q' = \bar{t}'\dot{q}$), то, полагая $\bar{M} = M(\dot{q}, q, h)$, легко получим с учетом (9), что

$$[M]_q = \bar{t}'[\bar{M}]_q.$$

§ **176.** Последнее замечание в § 175 согласуется с первым замечанием в § 174 и показывает, что если применить результат, изложенный в § 173, то надо поступать следующим образом.

Если $q = q(\bar{t})$ — решение системы $[\bar{M}]_q = 0$, где $\bar{M} = \bar{M}(\dot{q}, q, h)$ и $\dot{q} = \dfrac{dq}{d\bar{t}}$, выраженное с помощью некоторой независимой переменной $\bar{t}$, играющей роль времени, то $\bar{t}$ нельзя отличить от t. Действительно, соответствующее решение $q = q(t)$ системы $[M] = 0$, где $M = M(q', q, h)$ и $q' = \dfrac{dq}{dt}$ может быть всегда получено с помощью формулы $t = t(\bar{t})$, связывающей $\bar{t}$ и t.

---

*) Если $\lambda < 0$, то в левой части (9) следует заменить λ на $-\lambda$, поскольку квадратные корни в (2), (4) положительны (их можно выбрать и отрицательными, однако они не могут быть то положительными, то отрицательными, так как функции $T^{1/2}$, M не будут принадлежать классу $C^{(2)}$, если $T = 0$, т. е. если $q' = 0$).

Эта связь может быть всегда установлена на основании условия, указанного в § 173, согласно которому соотношение $T - U = h$ должно быть удовлетворено, если независимой переменной является t. Действительно, исходя из (3_2) и (4), мы можем написать формулу

$$\dot t \equiv \frac{dt}{d\bar t} = \frac{\left\{ \sum \sum g_{ik}(q) \dot q_i \dot q_k) \right\}^{1/2}}{\{2(U(q)+h)\}^{1/2}} > 0 \quad (\dot q = q'\dot t, \quad q' \neq 0). \quad (10)$$

Если решение $q = q(\bar t)$ системы $[\overline{M}]_q = 0$ известно, то формула $\bar t = \bar t(t)$, связывающая t и $\bar t$, может быть получена из (10) обращением интеграла. В частности, функция $t(\bar t)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной.

§ 177. Следует обратить внимание на тот используемый в дальнейшем факт, что расположение одних лишь сопряженных точек уже дает ответ на вопрос, достигает или не достигает функция (7_3) абсолютного минимума на гладкой экстремали вариационной проблемы $\overline{\delta W} = 0$. То же самое справедливо и в отношении проблемы $\overline{\delta S} = 0$. Действительно, обе эти проблемы удовлетворяют $\mathscr{E}$-условиям в их наиболее строгой форме. Прежде всего, если

$$Q(r, s) = \sum \sum g_{ik} r_i s_k$$

и если n-мерные векторы (r_i), (s_i) не таковы, что $\mu r_i = \nu s_i$ для соответствующей пары скаляров μ, ν, не зависящих от i, то

$$Q^2(r, s) < Q(r, r) \cdot Q(s, s).$$

Поэтому, рассматривая функцию (2), получим, что

$$M(r, q, h) - M(s, q, h) - \sum (r_i - s_i) M_{s_i}(s, q, h) > 0,$$

если только векторы r, s не пропорциональны друг другу. Таким образом, функция Лагранжа M, однородная по q' (см. (9)), удовлетворяет $\mathscr{E}$-условиям в их наиболее строгой форме.

Соответствующее условие для неоднородной функции Лагранжа (3_1) записывается в виде

$$L(r, q) - L(s, q) - \sum (r_i - s_i) L_{s_i}(s, q) > 0,$$

если только $r_i \neq s_i$ при каком-либо i. В соответствии с (3_1) и (3_2) это условие удовлетворяется, если для

$$Q(r, s) = \sum \sum g_{ik} r_i s_k$$

имеет место при $r \neq s$ неравенство

$$Q(r,s) < \frac{1}{2} Q(r,r) + \frac{1}{2} Q(s,s),$$

т. е. если $Q(r - s,\ r - s) > 0$ при $r \neq s$. Однако согласно предположению (3_2) $Q(u, u) > 0$ при $u \neq 0$, откуда и следует доказательство.

§ **178.** Предположим, что $L = T$, т. е. что функция (3_1) обратимого типа $((f_i) \equiv (0))$, а силовая функция $U \equiv 0$. Тогда $L = H$ в силу (11_1)—(11_3) § 158 и интеграл энергии записывается в виде $T = h$. Уравнения Лагранжа (22) § 163 сводятся к следующим:

$$q_i'' = -\sum\sum \Gamma^i_{jk} q_j' q_k',$$

т. е. к уравнениям геодезических линий риманова многообразия, определяемого метрикой

$$ds^2 = \sum\sum g_{ik}\, dq_i\, dq_k.$$

Таким образом, $T = {}^1\!/_2 s'^2$ в силу (3_2), так что ${}^1\!/_2 s'^2 = h$. Другими словами, если дуга геодезической линии измеряется от $t = 0$ в направлении возрастания t, то $s = (2h)^{1/2} t$. В соответствии с этим функция Лагранжа (2) запишется в виде $M = (2h)^{1/2} s'$. Очевидно, что новая независимая переменная $\bar{t}$ § 175 совпадает с длиной дуги тогда и только тогда, когда $\bar{M} = \dot{s}$. Время t представит длину дуги s, если $s' = 1$, т. е. если $2h = 1$ и $M = s' = (2T)^{1/2}$.

§ **179.** С целью обобщить предположения, сделанные в § 178, допустим только, что функция L обратимого типа, т. е. что $(f_i) \equiv (0)$. Тогда (2) приводится к

$$M = (2U(q) + 2h)^{1/2} (2T)^{1/2}, \tag{11}$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum\sum g_{ik}(q)\, q_i' q_k'.$$

Можно также переписать M в виде

$$M = (2\bar{T})^{1/2}, \tag{12}$$

где

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum \bar{g}_{ik}(q, h)\, q_i' q_k', \qquad \bar{g}_{ik} = 2(U + h) g_{ik}.$$

Однако функция (12) соответствует лагранжевой функции геодезического типа (см. § 178) $\bar{L} = \bar{T} - \bar{U} \equiv \bar{T}$, а функция (11) соответствует произвольной лагранжевой функции $L = T - U$ обратимого типа. Вместе с тем (11) и (12) определяют одну и ту же функцию M. Поэтому приходим к выводу, что если исключить интегральные кривые с точками возврата и решения, вырождающиеся в точку равновесия, то остальные решения обратимой динамической системы, соответствующие фиксированной постоянной энергии h, эквивалентны геодезическим линиям в римановом пространстве с метрикой

$$d\tilde{s}^2 = \sum\sum \tilde{g}_{ik}\, dq_i\, dq_k \equiv 2(U+h)\, ds^2, \tag{13}$$

где

$$ds^2 = \sum\sum g_{ik}\, dq_i\, dq_k.$$

§ **180.** Если рассматривать только решения, соответствующие фиксированному значению энергии h, то результат, изложенный в § 176, можно интерпретировать как правило ввода в динамическую систему новой независимой переменной. Такое правило можно получить также и более непосредственно, если использовать уравнения в гамильтоновой форме.

Действительно, пусть $G(x)$ — некоторая непрерывная, не обращающаяся в нуль скалярная функция в $2n$-мерной области x, в которой рассматривается консервативная гамильтонова система

$$\mathrm{I}x' = H_x(x). \tag{14$_0$}$$

Вдоль данного решения $x = x(t)$ этой системы определим новую независимую переменную $\bar{t}$ формулой

$$\bar{t} \equiv \bar{t}(t) = \int^{t} \frac{dt^*}{G(x(t^*))} \qquad (G \neq 0). \tag{14}$$

Если обозначить дифференцирование по $\bar{t}$ точкой, то $\dot{t} = 1/\bar{t}' = G$ и $\dot{x} = x'G$. Рассмотрим теперь только те решения $x = x(t)$ системы (14$_0$), которые соответствуют фиксированной постоянной энергии h, и определим гамильтонову функцию $\bar{H}$ по формуле

$$\bar{H}(x, h) \equiv \bar{H} = (-h + H)G, \tag{15}$$

где $H = H(x)$, $G = G(x) \neq 0$. Так как вдоль рассматриваемых интегральных кривых $x = x(t)$ имеем $-h + H = 0, h = \mathrm{const}$, то

$$\bar{H}_x \equiv (-h_x + H_x)G + 0 \equiv H_x G.$$

Из соотношений

$$\dot{x} = x'G, \qquad \bar{H}_x = H_x G,$$

где $G \neq 0$, видно, что решения $x = x(t)$ системы (14$_0$), соответствующие постоянной энергии h, эквивалентны решениям $x = x(\bar{t})$

системы

$$\mathrm{I}\dot{x}' = \bar{H}_x, \tag{15$_1$}$$

для которых постоянная энергии равна $\bar{h} = 0$, если только учесть преобразование времени (14) или его обращение

$$t \equiv t(\bar{t}) = \int^{\bar{t}} G(x(\bar{t}^*))\,d\bar{t}^*. \tag{16}$$

Эти решения системы (15_1) удовлетворяют инвариантному для этой системы соотношению $\bar{H} = 0$, поскольку и равенства $H = h$ и $\bar{H} = 0$ эквивалентны друг другу в силу (15), где $G = 0$.

§ **181.** Практическая ценность результатов, изложенных в предыдущем параграфе, заключается в том, что переход от $H(x)$ к $\bar{H}(x, h)$ может быть выполнен без сложных вычислений независимо от выбора $G(x)$.

Предположим, например, что система (14_0) записана в скалярной форме

$$\left.\begin{aligned} p_i' &= -H_{q_i}(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n), \\ q_i' &= H_{p_i}(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \\ &(i = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right| \tag{17}$$

и что в рассматриваемой $2n$-мерной области (p, q) имеем $H_{p_n}(p, q) \neq 0$. Тогда можно положить

$$G(x) = G(p, q) = \frac{1}{H_{p_n}(p, q)},$$

и поскольку $H_{p_n} = q_n'$ в силу (17), то независимая переменная $\bar{t}$, определяемая (14), оказывается равной $\bar{t} = q_n + \text{const}$. Кроме того, в предположении, что $H_{p_n}(p, q) \neq 0$, можно разрешить уравнение

$$-h + H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) = 0$$

относительно p_n в окрестности каждой точки $(p_i, q_i) \equiv \equiv (p_i(t^0), q_i(t^0))$ данной фазовой траектории $p_i = p_i(t)$, $q_i = q_i(t)$ с постоянной энергии h. Мы получим

$$p_n = -K(p_1, \ldots, p_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, h),$$

где K является при фиксированном h функцией $2n - 1$ переменных, локально однозначной и удовлетворяющей тем же самым условиям дифференцируемости, что и $H(p, q)$.

Так как $q_n = \bar{t}$ с точностью до аддитивной произвольной постоянной (которую положим равной нулю), то, учитывая формулы предыдущего параграфа и правило определения функции K, придем к следующему выводу: те решения консервативной системы

$$\dot{p}_i = -\bar{H}_{q_i}, \qquad \dot{q}_i = H_{p_i}$$

с n степенями свободы, которые удовлетворяют инвариантному соотношению $\bar{H}(p, q, h) = 0$ (см. § 180), будут тождественны таким решениям неконсервативной системы с $n-1$ степенями свободы

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_j &= -K_{q_j}(p_1, \ldots, p_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}, \bar{t}, h), \\ \dot{q}_j &= K_{p_j}(p_1, \ldots, p_{n-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}, \bar{t}, h) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$
$$(j = 1, \ldots, n),$$

которые являются неограниченно продолжаемыми. Поэтому на основании изложенного в § 180 следует, что решения $p_i = p_i(t)$, $q_i = q_i(t)$ уравнений (17), соответствующие постоянной энергии h, совпадают, если положить $\bar{t} = q_n$, с решениями $p_i = p_j(\bar{t})$, $q_j = q_i(\bar{t})$, $j = 1, \ldots, n-1$, уравнений (18).

Разумеется, переход от (17) к (18) носит локальный характер, так как при построении функции K используется локальная теорема существования неявных функций. Добавим также, что можно было бы ввести переменную $\bar{t} = q_n$ и с помощью правила, изложенного в § 175.

Очевидно, что условие $H_{p_n}(p, q) \neq 0$ можно заменить любым из $2n$ условий $H_{p_i}(p, q) \neq 0$, $H_{q_i}(p, q) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, и тогда $\bar{t}$ окажется равным q_i или p_i соответственно.

Заметим, что по крайней мере одно из этих $2n$ условий удовлетворяется в окрестности любого решения $x = x(t)$ системы (14_0), отличного от равновесного решения $x(t) = \text{const}$.

§ 182. Описанный выше переход от системы с n степенями свободы к системе с $n-1$ степенями свободы в случае фиксированного значения постоянной энергии h можно рассматривать в силу изложенного в § 93 или § 9а как операцию исключения координаты, которая не входит явно в гамильтонову функцию. Следовательно, можно ожидать, что если, например, функция (3_1) зависит лишь от производной q_n' переменной q_n, но не от самой переменной q_n, то консервативную динамическую систему $[L]_q = 0$ с n степенями свободы можно заменить консервативной динамической системой $[L^*]_{q^*} = 0$ с $n-1$ степенями свободы, причем $q = (q_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и $q^* = (q_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Конечно, функция L^* должна содержать одну постоянную интегрирования (соответствующую фиксированному значению h), и если решение $q^* = q^*(t)$ системы $[L^*]_{q^*} = 0$ известно, то определение исключенной координаты $q_n = q_n(t)$ требует, как можно ожидать, одной квадратуры (соответствующей (14) и вырождающейся в случае предыдущего параграфа в равенство $\bar{t} = q_n + \text{const}$).

Все это можно легко осуществить следующим образом. Назовем координату «циклической», если в L входит лишь производная этой координаты по времени. Из изложенного в § 15 видно, что координата является циклической тогда и только тогда, когда в H входит ее канонически сопряженный импульс, но не сама координата. Если записать теперь $H(p, q, t)$ в виде $H(p_n, p^*, q^*, t)$, где p^*, q^* суть $(n-1)$-векторы $p^*(p_1, \ldots, p_{n-1})$, $q^*(q_1, \ldots, q_{n-1})$, то из уравнений

$$p' = -H_q \qquad q' = H_p$$

видно, что $p_n = c = \text{const}$. Координату же $q_n = q_n(t)$ получим из уравнения

$$q_n' = H_{p_n}(c, p^*(t), q^*(t))$$

с помощью одной квадратуры, если известно решение $p^* = p^*(t)$, $q^* = q^*(t)$ системы

$$p^{*\prime} = -H^{*}_{q^{*}}, \qquad q^{*\prime} = H^{*}_{p^{*}},$$

где

$$H^* \equiv H^*(c, p^*, q^*, t) = [H(p_n, p^*, q^*, t)]_{p^n = c}$$

— гамильтонова функция с $n-1$ степенями свободы. Наконец, функцию Лагранжа L^*, ассоциированную с H^*, получим по формулам § 15, если известно, что соответствующий гессиан не обращается в нуль.

§ 183. В случае динамической системы того типа, который рассматривался в § 155, указанные только что операции могут быть выполнены непосредственно следующим образом.

С целью упростить формулы предположим, что динамическая система обратима, т. е. что $(f_i) \equiv (0)$. Поскольку координата q_n, по предположению, циклическая, то функция Лагранжа (1) § 155 запишется в виде

$$L(q_n', q^{*\prime}, q^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(q^*) q_i' q_k' + U(q^*), \tag{19}$$

где $q^* = (q_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Поэтому из (4) — (7) § 157 следует, что гамильтонова функция с $n-1$ степенями свободы, обозначавшаяся нами в § 182 при фиксированном $c(=p_n\equiv L_{q'_n})$ через H^*, может быть записана в следующем явном виде:

$$H^*(c,p^*,q^*)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}g^{jl}(q^*)p_jp_l+c\sum_{j=1}^{n-1}g^{jn}(q^*)p_j-\left\{U(q^*)-\frac{1}{2}c^2g^{nn}(q^*)\right\}. \tag{20}$$

Эта функция совпадает с функцией (7) § 157, если положить в последней

$$f^j=-cg^{jn},\qquad V=U-\frac{1}{2}c^2g^{nn}$$

и заменить n на $n-1$. Формулы (4) — (6) § 157, определяющие переход от (7) § 157 к (1) § 155, показывают, что функции Гамильтона (20) соответствует функция Лагранжа (с $n-1$ степенями свободы)

$$L^*(c,q^{*\prime},q^*)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\overset{*}{g}_{jl}(q^*)q'_jq'_l+\sum_{j=1}^{n-1}\overset{*}{f}_j(c,q^*)q'_j+U^*(c,q^*), \tag{21}$$

где

$$U^*=U-\frac{1}{2}c^2g^{nn}+\frac{1}{2}c^2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}g^{jn}g^{ln}\overset{*}{g}_j,$$

$$\overset{*}{f}_j=-c\sum_{l=1}^{n-1}g^{ln}\overset{*}{g}_{jl},\qquad(\overset{*}{g}_{jl})=(g^{jl})^{-1}.$$

Последнее условие определяет положительно определенную $(n-1)$-матричную функцию $(g_{jl}{}^*)$, поскольку n-матрица $(g^{ik})=(g_{ik})^{-1}$, а следовательно, и $(n-1)$-матрица (g^{il}) положительно определены в силу (2_1) § 155.

Заметим, что консервативная функция Лагранжа (21) с $n-1$ степенями свободы вообще необратимого типа $((f_j{}^*)\neq 0)$, хотя исходная функция Лагранжа (19) обратимого типа $((f_i)=(0))$.

§ **184.** Пусть $n=2$ и положим для простоты $g_{12}\equiv 0$. Тогда функция (20) запишется в виде

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}g_{ii}(q_1)q_i'^2+U(q_1)$$

и согласно (21)

$$L^* = \frac{1}{2}\frac{q_1'^2}{g_{11}(q_1)} + \left\{U(q_1) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g_{22}(q_1)}\right\}. \tag{22}$$

Таким образом функция L^* обратимого типа. Это не случайность. Действительно, любая динамическая (консервативная) система с одной степенью свободы обратима. В самом деле, если $q = q_1$, то функция (1) примет вид

$$L = \frac{1}{2}g(q)q'^2 + f(q)q' + U(q), \tag{23}$$

где все величины — скаляры. Поскольку

$$f(q) = \frac{d}{dq}\int f(q)\,dq,$$

то результаты, изложенные в § 156, показывают, что вместо (23) можно рассматривать функцию

$$L = \frac{1}{2}g(q)q'^2 + U(q).$$

СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 185. Пусть $n = 1$, так что $q = q_1$ — скаляр, и предположим для простоты, что область изменения q есть вся ось q. Поскольку система обратима (см. § 184), то

$$L = \frac{1}{2}gq'^2 + U,$$

где $g = g(q) > 0$ в силу (2_1) § 155. Интеграл энергии (3) § 155 имеет вид

$$\frac{1}{2}g(q)q'^2 - U(q) = h,$$

так что

$$q'^2 = F(q, h), \tag{1_1}$$

$$F = \frac{2(U(q) + h)}{g(q)}, \tag{1_2}$$

где $g(q) > 0$. Поэтому из §§ 167—170 видно, что точки $\bar{q} = \bar{q}(h)$ множества Z_h на оси q представляют собой корни (если они вообще имеются) уравнения $F(q, h) = 0$. Кроме того, если решение $q = q(t)$ с энергией h таково, что при некотором $t = \bar{t}$ величина $\bar{q} = q(\bar{t})$ оказывается корнем $\bar{q} \equiv \bar{q}(h)$ уравнения $F(q, h) = 0$, то это решение

или представляет собой равновесное решение $q(t) \equiv \bar{q}$, если частная производная $F_q(q, h)$ обращается при $q = \bar{q}$ в нуль (корень $\bar{q}$ кратный);

или имеет при $q = \bar{q}$ точку возврата, если $F_q(\bar{q}, h) \neq 0$ (корень $\bar{q}$ простой).

В первом случае мы имеем также $U_q(\bar{q}) = 0$ в силу (1_2). О появлении точки возврата во втором случае заключаем на основании изложенного в § 169. Поэтому в промежутках, не содержащих точек возврата, имеем $q'(t) \neq 0$ и в силу непрерывности $q'(t) > 0$ или $q'(t) < 0$, так что функция $q(t)$ монотонно убывает или монотонно возрастает.

§ 186. Пусть $q = q_{\text{I}}(t)$ и $q = q_{\text{II}}(t)$ — два решения с одной и той же энергией h, и пусть существуют два значения $t = t_{\text{I}}$, $t = t_{\text{II}}$ и точка q^* такие, что $q_{\text{I}}(t_{\text{I}}) = q_{\text{II}}(t_{\text{II}}) = q^*$, причем $U(q^*) \neq 0$. Заметим, что если функция $q(t)$ является решением с энергией h, то функция $q(t + \theta)$ при любой постоянной θ также является решением с той же энергией. Поэтому, учитывая последнее замечание в § 185 и исходя из единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений, придем к выводу, что решения $q = q_{\text{I}}(t)$ и $q = q_{\text{II}}(t)$ эквивалентны друг другу. Другими словами, $q_{\text{I}}(t) = q_{\text{II}}(t + \theta)$ при выбранной соответствующим образом постоянной θ. (Это свойство является характерным для случая позиционного пространства с числом измерений $n = 1$.)

В соответствии со сказанным уравнение $[L]_q = 0$ может быть решено при заданном значении h следующим образом. Исключим, фиксируя h, те точки оси q, в которых функция (1_2) отрицательна (см. (1_1)), и, оставляя в стороне тривиальный случай $F(q_0, h) = 0$, $F_q(q_0, h) = 0$ равновесного решения $q(t) \equiv q_0$, выделим на оси q интервалы (обязательно открытые, если они вообще имеются), где функция $F(q, h)$ положительна. Тогда, если $I = I(h)$ — один из таких интервалов, а q^* — произвольная его точка, то локальное обращение интеграла

$$t - t^* = \int_{q^*} \pm |F(\tilde{q}, h)|^{-1/2} \, d\tilde{q}, \qquad (2)$$

где t^* — произвольная постоянная, дает все решения $q = q(t)$ уравнения $[L]_q = 0$, принадлежащие при каком-либо t интервалу I. Это видно из (1_1). В то же время из § 185 следует, что и при всех t значения $q(t)$ принадлежат интервалу I.

Разумеется, один или оба конца интервала $I = I(h)$ могут лежать в бесконечности и функция $F(q,\ h)$ должна обращаться в нуль на конечных концах интервала I (если они имеются).

Если $\bar{q}$ — какой-либо из двух концов $I(h)$, то возможны два случая: а) $F(\bar{q}, h) = 0$, $F_q(\bar{q},\ h) \neq 0$ и б) $F(\bar{q},\ h) = 0$, $F_q(\bar{q}, h) = 0$ ($\bar{q} \neq \pm\infty$). В первом случае (но не во втором) интегральная кривая $q = q(t)$, совпадающая в интервале I с осью q, достигает конца $\bar{q}$ этого интервала при конечном $t = \bar{t}$. К такому выводу легко прийти, если устремить верхний предел q интеграла (2) к $\bar{q}$ и учесть, что хотя подынтегральная функция обращается при $q = \bar{q}$ в бесконечность, но этот интеграл сходится в первом и расходится во втором случае. Во втором случае (но не в первом) корень $q = \bar{q}$ уравнения $F(q,\ h) = 0$ соответствует согласно изложенному в § 169 точке равновесия. Наконец, из (2) видно*), что во втором случае $q(t) \to \bar{q}$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, причем $q'(t)$ не обращается в нуль при достаточно больших $t > 0$ или $t < 0$. Тогда решение $q = q(t)$ асимптотически приближается при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$ к равновесному решению, представляемому точкой $\bar{q}$.

§ 187. Из сказанного выше следует, что для решения $q = q(t)$, отличного от равновесного и не приближающегося к нему асимптотически, интервал $I(q_{\text{I}}(h) < q < q_{\text{II}}(h))$ конечен, причем концы этого интервала — простые корни уравнения $F(q,\ h) = 0$, а функция F положительна внутри I.

Рассматривая такие решения, положим $\alpha = \alpha(h) = q_{\text{I}}(h)$, $\beta = \beta(h) = q_{\text{II}}(h)$. Тогда из изложенного в § 185 следует, что α — минимум и β — максимум функции $q(t)$ при $-\infty < t < +\infty$ и что $q\ (t) = 0$ только для таких t, при которых $q(t) = \alpha$ или $q(t) = \beta$. Не теряя общности, выберем начало отсчета на оси q так, что $q(0) = \alpha$. Тогда в силу обратимости системы (см. § 184) функция $q(-t)$ также является решением и, следовательно,

---

*) Заметим, однако, что этот результат не имеет места, если $\bar{q} = +\infty$ или $\bar{q} = -\infty$. Если, например, $L(q',\ q) = {}^1/_2(q'^2 + q^4)$ и $h = 0$, то функция (1_2) запишется в виде $F(q,\ h) = q^4$, так что в интервале $I(q_{\text{I}} < q < q_{\text{II}})$ имеем $q_{\text{I}} = 0$, $q_{\text{II}} = +\infty$.

Вместе с тем уравнение $q'^2 = q^4$ имеет решение $q(t) = (t^0 - t)^{-1}$, где t^0 — произвольная постоянная. Следовательно, $q(t) \to q_{\text{II}} = +\infty$ при $t \to t^0 - 0$, а не при $t \to -\infty$, как можно было бы ожидать.

Для того чтобы исключить такие случаи, следует относительно (2) предположить, что при данном h

$$\int^{\pm\infty} |F(q,\ h)|^{-1/2}\, dq = \pm\infty.$$

Так это условие выполняется, если при $q \to \pm\infty$ имеем $0 < F(q,\ h) < d \cdot q^2$, где d — постоянная.

$q(t) = q(-t)$. Действительно, решение определяется единственным образом начальными значениями координаты и скорости, а эти значения для $q(t)$ и $q(-t)$ одни и те же, поскольку $q'(0) = 0$. Кроме того, полагая *)

$$\tau \equiv \tau(h) = 2 \int_{\alpha}^{\beta} [F(q, h)]^{-1/2} dq, \tag{3}$$

где $\alpha = \alpha(h)$ и $\beta = \beta(h)$, можем на основании (2) заключить, что время перехода от значения $q = \alpha$ до значения $q = \beta$ (или от $q = \beta$ до $q = \alpha$) равно $\frac{1}{2}\tau$. Так как $q = q(t + \text{const})$ есть та же интегральная кривая, что и $q = q(t)$, то опять из единственности решения начальной задачи следует, что не только $q(t) = q(-t)$, но и $q(t + \tau) = q(t)$.

Таким образом, $q(t)$ есть четная периодическая функция с наименьшим периодом, равным (3), а α и β — ее минимум и максимум соответственно.

§ 188. Для значений t, при которых не имеют места равенства $q(t) = \alpha$ или $q(t) = \beta$ (т. е. для значений, отличных от $\frac{1}{2} k\tau$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), выбираем в (2) верхний или нижний знак, если $q'(t) > 0$ (т. е. если $k\tau < t < (k + 1/2)\tau$) или если $q'(t) < 0$ (т. е. если $(k + 1/2)\tau < t < (k + 1)\tau$) соответственно.

Однако вместо выполнения обращения интеграла (2) обычно предпочитают свести эту задачу к тривиальному периодическому обращению для уравнения линейного осциллятора $\frac{d^2q}{d\bar{t}^2} + q = 0$, где $\bar{t}$ — новая переменная, которая выбирается так, чтобы униформизировать многозначную связь между временем t и однозначной периодической функцией $q = q(t)$.

С этой целью фиксируем постоянную энергии h и положим

$$G(q) = \left[\frac{(\beta - q)(q - \alpha)}{F(q, h)}\right]^{1/2} \tag{4}$$

где $\alpha < q < \beta$. В предположениях, указанных в начале § 187, пределы $G(\alpha + 0)$, $G(\beta - 0)$, обозначаемые через $G(\alpha)$, $G(\beta)$, существуют и они таковы, что

$$0 < \text{const} \leqslant G(q) \leqslant \text{Const} < +\infty \tag{5}$$

---

*) Интеграл (3) имеет конечное положительное значение, так как функция $F(q, h)$ положительна при $\alpha < q < \beta$ и имеет при $q = \alpha$ и $q = \beta$ нули первого порядка.

при $\alpha \leqslant q \leqslant \beta$. Так как $\alpha \leqslant q(t) \leqslant \beta$ при $-\infty < t < +\infty$, то отсюда следует, что можно отождествить функцию (4) с функцией G, использовавшейся в § 180, для введения нового времени ($\bar{t}$ вместо t). Выбирая без потери общности начало отсчета $\bar{t}$, так что $\bar{t}(0) = 0$, введем вдоль данного решения $q = q(t)$ переменную $\bar{t}$ вместо t согласно (14) и (16) § 180. Мы получим, что в соответствии с (16)

$$t \equiv t(\bar{t}) = \int\limits_0^{\bar{t}} G(q(\bar{t}^*))\,d\bar{t}^*. \tag{6}$$

Обозначим, как и выше, производные по t и $\bar{t}$ штрихом и точкой соответственно. Тогда $\dot{t}$ и $\bar{t}' = \dot{t}^{-1}$ всегда заключены в силу (6) и (5) между фиксированными положительными границами, так что $\bar{t}$ изменяется вместе с t от $-\infty$ до $+\infty$, монотонно возрастая. Переменная $\bar{t}$ является такой, которая позволяет униформизировать соотношение (вещественное) (2) между q и t. Уравнение для $q(t)$ после введения этой переменной сводится к уравнению линейного осциллятора.

Действительно, из (4) и (6) видно, что (1_1) можно переписать в виде

$$\dot{q}^2 = (\beta - q)(q - \alpha) \qquad \left(\dot{q} = \frac{dq}{d\bar{t}}\right).$$

Решение этого уравнения при начальном условии $q(0) = \alpha$ имеет вид

$$q = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)\cos\bar{t}. \tag{7}$$

Следовательно, $G(q(\bar{t}))$ есть четная периодическая функция. Разлагая ее в ряд Фурье, имеем

$$G(q(\bar{t})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n \cos n\bar{t}, \tag{8_1}$$

где

$$\nu_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} G\cos n\bar{t}\,d\bar{t} = \nu_{-n}, \tag{8_2}$$

а подставляя этот ряд в (6), получим, что

$$t = \nu_0\bar{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin\bar{t}, \tag{9_1}$$

где

$$\lambda_n = \frac{2\nu_n}{n}. \tag{9$_2$}$$

Так как $\bar{t}$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно, то формулы (7) и (9$_1$) и осуществляют униформизацию соотношения (2) между q и t, причем $\bar{t}$ является униформизирующим параметром.

Так как q — четная периодическая функция t с периодом (3), то справедливо также следующее разложение Фурье:

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n \cos\left(\frac{nt}{\nu_0}\right), \tag{10$_1$}$$

где

$$\rho_n = \tau^{-1} \int_0^\tau q \cos\left(\frac{nt}{\nu_0}\right) dt = \rho_{-n}, \tag{10$_2$}$$

$$\tau = 2\pi\nu_0, \tag{10$_3$}$$

причем (10$_3$) вытекает из (7) и (9).

§ 189. Предположим, что постоянная энергии h изменяется около фиксированного значения ${}^0h$, причем при $h = {}^0h$ решения аналогичны тем, которые рассматривались в §§ 187—188, а два простых корня

$$q = \alpha \equiv \alpha(h) = \min q(t,h), \qquad q = \beta \equiv \beta(h) = \max q(t,h)$$

уравнения $F(q,h) = 0$, где $F > 0$ при $\alpha < q < \beta$, совпадают при $h \to {}^0h$ с двойным корнем ${}^0q$ уравнения $F({}^0q, {}^0h) = 0$. Таким образом, при $h \neq {}^0h$ существует определенный период $\tau = \tau(h)$, вычисляемый по формуле (3). Однако при $h = {}^0h$ функция $\tau({}^0h)$ не существует, поскольку из условия $F_q({}^0q, {}^0h) = 0$ вытекает, что решение $q(t,h)$ при $h = {}^0h$ представляет собой равновесное решение $q(t, {}^0h) = {}^0q$. Тем не менее нетрудно обнаружить, что $\tau(h)$ стремится при $h \to {}^0h$ к конечному положительному пределу:

$$\tau(h) \to 2\pi \Big/ \sqrt{\left\{-\frac{1}{2} F_{qq}({}^0q, {}^0h)\right\}}. \tag{11}$$

Действительно, так как $q = {}^0q$ — двухкратный корень, то $F_q({}^0q, {}^0h) = 0$, $F_{qq}({}^0q, {}^0h) \neq 0$. Из формулы Тейлора следует тогда, что отношение

$$\frac{F(q,h)}{(\beta - q)(q - \alpha)},$$

где F — положительная функция, $\alpha < q < \beta$, стремится при $h \to {}^0h$, т. е. при $(\alpha - \beta) \to 0$, к положительной постоянной $-{}^1/_2 F_{qq}({}^0q, {}^0h)$.

Следовательно, $F_{qq}({}^0q, {}^0h) < 0$ и (11) вытекают из (3).

Если $g(q) \equiv 1$, то в соответствии с (1_2) предел (11) равен

$$2\pi / \sqrt{-U_{qq}({}^0q)}.$$

§ 190. Снимем ограничения, согласно которым рассматривались в §§ 187—188 только периодические решения. Предположим *), что $g(q) \equiv 1$, т. е. что

$$L(q', q) = \frac{1}{2} q'^2 + U(q) \qquad \text{(см. § 185)}.$$

Тогда

$$[L]_q \equiv q'' - U_q(q)$$

и согласно изложенному в § 101 уравнение Якоби, определяющее смещение $\varkappa = \varkappa(t)$ для данного решения $q = q(t)$ уравнения $[L]_q = 0$ имеет вид $\varkappa'' + a(t)\varkappa = 0$, где $a(t) = -U_{qq}(q(t))$. Если $q = q(t)$ — периодическое решение, то коэффициент $a(t)$ также периодический. Если $q(t) \equiv {}^0q$ — равновесное решение, то $-U_{qq}({}^0q) = \mathrm{const}$. В этом случае характеристические показатели (см. § 89) для уравнения Якоби равны $\pm\sqrt{U_{qq}({}^0q)}$. Общее решение уравнения $\varkappa'' + a\varkappa = 0$ является гиперболической функцией t, если $a = -U_{qq}({}^0q) < 0$, и линейной, если $a = 0$. Если же $U_{qq}({}^0q) < 0$, то $\varkappa(t)$ описывает гармоническое колебание с периодом $2\pi[-U_{qq}({}^0q)]^{-1/2}$. Все сказанное согласуется с последним замечанием в § 189 и объясняет, почему производная $F_{qq}({}^0q, {}^0h)$ оказывается отрицательной (см. § 189).

§ 191. Условия, указанные в § 187, характеризуют такие решения $q = q(t)$ уравнения $[L]_q = 0$, которые будут периодическими в том смысле, что

$$q(t + \tau) = q(t), \qquad (12_1)$$

$$q'(t + \tau) = q'(t), \qquad (12_2)$$

где $\tau = \tau(h)$ — некоторая (но не любая) положительная постоянная, причем (12_2) есть следствие (12_1). Но поскольку (12_1) не вытекает вообще из (12_2), то возникает вопрос, справедливо ли

---

*) Это предположение не приводит к потере общности анализа при фиксированном значении постоянной энергии h, поскольку можно положить функцию $G(x)$ § 180 равной заданной функции $g(q)$ (положительной) и применить преобразование, указанное в § 180, к гамильтоновой функции $H = -{}^1/_2 g^{-1} p^2 - U$, соответствующей согласно § 158 лагранжевой функции

$$L = \frac{1}{2} g q'^2 + U.$$

называть решение $q(t)$ периодическим, если выполняется лишь условие (12_2), т. е. если

$$q(t+\tau)=q(t)+\sigma, \tag{13}$$

где σ не зависит от t и может зависеть от постоянных интегрирования (или, что то же самое, от постоянной энергии h). Например, если q — угловая переменная, приводимая к $\operatorname{mod}\sigma$ (например, $\sigma=2\pi$ или $\sigma=1$), то целесообразно определять периодичность не по (12_1), а по (13), или, точнее говоря, по соотношению

$$q(t+\tau)\equiv q(t)\ (\operatorname{mod}\sigma).$$

Если коэффициент $g(q)$ и силовая функция $U(q)$ в выражении лагранжевой функции $L={}^1\!/_2gq'^2+U(q)$ не изменяются при замене q на $q+\sigma$, то можно рассматривать q как угловую переменную, приводимую к $\operatorname{mod}\sigma$. Именно таковы те функции Лагранжа L, для которых каждому решению $q=q(t)$ уравнения $[L]_q=0$ соответствует решение $q=q(t)+\sigma$.

§ 192. Если функции $g(t)$, $U(q)$ имеют по отношению к q период σ, то такова же и функция (1_2) при произвольном h. Предположим, что функция (1_2) при фиксированном h положительна на всей оси q. Условия периодичности, рассмотренные в § 187, не выполняются, а функция (3) остается неопределенной, так как α и β не существуют. Однако если определить τ по формуле

$$\tau\equiv\tau(h)=\int\limits_0^\sigma[F(q,h)]^{-1/2}\,dq, \tag{14}$$

то, применяя рассуждения, аналогичные использованным в § 187 и основанным на единственности решения, придем к выводу, что решение с постоянной энергии h является периодическим в смысле условия (13).

§ 193. Предположим, в частности, что в выражении

$$L=\frac{1}{2}g(q)q'^2+U(q)$$

имеем $g(q)=1$, $U(q)=\cos q$. Тогда

$$[L]_q\equiv q''+\sin q=0$$

есть уравнение движения маятника в галилеевом поле тяжести, причем q — угловое расстояние от вертикали. Так как $\sigma=2\pi$, то (1_2) приводится к $F=2(\cos q+h)$ *). Если $h>1$, то условие $F(q,h)>0$, $-\infty<q<\infty$, § 192 выполняется.

---

*) Таким образом, интеграл (2) является эллиптическим интегралом первого рода, а (3) — полным эллиптическим интегралом.

В силу же (14) удовлетворяется условие (13), хотя функция $q = q(t)$, если исходить из формулы (2), монотонно возрастает или убывает и стремится к $\pm\infty$ при $t \to \pm\infty$ или $t \to \mp\infty$ (вращающийся маятник). Если $h = 1$, то $F = 4\cos^2\frac{q}{2}$ и условие, указанное в § 192, не выполняется. В то же время $q_{\text{I}} = -\pi$, $q_{\text{II}} = \pi$ суть двойные корни уравнения $F = 0$. Последнее замечание в § 186 показывает, что $q(t)$ стремится при $t \to \pm\infty$ к паре равновесных решений $q = \pm\pi$ (тождественных по $\bmod 2\pi$). Это — случай асимптотического движения к неустойчивому вертикальному положению маятника.

Решений с постоянной энергии $h < -1$ не существует, так как в этом случае $F < 0$ при любом q, что противоречит (1_1). Если $h = -1$, то $F = 4\sin^2\frac{q}{2}$ и мы приходим к равновесному решению $q(t) \equiv 0$, соответствующему устойчивому вертикальному положению. Если $-1 < h < 1$, то функция $F = 2(\cos q + h)$ не удовлетворяет условию § 192, но удовлетворяет условиям § 187 (колеблющийся маятник, для которого $\alpha \leqslant q \leqslant \beta$ $(= -\alpha < \pi)$).

Если $h \to -1 + 0$, то $\beta = -\alpha \to +0$, и период (3) стремится согласно (1) к 2π. Этот факт согласуется с последним замечанием в § 189, поскольку уравнение Якоби, соответствующее равновесному решению $q(t) \equiv 0$, имеет вид

$$\left[\frac{1}{2}\varkappa'^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2\right]_\varkappa \equiv \varkappa'' + \varkappa = 0.$$

Это — уравнение маятника с инфинитезимальной амплитудой колебаний. Характеристические показатели равны $\pm i$ (они, следовательно, устойчивого типа, см. § 89). В то же время эти показатели равны ± 1 (неустойчивого типа) в случае уравнения Якоби

$$\left[\frac{1}{2}\varkappa'^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2\right]_\varkappa \equiv \varkappa'' - \varkappa = 0,$$

соответствующего равновесному решению $q(t) \equiv \pm\pi$.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

§ 194. Мы будем рассматривать здесь класс задач с n степенями свободы, приводящихся к n задачам, каждая из которых имеет одну степень свободы. Речь идет о так называемых системах Лиувилля.

Такие динамические задачи характеризуются тем свойством, что $^1/_2 n(n+1)+n+1$ функций g_{ik}, g_{ki}, f_i, U в (1) § 155 могут быть выражены через n совокупностей четырех функций $g_i(q_i)$, $f_i(q_i)$, $e_i(q_i)$, $d_i(q_i)$ одной только координаты q_i, $i=1, 2, \ldots, n$, в виде

$$g_{ik}=\delta_{ik}g_i(q_i)G, \quad f_i=f_i(q_i),$$

$$U=\frac{\sum e_i(q_i)}{G},$$

где

$$G=\sum d_i(q_i), \quad \delta_{ik}=\begin{cases} 0, & i\neq k, \\ 1, & i=k. \end{cases}$$

Так как

$$\sum f_i(q_i)dq_i$$

есть полный дифференциал, то из § 156 видно, что без потери общности можно положить $f_i(q_i)\equiv 0$. Тогда формулы (1) — (2_1) § 155 будут иметь вид

$$L=\frac{1}{2}G\sum g_i q_i'^2+G^{-1}\sum e_i, \tag{1_1}$$

$$G\equiv\sum d_i(q)>0, \tag{1_2}$$

где

$$g_i(q_i)>0. \tag{1_3}$$

Так как гамильтонова функция H, соответствующая лагранжевой функции (1_1), равна (см. § 158)

$$H=\frac{1}{2}G^{-1}\sum g_i^{-1}p_i^2-G^{-1}\sum e$$

и так как функция (1_2) удовлетворяет требованиям § 180, то гамильтонова функция (15) § 180 может быть представлена в виде

$$\bar H=\sum H_i,$$

где

$$H_i=\frac{1}{2}g_i^{-1}p_i^2-U_i, \quad U_i\equiv U_i(q_i; h)=e_i+hd_i.$$

Так как d_i, e_i, g_i зависят только от q_i, то систему

$$\dot p_i=-\bar H_{q_i}, \quad \dot q_i=\bar H_{\bar p_i} \tag{1_4}$$

с n степенями свободы можно заменить n системами, каждая из которых имеет одну степень свободы и получается из (1_4) после замены в правых частях $\overline{H}$ на H_i, $i = 1, \ldots, n$. (Точками обозначаются, разумеется, производные по переменной $\bar{t}$, определяемой согласно (14) § 180). Каждая такая система имеет интеграл энергии $H_i = h_i$, причем постоянные интегрирования $h_1, \ldots, h_n$ должны быть таковы, что $h_1 + \ldots + h_n = 0$. Обращение этой суммы в нуль вытекает из того факта, что $\overline{H} = H_1 + \ldots + H_n$, а $\overline{H} = 0$ в силу изложенного в конце § 180.

Так как функция Лагранжа, соответствующая функции Гамильтона

$$H_i \equiv H_i(p_i, q_i, h) = \frac{1}{2} g_i^{-1} p_i^2 - U_i(q_i, h)$$

равна

$$L_i \equiv L_i(\dot{q}_i, q_i, h) = \frac{1}{2} g_i(q_i) \dot{q}_i^2 + U_i(q_i, h),$$

то к каждому уравнению $[L_i]_{q_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, можно применить результаты, изложенные в §§ 185—186. В частности, получим $q_i = q_i(\bar{t})$ после обращения интеграла, аналогичного (3) § 187, где надо положить $F = 2(U_i + h_i)/g_i$. Пусть все функции $q_i = q_i(\bar{t})$, $i = 1, \ldots, n_i$ отвечающие постоянным энергии $h_1, \ldots$ $\ldots, h_n$ соответственно, найдены, причем $h_1 + \ldots + h_n = 0$. Тогда из (16) § 180 видно, что связь между $\bar{t}$ и t определяется формулами (см. (12))

$$t \equiv t(\bar{t}) = \sum s_i(\bar{t}), \tag{2_1}$$

$$s_i(\bar{t}) = \int d_i(q_i(\bar{t}))d\bar{t} \quad \text{(см. } (1_2)). \tag{2_2}$$

§ 195. Предположим, в частности, что при некоторых фиксированных значениях $1 + n$ постоянных интегрирования $h, h_1, \ldots$ $\ldots, h_n$, причем $h_1 + \ldots + h_n = 0$, условия § 187 выполняются для каждого i. (Разумеется, t надо заменить в § 187 на $\bar{t}$.) Тогда решение $q_i = q_i(\bar{t})$ уравнения $[L_i]_{q_i} = 0$ имеет период $\tau_i = \tau_i(h, h_i)$ по отношению к $\bar{t}$ и осциллирует между $\alpha_i = \alpha_i(h, h_i)$ и $\beta_i = \beta_i(h, h_i)$. Формулы (5), (6) § 188 остаются справедливыми, если заменить в них $\bar{t}$ на t_i и t на $\bar{t}$, а также $G(q)$ на $G_i(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Так мы встретимся с n независимыми переменными t_i, играющими роль времени и такими, что при $-\infty < \bar{t} < \infty$

$$0 < \text{const} < t_i < \text{const}, \tag{3}$$

где $\bar{t}$ — та же переменная, что и в § 194. Наконец, из (7) — (9_2)

§ 188 имеем

$$q_i = \frac{1}{2}(\beta_i + \alpha_i) - \frac{1}{2}(\beta_i - \alpha_i)\cos t_i, \tag{4₁}$$

$$\bar{t} = \frac{t_i}{\mu_i} + r_i(t_i), \tag{4₂}$$

$$r_i(t_i + 2\pi) = r_i(t_i), \tag{4₃}$$

$$0 < \tau_i = \frac{2\pi}{\mu_i}. \tag{4₄}$$

В соответствии с (3) каждая из n переменных $t_i = t_i(\bar{t})$ изменяется вместе с $\bar{t}$ от $-\infty$ до $+\infty$ монотонно. Из формул же $(4_1)-(4_4)$ следует, что переменные q_i, рассматриваемые как функции $\bar{t}$, имеют период τ_i.

Так как $d_i = d_i(q_i)$, то функция $d_i(q_i(\bar{t}))$ от $\bar{t}$ также имеет период τ_i по $\bar{t}$. Пусть через χ_i обозначается постоянный член в ряде Фурье для этой периодической функции, так что

$$d_i(q_i(\bar{t})) = \chi_i + c_i(\bar{t}), \tag{5₁}$$

$$c_i(\bar{t} + \tau_i) = c(\bar{t}), \tag{5₂}$$

$$\chi_i = M\{d_i\}, \tag{5₃}$$

где $M\{f\}$ обозначает предел среднего значения функции $f(\bar{t})$

$$\frac{1}{\bar{t}}\int_0^{\bar{t}} f(t)\,dt$$

при $\bar{t}\to\infty$. Если $f(\bar{t})$ — периодическая функция с периодом T, то

$$M\{f\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

Из (5_1) — (5_3) и (2_2) видно, что

$$s_i(\bar{t}) = \chi_i\bar{t} + v_i(\bar{t}), \tag{6₁}$$

$$v_i(\bar{t} + \tau_i) = v_i(\bar{t}). \tag{6₂}$$

Следовательно, (2_1) показывает, что $t = t(\bar{t})$ равно суммé «векового» члена $\chi\bar{t}$, где $\chi = \Sigma\chi_i = \text{const}$ и «осциллирующей» части $\Sigma v_i(\bar{t})$, где $v_i(\bar{t})$ имеет период τ_i.

§ 196. Периоды τ_i будут вообще несоизмеримыми друг с другом, поскольку они являются непрерывными функциями $\tau_i = \tau_i(h, h_i)$

от h, h_i. Вместе с тем желательно получить решение $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, исходных n лагранжевых уравнений $[L]_{q_i} = 0$, где L имеет вид (1_1), выраженное явным образом через время

$$t = \lambda\bar{t} + \sum v_i(\bar{t}).$$

Для этого требуется исключить $n+1$ переменных $t_1, \ldots, t_n$, $\bar{t}$ из формул (4_1), (4_2), (2_1). При таком исключении мы придем к периодическим функциям $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, лишь в очень частном случае, когда все τ_i взаимно соизмеримы друг с другом. Если же хотя бы две величины из $\tau_1, \ldots, \tau_n$ несоизмеримы друг с другом, то мы придем при неограниченных значениях времени к задаче о диофантовых приближениях.

Тем не менее можно ожидать, что функции $q_i(t)$ разлагаются при любых τ_i в обобщенные ряды Фурье. Для того чтобы получить такие ряды, исключение (нелокальное) $n+1$ параметров t_i, $\bar{t}$ должно быть выполнено с использованием теории почти периодических функций («почти периодичность» понимается в смысле Бора). Результат (см. § 198) таков, что существует n непрерывных функций $Q_i = Q_i(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ независимых переменных $\theta_1, \ldots, \theta_n$ таких, что любая функция Q_i имеет по отношению к θ_i период 2π (т. е. каждая Q_i — непрерывная функция точки на n-мерном торе) и

$$q_i(t) = Q_i(\mu_1 t, \ldots, \mu_n t), \tag{7}$$

где $\mu_i = 2\pi/\tau_i$ (см. (4_4)) и $-\infty < t < +\infty$.

§ 197. Если n положительных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_n$ связаны между собой соотношением вида $N_1\mu_1 + \ldots + N_n\mu_n = 0$, где N_i — целые числа такие, что $N_1^2 + \ldots + N_n^2 \neq 0$, то можно (хотя это и не обязательно) заменить размерность n θ-тора меньшим числом. Пусть n_0 — наименьшее допустимое число измерений. Тогда между n положительными числами $\mu_1, \ldots, \mu_n$ существует точно $n - n_0$ линейно независимых соотношений $\Sigma N_i\mu_i = 0$ $(\Sigma N_i^2 \neq 0)$, так что $n_0 = n$ в случае линейной независимости «частот» μ_i и $n_0 = 1$ в тривиальном случае, когда все частные периоды $\tau_i = 2\pi/\mu_i$ взаимно соизмеримы.

Таким образом, если $n_0 = 1$, то интегральная кривая $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, является замкнутой в n-мерном позиционном пространстве. Если же $n_0 = n$, то из (4_1)—(4_4) видно, что точки (q_i) в интегральной кривой $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $-\infty < t < +\infty$, образуют в силу так называемой теоремы Кронекера об аппроксимации плотное подмножество в n-мерном параллелепипеде $\alpha_i \leqslant q_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, позиционного пространства. Эти же соображения приводят к выводу, что замыкание интегральной кривой представляет собой n_0-мерную область *) не только в предельных случаях $n_0 = 1$, $n_0 = n$, но и при любом n_0.

§ 198. Анализ задачи, рассмотренной в § 196, основывается на двух теоремах, касающихся почти периодических функций. Первая — это теорема о единственности (в среднем), а вторая может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $v = v(\bar{t})$, $-\infty < \bar{t} < +\infty$, есть вещественная почти периодическая функция, производная которой $\dot{v} \equiv \frac{dv}{d\bar{t}}$ удовлетворяет при $-\infty < \bar{t} < +\infty$ неравенству

$$-1 < -\theta < \dot{v}(\bar{t}), \tag{8}$$

где $\theta = \text{const}$. Пусть $w = w(t)$ — функция, определяемая при $-\infty < \bar{t} < +\infty$ соотношением

$$\bar{t} \equiv t + w(t), \tag{9}$$

где $t \equiv \bar{t} + v(\bar{t})$. Тогда топологическое **) отображение $t = \bar{t} + v(\bar{t})$ оси $\bar{t}$ на ось t таково, что почти периодическая функция $t - \bar{t} \equiv v(\bar{t})$ переменной $\bar{t}$ является также почти периодической функцией $t - \bar{t} \equiv -w(t)$ переменной t. При этом показатели Фурье для $v(\bar{t})$ и $w(t)$ определяют один и тот же модуль.

С целью применения этих результатов заметим сначала, что в силу (1_2) непрерывная функция

$$G(q_1, \ldots, q_n) = \sum d_i(q_i)$$

имеет в n-мерной замкнутой ограниченной области $\alpha_i \leqslant q_i \leqslant \beta_i$ положительный минимум. Так как $\alpha_i \leqslant q_i(\bar{t}) \leqslant \beta_i$, то наименьшая нижняя граница функции $\Sigma d_i(q_i(\bar{t}))$ при $-\infty < \bar{t} < +\infty$ (обозначим ее через $\text{fin inf}\, \Sigma d_i$) положительна. Поскольку среднее значение $\text{M}\{\Sigma d_i\}$ не может быть меньше чем $\text{fin inf}\, \Sigma d_i$ и равно согласно (5_3) $\Sigma \chi_i$, то, следовательно, $\Sigma \chi_i > 0$, и можно положить $\Sigma \chi_i = 1$. Действительно, такая нормализация связана лишь

---

*) Этот факт вытекает только из теоремы Кронекера об аппроксимации. Однако гармонический анализ функций $q_i(t)$, т. е. построение функций $Q_i(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ на θ-торе требует привлечения результатов Вейля, уточняющих теорему Кронекера. См. примечание к § 127а.

**) Если заменить (8) более слабым условием $-1 < \dot{v}(\bar{t})$, то функция $t = \bar{t} + v(\bar{t})$ переменной $\bar{t}$ монотонно возрастает вместе с $\bar{t}$ от $-\infty$ до $+\infty$, так как почти периодическая функция $v(\bar{t})$ ограничена и $\dot{t} = 1 + \dot{v} > 1 - 1 = 0$. Однако условия $-1 < \dot{v}(t)$, $-\infty < \bar{t} < \infty$, и почти периодичность функции $v(\bar{t})$ не влекут за собой почти периодичность функции $w(t)$, определяемой единственным образом согласно (9).

с изменением единицы длины на оси $\bar{t}$, а введение в соотношение (2_1), определяющее $\bar{t}$, положительного постоянного множителя не внесет никаких изменений в предшествующие или последующие рассуждения. Таким образом,

$$0 < \operatorname{fin\,inf} \sum d_i(q_i(\bar{t})) \leqslant \mathrm{M}\left\{ \sum d_i \right\} = 1. \tag{10}$$

Положим

$$v(\bar{t}) = \sum v_i(\bar{t}).$$

Тогда из (2_1), (2_2) и (6_1) получим, что поскольку $\Sigma\chi_i = 1$, то

$$t = \bar{t} + v(\bar{t}), \tag{11_1}$$

$$\dot{v}(\bar{t}) = -1 + \sum d_i(q_i(\bar{t})). \tag{11_2}$$

Кроме того, из (6_2) видно, что функция $v(\bar{t}) = \Sigma v_i(\bar{t})$ является почти периодической с частотами, которые содержатся в модуле, порождаемом n числами $\mu_i = 2\pi / \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$ (возможно, линейно зависимыми).

Возможны два случая (в зависимости от знака в (10): $<$ или $=$). В первом случае из (10) и (11_2) вытекает, что условие (8) удовлетворяется, если положить

$$\theta = 1 - \operatorname{fin\,inf} \sum d_i.$$

Следовательно, к (11_1) применима теорема, сформулированная в начале этого параграфа, и таким образом $\bar{t} = t + w(t)$, где $w(t)$ — почти периодическая функция с частотами, содержащимися в модуле n чисел $\mu_i = 2\pi / \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, если учесть формулы (4_2)—(4_3) для $\bar{t} = t + w(t)$, видно, что (7) вытекает из (4_1).

Во втором случае мы имеем в (10) знак $=$, и это равенство означает, что наименьшая нижняя граница суммы $\Sigma d_i(q_i(\bar{t}))$ совпадает со средним значением $\mathrm{M}\{\Sigma d_i\} = 1$. Следовательно, почти периодическая функция $\Sigma d_i(q_i(\bar{t}))$ вырождается в константу (равную 1). Из (2_1)—(2_2) поэтому следует, что $t = \bar{t}$ (с точностью до аддитивной постоянной), а формулы (4_1)—(4_4) показывают, что каждая из функций q_i, $i = 1, \ldots, n$, является чисто периодической по t с периодом $\tau_i = 2\pi/\mu_i$. Очевидно, что формула (7) справедлива и в этом вырожденном случае.

§ 199. Результат § 194 заключается в том, что систему с функцией Лагранжа вида (1_1) можно расщепить на n систем, каждая из которых имеет одну степень свободы. То же самое положение возникает и тогда, когда $n - 1$ из n координат являются циклическими (см. §§ 182—184). Заметим, однако, что ни одно из этих свойств функции Лагранжа не инвариантно по отношению к преобразованиям позиционного или фазового пространства. Например, если при $n = 2$ заменить прямоугольные координаты x, y полярными r, φ, то вполне возможно, что φ окажется циклической координатой, хотя x и y такими не являются (см. § 211). Поэтому, хотя из изложенного в § 117 следует, что любая динамическая система может быть приведена с помощью соответствующего канонического преобразования к нормальной форме (12) — (13) § 113, когда все координаты становятся циклическими, главная проблема состоит, как было замечено в конце § 113, именно в нахождении такого пребразования.

По существу, положение еще менее благоприятное. Дело в том, что доказательство существования канонического преобразования, приводящего систему к нормальной форме (или, что то же самое, доказательство существования полного решения W уравнения (15) § 114), основывается лишь на общих теоремах, относящихся к существованию неявных функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. на теоремах, имеющих чисто локальный характер. Вместе с тем математические вопросы динамики имеют не такой тривиальный локальный характер, но представляют собой проблемы исследования в большом, связанного с нелокальной топологией рассматриваемых многообразий. Для иллюстрации этого создавшегося положения можно привести краткую справку об историческом развитии понятия «неразрешимой» динамической проблемы.

§ 200. Когда Иоганн и Яков Бернулли, Клеро, Даламбер, Д. Бернулли, Ламберт, Эйлер и, наконец, Лагранж применили принципы Ньютона к различным задачам небесной и земной механики, то они столкнулись со следующим обстоятельством. С одной стороны, принималось почти за аксиому, что динамическая проблема «разрешима» в том случае, если она приводится к квадратурам (и к последующим операциям дифференцирования и исключения). С другой стороны, наиболее актуальные проблемы почти никогда к квадратурам не сводились. Гениальные усилия Клеро привели в конце концов к систематической теории движения Луны и к теории возмущений больших планет, но не к желаемому «решению с помощью квадратур».

Поэтому вполне объяснимо мнение Ламберта, который считал, что все проблемы небесной механики можно рассматривать как «разрешимые», поскольку с помощью численного интегрирования уравнений движения можно предвычислять положения небесных тел с большой степенью точности. С самого начала астрономы и направили свои усилия именно на развитие практических методов представления движения небесных тел. В течение последующего столетия два из этих численных методов астрономического происхождения, а именно «полигональный» метод конечных разностей и метод последовательных приближений превратились в руках Коши в средство доказательства теорем существования или сходимости, которые в свою очередь явились строгим математическим обоснованием приближенных методов астрономов. (С аналогичным положением мы встречаемся в случае метода неопределенных коэффициентов Ньютона, законное обоснование которого следует из принципа мажорант Коши.)

С одной стороны, эти теоремы существования или сходимости справедливы в общих случаях, не имеющих ничего общего с динамическими проблемами. С другой же стороны, простейшие примеры показывают, что от всех этих методов требуется справедливость лишь в ограниченном t-промежутке. Поэтому все, что можно достичь в этом направлении, сводится к утверждениям локальной теоремы существования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 79).

§ 201. С этой точки зрения динамическую проблему, о которой известно лишь то, что она сводится к квадратурам, но ничего больше, едва ли можно рассматривать как «разрешимую» в большей степени, чем проблему, не приводящуюся к квадратурам. Действительно, благодаря квадратурам вводятся функции, которые вообще не являются «элементарными», так что при фактических вычислениях или даже при качественном анализе приходится обращаться к механическим квадратурам (или, что то же самое, к построению приближенных решений, упоминавшихся в § 200). Кроме того, обычно стараются найти не функции, представимые квадратурами, а скорее функции, получаемые в результате обращения системы квадратур (см. § 186). Проблема же обращения квадратур требует вообще гораздо более сложного анализа, чем теорема существования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. §§ 195—198).

Из сказанного вытекает, что фактически понятие «интегрируемой» системы остается совсем неопределенным. Было бы неестественным связывать понятие «интегрируемости» динамической системы с возможностью ее приведения к квадратурам. Это видно не только из сказанного в § 199, но также из примеров, показывающих, что возможность приведения динамической системы к квадратурам не является ни достаточным, ни необходимым условием для получения достаточной информации качественного характера о решениях этой системы (см., во-первых, §§ 195—198 и, во-вторых, исследования геодезических многообразий на двумерных многообразиях отрицательной кривизны, упоминавшиеся в § 127). Все это находится в согласии с высказываниями Пуанкаре, который относил системы не к интегрируемым или к неинтегрируемым, а к интегрируемым в большей или меньшей степени.

О современных взглядах на эти методические проблемы см. §§ 227 и 440.

§ 202. В силу изложенного в §§ 185—192 можно склониться к мнению, что динамическую систему следует называть «интегрируемой» тогда (но не только тогда), когда она может быть расщеплена с помощью «явных» преобразований координат и времени на совокупность динамических систем, каждая из которых имеет одну степень свободы. Ниже будут рассмотрены некоторые классические примеры лагранжевых функций, удовлетворяющих такому требованию.

§ 202a. Как отмечено в § 199, функция Лагранжа должна иметь специфическую структуру $(1_1)-(1_2)$ не в произвольных, но в специально выбранных координатах q_i. Например, результат Якоби, касающийся интегрируемости проблемы геодезических линий на поверхности $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=1$, основан на том, что если три не равные нулю постоянные a_1, a_2, a_3 различны *) и если в качестве гауссовых параметров q_1, q_2 на поверхности ввести эллиптические координаты, то квадрат элемента дуги $ds^2 = dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ представится формулой

$$ds^2 = G(g_1dq_1^2+g_2dq_2^2),$$

где g_i — функция лишь q_i и G имеет вид (1_2). Таким образом, лагранжева функция данной задачи имеет структуру $(1_1)-(1_2)$ именно в координатах q_1, q_2. (Тогда $e_i(q_i)\equiv 0$, $G=q_2-q_1$, а $g_i(q_i)$ — рациональные квадратичные функции q_i.) То же самое справедливо и в случае, когда один из коэффициентов a_1, a_2, a_3 равен нулю. Тогда эллиптические координаты вырождаются в параболические (см. конец § 56).

Аналогичным образом интегрирование в двух из интегрируемых случаев задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой (случай Эйлера инерционного движения и случай осевой симметрии) может быть непосредственно выполнено с помощью введения сферических координат (Эйлер, Лагранж). Возможность интегрирования в третьем случае (Софьи Ковалевской) обусловлена тем, что функция Лагранжа приобретает вид $(1_1)-(1_2)$, если ввести эллиптические координаты q_1, q_2 (Колосов).

§ 203. Рассмотрим движение частицы M под действием сил ньютонианского притяжения двух тел P_1 и P_2, не притягивающих

---

*) Иначе поверхность является поверхностью вращения, и в таком случае интегрируемость задачи следует из изложенного в § 211.

друг друга и не притягиваемых M (эйлерова проблема двух неподвижных центров). Предположим для простоты, что M движется в плоскости, так что проблема имеет две, а не три степени свободы. Пусть x, y — прямоугольные координаты M. Выберем единицы времени, массы и длины так, чтобы постоянная тяготения, сумма масс P_1 и P_2 и постоянное расстояние между P_1 и P_2 были равны единице. Выберем далее начало координат $(x, y) = (0, 0)$ в центре масс P_1 и P_2, а положительное направление оси x вдоль прямой P_1P_2. Таким образом, если обозначить через μ массу тела P_2, то масса P_1 равна $1-\mu$. Координаты тел P_1 и P_2 на плоскости (x, y) равны $(-\mu, 0)$, $(1-\mu, 0)$ соответственно. Таким образом, если $x = x(t)$, $y = y(t)$ — координаты точки M и $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ — расстояния MP_1, MP_2 соответственно, то функция Лагранжа запишется в виде

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + U,$$

где

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Введем теперь вместо x, y координаты ξ, η § 56, так что согласно (34) § 56

$$2r_1 = \operatorname{ch}\eta + \cos\xi, \tag{12_1}$$

$$2r_2 = \operatorname{ch}\eta - \cos\xi. \tag{12_2}$$

Тогда будем иметь (см. § 56)

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\xi'^2 + \eta'^2),$$

так что

$$L = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\xi'^2 + \eta'^2) + (r_1 r_2)^{-1} \{(1-\mu) r_2 + \mu r_1\}. \tag{13}$$

После подстановки (12_1)—(12_2) в (13) функция Лагранжа приобретает вид (1_1)—(1_2) § 194, где надо положить $n = 2$, $q_1 = \xi$, $q_2 = \eta$ и

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad d_1 = -\frac{1}{4}\cos^2\xi, \quad d_2 = \frac{1}{4}\operatorname{ch}^2\eta,$$

$$e_1 = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\cos\xi, \quad e_2 = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\eta.$$

Таким образом, лагранжевы функции $L_i = \frac{1}{2} g_i \dot{q}_i^2 + e_i + hd_i$ (§ 194) оказываются равными

$$L_1 = \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + U_1, \qquad L_2 = \frac{1}{2} \dot{\eta}^2 + U_2,$$

где

$$U_1 = \mu \cos \xi - \frac{1}{4} h \cos^2 \xi, \tag{14_1}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \eta + \frac{1}{4} h \operatorname{ch}^2 \eta. \tag{14_2}$$

Интегралы энергии лагранжевых уравнений $[L_1]_\xi = 0$, $[L_2]_\eta = 0$ запишутся в виде

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 - U_1 = h_1, \tag{15_1}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\eta}^2 - U_2 = h_2, \tag{15_2}$$

где $h_1 = -h_2 = h_0$, h_0 — произвольная постоянная (см. § 194).

§ 204. Поскольку (15_1), (15_2) представляют собой уравнения, соответствующие в силу (14_1), (14_2) системам с одной степенью свободы, то к ним применимы результаты *) §§ 185—188, а также §§ 191—192 (только к (15_1)). Разумеется, точками обозначается дифференцирование по вспомогательной переменной $\bar{t}$. Заметим, однако, что если значения постоянных h, h_0 в (14_1) — (14_2), (15_1), (15_2) находятся в области, в которой $\xi = \xi(\bar{t})$, $\eta = \eta(\bar{t})$ — периодические функции с периодами $\tau_1 = \tau_1(h, h_0)$, $\tau_2 = \tau_2(h, h_0)$ соответственно, то τ_1 и τ_2 являются непрерывными, не вырождающимися в константы функциями h, h_0 и таким образом в общем случае несоизмеримыми. Следовательно, если только отношение $\tau_1 : \tau_2$ не окажется рациональным, кривая $\xi = \xi(\bar{t})$, $\eta = \eta(\bar{t})$, описывающая движение частицы M, не является периодической, но полностью заполняет (всюду плотно) прямоугольную область на плоскости (ξ, η) (см. § 125).

§ 205. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались в § 198, учитывая четность силовых функций (14_1) — (14_2), придем к выводу, что при определенном выборе постоянных h, h_0 периоды τ_1 и τ_2 несоизмеримы друг с другом. Тогда замкнутый прямоугольник на плоскости (ξ, η), заполненный

---

*) В силу (14_k), $k = 1, 2$, квадратуры, получаемые при решении (15_k), $k = 1, 2$, приводят к эллиптическим интегралам первого рода.

всюду плотно точками интегральной кривой, содержит точку (ξ^*, η^*), в которой $(\cos\xi^*, \operatorname{ch}\eta^*) = (1, 1)$, но не содержит точки (ξ_*, η_*), в которой $(\cos\xi_*, \operatorname{ch}\eta_*) = (-1, 1)$.

Поскольку этот прямоугольник представляет собой замыкание множества тех точек, к которым кривая $(\xi, \eta) = (\xi(\bar{t}), \eta(\bar{t}))$ приближается сколь угодно близко при $\bar{t} \to \pm\infty$, из $(12_1)-(12_2)$ следует, что $r_2 = r_2(\bar{t})$, но не $r_1 = r_1(\bar{t})$, при некоторых достаточно больших значениях $\bar{t}$ принимает значения, сколь угодно близкие к нулю. Из $(12_1)-(12_2)$ также видно, что по крайней мере при достаточно больших $\bar{t}$ не только $r_1(\bar{t}) > 0$, но и $r_2(\bar{t}) > 0$. Действительно, если бы r_2 обращалось в нуль при некоторых значениях $\bar{t}$, сгущающихся на бесконечности, то периоды периодических функций $\operatorname{ch}\eta(\bar{t})$, $\operatorname{ch}\xi(\bar{t})$ не могли бы быть несоизмеримыми.

Поскольку $r_i = r_i(\bar{t})$ — расстояние между движущейся частицей M и неподвижным центром P_i, $i = 1, 2$, то равенство $r_i(\bar{t}) = 0$ означает, что имеет место столкновение между M и P_i в момент $\bar{t}$, а неравенство $r_i(\bar{t}) > 0$ указывает на отсутствие столкновения. Вместе с тем при рассмотренном выборе постоянных интегрирования движение M таково, что $r_1(\bar{t}) > 0$, $r_2(\bar{t}) > 0$ при $\mathrm{const} < |t| < \infty$, хотя $\liminf r_2(\bar{t}) = 0$ при $\bar{t} \to \infty$. Следовательно, частица M движется под влиянием притяжения двух неподвижных центров P_1 и P_2 так, что хотя настоящих столкновений между M и P_i, $i = 1, 2$, нет, но в определенные и сколь угодно большие моменты $\bar{t}$ частица M оказывается в произвольно малой окрестности P_2.

СИСТЕМЫ С РАДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

§ 206. Если $n = 2$ и

$$L = \frac{1}{2} g(q_1)(q_1'^2 + q_2'^2),$$

то мы имеем частный случай $(1_1)-(1_2)$ § 194. Это становится очевидным, если положить $g_1 = g_2 = 1$, $d_2 = e_2 = 0$, $d_1 = g$, $e_1 = gU$.

В качестве примера рассмотрим задачу о геодезических линиях на поверхности вращения S. Такая поверхность характеризуется тем свойством, что при соответствующем конформном отображении области, принадлежащей S, на евклидову плоскость (x, y) квадрат элемента дуги ds^2 на S представится в виде

$$ds^2 = g(x, y)(dx^2 + dy^2),$$

где множитель пропорциональности $g = g(x, y) > 0$ есть функция только $\sqrt{x^2 + y^2}$. Другими словами, если положить

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{1}$$

и выбрать в качестве гауссовых параметров на S переменные r, φ, то

$$ds^2 = g(r)\,(dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

где $g(r) > 0$. Очевидно, что уравнения меридианов и параллелей на S есть $\varphi = \text{const}$ и $r = \text{const}$ соответственно, а геометрический смысл множителя $g(r)$ таков, что если σ — длина дуги меридиана, то

$$d\sigma^2 = g(r)\,dr^2. \tag{2}$$

Согласно § 178 функция Лагранжа в задаче о геодезических линиях на S имеет вид

$$L = \frac{1}{2}s'^2,$$

т. е.

$$L = \frac{1}{2}g(r)\,(r'^2 + r^2\varphi'^2). \tag{3}$$

Отсюда видно, что φ — циклическая координата. Следовательно, уравнения Лагранжа обладают не только интегралом энергии, но и интегралом $L_{\varphi'} = \text{const}$. В соответствии с (3) оба эти интеграла записываются в виде

$$\frac{1}{2}g(r)\,(r'^2 + r^2\varphi'^2) = h, \tag{4$_1$}$$

$$g(r)\,r^2\varphi' = c. \tag{4$_2$}$$

Из (3) также видно, что если фиксировать c, то можно привести задачу к одному уравнению, соответствующему лагранжевой функции $L^* = L^*(r', r, c)$, которая определяется формулой (22) § 184, где надо положить $q_1 = r$, $g_{11} = g$, $g_{22} = r^2 g$, $U = 0$, так что

$$L^* = \frac{1}{2}g^*(r)\,r'^2 + U^*(r, c), \tag{5}$$

где

$$g^* = \frac{1}{g}, \qquad U^* = -\frac{1}{2}\frac{c^2 g^*}{r^2}.$$

К уравнению $[L^*]_r = 0$, описывающему систему с одной степенью свободы, применимы результаты, изложенные в §§ 185—190 (и в §§ 191—192 в случае периодичности g^*, U^* по r). Если решение $r = r(t)$ этого уравнения известно, то функция $\varphi(t)$ находится из (4_2) при помощи квадратуры. В частности, $c = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(t) = \text{const}$, т. е. когда геодезическая линия совпадает с параллелью $r = r_0$.

§ 207. Рассмотрим движение частицы в n-мерном евклидовом пространстве (x_i) под действием центральной силы, зависящей лишь от расстояния, т. е. пусть уравнения движения имеют вид

$$x_i'' = U_{x_i}(r), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

Оказывается, что эта проблема сводится к рассмотренной в § 206. При $n = 2$ этот факт очевиден (см. §§ 179 и 212). Поэтому достаточно показать, что случай $n > 2$ может быть приведен к случаю $n = 2$.

С этой целью заметим, что если j, $k = 1, \ldots, n$, то в силу (6)

$$(x_j x_k' - x_j' x_k)' \equiv x_j x_k'' - x_k x_j'' = x_j U_{x_k} - x_k U_{x_j} =$$

$$= (x_j x_k - x_k x_j)\frac{U_r}{r} \equiv 0.$$

Следовательно, существуют постоянные интегрирования c_{jk} такие, что

$$x_j x_k' - x_k x_j' = c_{jk}, \tag{7_1}$$

$$x_i c_{jk} + x_j c_{ki} + x_k c_{ij} = 0, \tag{7_2}$$

$$c_{jk} = -c_{kj} \qquad (c_{ii} = 0), \tag{7_3}$$

причем (7_2) и (7_3) вытекают из (7_1) при произвольных i, j, k $(= 1, \ldots, n)$.

Непосредственно подсчитывая постоянные, можем сделать с учетом значений (7_3) вывод, что совокупность линейных соотношений (7_2) определяет единственную двумерную плоскость $\Pi = \Pi\ (c_{12}, \ldots, c_{n-1,n})$, проходящую через начало координат n-мерного пространства (x_i), если только не все c_{jk} равны нулю.

Исключая пока этот случай и замечая, что соотношения (7_1) представляют собой интегралы уравнений (6), а (7_2) есть следствие этих интегралов, придем на основании определения понятия интеграла (см. § 82) к выводу, что интегральная кривая $x_i = x_i(t)$, соответствующая постоянным интегрирования c_{jk}, лежит в неподвижной плоскости Π. Поскольку уравнения (6) инвариантны по отношению к повороту системы координат, можно выбрать систему координат так, что плоскость (x_1, x_2) совпадает с плоскостью П. Тогда уравнения (6) имеют место для $n = 2$, а для $i > 2$ все $x_i(t) \equiv 0$.

Пусть теперь все $c_{jk} = 0$. Тогда из (7_1) следует, что отношения $x_j(t) / x_k(t)$ не зависят от t при любых j, k, т. е. что решение $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, представляет прямую линию, проходящую через начало координат $(x_i) = 0$. Следовательно, плоскость П существует и в этом случае, хотя она и не определяется тогда единственным образом.

§ 208. В силу изложенного в § 207 каждая консервативная динамическая система, имеющая радиальную симметрию и $n > 2$ степеней свободы, может быть приведена при каждом фиксированном значении постоянной энергии к задаче, рассмотренной в § 206 и решаемой в квадратурах.

Прежде всего заметим, что свойство радиальной симметрии динамической системы с лагранжевой функцией (1) § 155 и с n степенями свободы понимается в том смысле, что выражение (1) § 155 остается инвариантным при произвольном повороте n-мерного евклидова пространства (q_i) вокруг начала координат, если координаты q_i подобраны надлежащим образом. Из этого требования, очевидно, вытекает, что в (1) § 155 $(f_i) \equiv 0$ (и отсутствуют также в силу изложенного в § 156 члены вида $(\Sigma q_i^2)'$), а силовая функция U зависит лишь от $(\Sigma q_i^2)^{1/2}$. Таким образом, функция $\frac{1}{2}\Sigma\Sigma g_{ik} q_i' q_k'$ также обладает радиальной симметрией. Однако известно, что риманово пространство с метрикой

$$ds^2 = \sum \sum g_{ik} dq_i\, dq_k,$$

обладающей радиальной симметрией, может быть отображено конформно на евклидово пространство, т. е. что замена $q_1, \ldots, q_n$ соответствующими новыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ дает

$$ds^2 = g \sum dx_i^2,$$

где g — соответствующий множитель пропорциональности. При этом g и координаты x_i могут быть определены явными квадратурами так, что g и Σq_i^2 оказываются функциями лишь Σx_i^2 *).

Следовательно, функцию Лагранжа можно привести к виду

$$L = \frac{1}{2} g \sum x_i'^2 + U,$$

где g и U — функции лишь $r = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$.

---

*) Этот факт часто используется в теории относительности, и он может быть легко доказан при рассмотрении геодезических линий, трансверсальных к гиперповерхности $\Sigma q_i^2 = \text{const}$.

Наконец, имея в виду преобразование времени (14) § 180, можно предположить без потери общности, что $g \equiv 1$, т. е. что

$$L = \frac{1}{2}\sum x_i'^2 + U(r).$$

Так как уравнения (6) описывают динамическую систему именно с подобной функцией Лагранжа, то доказательство можно считать законченным.

§ **209.** Предположение $n > 2$ в § 208 было необходимым, так как если $n = 2$, то система с радиальной симметрией может не быть обратимой. Действительно, рассмотрим систему

$$x'' - 2\omega y' = U_x, \qquad y'' + 2\omega x' = U_y,$$

где ω и U — заданные функции (x, y), причем эта система обратима лишь при $\omega \equiv 0$. В § 229 мы увидим, что функция Лагранжа для этой системы может быть приведена после подстановки (1) к виду

$$L = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + r^2 f(r)\varphi' + U(r), \tag{8_1}$$

$$\omega(r) = \frac{1}{2} r f_r(r) + f(r), \tag{8_2}$$

если $\omega(x, y)$, $U(x, y)$ — функции лишь $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Однако функция (8_1) обладает радиальной симметрией и в необратимом случае $\omega(r) \not\equiv 0$, поскольку φ является циклической координатой.

Из сказанного выше следует, что наряду с интегралом энергии существует интеграл $L_{\varphi'} = c\,(=\text{const})$ или $r^2(f(r) + \varphi') = c$.

§ **210.** Пусть, в частности, $f(r) \equiv 1$, так что $\omega(r) \equiv 1$. Тогда $r^2(1 + \varphi') = c$, т. е. $r^2\bar{\varphi}' = c$, где $\bar{\varphi} = t + \varphi$. Кроме того, подставляя $f(r) \equiv 1, \varphi' = \bar{\varphi}' - 1$ в (8_1), получим, что

$$L = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + r^2\varphi' + U(r) \tag{9_1}$$

или

$$L = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\bar{\varphi}'^2) + \bar{U}(r), \tag{9_2}$$

где $\bar{U} = U - {}^1/_2 r^2$, причем ($9_1$) и ($9_2$) эквивалентны друг другу в силу соотношения $\varphi = \bar{\varphi} - t$ (см. § 95). Так как функция (9_2) обратимого и (9_1) необратимого типа, то отсюда следует, что свойство обратимости зависит от выбора координатной системы.

В настоящем случае этот факт имеет простой кинематический смысл. Действительно, если положить

$$\bar{x} = r\cos\bar{\varphi}, \quad \bar{y} = r\sin\varphi,$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то функции (9_1) и (9_2) представятся в виде

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx') + U, \tag{10_1}$$

$$L = \frac{1}{2}(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2) + U, \tag{10_2}$$

где

$$U - \bar{U} = \frac{1}{2}r^2. \tag{10_3}$$

Переход от $(\bar{x}, \bar{y})$ к (x, y) соответствует введению системы прямоугольных координат (x, y), имеющей общее начало с системой $(\bar{x}, \bar{y})$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью, так как $\varphi = \bar{\varphi} - t$. Тот факт, что функция (10_2) обратимого и (10_1) необратимого типа, обусловлен кориолисовыми силами, появляющимися вследствие вращения системы (x, y). Наконец различие в выражениях для силовых функций U и $\bar{U}$ обусловлено появлением центробежных сил.

§ 211. Рассмотрим движение материальной точки на евклидовой плоскости (x, y) под действием силы, направленной к началу координат $(x, y) = (0, 0)$ или от него и имеющей величину $\pm F = |F|$, зависящую лишь от расстояния $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, причем $F(r)$ берется отрицательной, положительной или равной нулю соответственно тому, будет ли сила на расстоянии r притягивающей, отталкивающей или равной нулю. Уравнения движения запишутся в виде

$$x'' = \pm F(r)\frac{x}{r}, \quad y'' = \pm F(r)\frac{y}{r}$$

или же в виде (6), где $n = 2$ и $U(r)$ равно неопределенному интегралу от $\pm F(r)$. Таким образом, $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$, и мы имеем

$$x'' = U_x, \quad y'' = U_y, \tag{11_1}$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = h, \tag{11_2}$$

$$xy' - yx' = c, \tag{11_3}$$

причем (11_2) и (11_3) — интегралы уравнений (11_1).

Вводя полярные координаты, запишем функцию Лагранжа и эти интегралы в виде

$$L = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + U(r), \tag{12_1}$$

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r'\varphi'^2) - U(r) = h, \tag{12_2}$$

$$r^2\varphi' = c. \tag{12_3}$$

Из (12_1) видно, что угол φ является циклической координатой и что импульс $L_{\varphi'}$, канонически сопряженный с этой угловой координатой, равен $r^2\varphi'$. Поэтому интеграл (12_3), т. е. (11_3), выражает факт постоянства момента количества движения, а интеграл (12_1), т. е. (11_2), выражает закон сохранения энергии.

§ **212.** Исключим тривиальный случай равновесного решения, а также изолированные значения t, соответствующие точкам возврата. Тогда изложенное в § 179 показывает, что решения уравнений (11_1), соответствующие постоянной энергии h, можно рассматривать как геодезические линии на поверхности S_h, на которой квадрат элемента дуги равен

$$ds^2 = g(x^2 + y^2),$$

где g есть $2(U + h)$, т. е. является функцией гауссовых параметров x, y. Следовательно, $g = g(r)$, и поверхность S_h является при фиксированной h поверхностью вращения, рассмотренной в § 206. Так как $U = U(r)$, где $r^2 = x^2 + y^2$, то гауссова кривизна $K_h = K_h(x, y)$ на S_h равна (см. (19) § 231)

$$K_h \equiv K_h(r) = \frac{1}{4}\,\frac{U_r{}^2 - (U + h)\left(U_{rr} + \dfrac{U_r}{r}\right)}{(U + h)^3}. \tag{13}$$

В частности, метрика на поверхности S_h становится неевклидовой, если $h = 0$ и

$$U = 2(1 - r^2)^{-2}, \tag{14}$$

поскольку тогда $K_h(r) \equiv -1$ в силу (13).

§ **213.** Поскольку для каждого решения уравнений (11_1) найдутся постоянные h, c, удовлетворяющие соотношениям (11_2), (11_3), можно ожидать, что два дифференциальных соотношения (11_1), налагаемых на функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ класса $C^{(2)}$, эквивалентны двум соотношениям (11_2), (11_3), в которых постоянные

h и c произвольны. Фактически соотношения (11_2), (11_3), являющиеся необходимыми для функций $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих (11_1), оказываются и достаточными, если исключить случай круговых решений. Но для последних, т. е. когда $x^2(t)+y^2(t) = \text{const}$, из (11_2) и (11_3) не вытекает (11_1).

Действительно, дифференцируя (11_2), (11_3), получим формулы

$$x'x''+y'y''-U_x x'-U_y y'=0,$$

$$xy''-yx''=0,$$

так что, поскольку $U=U(\sqrt{x^2+y^2})$ и, следовательно, $yU_x-xU_y=0$, соотношения (11_2) — (11_3) эквивалентны следующим:

$$\left.\begin{aligned} x'(x''-U_x)+y'(y''-U_y)=0,\\ y(x''-U_x)-x(y''-U_y)=0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Последние соотношения представляют собой линейную комбинацию уравнений (11_1) с определителем, равным

$$-xx'-yy'\equiv-\frac{1}{2}(x^2+y^2)'.$$

Таким образом, (15) и (11_1), т. е. (11_2)—(11_3) и (11_1) эквивалентны друг другу всегда, если $x^2(t)+y^2(t)\neq\text{const}$.

§ 214. В соответствии с (12_1) и § 184 мы можем заменить (11_1) при фиксированном значении постоянной c интеграла (11_3) уравнением $[L^*]_r=0$, где

$$L^*=\frac{1}{2}r'^2+U^*, \tag{16_1}$$

$$U^*(r,c)=U(r)-\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} \tag{16_2}$$

и

$$\frac{1}{2}r'^2-U^*=h. \tag{16_3}$$

Из (12_2), (12_3), (16_2) видно, что соотношение (16_3) представляет собой не только интеграл энергии уравнения

$$[L^*]_r\equiv r''-U_r^*=0, \tag{16_4}$$

соответствующего системе с одной степенью свободы, но также и интеграл энергии системы (11_1) с двумя степенями свободы. Если решение $r=r(t)$ уравнения (16_4) известно, то функция $\varphi=\varphi(t)$ найдется из (12_3) с помощью квадратуры.

Из (12_3) также видно, что движение M на плоскости (x, y) является при любом t прямым, если $c > 0$, и обратным, если $c < 0$. При замене t на $-t$ обратное движение становится прямым. Из (11_3) далее видно, что $c = 0$ для таких и только таких траекторий, которые представляют собой прямую линию, проходящую через начало координат.

§ 215. Пусть решение $r = r(t)$ уравнения

$$[L^*]_r \equiv r'' - U_r^* = 0$$

таково, что $c \neq 0$ и $r(t) \neq \mathrm{const}$. Тогда в силу изложенного в §§ 185—187 функция $r(t)$ либо асимптотического типа, либо периодическая с периодом τ, причем

$$\tau = 2 \int\limits_{\alpha}^{\beta} [2(U^*(r, c) + h)]^{-1/2} dr, \qquad (17_1)$$

где

$$\alpha = \min r(t) < \max r(t) = \beta. \qquad (17_2)$$

Рассмотрим последний случай и предположим, что $r(t) \neq 0$ при любом t, т. е. что $\alpha > 0$. Обозначая через $\gamma > 0$ свободный член ряда Фурье для непрерывной периодической функции $1/r^2(t)$ и полагая $\nu = c\gamma$, получим на основании (12_3), что $\varphi(t) = \nu t + \psi(t)$, где $\psi(t)$ — периодическая функция с тем же периодом, что и $r(t)$. Следовательно, из (1) видно, что качественное поведение интегральной кривой на плоскости (x, y) при $t \to \infty$ зависит от того, будет ли отношение $\nu\tau : \pi$, определяемое постоянными интегрирования, рациональным или иррациональным. В первом случае обе функции $x(t)$, $y(t)$ имеют общий период, кратный τ, так что интегральная кривая на плоскости (x, y) замыкается после достаточного числа оборотов вокруг начала координат. Во втором же случае несоизмеримости $\nu\tau$ и π из соответствующих замечаний*) в § 125 или § 197 видно, что при $t \to \infty$ интегральная кривая приближается сколь угодно близко к любой точке кругового кольца $\alpha^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \beta^2$, а α и β определяются согласно (17_2).

§ 216. Предположим, что $r(t) \equiv r_0 = \mathrm{const} > 0$ есть равновесное решение уравнения

$$[L^*]_r \equiv r'' - U_r^* = 0,$$

---

*) Позиционное пространство, заполненное всюду плотно точками интегральной кривой, можно также представить в виде тора, поскольку $r = r(t)$ — периодическая функция, а угловая переменная $\varphi = \varphi(t)$ может быть приведена к mod 2π.

и пусть c_0, h_0 — значения постоянных c, h, соответствующие этому решению. Тогда в силу (16_2) — (16_3)

$$-c_0^2 = r_0^3 U_r(r_0), \qquad -h_0 = U(r_0) + \frac{1}{2} r_0 U_r(r_0), \tag{18_1}$$

$$2r_0^2 (U(r_0) + h_0) = c_0^2, \tag{18_2}$$

причем (18_2) вытекает из обоих соотношений (18_1), необходимых и достаточных для существования числа $r_0 > 0$ такого, что $r(t) \equiv r_0$ есть равновесное решение, соответствующее значениям $c_0 \geqslant 0$, $h_0 \gtreqless 0$. Из структуры соотношений (18_1) видно, что r_0 может быть любым положительным числом тогда и только тогда, когда $U_r(r) < 0$ при любом r, т. е. (см. § 211) когда действующая сила есть сила притяжения (а не отталкивания).

Из (1) и (12_3) видно, что равновесное решение $r(t) \equiv r_0 (> 0)$ уравнения $[L^*]_r = 0$ представляет или равновесное (при $c_0 = 0$) или круговое решение (при $c_0 > 0$) уравнений (11_1). В последнем случае угловая скорость движения по кругу $x^2 + y^2 = r_0^2$ постоянна и равна c_0 / r_0^2. Обозначая период движения, равный $2\pi r_0^2 / c_0$, через τ_0 и используя (18_2), получим

$$x = r_0 \cos \frac{2\pi t}{\tau_0}, \qquad y = r_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}, \tag{19_1}$$

где

$$\tau_0 = 2\pi \left\{ -\frac{U_r(r_0)}{r_0} \right\}^{-1/2} \tag{19_2}$$

Таким образом, круговые движения являются периодическими независимо от соизмеримости или несоизмеримости чисел $\nu\tau$ и π (см. § 215 *)).

В соответствии с § 190 характеристические показатели равновесного решения $r(t) \equiv r_0$ уравнения $[L^*]_r \equiv r'' - U_r^*(r, c_0) = 0$ равны квадратным корням из $U_{rr}^*(r_0, c_0)$ или

$$\pm \left\{ U_{rr}(r_0) + \frac{3U_r(r_0)}{r_0} \right\}^{1/2} \tag{20}$$

поскольку в силу (16_2), (18_1)

$$U_{rr}^*(r_0, c_0) = U_{rr}(r_0) - \frac{3c_0^2}{r_0^4}, \qquad c_0^2 = -r_0^3 U_r(r_0).$$

---

*) В § 215 мы неявно предполагаем, что периодический член $\psi(t)$ в формуле $\varphi(t) = \nu t + \psi(t)$ не вырождается в константу. Но если $\psi(t) = \mathrm{const}$, то $\varphi'(t) = \nu = \mathrm{const}$, и мы придем тогда в силу (12_3) к случаю кругового движения $r = \mathrm{const}$, исключенному в § 215.

§ 217. В последующем будем предполагать, что круговое решение (19_1) существует при любом заданном $r_0 > 0$. В соответствии с § 216 это имеет место тогда и только тогда, когда $U_r(r) < 0$ при любом r.

Естественно спросить, каков должен быть закон притяжения $U_r(r)$, чтобы любое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ с постоянными интегрирования h, c, достаточно близкими к постоянным h_0, c_0 кругового решения (19_1), было периодическим и имело период $\tau = \tau(c, h)$, стремящийся к периоду (19_2) кругового решения при $c \to c_0$, $h \to h_0$.

Вследствие появления несоизмеримых частот в общем случае (см. § 215) налагаемое требование периодичности является настолько жестким, что оно делает возможным явное определение функции $U_r(r)$. Оказывается, что если исключить тривиальный случай, то сила $U_r(r)$ должна быть пропорциональна r^{-2}, т. е. соответствовать закону притяжения Ньютона (о тривиальном случае см. § 219а).

§ 218. С целью доказательства последнего утверждения выберем произвольным образом пару констант $c_0 > 0$ и h_0, удовлетворяющих условиям (18_1) для кругового решения $r = r_0$. Фиксируем c_0 и будем варьировать постоянную h интеграла энергии (11_2) произвольным образом вблизи значения h_0. Тогда в силу требований периодичности, указанных в § 217, радиус-вектор $r(t)$ для решения уравнений (11_1) с постоянными интегрирования c_0, h должен изменяться периодически с периодом $\tau = \tau(c_0, h)$. Следовательно,

$$\lim_{h \to h_0} \tau(c_0, h) = 2\pi : \left\{ -U_{rr}(r_0) - \frac{3U_r(r_0)}{r_0} \right\}^{1/2} > 0. \qquad (21)$$

Эта формула вытекает из изложенного в §§ 189—190, если учесть, что характеристические показатели для решения $r(t) = r_0$ определяются формулой (20).

Так как $r_0 > 0$ может быть произвольным, то из (21) и изложенного в § 217 следует, что при любом $r_0 > 0$

$$U_{rr}(r_0) + \frac{3U_r(r_0)}{r_0} < 0, \qquad U_r(r_0) < 0. \qquad (22)$$

Но согласно требованию в § 217 предел (21) должен быть равен при любом r_0 периоду кругового движения. Следовательно, должно выполняться при любом r_0 (т. е. при любом r) соотношение

$$U_{rr}(r) + \frac{2U_r(r)}{r} = 0. \qquad (23)$$

Это соотношение представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно $U(r)$, общее решение которого имеет вид

$$U(r)=\frac{C}{r}+C_1,$$

где C и C_1 — произвольные постоянные. Так как нас интересует только закон изменения силы $U_r(r)$, то можно положить $C_1=0$. Из (22) следует, что $C>0$. При соответствующем выборе единицы длины получим $C=1$, что и утверждалось в § 217.

В § 241 (и в § 267) мы увидим непосредственно, что в этом частном случае функции $U(r)$ условия, указанные в § 217, действительно выполняются.

§ 218а. Закон $U(r)=r^{-1}$ был получен при рассмотрении почти круговых орбит. Однако важно осознать исключительную роль этого закона с точки зрения общих положений, изложенных в §§ 126—130. В § 241 мы увидим, что в случае $U(r)=r^{-1}$ найдутся для каждого решения (не обязательно почти кругового) $x=x(t)$, $y=y(t)$ постоянные a, b, удовлетворяющие соотношениям

$$cx'=-yU+a,\qquad cy'=xU+b.$$

Из этих соотношений следует, что если $U=r^{-1}$, то интеграл (11_2) можно заменить двумя интегралами:

$$\left.\begin{aligned}(xy'-yx')x'+yU&=a,\\(xy'-yx')y'-xU&=b,\end{aligned}\right\}\tag{11a}$$

где

$$U=(x^2+y^2)^{-1},$$

так что вместо двух интегралов (11_2)—(11_3) уравнений (11_1) мы получим три консервативных интеграла, независимых в смысле определения в § 82. Кроме того, эти интегралы, будучи алгебраическими, являются изолированными в смысле определения в § 128. Если же считать $U=U(r)$ произвольной функцией, то уравнения (11_1) имеют только два изолированных интеграла (11_2)—(11_3). Что касается третьего консервативного интеграла (существующего в соответствии с изложенным в § 82 и определяемого согласно результатам в § 214 при обращении квадратуры), то он не является изолированным. Этот вывод следует с достаточной очевидностью из соображений, основанных на результатах, которые приведены в § 215. Таким образом для произвольной силовой функции $U(r)$ степень примитивности $m-1-l$ (см. § 130) равна $4-1-2\neq 0$, а для ньютонианской силовой функции она равна $4-1-3=0$.

В §§ 219—219а мы увидим, что степень примитивности равна также нулю и для силовой функции Гука, но отлична от нуля во всех остальных случаях.

§ 219. Условия, налагаемые на силовую функцию U в § 217, таковы, что требуется не только периодичность почти круговых решений, но также и близость периода такого решения к периоду (19_2) кругового решения.

Естественно спросить, какова будет силовая функция $U(r)$, если отбросить это дополнительное ограничение. Тогда можно допустить, что предел (21), не будучи равным периоду кругового решения (19_2), соизмерим с ним. Сравнивая же (19_2) с (21), придем к выводу, что (23) следует заменить более общим соотношением

$$U_{rr}(r)+\frac{(3-\lambda^2)U_r(r)}{r}=0, \qquad (23а)$$

где λ — некоторое рациональное число. Общее решение этого уравнения относительно $U(r)$ при фиксированном λ имеет вид

$$U(r)=C\cdot r^{\lambda^2-2}+C_1,$$

где C, C_1 — произвольные постоянные, причем можно положить, как и в § 218, $C_1=0$.

Однако оказывается, что единственно допустимым является значение $\lambda=1$ (тот же случай, что и в § 218). Действительно, если положить $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq 2$, то детальный анализ интегралов (12_2)—(12_3) при $U=C\cdot r^{\lambda^2-2}$ показывает, что решения, близкие к круговым, не могут быть все периодическими. Случай $\lambda=2$ может быть исключен по другой причине *). Этот факт не удивителен, поскольку соотношение (23а) было получено лишь как необходимое условие, которое вполне может не быть достаточным. Для доказательства того, что все значения $\lambda\neq 1$ должны быть исключены, приходится вычислить для гипотетического периода $\tau=\tau(c_0,h)$ при малом $|h_0-h|$ приближение более высокого порядка, чем нулевое приближение, определяемое согласно (21). Эти элементарные, но несколько длинные вычисления мы приводить здесь не будем.

§ 219а. Имеется один особый случай, которым мы пренебрегли выше. Действительно, из §§ 189—190 видно, что рассуждения, приведенные в § 218, оказываются несправедливыми в том слу-

---

*) В § 219а мы увидим, что если $\lambda=2$, то интегральные кривые на плоскости (x, y) — эллипсы, т. е. простые замкнутые кривые, принадлежащие по определению λ (23а) к случаю $\lambda=1$. Таким образом, предположение $\lambda=2$ приводит к равенству $2=1$.

чае, когда период решения не зависит от постоянных интегрирования. В силу (19_2) § 216 при таком предположении о постоянстве периода мы получим для $U = U(r)$ условие $U_r(r) / r = c = \mathrm{const}$. Вместе с тем условие $U_r < 0$ (см. § 217) показывает, что $c < 0$, так что можно положить без потери общности $c = -1$. Таким образом, $U_r(r) = -r$, т. е. $U = -\frac{1}{2} r^2$ (если не выписывать аддитивную постоянную). Уравнения (11_1) запишутся при такой силовой функции в виде

$$x'' + x = 0, \qquad y'' + y = 0,$$

а их общее решение

$$x = a \cos (t - t^0), \qquad y = b \cos (t - t^0)$$

всегда периодическое (равновесное решение $a = 0$, $b = 0$ исключается благодаря тому, что $r > 0$). Тот факт, что период этого решения (равный 2π) не зависит от постоянных интегрирования, согласуется с изложенным в конце § 160а, поскольку в данном случае $\beta^{-1} - {}^1/_2 = 0$. Очевидно, что мы имеем дело с подслучаем $\omega_1 = \omega_2$ случая (i) § 125 (см. § 130).

В § 259 мы увидим, что случай $U(r) = r^{-1}$ §§ 217—218 при фиксированном $h (< 0)$ приводится к рассмотренному в этом параграфе тривиальному случаю $U = -\frac{1}{2} r^2$.

§ **220**. Рассмотрим опять общий случай (см. § 211), отбрасывая для упрощения исключительные случаи, упомянутые в начале § 212. Пусть через Φ, R обозначены импульсы $L_{\varphi'}$, $L_{r'}$, канонически сопряженные с координатами φ, r. В силу (12_1) имеем $\Phi = r^2 \varphi'$, $R = r'$. Следовательно, функция Гамильтона $H(\Phi, R, \varphi, r)$, соответствующая лагранжевой функции (12_1), запишется согласно (2_1) § 15 в виде

$$H \equiv H(\Phi, R, r) = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} \right) - U(r), \tag{24}$$

а интегралы (12_2), (12_3) энергии и момента количества движения в виде

$$H = h, \qquad \Phi = c.$$

Уравнение в частных производных (15) § 114 примет вид

$$\frac{1}{2} \left(W_r{}^2 + \frac{W_\varphi{}^2}{r^2} \right) - U(r) = h, \tag{25}$$

где $(\varphi, r) \equiv (q_1, q_2) \equiv q$.

§ 221. Заметим, что координата $q_1 = \varphi$ не входит в (25) явно и что поэтому $W_\varphi = \Phi = c$. Учитывая это, а также используя соображения, аналогичные тем, которые были приведены в § 114, придем к выводу, что уравнение (25) допускает решение вида $W = c\varphi + V$, где функция $V = V(r)$ не зависит от φ. Для V мы получим, исходя из (25), следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(V_r^2+\frac{c^2}{r^2}\right)-U(r)=h.$$

Его общее решение $V = V(r)$ выражается неопределенным интегралом от функции

$$\left\{2(U(r)+h)-\frac{c^2}{r^2}\right\}^{1/2}.$$

Таким образом, если $r^0 = r^0(c, h)$ — некоторая функция постоянных интегрирования c, h, то решение $W = W(\varphi, r)$ уравнения (25) можно записать в виде

$$W = c\varphi + V \equiv c\varphi + \int\limits_{r^0(c,h)}^{r}\left\{2(U(\bar r)+h)-\frac{c^2}{\bar r^2}\right\}^{1/2} d\bar r. \qquad (26)$$

Однако здесь необходима осторожность, поскольку функция $W(\varphi, r)$ должна обладать непрерывными производными $W_r, \ldots$, а это условие нарушается, если подынтегральное выражение $\{\ \}^{1/2}$ в (26) обращается в нуль. Правда, сравнивая (26) и (18_2), приходим к выводу, что $\{\ \}^{1/2}$ обращается тождественно в нуль именно в случае кругового решения.

Обращение же в нуль выражения $\{\ \}^{1/2}$ при изолированных значениях r (например, при $r = r^0$) не играет никакой роли.

§ 222. Если исключить случай круговых решений, то формула (26) определяет полный интеграл уравнения (25), в котором роль постоянных интегрирования v_1, v_2 выполняют c и h. Действительно, условие (18) § 116 полноты интеграла тогда выполняется, поскольку согласно (26)

$$\det(W_{q_i v_k}) \equiv \begin{vmatrix} W_{\varphi c} & W_{\varphi h} \\ W_{rc} & W_{rh}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ W_{rc} & W_{rh}\end{vmatrix} = V_{rh} = \frac{1}{\{\ \}^{1/2}}.$$

Следовательно, применимы результаты, изложенные в § 116а. Пусть t^0 — фиксированный момент, через f^0 обозначается для любой функции f величина $(f)_{t=t_0}$ и $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$, $Q_1 = c$, $Q_2 = h$. Тогда

$$-W_{Q_1} \equiv -W_c = -\varphi - V_c$$

в силу (26). В соответствии с § 116а получим, что

$$P_1 = -\varphi^0 - V_c{}^0,\ P_2 = t^0,\ Q_1 = c,\ Q_2 = h \tag{27}$$

суть канонические постоянные интегрирования.

§ 223. Пусть производная $r' = r'(t)$ решения $r = r(t) \equiv r(t, c, h) > 0$ уравнения (16_3) обращается в нуль при некотором изолированном значении $t = t_0 = t_0(c, h)$. Например, пусть $r(t_0)$ — локальный минимум функции $r(t)$. Предположим, что t_0 совпадает со значением t^0, указанным в § 222, и пусть нижний предел $r^0 = r^0(c, h)$ в интеграле (26) равен $r(t_0)$. Тогда, если выполняется очевидное условие дифференцируемости, то

$$P_1 = h,\quad P_2 = c,\quad Q_1 = -t_0,\quad Q_2 = \omega, \tag{28}$$

где $\omega = \varphi(t_0)$ $(r'(t_0) = 0)$ — канонические постоянные интегрирования.

Это можно доказать, если учесть заключительное замечание в § 221. Действительно, прежде всего из (26) следует, что

$$V_c = \left(\int\limits_{r^0(c,h)}^{r} \{\ \}^{1/2} d\bar{r} \right)_c \equiv -r_c{}^0(c, h)\left(\{\ \}^{1/2}\right)^0 + \int\limits_{r^0(c,h)}^{r} \left(\{\ \}^{1/2}\right)_c d\bar{r}.$$

Так как последний интеграл обращается в нуль при $r = r^0(c, h) \equiv r(t_0)$, то

$$V_c{}^0 = -r_c{}^0(c, h)\left(\{\quad\}^{1/2}\right)^0.$$

Однако, положив $t = t^0 \equiv t_0$ в (16_2)—(16_3) и используя принятое условие $r'(t_0) = 0$, видим, что $\left(\{\quad\}^{1/2}\right)^0 = 0$.

Следовательно, $V_c{}^0 = 0$ и постоянные (27) сводятся к системе канонических постоянных интегрирования, эквивалентной системе (28) в силу изложенного в § 42.

§ 224. Эти результаты можно перенести теперь на случай трех прямоугольных координат. С этой целью рассмотрим для фиксированного значения параметра ι консервативное преобразование $v = v(q)$ $n = 3$ трех координат $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \nu$ в координаты $v_1 = \xi$, $v_2 = \eta$, $v_3 = \zeta$ по формулам

$$\xi = x\cos\nu - y\sin\nu\cos\iota,\qquad \eta = x\sin\nu + y\cos\nu\cos\iota,$$

$$\xi = y\sin\iota. \tag{29}$$

Якобиева матрица $J \equiv v_q$ для этого преобразования равна

$$J = \begin{bmatrix} \cos\nu & -\sin\nu\cos\iota & -\eta \\ \sin\nu & \cos\nu\cos\iota & \xi \\ 0 & \sin\iota & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

причем i-я строка в (30) получается частным дифференцированием v_i по x, y, ν. Мы будем предполагать, что

$$-\sin\iota \neq 0 \quad (\text{т. е. } \iota \neq 0, \pm\pi, \ldots), \tag{31_1}$$

$$\xi\cos\nu + \eta\sin\nu \neq 0, \tag{31_2}$$

поскольку определитель матрицы (30) равен произведению (31_1) на (31_2). Полагая

$$\left.\begin{aligned} X &= \Xi\cos\nu + \mathrm{H}\sin\nu, \\ Y &= (-\Xi\sin\nu + \mathrm{H}\cos\nu)\cos\iota + \mathrm{Z}\sin\iota, \\ N &= -\Xi\eta + \mathrm{H}\xi, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

увидим, что если X, Y, N — импульсы, канонически сопряженные с координатами x, y, ν, то Ξ, H, Z — импульсы, сопряженные с координатами ξ, η, ζ. Действительно, из формул (6) § 49 следует, что каноническое расширение координатного преобразования (29) получается при преобразовании 3-вектора (X, Y, N) в 3-вектор (Ξ, H, Z) с помощью матрицы $J^{\prime -1}$. Матрица же J' преобразовывает (Ξ, H, Z) в (X, Y, N). Но из (30) видно, что матрица преобразования (32) равна действительно J'.

Таким образом, формулы (29) и (32) определяют при любом фиксированном значении $\iota = \text{const}$, удовлетворяющем условию (31_1), полностью каноническое преобразование (X, Y, N, x, y, ν) в (Ξ, H, Z, ξ, η, ζ), если только удовлетворяется условие (31_2).

Имея в виду геометрическую интерпретацию преобразования (29), заметим, что если ось x лежит в плоскости (ξ, η) — см. рис. 1 (§ 78), — т. е. если $\omega = 0$, то формула (24) § 78 приводится к (23) § 78. Преобразовывая 3-вектор (x, y, z) с помощью вращения (23) § 78 и полагая затем $z \equiv 0$, мы и придем к преобразованию (29). Таким образом, если материальная точка движется в плоскости (x, y), то ось x лежит в плоскости (ξ, η) координатной системы (ξ, η, ζ), а ι равно «наклонности» плоскости (x, y) по отношению к плоскости (ξ, η); координата ν («узел») равна угловому расстоянию оси x от оси ξ (см. рис. 1 § 78).

§ 225. Рассмотрим вместо (11_1) уравнения

$$\xi'' = U_\xi(r), \qquad \eta'' = U_\eta(r), \qquad \zeta'' = U_\zeta(r), \tag{33}$$

где $r = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$.

Согласно изложенному в § 207, любая интегральная кривая этих уравнений лежит в плоскости, проходящей через начало системы координат (ξ, η, ζ), и вырождается в прямую линию, если только постоянные интегрирования (7_1) обращаются в нуль. Рассмотрим некоторую интегральную кривую, отличную от прямой линии, и примем ее плоскость за координатную плоскость (x, y). Тогда координаты x, y будут связаны с координатами ξ, η, ζ по формулам (29). Поскольку ν и ι — параметры, не зависящие от t, дифференцируя (29), придем к выражениям

$$\xi' = x' \cos \nu - y' \sin \nu \cos \iota, \qquad \eta' = x' \sin \nu + y' \cos \nu \cos \iota,$$
$$\zeta' = y' \sin \iota. \tag{34}$$

При этом будем предполагать, что условия (31_1), (31_2) выполняются.

Функция Гамильтона, соответствующая лагранжевым уравнениям (33), равна, очевидно,

$$H = \frac{1}{2}(\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2) - U(r),$$

где $\Xi = \xi'$, $\mathrm{H} = \eta'$, $\mathrm{Z} = \zeta'$ — импульсы, канонически сопряженные с координатами ξ, η, ζ. Учитывая формулы (32), (34), (29), нетрудно установить, что

$$X = x', \quad Y = y', \quad N = (-x'y + y'x) \cos \iota.$$

Однако $(-x'y + y'x) = c$ в силу (11_3). Следовательно, импульсы X, Y, N, канонически сопряженные с координатами x, y, ν, равны x', y', $c \cos \iota$, причем наклонность ι постоянна (см. начало § 234). Кроме того, данное каноническое преобразование оказывается полностью каноническим, поскольку таким является преобразование, рассмотренное в § 224.

§ 226. Переход от уравнений (11_1) к лагранжевым уравнениям, определяемым функцией Лагранжа (12_1), соответствует переходу от координат x, y и импульсов $X = x'$, $Y = y'$ к координатам φ, r и импульсам $\Phi = r^2\varphi'$, $R = r'$, рассмотренному в § 220. В соответствии с изложенным в § 49 такой переход представляет собой полностью каноническое преобразование, поскольку мы приходим к φ, r, Φ, R в результате канонического обобщения преобразования (1). Вместе с тем можно заключить, что переход от Φ, R, φ, r к (28) представляет собой каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$. Это вытекает из определения (см. § 104) канонической системы постоянных интегрирования. Сопоставляя эти факты с результатами, указанными в § 225, увидим, что переход от импульсов ξ', η', ζ' и координат ξ, η, ζ уравнений (33) к

$$p_1 = h, \quad p_2 = c, \quad p_3 = c \cos \iota, \quad q_1 = -t_0, \quad q_2 = \omega, \quad q_3 = \nu$$
$$(\omega = \varphi(t_0), r'(t_0) = 0) \tag{35}$$

представляет собой каноническое преобразование с множителем $\mu = 1$. Величины p_i, q_i не зависят при этом от t в силу § 225. Следовательно, формулы (35) определяют совокупность канонических постоянных интегрирования для уравнений (33).

Этот результат был уже указан в начале § 224. Следует упомянуть, что канонические постоянные интегрирования (35) могли бы быть получены непосредственно на основании изложенного лишь в § 224 без использования формул (34). Правда, такой непосредственный путь, хоть и более прозрачен, но также и более длинный, чем тот, которым мы следовали в этом параграфе.

СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ 227. Консервативная динамическая системы с $n = 2$ степенями свободы не является вообще «интегрируемой». Кроме того, лишь немногие из этих неинтегрируемых систем подвергались детальному исследованию. Наконец, вполне возможно, что эти анализировавшиеся неинтегрируемые системы частного вида не отражают тех характерных трудностей, которые могут возникать в «общем» случае $n = 2$.

Тем не менее «общая» проблема с $n = 2$ степенями свободы несомненно проще для анализа, чем система с $n \geqslant 3$ степенями свободы. Действительно, с одной стороны, можно заменить при любом n в аналитическом случае с помощью изоэнергетической редукции (см. § 181) $2n$-мерное фазовое пространство $(2n-1)$-мерным многообразием. С другой стороны, теория получающегося 3-мерного многообразия, хотя и достаточно сложна в своих деталях, если не исключать никаких топологически допустимых многообразий, но все же в настоящее время не столь безнадежно недоступна, как соответствующая теория при $n > 2$.

В этой связи следует упомянуть о теореме Пуанкаре, не имеющей аналогии в случае большего числа измерений и утверждающей, что если на замкнутом двумерном многообразии существует пучок кривых, лишенных особенностей (в частности, точек равновесия), то это многообразие топологически эквивалентно (ориентированному или неориентированному) тору. (В случаях, рассмотренных в §§ 125, 196—198, 215, 121a, 127a, торы ориентированы, поскольку исходная система расщепляется на ряд систем, каждая из которых имеет одну степень свободы и определяет замкнутое одномерное многообразие (см. (1_t) § 185); произведение таких многообразий представляет собой, очевидно, ориентированный тор.)

В дополнение к топологическим выводам в случае $n = 2$ возникает ряд формальных аналитических упрощений. Ниже мы и ограничимся кругом таких формальных вопросов при $n = 2$ (что касается топологических исследований, то см. пример в § 500).

§ 228. Положим $n = 2$, так что формула (1) § 155 может быть записана в виде

$$L = \frac{1}{2}(g_{11}x'^2 + 2g_{12}x'y' + g_{22}y'^2) + f_1x' + f_2y' + U, \qquad (1)$$

где g_{ik}, f_i, U — шесть заданных функций координат $q_1 = x$, $q_2 = y$. Без потери общности можно предположить, что пять функций $f_i(x, y)$, $g_{ik}(x, y)$ могут быть выражены через две функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ следующим образом:

$$f_1 = -yf, \qquad f_2 = xf, \qquad (2_1)$$

$$g_{11} = g, \quad g_{22} = g, \quad g_{12} = 0 \quad (g > 0). \qquad (2_2)$$

Действительно, можно заменить, во-первых, f_1 и f_2 суммами $f_1 + f_x$, $f_2 + f_y$, где функция $f = f(x, y)$ произвольна (см. § 156). Если подобрать эту функцию соответствующим образом, а именно так, чтобы она удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению в частных производных $\omega = \frac{1}{2}\alpha$, где

$$2\omega = xf_x + yf_y + 2f, \qquad (3)$$

причем $\alpha = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ — заданная функция (x, y), то мы придем к (2_1).

Во-вторых, учитывая (2_1) § 155 и предположение о том, что функции $g_{ik}(x, y)$ принадлежат классу $C^{(2)}$, можно рассматривать

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx\,dy + g_{22}dy^2$$

как квадрат линейного элемента на поверхности в евклидовом трехмерном пространстве, причем x и y играют роль гауссовых параметров. Кроме того, эта поверхность может быть отображена на евклидову плоскость (ξ, η) с помощью локально топологического и конформного преобразований. Это означает, что если использовать «изотермические параметры» $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ в качестве гауссовых параметров на поверхности, то инвариант ds^2 представится как произведение положительной функции $g = g(\xi, \eta)$ и евклидовой формы $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$. Следовательно, возможность нормализации коэффициентов, выражаемой формулами (2_1), вытекает из изложенного в § 95.

Следует упомянуть, что в случае изотермической нормализации (2_2) на поверхности формула для гауссовой кривизны $K = K(x, y)$

приводит к виду

$$K = \frac{1}{2}\frac{g_x^2 + g_y^2 - gg_{xx} - gg_{yy}}{g^3}, \tag{4}$$

где функция $g = g(x, y) > 0$ предполагается, конечно, принадлежащей к классу $C^{(2)}$.

§ 229. Предположим *), что $g(x, y) \equiv 1$. Тогда из (1) и (2_1) — (2_2) имеем

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx')f + U, \tag{5_1}$$

$$X = x' - fy, \qquad Y = y' + fx, \tag{5_2}$$

где через X, Y обозначены импульсы, т. е. частные производные функции (5_1) по x', y'. В соответствии с (5_1) и (3) уравнения Лагранжа $[L]_x = 0$, $[L]_y = 0$ и интеграл энергии (3) § 155 запишутся в виде

$$x'' - 2\omega y' = U_x, \qquad y'' + 2\omega x' = U_y, \tag{6_1}$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U(x, y) = h. \tag{6_2}$$

Функция Гамильтона, соответствующая (5_1), равна (см. § 157)

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (xY - yX)f - V, \tag{7_1}$$

где

$$V = U - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)f^2. \tag{7_2}$$

В соответствии с (5_1) и (6_2) функция (2) § 171 приводится к виду

$$M = (x'^2 + y'^2)^{1/2}(2U + 2h)^{1/2} + (xy' - yx'). \tag{8}$$

§ 230. Введем в (7_1) новые координаты ξ, η и импульсы Ξ, H с помощью полностью канонического преобразования, определенного как каноническое расширение координатного преобразования, обратного к $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Предположим, что это координатное преобразование представляет конформное отображение

---

*) Это предположение не приводит при фиксированном значении постоянной интеграла энергии h к потере общности, поскольку можно отождествить функцию G § 180 с функцией $g = g(x, y)$ и применить преобразование, указанное в § 180, к функции Гамильтона $H = {}^1/_2(x^2 + y^2)g^{-1} + \ldots$, ассоциированной с функцией Лагранжа $L = {}^1/_2(x'^2 + y'^2)g + \ldots$

плоскости (x, y) на плоскость (ξ, η), т. е. $z = x + iy$ — аналитическая функция $z = z(\zeta)$ переменной $\zeta = \xi + i\eta$ и $z_\zeta \neq 0$ в рассматриваемой области (см. § 52). Тогда (7_1) § 229 преобразовывается в (21) § 52. Следовательно, если применить в задаче с функцией $H = H(\Xi, \mathrm{H}, \xi, \eta)$ замену переменной (14), полагая $G = |z_\zeta(\xi + i\eta)|^2$, то функция Гамильтона (15) § 180 при фиксированном значении постоянной энергии запишется в виде

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\Xi^2 + \mathrm{H}^2) - \frac{1}{2}(|z^2|_\xi \mathrm{H} - |z^2|_\eta \Xi) f - \bar{V}(\xi, \eta, h), \tag{9}$$

где в соответствии с (7_2) и § 52

$$\bar{V} = \left(U - \frac{1}{2}|z|^2 f^2 + h\right) |z_\zeta|^2, \tag{10_1}$$

$$4|z_\zeta^2| = |z^2|_{\xi\xi} + |z^2|_{\eta\eta}. \tag{10_2}$$

В соответствии с § 180 интеграл энергии и новая независимая переменная $\bar{t}$ представляются формулами

$$\bar{H} \equiv \bar{H}(\Xi, \mathrm{H}, \xi, \eta, h) = \bar{h}, \quad \bar{h} = 0, \tag{11_1}$$

$$\bar{t} \equiv \bar{t}(t) = \int |z_\zeta(\zeta(t))|^{-2} dt. \tag{11_2}$$

Если положить

$$\bar{U}(\xi, \eta, h) = |z_\zeta|^2 (U + h), \tag{12_1}$$

$$\bar{\omega}(\xi, \eta) = |z_\zeta|^2 \omega, \tag{12_2}$$

то лагранжевы уравнения и их интеграл энергии запишутся в виде

$$\ddot{\xi} - 2\bar{\omega}\dot{\eta} = \bar{U}_\xi, \quad \ddot{\eta} + 2\bar{\omega}\dot{\xi} = \bar{U}_\eta, \tag{13_1}$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \bar{U}(\xi, \eta, h) = 0, \tag{13_2}$$

где точкой обозначается дифференцирование по $\bar{t}$.

Действительно, согласно правилу преобразования, указанному в § 157, функция Лагранжа $\bar{L} = \bar{L}(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta, h)$, соответствующая функции (9), имеет вид

$$\bar{L} = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}(|z^2|_\xi \dot{\eta} - |z^2|_\eta \dot{\xi}) f + \bar{U}, \tag{14_1}$$

где

$$\bar{U} = \bar{V} + \frac{1}{8}(|z^2|_\xi^2 + |z^2|_\eta) f^2. \tag{14_2}$$

Так как функция $x + iy = z \equiv z(\zeta) = z(\xi + i\eta)$ удовлетворяет уравнениям Коши — Римана $x_\xi = y_\eta$, $x_\eta = -y_\xi$, то сумма квадратов в (14_2) сводится к $4|z|^2|z_\zeta|^2$. Поэтому из (10_1) видно, что функция (14_2) может быть записана в виде (12_1). Кроме того, с помощью (10_2) и определения лагранжевой производной $[L]_q$ (см. § 9) легко обнаружить, что лагранжевы уравнения $[L]_\xi = 0$, $[L]_\eta = 0$, соответствующие функции (14_1), сводятся к (13_1), если

$$\overline{\omega} = |z_\zeta|^2 f + \frac{1}{4}\{|z^2|_\xi f_\xi + |z^2|_\eta f_\eta\}$$

или (в силу уравнений Коши — Римана)

$$2\overline{\omega} = 2|z_\zeta|^2 f + |z_\zeta|^2(xf_x + yf_y).$$

Следовательно, (12_2) вытекает из (3). Наконец, поскольку $\bar{h} = 0$ согласно (11_1), то интеграл энергии для уравнений (13_1) имеет вид (13_2).

§ 231. Как видно из (6_1), произведение функций $\mp 2\omega(x, y)$ на компоненты скорости x', y' следует интерпретировать как кориолисовы силы. Согласно (3) система свободна от таких сил тогда и только тогда, когда $f(x, y)$ — однородная функция степени — 2. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда выражение $(xy' - yx')f(x, y)$ совпадает с производной G' некоторой функции $G = G(x, y)$, подобранной соответствующим образом. В соответствии с § 156 для этого необходимо и достаточно, чтобы в (5_1) отсутствовали линейные члены относительно x', y'. Другими словами, кориолисовы силы отсутствуют тогда и только тогда, когда система обратима (§§ 155, 156 и §§ 209, 210).

В этом случае (7_1)—(7_2) и (5_2) записывается в более простом виде:

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - U(x, y), \tag{15_1}$$

$$X = x', \quad Y = y', \tag{15_2}$$

а (5_1), (6_1), (6_2) перепишутся в виде

$$L = (x'^2 + y'^2) + U, \tag{16_1}$$

$$x'' = U_x, \quad y'' = U_y, \tag{16_2}$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U = h, \tag{16_3}$$

причем (6_2) остается без изменений (см. § 155). Аналогичным образом на основании (8) и формул в § 172 получим, что

$$M = \{2(x'^2 + y'^2) \quad (U(x,\ y) + h)\}^{1/2}, \tag{17_1}$$

$$W = \int M\,dt, \tag{17_2}$$

$$W = \int (x'^2 + y'^2)\,dt. \tag{17_3}$$

Наконец, из изложенного в § 179 следует, что при фиксированном значении постоянной энергии h проблема интегрирования уравнений Лагранжа (16_2) эквивалентна проблеме геодезических линий на поверхности S_h, на которой квадрат элемента дуги $d\tilde{s}^2$ выражается формулой

$$d\tilde{s}^2 = g^{(h)}(x,\ y)\,(dx^2 + dy^2), \tag{18}$$

где

$$g^{(h)} = 2(U(x, y) + h)$$

и x, y играют роль гауссовых параметров. Если $K_h = K_h(x,\ y)$ — гауссова кривизна на S_h, то в силу (4)

$$K_h = \frac{1}{4}\,\frac{(U_x^2 + U_y^2) - (U + h)\,(U_{xx} + U_{yy})}{\{U + h\}^3}. \tag{19}$$

§ 231а. Знаменатель в формуле (19) не должен обращаться в нуль. Действительно, в соответствии с § 179 подразумевается, что переход от (16_2) — (16_3) к (18) справедлив лишь при условии, что $x'^2 + y'^2 \neq 0$ или (в силу (16_3)), что $U(x,\ y) + h \neq 0$. Но тогда формула (18) показывает, что особым точкам поверхности S_h соответствуют именно те точки плоскости (x, y), которые лежат на множестве Z_h нулевой скорости. Действительно, согласно изложенному в § 167 множество Z_h состоит из точек (x, y), где $U(x, y) + h = 0$. Следовательно, если исключить тривиальный случай $U(x, y) = \text{const}$, то Z_h представляет собой кривую на плоскости (x, y).

Разумеется, эта кривая не обязательно представляет собой связное множество, но может иметь довольно сложную структуру и содержать изолированные точки. Множество Z_h может быть также пустым (см. § 168).

§ 232. Возвращаясь к общему случаю (см. § 229), можно сделать вывод, что если значение постоянной энергии h фиксировано, то для понижения порядка системы (6_1) на единицу можно использовать интеграл (6_2). Для этого следует, например, выразить y' с помощью (6_2) как функцию x, y, x', h и переписать (6_1) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно x, y, x', в которых h играет роль постоянного параметра. Правда, можно выполнить подобную изоэнергетическую редукцию системы и иначе с целью прийти к уравнениям, имеющим более симметричную форму. Заметим прежде всего, что при заданном значении h интеграл энергии (6_2) определяет «трехмерное множество» в четырехмерном пространстве.

Пусть M_h — часть этого множества, где $x'^2+y'^2\neq 0$, так что M_h характеризуется условиями

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-U(x,y)-h=0,\\ &U(x,y)+h>0\quad(x'^2+y'^2\neq 0).\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

M_h есть также «трехмерное множество». Оно состоит из тех состояний (x', y', x, y), которые удовлетворяют интегралу энергии (6_2) при фиксированном h, но не соответствуют точкам множества Z_h нулевой скорости при этом значении. Другими словами, M_h состоит из тех точек пространства (x', y', x, y), которые, если их рассматривать как начальные для уравнения (6_1), определяют h как постоянную интеграла энергии и отличную от нуля скорость $(x'^2+y'^2)^{1/2}$. Ограничение, налагаемое последним условием, исключает на плоскости (x, y) лишь точки равновесия и точки возврата (см. § 169). Интегральная кривая, лежащая в M_h, имеет в каждой точке плоскости (x, y) касательную, определяемую единственным образом. Если w — угол между этой касательной и положительным направлением оси x, то $w=\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$, причем x' и y' не обращаются одновременно на нуль (см. (20)). Поэтому можно выписать формулы

$$x'=\mathrm{v}\cos w,\qquad y'=\mathrm{v}\sin w,\tag{21}$$

где $\mathrm{v}>0$ и $w=\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$. Если положить, учитывая (20),

$$\mathrm{v}=\{2(U(x,y)+h)\}^{1/2}>0,\tag{22}$$

то формулы (21) осуществляют параметризацию множества M_h с помощью трех независимых переменных. Из (6_2) при этом видно, что величина v равна скорости $(x'^2+y'^2)^{1/2}$, выраженной при фиксированном h через x и y.

Упомянутая выше система трех дифференциальных уравнений может быть получена далее после того, как мы определим три функции x, y, w трех независимых переменных x, y, w и произвольно фиксированного параметра h по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{v}\cos w, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{v}\sin w,\\ &\mathbf{w} = -2\omega + \frac{U_y\cos w - U_x\sin w}{\mathbf{v}}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где $\mathbf{v}$ определяется согласно (22), а U_x, U_y зависят только от x, y (см. (3)). В силу (21) w' равно отношению $y''x' - x''y'$ и $x'^2 + y'^2$. Учитывая же выражения для x'', y'' и $x'^2 + y'^2$, получаемые из (6_1) и (6_2), придем к выводу, что w' равно функции $\mathbf{w}$, определенной согласно (23). Аналогичным образом получим на основании (21), (22), (23), что $x' = \mathbf{x}$, $y' = \mathbf{y}$. Таким образом, искомые уравнения имеют вид

$$x' = \mathbf{x}(x, y, w, h), \quad y' = \mathbf{y}(x, y, w, h), \quad w' = \mathbf{w}(x, y, w, h). \tag{24}$$

Решения системы (6_1) четвертого порядка, соответствующие постоянной энергии h, совпадают в силу (21) с решениями системы (24) третьего порядка, если исключить состояния $x'^2(t) + y'^2(t) = 0$ и определить функции $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{w}$ по формулам (23), (22).

Дифференцируя функции (23) по x, y, w соответственно и учитывая (22), нетрудно установить, что

$$\mathbf{x}_x(x, y, w, h) + \mathbf{y}_y(x, y, w, h) + \mathbf{w}_w(x, y, w, h) \equiv 0. \tag{25}$$

§ 232а. Если $k = k(t)$ обозначает кривизну и $s = s(t)$ — длину дуги вдоль положительно ориентированной *) интегральной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ с постоянной энергии h, то система трех уравнений (25), справедливых при $x'^2 + y'^2 \neq 0$, эквивалентна двум уравнениям

$$k = \frac{-2\omega\mathbf{v} + U_y\cos w - U_x\sin w}{\mathbf{v}^2}, \quad s' = \mathbf{v}, \tag{26}$$

первое из которых в силу определения кривизны есть дифференциальное уравнение второго порядка.

---

*) Кривая считается «положительно ориентированной», если длина дуги $s = s(t)$ возрастает вместе с t. Кривизна определяется как производная $\frac{dw}{ds}$, причем w — угол наклона касательной к положительно ориентированной оси x. Заметим, что, в отличие от гауссовой кривизны поверхности, кривизна кривой определяется инвариантным образом только по абсолютному значению. В соответствии с этим выражение для k

$$k = (y''x' - x''y') : (x'^2 + y'^2)^{3/2}$$

содержит квадратный корень ($\geqq 0$), а выражение $k = \frac{dw}{ds}$ изменяет знак, если изменить направление отсчета длины дуги s.

Действительно, поскольку $\mathrm{v} = (x'^2 + y'^2)^{1/2} > 0$ согласно (22), а $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$, то $s' = \mathrm{v}$. Кроме того, поскольку $k = \dfrac{dw}{ds}$ или $k' = w' / s' \equiv w' / \mathrm{v}$, то (26) следует из (23), (24).

§ 233. Рассмотрим, например, периодическое решение. Пусть h — постоянная энергии и τ — период этого решения, соответствующего замкнутой интегральной кривой C на плоскости (x, y). Предположим для простоты, что C не имеет точек самопересечения («петель»), т. е. что C — жорданова кривая. Обозначим через D область, ограниченную этой кривой. Предположим далее, что функция (3), входящая в лагранжевы уравнения (6_1), есть $\omega(x, y) = 1$. Наконец, предположим также, что ни кривая C, ни область D не содержат точек множества нулевой скорости Z_h, т. е. что неравенство (22) удовлетворяется как на C, так и внутри C. Таким образом, лапласиан $\Delta(\lg v) \equiv (\lg v)_{xx} + (\lg v)_{yy}$ является непрерывной функцией x, y в области $C + D$.

Покажем, что если эти предположения выполнены, то период τ для данного решения может быть выражен с помощью двойного интеграла

$$\mathrm{I} = \iint\limits_D \Delta^2 \lg \mathrm{v}(x, y, h)\, dx\, dy. \tag{27}$$

Действительно, рассмотрим сначала случай, когда C окружает начало координат на плоскости (x, y) и эта кривая C ориентирована положительно, т. е. угловая координата $w = w(t)$, определяемая согласно (21), возрастает (если ее отсчитывать против часовой стрелки) на 2π на t-интервале длиной $\tau > 0$. Таким образом,

$$2\pi = \int_0^\tau w'\, dt = -2\tau \cdot 1 + \int_0^\tau \{U_y \cos w - U_x \sin w\} \mathrm{v}^{-1}\, dt, \tag{28}$$

в силу (24), (23), где, по предположению, $\omega \equiv 1$ *). Следовательно, из $\mathrm{v} = \dfrac{ds}{dt}$ имеем

$$-2\pi - 2\tau = \int\limits_C U_n \mathrm{v}^{-2}\, ds, \tag{29}$$

---

*) В обратимом случае, когда $\omega = 0$. имеем $-2\tau\omega = 0$ для любого τ. Тогда τ не входит в (29) и вместо связи между периодом τ и интегралом (27) получаем простейший случай теоремы Гаусса — Бонне (см. конец § 231).

поскольку согласно (21) производная по внешней нормали к $U = U(x, y)$ вдоль положительно ориентированной кривой C равна

$$-\{U_y \cos w - U_x \sin w\}.$$

Однако $\nu_n = U_n \nu^{-1}$ в силу (22). Поэтому подынтегральное выражение в (29) равно

$$\nu\nu_n\nu^{-2} \equiv (\lg \nu)_n,$$

так что криволинейный интеграл (29) равен по теореме Грина двойному интегралу (27). Следовательно,

$$\tau = -\frac{1}{2}\mathrm{I} - \pi. \qquad (30)$$

Это выражение для периода и является искомым. Из доказательства ясно, как следует изменить (29) в случаях, когда замкнутая кривая C ориентирована не положительно, а отрицательно или же не окружает начало координат.

Выше мы предполагали, что условие (22) удовлетворяется не только на C, но и внутри C, т. е. в области D. Если D содержит конечное число точек $(x, y) = (a, b)$, в которых функция (22) имеет нуль порядка $r(= \sqrt{(x-a)^2(y-b)^2})$ при фиксированном значении h, то при применении теоремы Грина следует выделить в интеграле (27) вокруг этих точек круговые области радиуса ε и рассмотреть предел при $\varepsilon \to 0$. Как легко вытекает из теории логарифмического потенциала, это приведет к видоизменению соотношения между τ и I, а именно к появлению дополнительных кратностей π. Очевидно, тот же результат справедлив и тогда, когда функция (22) имеет в конечном числе точек $(x, y) = (a, b)$ нуль порядка r^m, $m > 0$, а также тогда, когда функция $U(x, y)$ имеет в точках $(x, y) = (a, b)$ полюс некоторого порядка m. Последний случай встречается в ограниченной задаче трех тел.

§ 233а. Из приведенного выше доказательства видно, что если C есть не простая замкнутая кривая, но состоит из конечного числа «петель», то формула (30) должна быть изменена с учетом индексового числа, определяемого ветвлением C.

Возникающие при этом проблемы существования связаны с соотношениями Биркгофа для критических точек функций двух переменных. Эти соотношения были выведены Биркгофом, а затем распространены Морсом на многомерный случай именно в связи с упомянутыми проблемами.

§ 234. Пусть $(x(t),\ y(t))$ есть решение (6_1) с энергией h:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{31_1}$$

$$x'^2 + y'^2 = 2(U(x,y) + h). \tag{31_2}$$

Предположим для простоты, что «угловая скорость» $\omega = \omega(x, y)$ определяемая согласно (3), постоянна, так что $f = \omega$, и согласно $(2_1)-(2_2)$

$$x'' - 2\omega y' = U_x, \qquad y'' + 2\omega x' = U_y, \tag{32_1}$$

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx')\omega + U. \tag{32_2}$$

Уравнения Якоби, определяющие смещение $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t)$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}(t)$ для (31_1), имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{x}'' - 2\omega\mathrm{y}' = U_{xx}\mathrm{x} + U_{xy}\mathrm{y}, \\ \mathrm{y}'' + 2\omega\mathrm{x}' = U_{xy}\mathrm{x} + U_{yy}\mathrm{y} \\ (U_{xx} = U_{xx}(x(t), y(t), \ldots). \end{array}\right\} \tag{33}$$

Действительно, из (32_2) видно, что функция Лагранжа L, определяемая формулой (21_2) § 101, есть

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}(\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2) + (\mathrm{x}\mathrm{y}' - \mathrm{y}\mathrm{x}')\omega + \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, t), \tag{34_1}$$

где

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}(U_{xx}\mathrm{x}^2 + 2U_{xy}\mathrm{x}\mathrm{y} + U_{yy}\mathrm{y}^2) \tag{34_2}$$

и $U_{xx}, \ldots$ — известные функции $U_{xx}(t) = U_{xx}(x(t),\ y(t)), \ldots$ от t вдоль заданного решения (31_1) уравнений (32_2), а x, y — компоненты вектора $\varkappa$ в (21_2) § 101. На основании (34_1) и (34_2) мы и получим уравнения Якоби $[\mathrm{L}]_\mathrm{x} = 0$, $[\mathrm{L}]_\mathrm{y} = 0$, приведенные в § 101 в виде (33).

Заметим, что уравнения Якоби (33) имеют линейный интеграл

$$x'(t)\mathrm{x}' + y'(t)\mathrm{y}' - U_x(t)\mathrm{x} - U_y(t)\mathrm{y} = \mathrm{h}, \tag{35_1}$$

где

$$\mathrm{h} = \mathrm{const}. \tag{35_2}$$

Действительно, (35_1) совпадает в силу $(21_1)-(21_2)$ § 101 с (22) § 101.

В соответствии с (35_1) и с определением, данным в § 102, изоэнергетическое смещение решения (31_1) представится теми решениями $\mathrm{x}(t)$, $\mathrm{y}(t)$ уравнений (33), для которых имеет место тождество (по t)

$$x'\mathrm{x}' + y'\mathrm{y}' = U_x\mathrm{x} + U_y\mathrm{y}, \tag{36}$$

т. е. $\mathrm{h} = 0$.

Согласно изложенному в § 102 частное решение уравнений (33), соответствующее изоэнергетическим вариациям, имеет вид

$$\mathrm{x} = x'(t), \qquad \mathrm{y} = y'(t). \tag{37}$$

§ 235. Предположим, что в рассматриваемом t-интервале решение (31_1) уравнений (32_1) не достигает множества Z_h нулевой скорости, т. е. что обе части равенства (31_2) не обращаются на этом интервале в нуль. Это предположение эквивалентно условию, указанному в §§ 232—233 и исключает случай, когда решение (31_1) или вырождается в одну точку на плоскости (x, y), или имеет при некоторых t точку возврата. Учитывая это, можно определить для любого заданного решения $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$ уравнений (33) функцию $\mathrm{n} = \mathrm{n}(t)$, полагая

$$\mathrm{n} = \frac{d}{v}, \tag{38_1}$$

где

$$d = x'\mathrm{y} - y'\mathrm{x}, \tag{38_2}$$

$$v = (x'^2 + y'^2)^{1/2} > 0. \tag{38_3}$$

В соответствии с этими формулами функция $\mathrm{n} = \mathrm{n}(t)$ равна при каждом t проекции вектора смещения $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$ на нормаль к интегральной кривой (31_1), причем направление этой нормали определяется знаком квадратного корня (38_3). Функция $\mathrm{n}(t)$ называется поэтому нормальным смещением решения (31_1), если только уравнения (33) обладают решением $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$, с помощью которого $\mathrm{n}(t)$ представима в виде (38_1).

Если, в частности, $\mathrm{n}(t)$ соответствует смещению $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$, для которого $\mathrm{h} = 0$, то $\mathrm{n}(t)$ называется изоэнергетическим нормальным смещением для решения (31_1).

§ 236. Ниже будет показано, что для заданной интегральной кривой (31_1), удовлетворяющей условию (38_3), можно вычислить лишь единственную непрерывную скалярную функцию $\varkappa = \varkappa(t)$ такую, что скалярная функция $\mathrm{n} = \mathrm{n}(t)$ представляет собой нормальное смещение тогда и только тогда, когда она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\mathrm{n}'' + \varkappa(t)\mathrm{n} = 0 \tag{39}$$

(см. ниже (45) и (44)).

Это выглядит парадоксальным, так как общее решение уравнения (39) содержит при заданном $\varkappa(t)$ две произвольных постоянных интегрирования. Между тем изоэнергетическое смещение $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$, определяющее $\mathrm{n}(t)$, зависит от трех таких постоянных (общее решение уравнений (33) зависит от четырех постоянных интегрирования, одна из которых фиксируется благодаря изоэнергетическому условию (35_2)).

Объясняется такой факт тем, что в соответствии с (38_1) — (38_2) тривиальное решение $\mathrm{n} \equiv 0$ уравнения (39) соответствует не только тривиальному решению $\mathrm{x}(t) \equiv 0$, $\mathrm{y}(t) \equiv 0$ уравнений (33), но также и изоэнергетическому смещению, получающемуся при умножении функций (37) на произвольную постоянную c. Эта постоянная и является недостающей третьей постоянной интегрирования. Действительно, функции (37) не могут обращаться тождественно в нуль и представлять тривиальное решение $\mathrm{x} \equiv 0$, $\mathrm{y} \equiv 0$, так как иначе решение (31_1) вырождалось бы в точку равновесия, а это исключено в силу условия (38_3).

При построении функции $\varkappa(t)$ для уравнения (39) при помощи дифференцирования и соответствующих алгебраических преобразований используется соотношение

$$\left(\frac{1}{2}v^2\right)' d' - [x''\mathrm{y}' - y''\mathrm{x}']\,v^2 =$$

$$= \{x'\mathrm{x}' + y'\mathrm{y}' - x''\mathrm{x} - y''\mathrm{y}\}\,(x'y'' - y'x'') + (x''^2 + y''^2)\,d, \qquad (40)$$

представляющее собой алгебраическое тождество, поскольку в силу (38_2) — (38_3)

$$d' = x''\mathrm{y} - y''\mathrm{x} + x'\mathrm{y}' - y'\mathrm{x}', \qquad (41_1)$$

$$\left(\frac{1}{2}v^2\right)' = x'x'' + y'y''. \qquad (41_2)$$

§ **237.** Пусть $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$ — изоэнергетическое смещение. Тогда, дифференцируя (41_1) по t и выражая затем x'', y'', x''', y''' в d'' с помощью (33) и соотношений, получающихся при дифференцировании (32_1), легко найдем, что

$$d'' = -2\omega\{x'\mathrm{x}' + y'\mathrm{y}' - x''\mathrm{x} - y''\mathrm{y}\} +$$

$$+ (U_{xx} + U_{yy})\,d + 2[x''\mathrm{y}' - y''\mathrm{x}'], \qquad (42)$$

поскольку $\omega = \mathrm{const}$, $d = x'\mathrm{y} - y'\mathrm{x}$. Подставляя в (40) выражение $[x''\mathrm{y}' - y''\mathrm{x}']$, получающееся из (42), и замечая, что выражение в фигурных скобках в (40) и (42) равно в силу (36) и (32_1)

$$2\omega(x'\mathrm{y} - y'\mathrm{x}) \equiv 2\omega d,$$

придем к уравнению

$$v^4\left(\frac{d'}{v^2}\right)' + ud = 0, \qquad (43)$$

где

$$u = 2(x''^2 + y''^2) - 4(x''y' - y''x')\,\omega + (4\omega^2 - U_{xx} - U_{yy})\,v^2.$$

Выражая x'', y'' с помощью (32_1), получим u в виде

$$u = 2(U_x^2 + U_y^2) + 4(U_x y' - U_y x')\omega - (4\omega^2 - U_{xx} - U_{yy})v^2, \tag{44}$$

где в силу (38_3) и (31_1)

$$v^2 = 2(U + h).$$

Наконец, полагая в (43) $d = v\mathrm{n}$ (см. (38_1)), придем к выводу, что уравнение (43) относительно d принимает форму (39); явное выражение для $\varkappa = \varkappa(t)$ следующее:

$$\varkappa = \frac{v''v - 2v'^2 + u}{v^2}. \tag{45}$$

§ 237а. Остается доказать обратное, а именно то, что любому решению $\mathrm{n}(t)$ уравнения (39) соответствует изоэнергетическое смещение $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$, удовлетворяющее соотношениям (38_1)—(38_2), или что каждому решению $d(t)$ уравнения (43) соответствует пара функций $\mathrm{x}(t)$, $\mathrm{y}(t)$, удовлетворяющих уравнениям (33) и соотношениям (36), (38_2).

Для этого обозначения через d^0, x'^0, $U_x{}^0$, ... значения, которые принимают функции $d(t)$, $x'(t)$, $U_x(x(t), y(t))$ при некотором фиксированном $t = t^0$. Так как в силу (38_3) величины x'^0, y'^0 одновременно в нуль не обращаются, то пусть, например, $x'^0 \neq 0$. Определим далее четыре величины x^0, y^0, x'^0, y'^0 с помощью трех линейных соотношений

$$x'^0\mathrm{y}^0 - y'^0\mathrm{x}^0 = d^0, \tag{46$_1$}$$

$$x''^0\mathrm{y}^0 - y''^0\mathrm{x}^0 + x'^0\mathrm{y}'^0 - y'\mathrm{x}'^0 = d'^0, \tag{46$_2$}$$

$$x'^0\mathrm{x}'^0 + y'^0\mathrm{y}'^0 = \overset{0}{U_x}\mathrm{x}^0 + \overset{0}{U_y}\mathrm{y}^0. \tag{46$_3$}$$

Если фиксировать произвольно x^0, то эти соотношения представляют собой линейные алгебраические уравнения относительно трех величин y^0, x'^0, y'^0 с определителем $-(x'^0x'^0 + y'^0y'^0) \neq 0$.

Пусть $\mathrm{x} = \mathrm{x}(t)$, $\mathrm{y} = \mathrm{y}(t)$ — решение уравнений (33), соответствующее начальным значениям x^0, y^0, x'^0, y'^0, заданным при $t = t^0$. Тогда соотношение (36) удовлетворяется, поскольку в силу (46_3) интеграл уравнений (33) записывается именно в виде (35_1) и постоянная (35_2) обращается в нуль. Следовательно, полагая

$$\bar{d}(t) = x'\mathrm{y} - y'\mathrm{x}, \tag{46$_4$}$$

можно на основании изложенного в § 237 заключить, что функция $d = \bar{d}(t)$ является решением уравнения (43). Кроме того,

$\bar{d}^0 = d^0$, $\bar{d}'^0 = d'^0$ в силу $(46_1)-(46_2)$. Так как дифференциальное уравнение (43) обладает при заданных начальных значениях d^0, d'^0 только одним решением, то $d(t) \equiv \bar{d}(t)$. Таким образом, решение $d(t)$ уравнения (43) и представлено в желаемом виде (38_2).

§ 238. Оставляя в стороне исследования смещения решения $x(t)$, $y(t)$ уравнений (32_1), допустим, что скорость $v(t) = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ вдоль этого решения обращается в нуль при некотором t, например при $t = 0$ (но не тождественно при всех t). Тогда интегральная кривая имеет при $t = 0$ точку возврата. Если обозначить через x^0, y^0 начальные значения $x(0)$, $y(0)$ функций $x(t)$, $y(t)$, то из изложенного в § 168 видно, что точка (x^0, y^0) плоскости (x, y) лежит на кривой

$$U(x, y) = -h \tag{46_5}$$

нулевой скорости. Кроме того, из результатов в § 166 следует, что эта кривая имеет в точке (x^0, y^0) определенную нормаль, а в § 170 показывается, что любая интегральная кривая «отражается» от кривой нулевой скорости в трансверсальном направлении. В данном случае трансверсальное направление к кривой (46_5) совпадает с направлением нормали, так как коэффициенты g_{ik} в выражении (32_2) для функции L соответствуют евклидову пространству. Поэтому интегральная кривая (31_1) при $t \to \pm 0$ касается нормали к кривой (46_5) в точке (x^0, y^0) и располагается при малых $t \gtreqless 0$ по одну сторону от этой кривой.

Пусть положительное направление нормали к кривой (46_5) в точке (x^0, y^0) совпадает с касательной к интегральной кривой в этой точке (т. е. в точке возврата), проведенной в ту же сторону от кривой (46_5), где располагается интегральная кривая. Такая касательная в точке возврата будет называться также положительной.

Предположим, что $\omega(x, y) \equiv 1$, так что уравнения (32_1) запишутся в виде

$$x'' = 2y' + U_x, \qquad y'' = -2x' + U_y. \tag{47}$$

Покажем, что если наблюдатель движется вдоль интегральной кривой (31_1) в направлении, соответствующем возрастанию t, то при прохождении точки возврата положительная касательная в этой точке будет оставаться для него всегда с левой стороны. Отсюда, в частности, вытекает, что положительная касательная является внутренней касательной в точке возврата.

Так как уравнения (47) остаются без изменений как при постоянном вращении, так и при переносе системы координат (x, y), то можно предположить, что точка (x^0, y^0) совпадает с началом координат $(0, 0)$ и что положительная нормаль к кривой (46_5) в точке $(0, 0)$ совпадает с положительной полуосью x. Тогда $U_y^0 = 0$, и поскольку одновременное обращение в нуль производных силовой функции U_x^0, U_y^0 возможно лишь в точке равновесия (см. § 165), то $U_x^0 \neq 0$. Так как в точке возврата $x' = y' = 0$, то из (47) видно, что

$$x''^0 = U_x^0 \neq 0, \quad y''^0 = 0.$$

Однако положительное направление касательной в точке возврата совпадает с положительным направлением оси x, так что $x(t) > 0\ (=x^0)$ при малых $t \gtrless 0$ и согласно формуле Тейлора $x''^0 > 0$. Таким образом,

$$x^0 = 0, \qquad y^0 = 0, \tag{48_1}$$

$$x'^0 = 0, \qquad y'^0 = 0, \tag{48_2}$$

$$x''^0 = U_x^0 > 0, \quad y''^0 = U_y^0 = 0. \tag{48_3}$$

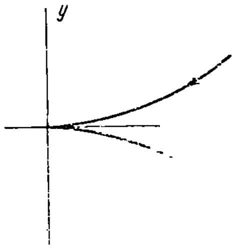

Рис. 2.

Дифференцируя второе из уравнений (47) по t при $t = 0$, получим на основании (48_1) — (48_3), что $y'''^0 = -2x''^0$. Следовательно, по формуле Тейлора имеем в силу (48_1) — (48_3) при $t \to \pm 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \alpha t^2 + o(t^2), \\ y(t) &= -\frac{2}{3}\alpha t^3 + o(|t|^3), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где $\alpha = \text{const} \gtreqless 0$. Из (49) непосредственно вытекает указанное выше правило направления движения по кривой, а также видно, что обе ветви интегральной кривой вблизи точки возврата имеют в первом приближении характер полукубической параболы (рис. 2).

§ 239. Если смещение $(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t))$ для решения (31_1) известно, то в соответствии с § 85 можно приближенно найти решения уравнений (32_1), близкие по начальным данным к (31_1). Таково практическое значение результатов, полученных в § 236. Действительно, в этом параграфе определение семейства решений уравнений (33), зависящих от трех постоянных, сводится, с одной стороны, к решению уравнения (39). С другой стороны, нахождение общего решения системы (33) четвертого порядка, т. е. введение четвертой постоянной интегрирования требует уже лишь одной квадратуры (четвертой является постоянная (35_2), соответствующая отклонению от изоэнергетической вариации).

Однако результаты, указанные в § 236, нельзя применить в окрестности такого t, например $t = 0$, при котором скорость $v(t) = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ вдоль решения (31_1) обращается в нуль. Если же $v(t) \equiv 0$, то трудности не возникают (хотя формулы (38_1), (39), (43), (45) теряют смысл).

Действительно, если (31_1) есть равновесное решение, то определение смещения $x(t)$, $y(t)$ становится согласно изложенному в § 89 тривиальной задачей.

Поэтому остается рассмотреть случай, когда $v(t)$ равно нулю при $t = 0$, не обращаясь тождественно в нуль при любом t. Тогда дифференциальное уравнение (43), а следовательно, и коэффициент (45) уравнения (39) имеют при $t = 0$ особенность (что согласуется с геометрическим смыслом формул (38_1) — (38_3), так как кривая (31_1) имеет тогда точку возврата при $t = 0$). Следовательно, необходимы непосредственные исследования приближенного поведения интегральных кривых, близких к исходному решению (31_1) с точкой возврата при $t = 0$.

§ 240. Переходя к таким исследованиям, предположим, что заданная интегральная кривая (31_1) обладает свойствами, рассмотренными в § 238. Для того чтобы получить интегральные кривые для уравнений (47), близкие по начальным данным к (31_1), заменим начальные данные (48_1) — (48_2) следующими:

$$x^0 = 0, \qquad y^0 = 0, \tag{50_1}$$

$$x'^0 = 0, \qquad y'^0 \gtreqless 0, \tag{50_2}$$

где y'^0 — произвольная малая постоянная (значение $y'^0 = 0$ соответствует решению, имеющему точку возврата). Нетрудно получить с помощью таких же вычислений, какие были использованы в § 238, что в случае начальных данных (50_1) — (50_2) имеем при $t \to \pm 0$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (y'^0 + \alpha)t^2 + y'^0\beta t^3 + o(|t^3|), \\ y(t) &= y'^0 t + \left(y'^0\gamma - \frac{2}{3}\alpha\right)t^3 + o(|t|^3), \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

где постоянные α, β, γ зависят только от чисел U_x^0, U_{xy}^0, U_{yy}^0 и не зависят, следовательно, от параметра y'^0. В частности, $\alpha(= {}^1\!/_2 U_x^0)$ имеет то же самое значение, что и в случае $y'^0 = 0$ (поэтому $\alpha > 0$ в силу (49)).

Предположим, в частности, что y'^0 — малое положительное число. Тогда, поскольку $\alpha > 0$, из (51) видно, что $y(t)$ обращается в нуль не только при $t = 0$, но также при некоторых малых положительных и малых отрицательных значениях t, равных при малых y'^0 приближенно корням квадратного уравнения

$$y'^0 + \left(y'^0\gamma - \frac{2}{3}\alpha\right)t^2 = 0.$$

Поэтому эти значения близки при $y'^0 \to +0$ к

$$\pm\left(-\frac{y'^0}{y'^0\gamma - \frac{2}{3}\alpha}\right)^{1/2} \sim \pm\left(\frac{\frac{3}{2}y'^0}{\alpha}\right)^{1/2} \quad (\alpha = \text{const} > 0) \qquad (52)$$

Поскольку $y(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ и также при двух значениях t, близких к $t = 0$ и определяемых приближенно согласно (52), легко сделать вывод, что при малых положительных значениях постоянной интегрирования y'^0 интегральная кривая (51) имеет небольшую петлю (вырождающуюся в точку возврата при $y'^0 \to +0$). Направление движения по этой петле подчиняется в силу соображений, основанных на непрерывности, правилу, которое указывалось в § 238. Оно согласуется с формулами (51).

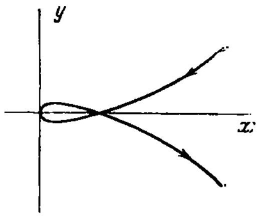

Рис. 3.

Эти результаты становятся более понятными, если заметить, что кривая нулевой скорости, соответствующая постоянной энергии h для решения (51), не остается одной и той же при $y'^0 = 0$ и при малых $y'^0 > 0$. Действительно, подстановка функций (51) в (31_2) показывает, что $h = h(y'^0)$ — непрерывная функция, достигающая при $y'^0 = 0$ экстремального значения. Это справедливо также и при отрицательных значениях y'^0 (малых по абсолютной величине). Для таких y'^0 решение (51) уравнений (47) не имеет ни петли, ни точки возврата. Так как кривая нулевой скорости изменяется вместе с y'^0, то становится понятным, почему решение (51) имеет точку возврата только при $y'^0 = 0$.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

ОРБИТЫ

§ 241. Рассмотрим случай, когда $U(r)=r^{-1}$ (см. § 218). Тогда

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)+r^{-1}, \\ H &= \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-r^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ и импульсы $L_{x'}$, $L_{y'}$ сводятся к скоростям x', y'. Согласно (11_1)—(11_3) § 211 уравнения движения и интегралы энергии и площадей имеют вид

$$x''=-xr^{-3}, \qquad y''=-yr^{-3}, \tag{2_1}$$

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-r^{-1}=h, \tag{2_2}$$

$$xy'-yx'=c. \tag{2_3}$$

Исследование кривой, представляющей произвольную орбиту уравнений (2_1) на позиционной плоскости (x, y), может быть проведено следующим образом.

Прежде всего из (2_1), (2_3) вытекает, что

$$cy''=(xr^{-1})', \qquad cx''=(-yr^{-1})',$$

откуда

$$cy'=xr^{-1}+A, \qquad cx'=-yr^{-1}-B,$$

где A, B — постоянные интегрирования. Используя далее (2_2), (2_3), получим, что

$$A^2+B^2=1+2hc^2, \tag{3_1}$$

$$c^2=Ax+By+r; \qquad r=(x^2+y^2)^{1/2}. \tag{3_2}$$

Очевидно, (3_2) есть уравнение конического сечения.

Для того чтобы упростить исследование этого конического сечения, заменим постоянные (h, c) интегралов энергии и площадей эквивалентными постоянными интегрирования (a, e) в случае $c^2 \geqslant 0$, $h \neq 0$, полагая

$$\left.\begin{aligned} &e = (1+2hc^2)^{1/2} \geqslant 0, \\ \text{и} \qquad &a = (-2h)^{-1}, \text{ если } h \neq 0, \\ &p = c^2 > 0, \text{ если } h = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где подкоренное выражение в формуле для e не может быть отрицательным *). Действительно, из (3_1) видно, что всегда $1+2hc^2 \geqslant 0$.

§ 242. Из (3_1) также видно, что та ветвь конического сечения, которая может выродиться в полупрямую, проходящую через точку $(x, y) = (0, 0)$, имеет в этой точке фокус. При этом вырождение не имеет места тогда и только тогда, когда $c \neq 0$. (Тот факт, что прямолинейное движение при $h \gtreqless 0$ характеризуется значением $c = 0$, вытекает также из (2_3)). Кроме того, легко на основании (3_1) и (4) установить, что $2a$ $(\gtrless 0)$ и $e(\geqslant 0)$ — большая ось и эксцентриситет, а p — параметр конического сечения (3_2). Так как a и $-1/h$ имеют согласно (4) один и тот же знак, то независимо от значения c случаи эллипса, гиперболы или параболы характеризуются неравенствами $h < 0$, $h > 0$ и равенством $h = 0$ соответственно. Следовательно, интегральная кривая на плоскости (x, y) является замкнутой, если $h < 0$. В этом случае период решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ пропорционален $|h|^{-3/2}$, поскольку (см. § 160a) в данном случае $\beta^{-1} - 1 = -3/2$. Из (4) видно, что эллипс превращается в окружности тогда и только тогда, когда (см. (18_1) § 216)

$$1 + 2hc^2 = 0. \tag{5}$$

Общие соотношения (4), (4_1) между постоянными интегрирования $h \gtreqless 0$, $c \geqslant 0$ и геометрическими величинами $a \gtrless 0$, $e \geqslant 0$ или $p \geqslant 0$ таковы, что

$$e = 0, \text{ если } (-2h)^{-1} = a = c^2 > 0, \tag{6}$$

$$\text{если } c \neq 0, \text{ то } e \gtrless 1,\ a \gtrless 0 \text{ для } h \gtrless 0 \text{ и } p > 0 \text{ для } h = 0, \tag{7}$$

$$\text{если } c = 0, \text{ то } e = 1 \text{ для } h \lesseqgtr 0 \text{ и } p = 0 \text{ для } h = 0. \tag{8}$$

---

*) Легко проверить, что это ограничение на постоянные интегрирования h, c эквивалентно ограничению, налагаемому на траекторию с энергией h множеством нулевой скорости, соответствующим данному h (см. § 243).

Тот факт, что в формуле (4) встречается только c^2 (но не c), очевиден, поскольку при замене c на $-c$ мы изменяем лишь направление движения, но не интегральную кривую (см. § 214).

Легко проверить *), что если $h > 0$ и $c \neq 0$, то орбита представляет собой ту ветвь гиперболы, которая обращена своей вогнутостью к фокусу $(x, y) = (0, 0)$.

§ 243. Согласно (2_2) уравнение кривой нулевой скорости при заданном значении h имеет вид

$$(x^2 + y^2)^{-1/2} = -h,$$

так что эта кривая существует только при $h < 0$ и представляет собой окружность с центром в начале координат $(x, y) = (0, 0)$. В силу (4) ее радиус равен $2a$, где a — радиус круговой орбиты с постоянной энергии h. Так как $2a$ не зависит от c, то видно, что интегральная кривая с постоянной энергии $h < 0$ имеет общую точку с окружностью нулевой скорости лишь тогда, когда $e = 1$, т. е. когда эллипс вырождается в прямолинейный отрезок, представляющий собой радиус окружности нулевой скорости. Если же $e < 1$, то, очевидно, эллиптическая орбита лежит целиком внутри кривой нулевой скорости.

Все сказанное согласуется с изложенными выше результатами (см. §§ 169—170) относительно точки возврата. Заметим, однако, что общая теория неприменима к решению, достигающему фокуса $(x, y) = (0, 0)$, поскольку эта точка является для правых частей уравнений (2_1) особой.

§ 244. Если фиксировать некоторое значение $h \gtreqless 0$, то квадрат элемента дуги на поверхности S_h (см. § 212) равен

$$ds^2 = g(dx^2 + dy^2) \equiv g(dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

где

$$g = 2\left(\frac{1}{r} + h\right).$$

Следовательно, особенностями на этой поверхности вращения обладают параллельные круги (или точки), где $g = \infty$ или $g = 0$, т. е. где $(x, y) = 0, 0$ или $r^{-1} + h = 0$. Особенности первого типа

---

*) Действительно, числитель в формуле (26) § 232а для кривизны k записывается в случае произвольной силовой функции $U = U(r)$ в (11_1) § 211 в виде

$$\frac{(y \cos w - x \sin w)\, U_r}{r},$$

где $w = w(t)$ — угол наклона касательной к траектории. В случае силы притяжения $U_r < 0$.

могут иметь место при любых $h \gtreqless 0$, а особенности второго типа (соответствующие кривой нулевой скорости) лишь при $h < 0$.

Исключая эти многообразия особых точек на S_h, можно сделать на основании (13) § 212 вывод, что поскольку $U = r^{-1}$, то гауссова кривизна определяется на поверхности S_h по формуле

$$K_h(r) = -\frac{1}{4}h(1 + rh)^{-3}.$$

Следовательно, эта кривизна всюду положительна, равна нулю или отрицательна, если $h < 0$, $h = 0$ или $h > 0$ соответственно. Другими словами, каждая неособая точка на S_h является эллиптической, параболической или гиперболической (в смысле определений дифференциальной геометрии) в зависимости от того, какой орбите (эллиптической, параболической, гиперболической) на плоскости (x, y) соответствует постоянная энергии h. В частности, метрика на поверхности S_h будет евклидовой тогда и только тогда, когда $h = 0$. Отсюда следует, что если $h \geqslant 0$, то на геодезических линиях поверхности S_h не существует сопряженных точек.

§ 245. Если $s = s(t)$ — длина дуги вдоль некоторой интегральной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ с фиксированной энергией $h \gtreqless 0$ на плоскости (x, y), то $s'^2 = x'^2 + y'^2$, так что согласно (17_3) § 231

$$W' = s'^2 \equiv x'^2 + y'^2, \tag{9}$$

$$W = \int_{P^0}^{P} s'^2 d\bar{t}, \tag{10}$$

где функция W определяется так же, как и в § 99, а интегрирование в интеграле (10) ведется вдоль данной орбиты между фиксированной ее точкой $P^0(x(t^0), y(t^0))$ и переменной точкой $P(x(t), y(t))$.

Покажем, что если исключить случай прямолинейной интегральной кривой ($c = 0$), то для функции (10) переменной t можно дать во всех трех случаях $h < 0$, $h = 0$, $h > 0$ простую геометрическую интерпретацию. Действительно, если $h \gtrless 0$, т. е. если коническое сечение имеет два фокуса O, F (O — начало координат на плоскости (x, y), совпадающее с F в случае круговой орбиты), то такая интерпретация, как и в случае интеграла (2_3), связана с понятием двумерной секторной скорости. При этом параболический случай $h = 0$ не исключается. Пусть $h \gtreqless 0$, и пусть через $\sigma = \sigma(t)$ обозначается площадь сектора, ограниченного дугой P^0P интегральной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ и радиус-векторами OP^0, OP. Тогда $\sigma'(t)$ — секторная скорость и $2\sigma' = c$, причем, по предположению, $c \neq 0$. Кроме того, если через $l = l(t)$ обозначить длину перпендикуляра, опущенного из O на касательную к интегральной кривой в точке $P(t)$, то $d\sigma = lds$ и $\sigma' = ls'$.

Исключим пока параболический случай $h = 0$. Обозначим через $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ и $\bar{l} = \bar{l}(t)$ функции, которые определяются так же, как и функции $\sigma(t)$, $l(t)$, но после замены фокуса O на фокус F и при сохранении точек P^0, P. Тогда мы получим соотношение $\bar{\sigma}' = \bar{l}s'$, аналогичное соотношению $\sigma' = ls'$, так что $\sigma'\bar{\sigma}' = l\bar{l}s'^2$. Однако в силу свойств эллипса и гиперболы произведение $l\bar{l}$ не обращается в нуль, так что $\sigma'\bar{\sigma}'$ пропорционально s'^2, а следовательно, в силу (9) пропорционально W'. Так как σ' также отлично от нуля, то отсюда следует пропорциональность функций $\bar{\sigma}'(t)$ и $W'(t)$.

Таким образом, если площадь сектора $\sigma = \sigma(t)$ с вершиной в фокусе O пропорциональна t при любых $h \gtreqless 0$, то площадь сектора $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$ с вершиной в фокусе F пропорциональна функции $W = W(t)$ при $h \lessgtr 0$. Легко установить, что такая интерпретация функции $W = W(t)$ остается справедливой и в предельном случае $h = 0$. В этом случае следует определить $\bar{\sigma}(t)$ как сектор, ограниченный дугой $\widehat{P^0P}$ параболы, осью параболы и перпендикулярами, опущенными из P^0 и P на ось параболы.

§ **246.** Ниже мы будем рассматривать точку O как фокус орбиты также и в прямолинейном случае $c = 0$. Другой фокус, существующий лишь для эллипса или гиперболы ($h \lessgtr 0$), назовем (также в круговом случае $O = F$) «пустым» фокусом. Будем считать, что в фокусе O помещено притягивающее тело.

Если через $P^0 = P^0(t)$ и $P = P(t)$ обозначены точки орбиты, соответствующие фиксированному t^0 и переменному значению t соответственно, то эта же самая пара точек P^0, P может соответствовать вообще двум различным парам значений t^0, t. Пусть эта неопределенность (которая возникает лишь при $h < 0$ или $c = 0$) исключена с помощью требования, что t — первый момент, следующий непосредственно за t^0 и соответствующий положению P.

§ **247.** Если ввести полярные координаты $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ и применить, например, формулы (22) § 116а, то увидим, что промежуток времени $t - t^0$, разделяющий два положения P^0, P, зависит при фиксированном h только от радиус-векторов $r^0 = r^0(t)$, $r = r(t)$ и угла $\varphi - \varphi^0$ между ними. Другими словами, промежуток $t - t^0$ является при фиксированном h локально однородной функцией величин $r^0 = OP^0$, $r = OP$, а также длины $\rho = P^0P$ хорды дуги

$\widehat{P^0P}$. Это справедливо, конечно, не только в ньютонианском случае $U = r^{-1}$.

Однако мы покажем, что именно в ньютонианском случае зависимость промежутка времени при фиксированном h от сторон r^0, r, ρ треугольника PP^0O такова, что r^0 и r входят лишь в комбинации $r^0 + r$. Можно сказать иначе, что $t - t^0$ является при фиксированном h локально однозначной функцией периметра $r^0 + r + \rho$ и хорды ρ. Этот результат, носящий название теоремы Ламберта и имеющий фундаментальное значение в теории определения орбит, ни в какой мере не очевиден, поскольку он не справедлив для произвольной силовой функции, например для $U(r) = r^{-\lambda}$ $(h = \text{const})$.

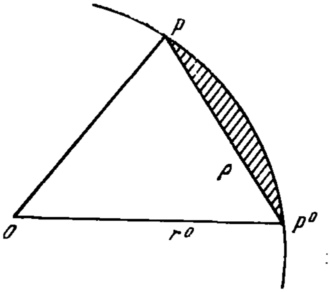

Рис. 4.

Доказательство теоремы Ламберта может быть вообще получено путем применения теоремы Гаусса — Бонне на поверхности вращения S_h (см. § 244). Однако более короткое доказательство достигается непосредственным путем при использовании «интеграла Бельтрами — Гельберта» или «изоэнергетического действия W» следующим образом.

§ 248. Так как P^0 фиксировано, то можно рассматривать радиус-вектор r и хорду ρ как биполярные координаты точки P, а O и P^0 как полюсы. Тогда из (35) § 56 следует, что функция Лагранжа (1) § 241 выражается через координаты $q_1 = {}^1/_2(r - p)$, $q_2 = {}^1/_2(r + p)$ следующим образом:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i(q_2 - q_1)}{q_i^2 - \left(\frac{1}{2}r^0\right)^2}q_i'^2 + \frac{1}{q_1 + q_2}.$$

Соответствующая функция Гамильтона $H = H(p_1, p_2, q_1, q_2)$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i^2 - \left(\frac{1}{2}r^0\right)^2}{(-1)^i(q_2^2 - q_1^2)}p_i^2 - \frac{1}{q_1 + q_2}.$$

Следовательно, если обозначить для сокращения записи

$$G(W_\chi, \chi) = -2\{\chi + h\chi^2\} + \left\{\chi^2 - \left(\frac{1}{2}r^0\right)^2\right\}W_\chi^2, \tag{11}$$

то уравнение в частных производных (15) § 114 запишется в виде

$$H(W_{q_1}, W_{q_2}, q_1, q_2) = h, \tag{12}$$

или

$$G(W_{q_1}, q_1) = G(W_{q_2}, q_2).$$

Так как (11) не изменяется, если заменить W_χ на $-W_\chi$, то решение $W = W(q_1, q_2)$ уравнения (12) может быть получено в результате интегрирования в пределах от $\chi = q_1$ до $\chi = q_2$ некоторой функции $f = f(\chi)$ одной переменной χ. Эта функция определяется на основании выражения (11), из которого видно, что можно положить

$$f(\chi) = \sqrt{2\left(\chi + \frac{1}{2}r^0\right)^{-1} + h}.$$

Если ввести вместо χ переменную $\bar{r} = \chi + {}^1/_2 r^0$, то увидим, что функция

$$W = 2^{1/2} \int\limits_{q_1 + r^0/2}^{q_2 + r^0/} (\bar{r}^{-1} + h)^{1/2} d\bar{r} \tag{13}$$

$$(2q_1 = r - \rho,\ 2q_2 = r + \rho,\ (\ )^{1/2} \geqslant 0)$$

координат q_1, q_2 и постоянных интегрирования h, r^0 удовлетворяет уравнению (12). Следовательно, из формул (22) § 116а вытекает*), что частная производная функции (13) по h равна $t + \text{const}$. Однако из (13) также видно, что $W_h = 0$ тогда и только тогда, когда $q_1 = q_2$, т. е. если (рис. 4) $r = r^0$. Поскольку значения r и r^0 соответствуют моментам t и t^0, то на основании (13) получим, что

$$t - t^0 = W_h \equiv 2^{-1/2} \int\limits_{1/2(r^0 + r - \rho)}^{1/2(r^0 + r + \rho)} (\bar{r}^{-1} + h)^{-1/2} d\bar{r},\ \ (\ )^{-1/2} \geqslant 0. \tag{14}$$

Интеграл в правой части этой формулы зависит при фиксированном h лишь от периметра $r^0 + r + \rho$ и хорды ρ, что и доказывает теорему Ламберта.

---

*) В § 116 предполагается, что удовлетворяется условие (18), сводящееся в данном случае к следующему

$$W_{q_1 h} W_{q_2 r^0} - W_{q_1 r^0} W_{q_2 h} \neq 0.$$

Однако если исходить из формулы (13), то легко проверить, что это условие удовлетворяется для всех интегральных кривых, отличных от прямой линии или окружности.

§ 249. Очевидно, что интеграл (14) выражается в элементарных функциях от пределов интегрирования. Однако поскольку интеграл (14) является алгебраической функцией с вещественными точками разветвления даже в простейшем случае $h = 0$, то мы встречаемся с неоднозначностью. Кроме того, этот интеграл был получен в предположении, что момент t достаточно близок к t^0 (см. § 246), а сами формулы в § 116а, приводящие к (14), опираются на локальную теорему существования решения дифференциальных уравнений. Однако из соображений, опирающихся на аналитичность, можно заключить, что если выбрать соответствующую ветвь элементарной многозначной функции, определяемой согласно (14), то этот интеграл справедлив при любом $t - t^0$.

Если исключить прямолинейный случай ($c = 0$, $h \gtreqless 0$), который можно в дальнейшем охватить путем очевидного перехода к пределу, то правильный выбор соответствующей ветви при вычислении интеграла (14) приводит к следующим формулам.

В параболическом случае имеем

$$t - t^0 = \frac{1}{6}\{(r^0 + r + \rho)^{3/2} \mp (r^0 + r - \rho)^{3/2}\} \quad (h = 0), \quad (15_1)$$

где нижний или верхний знак (т. е. + или —) берется в зависимости от того, содержит ли заштрихованный на рис. 4 сегмент внутри себя фокус O или не содержит.

В гиперболическом случае ($h > 0$) определим сначала единственным образом пару вещественных величин u^0 и u по формулам

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= 2\,\mathrm{arcsh}\left\{\frac{1}{2}(r^0 + r - \rho)h\right\}^{1/2}, \\ u &= 2\,\mathrm{arcsh}\left\{\frac{1}{2}(r^0 + r + \rho)h\right\}^{1/2} \quad (0 < u^0 < u). \end{aligned}\right\} \quad (15_2')$$

Тогда (14) приведется к виду

$$t - t^0 = (2h)^{-3/2}\{(\mathrm{sh}\, u - u) \mp (\mathrm{sh}\, u^0 - u^0)\} \quad (h > 0), \quad (15_2)$$

где правило выбора знака такое же, как в формуле (15_1).

В эллиптическом случае ($h < 0$) определим сначала единственным образом пару вещественных величин u^0, u по формулам

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= 2\arcsin\left\{-\frac{1}{2}(r^0 + r - \rho)h\right\}^{1/2}, \\ u &= 2\arcsin\left\{-\frac{1}{2}(r^0 + r + \rho)h\right\}^{1/2} \quad (0 < u^0 < u < \pi) \end{aligned}\right\} \quad (15_3')$$

предположим, что сегмент, заштрихованный на рис. 4, не содержит внутри себя пустой фокус F. Тогда формула (14) запишется в виде

$$t - t^0 = (-2h)^{-3/2}\{(u - \sin u) \mp (u^0 - \sin u^0)\} \quad (h < 0), \quad (15_3)$$

где правило выбора знака такое же, как и в предыдущих случаях.

Вместе с тем, если заштрихованный на рис. 4 сегмент содержит внутри себя пустой фокус F, то мы придем к формуле, получающейся из (15_3) после замены u на

$$u^* = 2\pi - u. \qquad (15_3^*)$$

Разумеется, в формулах (15_1)—(15_3^*) корень $A^{1/2}$ (или $A^{\pm 3/2}$) из A считается положительным и моменты t^0 и t имеют тот же смысл, что и в § 246. Так как упомянутая в § 246 неопределенность возникает при $c \neq 0$ лишь в эллиптическом случае, то вполне естественно, что формулы $(15_3')$—(15_3^*), соответствующие $h < 0$, оказываются более сложными, чем (15_1) или (15_2)—$(15_2')$.

§ 250. Обозначим через Σ_h семейство тех интегральных кривых на плоскости (x, y), для которых постоянная энергии имеет некоторое фиксированное значение h. Если $h < 0$, то из (4) видно, что Σ_h состоит из тех эллипсов на плоскости (x, y), которые имеют общий фокус в O и одну и ту же длину большой оси $2a = -h^{-1}$. В то же время эксцентриситет $(0 \leqslant e \leqslant 1)$ и направление большой оси на плоскости (x, y) произвольны. Таким образом, каждый эллипс, содержащийся в Σ_h, встречается в Σ_h во всех возможных положениях относительно O. Разумеется, окружность $(e = 0)$ с диаметром $-h^{-1}$ встречается лишь один раз и радиусы окружности радиуса $-h^{-1}$ и с центром в O рассматриваются как эллипсы с эксцентриситетом $e = 1$ ($c = 0$; см. § 243). Аналогичное описание семейства Σ_h можно сделать на основании (4) также и при $h = 0$ или $h > 0$.

Ниже будем предполагать, что $h < 0$. Тогда можно сказать, что семейство Σ_h состоит из всех эллипсов (включая отрезки), для которых окружность с центром в O и радиусом $2a$ является направляющей окружностью *). Эта окружность, которую будем обозначать через D_h, представляет собой согласно изложенному в § 243 кривую нулевой скорости, соответствующую данному значению h. Ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = 4a^2, \qquad (16)$$

где $a = (-2h)^{-1} > 0$.

---

*) Вершины любого эллипса находятся на равном расстоянии от фокуса и соответствующей ближайшей точки направляющей окружности. (*Прим. перев.*).

§ 251. Выберем внутри D_h (но не в центре O) точку P_0, обозначим через $\Gamma_h(P_0)$ подмножество Σ_h, состоящее из тех интегральных кривых с постоянной энергии h, которые проходят через P_0, и пусть $E_h(P_0)$ — эллипс, касающийся окружности D_h и имеющий фокусы в O и P_0. Если через $AB = BA$ обозначить расстояние между двумя точками A, B, то из (16) видно, что большая ось эллипса $E_h(P_0)$ равна

$$(2a - OP_0) + OP_0 + (2a - OP_0) = \\ = 4a - OP_0, \qquad (17)$$

и она больше $2a$, так как $0 < OP_0 < < 2a$. Следовательно, D_h не является направляющей $E_h(P_0)$ и эллипс $E_h(P_0)$ не является интегральной кривой с энергией h (это справедливо, конечно, и в исключенном случае, когда $P_0 = 0$, так как $E_h(0) = D_h$). Оказывается, что эллипс $E_h(P_0)$ представляет собой огибающую подмножества $\Gamma_h(P_0)$ *).

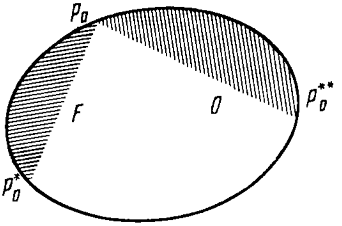

Рис. 5.

---

*) Действительно, положения точек P эллипса C, принадлежащего $\Gamma_h(P_0)$, а также точек Q эллипса $E_h(P_0)$ характеризуются соотношениями

$$OP + PF = 2a, \qquad (\text{I})$$

$$OQ + QP_0 = 4a - OP_0, \qquad (\text{II})$$

где $2a$ и $4a - OP$ — большие оси эллипсов C и $E_h(P_0)$, а O, F и O, P_0 — фокусы эллипсов C, $E_h(P_0)$ соответственно. Пусть $P_0{}^*$ — точка эллипса C, лежащая на продолжении прямой P_0F (рис. 5). Тогда

$$OP_0 + P_0F = 2a, \qquad (\text{III})$$

$$OP_0^* + P_0^*F = 2a, \qquad (\text{IV})$$

$$P_0F + P_0^*F = P_0P_0^*, \qquad (\text{V})$$

причем справедливость (V) очевидна из рис. 5. Из этого рисунка также видно, что если $P_0{}^* \neq P$, то три точки P_0, P, F или неколлинеарны или $P = P_0$. При этом $P_0P < P_0F + PF$ в обоих случаях. Это неравенство с учетом (I) и (III) можно записать в виде

$$OP + PP_0 < 4a - OP_0,$$

так что в силу (II) точка P лежит внутри эллипса $E_h(\text{P}_0)$. Если же $P = P_0$, то из (III), (IV), (V) следует, что соотношение (II) удовлетворяется при $Q = P_0{}^*$.

В соответствии со сказанным точка P эллипса C лежит или внутри эллипса $E_h(P_0)$ или на нем, если $P \neq P_0{}^*$ или $P = P_0{}^*$ соответственно. Однако при фиксированном P_0 точка $P_0{}^*$ единственная (см. рис. 5). Следовательно, эллипсы C и $E_h(P_0)$ касаются друг друга в их общей точке $P_0{}^*$. Так как это справедливо для любого эллипса C из семейства $\Gamma_h(P_0)$, то $E_h(P_0)$ является огибающей этого семейства.

Ниже нам потребуется рассмотреть точки $P_0^* = P_0^*(C)$ и $P_0^{**} = P_0^{**}(C)$, лежащие на эллипсе C (см. рис. 5), причем F — пустой фокус (см. § 246). Разумеется, $P_0^* \neq P_0 \neq P_0^{**}$ также и тогда, когда P_0 лежит на одной прямой с фокусами O, F и $P_0^* = P_0^{**}$.

§ 252. Изложенные выше результаты становятся более наглядными, если несколько иначе подойти к такому анализу. Пусть внутри окружности D_h дана наряду с точкой $P_0(\neq 0)$ также точка $P(\neq 0)$. Пусть B_R обозначает окружность, касающуюся окружности D_h и имеющую центр в R, причем R совпадает с P_0 или P, так что в силу (16) радиус B_R равен $2a - RO$. Так как интегральные кривые, принадлежащие Σ_h, имеют согласно изложенному в § 250 общий фокус и общую направляющую окружность, то видно, что любая интегральная кривая с постоянной энергией $h(<0)$ проходит через обе точки P_0, P тогда и только тогда, когда ее пустой фокус является общей точкой двух окружностей B_{P_0}, B_P. Также видно, что B_{P_0} и B_P или пересекаются в двух различных точках, или касаются друг друга, или не имеют общих точек в зависимости от того, где лежит точка P: внутри эллипса, касающегося D_h и с фокусом P_0, на нем или вне его соответственно. Так как этот эллипс является именно эллипсом $E_h(P_0)$, определенным в начале § 251, то отсюда следует, что число интегральных кривых с постоянной энергии h, проходящих через обе точки P_0, P, равно 2, 1 или 0 в зависимости от того, где лежит P: внутри, на или вне $E_h(P_0)$ (рис. 6). (Отсюда, очевидно, вытекает, что $E_h(P_0)$ — огибающая семейства эллипсов $\Gamma_h(P_0)$; см. § 251.)

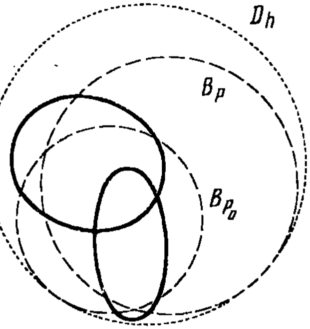

Рис. 6.

Пусть точка P_0 фиксирована, а P лежит внутри или на $E_h(P_0)$, и пусть $C = C_P(P_0)$, $C' = C_P{}'(P_0)$ — две интегральные кривые с постоянной энергии h, проходящие через обе точки P, P_0, так что $C_P \neq C_{P'}$ или $C_P = C_{P'}$ в зависимости от того, лежит P внутри или на $E_h(P)_0$. Пусть через $F = F_P(P_0)$ и $F' = F_{P'}(P_0)$ обозначаются в обеих случаях пустые фокусы эллипсов C и C' соответственно, а O — общий фокус C и C'. Наконец, пусть $I = I_P = I_P(P_0)$ — общая хорда $[P_0, P]$ эллипсов C и C', так что I — главная ось в предельном случае $C = C'$. Легко видеть, что если точка P находится в $E_h(P_0)$, т. е. если $C = C'$, то оба фокуса одного из двух эллипсов, например C, лежат по одну сторону от хорды I. В то же время фокусы O и F' эллипса C' отделены друг от друга хордой I.

§ 253. Проведенный выше элементарный анализ позволяет рассмотреть проблему минимума для вариационной задачи $\bar{\delta} W = 0$, где

$$\left.\begin{aligned} W &= \int\limits_{P_0}^{P} \{2(U+h)(x'^2+y'^2)\}^{1/2}\,d\bar{t}, \\ U &= r^{-1}, \qquad r = (x^2+y^2)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

причем h фиксировано и отрицательно, а символ $\bar{\delta}$ означает, что граничные точки P_0, P также фиксированы (см. §§ 95 и 172).

Прежде всего заметим, что подынтегральная функция в (18) совпадает с функцией (11) § 179, составленной для данной задачи. Следовательно, в соответствии с результатами, изложенными в § 172, множество Σ_h решений с постоянной энергии h совпадает с множеством регулярных (т. е. не ломаных) экстремалей задачи $\bar{\delta} W = 0$. Наконец, из изложенного в § 177 видно, что вопрос о том, достигается ли минимум W на отрезке интегральной кривой P_0P с постоянной энергии h, эквивалентен вопросу, касающемуся расположения сопряженных точек. Результаты, изложенные в §§ 250—252, дают ответ на этот вопрос в эллиптическом случае $h < 0$. Действительно, сравнивая изложенное в конце § 252 с тем фактом, что $E_h(P_0)$ является огибающей интегральных кривых, проходящих через P_0, легко приходим *) к следующему результату.

Абсолютный сильный минимум интеграла (18) достигается на отрезке эллиптической траектории P_0P, взятом на эллипсе C (см. обозначения в § 252), но не на эллипсе C'. Кроме того, если P_0 фиксирована, а P — переменная точка эллипса C, то дуга P_0P, не содержащая точки P_0^{**}, будет соответствовать сильному мини-

---

*) Если использовать способ построения сопряженных точек в вариационном исчислении.

Следует упомянуть, что проблема $\bar{\delta} W = 0$, где $h < 0$, была первым примером, рассмотренным Якоби при разработке теории сопряженных точек. Термин «сопряженная точка» в вариационном исчислении и возник именно при анализе этого примера, поскольку в нем такие точки являются сопряженными в соответствии с теорией конических сечений (см. рис. 5).

Аналогичным образом, ломаная экстремаль на рис. 7, указанная Тодгунтером, является, по-видимому, самым первым примером разрывного решения в вариационном исчислении.

муму до тех пор, пока точка P лежит между P_0 и P_0^*, а положительное направление вдоль эллипса соответствует движению от P к P_0^* и затем к P_0^{**} (см. рис. 5). Если же рассматривать точку P, расположенную справа от P_0^* (см. рис. 5), то положительно ориентированная дуга P_0P эллипса C не будет уже соответствовать минимуму (даже слабому). Наконец, предельный промежуточный случай $P = P_0$ требует непосредственного анализа и соответствует совпадению обоих эллипсов C и C'. Точка P лежит тогда на $E_h(P_0)$ (см. § 252).

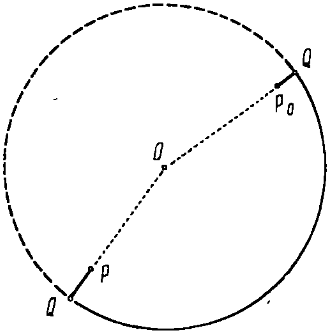

Рис. 7.

Исключая этот предельный случай и рассматривая сразу оба эллипса, имеющие общую дугу P_0P, увидим, что всех возможных случаев оказывается четыре. Они имеют место в зависимости от того, заключает в себе эллиптический сегмент, стягиваемый дугой P_0P, оба фокуса, один фокус или ни одного. Эти четыре случая совпадают с теми, которые получаются при комбинировании знаков $(\mp)$ в формуле (15_3) и замены u на $u^* = 2\pi - u$ в этой формуле.

§ 254. В § 253 предполагалось, что точки P_0 и P могут быть соединены по крайней мере одной интегральной кривой с постоянной энергии h (и, конечно, не более чем двумя).

В соответствии с изложенным в § 252 это будет иметь место тогда и только тогда, когда точка P лежит внутри или на $E_h(P_0)$. Следовательно, задача $\overline{\delta W} = 0$ не будет обладать регулярной экстремалью, если P находится вне $E_h(P_0)$. В этом случае абсолютный сильный минимум функции (18) достигается на ломаной экстремали P_0Q_0QP, представляемой на рис. 7 отрезками P_0Q_0 и QP радиусов OQ_0 и OQ вместе с дугой Q_0Q направляющей окружности (16), т. е. кривой нулевой скорости. Это обнаруживается при проверке того факта, что обычные достаточные условия для экстремали, дающей абсолютный сильный минимум, удовлетворяются по крайней мере тогда, когда точка O не лежит на прямой, соединяющей точки P_0 и P (выбираемые, конечно, внутри D_h). Эта ломаная экстремаль существует и тогда, когда P находится внутри или на $E_h(P_0)$, т. е. когда существует также и гладкая экстремаль (см. § 253).

Заметим, что отрезки P_0Q_0 и QP радиусов окружности D_h являются также согласно изложенному в § 243 гладкими экстремалями функции (18), а в угловых точках Q_0, Q ломаной экстремали Q_0Q (рис. 7) удовлетворяются хорошо известные условия Вейерштрасса — Эрдманна. Наконец, дуга окружности Q_0Q ничего не прибавляет к интегралу (18), так как функция $U + h \equiv \equiv (r^{-1} + h)$ в подынтегральном выражении обращается вдоль этой дуги в силу (2_2) в нуль.

§ 255. Выше был рассмотрен только эллиптический случай $h < 0$. Если $h \geqslant 0$, то в силу последнего замечания в § 244 можно как будто ожидать, что интегральная кривая с постоянной энергии h обеспечивает собственный сильный минимум функции (18) при произвольном расстоянии P_0P вдоль этой кривой. Однако это не имеет места, поскольку оказывается, что так же, как и в § 253, приходится выбирать между двумя коническими сечениями и при $h \geqslant 0$.

Как мы увидим ниже, фактическое упрощение при $h \geqslant 0$ сводится к тому, что то положение (см. § 254), когда точки P_0 и P не могут быть соединены одной интегральной кривой с постоянной энергии h, возникает лишь при $h < 0$. В соответствии с этим при $h \geqslant 0$ не существует кривой нулевой скорости (см. §§ 243—254).

§ 256. Рассмотрим сначала случай $h > 0$. Согласно изложенному в § 242 семейство Σ_h всех интегральных кривых с постоянной энергии h состоит из тех гипербол на плоскости (x, y), которые имеют фокус в начале координат O и обладают вещественной осью, равной $-2a = h^{-1}$. Вместе с тем направление вещественной оси этих гипербол и значение эксцентриситета произвольны. Разумеется, под гиперболой с фокусом в O подразумевается та ветвь гиперболы, которая обращена вогнутостью к O, а полупрямые, выходящие из O, должны рассматриваться как гиперболы с минимальным эксцентриситетом $e = 1$. Геометрическое описание, приведенное в § 252, может быть приспособлено и к данному случаю.

Пусть даны на плоскости (x, y) две различные точки P_0 и P (не совпадающие также с O). Обозначим через B_R окружность с центром в R и радиусом $-2a + OR$, причем R — одна из двух точек P_0, P. Так как $-2a = h^{-1} > 0$, то сумма двух радиус-векторов $-2a + OP_0$, $-2a + OP$ превосходит расстояние P_0P и, следовательно, окружности B_{P_0}, B_P всегда пересекаются в двух различных точках, например F и F'. Поэтому из определений гиперболы и семейства Σ_h вытекает, что для любой пары точек P_0, P существуют две и только две интегральные кривые с постоянной энергии h, например C и C', соединяющие P_0 с P. При этом F и F' — пустые фокусы гипербол C и C' соответственно. Если через I обозначить общую хорду P_0P гипербол C и C' и если исключить предельный случай коллинеарности точек O, P_0, P, то эта хорда пересекает вещественную ось одной гиперболы, например C, между фокусами O и F; в то же время вещественная ось гиперболы C' пересекается хордой I так, что оба фокуса O и F лежат по одну сторону от I.

Рассматривая в данном случае вопрос о построении интегральных кривых с постоянной энергии h, проходящих через P_0 (см. §§ 252—253), можно сделать вывод, что на дуге P_0P гиперболы C нет точек, сопряженных с P. В то же время для гиперболы C' внутренняя или конечная точки дуги P_0P сопряжена с P_0. В первом случае хорда $I = P_0P$ не проходит, а во втором случае проходит через общий фокус O гипербол C и C.

В соответствии со сказанным две точки P_0, P на плоскости (x, y) всегда могут быть соединены отрезком дуги P_0P интегральной кривой C с заданной постоянной энергии $h > 0$, причем интеграл (18) достигает вдоль этого отрезка собственного сильного минимума. В то же время отрезок дуги P_0P интегральной кривой C' не соответствует даже слабому минимуму интеграла (18) (по крайней мере, если хорда $I = P_0O$ не проходит через O; этот же предельный случай аналогичен рассмотренному в §§ 252—253, когда точка P лежит на $E_h(P_0)$ и он требует непосредственного анализа).

Так как I пересекает вещественные оси гипербол C и C' между фокусами O, F и вне фокусов O, F' соответственно, то два отрезка (P_0, P), (P_0, P) интегральных кривых в данной экстремальной проблеме соответствуют двум знакам в (15_2).

§ 257. Оставшийся случай $h = 0$ можно было бы рассматривать как предельный для сложного эллиптического (§ 253) или для гиперболического (§ 256). Однако представляется предпочтительным провести анализ непосредственно следующим образом.

В соответствии с изложенным в § 242 семейство Σ_0 всех интегральных кривых с постоянной энергии $h = 0$ состоит из тех парабол, фокус которых совпадает с началом координат O на плоскости (x, y), а директрисы суть прямые произвольного направления и находящиеся на произвольном расстоянии p от O. Разумеется, полупрямые, начинающиеся в O, следует рассматривать как параболы с параметром $p = 0$.

Пусть даны на плоскости (x, y) две различные точки P_0, P, не совпадающие с O. Обозначим через $B_R (R = P_0$ или $R = P)$ окружность, проходящую через O и с центром в R. Через T и T' обозначим две общие касательные, проведенные к окружностям B_{P_0}, B_P, а через N и N' — прямые, проходящие через O и перпендикулярные к T и T' соответственно. Из определения параболы и из приведенного выше определения Σ_0 видно, что прямые N и N' и только эти прямые являются осями, а прямые T и T' — директрисами парабол, представляющих собой интегральные кривые, проходящие через обе точки P, P_0. Если обозначить через C и C' эти две параболы, то $C = C'$ тогда и только тогда, когда $T = T'$, т. е. когда точки O, P_0, P коллинеарны. Исключая этот предельный случай, увидим, что общая хорда $I = P_0P$ парабол C и C' пересекает ось одной из двух парабол, например C, располагаясь по ту же сторону от фокуса, что и директриса T параболы C. Окончательные соображения и результат те же, что и в гиперболическом случае (см. § 256).

Очевидно, что двойной знак в (15_1) соответствует двум возможным вариантам, представимым отрезками (P_0, P), (P_0, P) двух парабол C и C'.

АНОМАЛИИ

§ 258. Согласно изложенному в § 241 интегрирование уравнений $[L]_x = 0$, $[L]_y = 0$, где

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{r}, \tag{1_1}$$

т. е. уравнений

$$\left.\begin{aligned} x'' + xr^{-3} &= 0, \\ y'' + yr^{-3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1_2}$$

в смысле построения орбит на плоскости (x, y), но не определения зависимости x, y от t, может быть достигнуто с помощью интегралов

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - r^{-1} = h, \tag{2_1}$$

$$xy' - yx' = c \tag{2_2}$$

без выполнения фактических квадратур (см. § 218а). Этот факт, весьма важный для определения орбит, не имеет места, если заменить закон Ньютона $U = r^{-1}$ произвольным законом $U = r^{-\lambda}$. Если орбита, выраженная с помощью постоянных интегрирования (4) § 241, известна, то промежуток времени, разделяющий два положения на орбите, определяется с помощью формул (15_1)—(15_3) § 249.

Однако все это уводит нас от вопроса о построении общего решения уравнения (1_1). Действительно, определение координат x, y как функций времени для данной совокупности постоянных интегрирования связано с весьма неприятным процессом исключения соответствующих переменных из формул, приведенных к §§ 241, 249. По этой причине будем теперь рассматривать x, y

непосредственно как функции времени и постоянных интегрирования.

§ **259.** С этой целью можно применить преобразование, указанное в § 230. Положим $z = \zeta^2$, так что $|z_\zeta|^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)$ и

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta, \tag{3_1}$$

$$\dot{t} = 4(\xi^2 + \eta^2) = 4(x^2 + y^2)^{1/2} = 4r, \tag{3_2}$$

где точкой обозначается дифференцирование по новой независимой переменной $\bar{t}$. Так как $|z_\zeta|^2 / r = 4$, то, сопоставляя (12_1) — (12_2) § 230 с (1_2) § 258, получим, что

$$\bar{U} = 4 + 4(\xi^2 + \eta^2)h$$

и $\bar{\omega} \equiv 0$. Поэтому при помощи (13_1) — (13_2) § 230 получим, что

$$\xi = 8h\dot{\xi}, \quad \eta = 8h\dot{\eta}, \tag{4_1}$$

$$-(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + 8(\xi^2 + \eta^2)h = -8. \tag{4_2}$$

Координаты ξ, η являются параболическими координатами, указанными в § 54, с началом в точке $r = 0$. Полагая

$$\gamma = \sqrt{(\mp 32h)}, \text{ если } h \lesseqgtr 0, \text{ и } \gamma = 4, \text{ если } h = 0, \tag{5_1}$$

$$u = \gamma\bar{t} \quad (h \lesseqgtr 0, \gamma > 0) \tag{5_2}$$

и обозначая постоянные интегрирования через α и β, увидим, что соотношения (4_1) удовлетворяются *), если

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = \alpha \cos\frac{1}{2}u, & \eta = \beta \sin\frac{1}{2}u, \\[2ex] \xi = \alpha\,\mathrm{ch}\frac{1}{2}u, & \eta = \beta\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}u, \\[2ex] \xi = \frac{1}{2}\alpha, & \eta = \frac{1}{2}\beta u, \end{array}\right\} \tag{6}$$

где $h < 0$, $h > 0$, $h = 0$ соответственно. Однако функции (6) должны удовлетворять инвариантному соотношению (4_2). Так как

$$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u, \quad \mathrm{ch}^2 u = 1 + \mathrm{sh}^2 u,$$

---

*) При замене четырех постоянных интегрирования (4_1) двумя постоянными интегрирования α, β общность не теряется. Это будет показано в § 261 и объясняется тем фактом, что можно выбирать произвольно направление оси x на плоскости (x, y) и начало отсчета времени t.

то из (5_1)—(5_2) видно, что в силу (4_2) постоянные α, β удовлетворяют соотношению

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = -\frac{1}{h},$$

если $h \lesseqgtr 0$ и $\beta^2 = 2$, если $h = 0$. Отсюда вытекает, что если $h \lesseqgtr 0$ и если положить $a = (-2h)^{-1}$, то существует единственная величина $e \geqslant 0$ такая, что

$$\alpha^2 = a(1-e), \quad \beta^2 = \pm a(1+e).$$

Еси же $h = 0$, то $\alpha^2 = 2p$, $\beta^2 = 2$ и величина $p \geqslant 0$ единственная.

§ 260. Подставляя (6) в (3_1) и используя полученные формулы для α и β, легко найдем, что

$$\left.\begin{aligned} &x = a(\cos u - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \text{ если } h < 0 \\ &\qquad (a > 0,\ 0 \leqslant e \leqslant 1), \\ &x = a(\operatorname{ch} u - e), \quad y = a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} u, \text{ если } h > 0 \\ &\qquad (a < 0,\ e \geqslant 1), \\ &x = \frac{1}{2}(p - u^2), \quad y = \sqrt{p}\,u, \text{ если } h = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Так как $r^2 = x^2 + y^2$, то при $h < 0$, $h > 0$ или $h = 0$ имеем

$$r = \begin{cases} a(1 - e\cos u), \\ -a(e\operatorname{ch} u - 1), \\ \frac{1}{2}(p + u^2) \end{cases} \tag{8}$$

соответственно.

Отсюда вытекает, что если t_0 — постоянная интегрирования, то

$$t - t_0 = \begin{cases} \sqrt{a^3}(u - e\sin u), \\ \sqrt{-a^3}(e\operatorname{sh} u - u), \\ \sqrt{\frac{1}{4}}\left(pu + \frac{1}{3}u^3\right) \end{cases} \tag{9}$$

в трех соответствующих случаях. Действительно, из (3_2) и (5_2), где

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\mathfrak{t}}, \quad \lambda = \text{const},$$

видно, что

$$t = \frac{4}{\lambda} \int r\,du.$$

Следовательно, (9) следует из (8), (5_1) и из определения $a = (-2h)^{-1}$, $a \gtrless 0$, $h \lessgtr 0$.

§ 261. Положим временно

$$\bar{x} = x + ae, \tag{10}$$

если $h \lessgtr 0$, и

$$\bar{x} = x - \frac{1}{2} p,$$

если $h = 0$, а также $\bar{y} = y$ при $h \lesseqgtr 0$. Положим также

$$b^2 = \pm a^2(1 - e^2), \tag{11}$$

если $h \lessgtr 0$, так что $b^2 > 0$ при $e \neq 1$ и $b^2 = 0$ при $e = 1$ в силу (7). Очевидно, что формулы (7) можно записать при $h < 0$, $h > 0$, $h = 0$ в виде

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = a\cos u, \quad \bar{y} = b\sin u, \\ &\bar{x} = a\operatorname{ch} u, \quad \bar{y} = b\operatorname{sh} u, \\ &\bar{x} = -\frac{1}{2}u^2, \quad \bar{y} = \sqrt{p}\,u \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

соответственно. Эти формулы представляют соответственно эллипс, гиперболу и параболу. Центр в первых двух случаях определяется координатами $\bar{x} = \bar{y} = 0$, а длина осей равна $\pm 2a > 0$, $2|b| \geqslant 0$. В третьем случае в точке $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ расположена вершина параболы, а $p \geqslant 0$ — параметр. Поэтому из (10) следует, что начало координат $(x, y) = (0, 0)$ является фокусом во всех трех случаях. Формула (11) показывает, что величина e представляет собой в первых двух случаях эксцентриситет. Следовательно, постоянные a, e, p в формуле (7) совпадают с постоянными a, e, p в § 242, так что в силу (4) § 241

и
$$\left.\begin{aligned} &e = (1 + 2hc^2)^{1/2} \geqslant 0, \quad a = (-2h)^{-1}, \text{ если } h \neq 0, \\ &p = c^2 \geqslant 0, \text{ если } h = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Геометрический смысл вспомогательной переменной u, связанной с t формулами (9), очевиден из (10) — (12). Вспомогательная переменная u называется эксцентрической аномалией.

§ 262. Заметим, что геометрический смысл переменной u теряется, если $c = 0$, причем $h \lesseqgtr 0$, т. е. если $e = 1$ при $h \lessgtr 0$ или

$p = 0$ при $h = 0$. Если $c \neq 0$, то движение точки по интегральной кривой вокруг начала координат $(x, y) = (0, 0)$ прямое при $c > 0$ и обратное при $c < 0$ (см. § 214). Эта двойственность отражается наличием квадратных корней в формулах (7), (9) и неявным образом формулами (11)—(12). Легко проверить, что эти квадратные корни следует брать с тем же знаком, какой имеет c (в частности, малая ось $2b$ оказывается отрицательной при $h < 0$, если движение обратное). В силу результатов, изложенных в § 214, можно рассматривать без потери общности лишь прямое движение ($c > 0$, $\sqrt{\ } > 0$, $h \lesseqgtr 0$), если только исключить случаи, когда само понятие прямого движения не определено, т. е. случай прямолинейного движения ($c = 0$, $\sqrt{\ } = 0$, $h \lesseqgtr 0$).

§ **263.** Предположим, что рассматривается движение, отличное от прямолинейного, т. е. что $c \neq 0$. Тогда $0 \leqslant e < 1$, или $p > 0$, если $h < 0$, $h > 0$ или $h = 0$ соответственно. Следовательно, если r, w обозначают полярные координаты с полюсом в $(x, y) = (0, 0)$ и угол $w = 0$ соответствует направлению на периастр, т. е. минимальному значению радиус-вектора, то уравнение конического сечения запишется в виде

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos w}, \tag{14}$$

если $(-2a)^{-1} = h$, или

$$r = \frac{p}{1 + \cos w}, \tag{14^1}$$

если $h = 0$. Согласно (8) минимум r достигается во всех трех случаях $h \lesseqgtr 0$ при $u = 0$. Согласно же (9) при $u = 0$ имеем $t = t_0$. Следовательно, если φ — полярный угол, отсчитываемый от положительной полуоси x, и если ось x не совпадает с осью симметрии конического сечения, то

$$\left.\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, && (15_1)\\ &w = \varphi - \omega, && (15_2)\\ &\omega = (\varphi)_{t=t_0}, && (15_3)\end{aligned}\right\}$$

где постоянную интегрирования (15_3) можно характеризовать в некруговом случае ($e \neq 0$) также тем условием, что $\min r(\varphi) = r(\omega)$. Переменная (15_2) в формулах (14), (14_1) называется истинной аномалией.

§ **264.** Если $c > 0$, то истинная аномалия w является монотонно возрастающей функцией эксцентрической аномалии и наоборот.

Имеют место следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{e+1}{e-1}}\operatorname{th}\dfrac{u}{2}, \\ \dfrac{u}{\sqrt{p}}, \end{cases} \tag{16}$$

где $h < 0$, $h > 0$, $h = 0$ соответственно и квадратный корень берется со знаком $+$. Действительно, подставляя (15_1) — (15_3) в (2_1), получим, что $r^2w' = c$. Следовательно, $w' > 0$ и $w = w(t)$ является монотонно возрастающей функцией. То же самое справедливо в силу (3_2) и (5_2) для $u = u(t)$. Кроме того, при $u = 0$ получим в силу (8) и сказанного в § 263, что $w = 0$. Поэтому на основании первого из двух соотношений

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \sin\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

легко установить, что (16) вытекает (если $\sqrt{} > 0$) из (8) и (14).

§ 265. Если $c \neq 0$, то целесообразно ввести вместо времени t новую независимую переменную ζ по формуле

$$\zeta = n(t - t_0), \tag{18}$$

где $n^2 = a^{-3}$, $n^2 = -a^{-3}$, $n^2 = 4p^{-3}$ при $h < 0$, $h > 0$, $h = 0$ соответственно, постоянная интегрирования n считается положительной при $c > 0$ и отрицательной при $c < 0$, а t_0 совпадает с одной из постоянных интегрирования, неявно определяемых формулами (14) — (15_3). По причинам, которые станут очевидными из излагаемого в § 276 для случая $h < 0$, линейная функция (18) времени t называется средней аномалией.

§ 265а. Из (9) и (18) видно, что эксцентрическая аномалия $u = u(t)$ совпадает со средней аномалией $\zeta = \zeta(t)$ только в круговом случае $e = 0$, когда $u(t)$ не отличается в силу (16) и от истинной аномалии $w = w(t)$.

Функцию

$$\varepsilon = w - \zeta \tag{19}$$

времени t называют уравнением центра *).

§ 266. Соотношение между временем и эксцентрической аномалией называют (во всяком случае, при $h < 0$ и $e = 1$) уравнением Кеплера. Важная роль этого уравнения видна из того, что после нахождения u, мы получим $x = x(t)$, $y = y(t)$ по формулам (7). Если $c \neq 0$, то формулы (9) можно переписать с помощью (18) в виде

$$\zeta = \begin{cases} u - e\sin u, \\ e\,\mathrm{sh}\,u - u, \\ \left(u + \frac{1}{3}\frac{u^3}{p}\right)\Big/\sqrt{p}. \end{cases} \tag{20}$$

§ 267. В соответствии с § 214 мы сможем найти функцию $r = r(t)$ при любом фиксированном значении постоянной интегрирования c из уравнения $[L^*]_r = 0$, описывающего систему с одной степенью свободы, к которой применимы результаты §§ 185—190.

Пусть, например, $h < 0$, а предельные случаи, когда $e = 1$ $(c = 0)$ или $e = 0$, $r(t) = \mathrm{const}$, исключены. Тогда для нахождения периодических решений $r = r(t)$ уравнения $[L^*]_r = 0$ применимы результаты § 188. Оказывается, что роль новой независимой переменной $\bar{t}$ (см. § 188) играет в этом случае именно эксцентрическая аномалия u. Другими словами, формула (7) § 188 справедлива при $q = r$, $\bar{t} = u$, если β равно максимуму, а α — минимуму r. Этот результат непосредственно вытекает из изложенного в § 188 и из формул (8) — (9) § 260, причем экстремальные значения равны $\alpha = a(1 - e)$, $\beta = a(1 + e)$. Соответ-

---

*) Возникновение такого названия восходит к древним временам, когда астрономы называли «уравнением» и «неравенством» те величины, под которыми в настоящее время понимают «коррекцию» и «отклонения» соответственно. Таким образом, «уравнение центра» означает нечто подобное «поправке за счет отклонений от кругового движения». Эта поправка определяется формулой (19), причем равенство $w(t) = \zeta(t)$ справедливо лишь в круговом случае $e = 0$.

ственно (9₁) § 188, если положить в этой формуле $t_0 = 0$, $\nu_0 = \sqrt{a^3}$, $\lambda_1 = -e\sqrt{a^3}$, $\lambda_n = 0$, $n > 1$, совпадает с (9) § 260. Наконец, коэффициенты Фурье (10₂) § 188, где $q(\bar{t}) \equiv r(t)$, выражаются через бесселевы функции (см. § 278).

Зависимость между r и t нуждается в униформизации не только в описанном эллиптическом случае, но также в гиперболическом и параболическом случаях ($h \geqslant 0$, $c \neq 0$).

Действительно, в этих случаях $r(t)$ при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ принимает любое значение, превышающее $\min r(t) = r_0 > 0$, два и только два раза. В соответствии с (8) и (9) эксцентрическая аномалия является и в этих случаях униформизующей переменной.

Фактически эксцентрическая аномалия и является в силу (7) и (9) униформизирующей переменной не только для $r(t)$, но также и для $x(t)$, $y(t)$ независимо от значений постоянных интегрирования h, c. В этом заключается аналитическое значение эксцентрической аномалии.

§ 268. В §§ 263—267 предполагалось, что $c \neq 0$. Положим теперь $c = 0$, так что движение оказывается (см. § 242) прямолинейным и можно предполагать, что оно происходит вдоль оси x. Тогда $y(t) \equiv 0$, $r = |x|$ и (1₁), (2₁) перепишутся в виде

$$x'' + x\,|x|^{-3} = 0, \tag{21₁}$$

$$\frac{1}{2}x'^2 = |x|^{-1} + h. \tag{21₂}$$

Так как масса, покоящаяся в начале оси x, притягивает движущуюся частицу с силой, увеличивающейся с уменьшением $|x|$, то и без интегрирования уравнения (21) сразу видно, что каждое решение $x = x(t)$ этого уравнения должно стремиться к нулю с приближением t к некоторому конечному t_0. Таким образом, движение сопровождается всегда столкновением двух тел. Алгебраическое дифференциальное уравнение (21₁) обладает при $x = 0$ особенностью, и, более того, любое решение этого уравнения имеет при $t = t_0$ особую точку, если $x(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Действительно, из (21₂) видно, что $|x'| \to \infty$ при $|x| \to 0$.

Можно показать, что эксцентрическая аномалия является локально регуляризирующей переменной, устраняющей особую точку аналитической функции $x(t)$ времени t.

Прежде всего, если $c = 0$, то согласно (13) имеем $e = 1$ в эллиптическом и гиперболическом случаях ($h \lessgtr 0$) и $p = 0$ в параболическом случае ($h = 0$). Следовательно, формулы (7) и (9) перепишутся в виде

$$x = \begin{cases} a(\cos u - 1), \\ a(\operatorname{ch} u - 1), \\ -\frac{1}{2}u^2, \end{cases} \tag{22$_1$}$$

$$t - t_0 = \begin{cases} \sqrt{a^3}(u - \sin u), \\ \sqrt{-a^3}(\operatorname{sh} u - u), \\ \frac{a^3}{\sqrt{36}}. \end{cases} \tag{22$_2$}$$

В соответствии с этими формулами столкновение имеет место при $u = 0, 2\pi, \ldots$, если $h < 0$, или лишь при $u = 0$, если $h \geqslant 0$.

В силу периодичности движения при $h < 0$ достаточно рассмотреть тогда лишь одно значение $u = 0$.

Выберем далее ось t так, чтобы момент $t = 0$ соответствовал значению $u = 0$, т. е. положим $t_0 = 0$. Тогда формулы (22_1) — (22_2) заменятся во всех трех случаях следующими:

$$x = u^2 P_1(u), \qquad t = u^3 P_2(u),$$

где $P_j(z)$, $j = 1, 2$,— степенные ряды, сходящиеся при всех z, с вещественными коэффициентами и с не обращающимися в нуль свободными членами $P_j(0)$. Поэтому, исключая u в окрестности значения $u = 0$ $(t = 0)$, получим при достаточно малых $|t|$

$$x(t) = (\sqrt[3]{t})^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\sqrt[3]{t})^n, \tag{23}$$

где $c_0 \neq 0$ и $c_n \gtreqless 0$.

Отсюда вытекает, что $x(t)$ имеет один и тот же знак как при малых положительных, так и при малых отрицательных t, т. е. что частица, движущаяся вдоль оси x, отражается при столкновении от частицы, покоящейся в точке $x = 0$. Другими словами, картина та же, какая наблюдалась выше в § 170. Отличие состоит в том, что в данном случае в момент отражения скорость $x'(t)$ бесконечна ($|x'(t)|$ имеет в силу (23) порядок $|t|^{-1/3}$ в окрестности $t = 0$), а в рассматривавшемся ранее случае она была равна нулю.

§ 269. Если подойти к этому случаю строго с аналитической точки зрения, то положение следующее. Будем рассматривать u и t как комплексные переменные. Тогда функция $x(t)$ будет аналитической по t, так как она может быть получена путем исключения u из целых по u функций (22_1) — (22_2). В соответствии с (23) эта аналитическая функция $x(t)$ имет при $t = 0$ алгебраическую точку разветвления, в которой соединяются три листа римановой поверхности. Из (23) также вытекает, что если t отлично от нуля, но малое и вещественное, то функция $x(t)$ будет вещественной на одном и только одном из этих трех листов, как при $t \to -0$, так и при $t \to +0$, т. е. и до и после столкновения. Поэтому, если $0 \neq t \to \pm 0$, то функция $x(t)$ допускает одно и только одно вещественное аналитическое продолжение.

Эту единственную вещественную ветвь аналитического продолжения можно расматривать как такую, которая определяет динамическое продолжение задачи. В соответствии с последним замечанием, сделанным в § 268 (и указывающим на осложнения неаналитического характера), это продолжение, а также движение частицы при столкновении таково, что наблюдатель, находящийся на любой из двух частиц, едва ли был бы в состоянии сделать сообщение о наблюдениях, выполненных во время столкновения. Эти соображения имеют и чисто аналитический смысл и описывают вещественные особенности проблемы, т. е. те особенности аналитической функции, которые имеют место при вещественном t, если рассматривается лишь вещественная ветвь $x(t)$.

§ 270. Так как формулы (22_1) — (22_2) представляют собой параметрическую запись функции (23), то можно сделать вывод, что эксцентрическая аномалия u униформизирует не только многозначную зависимость между (x, y) и t или r и t (см. § 267), но также и локальные особенности вещественной аналитической функции $x(t)$ вещественной переменной t во всех трех случаях $h \gtreqless 0$ прямолинейного движения.

Оказывается, что униформизация локальных особенностей (но не многозначной зависимости) возможна также и в задаче многих тел, если рассматривается столкновение лишь двух из этих тел. Хотя формулы, аналогичные (7) — (9) и выражающие зависимость между координатами и временем, выписать тогда нельзя, однако локально униформизирующая переменная u будет такой, что функция $t = t(u)$ оказывается, как это было в § 259, (см. (3_1), (5_2), (3_2)), линейной по отношению к интегралу от взаимного расстояния, обращающегося в нуль (см. §§ 414, 448, 498).

§ 271. Результаты, изложенные в §§ 268—269, становятся совсем не очевидными и попросту неверными, если заменить закон Ньютона произвольным законом притяжения. Действительно, предположим, что притяжение обратно пропорционально третьей, а не второй степени расстояния. Тогда в уравнении (21_2) следует заменить $|x|^{-3}$ на $|x|^{-4}$, так что вместо (21_2) получим соотношение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{x^2}+h.$$

С помощью простой квадратуры получим функцию $t=t(x)$, а анализ обратной функции $x=x(t)$ показывает, что в момент (пусть это будет момент $t=0$) столкновения последняя имеет особенность логарифмического типа, если $h\neq 0$ и $x=\sqrt{8t}$, если $h=0$. В первом случае функция $x=x(t)$ не имеет в точке $t=0$ аналитического продолжения, а во втором случае не имеет вещественного аналитического продолжения. Таким образом, хотя причины и разные, но в обоих случаях результаты, изложенные в §§ 268—269, несправедливы.

Имеется еще одно различие между ньютонианским случаем $U(r)=r^{-1}$ и данным $U(r)=r^{-2}$. А именно, при $U=r^{-1}$ условие $c=0$ является не только достаточным, но в силу изложенного в § 242 и необходимым для столкновения. Вместе с тем с помощью (16_2)—(16_3) § 214 легко обнаружить, что если $U=r^{-2}$, то столкновение может быть и при $c\neq 0$ (см. также §§ 162, 374а).

§ 272. В параболическом случае ($h=0$) получим при $c\neq 0$, исходя из (9), (16), (17), формулы

$$\cos w=\frac{p-u^2}{p+u^2},\quad \sin w=\frac{2(\sqrt{p})u}{p+u^2}, \tag{24_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{w}{2}=\frac{2(t-t_0)}{\sqrt{p^3}}. \tag{24_2}$$

Кубическое уравнение (24_2) эквивалентно третьему из соотношений (20) и, начиная со времени работы Галлея (1705), где рассматривалось движение кометы, оно имеет важное значение при определении орбит.

В соответствии с (18) можно переписать (24_2) в виде

$$z+\frac{1}{3}z^3=\zeta,$$

где $z = \operatorname{tg}\frac{w}{2}$. Следовательно, если рассматривать t как комплексную переменную, то $z = u / \sqrt{p}$ — трехзначная алгебраическая функция от $\zeta = n(t - t_0)$. Так как первая производная функции $\zeta = \zeta(z) = z + {}^1/_3 z^3$ обращается в нуль в точках $z = \pm i$, где вторая производная отлична от нуля, то в любой из этих двух конечных точек разветвления $\zeta = \pm i + {}^1/_3(\pm i)^3 = \pm {}^2/_3 i$ соединяются лишь два из трех листов римановой поверхности. Все три листа этой поверхности соединяются при $\zeta = \infty$. Так как функция $z = z(\zeta)$ не имеет других конечных особых точек, то при любом фиксированном вещественном $\zeta_* = n(t_* - t_0)$ функция $z = u / \sqrt{p}$ может быть разложена в ряд по степеням $(\zeta - \zeta_*)$ вдоль ветви, остающейся вещественной при вещественном $\zeta = n(t - t_0)$. Радиус сходимости такого ряда равен

$$\left|\pm\frac{2}{3}i - \zeta_*\right| = \left(\frac{4}{9} + \zeta_*\right)^{1/2}.$$

Таким образом, хотя вещественных особых точек нет, но радиус сходимости при любом ζ_* конечен и изменяется вместе с ζ_*, достигая при $\zeta_* = 0$ минимума, равного ${}^2/_3$.

§ 273. Если $h > 0$, то формулы (7), (8), (9), (16) содержат гиперболические функции и поэтому они неудобны для вычислений. Этого неудобства можно избежать путем такого преобразования этих формул, чтобы при вычислении приходилось сталкиваться лишь с таблицами вещественных тригонометрических функций и логарифмов. Для достижения этой цели достаточно лишь заменить эксцентрическую аномалию u другой вещественной независимой переменной $\mathrm{u} = \mathrm{u}(u)$, называемой обычно углом Ламберта и определяемой по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{u}}{2} = \operatorname{th}\frac{u}{2}.$$

Действительно, последнюю формулу можно переписать в виде

$$u = \lg \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\mathrm{u} + \frac{1}{2}\pi\right),$$

и, кроме того, из (17) следует, что $u = \sec \mathrm{u}$, $\operatorname{sh} u = \operatorname{tg} \mathrm{u}$. Таким образом, с одной стороны, переход от u к $\mathrm{u} = \mathrm{u}(u)$ выполним лишь при использовании тригонометрических и логарифмических таблиц, а с другой стороны, в формулах (7), (8), (9), (16) при $h > 0$ уже не будет гиперболических функций u.

РАЗЛОЖЕНИЯ КООРДИНАТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 274. Здесь мы будем рассматривать лишь эллиптический случай $(h < 0)$. В некоторых местах будет необходимо исключать предельный случай $e = 1$ периодических столкновений (§§ 268—269) и тривиальный случай $e = 0$ кругового движения.

Полагая без потери общности (см. § 242), что $c \geqslant 0$, рассмотрим функции эксцентриситета e

$$f \equiv f(e) = \frac{e}{1 + (1 - e^2)^{1/2}} \equiv \frac{1 - (1 - e^2)^{1/2}}{e}, \tag{1_1}$$

$$g \equiv g(e) = \frac{e \exp (1 - e^2)^{1/2}}{1 + (1 - e^2)^{1/2}}, \tag{1_2}$$

где квадратные корни считаются положительными. Если $0 \neq e \neq 1$, то

$$0 < f(e) < e < g(e) < 1. \tag{2}$$

Справедливость неравенства $g(e) < 1$ легко проверить, заметив, что производная $g'(e)$ по e положительна при $0 < e < 1$, и, таким образом, если $0 < e_1 < e_2 < 1$, то

$$0 = g(0) < g(e_1) < g(e_2) < g(1) = 1. \tag{3}$$

§ 275. В соответствии с формулами (9), (15_2)—(15_3), (18) предыдущего раздела получим, что

$$n = a^{-3/2}, \tag{4_1}$$

$$(\zeta)_{t=t_0} = 0, \tag{4_2}$$

$$(w)_{t=t_0} = 0, \tag{4_3}$$

$$(u)_{t=t_0} = 0. \tag{4_4}$$

Формулы (7)—(8) запишутся в виде

$$x = a(\cos u - e), \qquad y = a(1 - e^2)^{1/2} \sin u, \tag{5_1}$$

$$r = a(1 - e \cos u), \tag{5_2}$$

а формулы (14)—(15_1) в виде

$$x = r \cos (w + \omega), \quad y = r \sin (w + \omega), \tag{6_1}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w}, \tag{6_2}$$

$$\omega = \text{const}, \tag{6_3}$$

где согласно (16), (18), (20)

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{u}{2}, \tag{7_1}$$

$$\zeta=n(t-t_0), \tag{7_2}$$

$$\zeta=u-e\sin u. \tag{7_3}$$

Используя (7_1) и (17) § 264, придем к формулам

$$\cos w=\frac{-e+\cos u}{1-e\cos u}, \qquad \sin w=\frac{(1-e^2)^{1/2}\sin u}{1-e\cos u} \tag{8}$$

Так как (7_1) не изменяется при замене u на w и e на $-e$, то формулы, представляющие собой обращение (8), следующие:

$$\cos u=\frac{e+\cos w}{1+e\cos w}, \qquad \sin u=\frac{(1-e^2)^{1/2}\sin w}{1+e\cos w}. \tag{9}$$

Из (7) также следует, что

$$\cos\frac{w}{2}=\frac{(1-e)^{1/2}\cos\frac{u}{2}}{(1-e\cos u)^{1/2}}, \qquad \sin\frac{w}{2}=\frac{(1-e)^{1/2}\sin\frac{u}{2}}{(1-e\cos u)^{1/2}}, \tag{10}$$

где квадратные корни считаются положительными (см. § 264). Заменяя u на w и e на $-e$, получим формулы, представляющие собой обращение (10):

$$\cos\frac{u}{2}=\frac{(1+e)^{1/2}\cos\frac{w}{2}}{(1+e\cos w)^{1/2}}, \qquad \sin\frac{u}{2}=\frac{(1-e)^{1/2}\sin\frac{w}{2}}{(1+e\cos w)^{1/2}}. \tag{11}$$

В соответствии с (5_2) и (6_2) можно переписать (10) и (11) в виде

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\cos\frac{w}{2}&=(1-e)^{1/2}\cos\frac{u}{2},\\ \sqrt{r}\sin\frac{w}{2}&=(1+e)^{1/2}\sin\frac{u}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Наконец, с помощью (5_2) легко установить, что (8) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}r\cos(w-u)&=a\left\{1-e\cos u-\frac{1}{2}[1+P(e^2)]\,e^2\sin^2 u\right\},\\ r\sin(w-u)&=a\left\{1-\frac{1}{2}[1+P(e^2)]\,e\cos u\right\}e\sin u\\ &\qquad (P(0)=0),\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

где

$$1-(1-e^2)^{1/2}=\frac{1}{2}e^2[1+P(e^2)],$$

т. е. $P(e^2)={}^1/_4e^2+\ldots$ — четный степенной ряд, сходящийся при $|e|<1$, причем $P(0)=0$.

Следует упомянуть также, что в соответствии с (1_1)

$$(1\pm e\cos w)f=\frac{1}{2}(1\pm 2f\cos w+f^2)e, \tag{13_1}$$

$$e=\frac{2f}{1+f^2}. \tag{13_2}$$

§ 276. Связь между временем t и тремя аномалиями ζ, u, w может быть определена при начальных условиях (4_2)—(4_4) квадратурами, вытекающими из

$$\frac{dt}{d\zeta}=a^{3/2}, \tag{14_1}$$

$$\frac{d\zeta}{du}=\frac{r}{a}, \tag{14_2}$$

$$\frac{du}{dw}=\frac{r}{a(1-e^2)^{1/2}}. \tag{14_3}$$

Заметим, что (14_1) вытекает из (7_2), (4_1), а (14_2) — из (7_3), (5_2). Наконец, дифференцируя первое из соотношений (9) по w и используя (6_2) и второе из соотношений (9), придем к (14_3).

Название «средняя аномалия» обосновано тем, что $\zeta=\zeta(t)$ совпадает с истинной аномалией в том случае, если угловая скорость $w'=w'(t)$ относительно начала декартовой системы координат (6_1) не зависит от t. Действительно, записав (4_1) в виде

$$n=\frac{2\pi}{T}, \tag{15}$$

где

$$T^2=4\pi^2a^3 \qquad \left(a=-\frac{1}{2}h^{-1}\right),$$

можно на основании (5_1), (7_2), (7_3) заключить, что T — период эллиптического движения, представимого формулами $x=x(t)$, $y=y(t)$. Однако в силу соотношения (15), выражающего третий закон Кеплера, период T не зависит от эксцентриситета, т. е. время полного обращения вокруг фокуса, как при $e = 0$, так и при $0 < e < 1$ (и даже при $e = 1$), одно и то же, если только фиксирована длина большой оси. Наконец очевидно, что в круговом случае ($e = 0$) постоянная угловая скорость $w'(t)$ совпадает с n.

Поскольку все три аномалии ζ, u, w являются в силу (14_1)—(14_3) монотонно возрастающими функциями t, а также друг друга, то любую из них можно использовать как независимую переменную, играющую роль времени. Если период движения по t равен T то, как это видно из (5_1)—(7_3) и (15), период движения по любой из аномалий ζ, u, w равен 2π.

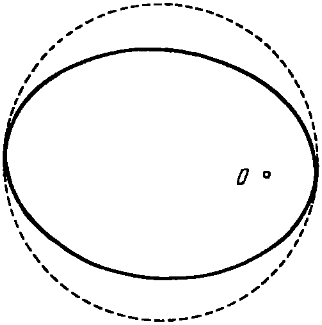

Рис. 8.

§ 277. В частности, любая из функций (аналитическая) $u - \zeta$, x, r, $\cos w$ времени t, рассматриваемая как функция $F(\zeta)$ средней аномалии $\zeta = n(t - t_0)$, может быть разложена в ряд Фурье

$$F(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \exp(k\zeta i), \qquad (16_1)$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta) \exp(-k\zeta i)\, d\zeta. \qquad (16_2)$$

Коэффициенты A_k выражаются через целые трансцендентные функции

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mu - z \sin u)\, du \equiv (-1)^m J_{-m}(z), \qquad (17_1)$$

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (^1/_2\, z)^{m+2n}}{n!\,(m+n)!}, \qquad (17_2)$$

$$m = 0, 1, \ldots,$$

удовлетворяющие рекуррентным формулам

$$J_{k-1}(z)+J_{k+1}(z)=\frac{2kJ_k(z)}{z}, \tag{18$_1$}$$

$$J_{k-1}(z)-J_{k+1}(z)=\frac{2dJ_k(z)}{dz}. \tag{18$_2$}$$

Эти функции, связываемые обычно с именем Бесселя, использовались широко как раз в рассматриваемой задаче самим Бесселем, а также на полстолетия раньше Лагранжем и другими *).

§ 278. Прежде всего из (5_3), (7_3) и (16_2) имеем

$$A_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-e\cos u)F(u-e\sin u)\exp(-kiu+kei\sin u)\,du. \tag{19}$$

Положим, в частности, $F(\zeta)=\exp lui$, где l — положительное целое число и $u=u(\zeta)$. Тогда, интегрируя (19) по частям и исходя из определения (17), придем к формулам

$$A_k=J_{k-1}(ke)\frac{l}{k},$$

если $k\neq 0$ и $A_0=-{}^1/_2 e$ при $l=1$, а $A_0=0$ при $l>1$. Таким образом, ряд (16_1) для $F(\zeta)=lui$ сведется к рядам

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos lu}{l}&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{J_{k-1}(ke)}{k}\cos k\zeta\\ \frac{\sin lu}{l}&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{J_{k-1}(ke)}{k}\sin k\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

если $l=2, 3, \ldots,$ или к рядам

$$\left.\begin{aligned}\cos u&=-\frac{1}{2}e+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{J_{k-1}(ke)}{k}\cos k\zeta,\\ \sin u&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{J_{k-1}(ke)}{k}\sin k\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

---

*) Первые исследования краевых задач (Д. Бернулли, Эйлер, Фурье, Пуассон) также приводили к этим функциям.

если $l = 1$ (штрих в символе Σ' означает, что при суммировании пропускается член с $k = 0$).

Подстановка (21) в (7_3) и (5_2) приводит к формулам

$$u = \zeta + e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{J_{k-1}(ke)}{k} \sin k\zeta. \qquad (22_1)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{J_{k-1}(ke)}{k} \cos k\zeta. \qquad (22_2)$$

Дифференцируя (22_1) по ζ и учитывая (14_2) и (18_1), придем к формуле

$$\frac{a}{r} = 1 + e \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' J_{k-1}(ke) \cos k\zeta \equiv 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos k\zeta. \qquad (23)$$

Выражая $\cos u$, $\cos 2u$ согласно (20), (21) и учитывая соотношение

$$r^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} e^2 - 2e \cos u + \frac{1}{2} e^2 \cos 2u\right),$$

получим аналогичным образом формулу

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k^2} \cos k\zeta. \qquad (24)$$

Дифференцируя далее (22_2) по ζ и учитывая (6_2), (23), а также соотношение

$$\sin w = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{ae} \frac{dr}{d\zeta}$$

(действительно, из (9), (6_2) и (5_2), (14_2) имеем соответственно

$$\sin u = \frac{r \sin w}{a(1 - e^2)^{1/2}},$$

$$\frac{dr}{d\zeta} = ae \sin u \frac{a}{r},$$

придем к формулам

$$\left.\begin{aligned}
\cos w &= -e + (1-e^2) \sideset{}{'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-1}(ke)\cos k\zeta,\\
\sin w &= (1-e^2)^{1/2} \sideset{}{'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-1}(ke)\sin k\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

С помощью же (5_1) и (21) получим, что

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{3}{2}ae + a \sideset{}{'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{J_{k-1}(ke)}{k}\cos k\zeta,\\
y &= a(1-e^2)^{1/2} \sideset{}{'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{J_{k-1}(ke)}{k}\sin k\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Дифференцируя (26) дважды по ζ, используя (6_1), (6_2), (14_1) и сопоставляя результат с (1_1) § 258, получим формулы

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a^2\cos(w+\omega)}{r^2} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kJ_{k-1}(ke)\cos k\zeta.\\
\frac{a^2\sin(w+\omega)}{r^2} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kJ_{k-1}(ke)\sin k\zeta.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Такие операции можно продолжать бесконечно. Разложения, приведенные выше, встречаются очень часто при применении теории возмущений к солнечной системе.

§ 279. В соответствии с (7_2) формулы (26) представляют собой разложения в ряды Фурье декартовых координат $x = x(t)$, $y = y(t)$. Соответствующие разложения (22_2), (25) для полярных координат (см. (6_1)—(6_3)) не имеют столь законченного вида, так как (25) соответствует лишь (21), а формула, аналогичная (22_1), отсутствует. Ряд Фурье, соответствующий (22_1),

$$w = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(e)\sin k\zeta \tag{28}$$

существует, однако его коэффициенты определяются с помощью новых трансцендентных функций. Для $C_m(z)$ справедлива следующая формула:

$$C_m(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\pi m}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(mu - zm\sin u)}{1 - z\cos u}\,du, \tag{29}$$

$$(|z| < 1; \quad m = 1, 2, \ldots),$$

где квадратный корень равен $+1$ при $z = 0$. Функция $C_m(z)$ переменной z является четной и аналитической в круге $|z| < 1$, но не при $z = 1$. В то же время функции $(17_1)-(17_2)$ — трансцендентные целые. Следовательно, ряд (28) принадлежит к более сложному типу, чем какой-либо из рядов Фурье, рассмотренный в § 278. Однако $C_k(z)$ могут быть выражены бесконечными рядами по функциям Бесселя

$$C_k(z) = \frac{2}{k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^{|n|} J_{k+n}(kz)}{[1+\sqrt{1-z^2}]^{|n|}} \quad (|z| < 1; \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{30}$$

Действительно, если $|z| < 1$ и

$$f = \frac{z}{1 + \sqrt{1-z^2}},$$

то *)

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{1 - z\cos u} \equiv \frac{1-f^2}{1 - 2f\cos u + f^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^{|n|}\cos nu. \tag{31}$$

При $|z| < 1$ имеем $|f| < 1$. Подставляя (31) в (29) и используя (17), приходим к (30).

Имея в виду доказательство (28)—(29), заметим сначала, что разность $w - \zeta$ является в силу формул, приведенных в § 275, нечетной функцией ζ с периодом 2π. Поэтому ряд Фурье для $w - \zeta$ и имеет вид (28), причем

$$C_k(e) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (w - \zeta)\sin k\zeta\, d\zeta$$

или (после интегрирования по частям)

$$\pi k C_k(e) = \int\limits_0^{2\pi} \cos k\zeta\, d(w - \zeta).$$

---

*) К этой формуле можно прийти, например, после дифференцирования по ψ тождества (37_2), приведенного ниже.

Так как $\int\limits_0^{2\pi} \cos k\zeta \, d\zeta = 0$, то в силу ($5_2$) и ($14_3$)

$$\pi k C_k(e) = \int\limits_0^{2\pi} \cos k\zeta \, dw = \int\limits_0^{2\pi} \cos k\zeta \frac{dw}{du} du =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos k\zeta \frac{a(1-e^2)^{1/2}}{a(1-e\cos u)} du.$$

Учитывая (7_3), придем к (29).

§ 280. Используя обозначение (9) § 265 для уравнения центра, можем записать (28), (30) также в виде

$$\varepsilon = w - \zeta, \tag{32_1}$$

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(e) \sin k\zeta, \tag{32_2}$$

$$C_k(e) = \frac{2}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^{|n|} J_{k+n}(ke), \tag{32_3}$$

где через $f = f(e)$ обозначена функция (1). В силу (32_2)—(32_3)

$$\varepsilon = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{J_j(ke) f^{|k-j|}}{k} \right) \sin k\zeta, \tag{33}$$

где $j \neq 0$, $f = f(e)$ (см. 1_1)).

Дифференцируя (33) и (32_1) по ζ, получим в силу (14_2)—(14_3) разложение

$$\frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}' J_j(ke) f^{|k-j|} \right) \cos k\zeta. \tag{34}$$

§ 281. Разложения трех аномалий u, w, $\zeta = n(t - t_0)$ как функций друг друга суть следующие.

Обращение ряда (28), соответствующее элементарному обращению (7_3) ряда (22_1), приводит к формуле

$$\zeta = w + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + k(1-e^2)^{1/2}}{(-1)^k k} f^k \sin kw; \quad f = f(e) \text{ [см. } (1_1)]; \tag{35}$$

Остальные две формулы для $w = w(u)$, $u = u(w)$ выводятся также элементарно

$$w = u + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^k}{k} \sin ku, \tag{36$_1$}$$

$$u = w + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-f)^k}{k} \sin kw. \tag{36$_2$}$$

Ряды (35) — (36$_2$) для $\zeta - w$, $w - u$ принадлежат к одним из первых рядов Фурье (Клеро, Даламбер, Эйлер) и их можно получить непосредственно следующим образом.

Выделим в разложении

$$-\lg(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

вещественную и мнимую части. Тогда получим, что

$$-\frac{1}{2}\lg(1 - 2\rho\cos\psi + \rho^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k}\cos k\psi, \tag{37$_1$}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\rho\sin\psi}{1-\rho\cos\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k}\sin k\psi, \tag{37$_2$}$$

где $z = \rho \exp i\psi$, $\rho = |z| < 1$. Дифференцируя (37$_1$) и полагая $\psi = w$, $\rho = f < 1$ (см. (21)), а также учитывая (13$_1$), придем к формуле

$$\frac{e\sin w}{1 - e\cos w} = \frac{d}{dw}\lg(1 - 2f\cos w + f^2) = 2\sum_{k=1}^{\infty} f^k \sin kw. \tag{38}$$

Заменяя в этой формуле w на $w + \pi$ и используя второе из соотношений (9), получим в силу (7$_3$), что

$$-e(1-e^2)^{-1/2}\sin u = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-f)^k \sin kw$$

и, следовательно,

$$\zeta = u + 2(1-e^2)^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (-f)^k \sin kw, \tag{39}$$

откуда вытекает эквивалентность (35) и (36_2).

Вместе с тем (36_2) эквивалентно (36_1). Действительно, (36_1) совпадает с (36_2) после замены u на w и f на $-f$, а (2) показывает, что f меняет знак при замене e на $-e$. Однако (7_1) при замене u на w и e на $-e$ не изменяется.

В соответствии со сказанным достаточно доказать (36_1). Но из (7_1) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{w-u}{2} = \frac{f \sin u}{1 - f\cos u}, \tag{40}$$

поскольку в силу (1_1)

$$f = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}}.$$

Дальнейшее сравнение (40) и (37_2) доказывает (36_1), причем $\rho = f$, $\psi = u$.

§ 282. Как следствие полученного выше результата, вытекают следующие формулы, представляющие собой элементарную аналогию (25) и (21):

$$\cos w = -f + (1-f^2) \sum_{k=1}^{\infty} f^{k-1} \cos ku, \tag{41_1}$$

$$\sin w = (1-f^2) \sum_{k=1}^{\infty} f^{k-1} \sin ku, \tag{41_2}$$

или, наоборот,

$$\cos u = f + (1-f^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-f)^{k-1} \cos kw, \tag{42_1}$$

$$\sin u = (1-f^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-f)^{k-1} \sin kw. \tag{42_2}$$

Действительно, из (13_2) видно, что первое из соотношений (39) совпадает со вторым из соотношений (42), а первое из соотношений (41) эквивалентно в силу (6_2) следующему:

$$\frac{a}{r}=\frac{1+f^2}{1-f^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}f^k\cos ku\right), \tag{43}$$

причем в силу (13_2)

$$\frac{1+f^2}{1-f^2}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Так как соотношения (41) и (42) переходят друг в друга при замене w на u и f на $-f$, то этого достаточно для вывода о справедливости (43). Однако (43) следует из (14_3) после дифференцирования (36_1).

§ 283. Если через $c_k=c_k(e)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, обозначить коэффициент Фурье в каком-либо из рядов, приведенных в §§ 279—282, то, поскольку рассматривавшиеся периодические функции являются аналитическими по отношению к вещественным переменным $\zeta=n(t-t_0)$, u или w, сходимость этих рядов настолько сильная, что $|c_k|<\theta^{|k|}$ при некотором $\theta=\theta(e)<1$. Исключая круговой случай $e=0$, в котором $c_k=0$ при всех достаточно больших $|k|$, можно даже получить для коэффициентов $c_k=c_k(e)$ асимптотические формулы в явном виде, выражаемые с помощью $f(e)$ или $g(e)$. Эти асимптотические формулы легко вытекают непосредственно из (35) — (36_2), (41) — (43) или из (20) — (27) и (28), поскольку при фиксированном e $(0<e<1)$ и $m\rightarrow+\infty$ для функций (17_1) и (49) справедливы асимптотические представления

$$J_m(me)\sim\frac{1}{(1-e^2)^{1/4}}\,\frac{(g(e))^m}{(2\pi m)^{1/2}}, \tag{44_1}$$

$$C_m(e)\sim\frac{(g(e))^m}{m}. \tag{44_2}$$

Действительно, в силу асимптотической формулы, которая была найдена впервые (Карлини, Коши, Якоби) именно в связи с рассматриваемой задачей и считается сейчас стандартной, имеем при $m\rightarrow+\infty$

$$J_m(m\,\mathrm{sch}\,\alpha)\sim(2\pi m\,\mathrm{th}\,\alpha)^{-1/2}\exp\{(\mathrm{th}\,\alpha-\alpha)m\}, \tag{44_1a}$$

где $\alpha>0$ — произвольное фиксированное число. Так как при любом $0<e<1$ существует одно и только одно значение $\alpha=\alpha(e)$ такое, что $1/e=\mathrm{ch}\,\alpha\equiv1/\mathrm{sch}\,\alpha$, то из ($1_2$) видно, что ($44_1$a) можно переписать в виде (41_1). Кроме того, формула (41_2), не вытекающая из (41_1) и (30), может быть получена на основании (29) тем же самым методом, как и (44_1а) или (44_1) из (17_1), а именно методом Коши «скорейшего спуска», вновь открытым Риманом. Этим методом можно также показать, что в исключенном случае периодических столкновений ($e = 1$) формулы (44_1), (44_2) заменяются следующими:

$$J_m(m) \sim \frac{6^{1/3}\Gamma(1/3)}{3^{1/2}m^{1/3}\pi}, \tag{45_1}$$

$$\bar{C}_m(1) \sim -\frac{6^{2/3}\Gamma(2/3)}{3^{1/2}m^{2/3}\pi}, \tag{45_2}$$

где через $\bar{C}_m$ (1) обозначен предел *) $C_m(e)\,/\sqrt{1-e^2}$ при $e \to 1-0$.

§ 284. Если заменим e в (44_1) на z, то увидим, что $|J_m(mz)|^{1/m}$ имеет при $m \to +\infty$ предел, равный $|g(z)|$. Из теории бесселевых функций известно, что к такому пределу мы приходим не только при $0 < e = z < 1$, но и при всех мнимых z, т. е. при $z = i|z|$. Мы получим, следовательно, что при $m \to \infty$

$$\lim|J_m(im|z|)|^{1/m} = |g(i|z|)|, \tag{46_1}$$

$$|g(i|z|)| = \frac{|z|\exp(1+|z|^2)^{1/2}}{1+(1+|z|^2)^{1/2}}, \tag{46_2}$$

причем (46_2) вытекает из определения (1_2) величины g. Если $|z_1| < |z_2|$, то

$$|g(i|z_1|)| < g(i|z_2|)|. \tag{47_1}$$

Действительно, логарифмическое дифференцирование формулы (46_2) показывает, что производная от $|g(i|z|)|$ по $|z|$ всюду положительна, откуда и следует (47_1). Из (17_2) вытекает далее формула

$$(-i)^m J_m(i|z|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}z\right|^{m+2n}}{n!\,(m+n)!}. \tag{47_2}$$

В соответствии с (47_1) функция (46_2) монотонно возрастает вместе с $|z|$ от $|g(0)| = 0$ до $|g(+\infty\cdot i)| = +\infty$. Отсюда вытекает, что трансцендентное уравнение $|g(i\rho^*)| = 1$ имеет один и только

---

*) Разумеется, интеграл (29), расходящийся при $z = 1$, может быть определен при $z = 1$ или как главное значение, или как комплексный интеграл, в котором путь интегрирования выбран так, чтобы можно было избежать полюсов.

один положительный корень ρ^* и что для этого корня ρ^* и для любого $|z|$

$$|g(i|z|)| \lesseqgtr 1, \tag{48}$$

при $|z| \lesseqgtr \rho^*$ соответственно.

Подставляя значение $|z| = {}^2/_3$ в (46_2), увидим, что число $|g({}^2/_3 i)|$ весьма мало отличается от 1. В силу (48) это означает, что ρ^* несколько меньше, чем 0,666... Фактически ρ^* несколько превышает 0,66, так как согласно (46_2) число $|g(0{,}66i)|$ меньше единицы. С точностью до первых семи цифр после запятой

$$\rho^* = 0{,}6627434. \tag{49}$$

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТЕПЕНЯМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

§ 285. В соответствии с § 266 при рассмотрении задачи двух тел в эллиптическом случае $(0 < e < 1)$ мы встречаемся с необходимостью решения трансцендентного уравнения Кеплера (7_3). Для нахождения разложения функции $u = u(e, \zeta)$, неявно определяемой уравнением (7_3), можно избрать два пути:

(i) на основании результатов, полученных в § 278, можно разложить разность $u - \zeta$ при любом фиксированном положительном значении эксцентриситета (<1) в ряд Фурье по синусам углов, кратных ζ, с коэффициентами, зависящими от e;

(ii) вместе с тем можно попытаться разложить функцию $u = u(e, \zeta)$ при любом фиксированном значении средней аномалии ζ в ряд Тейлора по степеням переменного эксцентриситета e с коэффициентами, зависящими от ζ. В этом случае

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\zeta) \frac{e^j}{j!}, \tag{50}$$

где

$$c_j = c_j(\zeta) = \left(\frac{\partial^j u(e, \zeta)}{\partial e^j} \right)_{e=0}$$

§ 286. Разложение, о котором говорится в пункте (i), представляется формулой (22_1). В силу (18_1) можно переписать эту формулу в виде

$$u = \zeta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(me)}{m} \sin m\zeta, \tag{51}$$

так как согласно (17_1) и (17_2)

$$(-1)^m J_{-m}(z) = J_m(z) = (-1)^m J_m(-z).$$

Из (44_1) и (3) или же непосредственно на основании теории рядов Фурье можно сделать вывод, что ряд (51) сходится равномерно по ζ при $-\infty < \zeta < \infty$ и фиксированном значении эксцентриситета $e(<1)$.

Вопрос о сходимости разложения, упоминаемого в пункте (*ii*), гораздо более сложен. Действительно, в этом случае мы имеем дело со степенным рядом по e (50), и вопрос о его сходимости решается, в отличие от случая ряда (51), исследованием особых точек аналитической функции $u = u(e, \zeta)$ в поле комплексных значений e при произвольных фиксированных вещественных значениях ζ (именно по этой причине потребуется рассматривать формулы, приводившиеся в § 284, также при комплексных значениях $z=e$). Кроме того, коэффициенты степенного ряда (50) зависят от ζ. Поэтому радиус сходимости ρ этого ряда является функцией $\rho(\zeta)$ вещественной угловой переменной ζ. Правда, достаточно исследовать функцию $\rho(\zeta)$ при $0 \leqslant \zeta \leqslant \pi/2$, так как ввиду симметрии эллиптического движения по отношению к обеим осям декартовых координат имеем

$$\rho(\zeta) = \rho(\zeta+\pi) = \rho(-\zeta) \qquad (-\infty < \zeta < +\infty). \tag{52}$$

В §§ 287—288 будет показано, что

$$\rho(\zeta) \geqslant \rho^* \tag{53_1}$$

при $-\infty < \zeta < \infty$ и что

$$\rho\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \rho^*. \tag{53_2}$$

Согласно (53_1) — (53_2) функция (52) имеет минимум, равный (49). Следовательно, в то время как ряд (51) сходится при любом ζ и $0 < e < 1$ (и даже в предельном случае $e = 1$ периодических столкновений), ряд (50) можно использовать при всех значениях переменной ζ, если только e заключено в пределах между 0 и $\rho^* = 0{,}6627\ldots$ Последняя постоянная значительно меньше единицы. Правда, в большинстве конкретных астрономических задач e достаточно близко к 0.

§ 287. С целью доказать (53_1) обозначим через σ некоторое положительное число, меньшее чем ρ^*. В силу (48) имеем неравенство $|g(i\sigma)| < 1$. Следовательно, в силу (46_1) существует такое положительное $\theta < 1$, что

$$|J_m(im\sigma)| < \mathrm{const} \cdot \theta^m.$$

Поскольку из (47_2) и (17_2) вытекает, что

$$|J_m(mz)| < |J_m(im\sigma)|$$

при $|z| < \sigma$, то

$$|J_m(mz)| < \mathrm{const} \cdot \theta^m$$

в круге $|z| < \sigma$. Так как $0 < \theta < 1$, то ясно, что если ζ имеет фиксированное вещественное значение, то ряд

$$u \equiv u(z, \zeta) = \zeta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(mz)}{m} \sin m\zeta \tag{54}$$

сходится равномерно в круге $|z| < \sigma$ на комплексной плоскости (z). Вместе с тем функции $J_m(mz)$, $m = 1, 2, \ldots$, являются аналитическими на всей плоскости (z), поскольку таковы согласно (17_2) функции $J_m(z)$. Следовательно, ряд (54) сходится при любом фиксированном вещественном ζ к аналитической функции z в круге $|z| < \sigma$. Функцию, представимую рядом (54), можно также разложить в степенной ряд

$$u(z, \zeta) = \sum \frac{c_j(\zeta)}{j!} z^j, \tag{55}$$

причем это разложение имеет место в круге $|z| < \sigma$ при любом фиксированном вещественном ζ. Так как σ — любое положительное число, меньшее ρ^*, и так как при $z = e$ формулы (54), (55) совпадают с (50), (51), то доказательство неравенства (53_1) можно считать законченным.

§ 288. Остается доказать формулу (53_2), которая показывает, что число ρ^* не может быть заменено в (53_1) меньшим числом, если допустимы все значения угловой переменной (7_2).

Прежде всего заметим, что если e — фиксированное положительное число, то оба ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m J_{2m+1}(i(2m+1)e)}{i(2m+1)}, \tag{56_1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+{}^1/_2)^{2m+2n+1} e^{2m+2n+1}}{n!\,(2m+n+1)!\,(2m+1)} \tag{56_2}$$

или расходятся к $+\infty$, или же сходятся к одному и тому же положительному числу. Этот вывод можно сделать на основании разложения (47_2), справедливого при любом $|z|$, из которого следует неравенство

$$i \cdot (-1)^m J_{2m+1}(i(2m+1)e) = |J_{2m+1}(i(2m+1)e)| > 0. \tag{57}$$

Так как $e > 0$, то члены рядов (56_1) и (56_2) положительны и их можно расположить в произвольном порядке. По этой причине можно записать ряд (56_2) после перегруппировки членов в виде обычного степенного ряда по e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2n+1} \qquad (a_n = \text{const} > 0), \tag{58}$$

так что три ряда (56_1), (56_2), (58) с положительными членами все расходятся к $+\infty$ при фиксированном $e > 0$ или же все сходятся к одному и тому же числу. Так как формулы (46_1), (48) и (57) показывают, что ряд (56_1) сходится при $e < \rho^*$ и расходится при $e > \rho^*$, то это имеет место также и для ряда (58). Однако функция, представленная рядом (56_1), равна в силу (54)

$$-\frac{1}{2} i\cdot u\left(ei, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, ряд (55) совпадает при $\zeta = \pi / 2$ с рядом (58), если положить в первом $z = ei$. Так как степенной ряд (58) сходится при $e < \rho^*$ и расходится при $e > \rho^*$ и так как радиус сходимости ряда (55) при $\zeta = \pi / 2$ равен $\rho(\pi / 2)$ по определению, то доказательство формулы (53_2) можно считать законченным *).

§ 289. Выражения для коэффициентов $c_j(\zeta)$ ряда (50) (или (55)) в явном виде могут быть получены с помощью правила дифференцирования Лагранжа. Согласно этому правилу, если три переменные u, ζ, e связаны соотношением

$$u = \zeta + eH(u), \tag{59}$$

то

$$G(u) = G(\zeta) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\zeta^{j-1}} \left\{ [H(\zeta)]^j \frac{d}{d\zeta} G(\zeta) \right\} {}^{**}). \tag{60}$$

Полагая, в частности, $G(u) = u$, получим в силу (60), что

$$u = \zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\zeta^{j-1}} [H(\zeta)]^j. \tag{61}$$

---

*) В §§ 287—288 сначала доказывается формула (53_1), а затем уже (53_2). Однако, поскольку коэффициенты ряда (58) положительны, из изложенного в § 288 видно, что можно было бы сначала доказать (53_2), а затем (53_1). Формула же (53_2) может быть получена непосредственно, если использовать результат теории функций, согласно которому степенной ряд $\Sigma a_n z^n$, имеющий конечный радиус сходимости r и вещественные неотрицательные коэффициенты a_n, должен представлять функцию, имеющую при $z = r$ особую точку (Виванти — Принсгейм).

**) Этот ряд носит название ряда Лагранжа. (*Прим. перев.*)

Конечно, предполагается, что заданные функции H, G таковы, что разложение (60) допустимо. В частности, формула (61) предполагает, что при заданной функции H уравнение (59) действительно определяет неявно u как аналитическую функцию e при фиксированном ζ и что эта аналитическая функция имеет аналитическую ветвь, где эта функция равна ζ при $e = 0$. Тогда эта ветвь может быть, конечно, разложена при малых $|e|$ в ряд Тейлора. Таким образом, формула Лагранжа (61) лишь утверждает, что если ζ фиксировано, то производная порядка $j (= 1, 2, \ldots)$ рассматриваемой ветви u по e совпадает с производной от $\dfrac{\partial^{j-1}}{\partial u^{j-1}}[H(u)]^j$ при $u = \zeta$. Справедливость этого факта легко проверить с помощью последовательного дифференцирования неявной функции, определяемой соотношением (59).

§ 290. Положим, в частности, $H(u) = \sin u$. Тогда (59) совпадает с (7_3) и, следовательно, (61) с (50). Таким образом, в формуле (50)

$$c_j(\zeta) = \frac{d^{j-1}}{d\zeta^{j-1}} \sin^j \zeta, \quad j = 1, 2, \ldots, c_0(\zeta) = \zeta.$$

Однако по формуле Моавра функция $\sin^j \zeta$ представляется линейной комбинацией $1, \cos\zeta, \ldots, \cos j\zeta$ или $\sin\zeta, \ldots, \sin j\zeta$, если j — четное или нечетное число соответственно. Производная порядка $(j - 1)$ от $\sin^j \zeta$ представится в обоих случаях линейной комбинацией $\sin\zeta, \ldots, \sin j\zeta$. Выполняя вычисления, легко найдем, что

$$c_j(\zeta) = \frac{d^{j-1}\sin^j\zeta}{d\zeta^{j-1}} = \sum_{k=0}^{[j/2]} (j-2k)^{k-1} \frac{(-1)^k}{2^{j-1}} \binom{j}{k} \sin(j-2k)\zeta, \tag{62}$$

где через $[j/2]$ обозначается целая часть числа $^1/_2 j$. Таким образом,

$$c_0(\zeta) = \zeta, \quad c_j(\zeta) = \sum_{l=1}^{j} \gamma_{jl} \sin l\zeta, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{63}$$

где постоянные γ_{jl} определяются согласно (62).

На этом можно считать законченным определение в явном виде коэффициентов разложения (50), рассматривавшегося в §§ 285—288.

§ 291. В §§ 287—288 критерий (53_1)—(53_2) пригодности решения уравнения (7_3) в виде ряда (50) был получен с помощью асимптотических свойств коэффициентов ряда Фурье (51), представляющего решение уравнения (7_3). Однако можно прийти к (50) и к $(53_1)-(53_2)$ и без помощи рядов Фурье, если только применить при анализе этого уравнения теорию аналитических функций. А именно, положив

$$F(u, e, \zeta)=u-e\sin u-\zeta, \tag{64}$$

запишем (7_3) в виде $F(u, e, \zeta)=0$. Таким образом, задача заключается в нахождении при фиксированном ζ той ветви многозначной аналитической функции $u=u(e, \zeta)$, определяемой уравнением $F=0$, для которой $u(0, \zeta)=\zeta$. Однако частная производная функции (64) по переменной (комплексной) u равна

$$F_u(u, e, \zeta)\equiv 1-e\cos u. \tag{65}$$

Следовательно, $|F_u|>\mathrm{const}>0$ при любом ζ, если значения комплексной переменной u достаточно близки к вещественной оси, а комплексная переменная e достаточно мала по модулю. По теореме о локальном существовании неявной функции (аналитической) решение $u=u(u, \zeta)$ уравнения $F=0$ может быть представлено в виде ряда (50), причем этот ряд имеет при любом фиксированном вещественном ζ конечный радиус сходимости $\rho=\rho(\zeta)$ и неравенство (53_1) справедливо при достаточно малом положительном ρ^*. Тот факт, что это неравенство справедливо при значении ρ^*, равном (49), может быть доказан при непосредственном анализе уравнений $F=0$, $F_u=0$. К тому же результату приводит непосредственное исследование «ближайших особенностей» на римановой поверхности $u=u(e, \zeta)$ при фиксированном вещественном ζ (см. также замечание в конце § 292) *).

---

*) Упомянутое только что непосредственное доказательство $(53_1)-(53_2)$ сыграло важную историческую роль в теории аналитических функций.

Лагранж получил разложение (50) формальным путем и не доказал, что это разложение действительно представляет решение уравнения Кеплера при каких-либо конкретных значениях e, например, при $e<1/1000$. Несколько десятков лет спустя Лапласу показалось, что он заполнил этот пробел, причем Лаплас пришел именно к $(53_1)-(53_2)$. Однако фактически соображения Лапласа носят чисто эвристический характер и ничего не доказывают.

Эта неудача вполне понятна, так как данную проблему можно решить лишь на основе анализа проведения функций в комплексной области (см. замечание по поводу (*ii*) в § 286), для которого во времена Лапласа еще не было средств.

Заметим, что основным толчком, приведшим Коши к открытиям в теории функций комплексного переменного, послужило его желание провести удовлетворительный анализ именно ряда Лагранжа.

Коши пришел к фундаментальной теореме, связывающей радиус сходимости с расположением ближайшей особой точки, а также к своему принципу максимума именно в статье, где рассматривались соотношения $(53_1)-(53_2)$. Такие факты, которые сейчас известны как принцип аргумента и теорема Руше, также были обнаружены в связи с проблемами, возникшими при исследовании уравнения Кеплера.

§ 292. Следует упомянуть, что решение уравнения Кеплера (7_3) сводится к нахождению обратной функции. Действительно, если положить

$$f(u, \zeta) = \frac{u - \zeta}{\sin u}, \tag{66}$$

то уравнение (7_3) можно записать в виде

$$e = f(u, \zeta).$$

Следовательно, определение функции $u = u(e, \zeta)$ равносильно нахождению функции, обратной по отношению к мероморфной функции (66) переменной u при любом фиксированном вещественном ζ. Разумеется (см. § 291), требуется определить ту ветвь обратной функции $u = u(e, \zeta)$, для которой $u(0, \zeta) = \zeta$. Последнее условие необходимо, так как мероморфная функция (66) трансцендентна и риманова поверхность для ее обращения имеет при любом фиксированном ζ бесконечно много листов. В соответствии со сказанным число $\rho(\zeta)$ в (53_1) равно расстоянию между $e = 0$ и ближайшей особой точкой функции $u = u(e, \zeta)$ на том листе римановой поверхности, на котором числитель в (66) обращается при $e = 0$ в нуль.

Конечные особые точки функции, обратной по отношению к мероморфной функции, являются, как известно, либо алгебраическими точками разветвления, либо трансцендентными особыми точками. Первые определяются по нулям производной, а вторые — по асимптотическим значениям мероморфной функции *).

В стандартном доказательстве (53_1)—(53_2), приводимом обычно в учебниках и следующем пути, указанному в § 291, учитываются только нули производной функции (66) переменной u (при фиксированном вещественном ζ). Поэтому это доказательство нельзя считать полным **).

§ 293. Однако такое доказательство легко исправить, поскольку оказывается, что асимптотические значения не играют в данном случае никакой роли. Действительно, целая функция $\sin u$ переменной u не имеет конечного асимптотического значения (при любом фиксированном ζ). Следовательно, обратная функция $u = u(e, \zeta)$ по отношению к функции $e = f(u, \zeta)$ не может иметь

---

*) Например, для обратной функции по отношению к $w = \exp z$ точка $w = 0$ является особой точкой логарифмического типа, соответствующей единственному асимптотическому значению $w = 0$ функции $\exp z$.

**) В дополнение к примечанию в § 291 следует упомянуть, что этот недостаток в доказательстве условий (53_1)—(53_2) был замечен Гурвицем когда он разрабатывал теорию асимптотических значений.

трансцендентной особой точки при конечном e, отличном от нуля. Трансцендентная же особая точка при $e = 0$ не может принадлежать интересующему нас листу римановой поверхности для $u = u(e, \zeta)$, поскольку на этом листе функция $u(e, \zeta)$ аналитическая в точке $e = 0$. Таким образом, доказательство условий (53_1) — (53_2) может быть основано лишь на анализе алгебраических особых точек функции $u = u(e, \zeta)$. Разумеется, эти особые точки должны выбираться на соответствующем листе.

§ 294. Остановимся опять на методе, указанном в §§ 284—289. Пусть комплексная переменная z опять ограничена неравенством $|z| < 1$; определим величину g по формуле (1_2), так что

$$g(z) = \frac{z \exp(1 - z^2)^{1/2}}{1 + (1 - z^2)^{1/2}} = \frac{|z| \exp\{\psi i + (1 - |z|^2 \exp 2\psi i)^{1/2}\}}{1 + (1 - |z|^2 \exp 2\psi i)^{1/2}}, \qquad (67)$$

где $z = |z| \exp \psi i$ и, разумеется, $(1 - z^2)^{1/2} = 1$ при $z = 0$. Мы используем тот факт, что наряду с (46_2) имеет место неравенство *)

$$|J_m(mz)| \leqslant |g(z)|^m. \qquad (68)$$

Непосредственный анализ элементарной функции (67) показывает, что два условия

$$|g(R \exp \psi i)| = 1, \qquad |g(|z| \exp \psi i)| < 1, \qquad (69)$$

если $|z| < R$, определяют единственным образом непрерывную функцию R угловой переменной ψ. Эта функция обладает свойством

$$R(\psi) = R(\psi + \pi) = R(-\psi) \qquad (-\infty < \psi < +\infty) \qquad (70)$$

Кроме того,

$$R(\psi_1) > R(\psi_2), \qquad (71)$$

если $0 < \psi_1 < \psi_2 \leqslant {}^1\!/_2\pi$.

Из (48) и (69) вытекает, что $R(\pi / 2) = \rho^*$, а (3) показывает, что $R(\psi) \to 1$ при $\psi \to 0$. Следовательно, из (70) и (71) видно, что если через Γ обозначить кривую $z = R(\psi) \exp \psi i$ на комплексной плоскости $z = |z| \exp \psi i$, то область, ограничиваемая Γ,

---

*) Оно выводится в теории бесселевых функций и носит название неравенства Каптейна.

имеет вид бисимметричной выпуклой линзы, находящейся в кольце между окружностями с радиусами 1 и ρ^*. Эта кривая характеризуется также тем, что

$$|g(z)| = 1 \qquad (72)$$

на Г и

$$|g(z)| < 1 \qquad (72_1)$$

внутри Г.

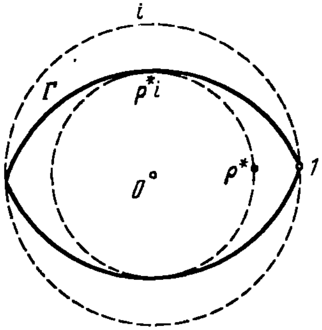

Рис. 9.

Точки заострения кривой Г, лежащие на вещественной оси (рис. 9), соответствуют алгебраическим точкам разветвления $z = \pm 1$ функции (67).

§ 295. Из сказанного выше следует, что решение $u = u(z, \zeta)$ уравнения Кеплера (7_3), причем $z = e$ и $u(0, \zeta) = \zeta$, является аналитическим при любом фиксированном вещественном ζ не только в круге $|z| < \rho^*$ (как было доказано в § 287), но также в большей области, ограничиваемой кривой Г (см. рис. 9). К такому выводу мы придем сразу, если применим рассуждения, использовавшиеся в § 287, и формулы (68) и (72) вместо (46_1) и (48) соответственно.

Так как функция $u(z, \zeta)$ при любом вещественном ζ аналитическая внутри кривой Г на плоскости z, то, как это видно из рис. 9, при любом положительном $e_0 < 1$ существует положительное число $\varkappa = \varkappa(e_0)$ такое, что функция $u(e, \zeta)$ может быть разложена в ряд по степеням $(e - e_0)$ с коэффициентами, зависящими от ζ, сходящийся при любом ζ, если только $|e - e_0| < \varkappa(e_0)$. Полагая, что $e_0 \to 0$, придем, как это видно из рис. 9, к (53_1).

§ 296. Из сказанного выше также вытекает, что функция $u = u(e, \zeta)$ может быть представлена рядом, сходящимся при любом $e = z$ внутри Г и при любом вещественном ζ.

Действительно, пусть функция $Z = Z(z)$ определяет конформное и взаимно однозначное отображение области внутри Г на круг единичного радиуса на плоскости Z. Тогда функция $u(z, \zeta)$ оказывается в силу этого отображения функцией Z и ζ, аналитической при $|Z| < 1$ и при любом фиксированном ζ. Таким образом, при $|Z| < 1$ мы имеем разложение

$$u(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z^n, \qquad (73)$$

где $A_n = A_n(\zeta)$, $Z = Z(z)$.

Можно положить $Z(z) = g(z)$. Действительно, сравнивая тогда (70), (71) и (72), где $R = R(\psi)$, увидим, что между кривой Г на плоскости z и кругом $|Z| = 1$ на плоскости Z имеется при $Z(z) = g(z)$ непрерывное взаимно однозначное соответствие. Так как функция (67) при $|z| < 1$ и, следовательно, внутри кривой Г (см. рис. 9) аналитическая, то из известной теоремы о конформном отображении (Дарбу) вытекает, что функция $g(z)$ определяет конформное взаимно однозначное отображение области внутри Г на область $|Z| < 1$.

Область внутри Г содержит в соответствии с рис. 9 интервал $0 \leqslant z = e < 1$. Следовательно, полагая $Z = g$ и $z = e$ в (73), увидим, что разложение

$$u(e, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\zeta)[g(e)]^n \quad [\text{см. } (1_2)] \tag{74}$$

имеет место, как и (51), но, в отличие от (50), при любом положительном $e < 1$ и при любом вещественном ζ.

§ **297.** Тот факт, что область применения разложения (50) ограничивается условиями $(53_1)-(53_2)$ и (49), в то время как разложение (74) остается справедливым в большей области, можно объяснить тем, что (50) и (74) являются результатом двух различных перегруппировок членов одного и того же формального двойного ряда. От (74) к (50) мы придем, разлагая функцию (1_2), а также ее степени $[g(e)]^2$, $[g(e)]^3$, ... по степеням e, а затем перегруппировывая его члены формальным образом. Наоборот, если мы используем выражение (62) для коэффициентов ряда (50), то можно прийти к ряду (74).

§ **298.** Аналогичное объяснение (наряду с тем, какое было приведено в § 286) можно дать тому факту, что область применимости ряда (50) ограничивается, а ряда (51) не ограничивается условиями $(53_1)-(53_2)$.

Прежде всего подстановка (62) или (63) в (50) и последующая формальная перегруппировка членов приводит к двойному ряду с членами вида $\gamma_{jl} e^j \sin l\zeta$, где γ_{jl} — численные коэффициенты. Кроме того, (17_2) показывает, что (51) можно записать формально в виде двойного ряда такого же вида. Применим далее (46_1), (47_2), (48) к последнему двойному ряду. Таким же путем, как это было сделано в §§ 287—288, легко найдем, рассматривая соответствующие мажоранты, что двойной ряд, соответствующий (51), абсолютно сходится и поэтому его можно путем перегруппировки членов записать в виде (50), если $e (> 0)$ меньше, чем ρ^*, а $\zeta(\gtreqless 0)$ произвольное. Таким образом, суть дела в том, что представление двойного ряда в виде (51) более выгодно с точки зрения его сходимости, чем запись этого ряда в виде (50) *), так как (51) сходится при любом ζ и $0 \leqslant e < 1$, а не только при $0 \leqslant e < \rho^* = 0{,}662\ldots$

§ 299. В §§ 283–298 было приведено исследование ряда Фурье (22_1), расположенного по степеням эксцентриситета. Поведение остальных рядов Фурье, приводимых в § 278, анализируется аналогичным образом.

Например, формулы (5_1) показывают, что для представления в виде рядов по степеням e (с коэффициентами, зависящими от ζ) прямоугольных координат достаточно разложить в такой ряд $\exp iu$. Однако разложение (50) для u имеет место, если выполняются условия (53_1)—(53_2), а $\cos u$ и $\sin u$ — целые функции u. Следовательно, ряд для $\exp iu$, а вместе с тем и ряды для функций (5_1) справедливы при любом значении переменной ζ лишь при условии, что $e < \rho^*$ ($=0{,}662\ldots$). В явной форме ряд для $\exp iu$ можно записать следующим образом:

$$\exp iu = \exp \zeta i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\zeta^{j-1}} (\sin^j \zeta \exp \zeta i). \tag{75}$$

К такому ряду мы придем на основании (59), если положим там $G(u) = \exp iu$, $H(\zeta) = \sin \zeta$.

СИНОДИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

§ 300. Рассмотрим уравнения (1_1) § 258, обозначая координаты через $\bar{x}$, $\bar{y}$ (вместо x, y). Тогда формулы (1_2)—(2_2) § 258 перепишутся в виде

$$L = \frac{1}{2}(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2) + \frac{1}{r}, \tag{1_1}$$

$$\frac{1}{2}(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2) - \frac{1}{r} = h, \tag{1_2}$$

$$\bar{x}\bar{y}' - \bar{y}\bar{x}' = c, \tag{1_3}$$

---

*) Формальное совпадение (50) и (51) было замечено Лагранжем, который следовал противоположным путем. Действительно, Лагранж (см. примечание в § 291) сначала нашел степенной ряд (50), а затем его формально преобразовал с помощью (62) в ряд Фурье (51), придя таким образом к трансцендентным функциям (17_2), носящим сейчас название функций Бесселя (см. в конце § 277).

где $h \lesseqqgtr 0$, $c \lesseqqgtr 0$ и $r = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}$. Формулы же $(15_1)-(15_3)$ § 263 примут вид

$$\bar{x} = r\cos(w + \omega), \qquad \bar{y} = r\sin(w + \omega), \tag{2_1}$$

$$\omega = (w)_{t=t_0}, \qquad (\min r(t) = (r)_{t=t_0}). \tag{2_2}$$

Функция Гамильтона, соответствующая функции Лагранжа (1_1), равна

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2) - \frac{1}{r}, \tag{3_1}$$

где

$$r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \qquad \bar{X} = \bar{x}', \bar{Y} = \bar{y}'. \tag{3_2}$$

Введем вместо системы прямоугольных координат $(\bar{x}, \bar{y})$ другую систему (x, y), вращающуюся вокруг начала $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ с постоянной угловой скоростью -1, так что

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos t - y\sin t, \\ \bar{y} &= x\sin t + y\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

По причинам, которые будут ясны ниже (см. § 517), вращающуюся систему координат (x, y) назовем синодической, а невращающуюся систему $(\bar{x}, \bar{y})$ — сидерической.

Согласно изложенному в § 95, функция Лагранжа в переменных x, y выразится, как это легко видеть, если использовать (4), формулой

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx') + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}r^2\right), \tag{5_1}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{5_2}$$

В силу изложенного в § 229 функция Гамильтона, соответствующая (5_1), равна

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (xY - yX) - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}r^2\right), \tag{6_1}$$

где

$$X = x' - y, \qquad Y = y' + x. \tag{6_2}$$

Подстановка (4) в $(1_2)-(1_3)$ приводит далее к формулам

$$(x'^2 + y'^2) - \left(\frac{2}{r} + r^2\right) = -C, \tag{7_1}$$

$$-\frac{1}{2}C = h - c \tag{7_2}$$

(см. § 210). Из $(6_1)-(6_2)$, а также из изложенного в § 155 видно, что соотношение (7_1) представляет собой интеграл энергии необратимой динамической системы с функцией Лагранжа (5_1). Постоянная энергии во вращающейся системе координат обозначена через $-{}^1/_2C$. Эта относительная, или синодическая, энергия равна в силу (7_2) разности между сидерической энергией h и (сидерическим) кинетическим моментом c.

§ 301. Рассмотрим, в частности, произвольную эллиптическую (включая круговую, но исключая прямолинейный отрезок) траекторию, так что $h<0$ и $c\neq 0$ (см. § 242). Тогда в силу (4) § 241

$$h=-\frac{1}{2}a^{-1}, \tag{8_1}$$

$$c^2=a(1-e^2) \tag{8_2}$$

и согласно (15) § 276

$$n^2=a^{-3}, \tag{9_1}$$

$$T=2\pi:n, \tag{9_2}$$

где T — период (сидерический), $c>0$ для прямого и $c<0$ для обратного движения в сидерической плоскости (см. § 242). Согласно (18) § 265 направление движения можно учесть, приписав величине n тот же знак, какой имеет c. Таким образом, в $(9_1)-(9_2)$ вводится тогда квадратный корень $\alpha=\sqrt{a}$, который берется с тем же знаком, что и n. Если через $A^{1/2}$ обозначить положительный квадратный корень числа $A>0$, то согласно (8_1), (8_2)

$$\alpha=a^{1/2}\operatorname{sgn}c=\sqrt{a}\gtrless 0, \tag{10_1}$$

$$h=-\frac{1}{2}\alpha^{-2}, \tag{10_2}$$

$$c=\alpha(1-e^2)^{1/2}, \tag{10_3}$$

а формулы (9_1), (9_2) и (7_2) запишутся в виде

$$n=\alpha^{-3}, \tag{11_1}$$

$$T=2\pi\alpha^3, \tag{11_2}$$

$$C=2\alpha(1-e^2)^{1/2}+\alpha^{-2}. \tag{11_3}$$

Заметим, что период (9_2) имеет тот же знак, что и c.

§ 302. Нет необходимости подчеркивать, что слова «прямое», «обратное», «период» в § 301 имеют смысл, если рассматривать движение в невращающейся координатной системе $(\bar{x}, \bar{y})$. Положение становится совсем иным, если рассматривать движение в синодической системе координат (x, y). Движение по эллиптической орбите может быть с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе координат прямым при одном t и обратным при некотором другом t. Действительно, подстановка (2_1)—(2_2) в (4) приводит к формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(w - t + \omega), \\ y &= r\sin(w - t + \omega) \quad (\omega = \text{const}), \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

которые показывают, что направление синодического движения при данном t определяется знаком производной $(w - t + \omega)'$, т. е. функцией $w' - 1$. Так как из (1_3) и (2_1)—(2_2) следует, что $r^2 w' = c$, то синодическое движение будет прямым при $c > r^2$ и обратным при $c < r^2 (c \neq 0)$. Однако максимальное и минимальное значения фокального радиус-вектора $r = r(t)$ эллипса равны $a(1 + e)$, $a(1 - e)$ соответственно. Следовательно, направление синодического движения меняется при некотором $t = t^*$ тогда и только тогда, когда постоянные интегрирования (8_1)—(8_2) таковы, что постоянная (10_1) заключена между двумя положительными границами

$$\frac{a^2(1+e)^2}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{a^2(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}, \quad 0 < e < 1,$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$\frac{(1-e)^{1/3}}{1+e} < a < \frac{(1+e)^{1/3}}{1-e}.$$

§ 303. Любое сидерически обратное эллиптическое движение является также синодически обратным при любом t. Это вытекает из условия $c < r^2$ (см. § 302), которое имеет место, поскольку $c < 0$.

Вместе с тем сидерически прямое эллиптическое движение будет синодически прямым при любом t лишь тогда, когда a меньше, чем

$$\frac{(1-e)^{1/3}}{1+e},$$

где $0 \leqslant e < 1$ (при этом $a > 1$). К такому выводу придем, если в неравенство $c > r^2$, где $c^2 = a(1 - e^2)$, подставим $\max r(t) = a(1 + e)$.

§ 304. Применим критерий, указанный в предыдущем параграфе к частному случаю $e = 0$. Мы увидим, что любое сидерическое обратное круговое движение радиуса a $(0 < a < +\infty)$ является также синодически обратным и что сидерически прямое круговое движение будет синодически прямым, если $0 < a < 1$, и синодически обратным, если $1 < a < \infty$. Наконец, сидерически прямое круговое движение с радиусом $a = 1$ соответствует единственной точке $x = \cos\omega$, $y = \sin\omega$ в синодической системе координат, причем ω — произвольная постоянная. Действительно, если $\alpha \equiv \sqrt{a} = +1$, то в силу (11_1) $n = 1$. Таким образом, угловая скорость сидерического кругового движения постоянна и равна 1 и, следовательно, после преобразования (4) мы получим, что в синодической системе координат тело находится в покое (см. (4а) § 302).

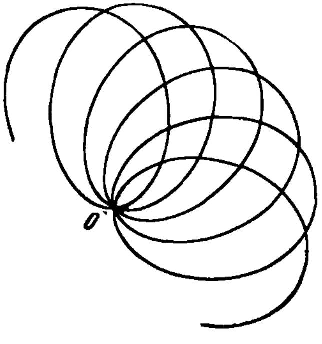

Рис. 10.

§ 305. Рассмотрим вопрос о периодичности синодического движения. С этой точки зрения случай $0 < e < 1$ полностью отличается от кругового случая $e = 0$.

Исключим сначала случай $e = 0$. Тогда, заметив, что период вращения синодической системы координат равен 2π, можем сделать вывод, что если постоянная n — рациональное число, то синодическая траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$ через промежуток времени, содержащий достаточно много сидерических периодов (9_2), замкнется сама собой.

В случае же иррационального n эта траектория не будет замкнутой. Она будет заполнять при $-\infty < t < \infty$ (соображения те же, что и в § 215) всюду плотно круг с центром в $(x, y) = (0, 0)$ и радиусом, равным $\max r(t) = a(1 + e)$. Для рационального n, например для $n = p \,/\, q$, где p, q — взаимно простые числа, синодическая траектория замыкается после $|p|$ сидерических периодов (но не раньше). Действительно, из (4) и (9_2) видно, что если через τ обозначить наименьший синодический период, то

$$\pm\tau = pT = 2\pi q, \tag{12}$$

где $n = p : q$, $(p, q) = 1$, $(e \neq 0)$.

В частности, наименьшие сидерический и синодический периоды T и τ равны между собой лишь в том случае, когда T делится на период 2π вращения системы координат (x, y), т. е. когда n равно $1 \,/\, q$, где q — некоторое целое число.

§ 306. В § 307 будет показано, что в круговом случае имеет место совсем иная картина, так как тогда синодическое движение является периодическим с наименьшим периодом

$$\tau^* = \frac{2\pi}{n-1} \tag{13}$$

как при рациональном, так и при иррациональном n.

Заметим, что (13) отличается от (12), если период τ существует, т. е. если n — рациональное. Действительно, тогда (13) можно переписать в виде

$$\tau^* = \frac{2\pi q}{p-q}, \tag{13a}$$

где $n = p : q$, $(p, q) = 1$ $(e = 0)$. Таким образом, если n, соответствующее формуле (11_1), имеет фиксированное рациональное значение и если e варьируется, то период (12) не зависит от $e (\neq 0)$ и, следовательно, совпадает с $\lim \tau$ при $e \to 0$. Вместе с тем формулы (12) и (13а) показывают, что этот предел τ некругового синодического (наименьшего) периода оказывается равным не наименьшему синодическому периоду τ^* кругового движения, а некоторой кратности τ^*, а именно $(p-q)\tau^*$. (Это отсутствие непрерывной зависимости приобретает важное значение в теории периодических решений ограниченной задачи трех тел.)

Представляют интерес те частные значения $n = p : q$, для которых такая потеря непрерывности не происходит, т. е. для которых $p - q = 1$. Такие значения $n = \alpha^{-3} = \sqrt{a^{-3}}$, равные $n = p : (p+1)$, $p = 1, 2, \ldots$ и $p = -2, -3, \ldots$, будем рассматривать как критические. Заметим, что из условия $p - q = 1$, при котором $\lim \tau = -\tau^*$, получим те же самые критические значения n.

Мы молча предполагали, что $n \neq 1$, так как при $n = 1$ формула (13) теряет смысл. Случай, когда $n = 1$, упоминался выше в конце § 304. В этом случае синодическое круговое движение вырождается в точку равновесия, так что его период произволен.

§ 307. Для того чтобы доказать формулу (13) для рационального и иррационального n, заметим, что круговое сидерическое движение $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $\bar{y} = \bar{y}(t)$ представляет собой равномерное движение с угловой скоростью n, и при соответствующем выборе начала отсчета t имеем $\bar{x} = a \cos nt$, $\bar{y} = a \sin nt$. Синодическое движение представится согласно (4) формулами

$$x = a\cos(n-1)t, \qquad y = a\sin(n-1)t.$$

Из этих формул вытекает (13), а также факт вырождения в точку равновесия при $n = 1$.

Целесообразно переписать (13) в виде $\tau^* = 2\pi m$, причем

$$m = \frac{1}{n-1} \tag{14$_1$}$$

и в силу (11₁), (11₃), где $e = 0$, $n \neq 1$,

$$\alpha \equiv \sqrt{a} = \frac{m^{1/3}}{(1+m)^{1/3}}, \tag{14$_2$}$$

$$C = \frac{1+3m}{m^{2/3}(1+m^2)^{1/3}}. \tag{14$_3$}$$

В исключительном случае $n = 1$ из (11₁), (11₃) следует, что

$$\alpha \equiv \sqrt{a} = 1, \quad C = 3 \qquad (e = 0). \tag{15}$$

Заметим, что число m будет рациональным тогда и только тогда, когда таковым является n, и что m — целое ($\neq 0$) тогда и только тогда, когда n — критическое (см. § 306). Это вытекает из (14₁).

§ 308. Если значение сидерической постоянной энергии $h (< 0)$ задано, то существует два и только два случая круговых движений, соответствующих этому h. Действительно, тогда мы определим на основании (10₂) однозначно $\alpha \equiv \sqrt{a} \gtrless 0$, а сидерический период определится согласно (11₁)—(11₂). Картина становится более сложной, если будем рассматривать всевозможные значения $\alpha (\neq 0)$ от $-\infty$ до $+\infty$ в зависимости не от сидерической постоянной энергии h, а от синодической постоянной, равной $-{}^1/_2 C$ согласно (7₁)—(7₂). Мы получим тогда не простое соответствие 1 к 2, а такое, которое можно описать следующим образом.

Исключим сначала не имеющий смысла случай $\alpha = 0$ (движение по кругу с нулевым радиусом $a = \alpha^2$), а также исключительный случай $\alpha = 1$. Тогда эти исключенные значения $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ разбивают весь бесконечный интервал $-\infty < \alpha < +\infty$ значений α для круговых траекторий на три интервала:

$$-\infty < \alpha < 0, \tag{16$_1$}$$

$$0 < \alpha < 1, \tag{16$_2$}$$

$$1 < \alpha < +\infty, \tag{16$_3$}$$

причем интервал (16₁) соответствует сидерическим обратным круговым движениям, а интервалы (16_2), (16_3) — сидерическим прямым движениям. Соответствующие интервалы изменения C таковы:

$$-\infty < C < +\infty, \qquad (17_1)$$

$$+\infty > C > 3, \qquad (17_2)$$

$$3 < C < +\infty, \qquad (17_3)$$

причем соответствие между интервалами (16_ν) и (17_ν) взаимно однозначное при любом $\nu = 1, 2, 3$ и неравенства (17_ν) выписаны так, что они указывают на возрастание или убывание функции $C = C(\alpha)$ в интервале (16_ν), $\nu = 1, 2, 3$. Например, (16_2), (16_3) и (17_2), (17_3) показывают, что C стремится к 3, если α стремится к исключительному значению (15), как возрастая, так и убывая. Кроме того, из (16_1) и (17_1) следует, что значение $C=3$ соответствует также и не исключительному значению $\alpha(<0)$. Кстати, последнее равно $\alpha = -{}^1/_2$, так как, исключая m в (14_2) — (14_3), получим, что

$$C(\alpha) = 2\alpha + \alpha^{-2}$$

(см. (11_3) при $C = 0$).

Производная функции $C(\alpha)$ по α равна $2(1 - \alpha^{-3})$. Следовательно, эта функция монотонно возрастает в интервалах (16_1), (16_3) и монотонно убывает в интервале (16_2). Так как $C(\pm\infty) = +\infty$, $C(\pm 0) = \pm\infty$, $C(1 \pm 0) = 3$, то поведение функции $C(\alpha)$, выражаемое неравенством (17_1) — (17_3), полностью подтверждается.

§ 309. Так как значение $\alpha = 0$ исключено, то формулу для C можно переписать в виде кубического уравнения относительно α или $1/\alpha$:

$$2\alpha^3 - C\alpha^2 + 1 = 0 \qquad (18_1)$$

или

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - C\cdot\frac{1}{\alpha} + 2 = 0. \qquad (18_2)$$

Из (16_1) — (17_3) следует, что уравнение (18_1)

(i) имеет один и только один отрицательный корень

$$\alpha = \alpha_-(C), \quad -\infty < C < +\infty;$$

(ii) не имеет положительных корней при $C < 3$ и имеет два различных положительных корня $\alpha_+ = \alpha_+(C)$, $\alpha^+ = \alpha^+(C)$ при $C > 3$, причем $\alpha_+ < 1 < \alpha^+$ при $C > 3$ и $\alpha_+ \to 1 - 0$, $\alpha^+ \to 1 + 0$ при $C \to 3 + 0$.

Дискриминант кубического уравнения (18$_2$) равен

$$-4(-C)^3-27\cdot 2^2$$

или

$$4(C^3-3^3),$$

и он >0, $=0$ или <0, если $C>3$, $C=3$ или $C<3$ соответственно. Таким образом, (*i*)—(*ii*) следует не только из (16$_1$)—(17$_3$), но и непосредственно из (18$_2$) или (18$_1$).

Выпишем также следующие неравенства, на которые будем ссылаться ниже:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha_-^2<\alpha_+^2,\qquad \alpha_-^2>\dfrac{1}{\alpha_+},\qquad \alpha_+^2<\dfrac{1}{\alpha^+},\\ (C>3;\ \alpha_-<0<\alpha_+<1<\alpha^+).\end{array}\right\}\qquad(19)$$

Эти неравенства легко получить, если непосредственно или с помощью дифференцирования (18$_1$)—(18$_2$) использовать (16$_1$)—(17$_3$) и определения (*i*) — (*ii*) корней α_+, α^+, α_- при $C>3$ *).

§ 310. Рассмотрим теперь предельный случай $c=0$ ($e=1$) сидерического эллиптического движения при произвольной большой оси $2a$.

Согласно изложенному в § 268 это прямолинейное сидерическое движение может быть представлено с помощью следующих формул:

$$\bar{x}=a(\cos u-1),\qquad \bar{y}\equiv 0,\qquad(20_1)$$

$$t=\frac{u-\sin u}{n},\qquad(20_2)$$

$$n^2a^3=1,\qquad(20_3)$$

где u — эксцентрическая аномалия. Знак постоянной n, т. е. направление сидерического движения, остается при этом неопределенным. Исходя из (8$_1$)—(13$_3$) и полагая $c=0$, получим формулы

$$T^2a^{-3}=4\pi^2,\qquad(21_1)$$

$$\frac{1}{a}=-2h=C>0.\qquad(21_2)$$

---

*) Например, первое из неравенств (19), конечно, справедливо при значениях $C>3$, достаточно близких к $C=3$, поскольку $\alpha_-(3)=-{}^1/_2$, $\alpha_+(3)=1$ согласно (18$_1$). Если неравенство $\alpha_-^2<\alpha_+^2$ не было бы справедливым при всех $C>3$, то в силу непрерывности существовало бы такое $C=C_0$, что $\alpha_-^2(C_0)=\alpha_+^2(C_0)$. Однако тогда мы имели бы в силу (18$_1$) равенство $\alpha_-^3(C_0)=\alpha_+^3(C_0)$, что невозможно, поскольку $\alpha_-<0<\alpha_+$.

В соответствии с $(20_1)-(21_1)$ период T для такого движения равен промежутку времени между двумя последовательными столкновениями движущегося тела с центральным, находящимся в начале координат $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ (см. §§ 268—270).

Подстановка $(20_1)-(20_3)$ в (4) показывает, что синодическая траектория описывается формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= -2a\sin^2\frac{1}{2}u\cos(a^{3/2}u - a^{3/2}\sin u), \\ y &= 2a\sin^2\frac{1}{2}u\sin(a^{3/2}u - a^{3/2}\sin u), \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где вспомогательная переменная u изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно (22) столкновения (т. е. моменты, когда $x^2 + y^2 = 0$) имеют место при равноотстоящих друг от друга значениях $u = 0$, $\pm 2\pi$, ... Тем не менее синодическая траектория не будет в общем случае замкнутой. Действительно, из (22) следует, что траектория (x, y) будет замкнутой (имеющей, возможно, достаточно большое количество «петель» или «циклов»), если постоянная $n = a^{-3/2}$ — рациональное число, и не будет замкнутой, если n — иррациональное число. В первом случае из (20_3), (21_1) и (22) следует, что соотношение (12), выводимое непосредственно при $0 < e < 1$, остается справедливым и при $e = 1$. Результаты, изложенные в § 305, остаются справедливыми и во втором случае, так как при n иррациональном траектория (22) заполняет всюду плотно круг $x^2 + y^2 = (2a)^2$.

§ 311. Апериодичность синодической траектории в случае иррационального n не противоречит тому факту, что эта траектория проходит через одну и ту же точку $(x, y) = (0, 0)$ бесконечно много раз (а именно при $u = 0$, $\pm 2\pi$, ...). Все становится вполне понятным, если ввести синодические полярные координаты r, θ. Действительно, тогда можно записать формулы (22) в виде

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad (23)$$

где

$$r = 2a\sin^2\frac{1}{2}u, \qquad \theta = -a^{3/2}(u - \sin u) + \pi.$$

Если независимая переменная u получает приращение, равное целой кратности 2π, например $2\pi p$, то из (23) видно, что r не изменяется, а θ уменьшается на $2\pi p a^{3/2}$. Формулы же (20_3), (21_1) показывают, что это уменьшение синодического полярного угла θ будет равно целой кратности 2π лишь тогда, когда $n = p : q$ и q — некоторое целое число. Следовательно, среди значений

$u = 0, \pm 2\pi, \ldots$ найдется или не найдется такое значение, при котором синодическая траектория покидает начало координат $(x, y) = (0, 0)$ в том же направлении $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, по которому она сюда пришла при этом же u, в зависимости от того, является n рациональным или иррациональным.

Если n рациональное, например $n = p : q$, $(p, q) = 1$, то лишь некоторые (но не все) значения $u = 0, \pm 2\pi, \ldots$ таковы, что угол θ остается неизменным $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ при прохождении траектории через начало координат. Действительно, θ остается неизменным $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ при каждом таком прохождении только тогда, когда изменение θ, соответствующее приращению u на 2π, окажется равным целой кратности 2π, например $2\pi q$. В силу (23) это будет тогда и только тогда, когда $2\pi a^{3/2} = 2\pi q$, т. е. если (см. (20_3)) $1 / n = q$.

В соответствии со сказанным входящая и выходящая ветви синодической траектории (22) касаются друг друга в моменты всех столкновений тогда и только тогда, когда n равно обратной величине некоторого целого числа q. Такие n соответствуют в силу (20_3) дискретным значениям

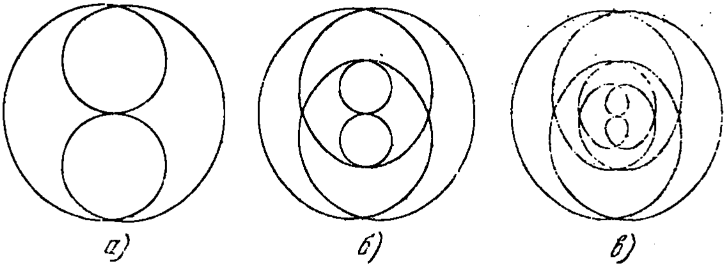
а) б) в)

Рис. 11.

$$C^{-1} \equiv a = q^{2/3}, \qquad q = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

произвольной постоянной интегрирования (21_2), определяющей единственным образом ограниченное прямолинейное движение. Синодические траектории (22) при $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$ показаны на рис. 11а, б, в соответственно *).

§ **311а.** В §§ 301—311 был рассмотрен лишь эллиптический случай $h < 0$. Однако путем подстановки в (4) сидерических координат $\bar{x}$, $\bar{y}$ гиперболического или параболического движения мож-

---

*) Из (24) видно, что эти три рисунка имеют различные масштабы расстояний.

но провести анализ синодических траекторий при $h > 0$ или $h = 0$, в том числе предельный случай прямолинейных траекторий $(c = 0)$.

§ 312. Если значение сидерической постоянной энергии h задано, то соотношение (1_2) определяет при $h < 0$ (но не при $h \geqslant 0$) кривую нулевой скорости. Движение происходит в этом случае вне круга с центром $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ и радиусом $-h^{-1}$ (см. § 243). Соответствующий анализ соотношения (7_1), представляющего собой синодическую аналогию (1_2), несколько более сложен, и он может быть проведен следующим образом.

Из (7_1) видно, что в любой точке (x, y) какой-либо синодической траектории (7_2) имеем $r^2 + 2r^{-1} \geqslant C$. Соотношение же

$$r^2 + \frac{2}{r} = C \qquad)$$

представляет собой уравнение кривой нулевой скорости (синодической). Эта кривая распадается на столько окружностей с центром в начале координат $(x, y) = (0, 0)$, сколько различных положительных корней имеет уравнение (25). Если положить $\alpha = 1/r$, то это уравнение запишется в виде (18_1). В § 309 было показано, что уравнение (18_1) не имеет положительных корней, если $-\infty < C < 3$, имеет двойной положительный корень $\alpha = 1$, если $C = 3$, и имеет именно два положительных корня $\alpha_+ = \alpha_+(C)$, $\alpha^+ = \alpha^+(C)$, $\alpha_+ < 1 < \alpha^+$, если $3 < C < +\infty$.

Таким образом, кривая синодической нулевой скорости, соответствующая заданному значению C, или не существует (если $C < 3$), или же состоит из двух концентрических окружностей (если $C > 3$). Радиусы этих окружностей равны $1/\alpha^+$ и $1/\alpha_+$, причем $1/\alpha^+ < 1 < 1/\alpha_+$. При $C = 3$ обе эти окружности сливаются в одну окружность с радиусом, равным единице.

Вместе с тем область на плоскости (x, y), запрещенная в силу соотношения (7_1), т. е. область, где неравенство $r^2 + 2r^{-1} \geqslant C$ не выполняется, состоит при $C > 3$ из кольца

$$\frac{1}{\alpha^+} < (x^2 + y^2)^{1/2} < \frac{1}{\alpha_+},$$

вырождающегося при $C = 3$ в окружность $x^2 + y^2 = 1$ (и исчезающего при $C < 3$). Это вытекает из того, что при произвольном фиксированном C условие

$$r^2 + \frac{2}{r} \geqslant C \qquad (26)$$

удовлетворяется при положительных r, близких к 0 или $+\infty$, так

		A_1	A_2	A_3	A_4
I	$\alpha = \sqrt{a}$	$0 < \alpha < 1$	$1 < \alpha < +\infty$	$-\infty < \alpha < -1$	$-1 < \alpha < 0$
II	α_-, α_+ или α^+	$\alpha = \alpha_+$	$\alpha = \alpha^+$	$\alpha = \alpha_-$	$\alpha = \alpha_-$
III	$C = 2\alpha + \alpha^{-2}$	$\infty > C > 3$	$3 < C < +\infty$	$-\infty < C < -1$	$-1 < C < +\infty$
IV	Радиус окружности нулевой скорости (синодической)	$0 < 1/\alpha^+ < 1$	$1 < 1/\alpha_+ < +\infty$	Не существует	$1 > 1/\alpha^+ > 0$, если $3 < C < +\infty$; не существует, если $-\infty < C < 3$
V	Расположение круга нулевой скорости (синодической)	$1/\alpha^+ > a$	$1/\alpha_+ < \alpha$	Не существует	$1/\alpha^+ > a$, если $3 < C < +\infty$; не существует, если $-\infty < C < 3$
VI	Радиус круговой орбиты	$a = \alpha_+^2 \left(> \alpha_-^2\right)$	$a = (\alpha^+)^2 \left(> \alpha^2\right)$	$a = \alpha_-^2$	$a = \alpha_-^2$
VII	Нижняя или верхняя орбита	Нижняя, $0 < a < 1$	Верхняя, $1 < a < +\infty$	Верхняя, $+\infty > a > 1$	Нижняя; $1 > a > 0$
VIII	Сидерическое направление	Прямое	Прямое	Обратное	Обратное
IX	Синодическое направление	Прямое	Обратное	Обратное	Обратное
X	$n = \alpha^{-3}$	$+\infty > n > 1$	$1 > n > 0$	$0 > n > -1$	$-1 > n > -\infty$
XI	$m = (n-1)^{-1}$	$0 < m < +\infty$	$-\infty < m < -1$	$-1 < m < -1/2$	$-1/2 < m < 0$
XII	Критическое m	1, 2, 3 . . .	. . . -4, -3, -2	Не существует	Не существует
XIII	Критическое n	2/1, 3/2, 4/3	. . . 3/4, 2/3, 1/2	Не существует	Не существует
XIV	Критическое a	$a = 1 - 0$	$a = 1 + 0$	Не существует	Не существует
XV	Первое критическое C	$(C)_{m=1} = \sqrt[3]{32} = 3{,}1748$	$(C)_{m=-2} = \sqrt[3]{31\,{}^1/_4} = 3{,}1498$	Не существует	Не существует
XVI	Начало	$m = +0$, $n = +\infty$, $C = +\infty$	$m = -1 - 0$ $n = +0$, $C = +\infty$	$m = -1 + 0$ $n = -0$, $C = -\infty$	$m = -0$ $n = -\infty$, $C = +\infty$

что α_+ и α^+ являются при $C > 3$ простыми корнями кубического уравнения (18_1), а условие (26) в кольце $1/\alpha^+ < r < 1/\alpha_+$ не может иметь места.

§ 312a. Сопоставляя результаты, изложенные в §§ 308—309 и касающиеся круговых траекторий, с результатами предыдущего параграфа относительно кривой нулевой скорости для любой траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$, можно сделать на основании (19) выводы об относительном расположении любой круговой траектории и кольца, определяемом интегралом энергии (если $C > 3$). Можно также сделать вывод о связи между предельным случаем $C=3$ (см. § 309) и исключительным случаем $h = 1$ (§ 306).

Назовем круговую траекторию радиуса a нижней или верхней, если $a < 1$ или $a > 1$ соответственно. В любом случае движение может быть сидерически прямым или обратным ($\alpha = \sqrt{a} \gtrless 0$). Следовательно, если исключить значения $a = 0$ и $a = 1$, то все возможные круговые траектории можно разбить на четыре группы:

$$A_1:\quad 0 < \alpha < 1, \qquad A_2:\quad 1 < \alpha < +\infty,$$

$$A_3:\quad -\infty < \alpha < -1, \qquad A_4:\quad -1 < \alpha < 0.$$

Результаты, касающиеся круговых траекторий и изложенные в §§ 306—309, а также в § 312, могут быть отражены в таблице *) на стр. 280.

---

*) Два значения C в строчке XV оказались почти равными чисто случайно, и они никак не совпадают друг с другом (как это утверждается иногда в литературе).

ГЛАВА V

ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ

ЗАКОН ПРИТЯЖЕНИЯ НЬЮТОНА

§ 313. Когда мы говорим, что система $n(\geqslant 2)$ материальных точек $P_1, \ldots, P_n$ движется в соответствии с законом притяжения Ньютона, то подразумеваем существование

(i) положительных постоянных $\varkappa, m_1, \ldots, m_n$;

(ii) выбранной соответствующим образом в евклидовом трехмерном пространстве системы координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$;

(iii) выбранной соответствующим образом независимой переменной t

таких, что уравнения движения могут быть записаны в виде

$$m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \left\{ \varkappa \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{m_j m_k}{|\xi_j - \xi_k|} \right\}_{\xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где через ξ_i обозначен 3-вектор координат $\xi_i^{\mathrm{I}}, \xi_i^{\mathrm{II}}, \xi_i^{\mathrm{III}}$ точки P_i и $\{\ \}_{\xi_i}$ — градиент скаляра $\{\ \}$ по отношению к ξ_i.

Параметр $\varkappa$ представляет собой в теории Ньютона «постоянную притяжения», а m_i — «массу P_i»; координатная система ξ называется «инерциальной координатной системой», а независимая переменная t — «абсолютным временем». Очевидно, что невозможно использовать какое-либо одно из этих понятий без привлечения всех других. Например, нет смысла задавать вопрос о значениях масс m_i, если не считать известными инерциальную координатную систему и абсолютное время.

В задачу этой книги не входит дискуссия о длинном ряде исключительных триумфов и о немногих (но их нельзя оставить без внимания) неудачах этого доэйнштейнианского подхода к проблеме гравитации в солнечной системе. Таким образом, нет необходимости обсуждать практические и логические затруднения, появляющиеся после введения инерциальной системы координат и применения математической модели к движению планет и их спутников. Упомянутые практические затруднения имеют, конечно, чисто астрономический характер. Однако астрономическая техника использования в ньютонианской модели численных данных (прямых и косвенных) наблюдений настолько хорошо развита, что эти затруднения не имеют никакого практического значения для современного состояния теории солнечной системы.

Мы будем обозначать в последующем через m_i не только массу, сконцентрированную в переменной точке ξ_i, но также и материальную точку P_i, координаты которой определяются вектором ξ_i. Аналогичным образом будем обозначать через ξ не только координатную систему, но также и координатный вектор точки в 3-мерном евклидовом пространстве ξ. Наконец, через ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III} будем обозначать компоненты вектора ξ, параллельные координатным осям.

§ 314. Обозначая через $u \times v = -v \times u$ векторное произведение двух 3-векторов u, v, через $u \cdot v = v \cdot u$ — их скалярное произведение и, наконец, через u^2 — квадрат $u \cdot u$ длины $|u|$ вектора u, положим

$$C = \sum m_i \xi_i \times \xi_i', \tag{2_1}$$

$$J = \sum m_i \xi_i^2, \tag{2_2}$$

$$L = T + U, \tag{2_3}$$

где $' = \frac{d}{dt}$, а скаляры T, U определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \xi_i'^2 , \tag{3_1}$$

$$U = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}, \tag{3_2}$$

$$\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|, \tag{3_3}$$

причем

$$\sum = \sum_{i=1}^{n}, \tag{4$_1$}$$

$$\sum^{*} = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \tag{4$_2$}$$

3-вектор (2_1) называется кинетическим моментом системы, а скаляр (2_2) — полярным моментом инерции системы. Заметим, что массы m_i суть постоянные скаляры, а ξ_i^2 — квадрат расстояния $|\xi_i|$ между m_i и началом координат $\xi = 0$. Формула (3_3) дает расстояние ρ_{jk} между m_i и m_k. Координатный вектор центра масс равен

$$\mu^{-1} \sum m_i\xi_i,$$

где $\mu = \Sigma m_i$ — полная масса системы.

Если мы выберем основные единицы так, чтобы постоянная притяжения $\varkappa$ была равна единице, то из (2_3) — (4_2) видно, что уравнения (1) можно записать в виде

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i} \equiv U_{\xi_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{5}$$

или

$$[L]_{\xi_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5a}$$

где $[\ ]_{\xi_i}$ обозначает лагранжеву производную по отношению к 3-вектору ξ_i. Таким образом, уравнения (1) описывают консервативную динамическую систему с $3n$ степенями свободы, являющуюся в силу (2_3) — (3_2) обратимой (см. § 156). Условие (2_1) § 155 удовлетворяется, так как $T = \frac{1}{2}\sum m_i\xi_i'^2$ есть диагональная форма с положительными диагональными элементами m_1, m_1, m_1, ..., m_n, m_n, m_n. Соответственно из (10) — (11_3) § 158 имеем

$$L_{\xi_i'} \equiv \eta_i = m_i\xi_i', \tag{6$_1$}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum m_i^{-1}\eta_i^2 - U, \tag{6$_2$}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i^{-1}\eta_i^2, \tag{6$_3$}$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

где η_i обозначает 3-вектор, компоненты которого суть импульсы, канонически сопряженные с компонентами координатного 3-вектора ξ_i ($i = 1, \ldots, n$).

§ **315.** Левая часть (14) § 159 сводится к

$$\left(\sum m_i \xi_i \cdot \xi_i'\right)'$$

и равна $^1/_2 J''$ согласно (2_2) § 314. Вместе с тем правая часть (14) § 159 сводится к (15_1) § 159, так как T не зависит от координат (является, следовательно, их однородной функцией степени $\alpha = 0$). Наконец, формулы (3_2)—(3_3) § 314 показывают, что U — однородная функция степени -1, так что (15_1) § 159 сводится к (15_2) § 159 с $\beta = -1$.

Таким образом, $^1/_2 J'' = (-1 + 2) U + 2h$, т. е.

$$J'' = 2U + 4h, \tag{7_1}$$

$$T - U = h, \tag{7_2}$$

причем (7_2) можно рассматривать как определение постоянной h в формуле (7_1), т. е. постоянной энергии для данного решения

$$\xi_i = \xi_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

§ **315а.** Поскольку $\beta = -1$, то на основании изложенного в § 160 приходим также к тому результату, что если $\xi_i = \xi_i(t)$ — какое-либо решение уравнений (5), то функция

$$\lambda \xi_i (\lambda^{-3/2} t),$$

где λ — любая положительная постоянная, также является решением этих же уравнений. Отсюда вытекает, в частности (см. § 160а), что период для семейства периодических решений уравнений (5) пропорционален $|h|^{-3/2}$, если решения этого семейства имеют непрерывную частную производную по h.

§ **316.** Заменим систему координат ξ § 313 другой системой координат $\bar{\xi}$, получающейся из первой путем ее поворота на некоторый угол вокруг начала, так что

$$\bar{\xi}_i = \Omega \xi_i, \tag{8_1}$$

где Ω — ортогональная 3-матрица, не зависящая от t и i, определитель которой равен $+1$. Очевидно, что

$$\bar{\xi}_i'^2 = \xi_i'^2, \qquad |\bar{\xi}_i - \bar{\xi}_k| = |\xi_i - \xi_k|.$$

Поэтому из (3_1)—(3_3) вытекает, что функция Лагранжа (2_3) инвариантна по отношению к преобразованию $\bar{\xi}_i = \Omega \xi_i$. Следовательно, если заменить Ω на $\Omega(\varepsilon)$, причем ε — скалярный параметр, не зависящий от t, $\Omega(0)$ — единичная матрица, а матрица

$\Omega(\varepsilon)$ ортогональна и имеет при $\varepsilon = 0$ не обращающуюся в нуль производную $\Omega_\varepsilon(\varepsilon)$, то в соответствии с (8) § 96 функция

$$\sum L_{\xi_i'}\Omega_\varepsilon(0)\,\xi_i \tag{8_2}$$

будет интегралом уравнений (5) § 314.

Рассмотрим, в частности, семейство вращений $\Omega = \Omega(\varepsilon)$, определяемое согласно (18_2) § 77, если положить в этой формуле $d_\nu = \varepsilon\delta_\nu$, причем δ_1, δ_2, δ_3 — произвольные фиксированные скаляры. Тогда производная $\Omega_\varepsilon(0)$ равна, очевидно, сумме трех матриц $\delta_\nu I_\nu$. Подставляя эту сумму в интеграл (9_1) и полагая последовательно $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, получим три интеграла

$$\sum L_{\xi_i'}\cdot I_\nu\xi_i, \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Однако, как нетрудно проверить, кососимметрические матрицы I_ν, определенные в § 77, обладают тем свойством, что если **A**, **B** — 3-векторы, то скалярные произведения $\mathbf{B}\cdot I_\nu\mathbf{A}$ будут компонентами векторного произведения $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Следовательно, три компонента вектора

$$\sum \xi_i \times L_{\xi_i'}$$

представят собой интегралы уравнений (5). Выразив L_{ξ_i}' согласно (6_1), можно утверждать, что для любого решения (8) уравнений (5) существует постоянный вектор C такой, что

$$\sum m_i\xi_i \times \xi_i' = C. \tag{9}$$

Другими словами, кинетический момент (2_1) остается вдоль любого решения (8) постоянным, что дает нам три скалярных интеграла уравнений (5).

§ 317. Заменим координатную систему ξ § 313 другой координатной системой $\bar\xi$, получаемой из первой путем параллельного переноса, так что $\bar\xi_i = \xi_i + b$, где b — 3-вектор, не зависящий от t и i. Очевидно, что

$$\bar\xi_i'^2 = \xi_i'^2, \qquad |\bar\xi_j - \bar\xi_k| = |\xi_j - \xi_k|.$$

Тогда из (3_1) — (3_2) следует, что функция (2_3) инвариантна по отношению к преобразованию $\xi_i = \xi_i + b$. Заменяя b на εc, причем ε — скалярный параметр и c — фиксированный постоянный 3-вектор, увидим, что

$$\bar\xi_i = \xi_i + \varepsilon c$$

образуют семейство преобразований, для которого справедливо соотношение (8) § 96. Однако частная производная $(\bar{\xi}_i)_\varepsilon \equiv c$. Следовательно, скаляр

$$\sum c \cdot L_{\xi_i'}$$

при любом постоянном векторе $c = (c_1, c_2, c_3)$ не зависит вдоль любого решения (8) уравнений (5) от t. Полагая последовательно $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, придем к выводу, что для любого решения (8) уравнений (5) найдется постоянный 3-вектор A такой, что

$$\sum L_{\xi_i'} = A. \tag{10$_1$}$$

Следовательно, уравнения (5) имеют шесть скалярных интегралов

$$\sum m_i \xi_i' = A, \tag{10$_2$}$$

$$\sum m_i \xi_i - t \sum m_i \xi_i' = B, \tag{10$_3$}$$

где компоненты 3-векторов A и B составляют шесть постоянных интегрирования.

Действительно, соотношение (10$_1$) эквивалентно (10$_2$) в силу (6$_1$). Вместе с тем из (10$_2$) следует, что

$$\sum m_i \xi_i = At + B, \tag{11}$$

где B — некоторый постоянный 3-вектор.

Заметим, что каждый из скалярных компонентов векторного соотношения (11) содержит две постоянные интегрирования и поэтому не может быть интегралом уравнений (5) (см. § 82). Однако с помощью трех интегралов (10$_2$) можно записать (11) в виде (10$_3$) и прийти к трем интегралам.

§ 317а. Разделив (11) на полную массу $\mu = \Sigma m_i$, увидим, что траектория центра масс n тел в системе координат ξ имеет уравнение $\xi = A^* t + B^*$, где векторы $A^* = \mu^{-1} A$, $B^* = \mu^{-1} B$ суть постоянные интегрирования.

Шесть интегралов (10$_2$) — (10$_3$) выражают таким образом тот факт, что для любого решения (8) уравнений (5) движение центра масс в заданной инерциальной системе координат ξ является равномерным и прямолинейным.

§ 318. Наиболее общее евклидово преобразование координат имеет вид

$$\xi = \Omega \xi + \omega, \tag{12}$$

где компонент вращения Ω (ортогональная матрица с определителем, равным $+1$) и компонент переноса ω — произвольные заданные функции t. Будем предполагать, что функции $\Omega(t)$, $\omega(t)$ обладают непрерывными вторыми производными Ω'', ω''.

Согласно § 313 координатная система ξ называется инерциальной, если в ней справедливы уравнения (5). Аналогичным образом преобразование (12) называется инерциальным, если координатная система ξ является инерциальной каждый раз, когда такой является система ξ, т. е. если $\Omega(t)$, $\omega(t)$ таковы, что после замены переменных в уравнениях (5) по формуле (12) мы придем к уравнениям того же самого вида.

Из (3_2) — (3_3) видно, что

$$U_{\bar{\xi}_i}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n) \equiv \Omega U_{\xi_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

при любом преобразовании вида (12). Таким образом, в силу (5)

$$U_{\bar{\xi}_i}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n) = m_i \Omega \xi_i''.$$

Следовательно, преобразование (12) будет инерциальным, если соотношение $\xi_i'' = \Omega\xi_i''$ удовлетворяется в силу (12) тождественно по t. Положив в этом соотношении

$$\Xi = \bar{\xi}_i - \omega, \qquad X = \xi_i, \tag{12_1}$$

перепишем его в виде

$$\Omega^{-1}\Xi'' + \Omega^{-1}\omega'' = X''.$$

Преобразование (12) будет, следовательно, инерциальным, если это соотношение удовлетворяется тождественно при $\Xi = \Omega X$. Однако последнее равенство совпадает с (8) § 69, так что выражение для $\Omega^{-1}\Xi''$ дается формулой (10_2) § 69. Следовательно, преобразование (12), определяемое парой функций $\Omega(t)$, $\omega(t)$, будет инерциальным тогда и только тогда, когда соотношение

$$2\Sigma X' + (\Sigma' + \Sigma^2)X + \Omega^{-1}\omega'' = 0, \tag{13}$$

где матрица $\Sigma = \Sigma(t)$ выражается по формуле (5) § 66, представляет собой тождество по t. Однако согласно (12_1) $X(t) \equiv \xi_i(t)$, где i равно одному из чисел $1, \ldots, n$. Вместе с тем значения $\xi_i(t)$, $\xi_i'(t)$ для решения (8) уравнений (5) при любом заданном t можно рассматривать как произвольные начальные значения. Так как $\Sigma(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$ зависят лишь от преобразования (12), но не от решения (8), то (13) представляет собой тождество по t тогда и только тогда, когда коэффициенты 2Σ, $\Sigma' + \Sigma^2$ и свободный член $\Omega^{-1}\omega''$ в (13) обращаются при всех t в нуль. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда $\Sigma(t) \equiv 0$ и $\omega''(t) \equiv 0$. В силу (5) § 66 и изложенного в конце § 69 равенство $\Sigma(t) \equiv 0$

означает, что компонент вращения Ω в (13) не зависит от t. Условие же $\omega''(t) \equiv 0$ означает, что компонент переноса $\omega(t)$ соответствует равномерному прямолинейному движению. Поэтому мы приходим к результату, что преобразование (12) будет инерциальным тогда и только тогда, когда оно выражается формулой

$$\bar{\xi} = \Omega\xi + \alpha t + \beta, \tag{14}$$

где Ω, α, β не зависят от t. Заметим, что постоянная матрица вращения Ω, а также любой из постоянных векторов α, β содержат по три скалярных параметра.

§ **318a.** Из критерия (14) следует, что если $\bar{\xi} = \Omega(t)\xi$, где $\Omega(t) \neq \neq \mathrm{const}$, то в координатной системе $\bar{\xi}$, вращающейся вокруг начала инерциальной координатной системы ξ, закон Ньютона перестает быть справедливым. Наряду с ньютонианскими силами U_{ξ_i} в системе координат $\bar{\xi}$ обнаруживаются «фиктивные» силы, действующие на m_i и соответствующие «кориолисовой силе» $2m_i\Sigma(t)\xi_i'(t)$ и «центробежной силе» $m_iP(t)\xi_i(t)$, где $P = \Sigma' + \Sigma^2$. Если же $\bar{\xi} = \xi + \omega(t)$, где $\omega'(t) = \mathrm{const}$, то неравномерность прямолинейного движения координатной системы $\bar{\xi}$ приводит к появлению аналогичной «фиктивной» силы «ускоренного переносного движения», равной $m_i\omega''(t)$ согласно (13). В обоих случаях «инерция» тел изменяется именно благодаря введению координатной системы $\bar{\xi}$, не являющейся инерциальной в указанном в § 313 смысле.

§ **319.** Все 10 постоянных интегралов (7_2), (9), (10_2), (10_3) были отнесены к заданной инерциальной координатной системе ξ. Эти интегралы сохраняются, конечно, и при переходе к любой другой инерциальной координатной системе $\bar{\xi}$, но при этом мы получим в соответствии с (14) вместо постоянных h, C, A, B исходных интегралов другие постоянные $\bar{h}$, $\bar{C}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$. Достаточно исследовать связь между этими постоянными в случае трех подгрупп

$$\bar{\xi} = \Omega\xi, \tag{i}$$

$$\bar{\xi} = \xi + \beta, \tag{ii}$$

$$\bar{\xi} = \xi + \alpha t, \tag{iii}$$

из которых состоит вся группа инерциальных преобразований (14).

(i) Пусть $\bar{\xi} = \Omega\xi$, где $\Omega = \mathrm{const}$. Тогда, как было показано в начале § 316, оба выражения (3_1), (3_2) остаются неизменными.

Следовательно, имеет место не только инвариантность лагранжевой функции (2_3), но в силу (7_2) и равенство $\bar{h} = h$. Вместе с тем в соответствии с определением векторного произведения имеем

$$\bar{\xi} \times \bar{\xi}' = (\Omega\xi) \times (\Omega\xi') \equiv \Omega(\xi \times \xi'),$$

так что

$$\bar{C} = \Omega C$$

в силу (9). Поэтому не только $|\bar{C}| = |C|$, но и направление вектора, представляющего кинетический момент системы, остается в трехмерном евклидовом пространстве неизменным и не зависит, таким образом, от выбора направления осей декартовой системы координат с фиксированным началом.

(*ii*) Если $\bar{\xi} = \xi + \beta$, где $\beta = \text{const}$, то, как было показано в начале § 317, функции (3_1) и (3_2) остаются неизменными. Следовательно, имеет место не только инвариантность функции Лагранжа (2_3), но в силу (7_2) и равенство $\bar{h} = h$.

Вместе с тем

$$\bar{\xi} \times \bar{\xi}' \equiv (\xi + \beta) \times (\xi + \beta)' \equiv (\xi \times \xi') + (\beta \times \xi').$$

Следовательно,

$$\bar{C} = C + (\beta \times A)$$

в силу (9) и (10_1). Наконец, из (10_2) вытекает, что $\bar{A} = A$, но

$$\bar{B} = B + \mu\beta,$$

где $\mu = \Sigma m_i$.

(*iii*) Если $\bar{\xi} = \xi + \alpha t$, где $\alpha = \text{const}$, то хотя силовая функция (3_2) при этом не изменяется, но функция (3_1) выражается в новых координатах по формуле

$$T = \frac{1}{2} m_i(\xi_i' + \alpha)^2$$

и, следовательно, не инвариантна. Таким образом, функция Лагранжа (2_3) не инвариантна, хотя уравнения Лагранжа при таком преобразовании не изменяются (преобразование $\bar{\xi} = \xi + \alpha t$ является согласно (14) инерциальным). Однако это изменение сводится в силу (5) к появлению аддитивной постоянной. Действительно, разность между выражениями

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(\xi_i' + \alpha)^2$$

и

$$T = \frac{1}{2} m_i \xi_i^2$$

равна в силу (10_1) $\alpha\cdot A+{}^1/_2\alpha^2\mu$, где $\mu=\Sigma m_i$. В соответствии с этим

$$\bar{h}=h+\alpha\cdot A+\frac{1}{2}\alpha^2\mu,$$

поскольку в (7_2) силовая функция U инвариантна. Кроме того, поскольку векторное произведение

$$\bar{\xi}\times\bar{\xi}'=(\xi+\alpha t)\times(\xi'+\alpha)$$

равно сумме трех векторных произведений

$$\bar{\xi}\times\xi',\qquad(\alpha\times\xi')t,\qquad\xi\times\alpha,$$

то в соответствии с (9), (10_1), (11)

$$\bar{C}=C+(B\times\alpha).$$

Наконец, из (10_1), (10_2) вытекает, что $\bar{B}=B$, но

$$\bar{A}=A+\mu a,$$

где $\mu=\Sigma m_i$.

Обратим внимание на параллелизм формул преобразования постоянных C, B, A в случаях (*ii*), (*iii*).

§ 320. В соответствии с (6_1)—(6_3) гамильтонова форма уравнений Лагранжа (5) следующая:

$$\eta_i'=-H_{\xi_i},\qquad\xi_i'=H_{\eta_i},\tag{15_1}$$

где

$$H=\frac{1}{2}\sum m_i^{-1}\,\eta_i^2-U,$$

а интеграл энергии имеет вид

$$H=h.\tag{15_2}$$

Девять интегралов (9), (10_2), (10_3) перепишутся в соответствии с (6_1) в виде

$$\sum\xi_i\times\eta_i=C,\tag{16_1}$$

$$\sum\eta_i=A,\tag{16_2}$$

$$\sum m_i\xi_i-t\sum\eta_i=B.\tag{16_3}$$

Операция, которая была указана в § 92, не прибавляет после ее применения к девяти интегралам (16_1)—(16_3) новых интегралов.

Это происходит по той причине, что, как видно, из (30) § 24 три скалярных компонента любого из 3-векторов (16_j), $j=1$, 2, 3, совпадают с точностью до обозначений с тремя скалярными функциями F_{3j-2}, F_{3j-1}, F_{3j}, определяемыми согласно (29_1) — (29_2) § 24 и выписанными в (30) § 24.

Сумма всех импульсов (16_2) равна количеству движения системы. Таким образом, семь интегралов (15_2), (16_1), (16_2) выражают факт постоянства энергии, кинетического момента и количества движения вдоль какого-либо решения. В то же время три неконсервативных интеграла (16_3) соответствуют согласно изложенному в конце § 317а лишь другой формулировке положения о постоянстве количества движения или же о равномерном и прямолинейном движении центра масс.

Из §§ 317—318 видно, что девять интегралов (16_1) — (16_3) соответствуют девяти параметрам (скалярным компонентам векторов Ω, α, β), имеющимся в группе (14) всех инерциальных преобразований. Аналогичным образом (см. § 96а) десятый известный интеграл (15_2) является следствием того факта, что уравнения (5), описывающие консервативную систему, не изменяются при замене t на $\bar{t}=t+\text{const}$. Действительно, если t — абсолютное время в указанном в § 313 смысле, то t будет также абсолютным временем тогда, когда $\bar{t}=t-t^0$ (и в силу изложенного в § 160 только тогда, когда $\bar{t}=\pm t-t^0$), где t^0 — произвольная постоянная. Группа преобразований с десятью параметрами, соответствующая существованию десяти интегралов (15_2) — (16_3), получается именно после присоединения к (14) преобразования $\bar{t}=t-t^0$, и она называется обычно группой галилеевых преобразований.

Так как ξ_i и η_i, где $i=1, \ldots, n$, суть 3-векторы, то уравнения (15_1) имеют (см. § 82) $2\cdot 3\cdot n$ (но не больше) независимых интегралов. В то же время (15_2) — (16_3) представляют только $1+3+3+3$ независимых интегралов при любом $n(\geqslant 2)$. При $n>2$ ни один из остающихся $6n-10$ интегралов неизвестен (если $n=2$, то остающиеся два интеграла могут быть найдены; см. § 218а). Аналогичным образом можем заключить (см. § 82), что уравнения (15_1) имеют $6n-1$ (но не больше) консервативных интегралов, из которых известны только семь, а именно (15_2) — (16_2). Эти факты становятся понятными в свете изложенного в § 130 и в § 199.

§ 320а. Следует упомянуть в этой связи о результате Брунса, утверждающем, что если $n>2$, то (15_2) — (16_2) исчерпывают все независимые консервативные интегралы уравнений (15_1), которые являются алгебраическими функциями канонических переменных $\xi_1, \ldots, \eta_n$. То же самое справедливо, если рассматривать неопределенные интегралы от алгебраических функций, т. е. дополнить поле алгебраических функций абелевыми функциями переменных $\xi_1, \ldots, \eta_n$. См. по этому поводу § 129.

Вместе с тем Пуанкаре установил факт отсутствия при $n \geqslant 3$ дополнительных изолированных интегралов, и этот результат учитывает, следовательно, замечания, сделанные в § 129. Тем не менее результат Пуанкаре, а также формальное его уточнение, сделанное Пенлеве, не является достаточным с точки зрения, указанной в §§ 129—130. Действительно, эти отрицательные результаты относятся к случаю не фиксированных, а скорее неопределенных значений масс m_i в уравнениях (5), и дополнительно предполагается, что интегралы, существование которых отрицается, зависят от переменных значений параметров m_i определенным аналитическим образом. Очевидно, что эти предположения не допускают сами по себе какую-либо динамическую интерпретацию, поскольку динамическая система (5) определена именно при фиксированных n положительных числах m_i.

§ 321. Под проблемой n тел подразумевают задачу о движении, описываемом системой дифференциальных уравнений (5), причем силовая функция U выражается согласно (3_2)—(3_3).

Выше мы не использовали явное выражение (3_2) для силовой функции. Действительно, сказанное в §§ 316—319 можно повторить без всяких изменений в случае любой функции $U(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, инвариантной по отношению к шести-параметрической группе преобразований $\bar{\xi} = \Omega\xi + \omega$ евклидовых координат. Например, можно выбрать U так, чтобы притяжение было пропорциональным не второй, а любой фиксированной степени расстояния, т. е. можно заменить $1/\rho_{jk}$ в (3_2) на $1/\rho_j^\lambda$ или, точнее, на $\pm 1/\rho_{jk}^\lambda$, где знак выбирается при данном $\lambda \gtreqless 0$ так, чтобы получить именно силу притяжения, а не отталкивания.

В трех случаях $\lambda = 0$, $\lambda = \pm 2$ имеет место упрощение. Действительно, если $\lambda = -2$, то U представляет собой квадратичную форму и уравнения (5) распадаются (после линейного консервативного инерциального преобразования, не являющегося инерциальным в ньютонианском случае $\lambda = -1$) на $3n$ линейных систем вида $q'' + aq = 0$ с одной степенью свободы. Каждая из этих систем имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(q'^2 + aq^2) = \text{const},$$

где постоянная a зависит от m_i. Если $\lambda = 0$, то $a = 0$, поскольку уравнения (5) приобретают вид $\xi_i'' = 0$. Наконец, если $\lambda = 2$, то мы имеем дело со случаем, рассмотренным в § 161, где надо положить $\beta = -\lambda$. В этом случае притяжение обратно пропорционально кубу расстояния, и уравнения (5) имеют в дополнение к десяти интегралам $(15_2)-(16_3)$ два элементарных интеграла

$$\left.\begin{aligned} &\sum m_i\xi_i'(\xi_i - t\xi_i') + 2tU = \text{const}, \\ &\frac{1}{2}\sum m_i(\xi_i - t\xi_i')^2 - t^2U = \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

о которых и упоминается в конце § 161.

§ 321а. Многие результаты следующих разделов *) справедливы не только в случае ньютоновской силы притяжения, но также почти при любом значении показателя λ, а также часто в случаях, когда U является неоднородной функцией. К сожалению, этот факт говорит не о поразительной общности результатов, а скорее явно свидетельствует о том, что все известные практически данные о решениях уравнений (5) задачи n тел постольку и остаются справедливыми, если не ограничиваться силовой функцией вида (3_2), поскольку они слишком поверхностны.

С этой точки зрения утверждения, приведенные в §§ 217, 218а, следует рассматривать как сильный результат. И фактическое положение таково, что при $n > 2$ ни один из аналогичных по своему характеру результатов (аналитических или топологических) не был еще когда-либо сформулирован.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ КОНСЕРВАТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 322. Пусть дана некоторая инерциальная система координат. Тогда в соответствии с §§ 314—315

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}, \tag{1_1}$$

$$\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|, \tag{1_2}$$

$$U = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}, \tag{1_3}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\xi_i'^2, \tag{1_4}$$

$$T - U = h, \tag{2_1}$$

---

*) Из этой категории выпадают, конечно, результаты, выписываемые в явном виде или связанные с конкретными оценками, например, с неравенствами, имеющимися в §§ 343—344.

$$\mu = \sum m_i, \tag{2_2}$$

$$J = \sum m_i \xi_i^2 \tag{2_3}$$

$$J'' = 2U + 4h. \tag{2_4}$$

Согласно сказанному в конце § 317а движение центра масс

$$\xi^* = \mu^{-1} \quad m_i \xi_i,$$

соответствующее какому-либо заданному решению

$$\xi_i = \xi_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

уравнений (1_1), является прямолинейным и равномерным по отношению к данной инерциальной системе координат ξ. Следовательно, преобразование координат $\bar{\xi} = \xi - \xi^*$ имеет вид (14) § 318, т. е. является инерциальным преобразованием. Другими словами, если координатная система ξ инерциальна, то такой же является барицентрическая система координат $\bar{\xi}$ (с началом в центре масс при любом t и с осями, параллельными осям системы координат ξ). Уравнения (1_1) и формулы (1_2)—(1_4) сохраняют свой вид, если заменить ξ_i на $\bar{\xi}_i = \xi_i - \xi^*$.

Ниже мы будем всегда предполагать, что инерциальная система координат ξ является барицентрической, т. е. $\bar{\xi}_i = \xi_i$ и

$$\mu^{-1} \sum m_i \xi_i = 0$$

при любом t. Другими словами, инерциальная система координат может быть (и будет) выбрана так, что шесть постоянных интегрирования, соответствующие постоянным векторам A, B в (11) § 317, обращаются в нуль. Таким образом, девять интегралов (9)—(10_2) §§ 316—317 сводятся к следующим:

$$\sum m_i \xi_i \times \xi_i' = C, \tag{4_1}$$

$$\sum m_i \xi_i = 0, \tag{4_2}$$

$$\sum m_i \xi_i' = 0, \tag{4_3}$$

где C — постоянный кинетический момент относительно центра масс, являющегося началом O инерциальной системы координат ξ. Постоянная h в (2_1) равна энергии (постоянной), а величина J, определяемая формулой (2_3), является для решения (3) полярным моментом инерции относительно O (вообще не постоянным).

Заметим, что формулы (4_2) — (4_3) представляют не интегралы, а лишь инвариантные соотношения для уравнений (1_1), поскольку в них нет произвольных постоянных интегрирования (см. § 82). Кроме того, (4_3) вытекает из (4_2), так как (4_2) имеет место при любом t.

Проекции векторов ξ_i, C на оси ξ^{I}, ξ^{II}, ξ^{III} координатной системы ξ обозначим через $\xi_i^{\nu}, C^{\nu}, \nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, соответственно, так что можно выписать на основании (4_1) три скалярных интеграла

$$\sum m_i(\xi_i^{\alpha}\xi_i'^{\beta} - \xi_i^{\beta}\xi_i'^{\alpha}) = C^{\gamma}, \tag{5}$$

где $(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), (\mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{I}), (\mathrm{III}, \mathrm{I}, \mathrm{II})$.

§ 322а. В силу (4_2) — (4_3) суммы (2_3) и (1_4) выражаются через $^1/_2n(n-1)$ взаимных расстояний $\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|$ и $^1/_2n(n-1)$ взаимных скоростей $|\xi_j' - \xi_k'|$ соответственно. Действительно,

$$J = \mu^{-1}\sum^{*} m_j m_k \rho_{jk}^{2}, \quad T = \frac{1}{2}\mu^{-1}\sum^{*} m_j m_k (\xi_j' - \xi_k)^2,$$

где μ определяется согласно (2_2), а символ Σ^* имеет тот же смысл, что и в (1_3). Чтобы получить на основании (4_2), (4_3) такие выражения для J и T, достаточно применить тождество (1) § 65 к $a_i = m_i^{1/2}$ и к каждому из скалярных компонентов b_i 3-векторов $m^{i1/}{}_{2}\,\chi_i$, где $\chi_i = \xi_i$ или $\chi_i = \xi_i'$.

Аналогичным образом интеграл (4_1) можно переписать с помощью (4_2) — (4_3) в виде

$$C = \mu^{-1}\sum^{*} m_j m_k (\xi_j - \xi_k) \times (\xi_j' - \xi_k').$$

Заметим, что если $n = 3$, то, поскольку $\Sigma m_i \xi_i = 0$, имеем

$$\mu\xi_i = m_k\zeta_j - m_j\zeta_k,$$

где $\zeta_i = \xi_k - \xi_i$, $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$.

§ 323. Так как координатные системы ξ и $\bar{\xi} = \Omega\xi$ имеют при любой матрице вращения $\Omega = \Omega(t)$ общее начало координат, то система координат $\bar{\xi}$ является барицентрической, если таковой является система ξ. Однако критерий (14) § 318 показывает, что система $\bar{\xi} = \Omega\xi$ при заданной инерциальной барицентрической системе ξ является также инерциальной лишь тогда, когда Ω не зависит от t. Таким образом, множество всех инерциальных барицентрических систем координат зависит только от трех констант, определяющих произвольную матрицу вращения $\Omega = \mathrm{const}$.

Покажем теперь, что эти три константы позволяют выбрать инерциальную барицентрическую систему координат таким образом, чтобы постоянные интегралов (5), представляющие собой компоненты постоянного вектора (4_1), были равны

$$\left.\begin{aligned} C^{\text{I}} = 0, \quad C^{\text{II}} = 0,\\ C^{\text{III}} = \pm|(C^{\text{I}})^2+(C^{\text{II}})^2+(C^{\text{III}})^2|^{1/2} \equiv \pm|C|. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Кроме того, если $C \neq 0$, то можно выбрать инерциальную барицентрическую систему координат так, что

$$C^{\text{I}} = 0, \quad C^{\text{II}} = 0, \quad C^{\text{III}} = |C|, \tag{7}$$

а если $C = 0$, то (7) имеет место для любой инерциальной барицентрической системы координат.

Прежде всего, если ξ и $\bar{\xi} = \Omega\xi$ — некоторые две инерциальные барицентрические системы координат и если через C, $\bar{C}$ обозначены постоянные векторы кинетических моментов в этих системах соответственно, то $\bar{C} = \Omega C$ согласно (*i*) § 319. Следовательно, $|\bar{C}| = |C|$ и $\bar{C}\bar{\xi} = C\xi$. Если исключить пока случай $C = 0$, то уравнение $C\cdot\xi = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат. Поскольку же $\bar{C}\cdot\bar{\xi} = C\cdot\xi$, то уравнение $\bar{C}\cdot\bar{\xi} = 0$ определяет ту же плоскость. Другими словами, плоскость, проходящая через центр масс и перпендикулярная к вектору кинетического момента, не только не зависит от t (поскольку $C = \text{const}$), но, кроме того, она одна и та же в любой инерциальной барицентрической системе координат. Эта плоскость, которая определена только тогда, когда $C \neq 0$, называется инвариантной плоскостью для данного решения (3) уравнений (1_1). Из (4_1) или (5) видно, что (6) имеет место тогда и только тогда, когда инвариантная плоскость совпадает с плоскостью ($\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}}$) барицентрической инерциальной системы координат $\xi = (\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}}, \xi^{\text{III}})$, и что равенства (7) имеют место в такой барицентрической инерциальной системе координат, в которой ось ξ^{III} параллельна нормали к инвариантной плоскости, причем положительное направление нормали к этой плоскости считается совпадающим с направлением кинетического момента. Наконец, если этот вектор обращается в нуль, т. е. если инвариантная плоскость не существует, то (6) и (7) имеют место в любой инерциальной системе координат, поскольку $\bar{C} = C$ при $C = 0$.

Заметим, что постоянная энергия для решения (3) одна и та же в любой инерциальной барицентрической системе координат (см. (*i*) § 319).

§ 324. Данное решение (3) уравнений (1) назовем плоским, если в барицентрической инерциальной системе координат ξ существует неизменная плоскость Π^*, в которой все n тел находятся при любом t.

Покажем, что для плоского решения плоскость Π^* является инвариантной, если для этого решения инвариантная плоскость существует (т. е. если $C \neq 0$).

Действительно, если плоскость Π^* существует, то очевидно, что центр масс находится в этой плоскости. Так как положение Π^* не зависит от t, то можно выбрать барицентрическую инерциальную систему координат ξ так, что плоскость $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ совпадет с Π^*. Тогда $\xi^i_{\mathrm{III}} = 0$ при всех t и i. Следовательно, (5) показывает, что имеют место равенства (6). Так как эти равенства представляют собой (см. § 323) необходимые и достаточные условия того, что плоскость $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ системы ξ совпадает с инвариантной плоскостью в случае $C \neq 0$, то доказательство закончено.

Из единственности начальной задачи для дифференциальных уравнений (1_1) вытекает, что решение (3) будет плоским тогда и только тогда, когда при фиксированном $t = t_0$ существует такая плоскость, в которой лежат при $t = t_0$ не только n векторов положения ξ_i, но и n векторов скоростей ξ_i'.

§ 325. Данное решение (3) уравнений (1_1) назовем *компланарным*, если при любом t все n тел находятся в некоторой плоскости $\Pi = \Pi(t)$.

Не всякое компланарное решение является плоским. Действительно, хотя любое решение задачи трех тел является компланарным, но, как это следует из последнего замечания в § 324, решения этой задачи не являются вообще плоскими. Можно показать, что компланарные, не плоские решения существуют также при любом $n > 3$ *).

---

*) Действительно, пусть, например, $n = 4$, и пусть массы m_i попарно равны ($m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$). Выберем начальные положения и начальные скорости обеих пар тел с равными массами так, что они будут симметричными по отношению к некоторой плоскости **P**, проходящей через центр масс O. Тогда положение любой пары этих тел останется симметричным по отношению к **P** при любом t, так что все четыре тела лежат при любом t в плоскости $\Pi(t)$, перпендикулярной к **P** и вращающейся в соответствии с (4_1) вокруг нормали к **P**, проходящей через O. Следовательно, решение будет обязательно компланарным.

Усложняя условия симметрии, можно получить компланарное не плоское решение также и при любом $n > 4$. Действительно, пусть начальные положения и начальные скорости четырех тел с равными массами выбраны так, что они будут симметричными не только по отношению к плоскости **P**, но и по отношению к прямой **K**, перпендикулярной к **P**, причем **P** и **K** проходят через начало координат. Кроме того, пусть в начальный момент произвольное число $\left(=\left[\frac{1}{2}\right]-2\right)$ пар тел с равными массами лежит на прямой **K**, скорости тел направлены вдоль **K** и эти скорости и положения тел симметричны относительно плоскости **P**. Наконец, если n — нечетное,

§ 325а. Пусть дано компланарное решение (3), причем n — произвольное. Введем вместо инерциальной барицентрической системы координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$ барицентрическую (но вообще не инерциальную) систему $\bar{\xi} = (x, y, z)$, вращающуюся вокруг центра масс так, что плоскость (x, y) совпадает при любом t с плоскостью $\Pi(t)$, в которой находятся всегда все n тел. Таким образом,

$$\xi = \Omega\bar{\xi}, \tag{8_1}$$

$$\bar{\xi}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{8_2}$$

$$z_i(t) \equiv 0, \tag{8_3}$$

где $\Omega = \Omega(t)$ — матрица вращения *). Положим

$$J^{xx} = \sum m_i x_i^2, \qquad J^{yy} = \sum m_i y_i^2, \qquad J^{xy} = \sum m_i x_i y_i, \tag{9_1}$$

$$K = \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i') \tag{9_2}$$

и определим $S = (s_1, s_2, s_3)$ посредством Ω с помощью (5) § 66. Покажем, что

$$\Omega^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |C| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 J^{yy} - s_2 J^{xy} \\ s_2 J^{xx} - s_1 J^{xy} \\ K + s_3 (J^{xx} + J^{yy}) \end{pmatrix}, \tag{10_1}$$

$$\begin{vmatrix} J^{xx} & J^{xy} \\ J^{xy} & J^{yy} \end{vmatrix} = \sum^{*} m_j m_k \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix}^2, \tag{10_2}$$

$$J^{xx} + J^{yy} = J. \tag{10_3}$$

Действительно, формулы (8_2), (8_3) показывают прежде всего, что компоненты вектора $\bar{\xi}_i \times \bar{\xi}_i'$ равны 0, 0 и $(x_i y_i' - y_i x_i')$ соответственно. В то же время компоненты вектора $\bar{\xi}_i \times (S \times \bar{\xi}_i)$

то поместим тело с произвольной массой в начало координат O (точку пересечения **P** и **K**). Тогда в процессе движения симметрия относительно прямой и плоскости не будет нарушаться. Таким образом, опять все тела будут располагаться при любом t в плоскости $\Pi(t)$, проходящей через прямую **K**, так что решение будет компланарным, но вообще не плоским.

*) Заметим, что $\Omega(t)$ определяется условиями (8_3) не единственным образом, поскольку положение оси x в плоскости может быть выбрано произвольно. Например, можно нормализовать матрицу вращения, потребовав, чтобы m_1 находилось при любом t на оси x. Тогда $\Omega(t)$ будет аналитической функцией t (в силу аналитичности каждого решения (3) дифференциальных уравнений (1_1) с аналитическими правыми частями).

равны

$$s_1y_i^2 - s_2x_iy_i, \quad s_2x_i^2 - s_1x_iy_i, \quad s_3(x_i^2 + y_i^2)$$

соответственно. Следовательно, из (9_1) — (9_2) видно, что вектор в правой части (10_1) равен сумме векторов

$$\sum m_i\bar{\xi}_i \times \bar{\xi}_i', \quad \sum m_i\bar{\xi}_i \times (S \times \bar{\xi}_i).$$

Вместе с тем предполагалось, что барицентрическая инерциальная система координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$ выбрана в соответствии с (7). Поэтому в силу (5), (4_1) вектор в левой части (10_1) равен

$$\Omega^{-1}C \equiv \sum m_i\Omega^{-1}(\xi_i \times \xi_i').$$

Следовательно, формула (10_1) справедлива, если

$$\Omega^{-1}(\xi_i \times \xi_i') = (\bar{\xi}_i \times \bar{\xi}_i') + \bar{\xi}_i \times (S \times \bar{\xi}_i).$$

Это равенство вместе с (11_2) § 69 и доказывает (10_1) § 325а, поскольку (8_1) § 325а совпадает с (8) § 69, если положить $\xi = \Xi$, $\xi = X$.

Кроме того, формулы (4_1) — (4_2) § 314 и (9_1) § 325а показывают, что (10_2) § 325а есть лишь частный случай (1) § 65, когда

$$a_i = m_i^{1/2}x_i, \quad b_i = m_i^{1/2}y_i.$$

Наконец, в силу (8_1) — (8_3)

$$\xi_i^2 = \bar{\xi}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

так что (10_3) вытекает из (9_1) и (2_3).

§ 326. Тривиальные примеры показывают *), что существуют решения, не являющиеся компланарными и не обладающие инвариантной плоскостью. Вместе с тем решение, для которого инвариантная плоскость не существует (т. е. для которого $C = 0$), будет обязательно плоским (см. § 324) каждый раз, когда оно является компланарным (см. § 325).

С целью доказательства этого утверждения заметим, что если $C = 0$, то на основании соотношения (10_1), справедливого для лю-

---

*) Например, пусть n равно 4, 6, 12 или 20 и все n тел имеют равные массы m_i. Поместим эти тела в вершинах правильного геометрического тела и выберем начальные скорости так, чтобы они имели одну и ту же величину и были направлены к центру этого тела.

бого компланарного решения, мы получим для $s_1 = s_1(t)$, $s_2 = s_2(t)$ два однородных линейных уравнения с определителем, равным (10_2). Так как согласно примечанию в § 325 этот определитель, а также s_1 и s_2 можно рассматривать как аналитические функции t, то или s_1 и s_2, или (10_2) обращаются в нуль при любом t.

В первом случае, когда $s_1(t) \equiv 0$, $s_2(t) \equiv 0$, условие (13_2) § 72 удовлетворяется и, таким образом, ось z вращающейся системы координат $\xi = (x, y, z)$ совпадает с осью ξ^{III} инерциальной системы координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$. Учитывая также (8_3), придем к выводу, что все n тел движутся, оставаясь в фиксированной плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$, т. е. что решение плоское.

Во втором случае, когда определитель (10_2) равен нулю при любом t, обращаются также в нуль каждый из $^1/_2 n(n-1)$ определителей $x_j y_k - x_k y_j$, $1 \leqslant i < k \leqslant n$. Поэтому из (8_2) следует, что площадь любого треугольника, образованного началом координат и двумя из n тел, обращается тождественно в нуль, т. е. что все n тел коллинеарны при любом t. Следовательно, можно выбрать вращающуюся систему координат (x, y, z), рассмотренную в § 325, так, что все n тел располагаются при любом t на оси x. Тогда не только $z_i(t) \equiv 0$, но и $y_i(t) \equiv 0$, а в силу (9_1), (9_2) и (10_1)

$$J^{yy} \equiv 0, \qquad J^{xy} \equiv 0, \qquad K \equiv 0, \qquad J^{xx} \equiv J.$$

Соотношение (10_1) сведется при $C = 0$ к следующим:

$$0 = 0, \qquad 0 = s_2 J, \qquad 0 = s_3 J.$$

Так как $J > 0$, то $s_2(t) \equiv 0$, $s_3(t) \equiv 0$, а это условие отличается лишь нумерацией индексов от условия $s_1(t) \equiv 0$, $s_2(t) \equiv 0$ в первом случае, проанализированного с помощью (13_2) § 72. Доказательство закончено.

§ 327. Будем говорить, что n тел находятся в данный момент $t = t_0$ в сизигии, если они располагаются в этот момент коллинеарно. При этом подразумевается, что для рассматриваемого решения (3) положения всех тел не обязательно коллинеарны при $t \neq t_0$.

Покажем, что в момент сизигий все n тел должны находиться в инвариантной плоскости, если только последняя существует (т. е. если $C \neq 0$).

Действительно, если вектор ξ_i определяет в момент $t = t_0$ положение m_i в инерциальной барицентрической системе координат ξ, то по определению сизигий любая пара тел располагается на одной прямой, проходящей через начало координат, так что $\xi_i \times \xi_k = 0$, $i, k = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$(\xi_i \times \xi_k)\xi_i' = 0, \qquad (\xi_i \times \xi_k')\xi_k = 0,$$

и после скалярного умножения (4_1) на ξ_k получим, что $0 = C \cdot \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. Так как при $C \neq 0$ соотношение $C \cdot \xi = 0$ представляет собой уравнение инвариантной плоскости, то доказательство закончено.

§ 328. Назовем решение (3) уравнений (1_2) прямолинейным, если в инерциальной системе координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$ существует прямая Λ^*, на которой находятся все n тел при любом t и которая не зависит от t.

Покажем, что в этом случае решение (3) не может существовать при $-\infty < t < +\infty$, если при некотором конечном $t = t^0$ не происходит столкновения по крайней мере двух из n тел.

Действительно, выберем прямую Λ^* в качестве оси ξ^{I} так, что $\xi_i = (\xi_i^{\mathrm{I}}, 0, 0)$, и занумеруем тела так, что $\xi_1^{\mathrm{I}} < \xi_2^{\mathrm{I}} < \ldots < \xi_n^{\mathrm{I}}$. Тогда так как начало координат находится в центре масс, то $\xi_n^{\mathrm{I}} > 0$. В то же время (1_1), (1_2), (1_3) показывают, что вторая производная отрицательна (действительно, $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ притягивают m_n в направлении $\xi^{\mathrm{I}} = -\infty$). Однако на плоскости (t, f) нельзя провести кривую $f = f(t)$, лежащую целиком в верхней полуплоскости $(f > 0)$ и вогнутую снизу $(f'' < 0)$. Поэтому или функция $\xi_n^{\mathrm{I}} = \xi_n^{\mathrm{I}}(t)$, а вместе с тем и решение (3) существует лишь в ограниченном промежутке изменения t (но не при всех $-\infty < t < \infty$), или же при некотором конечном $t = t^0$ происходит столкновение (в этом случае один из знаменателей в (1_3) обращается в нуль, и уравнения (1_1) теряют смысл).

§ 329. Назовем решение (3) уравнений (1_1) коллинеарным, если при любом t существует прямая $\Lambda = \Lambda(t)$, на которой располагаются все n тел в этот момент.

Очевидно, решение тогда является компланарным (см. § 325), однако оно может не быть прямолинейным (см. § 328), так как допускается изменение прямой $\Lambda(t)$ со временем t. Вместе с тем прямая $\Lambda(t)$ должна вращаться вокруг центра масс, оставаясь в плоскости Π^*, которая сохраняет неизменное положение в барицентрической инерциальной системе координат ξ. Другими словами, каждое коллинеарное решение является плоским. Это вытекает из результатов, изложенных в § 327 (случай $C \neq 0$) или в § 326 (случай $C = 0$).

§ 330. Оказывается, коллинеарное решение обладает или не обладает инвариантной плоскостью в зависимости от того, является ли оно или не является одновременно прямолинейным.

Действительно, если прямая $\Lambda(t)$ не зависит от t, то, поскольку $\xi_i = \xi_i(t)$ принадлежит этой прямой, ей принадлежит и $\xi_i' = \xi_i'(t)$, так что $\xi_i \times \xi_i' = 0$, и в силу (4_1) имеем $C = 0$. Если же прямая $\Lambda(t)$ зависит от t, т. е. если угловая скорость ее движения в плоскости Π^* не обращается тождественно в нуль, то $C = 0$, как это будет показано в конце § 331a.

§ 331. Покажем, что если коллинеарное решение не является прямолинейным, то конфигурация n тел сохраняется при изменении t подобной первоначальной. Другими словами, если взаимные расстояния и изменяются, то лишь пропорционально друг другу.

Действительно, такое решение является прежде всего плоским (см. § 329). Следовательно, плоскость движения Π^* может быть выбрана в качестве координатной плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ барицентрической инерциальной системы координат ξ. Выберем на этой плоскости систему координат (x, y), имеющую общее начало с системой $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$, но вращающуюся по отношению к $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ с постоянной угловой скоростью $\varphi' = \varphi'(t)$ таким образом, что ось x совпадает при любом t с прямой $\Lambda(t)$. Тогда координата $y_i = y_i(t)$ любого m_i равна нулю при любом t. Следовательно, проекция абсолютного ускорения m_i на ось y вращающейся системы координат, определяемая второй строчкой матрицы (14_2) § 73 (где надо положить $x = x_i$, $y = y_i$), равна $2\varphi' x_i' + \varphi'' x_i$. Вместе с тем все n тел находятся на оси x, так что проекции сил притяжения на ось y, т. е. проекции векторов $U_\xi{}^i$ на эту ось, равны тождественно нулю. Следовательно,

$$2\varphi' x_i + \varphi'' x_i = 0$$

при любом i и t. Однако угловая скорость $\varphi' = \varphi'(t)$ является аналитической функцией t, и она может обращаться в нуль лишь при изолированных значениях t. Фактически случай $\varphi'(t) \equiv 0$ исключен в силу предположения о том, что решение не является прямолинейным, т. е. что прямая $\Lambda(t)$ действительно вращается. Кроме того, $x_i \neq 0$, по крайней мере для $n - 1$ из значений i. Следовательно, можно разделить левую часть соотношения

$$2\varphi' x_i' + \varphi'' x_i = 0$$

на $\varphi' x_i$, по крайней мере при $n - 1$ значениях индекса i. После этого с помощью квадратур получим, что $x_i(t) = \lambda(t) x_i(0)$, по крайней мере для $n - 1$ из n значений индекса i и для функции $\lambda(t)$, определяемой лишь одной функцией $\varphi' = \varphi'(t)$ и не зависящей от i.

Для завершения доказательства достаточно подставить последнее соотношение в (4_2). Тогда становится очевидным, что можно не исключать ни одного значения индекса i, т. е. что соотношение $x_i = \lambda(t) x_i(0)$ имеет место при всех $i = 1, \ldots, n$.

§ 331a. Подставим $x_i = \lambda(t)x_i(0)$, $y_i \equiv 0$ в линейные уравнения, определяющие вращающуюся систему координат (x, y) с помощью невращающейся координатной системы $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ и функции $\varphi = \varphi(t)$. Подставим, далее, получающиеся выражения для $\xi_i^{\mathrm{I}}(t)$ и $\xi_i^{\mathrm{II}}(t)$ в формулу для C^{III} (см. (5)). Тогда придем к соотношению

$$|\varphi'|\lambda^2 J_0 = |C|,$$

где J_0 — положительная постоянная, равная

$$\sum m_i\{x_i^2(0) + y_i^2(0)\}.$$

Так как очевидно, что $\lambda^2 \neq 0$, то $\lambda(t) = \mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда $\varphi' = \mathrm{const}$. Другими словами, не только форма, но и размеры конфигурации n тел не зависят от t тогда и только тогда, когда угловая скорость $\varphi'(\neq 0)$ вращения прямой Λ постоянна.

Из соотношения же $|\varphi'|\lambda^2 J_0 = |C|$, $\lambda^2 > 0$, $J_0 > 0$, $\varphi' \neq 0$, вытекает, что $C \neq 0$, что и утверждалось в конце § 330.

§ 332. Результаты, изложенные в §§ 322, 323—331a, являются, в основном, следствиями девяти интегралов, найденных в §§ 317 и 316.

Используя десятый известный интеграл, т. е. (2_1) или эквивалентное выражение (2_4), покажем, что если данное решение (3) уравнений (1_1) существует при всех t и таково, что $\frac{1}{2}n(n-1)$ взаимных расстояний между n телами остаются меньше достаточно большой постоянной, то постоянная энергии h должна быть отрицательной. Кроме того, функция $2T = 2T(t)$ должна тогда осциллировать вблизи силовой функции $U = U(t)$ в том смысле, что

$$\underline{\lim}\, 2T \leqslant \underline{\lim}\, U \leqslant \overline{\lim}\, U \leqslant \overline{\lim}\, 2T \quad (\leqslant +\infty)\ ^{*)}$$

при $t \to \infty$.

Так как центр масс находится в точке $\xi = 0$, то предположение об ограниченности взаимных расстояний $\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|$ при $t \to \infty$ эквивалентно предположению об ограниченности при $t \to \infty$ положительной функции (2_3), так что

$$0 \leqslant \underline{\lim}\, J \leqslant \overline{\lim}\, J < +\infty.$$

Таким образом, отношение $J : t^2$ при всех достаточно больших t не меньше, чем некоторая отрицательная, и не больше, чем некоторая положительная постоянная. Дважды интегрируя вторую

---

*) Оба символа $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ для нижнего и верхнего пределов относятся или к $t \to -\infty$, или к $t \to +\infty$.

производную $J'' = J''(t)$, получим, что при $t \to \infty$

$$\underline{\lim}\, J'' \leqslant 0 \leqslant \overline{\lim}\, J''.$$

Это неравенство эквивалентно в силу (2_4) следующему:

$$\underline{\lim}\, U \leqslant -2h \leqslant \overline{\lim}\, U$$

и в силу (2_1) неравенству (10).

Заметим, что обе функции (1_3) и (1_4) положительны. Так как $\underline{\lim}\, U \leqslant -2h$, $U > 0$, то или $h < 0$, или $\underline{\lim}\, U = 0$.

Поскольку в случае $\underline{\lim}\, U = 0$ взаимные расстояния становятся в соответствии с (1_3) сколь угодно большими (при достаточно больших t), то приходим к выводу, что $h < 0$.

§ 332а. Из приведенного доказательства видно, что если $h \geqslant 0$, то не только $\overline{\lim}\, J = \infty$, но и $\lim J = \infty$.

Однако нельзя утверждать (и это несправедливо при $n > 2$), что необходимое условие $h < 0$ является также и достаточным для $\overline{\lim}\, J < +\infty$.

ОДНОВРЕМЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

§ 333. Так как (2_4) содержит обе функции J, U времени t, то было бы желательно (см. § 332) иметь простое дифференциальное уравнение, в которое входила бы лишь одна из этих функций вместе со своими производными. К сожалению, составить такое уравнение невозможно. Вместе с тем имеется ряд полезных неравенств, связывающих J (или U) и их производные.

Например, существуют две положительные постоянные M_0, m_0, зависящие от масс и такие, что функция $J = J(t)$ и ее производные удовлетворяют неравенствам

$$|J'''| \leqslant M_0(|J''| + 4|h|)^{5/2}, \tag{11_1}$$

$$(J'' - 4h)J^{1/2} \geqslant m_0 > 0 \tag{11_2}$$

для всех решений (3) уравнений (1) с произвольно фиксированным значением постоянной энергии $h (\gtreqless 0)$.

Доказательство опирается на соотношения

$$T = \frac{1}{2}\mu^{-1} \sum^{*} m_j m_k (\xi'_j - \xi'_k)^2, \tag{12_1}$$

$$J = \mu^{-1} \sum^{*} m_j m_k \rho_{jk}^2, \tag{12_2}$$

которые были выведены в § 322а.

Столкновения должны быть, конечно, исключены, т. е. расстояния $\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|$ не должны обращаться в нуль. Тогда в соответствии с (4) § 65, где надо положить $v = \xi_j - \xi_k$, производная ρ'_{jk} существует и при этом $|\rho'_{jk}| \leqslant |\xi'_j - \xi'_k|$.

Следовательно, согласно (1_3)

$$|U'| = \left| - \sum{}^{*} \frac{m_j m_k \rho'_{jk}}{\rho^2_{jk}} \right| \geqslant \sum{}^{*} \frac{m_j m_k |\xi_j - \xi_k|}{\rho^2_{jk}},$$

где опять же в силу (1_3)

$$\frac{m_j m_k}{\rho_{jk}} < U,$$

так что

$$|U'| \leqslant U^2 \sum{}^{*} \frac{|\xi'_j - \xi'_k|}{m_j m_k}.$$

Так как в соответствии с (12_1)

$$m_j m_k (\xi'_j - \xi'_k)^2 \leqslant 2\mu T,$$

то, полагая

$$M_0 = \mu^{1/2} \sum{}^{*} (m_j m_k)^{-3/2},$$

получим

$$|U'| \leqslant M_0 U^2 (2T)^{1/2}.$$

Отсюда и вытекает (11_1), так как в соответствии с (2_1), (2_4)

$$U' = -\frac{1}{2} J''', \qquad U^2 (2T)^{1/2} \leqslant \frac{1}{4} (|J''| + 4|h|)^{5/2}.$$

Точно так же докажем (11_2). Действительно, каждый член в сумме (12_2) меньше всей суммы (12_2), т. е.

$$J^{1/2} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}} > \mu^{-1/2} (m_j m_k)^{3/2}.$$

Так как согласно (2_4) и (1_3)

$$J'' - 4h = 2 \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}},$$

то (11_2) удовлетворяется при

$$m_0 = 2\mu^{-1/2} \sum{}^{*} (m_j m_k)^{3/2}.$$

§ 334. Другое ограничение на функцию $J = J(t)$ определяется неравенством

$$J'' - 2h - \frac{1}{4}\frac{J'^2}{J} \geqslant \frac{C^2}{J}, \qquad (13)$$

более сложным, чем $(11_1)-(11_2)$, так как оно содержит, кроме постоянной энергии h, также длину $|C|$ вектора кинетического момента для произвольного решения (3).

Имея в виду доказательство этого неравенства, заметим прежде всего, что

$$\xi_i^2 = |\xi_i|^2, \qquad |\xi_i \cdot \xi_i'| = |\xi_i| \cdot |\xi_i|'.$$

Следовательно, из определения (2_3) получим, что

$$\frac{1}{2} J' = \sum m_i |\xi_i| \cdot |\xi_i|'.$$

Применение же неравенства

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

при $a_i = m_i^{1/2}\,|\xi_i|$, $\quad b_i = m_i^{1/2}\,|\xi_i|'$ дает, что

$$\frac{1}{4} J'^2 \leqslant J \sum m_i |\xi_i|'^2 \equiv J \sum \frac{m_i(\xi_i \cdot \xi_i')^2}{\xi_i^2}.$$

Полагая

$$a_i = m_i^{1/2}\,|\xi_i|, \qquad A_i = m_i^{1/2}\,\frac{(\xi_i \times \xi_i')}{|\xi_i|},$$

перепишем формулу (9) § 316 для C в виде $C = \Sigma a_i A_i$ и придем аналогичным образом к оценке

$$C^2 \leqslant \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum |A_i|^2\right) \equiv J \sum \frac{m_i(\xi_i \times \xi_i')^2}{\xi_i^2}.$$

Следовательно, после сложения получим

$$\frac{1}{4} J'^2 + C^2 \leqslant J \sum \frac{\{m_i(\xi_i \cdot \xi_i')^2 + (\xi_i \times \xi_i')^2\}}{\xi_i^2}.$$

Однако в силу (2) § 65

$$\{\ \} = \xi_i^2 \xi_i'^2,$$

так что

$$\frac{1}{4} J'^2 + C^2 \leqslant J \sum m_i \xi_i'^2 .$$

Из последнего неравенства и вытекает (13), так как

$$\sum m_i \xi_i'^2 = J'' - 2h$$

в силу (1_4), (2_1), (2_4).

§ 334а. Если через $Q = Q(t)$ обозначить функцию

$$Q = -2hJ^{1/2} + \frac{{}^1/_4 J'^2 + C^2}{J^{1/2}}, \tag{14}$$

где $J^{1/2} > 0$, то, дифференцируя ее и учитывая соотношение

$$(J^{1/2})' = \frac{J'}{2J^{1/2}},$$

получим, что производная Q' равна произведению $(J^{1/2})'$ на функцию, являющуюся в силу (13) неотрицательной. Таким образом смысл неравенства (13) тот, что функции Q' и $(J^{1/2})'$ не могут отличаться друг от друга по знаку. Это значит, что Q и $J^{1/2}$, а вместе с тем Q и J изменяются вместе с t так, что если одна из этих функций возрастает, то другая не может убывать.

§ 335. Этот факт, вытекающий из неравенства (13), позволяет доказать, что если решение (3) уравнений (1_1) обладает инвариантной плоскостью, т. е. если постоянный вектор C не равен нулю, то не может существовать момент $t = t^0$, в который происходит одновременное столкновение всех n тел.

Когда мы говорим об одновременном столкновении всех n тел при $t = t^0$, то это означает, что все n точек $\xi_i = \xi_i(t)$ пространства $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$ стремятся при $t \to t^0$ к одной и той же точке этого пространства. Последняя должна, конечно, совпадать с центром масс, т. е. с началом координат $\xi = 0$. Очевидно, такой случай может иметь место тогда и только тогда, когда положительная функция $J = \Sigma m_i \xi_i^2 = J(t)$ стремится к нулю при $t \to t^0$. Следовательно, утверждение, которое надо доказать, состоит в том, что обращение в нуль постоянной интегрирования C является необходимым условием существования такого t_0, что $J \to 0$ при $t \to t_0$.

Прежде всего заметим, что если $J \to 0$ при $t \to t^0$, то также стремятся к нулю все взаимные расстояния $\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|$, а силовая функция U стремится, следовательно, к $+\infty$. Так как

$$J'' = 2U + 4h,$$

где $h = \text{const}$, то $J'' \to \infty$ при $t \to t^0$. Таким образом, при значениях t, достаточно близких к t^0 *), имеем $J'' > 0$, и, следовательно, производная J' возрастает и не меняет свой знак. Так как $0 < J \to 0$, то J — монотонно убывающая функция. Поэтому из изложенного в § 334а вытекает, что функция (14) в окрестности t^0 не может быть возрастающей. Следовательно, функция (14) стремится при $t \to t^0$ к пределу, который может быть равным $-\infty$, но не может быть равным $+\infty$. Вместе с тем предел функции (14) равен

$$\lim \frac{{}^1/_4 J'^2 + C^2}{J^{1/2}}, \tag{15}$$

так как $h = \text{const}$, $J \to 0$ и, следовательно, $-2hJ^{1/2} \to 0$. Однако $J^{1/2} > 0$, так что предел (15) — конечный и не отрицательный. Отсюда вытекает, что величина $C^2 / J^{1/2}$ должна оставаться при $t \to t^0$, т. е. при $J \to 0$, ограниченной. Поскольку $C^2 = \text{const}$, то $C = 0$, что и надо было доказать.

В ходе доказательства было получено, что $J'' \to +\infty$. Следовательно, из (11_1), где M_0, h — постоянные, вытекает, что в достаточно малой окрестности t^0 имеем неравенство

$$|J'''| < \text{const}(J'')^{5/2}.$$

§ 335а. Используя (11_2), покажем, что если t^0 — момент одновременного столкновения, то $J'^2 / J^{1/2}$ стремится при $t \to t^0$, т. е. при $J^{1/2} \to 0$, к конечному положительному пределу.

Действительно, как было показано в § 335, функция (14) имеет при $t \to t^0$ конечный предел (15), который не может быть отрицательным. Так как $C = 0$, то, следовательно, существует конечный неотрицательный предел $\lim (J'^2 / J^{1/2})$. Но дело в том, что этот предел не может быть равным нулю.

Прежде всего, поскольку $C = 0$ и $0 < J^{1/2} \to 0$, функция (14) и ее предел (15) запишутся в виде

$$Q = -2hJ^{1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{J'^2}{J^{1/2}}\right) \tag{16_1}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{4}\lim\left(\frac{J'^2}{J^{1/2}}\right), \tag{16_2}$$

---

*) Так как задача обратима (см. § 314), то можно предположить без потери общности, что t стремится к t^0, возрастая.

где $\mu_0 = \lim Q$. Из (16_1) видно, что

$$(2QJ'^{1/2})' = (J'' - 4h)J'.$$

Интегрируя это соотношение в пределах от t до $\bar{t}$, причем t — фиксированное, а $\bar{t}$ стремится к моменту одновременного столкновения t^0, и учитывая, что $\lim J^{1/2} = 0$, а предел (16_2) конечен, придем к формуле

$$2QJ^{1/2} = \int_{t^0}^{t} (J'' - 4h)J'\,d\tilde{t}.$$

Как было указано выше (см. § 335), производная J' в достаточно малой окрестности t^0 сохраняет знак. Поэтому положительная постоянная m_0 в (11_2) такова, что в достаточно малой окрестности t^0

$$2|Q|J^{1/2} \geqslant \int_{t^0}^{t} \left(\frac{m_0}{J^{1/2}}\right) J'\,d\tilde{t}.$$

Однако интеграл в правой части этого неравенства равен $2m_0J^{1/2}$, так как $J^{1/2} \to 0$ при $\tilde{t} \to t^0$, так что в достаточно малой окрестности t^0

$$2|Q|J^{1/2} \geqslant 2m_0J^{1/2},$$

т. е. $|Q| \geqslant m_0$. Поскольку $m_0 > 0$, а предел (16_2) существует, то доказательство неравенства $\lim (J'^2 / J^{1/2}) > 0$ закончено.

§ **336.** Так как предел (16_2) не обращается в нуль, то убывающая функция $J = J(t) > 0$ стремится при $t \to t^0$ к нулю таким образом, что в достаточно малой окрестности t^0 она становится пропорциональной $(t - t^0)^{4/3}$ с коэффициентом пропорциональности $(^9/_4\mu_0)^{2/3}$. Кроме того, такая асимптотика сохраняется и после дифференцирования по t. Другими словами, справедливы асимптотические формулы

$$J \sim \left(\frac{3}{2}\mu_0^{1/2}\right)^{4/3}(t - t^0)^{4/3}, \tag{17_1}$$

$$J' \sim (12\mu_0^2)^{1/3}(t - t^0)^{1/3}, \tag{17_2}$$

(где $f_1 \sim f_2$ означает, что $f_1 / f_2 \to 1$ при $t \to t^0$, т. е. при $J \to 0$).

Действительно, (17_2) вытекает из (17_1) не только в результате формального (т. е. необоснованного) дифференцирования, но и фактически является следствием (17_1) в силу (16_2). Вместе с тем (17_1) вытекает из (16_2), если переписать это соотношение в виде

$$\pm\frac{dt}{dJ}\sim\frac{1}{2}\mu_0^{-1/2}\,J^{-1/4}$$

и затем проинтегрировать его в пределах от $J=0$ до близкого $J>0$. Интегрирование (но не дифференцирование) такой асимптотической формулы является всегда законным.

В частности, если $f(\tau)$ стремится при $\tau\to 0$ к некоторому пределу, то к тому же пределу стремится среднее значение этой функции

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau f(\sigma)\,d\sigma.$$

В то же время обратное утверждение не будет справедливым, если f не удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. В теории предельных процессов такие дополнительные условия называются «тауберовыми условиями».

§ 337. Мы покажем теперь, что наряду с (16_2), (17_1), (17_2) имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\mu_0=\lim J'^{1/2}J'', \qquad (18_1)$$

$$J''\sim\left(\frac{2}{3}\mu_0\right)^{2/3}(t-t^0)^{-2/3}. \qquad (18_2)$$

Заметим, что (18_1) можно получить после формального (т. е. необоснованного) дифференцирования (16_2). Кроме того, из (17_1) видно, что (18_1) эквивалентно (18_2). Наконец, к (18_2) придем после формального дифференцирования (17_2), что справедливо лишь тогда, когда удовлетворяются «тауберовы условия». Однако мы покажем, что оценка, полученная в конце § 335, гарантирует выполнение этих условий.

§ 338. Прежде всего, умножая (13), где $h=\text{const}$, на $J'^{1/2}$, полагая $t\to t^0$, $J'^{1/2}\to 0$ и используя (16_2), увидим, что нижний предел $\underline{\lim}\,J'^{1/2}J''\geqslant\mu_0$.

Если мы покажем, что верхний предел $\overline{\lim}\,J'^{1/2}J''\leqslant\mu_0$, то, поскольку (18_2) эквивалентно (18_1), эти формулы будут доказаны.

Положим далее $F=J'^3$, так что

$$F''=6J'J''^2+3J'^2J'''.$$

Используя оценку

$$|J'''|<\text{const}\,(J'')^{5/2},$$

найденную в конце § 335, и выражая J' и J'' как функции $F=J'^3$

и $F' = 3J'^2J''$, увидим, что

$$|F''| < \mathrm{const}\,\frac{F'^2 + |F'|^{5/2}}{|F|}.$$

Следовательно, из (17_2), где $J' = F^{1/3}$, следует, что

$$|F''| < \mathrm{const}\,\frac{F'^2 + |F'|^{5/2}}{t - t^0} \tag{19}$$

при $t \to t^0$.

Наконец, если ν_0 — положительная постоянная, равная $12\mu_0^2$, то

$$F \sim \nu_0(t - t^0), \tag{20$_1$}$$

$$\underline{\lim}\, F' \geqslant \nu_0 \tag{20$_2$}$$

при $t \to t^0$. Действительно, так как $F = J'^3$, то (20_1) эквивалентно (17_2). В то же время неравенство (20_2) представляет собой в силу формул $\nu_0 = 12\mu_0^2$, $F = J'^3$, $F' = 3J'^2J''$ и (16_2) другую форму записи неравенства $\underline{\lim}\, J'^{1/2}J'' \geqslant \mu_0$, доказанного выше. Неравенство же $\overline{\lim}\, J'^{1/2}J'' \leqslant \mu_0$, которое остается доказать, может быть записано аналогичным образом в виде $\overline{\lim}\, F' \leqslant \nu_0$. Таким образом, надо доказать, что оценки (20_1)—(20_2) совместно с «тауберовым» условием (19) приводят к неравенству $\overline{\lim}\, F' \leqslant \nu_0$ (но тогда мы и получим, что $F' \to \nu_0$, что и подтверждает законность формального дифференцирования (20_1)).

§ **338а.** Переходя к доказательству неравенства $\overline{\lim}\, F' \leqslant \nu_0$, предположим, что имеет место противоположное неравенство $\overline{\lim}\, F' > \nu_0$. Из этого неравенства и из (20_2) сразу следует тогда существование последовательности интервалов

$$t_1^{\mathrm{I}} < t < t_1^{\mathrm{II}}, \ldots, t_k^{\mathrm{I}} < t < t_k^{\mathrm{II}}, \ldots,$$

стремящихся при $k \to \infty$ к t^0 *) так, что

$$0 < \nu_0 < \alpha = F'(t_k^{\mathrm{I}}) < F'(t) < F'(t_k^{\mathrm{II}}) = \beta \tag{21}$$

при $t_k{}^{\mathrm{I}} < t < t_k{}^{\mathrm{II}}$, причем α и β — некоторые фиксированные числа, расположенные между пределами $\underline{\lim}\, F'$, $\lim F' (\leqslant +\infty)$ непрерывной функции $F'(t)$.

Очевидно, можно предположить, что t^0 совпадает с началом отсчета $t = 0$. Тогда, полагая

$$\mathrm{Const} = \mathrm{const}\,(\beta^2 + \beta^{5/2}),$$

---

*) То есть оба конца интервала $t_k{}^{\mathrm{I}}$, $t_k{}^{\mathrm{II}}$ стремятся к t^0 при $k \to \infty$.

увидим, что в силу (19) и (21)

$$|F''(t)| < \frac{\text{const}}{|t|}$$

при любом t в каком-либо интервале $t_k^{\mathrm{I}} < t < t_k^{\mathrm{II}}$. Так как t стремится к $t^0 = 0$, возрастая или убывая (см. примечание в § 335), то все t_k^{I} и t_k^{II} расположены по одну сторону от $t^0 = 0$. Следовательно, интегрируя неравенство (21) в пределах от t_k^{I} до t_k^{II}, получим, что

$$|F'(t_k^{\mathrm{II}}) - F'(t_k^{\mathrm{I}})| < \text{const}\lg\left|\frac{t_k^{\mathrm{II}}}{t_k^{\mathrm{I}}}\right|.$$

Так как разность $F'(t_k^{\mathrm{II}}) - F'(t_k^{\mathrm{I}})$ равна в силу (21) положительной постоянной $\beta - \alpha$, то $\lg|t_k^{\mathrm{II}}/t_k^{\mathrm{I}}|$ превосходит при $k \to \infty$ некоторое положительное число. Другими словами, существует такое положительное λ, что при $k \to \infty$

$$\frac{|t_k^{\mathrm{II}}|}{|t_k^{\mathrm{I}}|} > \lambda > 1. \tag{22}$$

Далее, в силу (20_1)

$$\frac{|F(t_k^{\mathrm{I}})|}{|t_k^{\mathrm{I}}|} \to \nu_0, \qquad \frac{|F(t_k^{\mathrm{II}})|}{|t_k^{\mathrm{II}}|} \to \nu_0,$$

так как $t_k^{\mathrm{I}} \to t^0$, $t_k^{\mathrm{II}} \to t^0$, $t^0 = 0$, $\nu_0 > 0$. Кроме того,

$$\frac{|F(t_k^{\mathrm{II}})|}{|t_k^{\mathrm{II}}|}\left|\frac{|t_k^{\mathrm{II}}|}{|t_k^{\mathrm{I}}|} - \frac{|F(t_k^{\mathrm{I}})|}{|t_k^{\mathrm{I}}|}\,\frac{|t_k^{\mathrm{II}}|}{|F(t_k^{\mathrm{II}})|}\right| > \alpha\left|\frac{|t_k^{\mathrm{II}}|}{|t_k^{\mathrm{I}}|} - 1\right|,$$

если k достаточно велико. Действительно, все t_k^{I}, t_k^{II} расположены по одну сторону от t^0, так что

$$\bigl||t_k^{\mathrm{II}}| - |t_k^{\mathrm{I}}|\bigr| = t_k^{\mathrm{II}} - t_k^{\mathrm{I}},$$

поскольку $t_k^{\mathrm{I}} < t_k^{\mathrm{II}}$. Кроме того, поскольку $t_k^{\mathrm{I}} \to t^0$, $t_k^{\mathrm{II}} \to t^0$, то из (20) видно, что если k достаточно велико, то все $F(t_k^{\mathrm{I}})$, $F(t_k^{\mathrm{II}})$ имеют один и тот же знак. Следовательно, неравенство (23), которое можно записать, очевидно, в виде

$$\bigl||F(t_k^{\mathrm{II}})| - |F(t_k^{\mathrm{I}}))|\bigr| > \alpha\bigl||t_k^{\mathrm{II}}| - |t_k^{\mathrm{I}}|\bigr|,$$

эквивалентно неравенству

$$|F(t_k^{\mathrm{II}}) - F(t_k^{\mathrm{I}})| > \alpha|t_k^{\mathrm{II}} - t_k^{\mathrm{I}}|.$$

Однако справедливость последнего неравенства очевидна, так как $F'(t) > \alpha > 0$ при $t_k^{\mathrm{I}} < t < t_k^{\mathrm{II}}$ в силу (21), что и доказывает (23).

Полагая $k \to \infty$ в (23) и используя (22), где $\nu_0 > 0$, получим неравенство

$$\nu_0 |\lambda - \nu_0 \nu_0^{-1}| \geqslant \alpha |\lambda - 1|.$$

Однако

$$|\lambda - \nu_0 \nu_0^{-1}| = \lambda - 1 > 0$$

в силу (22), так что $\nu_0 \geqslant \alpha$. В то же время $\alpha > \nu_0$ в силу (21), и мы пришли таким образом к противоречию. Следовательно, предположение о том, что $\overline{\lim} F' > \nu_0$, сделанное в конце § 338, неверное. Отсюда и вытекает справедливость (18_1)—(18_2).

§ 339. Следует упомянуть, что ни одно решение (3) уравнений (1_1) не может быть таким, что оно соответствует одновременному столкновению при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Другими словами, при $t \to \pm\infty$ кинетический момент J не может стремиться к нулю. Конечно, доказательство, приведенное в § 335, того факта, что если $J \to 0$, то $J'' \to +\infty$ остается справедливым и при $t \to \pm\infty$, а не только при $t \to t^0 \neq \pm\infty$.

Однако если $J'' \to +\infty$ при $t \to t^0$, причем $t^0 = \pm\infty$, то двукратное интегрирование показывает, что $J \to +\infty$. Таким образом, предположение о том, что $J \to 0$, приводит к противоречию.

ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

§ 340. Так как в барицентрической системе координат ξ соотношение $\Sigma m_i \xi_i = 0$ удовлетворяется тождественно, то задача с $3n$ степенями свободы, в которой рассматриваются $3n$ векторов $\xi_i = \xi_i(t)$, может быть сведена к задаче с $3(n-1)$ степенями свободы. При этом будут рассматриваться лишь $n-1$ из n векторов ξ_i, например $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, или же, точнее говоря, $n-1$ разностей

$$x_i = \xi_i - \xi_n, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Действительно, если $n-1$ векторов (1) известны, то ξ_n найдется из соотношения $\Sigma m_i \xi_i = 0$, а $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ — из (1). Векторы (1), определяющие положения $m_1, \ldots, m_{n-1}$ относительно m_n, будем называть гелиоцентрическими координатами, а m_n будем рассматривать как «Солнце» (даже в том случае, если m_n не наибольшая из n масс). Гелиоцентрическая система координат x имеет таким образом оси, параллельные при любом t осям инерциальной системы координат ξ, а ее начало находится в m_n.

Из уравнений (5) § 314 и критерия (14) § 318 сразу следует, что гелиоцентрическая система координат не является вообще инерциальной.

Поэтому уравнения Лагранжа в гелиоцентрической системе координат x нельзя получить путем простой замены ξ на x в уравнениях (5) § 314, и их следует вывести непосредственно. Кроме того, такой вывод не может опираться на правило § 95. Действительно, в § 95 предполагается, что формулы преобразования обладают отличным от нуля якобианом. Однако это условие в случае перехода к гелиоцентрическим координатам не удовлетворяется, поскольку согласно (1) n векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ заменяются лишь на $n - 1$ линейных комбинаций этих векторов.

§ 341. С целью избежать этого затруднения присоединим к (1) следующую линейную комбинацию:

$$x_n = \mu^{-1} \sum' m_i \xi_i \qquad \left(\mu = \sum m_i\right) \tag{2}$$

n инерциальных векторов ξ_i (не обязательно барицентрических). Вектор x_n, определяющий положение центра масс, рассмотрим как n-ю переменную. Легко заметить, что преобразование, обратное консервативному линейному преобразованию (1)—(2), определяется единственным образом по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi_j &= x_j - \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + x_n, \\ \xi_n &= -\mu^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + x_n, \\ j &= 1, \ldots, n-1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и, следовательно, преобразование (1)—(2) обладает отличным от нуля определителем (1). Таким образом, к этому преобразованию применимо правило, указанное в § 95.

Ниже мы используем при непосредственном применении этого правила символы суммирования Σ^0, Σ^+, которые получаются из (4_1)—(4_2) § 314 после замены n на $n - 1$, так что

$$\sum = \sum_{j=1}^{n} \qquad \sum^0 = \sum_{j=1}^{n-1}, \tag{4_1}$$

$$\sum^* = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n}, \qquad \sum^+ = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n-1} \qquad \left(\sum^* = \sum^+ + \sum^0\right). \tag{4_2}$$

Прежде всего из (3) вытекает, что если $j < k$, то

$$\xi_j - \xi_k = x_j - x_k, \quad k = 1, \ldots, n-1 \text{ и } \xi_j - \xi_k = x_j, \quad k = n.$$

Следовательно, выражение (3_2) § 314 для силовой функции U перепишется в силу (3) в виде

$$U = \sum^{+} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}} + m_n \sum^{0} \frac{m_j}{\rho_{jn}}, \tag{5}$$

где

$$\rho_{jk} = |x_j - x_k|, \quad \rho_{jn} = |x_j|.$$

Подставляя (3) в выражение (3_1) § 314 для T, получим

$$T = \overline{T} + \frac{1}{2}\mu x_n'^2, \tag{6_1}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum^{0} m_i x_i'^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(\sum^{0} m_i x_i'\right)^2}{\mu}, \tag{6_2}$$

$$\mu = \sum m_i. \tag{6_3}$$

Следовательно, функция Лагранжа $L(\xi', \xi) = T + U$ преобразуется согласно (3) к виду

$$L = \overline{T} + \frac{1}{2}\mu x_n'^2 + U,$$

где U выражается по формуле (5) и содержит в силу (4_1) — (4_2) лишь $n-1$ гелиоцентрических векторов (1), так что x_n является циклической координатой (см. § 182). Функция $\overline{T}$, определяемая по формуле (6_2), не содержит x_n'. Следовательно, преобразованная функция Лагранжа имеет вид

$$L = \overline{L} + \frac{1}{2}\mu x_n'^2,$$

где $\overline{L} = \overline{T} + U$ не содержит x_n', x_n. Поэтому уравнения Лагранжа

$$\left[\overline{L} + \frac{1}{2}\mu x_n'^2\right]_{x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

расщепляются на систему

$$[\overline{L}]_{x_i} \equiv [\overline{T} + U]_{x_i} = 0 \tag{7}$$

или

$$(\overline{T}_{x_i'})' = U_{x_i} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

не содержащую x_n, x_n', и на одно уравнение

$$\left[\frac{1}{2}\mu x_n'^2\right]_{x_n} \equiv \mu x_n'' = 0.$$

Последнее уравнение определяет согласно (2) равномерное и прямолинейное движение центра масс (см. § 317а).

В соответствии с изложенным координата x_n является линейной функцией t, а постоянные интегрирования для $x_n = x_n(t)$ можно без потери общности выбрать (см. § 322) равными нулю. Тогда

$$x_n = 0 \tag{8}$$

при любом t, т. е. инерциальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ становятся барицентрическими. Наконец, уравнения (7) представляют собой лагранжеву систему с $3(n-1)$ степенями свободы и содержат, как и требовалось, лишь гелиоцентрические координаты (1)

Конечно, система (7) не обладает шестью интегралами, соответствующими тем, которые были найдены в § 317. Действительно, эти интегралы были использованы при понижении порядка системы с $3n$ до $3(n-1)$, и они соответствуют равенству (8). Однако эта система имеет $3+1=4$ интеграла, соответствующих трем интегралам, найденным в § 316, и интегралу энергии.

Эти интегралы следующие:

$$\sum{}^0 m_i x_i \times x_i' - \frac{\left(\sum{}^0 m_i x_i\right) \times \left(\sum{}^0 m_i x_i'\right)}{\mu} = C, \tag{9_1}$$

$$\overline{T} - U = h, \tag{9_2}$$

где C, h — те же барицентрические постоянные интегрирования, что и в § 322. Действительно, к (9_1) можно легко прийти после подстановки (3) в интеграл (9) § 316

$$\sum m_i \xi_i \times \xi_i' = C,$$

если использовать (4_1), (6_3) и (8). Так как $T - U = h$, то (9_2) вытекает аналогичным образом из (6_1), (6_2) и (8). Формуле (9_2) соответствует следующая:

$$J'' = 2U + 4h, \tag{10_1}$$

где

$$J = \Sigma^0 m_i x_i^2 - \frac{(\Sigma^0 m_i x_i)^2}{\mu}. \tag{10_2}$$

Действительно, (10_2) можно получить на основании (3) и выражения

$$J = \Sigma m_i \xi_i^2$$

точно так же, как были получены формулы (6_1)—(6_2) для T. Формула же (10_1) совпадает с (2_4) § 322.

§ 342. Для того чтобы выписать уравнения гелиоцентрического движения в явной форме, достаточно выполнить в (7) дифференцирование, а затем разрешить получающиеся уравнения относительно гелиоцентрических ускорений x_1'', ..., x_{n-1}''. Покажем, что в результате мы придем к уравнениям

$$x_i'' + (m_n + m_i)\frac{x_i}{|x_i|^3} = {}^i\Omega_{x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad (11_1)$$

где

$${}^i\Omega = \sum_{k=1}^{n-1}{}' m_k \left(\frac{1}{|x_k - x_i|} - \frac{x_k \cdot x_i}{|x_k|^3}\right), \qquad (11_2)$$

причем ${}^i\Omega_{x_i}$ обозначает в (11_1) градиент скалярной суммы (11_2) относительно x_i, а символ Σ' обозначает суммирование по всем индексам $k = 1, \dots, n-1$, кроме $k = i$.

Действительно, подстановка (6_2) в (7) приводит к соотношениям

$$m_i x_i'' - \frac{m_i \Sigma^0 m_j x_j''}{\mu} = U_{x_i},$$

или же

$$m_n \mu^{-1} \sum{}^0 m_j x_j'' = \Sigma^0 U_{x_j},$$

поскольку $1 - \frac{\Sigma^0 m_j}{\mu} = \frac{m_n}{\mu}$ в силу (6_3) и (4_1). Вместе с тем в соответствии с (5), (4_1)—(4_2) и смыслом символа Σ' имеем

$$U_{x_i} = \sum_{k=1}^{n-1}{}' m_i m_k \frac{x_k - x_i}{|x_k - x_i|^3} - m_n m_i \frac{x_i}{|x_i|^3}$$

и, следовательно,

$$\Sigma^0 U_{x_j} = -m_n \Sigma^0 m_j \frac{x_j}{|x_j|^3},$$

поскольку двойная сумма в $\Sigma^0 U_{x_j}$ оказывается равной нулю в силу ее кососимметрической структуры. Из четырех соотношений, содержащихся в последних трех формулах, видно, что

$$x_i'' + (m_n+m_i)\frac{x_i}{|x_i|^3} = \sum_{k=1}^{n-1\,\prime} m_k\left(\frac{x_k-x_i}{|x_k-x_i|^3} - \frac{x_k}{|x_k|^3}\right), \qquad (12)$$

$$i = 1, \ldots, n-1 \quad (k \neq i).$$

Наконец, сравнение правой части (12) с (11_2) подтверждает справедливость (11_1).

§ 343. Пусть $n = 2$. Тогда существует только одно $(n-1=1)$ векторное уравнение (12), а его правая часть обращается в нуль. Следовательно, если через x обозначена единственная переменная $x_i = x_1$, то можно записать (1) и (12) в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi_1 - \xi_2, \\ x'' &= -(m_2+m_1)\frac{x}{|x|^3} \equiv V_x, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где

$$V = \frac{m_1+m_2}{|x|} \equiv \frac{\mu}{|x|}$$

Если за единицу массы примем $\mu = \Sigma m_i$, то $V = |x|^{-1}$, так что получим уравнение $x'' = V_x$ задачи двух тел, рассмотренной в §§ 241—312.

Смысл уравнения (13) заключается в том, что задача $n = 2$ тел может быть сведена к задаче о движении единственного тела в статическом гравитационном поле, обладающем радиальной симметрией и создаваемом гипотетическим телом μ. Это тело занимает положение «Солнца» $m_n = m_2$ и имеет массу, равную сумме $m_1 + m_2$ «планет» m_1 и m_2.

Переход от притягивающей массы m_2 к большей массе $\mu = m_1 + m_2$ влечет за собой, конечно, изменение исходных лагранжевых уравнений, так как вводится дополнительная сила.

Конечно, (13) остается справедливым при перемене местами индексов 1 и 2, так что за «Солнце» может быть принята любая из масс m_1, m_2.

Так как $\mu = m_1 + m_2$, то $m_1 - \dfrac{m_1^2}{\mu} = \dfrac{m_1 m_2}{\mu}$, и в силу (5), (6_2) интегралы (9_1), (9_2) можно записать для уравнения (13) в виде

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{m_1+m_2}{|x|} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}h, \tag{14_1}$$

$$x \times x' = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}C. \tag{14_2}$$

§ 343а. Если $n = 3$, то (1) и (12) перепишутся в виде

$$x_1 = \xi_1 - \xi_3, \quad x_2 = \xi_2 - \xi_3, \tag{15_1}$$

$$x_1'' = q_{11}x_1 + q_{12}x_2, \quad x_2'' = q_{21}x_1 + q_{22}x_2, \tag{15_2}$$

где через q_{jk} обозначены четыре скаляра

$$\left.\begin{aligned} q_{\alpha\alpha} &= -\frac{m_\alpha + m_3}{|x_\alpha|^3} - \frac{m_\beta}{|x_1 - x_2|^3}, \\ q_{\alpha\beta} &= \frac{m_\beta}{|x_1 - x_2|^3} - \frac{m_\beta}{|x_\beta|^3}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$
$$\alpha \neq \beta = 1, 2,$$

зависящие от двух неизвестных вектор-функций x_1, x_2 от t (так что уравнения (15_2), конечно, нелинейны).

§ 344. Можно ожидать, что уравнения (15_2) задачи трех тел упростятся, если два векторных уравнения (15_2) переходят одно в другое при перемене местами индексов 1 и 2. Это будет тогда и только тогда, когда

$$q_{11} \equiv q_{22} \text{ и } q_{12} \equiv q_{21} \tag{17}$$

тождественно по t.

Если дополнительно $x_1 \times x_2 \equiv 0$, так что два вектора x_1, x_2 коллинеарны при любом t, то формулы (15_1) показывают, что такое решение будет коллинеарным в смысле определения, данного в § 329. Из (11) и (15) вытекает тогда, что $|x_1| \equiv |x_2|$, т. е. что m_3 находится при любом t в середине отрезка m_1m_2. Если же $q_{12} \equiv 0$, то (16) показывает, что $|x_1| \equiv |x_1 - x_2| \equiv |x_2|$, т. е. что три тела m_1, m_2, m_3 образуют согласно (15_1) при любом t равносторонний треугольник. Следовательно, если для уравнений (15_2) удовлетворяются условия симметрии (17) и если дополнительно $x_1 \times x_2 \equiv 0$ или $q_{12} \equiv 0$, то три тела движутся так, что они образуют конфигурацию, остающуюся гомографической самой себе при изменении t. Ниже (см. §§ 369—382) будет изложена общая теория гомографических решений, так что мы ограничимся сейчас случаями, когда

$$x_1 \times x_2 \neq 0, \qquad (18_1)$$

$$q_{12} \neq 0. \qquad (18_2)$$

Целью дальнейшего анализа является выделение всех тех решений задачи трех тел, для которых условия симметрии (17) сочетаются с условиями (18_1) — (18_2).

Назовем решение задачи трех тел равнобедренным, если три тела образуют при любом t равнобедренный треугольник, который может изменять свои размеры и положение вместе с t и, кроме того, не вырождается в прямую линию и не является ни при каком-либо t равносторонним. Тогда упомянутая выше проблема заключается в выделении всех равнобедренных решений для случая двух равных масс в основании. Действительно, из (16) видно, что условия (17) эквивалентны двум условиям

$$m_1 = m_2, \qquad (19_1)$$

$$|x_1| \equiv |x_2|, \qquad (19_2)$$

где $|x_1|$, $|x_2|$ равны согласно (15_1) длине сторон треугольника, расположенных против масс m_1, m_2.

Однако оказывается также (§ 389), что равнобедренные решения возможны лишь тогда, когда массы двух тел равны между собой.

§ 345. Два вектора (15_1) удобно заменить их линейными комбинациями $^1/_2(x_1 + x_2)$ и $^1/_2(x_1 - x_2)$. Обозначим

$$X_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad X_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \qquad (20_1)$$

так что в силу (15_2) и (17)

$$X_1'' = (q_{11} + q_{12})X_1, \quad X_2'' = (q_{11} - q_{12})X_2. \qquad (20_2)$$

Тогда

$$X_1 \cdot X_2 = 0, \qquad (21_1)$$

$$X_1 \cdot X_2' = -X_2 \cdot X_1', \qquad (21_2)$$

$$X_1 \cdot X_2'' = 0, \qquad X_2 \cdot X_1'' = 0. \qquad (21_3)$$

Действительно, из (15_1) видно, что положения m_1, m_2, m_3 в гелиоцентрической системе координат x (m_3 выбрано в качестве «Солнца») определяются векторами x_1, x_2 и $x_3 = 0$. Следовательно, вектор X_1 определяет координаты середины основания m_1m_2 равнобедренного треугольника, причем вектор $x_1 - x_2$ перпендикулярен к этому основанию. Таким образом, векторы (20_1) перпендикулярны друг к другу, что доказывает (21_1). К (21_2) приходим после дифференцирования (21_1), а формулы (21_3) вытекают из (21_1) и (20_2).

Кроме того, существуют два постоянных вектора A_1, A_2 такие, что при любом t

$$X_1 \times X_1' = A_1, \qquad X_2 \times X_2' = A_2, \tag{22_1}$$

$$A_1 \cdot X_1 = 0, \qquad A_2 \cdot X_2 = 0, \tag{22_2}$$

$$(X_1 \cdot X_2')^2 = A_1 \cdot A_2. \tag{22_3}$$

Действительно, из (20_2) вытекает, что $X_i \times X_i'' \equiv 0$, $i = 1, 2$, т. е. что $X_i \times X_i' = \text{const}$. Этим самым доказывается не только (21_1), но и (22_2), так как $(Y \times Z) \cdot Y \equiv 0$. Наконец, применяя тождество (3) § 65 к $a = X_1$, $b = X_1'$, $c = X_2$, $d = X_2'$ и используя (21_1), (21_2) и (22_1), придем к (22_3).

Дифференцируя (22_3), получим $X_1' \cdot X_2' = -X_1 \cdot X_2''$, откуда $X_1' \cdot X_2' \equiv 0$ в силу (21_3). Следовательно, также

$$(X_1' \cdot X_2')' \equiv X_1' \cdot X_2'' + X_2' \cdot X_1'' \equiv 0.$$

Подставляя выражение (20_2) для X_1'', X_2'' и используя (21_2), увидим, что $2q_{12} X_1 \cdot X_2' \equiv 0$, откуда $A_1 \cdot A_2 = 0$ в силу (18_2) и (22_3). Таким образом, векторы A_1 и A_2 перпендикулярны друг к другу. Так как из (21_1) и (22_2) видно, что это справедливо для любой из трех пар векторов X_1, X_2; A_1, X_1; A_2, X_2, то четыре вектора A_1, A_2, X_1, X_2 взаимно перпендикулярны. Следовательно, по крайней мере один из этих четырех векторов должен обращаться в нуль. Однако ни X_1, ни X_2 не могут обратиться тождественно в нуль. Действительно, условие (18_1) эквивалентно в силу (20_1) условию $X_1 \times X_2 \not\equiv 0$, откуда $X_1 \not\equiv 0$, $X_2 \not\equiv 0$.

§ 346. Поэтому

(I) по крайней мере один из двух постоянных векторов A_1, A_2 обращается в нуль;

(II) векторы $X_1 = X_1(t)$, $X_2 = X_2(t)$ могут обращаться в нуль лишь при изолированных значениях t, взаимно перпендикулярны и определяют в пространстве (X) плоскость, проходящую через начало координат;

(III) если $A_\alpha \neq 0$, то постоянный вектор A_α перпендикулярен к упомянутой в II плоскости;

(IV) если $A_\alpha = 0$, то, как видно из (22_1), вектор $X_\alpha = X_\alpha(t)$ расположен всегда на прямой, проходящей через начало координат в пространстве (X) и остается с ростом t неизменным;

(V) во всех случаях плоскость, упомянутая в II, не изменяется с ростом t. Это вытекает из III или IV.

Векторы X_1, X_2 выражаются через ξ_1, ξ_2, ξ_3 по следующим формулам:

$$X_1 = \nu\xi_3 \qquad X_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), \tag{23_1}$$

где

$$\nu = -\frac{\mu}{\mu - m_3} \qquad \left(\mu = \sum m_i\right). \tag{23_2}$$

Эти формулы вытекают из (19_1), поскольку в силу (20_1)

$$X_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) - \xi_3, \qquad X_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2),$$

а $\Sigma m_i \xi_i = 0$.

Заметим, что I допускает лишь три случая:

$$(i) A_1 \neq 0 = A_2,$$
$$(ii) A_1 = 0 \neq A_2,$$
$$(iii) A_1 = 0 = A_2,$$

причем случай (iii) совпадает с (IV) при $\alpha = 1, 2$ и несовместим с (III). В то же время (III) и (IV) совпадают с (i) и (ii) а (II) и (V) имеют место во всех трех случаях. Следовательно, поскольку постоянный скаляр (23_2) отличен от нуля, то из (23_1) видно, что движение двух равных масс вокруг m_3, при котором m_1 и m_2 всегда располагаются в вершинах равнобедренного треугольника, должно соответствовать при любом t одной из трех симметричных конфигураций. Они изображены на рис. 12 *а*, *б*, *в*, причем предполагается, что барицентрическая координатная система выбрана

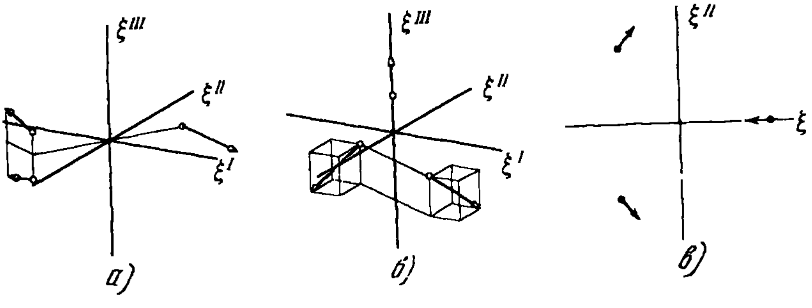

Рис. 12.

соответствующим образом. Стрелками указаны векторы скорости. Вектор скорости m_3 на первом рисунке расположен в плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$. На втором рисунке массы m_1, m_2 и их векторы скорости обладают симметрией относительно оси ξ^{III}. Плоскость третьего рисунка совпадает с плоскостью $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$.

§ 346а. В соответствии с рисунками лишь случай (*iii*) соответствует плоскому решению (см. определение в § 324). В случае (*i*) движение обладает неизменной плоскостью симметрии (совпадающей с плоскостью ξ^{I}, ξ^{II}). В случае (*ii*) движение обладает осью симметрии (совпадающей с осью ξ^{III}). В случае (*iii*) существует постоянная ось симметрии, лежащая в плоскости движения.

Легко показать, что в случаях (*i*) и (*iii*) должно иметь место столкновение m_1 и m_2, чего не может быть в случае (*ii*).

Наконец, сравнение рисунков с (5) § 322 показывает, что в силу симметрии движения равенства (6) § 323 имеют место во всех трех случаях, причем $C = 0$ в случае (*iii*). В то же время из § 326 следует, что $C \neq 0$ в случаях (*i*) и (*ii*).

Из сказанного вытекает, что условие $C = 0$ (см. § 335) является лишь необходимым, но не достаточным, для одновременного столкновения всех тел. В случае (*iii*) такого столкновения можно избежать с помощью соответствующего выбора оставшихся постоянных интегрирования.

§ 347. Так как $m_1 = m_2$, то по причине симметрии движения вытекает, что если при соответствующем выборе постоянных интегрирования $\xi_i(t^0)$, $\xi_i'(t^0)$ условия (*i*), (*ii*), (*iii*) для шести векторов $\xi_i(t)$ удовлетворяются при $t = t^0$, то они будут удовлетворяться и при любом t. Таким образом, каждое из рассмотренных трех видов симметричных решений фактически существует. Однако мы ставили перед собой цель доказать, что в предположении (19_1) эти очевидные типы равнобедренных решений исчерпывают все множество равнобедренных решений (см. также замечание в конце § 344). Как будет показано в § 374а, этот факт совсем не очевиден.

§ 347а. Заметим, что общие уравнения (15_2) с $3(n-1) = 3\cdot 2 = 6$ степенями свободы в любом из трех равнобедренных случаев сводятся к уравнениям консервативной динамической системы с 2 степенями свободы. Правда, для этих уравнений известен лишь один интеграл энергии, так что ни в одном из трех случаев (*i*), (*ii*), (*iii*) нельзя довести интегрирование до конца.

На этом заканчиваем анализ той частной задачи, которая была поставлена в § 344. Ниже мы рассмотрим другое применение общих гелиоцентрических лагранжевых уравнений (12).

ПАРНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

§ 348. Пусть данное решение задачи n тел таково, что в каждый момент некоторого t-интервала (конечного или бесконечного) расстояния от каких-либо двух тел, например, m_1 и m_n до остальных $n-2$ тел $m_2, \dots, m_{n-1}$ превосходят некоторую фиксированную положительную величину, т. е. что

$$\left.\begin{aligned} |x_1 - x_k| > \text{const} > 0, \\ |x_k| > \text{const} > 0,\ k = 2, \dots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Тогда естественно поставить вопрос об оценке отклонения фактического движения m_1 и m_n в течение рассматриваемого промежутка времени от того движения m_1 и m_n, которое имело бы место в случае отсутствия тел $m_2, \dots, m_{n-1}$. Другими словами, речь идет об оценке ошибки, которая допускается, если движение m_1 и m_n рассматривается как движение в задаче двух тел, описываемое уравнениями вида (13) — (14_2) § 343.

Такие оценки легко можно получить, заметив, что система (12) сводится при $i = 1$ к уравнению

$$x_1'' + (m_n + m_1)\frac{x_1}{|x_1|^3} = f, \tag{25_1}$$

где

$$f = \sum_{k=2}^{n-1} m_k \left(\frac{x_k - x_1}{|x_k - x_1|^3} - \frac{x_k}{|x_k|^3}\right). \tag{25_2}$$

Можно показать, что из (25_1), (25_2) вытекают оценки

$$\left|\left(\frac{x_1}{|x_1|}\right)'\right| \leqslant \frac{|x_1 \times x_1'|}{x_1^2}, \tag{26_1}$$

$$\frac{|(x_1 \times x_1')'|}{x_1^2} < \text{const}, \tag{26_2}$$

причем постоянная в правой части (26_2) зависит только от постоянных в неравенствах (24) и от заданных значений масс m_i.

Действительно, заметим прежде всего, что для произвольных 3-векторов a, b справедливо тождество

$$|a|^2 b - (a \cdot b) a = (a \times b) \times a.$$

Поэтому, полагая $a = x_1$, $b = x_1'$ и учитывая равенство

$x_1\cdot x_1' = |x_1|\cdot|x_1|'$, получим, что

$$|x_1|\,\{|x_1|x_1' - |x_1|'x_1|\} = (x_1\times x_1')\times x_1.$$

Так как $x_1 \neq 0$ и $|c\times d|\leqslant|c|\,|d|$, то

$$|\{|x_1|x_1' - |x_1|'x_1\}|\leqslant|x_1\times x_1'|,$$

откуда и вытекает неравенство (26_1).

Учитывая далее тождества

$$x_1\times x_1'' \equiv (x_1\times x_1')', \qquad x_1\times x_1\equiv 0,$$

умножим обе части (25_1) векторно на x_1 и получим, что

$$(x_1\times x_1')' = \sum_{k=2}^{n-1} m_k(\beta_k^3-\alpha_k^3)\,x_k\times x_1,$$

где

$$\alpha_k = |x_k-x_1|^{-1},\quad \beta_k=|x_k|^{-1}.$$

Следовательно, если использовать (24) и тождество

$$\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2),$$

то придем к неравенству

$$|(x_1\times x_1')'|\leqslant \mathrm{const}\sum_{k=2}^{n-1}\big|\,|x_k-x_1|^{-1}-|x_k|^{-1}\big|\,|x_1\times x_k|.$$

Так как

$$|x_1\times x_k|\leqslant|x_1|\,|x_k|,$$

а в силу (24)

$$\big|\,|x_k-x_1|^{-1}-|x_k|^{-1}\big|\leqslant\frac{\big|\,|x_k|-|x_k-x_1|\,\big|}{|x_k-x_1|\,|x_k|}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_1|}{|x_k-x_1|\,|x_k|}<\mathrm{const}\,\frac{|x_1|}{|x_k|},$$

то мы приходим к (26_2).

В дальнейшем нам будут полезны следующие формулы, получающиеся при скалярном умножении (25_1) на $\frac{1}{2}\,x_1'$ и x_1 соответственно:

$$g' = \frac{1}{2}f\cdot x_1', \tag{27_1}$$

$$\left(\frac{1}{2}x_1^2\right)'' - x_1'^2 + \frac{m_n+m_1}{|x_1|} = f\cdot x_1, \tag{27_2}$$

где

$$g \equiv \frac{1}{2}x_1'^2 - \frac{m_n + m_1}{|x_1|},$$

поскольку

$$\left(\frac{1}{2}x_1'^2\right)' = x_1' \cdot x_1'', \quad \left(\frac{1}{2}x_1^2\right)'' = x_1 \cdot x_1'' + x_1'^2.$$

§ 349. Будем говорить, что данное решение задачи n тел соответствует парному столкновению в момент $t = t^0 (\neq \infty)$, если, с одной стороны, взаимное расстояние между двумя телами, например, m_1 и m_n стремится при $t \to t^0$ к нулю, а, с другой стороны, любое из остальных $^1/_2 n(n-1)$ взаимных расстояний превосходит при значениях t, достаточно близких к t^0, некоторый фиксированный положительный предел. Очевидно, влияние тел $m_2, \ldots, m_{n-1}$ на m_1, m_n при таких t играет ничтожную роль по сравнению с взаимным влиянием m_1 и m_n друг на друга. Следовательно, можно ожидать, что вблизи момента столкновения $t = t^0$ поведение вектора $x_1(t) = \xi_1(t) - \xi_n(t)$, определяющего положение m_1 относительно m_n (см. (1) § 340), примерно такое же, как и в случае столкновения в задаче двух тел (см. §§ 268—343). Однако в задаче двух тел столкновение возможно лишь при прямолинейном движении. Кроме того, как следует из интеграла энергии, относительная скорость становится при столкновении в задаче двух тел бесконечной. Наконец, из формул (5), $(10_1)-(10_2)$, примененных к случаю столкновения в задаче двух тел, вытекает соотношение между взаимным расстоянием и его второй производной. Эти факты имеют место и в пределе, когда t стремится к моменту t^0 парного столкновения m_1 и m_n. К такому выводу придем после доказательства того, что при любых $n-2$ массах $m_2, \ldots, m_{n-1}$, не участвующих в столкновении

$$x_1 \times x_1' \to 0, \tag{28_1}$$

$$\left(\frac{1}{2}x_1^2\right)''|x_1| \to m_n + m_1, \tag{28_2}$$

$$\frac{1}{2}x_1'^2|x_1| \to m_n + m_1, \tag{28_3}$$

если $t \to t^0$, $x_1 \equiv \xi_1 - \xi_n \to 0$.

Хотя траектории m_1 и m_n не являются вообще плоскими кривыми, однако (28_1) показывает, что в близкой окрестности t^0 эти траектории практически прямолинейные.

§ 349а. Переходя к доказательству (28_1) — (28_3), заметим прежде всего, что $|f| < \mathrm{const}$ в силу (25_2) и (24). Следовательно, умножая (27_2) на $|x_1|$ и полагая $|x_1| \to 0$, получим, что

$$|x_1| \left(\frac{1}{2} x_1^2 \right)'' - |x_1| x_1^2 + m_n + m_1 \to 0 \quad (t \to t^0),$$

откуда вытекает эквивалентность (28_2) и (28_3). Вместе с тем из (28_3) вытекает (28_1). Действительно, если $|x_1| \to 0$, то из (28_3) видно, что $|x_1'| \to +\infty$ и $|x_1| \cdot |x_1'| \to 0$, так что (28_1) следует из неравенства

$$|x_1 \times x_1'| \leqslant |x_1| \, |x_1'|.$$

Таким образом, достаточно доказать лишь (28_3).

Мы предполагали (см. § 348), что хотя $|\xi_1 - \xi_n| = |x_1| \to 0$, но ни одно из остальных $\frac{1}{2} n(n-1)$ взаимных расстояний $|\xi_j - \xi_k| = \rho_{jk}$ не становится произвольно близким к нулю при $t \to t^0$. Поскольку силовая функция U является линейной комбинацией всех $\frac{1}{2} n(n-1)$ обратных взаимных расстояний, то из интеграла энергии $T - U = h$ вытекает, что в достаточно близкой окрестности момента t^0 кинетическая энергия T меньше, чем $\mathrm{const} / |x_1|$. Однако формулы, приведенные в § 341, показывают, что T — положительно определенная квадратичная форма компонентов скоростей $x_1', \ldots, x'_{n-1}$.

Поэтому очевидно, что $|x_1'|$ мажорируется произведением $\mathrm{const}\, T^{1/2}$. Следовательно,

$$|x_1'| < \frac{\mathrm{const}}{|x_1|^{1/2}}.$$

Вместе с тем, разлагая функцию (25_2) по степеням $|x_1|$ и компонентам 3-вектора x_1, придем на основании (24) и предположения $x_1 \to 0$ к тому, что $|f| < \mathrm{const} \cdot |x_1|$ и $|f| \, |x_1'| < \mathrm{const} \cdot |x_1|^{1/2}$ в достаточно малой окрестности t^0. Так как $|f \cdot x_1'| \leqslant |f| \, |x_1'|$ и $|x_1| \to 0$, то $f \cdot x_1' \to 0$ при $t \to t^0$. Следовательно, (27_1) показывает, что производная функция $g = g(t)$ стремится при $t \to t^0$ к нулю. Это возможно лишь тогда (см. последнее замечание в § 351), когда $g(t)$ стремится при $t \to t^0$ к конечному пределу. Так как $x_1 \equiv x_1(t) \to 0$, то $|x_1| g \to 0$, откуда с учетом определения (27_1) функции $g(t)$ мы и придем к (28_3).

§ 350. Расстояние ρ_{1n} между двумя телами m_1, m_n, участвующими в столкновении при $t = t^0$, равно $|\xi_1 - \xi_n| = |x_n|$ в силу (1). Следовательно, соотношение (28_2), доказанное в § 349а, можно записать в виде

$$\lim \rho_{1n}(\rho_{1n}^2)'' = 2(m_n + m_1).$$

Очевидно, эта формула для парного столкновения переходит в формулу (18_1) § 337 для одновременного столкновения всех тел, если заменить $\rho_{1n}^2(t) = \rho_{1n}^2 \equiv (\xi_1 - \xi_n)^2$ на $J(t) = J = \Sigma m_i \xi_i^2$ и $2(m_1 + m_n)$ на положительную постоянную μ_0. Как было показано, из (18_1) § 337 вытекают асимптотические соотношения (18_2) и (17_1)—(17_2) §§ 336—337. Следовательно, эти соотношения остаются справедливыми, если заменить J на ρ_{1n}^2 и μ_0 на $2(m_1 + m_n)$. Расстояние же $\rho_{1n} = \rho_{1n}(t)$ изменяется в случае парного столкновения при $t = t^0$ так, что

$$\rho_{1n} \sim \left[\frac{9}{2}(m_1 + m_n)\right]^{1/3} (t - t^0)^{2/3} \tag{29}$$

при $t \to t^0$. Кроме того, эта формула остается справедливой после двукратного дифференцирования по t. Так как $\rho_{1n} = |x_1|$, то из (29) и (28_3) видно, что относительная скорость $|x_1'| \equiv |\xi_1' - \xi_n'|$ сталкивающихся тел стремится при $t \to t^0$ к бесконечности, имея порядок $(t - t^0)^{-1/3}$.

§ 351. Соотношение (28_1), где $x_1 = \xi_1 - \xi_n$, свидетельствует лишь о том, что траектории сталкивающихся тел становятся параллельными друг к другу при $t \to t^0$. Однако из (28_1) не вытекает, что эти траектории касаются друг друга при $t = t^0$. Действительно, столкновение m_1 и m_n определяется условием $|\xi_1 - \xi_n| \to 0$. Это условие само по себе может допускать, что m_1 и m_n движутся перед столкновением по спирали, не имеющей асимптоты, и при этом касательные к двум траекториям $\xi = \xi_1(t)$, $\xi = \xi_n(t)$ не стремятся к предельным положениям при $t \to t^0$. Однако эту возможность мы исключим, показав, что парное столкновение m_1 и m_n происходит под определенными углами. Точнее говоря, единичный вектор

$$\frac{x_1}{|x_1|} \equiv \frac{\xi_1 - \xi_n}{|\xi_1 - \xi_n|}$$

стремится к предельному положению и при этом направление этого вектора изменяется при t, достаточно близких к t^0, так медленно, что производная $(x_1 / |x_1|)'$ стремится при $t \to t^0$ к нулю.

Действительно, интегрируя производную вектора $x_1 \times x_1'$ в пределах от t до t^*, фиксируя затем значение t, близкое к t^0, и полагая $t^* \to t^0$, увидим, что согласно (28_1)

$$x_1(t) \times x_1'(t) = \int_{t^0}^{t} (x_1 \times x_1')' d\bar{t}$$

и, следовательно, в силу (26_2)

$$|x_1(t)\times x_1'(t)| < \text{const}\left|\int\limits_{t^0}^{t} x_1^2(\bar t)\,d\bar t\right|.$$

Однако из (28_2) вытекает, что x_1^2 в достаточно близкой окрестности t^0 убывает (рассуждения те же, что и в § 335 для J). Следовательно, последний интеграл мажорируется произведением $x_1^2(t)\,|t-t^0|$, так что значение отношения $|x_1\times x_1'|\,/\,x_1^2$ в момент t меньше, чем $\text{const}\,|t-t^0|$. Полагая $t\to t^0$ и используя (26_1), увидим, что $(x_1/|x_1|)'\to 0$. Наконец, существование предела $\lim\,(x_1/|x_1|)$ при $t\to t^0$ вытекает из следующего замечания, примененного к функции $f=x_1/|x_1|$ (справедливость которого становится очевидной, если проинтегрировать f').

Если производная $f'(t)$ функции $f(t)$ остается при $t\to t^0(\neq\infty)$ ограниченной, то $f(t)$ стремится при $t\to t^0$ к конечному пределу.

§ 352. Та часть определения (см. § 349) парного столкновения, которая относится к сталкивающимся телам m_1, m_2 требует лишь выполнения при $t\to t^0$ условия $|\xi_1-\xi_n|\to 0$. Этим самым требуется лишь то, чтобы положения $\xi=\xi_1(t)$, $\xi=\xi_n(t)$ тел m_1, m_n соответственно в барицентрической инерциальной системе координат ξ стремились друг к другу при $t\to t^0$, но это условие само по себе может допускать, что ни $\xi_1(t)$, ни $\xi_n(t)$ не стремятся при этом к пределу (конечному или бесконечному). Однако оказывается, что условие, налагаемое в § 349 на поведение тел $m_2,\dots$ $\dots, m_{n-1}$ в достаточно малой окрестности момента t^0, гарантирует существование общего конечного предела $\lim\xi_1(t)=\lim\xi_n(t)$ при $t\to t^0$, так что столкновение m_1 и m_n должно происходить в определенной вполне точке барицентрического инерциального декартового пространства.

Действительно, так как $|\xi_1-\xi_n|\to 0$ и так как значения масс — положительные числа, то существование конечного общего предела $\lim\xi_1=\lim\xi_n$ эквивалентно существованию конечного предела функции $m_1\xi_1+m_n\xi_n$. Однако, поскольку инерциальная система координат ξ является барицентрической, функция $m_1\xi_1+m_n\xi_n$ совпадает с суммой $-(m_2\xi_2+\dots+m_{n-1}\xi_{n-1})$. Таким образом, достаточно доказать существование конечных пределов для $(n-2)$ векторов $\xi_2,\dots,\xi_{n-1}$. Применение последнего замечания, приведенного в § 351, к $f=\xi_l$ показывает, что этого достаточно для доказательства существования конечных пределов векторов скорости $\xi_2',\dots,\xi_{n-1}'$. Следовательно, применяя это же замечание к $f=\xi_l'$, делаем вывод, что достаточно доказать ограниченность при $t\to t^0$ векторов ускорения $\xi_2'',\dots,\xi_{n-1}''$. Для этого требуется лишь ограниченность при $t\to t^0$ сил притяжения, действующих на $m_2, \ldots, m_{n-1}$. Однако уравнения движения (1_1)—(1_3) § 322 показывают, что последнее условие удовлетворяется, поскольку, по предположению (§ 349), все взаимные расстояния $|\xi_j - \xi_k|$ между m_j и m_n не оказываются произвольно близкими к нулю при $t \to t^0$.

В соответствии со сказанным координаты ξ_l и скорости ξ_l', $l \neq 1$ и $l \neq n$, стремятся к конечным пределам, например, к $\xi_l{}^0$, $\xi_l'{}^0$. Кроме того, ξ_1 и ξ_n стремятся к общему конечному пределу $\xi_1{}^0 = \xi_n{}^0$, отличному от всех $\xi_2{}^0, \ldots, \xi^0_{n-1}$. Вместе с тем ξ_1', ξ_n' не могут стремиться к конечным пределам, так как $|\xi_1' - \xi_n'| \to +\infty$ в силу (28_3).

В частности, векторы ускорений $\xi_l'', \ldots, \xi''_{n-1}$ не только остаются ограниченными, но и стремятся при $t \to t^0$ к конечным пределам. Это теперь с очевидностью вытекает из (1_1)—(1_3) § 322 и из факта существования всех конечных пределов $\lim \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем или $\lim \xi_j \neq \lim \xi_k$, или $j = 1$, $k = n$.

§ 353. Из приведенных выше результатов вытекает, что если решение задачи трех тел не является плоским (см. определение в § 324) и если при $t = t^0$ имеет место парное столкновение двух из трех тел, то это столкновение происходит в точке, лежащей на инвариантной плоскости. В то же время траектория тела, не участвующего в столкновении, касается при $t = t^0$ инвариантной плоскости.

Действительно, так как решение не является, по предположению, плоским и так как при $n = 3$ любое решение является компланарным, то и из сказанного в § 326 следует, что $C \neq 0$ и что, таким образом, существует инвариантная плоскость $C \cdot \xi = 0$. Наше утверждение заключается в том, что при $t = t^0$ координата $\xi_1{}^0 = \xi_3{}^0$ точки столкновения m_1 и m_3, а также координата ξ_2 тела m_2 и вектор скорости $\xi_2'^0$ принадлежат этой плоскости, причем $\xi_2'^0 \neq 0$. Через $\xi_i{}^0$, $\xi_2'^0$ обозначены конечные пределы, существование которых было доказано в § 352.

Для доказательства покажем, что

$$\xi_2{}^0 \times \xi_2'{}^0 = \nu C, \tag{30}$$

где ν — отличный от нуля скаляр. Из этого равенства следует, очевидно, что $\xi_2'^0 \neq 0$. Умножая его обе части скалярно на $\xi_2{}^0$, $\xi_2'^0$, получим, что $\xi_2'^0$, $\xi_2{}^0$ удовлетворяют уравнению $C \cdot \xi = 0$ инвариантной плоскости. Однако тогда то же самое справедливо и для $\xi_1{}^0 = \xi_3{}^0$, так как система координат ξ барицентрическая,

$m_1\xi_1^0 + m_2\xi_2^0 + m_3\xi_3^0 = 0$ и ξ_1^0 отличается лишь скалярным множителем от ξ_2^0.

Таким образом, достаточно доказать (30). По существу доказательство этого соотношения не связано с предположением, что $C \neq 0$. Поэтому $\xi_2^0 \times \xi'^0_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$.

Из сказанного вытекает, что в рассматриваемой задаче трех тел вектор скорости ξ'^0_2 тела m_2 не расположен или расположен вдоль прямой, соединяющей предельное положение ξ_2^0 тела m_2 с точкой $\xi_1^0 = \xi_3^0$ столкновения тел m_1 и m_3 в зависимости от того, существует или не существует инвариантная плоскость. Заметим, что при $n = 3$ отсутствие инвариантной плоскости (т. е. условие $C = 0$) является достаточным, но не необходимым условием для компланарного решения (см. § 326 и последнее замечание в § 324).

§ 354. Для доказательства соотношения (30) заметим прежде всего, что поскольку система координат ξ барицентрическая, то $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 \equiv 0$ и $m_1\xi_1' + m_2\xi_2' + m_3\xi_3' \equiv 0$.

Вычисляя с помощью этих двух линейных соотношений векторное произведение $m_2\xi_2$ на $m_2\xi_2'$, получим после деления на m_1m_3 формулу

$$\mu_{21}\mu_{23}(\xi_2 \times \xi_2') = \mu_{13}(\xi_1 \times \xi_1') + \mu_{31}(\xi_3 \times \xi_3') + (\xi_1 \times \xi_3') + (\xi_3 \times \xi_1'),$$

где $\mu_{ik} = m_i / m_k$. Кроме того, из (1) § 340 при $n = 3$ следует, что

$$x_1 \times x_1' = (\xi_1 \times \xi_1') + (\xi_3 \times \xi_3') - (\xi_1 \times \xi_3') - (\xi_3 \times \xi_1').$$

Суммируя эти два соотношения, умножая результат на m_1m_3, полагая $t \to t^0$ и используя (28_1), получим

$$m_2^2(\xi_2^0 \times \xi_2'^0) = (m_1 + m_3)\lim_{t \to t^0}\{m_1(\xi_1 \times \xi_1) + m_3(\xi_3 \times \xi_3)\}.$$

Однако предел в правой части этого соотношения равен

$$C - m_2(\xi_2 \times \xi_2 \ ),$$

так как сумма всех трех векторов $m_i\xi_i \times \xi_i'$, $i = 1, 2, 3$, равна постоянному кинетическому моменту C. Отсюда и вытекает справедливость (30), причем постоянная $\nu (>0)$ равна

$$\nu = \frac{m_1 + m_3}{m_2(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

§ 355. Здесь и ниже, до начала § 361, будем считать, что момент t фиксирован, так что рассматриваются лишь барицентрические положения ξ_i, но не скорости или ускорения n тел. Сила, действующая на m_i в данный фиксированный момент времени t, тем не менее определена, так как она есть вектор $U_{\xi_i} = U_{\xi_i}(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n)$, где

$$U = \sum^{*} \frac{m_j m_l}{|\xi_j - \xi_l|}.$$

Аналогичным образом будут определены в этот момент $J = \Sigma m_i \xi_i^2$ и градиенты $J_{\xi_i} = 2m_i\xi_i$.

Будем говорить, что n векторов ξ_i, определяющих положения n тел $m_1, \ldots, m_n$ в барицентрической системе координат, образуют центральную конфигурацию по отношению к n положительным константам $m_1, \ldots, m_n$, если сила притяжения, действующая на тело m_i в рассматриваемый фиксированный момент времени, пропорциональна массе m_i и вектору ξ_i, т. е. если

$$U_{\xi_i} = \sigma m_i \xi_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

причем скаляр σ не зависит от i. Значение σ определяется на основании этих формул единственным образом. Действительно,

$$\sum \xi_i \cdot U_{\xi_i} = \sigma \sum m_i \xi_i^2,$$

а

$$\sum \xi_i \cdot U_{\xi_i} = -U,$$

так как U — однородная функция степени —1, откуда $\sigma = -U/J$. Учитывая также формулу $J_{\xi_i} = 2m_i\xi_i$, получим, что условие (1) может быть записано в виде

$$JU_{\xi_i} = -\frac{1}{2} UJ_{\xi_i}$$

или

$$(JU^2)_{\xi_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1_1}$$

Назовем центральную конфигурацию плоской, если ее n точек ξ_i лежат в одной плоскости, причем не исключается случай коллинеарной центральной конфигурации. Центральные конфигурации, не являющиеся плоскими, могут существовать, таким образом, лишь при $n \geqslant 4$.

Очевидно, что понятие центральной конфигурации не связано с ориентацией барицентрической системы координат ξ. Кроме того, очевидно, что если векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ определяют центральную конфигурацию по отношению к $m_1, \dots, m_n$, то векторы $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$ также определяют центральную конфигурацию каждый раз, когда $\bar{\xi}_i = \beta\xi_i$, $i = 1, \dots, n$, и $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Поэтому будем рассматривать две центральные конфигурации по отношению к одним и тем же константам как одинаковые не только тогда, когда они конгруэнтны с точки зрения евклидовой геометрии, но и в том случае, когда одна переходит в другую после соответствующего изменения единицы длины.

§ 356. Обозначим через $\Gamma = (\gamma_{ik})$ n-матрицу, элементы которой определяются по формулам:

$$\gamma_{ik} = \frac{m_i}{|\xi_i - \xi_k|}, \qquad i \neq k, \tag{2}$$

$$\gamma_{ii} = \frac{U}{J} - \sum_{\substack{j=1\\(j \neq i)}}^{n} \frac{m_j}{|\xi_i - \xi_j|^3}. \tag{2_1}$$

Обозначим через ξ_i^ν, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, компоненты n 3-векторов ξ_i, а через Ξ^ν три n-вектора с компонентами ξ_i^ν. Легко проверить, что векторные условия (1) можно переписать в виде

$$\Gamma\Xi^\nu = 0. \tag{2_2}$$

В частности, условие $\det \Gamma = 0$, т. е. $r \leqslant n - 1$, где r — ранг матрицы Γ, является необходимым для центральной конфигурации. Заметим, что если Γ дано, а ν фиксирована, то условие (2_2) вместе с условием

$$\sum m_i \xi_i^\nu = 0,$$

характеризующим систему координат, определяет взаимные отношения n скаляров ξ_i^ν единственным образом лишь тогда, когда $r = n - 1$.

Необходимое условие $r \leqslant n - 1$ соответствует требованию, что n-матрица Γ имеет нулевое характеристическое число. Фактически r равно кратности нулевого характеристического числа матрицы Γ. Действительно, эта матрица вообще несимметрическая, но она становится симметрической, если умножить ее k-й столбец на m_k. Тем не менее характеризовать центральные конфигурации с помощью элементов γ_{ik} матрицы Γ часто слишком трудно, и мы не будем использовать этот путь в дальнейшем.

§ 357. К более удобным условиям для центральных конфигураций можно прийти после выражения матрицы Г с помощью $^1/_2 n(n-1)$ взаимных расстояний $\rho_{ik} = |\xi_i - \xi_k|$, $1 \leqslant i < k \leqslant n$.

Прежде всего в силу § 322а

$$J = \mu^{-1} \sum\nolimits^{*} m_j m_l \rho_{jl}^2, \qquad U = \sum\nolimits^{*} \frac{m_j m_l}{\rho_{jl}}, \tag{3_1}$$

$$\mu = \sum m_j. \tag{3_2}$$

Однако мы не можем заменить (1) $^1/_2 n(n-1)$ условиями

$$(JU^2)_{\rho_{ik}} = 0,$$

если ρ_{ik} геометрически зависимы, что и имеет вообще место. Например, из аналитической геометрии известно, что шесть положительных чисел $\rho_{ik} = \rho_{ki}$, $1 \leqslant i < k \leqslant 4$, представляют или не представляют взаимные расстояния между четырьмя компланарными, но не коллинеарными точками в зависимости от того, удовлетворяется или не удовлетворяется геометрическое условие

$$R = 0, \tag{4}$$

где

$$R \equiv R(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{34}) = \det \Delta,$$

причем Δ — симметрическая 5-матрица, в которой элемент с номером i в k-м столбце равен при $i \neq k$ квадрату ρ_{ik}, если $i = 1, 2, 3, 4$ и 1, если $i = 5$, а все пять диагональных элементов равны нулю. Мы привели это условие для иллюстрации общего случая, когда рассматриваются $^1/_2 n(n-1)$ положительных чисел. Эти числа представляют взаимные расстояния между n различными точками евклидова пространства тогда и только тогда, когда удовлетворяются $p\,(\geqslant 0)$ независимых условий

$$R_s = 0, \quad s = 1, \ldots, p, \tag{5}$$

где $R_s \equiv R_s(\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,\,n})$ — рациональная функция $^1/_2 n(n-1)$ переменных ρ_{ik}. Число p этих функций равно

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \tag{6_1}$$

$$p = \frac{1}{2}(n-2)(n-3), \tag{6_2}$$

или

$$p = \frac{1}{2}(n-3)(n-4), \tag{6_3}$$

если n точек коллинеарны, компланарны, но неколлинеарны, или же некомпланарны соответственно.

В соответствии со сказанным необходимые и достаточные условия (1) для центральной конфигурации относительно m_i можно выразить с помощью $^1/_2 n(n-1)$ расстояний ρ_{ik}, причем во всех трех случаях $(6_1)-(6_2)$ записываются в виде

$$(JU^2)_{\rho_{ik}}+\sum_{s=1}^{p}\chi_s(R_s)_{\rho_{ik}}=0, \qquad 1\leqslant i<k\leqslant n, \tag{7}$$

где J, U, $R_1, \ldots, R_p$ — функции $(3_1)-(3_2)$, (5) величин ρ_{ik}, а через $\chi_1, \ldots, \chi_p$ обозначены лагранжевы множители.

§ 358. Применяя условия (7), легко определить все коллинеарные центральные конфигурации относительно трех заданных положительных чисел m_i.

В этом случае система геометрических условий (5) сводится к одному уравнению $R=0$, поскольку согласно (6_1) при $n=3$ имеем $p=1$. Если выбрать индексы так, что среди тел m_1, m_2, m_3, лежащих на одной прямой m_1, и m_3 расположены по краям, то $R=\rho_{13}-\rho_{12}-\rho_{23}$ и условие $R=0$ эквивалентно равенству $\rho_{13}=\rho_{12}+\rho_{23}$. Следовательно, если (i, j, k) — какая-либо циклическая перестановка тройки чисел $(1, 2, 3)$, а χ — единственный лагранжев множитель $(\chi_1=\chi_p)$, то необходимые и достаточные условия (7) сводятся к трем уравнениям

$$(JU^2)_{\rho_{ik}}+\chi R_{\rho_{jk}}=0,$$

где $R_{\rho_{ik}}=(-1)^j$, а J, U выражаются согласно $(3_1)-(3_2)$, так что

$$\rho_{ik}U\mu^{-1}-\overset{-2}{\rho}_{ik}J+(-1)^j m_j K=0, \tag{8}$$

где

$$K=\chi:(2m_1m_2m_3U).$$

Следовательно, $\det\,(\rho_{ik}, -\overset{2}{\rho}_{ik}, (-1)^j m_j)=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} \rho_{23} & \overset{-2}{\rho}_{23} & +m_1 \\ \rho_{31} & \overset{-2}{\rho}_{31} & -m_2 \\ \rho_{12} & \overset{-2}{\rho}_{12} & +m_3 \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

где

$$\rho_{13}=\rho_{12}+\rho_{23} \quad (\rho_{ik}=\rho_{ki}).$$

Наоборот, пусть заданы два положительных числа ρ_{12}, ρ_{23} такие, что удовлетворяется условие (9_1). Тогда, как показывает вычисление миноров определителя, в этом условии три линейные однородные уравнения (8) определяют величины $U\mu^{-1}$, $-J$, K с точностью до общего множителя таким образом, что отношение $U\mu^{-1} : J$ равно именно тому значению, которое соответствует формулам $(3_1)-(3_2)$. В силу сказанного необходимые и достаточные условия (7) сводятся к определению всех пар положительных чисел ρ_{12}, ρ_{23}, удовлетворяющих (9). Как следует из последнего замечания в § 355, можно определить при этом лишь отношение этих чисел. Поэтому, если мы положим

$$\frac{\rho_{12}}{\rho_{23}} = \lambda (> 0), \tag{10}$$

то, поскольку $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$, имеем

$$\frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} = 1 + \lambda,$$

и (9) представит собой уравнение относительно одной величины $\lambda = \lambda(m_1, m_2, m_3)$. Действительно, умножая первый и второй столбцы определителя (9) на ρ_{23}^{-1} и ρ_{23}^{-2} соответственно, используя далее (10) и, наконец, раскрывая определитель, перепишем условие (9) в виде

$$(m_2 + m_3)\lambda^5 + (2m_2 + 3m_3)\lambda^4 + (m_2 + 3m_3)\lambda^3 -$$
$$-(3m_1 + m_2)\lambda^2 - (3m_1 + 2m_2)\lambda - (m_1 + m_2) = 0. \tag{11}$$

Следовательно, задача сводится к определению положительных корней (если они имеются) $\lambda = \lambda(m_1, m_2, m_3)$ этого уравнения пятой степени.

Легко заметить, что уравнение (11) имеет при произвольно заданных трех массах m_1, m_2, m_3 один и только один положительный корень λ, причем

$$0 < \lambda(m_1, m_2, m_3) \equiv \lambda \gtreqless 1, \tag{12}$$

если $m_1 \gtreqless m_3$ соответственно.

Действительно, так как $m_2 + m_3 > 0$, то при больших положительных λ полином (11) принимает положительные значения, а при $\lambda = 0$ — отрицательное значение, равное $-(m_1 + m_2)$. Так как при $\lambda = 1$ этот полином равен $7(m_3 - m_1) \gtreqless 0$, то существует по крайней мере один корень λ, удовлетворяющий неравенству (12). Вместе с тем так как коэффициенты полинома (11) имеют лишь одну перемену знаков, то этот полином не может иметь больше одного положительного корня. Заметим, что этот единственный положительный корень является также единственным вещественным корнем. Действительно, уравнение (11) можно переписать в виде

$$\{-3\lambda^2-3\lambda-1\}\,m_1+\{(\lambda^3-1)(\lambda+1)^2\}\,m_2+ \\ +\{\lambda^3(\lambda^2+3\lambda+3)\}\,m_3=0. \quad (11a)$$

Все коэффициенты при m_i отрицательны при любых $\lambda<0$, так что корней $\lambda\leqslant 0$ быть не может.

Дисимметрия трех индексов в (11), (12) обусловлена, конечно, соответствующей дисимметрией в (10). Вместе с тем уравнение (11) остается согласно (10) и (12) без изменений, если заменить λ на $1/\lambda$ и одновременно поменять местами m_1 и m_3. Последнее допустимо, так как мы лишь предполагали, что m_1 и m_3 расположены по краям на одной прямой вместе с m_2. Поскольку любую из трех масс m_i можно поместить между двумя другими и поскольку любое такое расположение приводит, как было показано, к однозначному определению величин $\beta\rho_{12}$, $\beta\rho_{23}$, $\beta\rho_{13}$, в которых $\beta>0$ — произвольный коэффициент пропорциональности (в силу изложенного в конце § 395 его можно опустить), то результат приведенного анализа можно резюмировать следующим образом.

Для трех произвольно заданных различных масс m_i существует три и только три различные коллинеарные центральные конфигурации. Кроме того, лишь две из этих трех центральных конфигураций совпадают друг с другом (в смысле определения в § 355), если две из трех масс равны между собой. Если же все массы равны, то совпадают между собой все три указанные центральные конфигурации.

§ 359. Используя те же условия (7), можем легко показать, что в случае произвольно заданных четырех масс m_i, различных или одинаковых, пространственная центральная конфигурация соответствует правильному и только правильному тетраэдру. Для трех масс m_i неколлинеарная центральная конфигурация соответствует равностороннему и только равностороннему треугольнику. Для двух же масс центральная конфигурация соответствует прямолинейному движению.

Предположения, использованные в этих трех утверждениях, те же самые, а именно те, что неотрицательное целое число (6_{n-1}) обращается в нуль при $n=4, 3, 2$ соответственно. Таким образом, (7) сводится к

$$(JU^2)_{\rho_{ik}}=0$$

или же в силу (3_1)—(3_2) к

$$\rho_{ik}^3=\mu\frac{J}{U}, \qquad (i,k)=(1,2),\ldots,(n-1,n).$$

Однако эти $^1/_2 n(n-1)$ условий при $n=4, 3, 2$ могут быть удовлетворены лишь тогда, когда $^1/_2 n(n-1)$ $(=6, 3, 1)$ расстояний ρ_{ik} равны между собой. Тогда формулы (3_1) показывают, что условие (12) удовлетворяется как при равных, так и различных заданных массах m_i. Этим самым доказательство закончено.

§ 360. По-видимому, эти три случая, которые характеризуются тем, что $p=0$, исчерпывают все центральные конфигурации при произвольных значениях $m_1, \ldots, m_n$ и любом n. Более того, число $q=q(n, m_1, \ldots, m_n)$ всех центральных конфигураций для n заданных масс m_i, по-видимому, меньше предела q_n, не зависящего от m_i, а само q_n остается ограниченным при $n \to \infty$.

Наибольшая доля центральных конфигураций при данных n и $m_1, \ldots, m_n$ падает, по-видимому, на коллинеарные конфигурации. Выделение же всех $q=q(n, m_1, \ldots, m_n)$ центральных конфигураций для произвольных $n, m_1, \ldots, m_n$ представляет собой увлекательную неразрешенную проблему, связанную с полным анализом некоторых вещественных алгебраических уравнений.

(i) Рассмотрим прежде всего задачу о коллинеарных центральных конфигурациях n заданных m_i. Если $n=3$, то такие конфигурации исчерпываются указанными в § 358 и они зависят, таким образом, от заданных масс m_1, m_2, m_3, поскольку от них зависит положительный корень λ уравнений (11). Для того чтобы распространить метод § 358 на любое n, можно обозначить массы так, что масса m_j, $j=2, \ldots, n-1$, расположена на прямой между m_{j-1} и m_{j+1}, и представить любое ρ_{ik}, $1 \leqslant i < k \leqslant n$, как сумму $k-i$ расстояний $\rho_{l, l+1}$, где $l=1, \ldots, n-1$. Таким путем мы придем к p геометрическим условиям вида (5) для ρ_{ik}, представляющим собой в данном случае линейные уравнения. Однако, применяя условия (7), мы придем к системе из $n-2$ нелинейных алгебраических уравнений, сводящейся при $n=3$ к одному уравнению (11). Требуется анализ этой системы с точки зрения ее совместности с заданными значениями $m_i > 0$. Для случая $n=3$ эта проблема совместности сводится к требованию, чтобы искомая величина $\lambda=\rho_{12}:\rho_{23}$ была положительной. Такой анализ представляет собой весьма сложную алгебраическую задачу, причем трудности при получении конкретных результатов быстро возрастают вместе с n. В работах, касающихся этого вопроса, содержится утверждение, что каждой нумерации n заданных масс (которые могут быть и равными и различными) соответствует одна и только одна прямолинейная центральная конфигурация. В частности, число различных таких конфигураций при n произвольно заданных различных массах равно $^1/_2 n!$

(*ii*) Рассмотрим неколлинеарный плоский случай (6_2). Если $n = 3$, то задача полностью разрешима (см. § 359). Если $n > 3$, то система (5) уже будет нелинейной, так как она имеет вид (4) даже в самом простом случае $n = 4$, $p = 1$. В этом случае применение условий (7) показывает, что четыре стороны и две диагонали четырехугольника должны удовлетворять не только геометрическому тождеству (4), но и необходимому условию

$$(\overset{3}{\rho}_{12} - \overset{3}{\rho}_{32})(\overset{3}{\rho}_{13} - \overset{3}{\rho}_{34})(\overset{3}{\rho}_{14} - \overset{3}{\rho}_{24}) = (\overset{3}{\rho}_{12} - \overset{3}{\rho}_{24})(\overset{3}{\rho}_{13} - \overset{3}{\rho}_{32})(\overset{3}{\rho}_{14} - \overset{3}{\rho}_{43}). \tag{13}$$

Однако последнее условие не является при четырех заданных массах m_i достаточным для того, чтобы удовлетворялись шесть условий (7), (4). Вопрос о совместности требует дальнейшего анализа. В частности, легко обнаружить непосредственно с помощью (1), что квадрат представляет собой центральную конфигурацию лишь в случае четырех равных масс. Детальный же анализ показывает, что при четырех заданных массах m_i по крайней мере одна неколлинеарная плоская центральная конфигурация имеется лишь тогда, когда m_i удовлетворяют некоторым неравенствам. Ограничения становятся, конечно, еще более сильными с увеличением n.

(*iii*) Пространственные центральные конфигурации наиболее редки. Прежде всего, по-видимому, во всех случаях, кроме случая $n = 4$, $p = 0$, рассмотренного полностью в § 359, приходится наложить на n заданных масс m_i по крайней мере одно условие $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$. Но, кроме того, по-видимому, существует лишь конечное число значений n, для которых можно подобрать по крайней мере одну совокупность $m_1, \ldots, m_n$, обладающую хотя бы одной пространственной центральной конфигурацией. Такая же догадка не может быть правильной в неколлинеарном плоском случае, так как n равных масс m_i, помещенных в углах правильного n-угольника, образуют, очевидно, центральную конфигурацию при любом n. Можно также поместить $n - 1$ равные массы в углах правильного $(n - 1)$-угольника и еще одну произвольную массу в центре.

Кроме того, можно объединить, налагая очевидные ограничения, любую из указанных плоских моделей с полярной моделью. Очевидно, существуют также соответствующие модели в пространственном случае правильных многогранников, однако тогда такие конфигурации возможны лишь для конечной последовательности отдельных значений n.

§ 361. Мы применим теперь понятие центральной конфигурации к анализу изменения конфигурации, образуемой произвольными телами m_i в заданный момент t, если рассматриваемое движение таково, что при $t \to t^0$ происходит одновременное столкновение всех n тел (см. § 335).

Будет показано, что при значениях t, очень близких к t^0, конфигурация n тел m_i очень близка к центральной, причем при этом рассматриваются лишь относительные величины и относительные положения стремящихся к нулю векторов $\xi_i - \xi_k$ этих тел (см. в конце § 355). Это асимптотическое описание возможного одновременного столкновения является, пожалуй, самым глубоким среди известных результатов в задаче n тел.

При доказательстве потребуется тауберово уточнение (18_1) § 337 формулы (16_2) § 335а, а также более простой тауберов результат. Последний может быть сформулирован следующим образом.

§ 362. Обозначим точками операции дифференцирования по независимой переменной u во всем интервале $0 < u < \infty$, и пусть $g(u)$ — функция, для которой существует непрерывная производная $\dot{g}(u)$ и конечный предел $g(\infty)$. Тогда, хотя $g(u)$ асимптотически близка при $u \to \infty$ к константе $g(\infty)$, очевидные примеры показывают, что дифференцирование такого асимптотического соотношения, вообще, недопустимо, т. е. что $\dot{g}(u)$ не обязательно стремится при $u \to \infty$ к нулю. Однако если существует непрерывная производная $\ddot{g}(u)$, то ограниченность этой производной является тауберовым условием в смысле, указанном в § 336. Другими словами, если $g(u)$ стремится к конечному пределу, а $|\ddot{g}(u)| < \text{const}$ при $u \to \infty$, то $\dot{g}(y) \to 0$ *).

§ 363. Можно предположить без потери общности, что одновременное столкновение всех n тел происходит при $t^0 = 0$, причем t стремится к $t^0 = 0$ убывая. Тогда $t - t^0 > 0$. Легко проверить, что асимптотические соотношения (17_1), (17_2), (18_2) § 336—337

---

*) При доказательстве этой тауберовой леммы можно, очевидно, предполагать, что g — скаляр. Тогда не может существовать пары достаточно малых положительных чисел η, δ таких, что неравенство $|\dot{g}(u)| < \eta$ справедливо в каждой точке бесконечного числа u-интервалов, имеющих общую длину δ и точку сгущения при $u = \infty$. В ином случае функция $g(u)$ изменялась бы в каждом из этих интервалов не меньше, чем на $\eta \cdot \delta$, и, таким образом, не могла бы стремиться к конечному пределу при $u \to \infty$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N_\varepsilon$, что любой u-интервал длины ε в области $N_\varepsilon \leqslant u < \infty$ содержит по крайней мере одну точку, в которой $|\dot{g}(u)| < \varepsilon$. Так как, по предположению, $|\ddot{g}(u)| < \text{const}$, то $\dot{g}(u)$ не может изменяться в интервале длины ε более чем на $\varepsilon \cdot \text{const}$. Следовательно, $|g(u)| < \varepsilon + \varepsilon_0 \, \text{const}$, если только $u > N_\varepsilon$, откуда и вытекает, что $\dot{g}(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

могут быть переписаны в виде

$$t^{-4/3}J \to \mu_0 > 0, \qquad (14_1)$$

$$t(t^{-4/3}J)' \to 0, \qquad (14_2)$$

$$t^2(t^{-4/3}J)'' \to 0, \qquad (14_3)$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \left(\frac{3}{2}\mu_0^{1/2}\right)^{4/3}$$

и $t \to +0$. Так как $J = \Sigma m_i \xi_i{}^2$, то, как следует из (14_1), все n тел сталкиваются при $t \to +0$ в начале барицентрической системы координат ξ, так что линейные размеры конфигурации, образованной n телами при малых t, пропорциональны $t^{2/3}$. Поэтому целесообразно увеличить единицу длины пропорционально $t^{-2/3}$, т. е. рассмотреть вместо ξ_i, $\rho_{ik} = |\xi_i - \xi_k|$

$$J = \sum m_i \xi_i^2, \qquad U = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}$$

величины

$$\boldsymbol{\xi}_i = t^{-2/3}\xi_i,\ \boldsymbol{\rho}_{ik} = t^{-2/3}\rho_{ik}, \qquad (15_1)$$

$$\mathbf{J} = t^{-4/3}J, \qquad \mathbf{U} = t^{2/3}U \qquad (15_2)$$

соответственно. Тогда точный математический смысл утверждения, приведенного в § 361, заключается в том, что хотя (1) не имеет места при фиксированном $t \neq 0$, но

$$(\mathbf{J}\mathbf{U}^2)_{\boldsymbol{\xi}_i} \to 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (16)$$

при $t \to +0$.

Действительно, из последнего замечания в § 355 вытекает, что изменение масштаба времени за счет подстановки (15_1) — (15_2) не играет роли при рассмотрении данной проблемы.

§ **364.** Во-первых, покажем, что при $t \to +0$

$$\frac{2}{9}\mathbf{J} - \mathbf{U} \to 0, \qquad (17_1)$$

$$\boldsymbol{\rho}_{ik} > \mathrm{const} > 0. \qquad (17_2)$$

С этой целью заменим t на $\mathbf{t} = -\lg t$, так что $\mathbf{t} \to +\infty$ при $t \to 0$ и

$$t = \exp(-\mathbf{t}), \qquad (18_1)$$

$$tf' = -\dot{f}, \qquad t^2 f'' = \ddot{f} + \dot{f}, \qquad (18_2)$$

где штрихами и точками обозначены производные по t и $\mathbf{t}$ соответственно. С помощью (18_1)—(18_2) и (15_1) легко установить, что уравнения движения (1_1) § 322 можно переписать в виде

$$m_i\left(\ddot{\boldsymbol{\xi}}_i-\frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i-\frac{2}{9}\boldsymbol{\xi}_i\right)=\mathbf{U}_{\boldsymbol{\xi}_i}, \qquad (19_1)$$

где

$$\mathbf{U}=\sum{}^{*}\frac{m_jm_k}{\rho_{ik}}, \qquad \rho_{jk}=|\boldsymbol{\xi}_j-\boldsymbol{\xi}_k|, \qquad (19_2)$$

причем $\mathbf{U}=t^{2/3}U$, $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\xi}_i}=t^{4/3}U_{\boldsymbol{\xi}_i}$. Из (15_1)—(15_2), (18_1)—(18_2) также видно, что интеграл энергии (2_1) § 322 и эквивалентное ему соотношение (2_4) § 322 могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2}\sum m_i\left(\dot{\boldsymbol{\xi}}_i-\frac{2}{3}\boldsymbol{\xi}_i\right)^2-\mathbf{U}=h\exp\left(-\frac{2}{3}\mathbf{t}\right). \qquad (20_1)$$

$$\ddot{\mathbf{J}}-\frac{5}{3}\dot{\mathbf{J}}+\frac{4}{9}\mathbf{J}=2\mathbf{U}+4h\exp\left(-\frac{2}{3}\mathbf{t}\right). \qquad (20_2)$$

Наконец, применяя (18_2) к функции $f=\mathbf{J}$, получим, что (14_1), (14_2), (14_3) эквивалентны формулам

$$\mathbf{J}\to\mu_0>0, \qquad (21_1)$$

$$\dot{\mathbf{J}}\to 0, \qquad (21_2)$$

$$\ddot{\mathbf{J}}\to 0 \qquad (21_3)$$

при $t\to t^0+0=+0$, т. е. при $\mathbf{t}\to\infty$.

Полагая $\mathbf{t}\to+\infty$ в (20_2), где $h=\mathrm{const}$, увидим, что (17_1) вытекает из (21_1)—(21_3). Вместе с тем согласно (17_1)—(21_1) $\mathbf{U}$ стремится к конечному пределу, так что (17_2) вытекает из (19_2).

Во-вторых, покажем, что при $t\to+0$, т. е. при $\mathbf{t}\to+\infty$,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i\to 0, \qquad (22_1)$$

$$|\dddot{\boldsymbol{\xi}}_i|<\mathrm{const}, \qquad (22_2)$$

$$|\ddot{\boldsymbol{\xi}}_i|<\mathrm{const}. \qquad (22_3)$$

С этой целью заметим прежде всего, что из (15_1)—(15_2) получим

$$\mathbf{J}=\sum m_i\boldsymbol{\xi}_i^2 \qquad (22_4)$$

и, следовательно,

$$\dot{\mathbf{J}}=2\Sigma m_i\boldsymbol{\xi}_i\dot{\boldsymbol{\xi}}_i,$$

Полагая $\mathfrak{t} \to +\infty$ в (20_1) и учитывая (21_2) и (17_1), увидим, что $\Sigma m_i \dot{\mathfrak{x}}^2 \to 0$. Это доказывает (22_1). Кроме того,

$$|\mathfrak{x}_i| < \text{const}, \tag{23_1}$$

$$|\mathrm{U}_{\mathfrak{x}_i}| < \text{const}. \tag{23_2}$$

Действительно, (23_1) вытекает из (21_1) в силу (22_4). В то же время (23_2) вытекает из (19_2) и (17_2), а (22_2) и (22_1) — из (23_1)—(23_2) и (19_1) соответственно. Наконец, дифференцируя (19_1) по $\mathfrak{t}$ и используя затем (22_1)—(22_2), увидим, что для доказательства (22_3) достаточно показать ограниченность частных производных второго порядка функции $\mathrm{U}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ при $\mathfrak{t} \to +\infty$. Однако ограниченность этих производных вытекает с очевидностью из (23_1), (19_2), (17_2).

В соответствии с (22_1) и (22_3) тауберова лемма (см. § 362) применима к функции $g(u) = \dot{\mathfrak{x}}_i$ Следовательно, не только $\dot{\mathfrak{x}}_i \to 0$, но также $\ddot{\mathfrak{x}}_i \to 0$. Поэтому из (19_1) вытекает, что

$$\frac{2}{9} m_i \mathfrak{x}_i + \mathrm{U}_{\mathfrak{x}_i} \to 0$$

или (в силу (22_4))

$$\frac{1}{9} \mathrm{J}_{\mathfrak{x}_i} + \mathrm{U}_{\mathfrak{x}_i} \to 0.$$

Последнее соотношение в комбинации с (21_1) и (17_1) позволяет завершить доказательство (16).

§ 365. Интерпретация (16) в связи с условиями (1) для центральной конфигурации, приведенная в § 361, является весьма нечеткой. Там было сказано лишь то, что в моменты t, очень близкие к моменту t^0 одновременного столкновения, конфигурация тел весьма близка к центральной конфигурации заданных $m_1, \ldots, m_n$. Однако отсюда не следует, что при $t \to t^0$ конфигурация тел должна стремиться к центральной конфигурации заданных $m_1, \ldots, m_n$. Как известно, возможным является и такое положение, когда конфигурация становится при $t \to t^0$ ближе и ближе к более чем одной центральной конфигурации заданных $m_1, \ldots, m_n$, и при этом осциллирует между этими центральными конфигурациями. Конечно, такая возможность не может осуществиться, если только n заданных $m_1, \ldots, m_n$ не определяют бесконечно большое число центральных конфигураций, различных в смысле определения в § 355. В § 360 высказывалась правдоподобная догадка, что этого никогда не может быть, т. е. что целое число $q(n, m_1, \ldots, m_n)$, определенное в § 360, всегда существует, Однако доказательства этого факта нет.

§ 365а. Для тех n и $m_1, \ldots, m_n$, для которых $q(n, m_1, \ldots, m_n) < \infty$, конфигурация должна стремиться при $t \to t^0$ к некоторой определенной центральной конфигурации. Следовательно, если для данных $m_1, \ldots, m_n$ установлено, что $q(n, m_1, \ldots, m_n) < \infty$, то тогда и только тогда из (21_1) вытекает существование ${}^1/{}_2 n(n-1)$ пределов

$$0 < {}^0\rho_{ik} = \lim \boldsymbol{\rho}_{ik} < +\infty, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{\rho}_{ik} = t^{-2/3}\rho_{ik}$, $t \to 0$.

Действительно, величину $\mathbf{J} \equiv t^{-3/4}J$ можно представить согласно формулам § 322а в виде

$$\mathbf{J} = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k \boldsymbol{\rho}_{jk}^2}{\sum m_i},$$

где $\boldsymbol{\rho}_{ik} = |\xi_j - \xi_k|$ остаются ограниченными в силу (23_1). Поэтому $\mathbf{J}$ не может стремиться к нулю. Между прочим,

$$\mu_0 = \frac{\sum{}^{*} m_j m_k {}^0\rho_{jk}^2}{\sum m_i}$$

согласно (21_1) и в то же время

$$\frac{2}{9}\mu_0 = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{{}^0\rho_{jk}}$$

согласно (17_1) и (19_2), так что

$$\frac{4}{27}\mu_0^3 \sum m_i = \sum{}^{*} m_j m_k {}^0\rho_{jk}^2 \left(\frac{\sum{}^{*} m_j m_k}{{}^0\rho_{jk}}\right)^2, \tag{25_1}$$

$$\mu_0 \sum m_i = \sum{}^{*} m_j m_k {}^0\rho_{jk}^2. \tag{25_2}$$

§ 366. Заметим, что выражение (25_1) для μ_0 содержит только $m_1, \ldots, m_n$ и отношения ${}^0\rho_{ik} : {}^0\rho_{23}$ пределов (24). Эти отношения являются алгебраическими функциями $m_1, \ldots, m_n$, так как пределы (24) суть взаимные расстояния для центральной конфигурации $m_1, \ldots, m_n$.

Таким образом, согласно последнему замечанию в § 355 пределы (24) определяются с точностью до общего положительного множителя, но в силу (25_1) и (25_2) этот коэффициент определяется в данном случае единственным образом массами $m_1, \ldots, m_n$, так как согласно (25_1) μ_0 — функция $m_1, \ldots, m_n$.

Поскольку

$$\mu_0 = \left(\frac{3}{2} \mu_0^{1/2} \right)^{4/3},$$

то можно найти также и положительную постоянную μ_0, существование которой было установлено в § 335а.

§ 367. В качестве иллюстрации рассмотрим случай трех произвольных масс m_1, m_2, m_3. В этом случае предположение, высказанное в § 365а, удовлетворяется, так как $q(3, m_1, m_2, m_3) \leqslant 4$ при любых m_1, m_2, m_3. Действительно, согласно изложенному в § 359 существует лишь одна неколлинеарная центральная конфигурация, а именно равносторонний треугольник. В то же время число различных коллинеарных центральных конфигураций равно числу различных масс (см. § 358). Таким образом, если $n = 3$, то затруднения, упомянутые в § 365, не возникают и применимы результаты § 365а.

§ 368. Естественно задать вопрос, при каждом или не каждом одновременном столкновении n тел все барицентрические векторы $\xi_i(t)$ стремятся к общему нулевому пределу в определенном направлении, т. е. так, что все единичные векторы $\xi_i(t) / |\xi_i(t)|$ имеют предел. В § 351 было показано, что в случае парного столкновения ответ на этот вопрос положителен. Однако в случае одновременного столкновения всех $n (> 2)$ тел представляется гораздо более трудным доказать, что эти тела не могут перед столкновением в центре масс двигаться по спиралям, не имеющим асимптот.

§ 368а. Вместе с тем, как легко заметить, если одновременное столкновение таково, что существуют предельные положения касательных к n траекториям $\xi_i = \xi_i(t)$ независимо от того, удовлетворяется или не удовлетворяется условие $q(n, m_1, \ldots, m_n) < \infty$, то конфигурация тел должна стремиться к определенной центральной конфигурации в том смысле, что все $^1/_2 n(n-1)$ пределов (24) существуют. Действительно, в случае определенных предельных направлений легко на основании (15_1), (18_1) — (18_2) и (22_1) вывести, что существуют конечные пределы

$$\lim t^{1/3} \xi_i' = \frac{2}{3} \lim \xi_i,$$

где по крайней мере $n - 1$ из n пределов $\lim \xi_i$ отличны от нуля, так как начало координат совпадает с центром масс. Однако $\rho_{ik} = |\xi_i - \xi_k|$, так что пределы (24) существуют,

ГОМОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

§ 369. Решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи n тел называется гомографическим, если конфигурация, образованная n телами в инерциальной барицентрической системе координат ξ, изменяется так, что она остается при любом t подобной самой себе. Под последним утверждением подразумевается, что существуют скаляр $r = r(t) > 0$, ортогональная 3-матрица $\Omega = \Omega(t)$ и 3-вектор $\tau = \tau(t)$ такие, что при любых

$$\xi_i = r\Omega\xi_i{}^0 + \tau,$$

где ξ_i, r, Ω, τ относятся к произвольному моменту t, а $\xi_i{}^0$ — значения ξ_i в некоторый начальный момент $t = t^0$. Фактически возможны лишь расширение и вращение, определяемые неизвестными $r = r(t)$, $\Omega = \Omega(t)$, поскольку вектор переноса $\tau = \tau(t)$ должен обращаться тождественно в нуль в силу условия $\Sigma m_i\xi_i = 0$.

Конечно, гомографические решения принадлежат к решениям довольно частного вида, так как система порядка $6n$

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}$$

должна быть удовлетворена $1 + 3$ скалярными функциями, соответствующими $r(t)$, $\Omega(t)$ и содержащими $3n$ постоянных интегрирования $\xi_i{}^0$.

§ 370. Прежде всего отметим некоторые тождества. В соответствии с § 369 гомографическое решение $\xi_i(t)$ характеризуется существованием вращения $\Omega(t)$ и расширения $r(t) > 0$ таких, что для любых t и $i = 1, \ldots, n$ координаты

$$\xi_i = r\Omega\overset{0}{\xi_i}, \tag{1}$$

т. е.

$$x_i = r\overset{0}{\xi_i},$$

где $x = \Omega^{-1}\xi$ — барицентрическая, но не обязательно инерциальная координатная система, причем индекс $(^0)$ относится к фиксированному начальному моменту $t = t^0$.

Например, из (1) видно, что

$$r^0 \equiv r(t^0) = 1 \qquad (r = r(t) > 0), \tag{2$_1$}$$

$$\Omega^0 \equiv \Omega(t^0) = \mathrm{E}, \tag{2$_2$}$$

где E — единичная 3-матрица. Из (1) также видно, что

$$J = J^0 r^2, \tag{3_1}$$

$$U = \frac{U^0}{r}, \tag{3_2}$$

$$\Omega^{-1} U_{\xi_i} = \frac{U^0_{\xi_i}}{r^2}, \tag{3_3}$$

так как скаляры

$$J = \sum m_i \xi_i^2, \qquad U = \sum\nolimits^{*} \frac{m_j m_k}{|\xi_j - \xi_k|}$$

инвариантны при любом t, а их градиенты, следовательно, ковариантны по отношению к вращению Ω.

Рассмотрим матрицу $\Sigma(t)$, образованную тремя скалярами $s_\nu = s_\nu(t)$, которые определены с помощью матрицы $\Omega = \Omega(t)$ в соответствии с (5) § 66, так что

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4_1}$$

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} -s_2^2 - s_3^2 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_2 s_1 & -s_3^2 - s_1^2 & s_2 s_3 \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & -s_1^2 - s_2^2 \end{pmatrix} \tag{4_2}$$

(см. (5)—(6) § 66). Так как на основании (1), где $\xi_i^0 = \text{const}$, получим, что

$$x_i = r\xi_i^0, \qquad x_i' = r'\xi_i^0 \equiv r' \mathrm{E} \xi_i^0, \qquad x_i'' = r''\xi_i^0 \equiv r'' \mathrm{E} \xi_i^0,$$

и так как формулу $x = \Omega^{-1}\xi$, определяющую вращающуюся координатную систему x, можно записать в виде (8) § 69, полагая $\Xi = \xi$, $X = x$, то из (10_1)—(10_2) § 69 видно, что

$$\Omega^{-1}\xi_i' = \left(r'\mathrm{E} + r\sum\right)\xi_i^0, \tag{5_1}$$

$$\Omega^{-1}\xi_i'' = \left\{r''\mathrm{E} + 2r'\sum + r\left(\sum{}' + \sum{}^2\right)\right\}\xi_i^0. \tag{5_2}$$

Из (5_2) и (3_3) видно, что если обозначить через $m_i a_i$ постоянный 3-вектор $U^0_{\xi_i}$, то вдоль гомографического решения $\xi_i = \xi_i(t)$

уравнений $m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}$ имеем

$$\mathrm{K}(t)\overset{0}{\xi}_i = a_i, \qquad (6_1)$$

$$r^2\{r''\mathrm{E} + 2r'\Sigma + r(\Sigma' + \Sigma^2)\} \equiv K = (\varkappa_{pq}), \qquad (6_2)$$

причем (6_2) является определением матричной функции $\mathrm{K} = (\varkappa_{pq})$ времени t. Если через $\mathrm{A}^{\backprime}$ обозначается, как и в § 1, транспонированная матрица по отношению к A то, очевидно, что $\mathrm{E} = \mathrm{E}^{\backprime}$, а (4_2), (4_1) показывают, что

$$(\Sigma^2)^{\backprime} = \Sigma^2, \quad \Sigma^{\backprime} = -\Sigma, \quad (\Sigma')^{\backprime} = -\Sigma'.$$

Следовательно, из (6_2) вытекает, что

$$\frac{1}{2}(\mathrm{K} + \mathrm{K}^{\backprime}) = r^2(r''\mathrm{E} + r\Sigma^2), \qquad (7_1)$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{K} + \mathrm{K}^{\backprime}) = r^2(r\Sigma' + 2r'\Sigma^2), \qquad (7_2)$$

Приведенные выше формулы допускают существенное упрощение в специальном случае, в котором частное решение $\xi_i = \xi_i(t)$ является плоским в указанном в § 324 смысле. Тогда можно выбрать барицентрическую инерциальную систему координат так, что третий компонент каждого из трехмерных векторов $\xi_i(t)$ равен тождественно нулю, т. е. что Ω определяется согласно (13_1) § 72, где $\varphi' = \varphi'(t)$ обозначает угловую скорость вращающейся системы координат $x = \Omega^{-1}\xi$. Следовательно, легко на основании (5_1) установить, что $\xi_i'^2 = (r'\overset{0}{\xi}_i)^2 + (r\varphi'\overset{0}{\xi}_i)^2$ и что компоненты 3-вектора $\xi_i \times \xi_i'$ равны в силу (1) 0, 0, $\varphi'(r\xi_i{}^0)$ соответственно. Поэтому в соответствии с (3_1), где $J = \Sigma m_i\xi_i{}^2$, можно записать выражение для кинетической энергии T и интеграл

$$\sum m_i\xi_i \times \xi_i' = C$$

в виде

$$T = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2)J^0, \qquad (8_1)$$

$$\varphi' r^2 J^0 = |C| \qquad (J^0 > 0), \qquad (8_2)$$

если выбрать знак в (6) § 323 так, что $\varphi' \geqslant 0$. Наконец, так как $s_1 \equiv 0$, $s_2 \equiv 0$, $s_3 \equiv \varphi'$ (см. § 72), то, подставляя (4_1)—(4_2) в (6_2), получим

$$\mathrm{K}(t) \equiv \mathrm{K} = \begin{pmatrix} r^2(r'' - r\varphi'^2) & -r^2(r\varphi'' + 2r'\varphi') & 0 \\ r^2(r\varphi'' + 2r'\varphi') & r^2(r'' - r\varphi'^2) & 0 \\ 0 & 0 & r^2r'' \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Ниже мы не будем исключать пространственные гомографические решения, так что применимы лишь формулы (1) — (7_2), но не (8_1) — (9). Но и в этом общем случае соотношение $J'' = 2U + 4h$, эквивалентное интегралу энергии $T - U = h$, может быть записано в силу (3_1) — (3_2) в виде

$$(rr'' + r'^2)J^0 - r^{-1}U^0 = 2h \qquad (J^0 > 0,\ U^0 > 0). \tag{10}$$

§ 370а. Имеется два предельных типа гомографических решений. С одной стороны, возможно, что конфигурация расширяется без вращения, т. е. что $\Omega(t) \equiv \mathrm{E}$. Такие частные гомографические решения характеризуются в силу (1) равенствами

$$\xi_i = r\overset{0}{\xi}_i, \quad \text{т. е.} \quad x_i \equiv \xi_i \qquad (\Omega(t) \equiv \mathrm{E}, \quad r = r(t) > 0) \tag{11}$$

и называются гомотетическими.

С другой стороны, возможно, что конфигурация вращается без растяжения, т. е. что $r(t) \equiv 1$. Эти частные решения характеризуются в силу (1) равенствами

$$\xi_i = \Omega\overset{0}{\xi}_i, \quad \text{т. е.} \quad x_i \equiv \overset{0}{\xi}_i \qquad (r(t) \equiv 1, \quad \Omega = \Omega(t)) \tag{12}$$

и их мы назовем решениями относительного равновесия. Такое название оправдывается тем, что в случае равенств (12) и только в этом случае каждое из n тел находится в покое во вращающейся барицентрической системе координат x (т. е. $x_i(t) = \mathrm{const}$). Это возможно только тогда, когда силы притяжения, действующие между телами, в любой момент t находятся в полном равновесии с силами (фиктивными) (см. § 318а), наличие которых вызывается вращением системы координат x.

Очевидно, что решение относительного равновесия не может быть гомотетическим. Гомографическое же решение общего вида не удовлетворяет ни (11), ни (12). Для указанных двух типов решений имеют место следующие факты (которые будут доказаны в § 377).

I. Гомографическое решение является гомотетическим тогда и только тогда, когда оно обладает инвариантной плоскостью (т. е. тогда и только тогда, когда $C = 0$).

II. Гомографическое решение является решением относительного равновесия тогда и только тогда, когда оно плоское и вращается с постоянной угловой скоростью ($\neq 0$).

В соответствии с I и §§ 329—331 каждое коллинеарное, но не прямолинейное решение является гомографическим, но не гомотетическим. В то же время гомотетические коллинеарные решения совпадают с теми прямолинейными решениями, которые являются гомографическими. Очевидно, что коллинеарное решение может быть решением относительного равновесия только тогда, когда оно не прямолинейное (это условие необходимое, но в силу II не достаточное).

§ 371. Мы докажем в §§ 373—374 следующие факты, более глубокие, чем I—II § 370а

(*i*) если гомографическое решение не компланарное (см. определение в § 325), то оно является гомотетическим;

(*ii*) если гомографическое решение является компланарным, то оно плоское (см. определение в § 324).

Утверждение (*i*) не допускает обращения, так как существуют плоские (и даже прямолинейные) гомотетические решения. Если учесть (*ii*), то можно сказать, что каждое гомографическое решение является либо плоским, либо гомотетическим, но не может быть одновременно плоским и гомотетическим.

Если гомографическое решение не плоское, то условия (*i*) — (*ii*) гарантируют справедливость (11). Выражение для кинетической энергии $T = {}^1/_2\Sigma m_i\xi_i'^2$ сводится тогда к следующему:

$$\frac{1}{2}\sum m_i(r'\xi_i^0)^2 \equiv \frac{1}{2}r'^2J^0.$$

Так как (8_1) имеет место в плоском случае, а (3_2) в любом случае, то интеграл энергии $T - U = h$ для любого гомографического решения можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2)J^0 - r^{-1}U^0 = h, \tag{13}$$

если производная $\varphi' = \varphi'(t)$, определенная как угловая скорость вращающейся системы координат $x = \Omega^{-1}\xi$ в плоском случае, считается равной $\varphi'(t) \equiv 0$ в неплоском случае. В этом смысле (8_2) остается верным также и в неплоском случае, так как в силу I и (*i*) — (*ii*) имеем $C = 0$. Наконец, из (6_2) видно, что формула (9) справедлива при $\varphi' = 0$, если $\Sigma = 0$ при любом t, т. е. если (см. § 69) $\Omega(t) = \text{const}$. Так как в неплоском случае условие $\Omega(t) = \text{const}$ согласно (*i*) — (*ii*) удовлетворяется, то (9) имеет место в этом случае опять при $\varphi' \equiv 0$.

§ 372. Цель этого параграфа — показать, что I—II вытекают из условий (*i*) — (*ii*), которые будут доказаны в двух последующих параграфах.

Если гомотетическое решение является плоским, то применима формула (8_2), и она показывает, что $C = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi'(t) \equiv 0$, а $r(t) = \text{const}(>0)$ тогда и только тогда, когда $\varphi'(t) \equiv \text{const} \neq 0 \neq |C|$. Этим самым доказывается I—II для плоского случая. Если гомографическое решение неплоское, то оно согласно (i) — (ii) является гомотетическим и не может быть, конечно (см. § 370а), решением относительного равновесия. Этим самым доказывается II. Вместе с тем для завершения доказательства I достаточно теперь доказать, что для любого неплоского гомографического решения $C = 0$. Однако и для плоского и для неплоского гомографического решения $\xi_i = \xi_i(t)$ каждый член суммы

$$C = \sum m_i \xi_i \times \xi_i'$$

обращается в нуль при любом t, так как $\zeta \times \zeta = 0$, а $\xi_i = r\xi_i^0$, $\xi_i' = r'\xi_i^0$ в силу (11).

§ 373. Цель этого параграфа — доказать (i) § 371. Пусть $\xi_i = \xi_i(t)$ — заданное некомпланарное гомографическое решение. Тогда не все n начальных позиционных векторов ξ_i^0 компланарны, и можно выбрать три значения индекса i, например $i = \alpha$, β, γ, такие, что $\det (\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0, \xi_\gamma^0) \neq 0$.

Следовательно, 3-матрица $(\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0, \xi_\gamma^0)$, не зависящая от t, имеет обратную матрицу. Применение же (6_1) при $i = \alpha, \beta, \gamma$ показывает, что матрица $\mathrm{K}(t)$ равна произведению этой обратной матрицы и матрицы $(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$, которая в силу определения a_i (см. § 370а) также не зависит от t. Поэтому на основании (7_1) — (7_2) получим

$$r^2 r'' \mathrm{E} + r^3 \Sigma^2 = \mathrm{const}, \qquad (14_1)$$

$$r^3 \Sigma' + 2r^2 r' \Sigma = \mathrm{const}. \qquad (14_2)$$

Так как E — единичная матрица, то $r^2 r'' \mathrm{E}$ — диагональная матрица, причем все ее элементы равны между собой. Следовательно, из (14_1) вытекает, что, во-первых, недиагональные элементы матрицы $r^3 \Sigma^2$, а во-вторых, и разности между любыми ортогональными элементами этой матрицы не зависят от t. Если сопоставить этот результат с (4_2), то он показывает, что величины $r^3 s_\mu s_\nu$ и $r^3 (s_\mu^2 - s_\nu^2)$, где $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$, не зависят от t. Следовательно, $r^3 s_\lambda^2$, $\lambda = 1, 2, 3$, не зависят от t. Но из (14_1) вытекает тогда, что зависимость Σ и r от времени t такова, что $\Sigma = r^{-3/2} \Sigma_0$, где Σ_0 — постоянная кососимметрическая матрица. Таким образом, существует такая постоянная ортогональная матрица P_0, что произведение $\mathrm{P}_0 \Sigma_0 \mathrm{P}_0^{-1}$ представляет собой кососимметрическую 3-матрицу, в которой все элементы третьей строки равны нулю (см. начало § 76). Так как $\Sigma = r^{-3/2} \Sigma_0$, где $r = r(t)$ — скаляр, и $\Sigma = \Sigma(t)$, то все элементы третьей строки кососимметрической матрицы $\mathrm{P}_0 \Sigma(t) \mathrm{P}_0^{-1}$ равны нулю при любом t. Поэтому из сказанного в § 74 следует, что матрица $\Omega = \Omega(t)$

осуществляет вращение вокруг оси, сохраняющей постоянное направление по отношению к барицентрической инерциальной системе координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$. Следовательно, из § 318 видно, что эта ось может быть выбрана в качестве координатной оси ξ^{III}. Тогда матрица $\Omega = \Omega(t)$ запишется в виде (13_1) § 72, и согласно (13_3) § 72 имеем $s_1 \equiv 0$, $s_2 \equiv 0$, $s_3 = \varphi'$, где $\varphi' = \varphi'(t)$ — скорость вращения. Следовательно, доказательство утверждения (i) § 371 будет закончено, если покажем, что $\varphi'(t) \equiv 0$. Действительно, тогда вращения нет, и это означает согласно определению в § 270а, что решение является гомотетическим.

Для доказательства того, что $\varphi'(t) \equiv 0$, мы используем соотношение $r^3\varphi'^2 = \mathrm{const}$, которое в силу (13_2) § 72 эквивалентно упомянутому выше результату о независимости величин $r^3 s_\lambda{}^2$, $\lambda = 1, 2, 3$ от t.

Так как $\Omega = \Omega(t)$ определяется согласно (13_1) § 72, то можно переписать (1) § 370 в виде

$$\xi_i^{\mathrm{I}} = r(\xi_i^{0\mathrm{I}} \cos\varphi - \xi^{0\mathrm{II}} \sin\varphi),$$

$$\xi_i^{\mathrm{II}} = r(\xi_i^{0\mathrm{I}} \sin\varphi + \xi_i^{0\mathrm{II}} \cos\varphi),$$

$$\xi_i^{\mathrm{III}} = r\xi_i^{0\mathrm{III}},$$

где

$$(\xi_i^{\mathrm{I}}, \xi_i^{\mathrm{II}}, \xi_i^{\mathrm{III}}) \equiv \xi_i(t), \quad \xi_i^{0\nu} = \xi_i^{\nu}(t^0) = \mathrm{const}.$$

Следовательно, третье из соотношений (5) § 322 сводится сразу к следующему:

$$C^{\mathrm{III}} = r^2\varphi' c, \tag{14_3}$$

где через c обозначена постоянная

$$\Sigma m_i \{(\xi_i^{0\mathrm{I}})^2 + (\xi_i^{0\mathrm{II}})^2\}.$$

Таким образом, если $c = 0$, то все $\xi_i^{0\mathrm{I}} = 0$ и все $\xi_i^{0\mathrm{II}} = 0$ и, таким образом, все n тел m_i находятся при любом t на оси ξ^{III}. Так как это противоречит предположению о том, что данное решение $\xi_i = \xi_i(t)$ не является компланарным, то $c \neq 0$.

Следовательно, соотношение (14_3) можно разделить на c и из него вытекает, что $r^2\varphi' = \mathrm{const}$. Сравнивая это равенство с равенством $r^3\varphi'^2 = \mathrm{const}$, найденным выше, видим, что или $\varphi' \equiv 0$, или же положительная функция $r = r(t)$ не зависит от t.

Таким образом, доказательство условия $\varphi'(t) \equiv 0$ будет закончено, если мы покажем, что предположение $r = \mathrm{const}$ ведет к противоречию.

Если $r = \text{const}$, то формула (6_2) сводится к следующей:

$$K = r^3(\Sigma' + \Sigma^2),$$

причем

$$\det(\Sigma' + \Sigma^2) \equiv 0,$$

так как $s_1 \equiv 0$, $s_2 \equiv 0$ и все элементы третьего столбца одной из матриц (4_1)—(4_3) равны тождественно нулю. Тогда $\det K \equiv 0$. Вместе с тем раньше было показано (см. (14_1)—(14_2)), что K равно произведению двух постоянных матриц с отличными от нуля определителями, откуда $\det K \neq 0$. Мы приходим к противоречию, что и требовалось показать.

§ 373а. У читателя может сложиться впечатление, что такое сложное доказательство утверждения (*i*) § 371 не является необходимым и что утверждение, как чувствуется интуитивно, вытекает непосредственно уже из факта постоянства кинетического момента.

Однако это не так. Действительно, в таком случае утверждение (*i*) § 371 было бы справедливым также и в случае притяжения, обратно пропорционального не второй, а третьей степени расстояния. Но тогда выражение $r^2\{\ \}$ в (6_2) надо было бы заменить на $r^3\{\ \}$, а соотношение $r^3\varphi'^2 = \text{const}$, найденное в § 373, на соотношение $r^4\varphi'^2 = \text{const}$. Последнее же эквивалентно условию $r^2\varphi' = \text{const}$, полученному в § 373 в качестве следствия постоянства кинетического момента. Таким образом, мы получим лишь одно соотношение между r и φ', и доказательство рушится. Кроме того, само утверждение (*i*) в этом случае неверно. Другими словами, задача $n \geqslant 4$ тел, притягивающих с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния, обладает некомпланарными решениями, являющимися гомотетическими, но не гомографическими. Например, к такому решению мы сразу придем, используя в случае двух конгруэнтных пар, выбранных среди четырех масс, начальные положения и начальные скорости, вычисленные (эти вычисления приведены в § 374а) для треугольных решений задачи трех тел.

§ 374. Цель этого параграфа — доказать утверждение (*ii*) § 371. Для коллинеарного случая это утверждение было уже доказано в § 329. Пусть теперь $\xi_i = \xi_i(t)$ — заданное гомографическое компланарное, но не коллинеарное решение. Тогда среди начальных векторов ξ_i^0 существуют по крайней мере два вектора, например ξ_α^0 и ξ_β^0, такие, что $\xi_\alpha^0 \times \xi_\beta^0 \neq 0$. Так как решение компланарное, то все n начальных векторов ξ_i^0 лежат в одной и той же плоскости, проходящей через начало инерциальной барицентри-

Непосредственная подстановка показывает, что (17_2) сводится в силу (18) к соотношениям

$$s_3 r c_1 - \frac{1}{2} r' c_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} r' c_1 + s_3 r c_2 = 0.$$

Эти соотношения представляют собой однородные линейные уравнения, которым удовлетворяют c_1, c_2. Определитель этих уравнений равен

$$s_3^2 r^2 + \frac{1}{4} r'^2,$$

причем $r > 0$. Так как эта сумма может обратиться в нуль лишь в случае $s_3 = 0$, $r' = 0$, то при условии, что хотя бы одна из постоянных c_1, c_2 отлична от нуля, обе функции s_3 и r' должны обращаться тождественно в нуль при всех t. Другими словами, должна удовлетворяться по крайней мере одна из двух пар условий

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0, \tag{19_1}$$

$$s_3(t) \equiv 0, \qquad r(t) = \text{const}. \tag{19_2}$$

В случае (19_1) обе функции s_1, s_2 равны в силу (18) нулю при любом t. Это означает (см. § 72), что вращение $\Omega(t)$ происходит при любом t вокруг оси ξ^{III} инерциальной системы координат. Следовательно, из (1) видно, что все $\xi_i^{\text{III}}(t) = 0$ при любом t. Другими словами, все тела m_i движутся в плоскости $(\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}})$ инерциальной системы координат. Это доказывает утверждение (*ii*) § 371 для первого из двух возможных случаев (19_1) — (19_2).

В случае (19_2) из (18) видно, что все три функции s_1, s_2, s_3 не зависят от t, причем $s_3 = 0$. Но тогда § 75 показывает, что вращение $\Omega = \Omega(t)$ происходит вокруг оси, сохраняющей постоянное направление по отношению к инерциальной системе координат $\xi = (\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}}, \xi^{\text{III}})$. Кроме того, так как $s_3 = 0$, то эта фиксированная ось вращения должна лежать в плоскости $(\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}})$ (см. доказательства в §§ 71—75). Однако ось ξ^{III} была выбрана так, что все $\overset{0}{\xi}{}_i^{\text{III}} = \xi_i^{\text{III}}(t^0)$ равны нулю. Следовательно, из (1) видно, что вращающаяся система координат $x = \Omega^{-1}\xi$, где $\Omega = \Omega(t)$ фактически не может вращаться вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости $(\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}})$. Таким образом, никакого вращения нет, т. е. $\Omega(t) = \text{const}$. Это означает, что рассматриваемое гомографическое решение является гомотетическим. Так как очевидно, что компланарное гомотетическое решение является плоским, то отсюда следует справедливость (*ii*) § 371 во втором из возможных случаев (19_1) — (19_2).

Все утверждения, приведенные в §§ 370а — 371, доказаны.

§ 374а. Читатель может подумать, что приведенное выше доказательство излишне сложное. Действительно, представляется на первый взгляд довольно очевидным, что утверждение (*ii*) § 371 есть непосредственное следствие однородности силовой функции U в комбинации с фактом постоянства кинетического момента центра масс (см. §§ 316—317).

Однако фактически это не так. Действительно, мы покажем, что если сила притяжения пропорциональна не второй, а третьей степени расстояния, то утверждение (*ii*) § 371 оказывается неверным даже в случае трех тел, хотя десять интегралов имеются также и в этом случае. Не удивительно, что Лагранж считал основным достижением теории гомографических решений задачи трех тел доказательство того факта, что каждое гомографическое решение является плоским (конечно, в этом случае каждое решение является компланарным).

Предполагая, что сила притяжения между тремя телами пропорциональна третьей степени расстояния, имеем, что

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}, \quad m_i\eta_i'' = U_{\eta_i}, \quad m_i\zeta_i'' = U_{\zeta_i}, \tag{I}$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$U = \frac{1}{2}\Sigma^* m_j m_k \{(\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2\}^{-1}, \tag{II}$$

где скаляры ξ_i, η_i, ζ_i — «инерциальные» барицентрические прямоугольные координаты тел m_i. Суммирование в (II) распространяется на три циклические перестановки индексов $(j, k) = (1, 2)$, а выбор единиц благодаря множителю $^1/_2$ таков, что сила притяжения между двумя телами с массами, равными 1, и на расстоянии, равном 1, сама равна 1. Пусть массы тел и начальные их положения таковы, что

$$m_1 = m_2, \tag{III}$$

$$\overset{0}{\xi}_1 = -\overset{0}{\xi}_2 < 0 = \overset{0}{\xi}_3, \quad \overset{0}{\eta}_1 = \overset{0}{\eta}_2 < 0 < \overset{0}{\eta}_3, \quad \overset{0}{\zeta}_1 = \overset{0}{\zeta}_2 = \overset{0}{\zeta}_3 = 0, \tag{IV}$$

где индекс «0» относится к моменту $t = 0$. Так как система координат (ξ, η, ζ) барицентрическая, то

$$\sum_{i=1}^{3} m_i\xi_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} m_i\overset{0}{\eta}_i = 0 \tag{V}$$

и

$$\sum_{i=1}^{3} U^{0}_{\xi_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} U^{0}_{\eta_i} = 0$$

в силу (I). Условия (III) — (IV) совместимы с (V).

Содержание условий (III) — (IV) заключается в том, что треугольник, образованный тремя телами в момент $t = 0$, является равнобедренным, лежит в плоскости (ξ, η), а две равные массы m_1, m_2 находятся в вершинах его основания. Кроме того, основание этого треугольника расположено при $t = 0$ симметрично относительно оси η, а массы m_i расположены так, что возрастание индекса i определяет положительное направление движения на плоскости (ξ, η). В силу симметрии компоненты $U^{0}_{\xi_i}$, $U^{0}_{\eta_i}$, $U^{0}_{\zeta_i}$ силы притяжения, действующие на m_i при $t = 0$, таковы, что

$$\left.\begin{aligned} U^{0}_{\xi_1} = -U^{0}_{\xi_2} > 0 = U^{0}_{\xi_3}, \quad U^{0}_{\eta_1} = U^{0}_{\eta_2} > 0 > U^{0}_{\eta_3}, \\ U^{0}_{\zeta_1} = U^{0}_{\zeta_2} = U^{0}_{\zeta_3} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

см. (II), (III), (IV).

Положим

$$a = -U^{0}_{\xi_1} : m_1 \overset{0}{\xi}_1, \qquad b = -U^{0}_{\eta_1} : m_1 \overset{0}{\eta}_1.$$

Тогда $a > 0$, $b > 0$ в силу (IV), (VI). Кроме того, формулы (III), (IV), (VI) показывают, что соотношения

$$U^{0}_{\xi_i} = -a m_i \overset{0}{\xi}_i, \qquad \text{(VII}_1\text{)}$$

$$U^{0}_{\eta_i} = -b m_i \overset{0}{\eta}_i, \qquad \text{(VII}_2\text{)}$$

справедливы не только при $i = 1$, но и при $i = 2$. Следовательно, из (V) видно, что (VII₁) — (VII₂) справедливы и при $i = 3$. Наконец, на основании (II), (III), (IV) легко заключить после непосредственных вычислений или путем элементарных векторных соображений, что относительная величина двух положительных чисел a, b в (VII₁) — (VII₂) зависит от того, являются ли при $t = 0$ стороны $m_1m_3 = m_2m_3$ равнобедренного треугольника $m_1m_2m_3$ короче, длиннее, чем основание m_1, m_2, или же равными основанию. Для равностороннего треугольника $a = b$. Выберем начальное положение так, что

$$b > a \qquad (a > 0,\ b > 0). \qquad \text{(VIII)}$$

Как будет показано, 9 начальных скоростей $\xi'^0_1, \ldots, \zeta'^0_3$ могут быть выбраны так, что решение уравнений [1], соответствующее 18 начальным условиям $\xi_1{}^0, \ldots, \zeta'^0_3$, имеет вид

$$\xi_i = \overset{0}{\xi}_i r, \quad \eta_i = \overset{0}{\eta}_i r \cos \omega, \quad \zeta_i = \overset{0}{\zeta}_i r \sin \omega, \quad i = 1, 2, 3, \qquad \text{(IX)}$$

где $r = r(t)$, $\omega = \omega(t)$ — пара соответствующих функций, зависящих от t и удовлетворяющих начальным условиям

$$r^0 = 1, \qquad \omega^0 = 0 \qquad \text{(X)}$$

(см. (IV), где $\zeta_i{}^0 = 0$).

Прежде всего, непосредственная подстановка (IX), (II) в (I) показывает, что 9 условий (I) для двух неизвестных $r(t)$, $\omega(t)$ состоят, с одной стороны, из трех уравнений

$$m_i \overset{0}{\xi}_i r'' = r^{-3} \overset{0}{U}_{\xi_i},$$

сводящихся в силу (VII$_1$) к одному уравнению

$$r'' = -ar^{-3}.$$

С другой же стороны, мы имеем 6 уравнений, которые сводятся после умножения их на $\cos \omega$, $\sin \omega$, $-\sin \omega$, $\cos \omega$ и соответствующего сложения с учетом (VII$_2$) и условия $U^{0_0}_{\zeta_i} = 0$ к двум уравнениям

$$r'' - r\omega'^2 = -br^{-3},$$

$$r\omega'' + 2r'\omega' = 0.$$

Однако полученные три условия для двух функций $r(t)$, $\omega(t)$ не независимы. Действительно, уравнение $r'' - r\omega'^2 = br^{-3}$ эквивалентно в силу уравнения $r'' = -ar^{-3}$ следующему:

$$\omega' = (b - a)^{1/2} r^{-2},$$

в силу которого соотношение $r\omega'' + 2r'\omega' = 0$ удовлетворяется тождественно по t, поскольку a и b постоянны. Поэтому решение уравнений (I) представляется в виде (IX) тогда и только тогда, когда функции $r(t)$ и $\omega(t)$ удовлетворяют двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned} r' &= -ar^{-3}, \\ \omega' &= (b - a)^{1/3} r^{-2}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI)}$$

Легко обнаружить, что последние уравнения имеют решение

$$\left.\begin{aligned} r \equiv r(t) &= (1 + 2a^{1/2} t)^{1/2}, \\ \omega \equiv \omega(t) &= \frac{1}{2} a^{-1/2} (b - a)^{1/2} \lg (1 + 2a^{1/2} t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII)}$$

и что это решение удовлетворяет также условиям (X). Условие же (VIII) показывает, что постоянные $a^{-1/2}$, $(b-a)^{1/2}$ в решении (XII) вещественны и такие, что $\omega(t) \neq \text{const}$.

Частное решение уравнений (I), определяемое формулами (IX) и (XII), обладает желаемыми свойствами. Действительно, из (IX) видно, что это решение гомографическое, но не плоское, поскольку $\omega(t) \neq \text{const}$. Правда, это решение компланарное, так как $n=3$.

Можно сделать также вывод, что результаты, изложенные в § 346, не имеют места для силовой функции (II). Действительно, из (IV) видно, что неплоское решение (IX) таково, что треугольник, образованный тремя телами, является при любом t равнобедренным, в основании которого находятся равные массы (III). Вместе с тем угол $\omega(t)$, определяемый согласно (XII), не сохраняется постоянным, так что фиксированная ось или плоскость симметрии, существующие в случае ньютонианского притяжения (см. § 346), в данном случае не существуют.

В соответствии с (XII) функции $r(t)$, $\omega(t)$ в интервале $-{}^1/_2a^{-1/2} < t < \infty$ вещественные и стремятся при $t \to -{}^1/_2a^{-1/2}+0$ к $\lim r = 0$ и $\lim \omega = -\infty$. Следовательно, из (IX) видно, что при $t \to -{}^1/_2a^{-1/2}+0$ все три тела участвуют в одновременном столкновении, причем перед столкновением в центре масс все тела движутся вдоль пространственных спиралей. В соответствии же с изложенным в §§ 335 и 326 одновременное столкновение в ньютонианской задаче трех тел для неплоского решения оказывается невозможным.

ГОМОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

§ 375. Результаты, собранные в §§ 370а—371 и доказанные в §§ 372—374, содержат в себе классификацию всех возможных гомографических решений, но оставляют открытым вопрос о существовании таких решений. В соответствии с изложенным в § 369 любое такое решение, если оно существует, определяется, с одной стороны, парой функций $r(t)$, $\Omega(t)$ и, с другой стороны, n начальными позиционными векторами ξ_i^0.

С целью подготовки к анализу вопроса о существовании покажем, что векторы ξ_i^0 должны соответствовать центральной конфигурации заданных масс m_i. Этот результат, учитывая § 355 и (1) § 370, можно сформулировать и так, что если решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи n тел m_i является гомографическим, то m_i должны образовывать при любом t центральную конфигурацию.

Если решение плоское, то будем выбирать инерциальную систему координат ξ всегда так, что траектории лежат в плоскости

$\xi^{\text{III}} = 0$. Через $\varphi' = \varphi'(t) \geqslant 0$ будем обозначать угловую скорость вращающейся плоскости $(x^{\text{I}}, x^{\text{II}})$, причем $x = \Omega^{-1}\xi$. Если решение неплоское, то пусть $\varphi'(t) \equiv 0$. Тогда, как было показано в конце § 371, все формулы, приведенные в §§ 370—371, справедливы в обоих случаях. Таким образом, если постоянные m^0, h^0, C^0 определяются по формулам

$$m^0 = \frac{U^0}{J^0}, \tag{20$_1$}$$

$$h^0 = \frac{h}{J^0}, \tag{20$_2$}$$

$$C^0 = \frac{C}{J^0} \ (U^0 > 0, J^0 > 0), \tag{20$_3$}$$

то согласно (13) и (8$_2$)

$$\frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) - \frac{m^0}{r} = h^0, \tag{21$_1$}$$

$$r^2\varphi' = |C^0|. \tag{21$_2$}$$

Так как из (20$_1$) — (20$_2$) видно, что (10) можно записать в виде

$$r'^2 = -rr'' + \frac{m^0}{r} + 2h^0,$$

то в соответствии с (21$_1$)

$$r'' - r\varphi'^2 = -\frac{m^0}{r^2}, \quad r\varphi'' + 2r'\varphi' = 0, \tag{22}$$

поскольку

$$r\varphi'' + 2r'\varphi' \equiv \frac{(r^2\varphi')'}{r}$$

и

$$r^2\varphi' = \text{const} \text{ в силу } (21_2).$$

Так как a_i в (6$_1$) были определены соотношениями

$$m_i a_i = U^0_{\xi_i},$$

то

$$K\xi_i^0 = m_i^{-1} U^0_{\xi_i}$$

а третьи компоненты 3-векторов ξ_i^0, $U^0_{\xi_i}$ обращаются в плоском случае в нуль. Вместе с тем в соответствии с (9) и (22) 3-матрица K будет диагональной, образованной элементами $-m^0$, $-m^0$,

$-m^0 + r^3\varphi'^2$, а $\varphi' = 0$ в неплоском случае. Следовательно,

$$-m^0\xi_i^0 = m_i^{-1} U_{\xi_i}^0$$

как в плоском, так и в неплоском случае. Таким образом, условие

$$U_{\xi_i} = \sigma m_i \xi_i$$

для центральной конфигурации (§ 355) удовлетворяется при $\sigma = -m^0$, если $t = t^0$. Так как начальный момент t^0 может быть выбран произвольно, то доказательство закончено.

§ 376. Так как в неплоском случае $\varphi' \equiv 0$, то условия (1) § 370, характеризующие гомографическое решение $\xi_i = \xi_i(t)$, можно записать не только в плоском, но и в пространственном случае в виде

$$\xi_i = r\Omega\xi_i^0, \tag{23}$$

где

$$r = r(t),\quad \Omega = \Omega(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждое гомографическое решение определяется начальными положениями ξ_i^0 и парой функций $r(t)$, $\varphi(t)$, которые можно подвергнуть в силу $(2_1)-(2_2)$ и (21_2) тривиальной нормализации

$$r^0 = 1 \qquad (r = r(t) > 0), \tag{24_1}$$

$$\varphi^0 = 0, \tag{24_2}$$

$$\varphi'^0 \geqslant 0. \tag{24_3}$$

Свойства этой пары функции можно описать непосредственно следующим образом.

Будем рассматривать r, φ как полярные координаты на декартовой плоскости (x, y). Фиксируем далее произвольно положительное число m^0 и рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы с лагранжевой функцией

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{m^0}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \tag{25}$$

или

$$L = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2) + \frac{m^0}{r}. \tag{25_1}$$

Лагранжевы уравнения $[L]_x = 0$, $[L]_y = 0$ запишутся в виде

$$x'' = -m^0 \frac{x}{r^3},$$

$$y'' = -m^0 \frac{y}{r^3},$$

и они допускают вместе с интегралом энергии

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{m^0}{r} = \text{const}$$

также интеграл

$$xy' - yx' = \text{const}.$$

Однако, поскольку $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, эти интегралы совпадают с (21_1)—(21_2), где $h^0 = \text{const}$, $|C^0| = \text{const}$. Вместе с тем из (25_1) видно, что лагранжевы уравнения в полярных координатах $[L]_r = 0$, $[L]_\varphi = 0$ (см. § 95) совпадают именно с уравнениями (22).

Наконец, сравнивая (25) с формулами в § 241, видим, что уравнения (25) описывают движение материальной точки единичной массы на плоскости (x, y) в статическом силовом поле, причем последнее можно рассматривать как поле, создаваемое материальной точкой с массой m^0, покоящейся в начале координат $(x, y) = (0, 0)$, притягивающей движущуюся точку по закону Ньютона, но само непритягиваемое ею. Другими словами, проблема определения пары функций $r(t)$, $\varphi(t)$ совпадает с проблемой интегрирования лагранжевых уравнений (22) или уравнений $[L]_x = 0$, $[L]_y = 0$, т. е. совпадает, если положить $m^0 = 1$, с проблемой, рассмотренной в §§ 241—273.

§ 377. Теперь нетрудно приступить к построению гомографических решений. Действительно, мы покажем, что решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи n тел с заданными массами m_i является гомографическим тогда и только тогда, когда существуют две функции $r(t)$, $\varphi(t)$ и n начальных позиционных векторов ξ_i^0, с помощью которых функции $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ представимы в виде (23), (24_1)—(24_2). При этом можно выбрать в качестве $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ любое решение лагранжевых уравнений (22), удовлетворяющее условиям (24_1)—(24_2), а векторы $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ — соответствующими какой-либо центральной конфигурации масс $m_1, \ldots, m_n$. Разумеется, постоянная m^0 в (22) должна быть выражена через m_i и ξ_i^0 в соответствии с (20_1)—(20_2) по формулам

$$m^0 = \frac{J^0}{U^0}, \tag{26_1}$$

$$J^0 = \sum m_i |\xi_i^0|^2, \tag{26_2}$$

$$U^0 = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{|\xi_j^0 - \xi_k^0|}. \tag{26_3}$$

В § 376 было уже доказано, что если решение $\xi_i = \xi_i(t)$ является гомографическим, то функции $r(t)$, $\varphi(t)$ должны удовлетворять уравнениям (22), а в § 375 было доказано, что тогда векторы $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ определяют центральную конфигурацию масс $m_1, \ldots, m_n$.

Для доказательства того, что эти необходимые условия являются также и достаточными, требуется лишь показать, что если эти условия удовлетворяются, то функции $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, определяемые согласно (23), являются решениями задачи n тел. Действительно, очевидно, что если функции $\xi_i(t)$ имеют вид (23), то эти функции или представляют некоторое гомографическое решение, или же вовсе не являются решением задачи n тел. Однако условия, налагаемые на ξ_i^0, таковы, что существует скаляр σ, для которого

$$U_{\xi_i}^0 = \sigma m_i \xi_i^0,$$

т. е. что σ обязательно равно (см. § 355)

$$\sigma = -\frac{U^0}{J^0}.$$

Таким образом, в силу (26_1)

$$U_{\xi_i}^0 = -m^0 m_i \xi_i^0.$$

Так как (3_3) вытекает из (23), то уравнения движения

$$m_i \xi_i'' = U_{\xi_i}$$

сводятся к следующим:

$$r^2 \Omega^{-1} \xi_i'' = -m^0 \xi_i^0.$$

Следовательно, остается лишь показать, что последние уравнения обращаются в тождество по t в силу (23) и (22).

С этой целью предположим, что $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — некоторая заданная пара функций, имеющих непрерывные вторые производные.

Пусть $\Omega = \Omega(t)$ определяется с помощью $\varphi = \varphi(t)$ как 3-матрица, выражаемая согласно (23_1). Наконец, пусть 3-матрица $\mathrm{K} = \mathrm{K}(t)$ определяется с помощью $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ по формуле (9). Тогда путем непосредственного дифференцирования и умножения матриц легко показать, что произведение $r^2\Omega^{-1}$ на $(r\Omega)''$ совпадает с K. Так как из (23) вытекает, что

$$\xi_i'' = (r\Omega)''\xi_i^0,$$

то соотношение

$$r^2\Omega^{-1}\xi_i'' = \mathrm{K}\xi_i^0$$

представляет собой тождество (по t). Следовательно, остается лишь показать, что соотношение

$$\mathrm{K}\xi_i^0 = -m^0\xi_i^0$$

представляет собой тождество по t в силу (22). Однако в справедливости этого факта мы убедились еще в конце § 375, так как рассмотренный там постоянный вектор $m_i^{-1} U_{\xi_i}^0$ совпадает, как было показано, с постоянным вектором $-m^0\xi_i^0$. Этим самым завершается доказательство утверждения, сформулированного в начале этого параграфа.

§ 377а. Таким образом, для того чтобы решение задачи n тел было гомографическим, не только необходимо (см. § 375), но, как видно из доказательства, приведенного в § 377, также и достаточно, чтобы тела m_i образовывали при любых t одну и ту же центральную конфигурацию.

§ 378. Все гомографические решения при заданных массах m_i можно теперь построить следующим образом.

Выберем произвольную центральную конфигурацию $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ масс $m_1, \ldots, m_n$ и определим три положительных числа по формулам (26_1)—(26_3). Так как векторы $\beta\xi_1^0, \ldots, \beta\xi_n^0$ определяют при любом $\beta > 0$ ту же самую центральную конфигурацию, что и $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ *), и соответствуют согласно (26_2)—(26_3) числам

---

*) В указанном в конце § 355 смысле. Заметим, что если существует континуум различных центральных конфигураций для заданных масс (см. § 365), то могло бы случиться, что расположение масс в некотором решении отвечает при любом t центральной конфигурации, но такое решение не является гомографическим, так как эта конфигурация изменяется вместе с t.

$\beta^2 J^0$ и $\beta^{-1}U^0$, то, учитывая (26_1), можно предположить, что данная центральная конфигурация именно такая, которая удовлетворяет условию $m^0 = 1$, указанному в конце § 376. Тогда решения

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}(t), \quad \mathrm{y} = \mathrm{y}(t) \tag{27}$$

или

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

лагранжевых уравнений (22), соответствующих функции Лагранжа (25), совпадают с теми, которые рассматривались в § 241.

Выберем для решения этих уравнений четыре начальные значения r^0, φ^0, r'^0, φ'^0, задаваемые при $t = t^0$ таким образом, что r^0, φ^0 и знак φ'^0 определяются согласно $(24_1)-(24_3)$. Тогда, полагая $t = t^0$ и используя интегралы $(21_1)-(21_2)$ уравнений (22) при $m^0 = 1$, получим, что r'^0 и φ'^0 определяются из формул

$$\frac{1}{2}(r'^0)^2 + \frac{1}{2}(\varphi'^0)^2 - 1 = h^0, \tag{28_1}$$

$$\varphi'^0 = |C^0|, \tag{28_2}$$

где h^0 и $|C^0|$ равны (в указанном в § 241 смысле) энергии и кинетическому моменту для траектории (27) на плоскости (x, y). Таким образом, постоянные h^0, $|C^0|$, определяемые согласно $(28_1)-(28_2)$, совпадают с постоянными, обозначавшимися в § 241 через h, c, причем c можно выбирать без потери общности так (см. § 242), что $c = |c| \geqslant 0$. Поскольку начальные значения r'^0, $\varphi'^0 \geqslant 0$ можно выбирать произвольно, то из $(28_1)-(28_2)$ видно, что при $|C^0| \geqslant 0$ возможны все три случая: $h^0 > 0$, $h^0 < 0$ или $h^0 = 0$.

Из изложенного в § 242 видно, что если постоянная (28_2) выбрана равной нулю, то тогда (и только тогда) траектория (27) на плоскости (x, y) есть прямая (соответствующая вырожденному гиперболическому, параболическому или эллиптическому движению в зависимости от того, имеем мы $h^0 > 0$, $h^0 = 0$ или $h^0 < 0$). Если же постоянная (28_2) отлична от нуля, то траектория (27) представляет собой ветвь гиперболы, параболы или эллипс в зависимости от выбора $h^0 \gtreqqless 0$. Наконец, результаты, изложенные в § 377, гарантируют, что во всех шести случаях $|C^0| \geqslant 0$, $h^0 \gtreqqless 0$ подстановка (27) в (23) дает нам гомографическое решение $\xi_i = \xi_i(t)$ уравнений

$$m_i \xi_i'' = U_{\xi_i}$$

задачи n тел $m_1, \ldots, m_n$. В соответствии с (20_2) постоянная энергия h для этого решения имеет тот же знак, что и постоянная энергии (28_1). Сравнение же (20_3) с (i) § 370а показывает, что решение будет гомотетическим тогда и только тогда, когда постоянная (28_2) равна нулю.

Отсюда вытекает, в частности, что для каждой центральной конфигурации масс $m_1, \ldots, m_n$ существуют гомотетические решения с всевозможными значениями $h \gtreqless 0$. Заметим, что для существования при любых $m_1, \ldots, m_n$ прямой l_i, сохраняющей неизменное положение по отношению к инерциальной системе координат ξ, и на которой находятся при любом t все массы m_i, т. е. для гомотетичности гомографического решения (23), необходимо и достаточно в силу (21_2) и (i) § 370а, чтобы траектория (27) на плоскости (x, y) была прямолинейной. Вместе с тем заметим, что для прямолинейности последней траектории не необходимо (хотя, конечно, достаточно), чтобы траектория каждого тела m_i в отдельности была прямолинейной. Действительно, можно выбрать постоянную (28_2) отличной от нуля и тогда, когда данная центральная конфигурация $\xi_1{}^0, \ldots, \xi_n{}^0$ коллинеарна в указанном в § 355 смысле. Возможность построения простейшего такого примера вытекает из излагаемого ниже в § 378а.

С другой стороны, траектория (27) достигнет на плоскости (x, y) начала координат $r = 0$ при некотором t тогда и только тогда, когда постоянная (28_2) равна нулю. Поэтому из (23) вытекает для гомографического решения отсутствие инвариантной плоскости, т. е. условие $C = 0$ является не только необходимым (см. § 335), но достаточным условием для одновременного столкновения всех n тел. Конечно, интересный результат, изложенный в §§ 363—364, является в этом частном случае одновременного столкновения тривиальным. В этом случае не возникает также проблема, упоминавшаяся в § 368.

Наконец, пусть постоянная (28_2) выбрана отличной от нуля. Тогда $\varphi' \not\equiv 0$ в силу (21_2), так что гомографическое решение (23) является в силу изложенного в § 371 обязательно плоским. В частности, тогда центральная конфигурация $\xi_1{}^0, \ldots, \xi_n{}^0$ является компланарной в указанном в § 355 смысле, причем не исключены коллинеарные конфигурации. Так как $|C^0| \neq 0$, то из (4) § 241 вытекает, что траектория (27) на плоскости (x, y) является эллипсом или гиперболой с большой осью

$$2a = -\frac{1}{h^0} \gtrless 0$$

и эксцентриситетом

$$e = (1 + 2h^0|C^0|^2) \lesseqgtr 1,$$

если $h^0 \lesseqgtr 0$. Если же $h^0 = 0$, то эта траектория представляет собой параболу с параметром $p = |C^0|^2 \neq 0$. Во всех трех случаях фокус находится в начале координат (x, y) = (0, 0). Так как r'^0, φ'^0 (>0) могут быть выбраны в (28_1)—(28_2) произвольно, то и h^0, $|C^0|$ (>0), а вместе с тем и $2a(\neq 0)$, $e(\neq 1)$ или $p(\neq 0)$ могут быть также произвольными. Подстановка же (27) в (23) показывает, что во всех трех случаях $h^0 > 0, h^0 = 0, h^0 < 0$ все n тел движутся по компланарным и подобным коническим сечениям, расположенным в плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ барицентрической инерциальной системы координат и имеющим общий фокус в начале координат. Рис. 13 иллюстрирует этот результат для случая треугольной центральной конфигурации в задаче трех тел m_1, m_2, m_3 при $h^0 < 0$ (см. § 367).

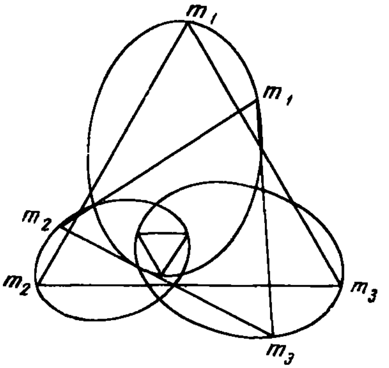

Рис. 13.

Все n конических сечений будут окружностями тогда и только тогда, когда $e = 0$, т. е. когда $1 + h^0|C^0|^2 = 0$. Это условие эквивалентно в силу (28_1)—(28_2) условию $r'^0 = 0$ или же (покскольку t^0 можно выбрать произвольно) $r'(t) \equiv 0$. Другими словами, плоское гомографическое решение (23) удовлетворяет условию $r(t) = \mathrm{const}$, характеризующему решение относительного равновесия, тогда и только тогда, когда все n траекторий в инерциальной плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ суть концентрические окружности вокруг центра масс $\xi = 0$. Однако, как мы видели выше, постоянные h^0 и $|C^0|$ могут быть выбраны произвольно для любого гомографического, но не гомотетического решения, так что условие $1 + h^0|C^0|^2 = 0$ может быть удовлетворено в случае любой компланарной центральной конфигурации. Кроме того, все решения относительного равновесия являются в силу (II) § 370а плоскими. Следовательно, любой компланарной и некомпланарной конфигурации соответствует некоторое решение относительного равновесия.

§ **378а.** Изложенные выше результаты применимы, в частности, к любому решению задачи двух тел. Действительно, конфигурация, образованная двумя произвольными массами, всегда представляет собой согласно изложенному в § 359 центральную конфигурацию. Поэтому в соответствии с § 377а любое решение $\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$ задачи двух тел является гомотетическим. По существу этот результат вытекает также из барицентрического условия $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0$. Тот факт, что любое решение задачи двух тел является плоским, вытекает не только из § 257 и (13) § 343, но также из § 329 (и, наконец, из (*ii*) § 371).

§ 379. Рассмотрим плоскую задачу n тел безотносительно к каким-либо гомотетическим решениям. Лагранжева функция $L = T + U$ в этой задаче имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\sum m_i(\xi_i'^2 + \eta_i'^2) + \sum{}^* \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}, \tag{29$_1$}$$

где

$$\rho_{jk} = (\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 \tag{29$_2$}$$

и через ξ, η обозначены для простоты компоненты ξ^{I}, ξ^{II} 3-вектора $\{\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}}\} \equiv (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, 0)$ в барицентрической системе координат. Наряду с барицентрической инерциальной координатной плоскостью (ξ, η) рассмотрим барицентрическую неинерциальную плоскость (x, y), вращающуюся вокруг общего начала с некоторой постоянной угловой скоростью ω, так что

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= x_i \cos\omega t - y_i \sin\omega t, \\ \eta_i &= x_i \sin\omega t + y_i \cos\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

если начало отсчета времени t выбрано так, что $(x, y) = (\xi, \eta)$ при $t = 0$. На основании (30) легко установить, что

$$\xi_i'^2 + \eta_i'^2 = (x_i' - \omega y_i)^2 + (y_i' + \omega x_i)^2, \tag{31$_1$}$$

$$\rho_{jk} = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2. \tag{31$_2$}$$

Подставляя (31$_1$) — (31$_2$) в (29$_1$) и составляя лагранжевые производные, сразу найдем, что уравнения движения $[\mathrm{L}]_x = 0$, $[\mathrm{L}]_{y_i} = 0$ во вращающейся системе координат (x, y) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_i(x_i'' - 2\omega y_i' - \omega^2 x_i) &= U_{x_i}, \\ m_i(y_i'' + 2\omega x_i' - \omega^2 y_i) &= U_{y_i}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где

$$U = \sum{}^* \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}$$

выражается согласно (31$_2$).

Так как все выписанные формулы справедливы при любом $\omega = \mathrm{const}$, то из (II) § 370а вытекает, что решение $\xi_i = \xi_i(t)$, $\eta_i = \eta_i(t)$ относительного равновесия характеризуется существованием соответствующего значения $\omega = \mathrm{const}$ такого, при котором уравнения (32) имеют решение вида

$$x_i(t) \equiv \overset{0}{x}_i, \qquad y_i(t) \equiv \overset{0}{y}_i, \tag{33$_1$}$$

$$\sum m_i \overset{0}{x}_i = 0, \qquad \sum m_i \overset{0}{y}_i = 0, \tag{33$_2$}$$

где x_i^0, y_i^0 — соответствующие скалярные постоянные, удовлетворяющие барицентрическим условиям (33_2).

Подстановка (33_1) в (32) приводит к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\omega^2 \overset{0}{x}_i = \sum_{k=1}^{n}{}' \, m_k \frac{\overset{0}{x}_i - \overset{0}{x}_k}{{}^0\rho^3_{ik}}, \quad \omega^2 \overset{0}{y}_i = \sum_{k=1}^{n}{}' \, m_k \frac{\overset{0}{y}_i - \overset{0}{y}_k}{{}^0\rho^3_{ik}}, \\ &{}^0\rho_{ik} = \{(\overset{0}{x}_i - \overset{0}{x}_k)^2 + (\overset{0}{y}_i - \overset{0}{y}_k)^2\}^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где штрих означает, что $k \neq i$. Поэтому из последнего замечания § 378 вытекает, что задача об определении всех совокупностей $2n+1$ констант x_i^0, y_i^0, ω, удовлетворяющих $2n+2$ условиям (34), (33_2), эквивалентна задаче о выделении всех компланарных центральных конфигураций заданных масс m_i (см. § 360).

Из (34), (33_2) видно, что если (33_1) есть решение относительного равновесия для заданных масс m_i, соответствующее скорости ω, то

$$x_i = \rho \overset{0}{x}_i, \qquad y_i = \rho \overset{0}{y}_i$$

есть также решение для тех же масс m_i и угловой скорости ω при любом положительном числе ρ (это согласуется с замечанием, сделанным в конце § 315). Оказывается, что это произвольное изменение линейных размеров вместе с возможным переходом от t к $\pm t + \mathrm{const}$ исчерпывает все решения относительного равновесия, соответствующие одной и той же центральной конфигурации масс m_i (см. в конце § 355). Действительно, согласно изложенному в конце § 378 необходимо удовлетворить условию $1 + 2h^0 |C^0|^2 = 0$, так что отношение $h^0 : |C^0|^{-2}$ определяется однозначно. Знак ω может быть выбран, конечно, произвольно, так как замена ω на $-\omega$ эквивалентна в силу (30) переходу от t к $-t$.

§ 380. Вычислим для иллюстрации угловую скорость решений относительного равновесия в задаче трех тел.

В коллинеарном случае задачи n тел можно выбрать ось x вращающейся системы координат (x, y) так, что все $y_i^0 = 0$. Предположим дополнительно, что $x_i{}^0 < x^0_{i+1}$. Тогда формулы (34) сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 x_i^0 &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{(x_i^0 - x_k^0)^2} - \sum_{k=i+1}^{n} \frac{m_k}{(x_i^0 - x_k^0)^2}, \\ 0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

так как

$$x_i^0 - x_k^0 = \pm \left| x_i^0 - x_k^0 \right| \equiv \pm {}^0\rho_{ik}$$

при $i \gtrless k$. Разумеется, первая сумма в правой части (35) равна нулю при $i = 0$, а вторая сумма при $i = n$. Таким образом, при $n = 3$ получим из (35), что $\omega^2 x_1{}^0$, $\omega^2 x_2{}^0$, $\omega^2 x_3{}^0$ равны

$$-\frac{m_2}{{}^0\rho^2_{12}} - \frac{m_3}{{}^0\rho^2_{13}}, \quad -\frac{m_3}{{}^0\rho^2_{23}} + \frac{m_1}{{}^0\rho^2_{12}}, \quad +\frac{m_1}{{}^0\rho^2_{13}} + \frac{m_2}{{}^0\rho^2_{23}}$$

соответственно. Если составить две линейные комбинации

$$\omega^2 (x_2^0 - x_1^0) = \ldots, \qquad \omega^2 (x_3^0 - x_2^0) = \ldots$$

этих трех условий и учесть равенства

$$x_2^0 - x_1^0 = {}^0\rho_{21}, \quad x_3^0 - x_2^0 = {}^0\rho_{23}, \quad {}^0\rho_{13} = {}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23},$$

то придем к выводу, что достаточно определить три положительных числа ${}^0\rho_{12}$, ${}^0\rho_{23}$, ω^2, удовлетворяющих двум условиям

$$\left.\begin{aligned} {}^0\rho_{12}\omega^2 &= \frac{m_1 + m_2}{{}^0\rho^2_{12}} + \frac{m_3}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})^2} - \frac{m_3}{{}^0\rho^2_{23}}, \\ {}^0\rho_{23}\omega^2 &= \frac{m_3 + m_2}{{}^0\rho^2_{23}} + \frac{m_1}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})^2} - \frac{m_1}{{}^0\rho^2_{12}}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Действительно, если ${}^0\rho_{21}$ и ${}^0\rho_{23}$ известны, то $x_1{}^0$, $x_2{}^0$, $x_3{}^0$ найдутся единственным образом из барицентрического условия $\Sigma m_i x_i{}^0 = 0$.

Определив матрицу (σ_{pq}) второго порядка по формуле

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \, \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \, \sigma_{22} \end{pmatrix} = \qquad (37)$$

$$= \begin{pmatrix} \omega^2 - \dfrac{m_1 + m_2}{{}^0\rho^3{}_{12}} - \dfrac{m_3}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})^3} & \dfrac{m_3}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})} - \dfrac{m_3}{{}^0\rho^3{}_{23}} \\ \dfrac{m_1}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})^3} - \dfrac{m_1}{{}^0\rho^3{}_{12}} & \omega^2 - \dfrac{m_3 + m_2}{{}^0\rho^3{}_{23}} - \dfrac{m_1}{({}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23})^3} \end{pmatrix}$$

можно переписать (36) в виде

$$ {}^0\rho_{12}\sigma_{11} = {}^0\rho_{23}\sigma_{12}, \qquad {}^0\rho_{12}\sigma_{21} = {}^0\rho_{23}\sigma_{22}. $$

Так как ${}^0\rho_{12}$, ${}^0\rho_{23}$ положительны, то определитель (37) равен нулю и, кроме того, σ_{11}, σ_{22} имеют тот же знак, что и σ_{12}, σ_{21} соответственно. Однако σ_{12}, σ_{21} отрицательны, поскольку множители при m_3, m_1 в (37) положительны. Следовательно,

$$ \sigma_{pq} < 0 \quad (p = 1, 2;\ q = 1, 2), \tag{38$_1$} $$

$$ \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = 0. \tag{38$_2$} $$

Наконец, полагая

$$ \rho = {}^0\rho_{12} + {}^0\rho_{23}, \qquad \lambda = {}^0\rho_{12} : {}^0\rho_{23} $$

и выражая затем определитель (37) с помощью ρ и λ, сразу увидим, что (38$_2$) можно записать в виде

$$ \omega^2\rho^3 = m_1 + m_3 + m_2(1 + \lambda)^2(1 + \lambda^{-2}), \tag{39} $$

причем $\lambda = \lambda(m_1, m_2, m_3)$ — единственный положительный корень уравнения (11) § 358. Фактически можно прийти к (39) и независимо от (11) § 358, если сложить два соотношения (36) и учесть, что

$$ {}^0\rho_{12}\omega^2 + {}^0\rho_{23}\omega^2 = \rho\omega^2 $$

и

$$ {}^0\rho_{12} = \frac{\rho}{1 + \lambda}, \qquad {}^0\rho_{23} = \frac{\rho\lambda}{1 + \lambda}. $$

В оставшемся решении относительного равновесия в задаче трех тел конфигурация представляет собой равносторонний треугольник (см. § 359). Следовательно, из (33$_2$) и (34) легко установить (полагая $n = 3$), что

$$ \omega^2\rho^3 = m_1 + m_2 + m_3, \tag{40} $$

где

$$ \rho = {}^0\rho_{12} = {}^0\rho_{23} = {}^0\rho_{13}. $$

В обоих случаях (39), (40) угловая скорость $\pm\omega$ обратно пропорциональна степени $-{}^3/_2$ линейных размеров.

§ 381. Очевидно, что решение (30) относительного равновесия характеризуется тем фактом, что (33$_1$) является для уравнений (32) точкой равновесия в указанном в § 83 смысле. Поэтому из изложенного в § 89 следует, что если через u_i, v_i, u_i', v_i' обозначаются смещения (см. § 86) для решения (33$_1$) системы (32), то соответствующие уравнения Якоби (см. § 86) обладают постоянными коэффициентами, т. е. имеют вид

$$z_j' = \sum_{l=1}^{4n} a_{jl} z_l, \qquad j = 1, \ldots, 4n, \tag{41}$$

где $A = (a_{jl})$ — постоянная $4n$-матрица, а через $z_1, \ldots, z_{4n}$ обозначены $4n$ смещений u_i, v_i, u_i', v_i' $(i = 1, \ldots, n)$.

Значения постоянных коэффициентов a_{jl} могут быть найдены на основании того факта, что уравнения (41) представляют собой не что иное, как линейную лагранжеву систему

$$[\mathrm{L}]_{u_i} = 0, \quad [\mathrm{L}]_{v_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{42}$$

в которой функция Лагранжа есть квадратичная форма с постоянными коэффициентами. Действительно, применяя к (29_1) — (33_1) правило, изложенное в § 101, получим

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} \sum m_i \{(u_i' - \omega v_i)^2 + (v_i' + \omega u_i)^2\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \sum \{\alpha_{ik} u_i u_k + 2\beta_{ik} u_i v_k + \gamma_{ik} v_i v_k\}, \tag{43}$$

где

$$\alpha_{ik} = U^0_{x_i x_k}, \quad \beta_{ik} = U^0_{x_i y_k}, \quad \gamma_{ik} = U^0_{y_i y_k}$$

— постоянные, полученные при подстановке постоянных (33_1) во вторые частные производные функции

$$U = U(x_1, \ldots, y_n) \equiv {}^{\mathfrak{s}}\sum{}^{*} \frac{m_i m_k}{\rho_{ik}}.$$

Конечно, непосредственные операции дифференцирования и подстановки, необходимые для нахождения элементов матрицы $A = (a_{jl})$, достаточно утомительны.

Если матрица A составлена, то уравнение

$$\det(sE - A) = 0$$

(см. § 89), имеющее здесь степень $4n$, определяет характеристические показатели s. Анализ вопроса о том, все или не все из $4n$ характеристических показателей s принадлежат согласно определению в § 89 к устойчивому типу, еще более утомителен, чем вычисление матрицы A, так как для этого надо установить, будут или не будут все корни уравнения $\det(sE - A) = 0$ чисто мнимыми (включая 0).

§ 382. Пусть, в частности, $n = 3$, так что имеют место два случая, рассмотренные в § 380. Выберем единицу длины так, что $\rho = 1$ в обоих случаях (39), (40), и положим для сокращения

$$\nu^2 = -\sigma_{12} - \sigma_{21}, \tag{44_1}$$

$$\nu^2 = \frac{27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)}{4(m_1 + m_2 + m_3)^2} \tag{44_2}$$

в случае коллинеарной и треугольной конфигурации соответственно, причем σ_{pq} определяются в соответствии с (37). Из (38_1) и (44_1) — (44_2) видно, что $\nu^2 > 0$ в обоих случаях.

Выполняя элементарные вычисления, указанные в § 381, найдем, что уравнение

$$\det(sE - A) = 0$$

степени $4n = 12$ имеет в обоих случаях восемь тривиальных корней устойчивого типа $s = \pm\tau\sqrt{-1}$, причем τ принимает только два значения: $\tau = \omega$ или $\tau = 0$, а остающиеся четыре характеристических показателя s являются корнями уравнения

$$s^4 + (\omega^2 - \nu^2)s^2 - (2\nu^4 + 3\nu^2\omega^2) = 0 \tag{45_1}$$

или

$$s^4 + \omega^2s^2 + \nu^2\omega^4 = 0 \tag{45_2}$$

в коллинеарном и треугольном случаях соответственно.

Таким образом, ответ на вопрос, все или не все характеристические показатели принадлежат к устойчивому типу (в указанном в § 89 смысле), в этих двух случаях различен, поскольку:

I) в коллинеарном случае нельзя выбрать значения всех трех масс так, что все характеристические показатели будут устойчивого типа,

II) в треугольном случае все характеристические показатели будут устойчивого типа тогда и только тогда, когда одно из трех тел имеет массу, составляющую по крайней мере $100\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\sqrt{2}\right)$ процентов общей массы $m_1 + m_2 + m_3$ (этот предельный процент весьма велик и несколько превышает 96%).

Действительно, уравнение (45_1) является квадратным относительно s^2 и имеет отрицательный свободный член, так что один из его двух корней (для s^2) отрицательный, а другой положительный. Следовательно, два из четырех корней s уравнения (45_1) чисто мнимые, а два — вещественные, из которых один положительный, а другой отрицательный. Таким образом, два характеристических показателя s не принадлежат к устойчивому типу независимо от значений масс m_1, m_2, m_3.

С другой стороны, два корня квадратного уравнения (45_2) для s^2 равны

$$s^2 = \frac{1}{2} \{-1 \pm (1 - 4\nu^2)^{1/2}\} \omega^2.$$

Следовательно, все четыре корня s этого уравнения будут чисто мнимыми и различными всегда при $4\nu^2 < 1$, но совпадают парами при $4\nu^2 \to 0$ и имеют при $4\nu^2 > 1$ вид $\pm\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, где α, β — положительные числа. Поэтому все характеристические числа s принадлежат к устойчивому типу тогда и только тогда, когда $4\nu^2 \leqslant 1$. С помощью же (44_2) легко установить, что неравенство $4\nu^2 \leqslant 1$ эквивалентно условию, указанному выше в (II).

§ 382a. В качестве другого примера рассмотрим (см. (*iii*) § 360) центральную конфигурацию такую, что $n - 1$ тел $m_1, \ldots, m_{n-1}$ находятся в углах правильного $(n - 1)$-угольника и имеют все одинаковую массу, равную m, а тело m_n находится в центре этого $(n - 1)$-угольника и имеет массу $m_n = 1$. Общая масса всех тел равна

$$\Sigma m_i = m(n - 1) + 1.$$

Максвелл в своей теории кольца Сатурна показал *), что решение относительного равновесия, соответствующее этой центральной конфигурации, имеет характеристические показатели, принадлежащие все к устойчивому типу, по крайней мере тогда, когда $m < 2 / n^2$. Заметим, что при этом условии $nm \to 0$, если m_n фиксировано и $n \to \infty$, так что вся масса $n - 1$ тел (равная $m(n - 1)$), образующих «кольцо», тем меньше, чем больше n.

ИСКЛЮЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

§ 383. Инвариантное соотношение $\Sigma m_i \xi_i = 0$ для уравнений движения в барицентрической системе координат

$$m_i \xi_i'' = U_{\xi_i}$$

было в § 341 исключено благодаря введению $n - 1$ гелиоцентрических позиционных векторов x_j, так что

$$x_j = \xi_j - \xi_n, \tag{1_1}$$

$$\rho_{jk} = |x_j - x_k|, \quad \rho_{jn} = |x_j| \quad (j, k = 1, \ldots, n - 1). \tag{1_2}$$

---

*) Фактически Максвелл предполагал, что m_n занимает фиксированное положение, т. е. пренебрегал действием «кольца» $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ на «Сатурн» m_n.

Выражения для T и U были получены следующие (см. (5)—(6) § 341):

$$T=\frac{1}{2}\;{}^{0}m_jx_j'^2-\frac{1}{2}\frac{\left(\sum^{0}m_jx_j'\right)^2}{\mu}, \qquad (2_1)$$

$$U=\sum^{+}\frac{m_jm_k}{\rho_{jk}}+m_n\sum^{0}\frac{m_j}{\rho_{jn}}, \qquad (2_2)$$

где $\mu=\Sigma m_i$ и

$$\sum^{0}=\sum_{j=1}^{n-1},\quad \sum^{+}=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n-1} \qquad (3)$$

Мы имеем также (см. (10_2) и (9_1) § 341), что

$$J=\sum^{0}m_jx_j^2-\frac{\left(\sum^{0}m_jx_j\right)^2}{\mu}, \qquad (4_1)$$

$$\sum^{0}m_j(x_j\times x_j')-\frac{\left(\sum^{0}m_jx_j\right)\times\left(\sum^{0}m_jx_j'\right)}{\mu}=C. \qquad (4_2)$$

Наконец, уравнения Лагранжа $[L]_{x_j}=0$ имеют вид (см. (11_1)—(11_2) § 342)

$$x_j''+(m_n+m_j)\frac{x_j}{|x_j|^3}=\Omega_{x_j}^{(j)}, \qquad (5_1)$$

где

$$\Omega_{x_j}^{(j)}=\sum_{k=1}^{n-1}{}'\,m_k\left(\frac{1}{|x_k-x_j|}-\frac{x_k\cdot x_j}{|x_k|^3}\right) \qquad (5_2)$$

причем штрих в последней сумме означает, что $k\neq j$.

Представим теперь эти уравнения в гамильтоновой форме. С этой целью заметим сначала, что выражение (6_1) § 341, где $T=T(x_1',\ldots,x_{n-1}',x_n')$, получено с помощью неособого линейного преобразования выражения $^1/_2\Sigma m_i\xi_i'^2$, и поэтому (6_1) представляет положительно определенную форму переменных $x_1',\ldots,x_{n-1}'$. Следовательно, из (6_1)—(6_2) § 341 видно, что квадратичная форма (2_1) настоящего параграфа является положительно определенной. Другими словами, условие (2_1) § 155 удовлетворяется, а поэтому к лагранжевой функции $L=T+U$, определяемой в соответствии с (2_1)—(2_2) настоящего параграфа, применимы результаты, изложенные в § 158. Следовательно, если $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — 3-векторы, компоненты которых канонически сопряжены с компонентами гелиоцентрических 3-векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$, то гамильтонову функцию, соответствующую лагранжевой функции $L = T + U$, мы получим, выражая T в формуле $H = T - U$, с помощью переменных $y_j = L_{x'_j}$. Чтобы провести эти выкладки, заметим сначала, что

$$m_j^{-1} y_j = x_j' - \mu^{-1} \Sigma^0 m_k x_k, \tag{6_1}$$

$$m_j x_j' = y_j + m_n^{-1} m_j \Sigma^0 y_k. \tag{6_2}$$

Действительно,

$$y_j = L_{x'_j} \equiv T_{x'_j} + U_{x'_j} \equiv T_{x'_j},$$

так что (6_1) вытекает из (2_1). С другой стороны, (6_2) получается обращением линейного преобразования (6_1) переменных $x_1', \ldots, x_{n-1}'$ в $y_1, \ldots, y_{n-1}$. К такому выводу придем, если вычислим сначала $\Sigma^0 y_j$ на основании (6_1) и заметим, что выражение для $\mu = \Sigma m_i$ можно записать в соответствии с (3) в виде

$$\mu = m_n + \Sigma^0 m_j.$$

Таким образом, соотношение (6_2) удовлетворяется тождественно в силу (6_1). Подстановка же (6_2) в (2_1), (4_2) показывает, что

$$T = \frac{1}{2} \sum^0 m_j^{-1} y_j^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\sum^0 y_j\right)^2}{m_n}, \tag{7_1}$$

$$\sum^0 x_j \times y_j = C. \tag{7_2}$$

§ 384. В соответствии с изложенным выше гелиоцентрические лагранжевы уравнения (5_1) в гамильтоновой форме имеют вид

$$y_j' = -H_{x_j}, \quad x_j' = H_{y_j}, \tag{8}$$

где функция $H = T - U$ определяется согласно (7_1), (2_2), (1_2).

Вместе с тем гамильтонова форма барицентрических инерциальных лагранжевых уравнений (5) § 314 следующая (см. § 320):

$$\eta_i' = -H_{\xi_i}, \quad \xi_i' = H_{\eta_i}, \tag{9_1}$$

где

$$H = \frac{1}{2} \sum m_i^{-1} \xi_i'^2 - U(\xi)$$

и

$$\eta_i = m_i \xi_i', \qquad (9_2)$$

причем (9_2) вытекает из (9_1), так что в соответствии с $(4_1)-(4_3)$ § 322

$$\Sigma m_i \xi_i = 0, \qquad (10_1)$$

$$\Sigma \eta_i = 0, \qquad (10_2)$$

$$\Sigma \xi_i \times \eta_i = C. \qquad (10_3)$$

Заметим, что j и i в (8) и (9_1) принимают значения от 1 до $n-1$ и от 1 до n соответственно и что $(10_1)-(10_2)$ представляют собой инвариантную систему для (9_1). Цель перехода от уравнений (9_1) с $3n$ степенями свободы к уравнениям (8) с $3(n-1)$ степенями свободы и заключается в исключении барицентрических условий $(10_1)-(10_2)$.

Так как

$$\sum m_i \xi_i' = 0, \quad \sum m_i = \mu,$$

то из (1_1) и (3) видно, что

$$\sum^0 m_j x_j' = -\mu \xi_n'.$$

Поэтому из (6_1) вытекает, что

$$m_j^{-1} y_j = x_j' + \xi_n'.$$

Следовательно, $\eta_j = y_j$ в силу (1_1) и (9_2), так что гелиоцентрические импульсы совпадают с барицентрическими инерциальными импульсами η_j, $j = 1, \ldots, n-1$. Вместе с тем гелиоцентрические координаты x_j отличны при любом j от барицентрических инерциальных координат (если только тело m_n не окажется расположенным в центре масс $\xi = 0$ всех n тел). Таким образом, очевидно, что связь между гелиоцентрическими импульсами y_j и скоростями x_j' не может быть такой же, как между барицентрическими импульсами η_j и скоростями ξ_j'.

Фактически (9_2) и (6_2) показывают, что каждый из инерциальных барицентрических импульсов пропорционален соответствующей скорости, но что это несправедливо для гелиоцентрических импульсов. Этот факт обычно интерпретируется следующим образом. Говорят, что хотя уравнение (9_1) принадлежит к оскулирующему типу, но уравнения (8), получаемые после исключения инвариантной системы $(10_1)-(10_2)$, не принадлежат к такому типу. Это же приводит к тому, что система (8) весьма неудобна для практического использования в задачах, аналогичных задаче о движении в солнечной системе.

Кроме того, тот факт, что квадратичная форма (2_1) или (7_1), представляющая кинетическую энергию в гелиоцентрических координатах, не имеет диагональной структуры, также может затруднить теоретические исследования (см., в частности, §§ 415—420). По этой причине мы заменим теперь гелиоцентрические координаты x_j их линейными комбинациями $\Sigma^0 a_{jk} x_k$, где неособенная постоянная $(n-1)$-матрица (a_{jk}) зависит от $m_1, \ldots, m_n$ так, что импульсы, канонически сопряженные с координатами $\Sigma^0 a_{jk} x_k$, становятся пропорциональными соответствующим скоростям $\Sigma^0 a_{jk} x_k'$, а (2_1) или (7_1) преобразуются к диагональной форме.

§ 385. Будем подразумевать под барицентрической цепочкой, соответствующей барицентрическим инерциальным позиционным векторам $\xi_1, \ldots, \xi_n$ тел $m_1, \ldots, m_n$, совокупность $n-1$ 3-векторов

$$X_j = \xi_{j+1} - \left(\sum_{k=1}^{j} m_k \xi_k \right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{j} m_k \right), \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

так что X_j — позиционный вектор тела m_{j+1} относительно центра масс j тел $m_1, \ldots, m_j$. Если ввести обозначения

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{j} m_k \qquad (\mu_0 = 0), \tag{12_1}$$

$$M_j = \frac{m_{j+1}\mu_j}{\mu_{j+1}} \qquad (M_0 = 0), \tag{12_2}$$

то связь между X_j и гелиоцентрическими координатами x_j представляется парой обратных друг относительно друга линейных подстановок *)

$$X_j = x_{j+1} - \mu_j^{-1} \sum_{k=1}^{j} m_k x_k, \tag{13_1}$$

$$x_j = m_j \quad M_{j-1} X_{j-1} - \sum_{k=j}^{n-2} \mu_k^{-1} M_k X_k - X_{n-1}, \tag{13_2}$$

где $j = 1, \ldots, n-1$. Действительно, с одной стороны, из (1_1) и (12_1) видно, что (13_1) эквивалентно (11). С другой стороны, из

---

*) Разумеется, $x_{j+1} = 0$, если $j = n-1$ (см. (8) § 341), и что первый член в правой части (13_2) отсутствует, если $j = 1$ (см. (12_2)). Наконец, вся правая часть в (13_2) равна нулю, если $j = n-1$.

(13_1) с учетом (12_1)—(12_2) вытекает рекуррентная формула

$$x_{j+1} - x_j = X_j - m_j^{-1} M_{j-1} X_{j-1}.$$

Полагая в ней $j = n - 1,\ n - 2,\ \ldots$ и складывая последовательно получающиеся соотношения, легко приходим к обращению (13_2) подстановки (13_1).

Как легко установить, определитель линейной подстановки (13_1) равен $(-1)^{n-1}$.

Обозначим $(n-1)$-матрицу линейной подстановки (13_2) через (m_{jk}), так что в соответствии с обозначениями (3_1)

$$x_j = \Sigma^0 m_{jk} X_k.$$

В силу (13_2) и (12_1)—(12_2) коэффициенты m_{jk} являются функциями одних лишь масс $m_1, \ldots, m_n$, и они удовлетворяют, как легко проверить, тождествам

$$\sum^0 m_l m_{lj} m_{lk} - \frac{\left(\sum^0 m_l m_{lj}\right)\left(\sum^0 m_l m_{lk}\right)}{\mu} = M_j e_{jk} \qquad (14)$$

$$\left(\sum^0 = \sum_{l=1}^{n-1}\right),$$

где (e_{jk}) — единичная матрица и $\mu = m_1 + \ldots + m_n$. Подставляя (13_2), т. е.

$$x_j = \Sigma^0 m_{jk} X_k,$$

в (4_1), (2_1), (4_2) и используя во всех трех случаях тождество (14), легко получим, что

$$J = \sum^0 M_j X_j^2, \qquad (15_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum^0 M_j X_j'^2, \qquad (15_2)$$

$$\sum^0 M_j X_j \times X_j' = C. \qquad (15_3)$$

§ 386. Покажем, что барицентрическая цепочка (13_1) представляет собой $n-1$ таких линейных комбинаций $n-1$ гелиоцентрических векторов x_j, что удовлетворяются требования, сформулированные в конце § 384.

Действительно, подстановка (13_2), где постоянные коэффициенты, зависящие от масс, определяются формулами (12_1)—(12_2), преобразует гелиоцентрическую лагранжеву функцию $L = T + U$ (см. (2_1)—(2_2), (1_2)) в лагранжеву функцию

$$L = T(X') + U(X),$$

которая выражается с помощью диагональной формы (15_2) и функции U, получаемой при подстановке (13_2) в (1_2). Поэтому из § 95 следует, что лагранжевы уравнения в переменных X_j имеют вид $[L]_{X_j} = 0$ или (в соответствии с (15_2))

$$M_j X_j'' = U_{X_j}, \qquad (16)$$

где $U = U(X)$ в силу (2_2), (1_2). Однако, полагая $M_j X_j' = Y_j$, получим на основании (15_2) — (15_3), что

$$T = \frac{1}{2} \sum^{0} M_j^{-1} Y_j^2, \qquad (17_1)$$

$$\sum^{0} X_j \times Y_j = C, \qquad (17_2)$$

$$Y_j = M_j X_j', \qquad (17_3)$$

и уравнения (16) приобретают каноническую форму

$$Y_j' = -H_{X_j}, \quad X_j' = H_{Y_j}, \qquad (18)$$

где

$$H = T - U \equiv \frac{1}{2} \sum^{0} M_j^{-1} Y_j^2 - U(X).$$

Заметим, что (18), (17_3) отличаются от (9_1), (9_2) лишь тем, что n масс m_j заменены на $n - 1$ масс M_j, определенных согласно (12)—(12_2), а n барицентрических инерциальных координат ξ_j заменены на барицентрическую цепочку $n - 1$ координат X_j. В то же время барицентрическая инвариантная для (9_1) система (10_1)—(10_2) исключена, и число степеней свободы для уравнений (18) такое же, как и для (8), т. е. равно $3(n - 1)$.

§ 387. Положим, например, $n = 3$. Тогда формулы (12_1)—(12_2) сводятся к следующим:

$$M_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad (19_1)$$

$$X_1 = x_2 - x_1, \quad X_2 = -\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (19_2)$$

Подстановка (13_2), обратная по отношению к (19_2), может быть записана в виде

$$x_j = (-1)^j \nu_j X_1 - X_2, \quad j = 1, 2, \tag{20_1}$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \nu_1 + \nu_2 = 1. \tag{20_2}$$

Следовательно, (1_2) и (16) сводятся к

$$\rho_{12} = |X_1|, \quad \rho_{j3} = |X_2 - (-1)^j \nu_j X_1|, \tag{21_1}$$

$$X_j'' = p_{j1} X_1 + p_{j2} X_2, \tag{21_2}$$

если только использовать (19_1) и обозначить

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{m_1 + m_2}{\rho^3{}_{12}} - m_3 \Sigma^0 \dfrac{\nu_j}{\rho_{j3}{}^3} & m_3 \Sigma^0 \dfrac{(-1)^j}{\rho^3{}_{j3}} \\ M_1 M_2{}^{-1} m_3 \Sigma^0 \dfrac{(-1)^j}{\rho^3{}_{j3}} & -M_2{}^{-1} m_3 \Sigma^0 \dfrac{m_j}{\rho^3{}_{j3}} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где

$$\Sigma^0 \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2$$

в соответствии с (3_1). Таким образом, согласно (15_3) и (15_1)

$$M_1 (X_1 \times X_1') + M_2 (X_2 \times X_2') = C, \tag{23_1}$$

$$J = M_1 X_1^2 + M_2 X_2^2, \tag{23_2}$$

а в силу (2_2) и соотношения (7_1) § 315

$$U = \frac{m_1 m_2}{\rho_{12}} + m_3 \left(\frac{m_1}{\rho_{13}} + \frac{m_2}{\rho_{23}} \right), \tag{24_1}$$

$$\frac{1}{2} J'' = 2h + U. \tag{24_2}$$

Нет необходимости говорить, что (21_2)—(22) совпадают в силу (19_1)—(21_1) с (15_2)—(16) § 343а.

Применяя (10_1) и (11) к рассматриваемому случаю $n = 3$ и используя (20_2), увидим, что если решение $X_1 = X_1(t)$, $X_2 = X_2(t)$ уравнений (21_2) известно, то соответствующее решение задачи трех тел в барицентрических инерциальных координатах ξ_i дается формулами

$$\left. \begin{aligned} &\xi_1 = -\nu_1 X_1 - \mu^{-1} m_3 X_2, \quad \xi_2 = \nu_2 X_1 - \mu^{-1} m_3 X_2, \\ &\xi_3 = (1 - \mu^{-1} m_3) X_2 \quad (\mu = \Sigma m_i). \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Все три траектории $\xi = \xi_i(t)$ тел m_i, а также две траектории $\xi = X_j(t)$ гипотетических двух тел (19_1) рассматриваются как траектории в пространстве $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$.

§ 388. Можно говорить в этом смысле о тангенциальной плоскости для траектории M_j, $j = 1, 2$, проходящей через центр масс при заданном t, т. е. о плоскости $\Pi_j{}^t$ в пространстве ξ, проходящей через $\xi = 0$ и касающейся траектории M_j при заданном t. Таким образом, $\Pi_j{}^t$ есть плоскость в пространстве ξ, имеющая уравнение

$$(X_j(t) \times X_j'(t)) \cdot \xi = 0.$$

Разумеется, если

$$X_j(t) \times X_j'(t) = 0,$$

то плоскость $\Pi_j{}^t$ не существует.

Умножая (23_1) при заданном t на произвольное ξ, увидим, что $C \cdot \xi$ является линейной комбинацией двух произведений

$$(X_j(t) \times X_j'(t))\xi, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, линия пересечения двух плоскостей $\Pi_j{}^t$ (если они пересекаются), соответствующих одному и тому же t, лежит в неизменяемой плоскости $C \cdot \xi = 0$. Если $\Pi_j{}^t$, $j = 1, 2$, пересекаются, то решение $\xi_i = \xi_i(t)$ не является, конечно, в силу (25) плоским в указанном в § 324 смысле, так что в соответствии с § 326 неизменяемая плоскость должна существовать. Следовательно, постоянные интегрирования для решения $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел являются такими, что для всех t, за исключением, может быть, изолированных значений t,

I) обе плоскости $\Pi_j{}^t$ существуют;

II) эти плоскости не параллельны одна другой, так что $C \neq 0$ и две плоскости $\Pi_j{}^t$ пересекаются вдоль прямой N^t, вращающейся*) вокруг центра масс и лежащей в неизменяемой плоскости.

§ 388a. Остается выделить все те частные решения $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел, для которых условия (I)—(II) § 388 существования прямой N^t не удовлетворяются. Из (25) видно, что условие (I) не удовлетворяется в случае равнобедренных решений, рассмотренных в § 346, а также в случае прямолинейных решений (см. § 327). Аналогичным образом из (25) следует, что условие (II) не удовлетворяется для любого плоского решения (см. § 324) и также для пространственных равнобедренных решений (i)—(ii) § 346. Остается неизвестным, встречаются ли еще

---

*) Прямая N^t не обязательно зависит фактически от t. В частности, весьма трудной представляется проблема определения всех частных решений задачи трех тел, удовлетворяющих условиям (I) и (II) и обладающих фиксированной прямой N^t. Как можно судить по известным до сих пор данным, такие решения, возможно, не существуют. Эта проблема связана с вопросом, поднимаемым ниже в § 436.

другие отличные от равнобедренных неплоские частные решения, для которых условие (II) не имеет места.

Таким образом, прямая N^t не существует в случае любого плоского решения и в обоих случаях (*i*)—(*ii*) § 346 неплоского равнобедренного решения. Однако остается открытым вопрос о существовании еще других решений, для которых прямая N^t не существует.

§ 389. Уравнения общей задачи трех тел в виде (21_2) весьма удобны при рассмотрении равнобедренных решений. В §§ 345—347 эти решения были рассмотрены лишь в предположении, что $m_1 = m_2$ *). В конце § 344 было упомянуто, что это предположение является, по существу, следствием определения (см. § 344) равнобедренного решения **). В настоящее время имеется лишь одно доказательство этого факта, причем это доказательство слишком длинное, чтобы можно было его здесь воспроизвести. Вместе с тем самая идея доказательства достаточно простая. Для ее изложения рассмотрим некоторые вспомогательные соотношения.

Предположим, что данное решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел при произвольных массах m_1, m_2, m_3 таково, что $\rho_{13} = \rho_{23}$ при любом t. Тогда, возводя обе части соотношения (21_1) в квадрат, найдем

$$2X_1 \cdot X_2 = (\nu_2 - \nu_1) X_1^2, \qquad (26_1)$$

$$\rho_{12}^2 = X_1^2, \qquad (26_2)$$

$$\rho_{j3}^2 = X_2^2 + \nu_1\nu_2 X_1^2, \quad j = 1, 2. \qquad (26_3)$$

Кроме того, исходя из (22) и (20_2), (19_1), получим, что

$$p_{11} = -\frac{m_1 + m_2}{\rho_{12}^2} - \frac{m_3}{\rho_{13}^3}, \qquad p_{22} = -\frac{\mu}{\rho_{13}^3}, \qquad (27_1)$$

$$p_{12} \equiv 0 \equiv p_{21}, \qquad (27_2)$$

---

*) При этом условии формулы (19_2) сводятся к следующим:

$$X_1 = x_2 - x_1, \qquad X_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

и совпадают с точностью до обозначений с подстановкой (20_1) § 345, на которой и был основан анализ случая $m_1 = m_2$.

**) Заметим, что это определение исключает в силу §§ 359, 377а случай треугольного (лагранжевого) решения, для которого все три массы m_i могут быть различными. Заметим также, что коллинеарное гомографическое решение удовлетворяет условию $\rho_{13} = \rho_{23}$ лишь тогда, когда $m_1 = m_2$ (см. (12) § 358).

где $\mu = m_1 + m_2 + m_3$. Положим $|X_j| = r_j$, $j = 1, 2$. Тогда

$$X_j^2 = r_j^2, \qquad X_j \cdot X_j' = r_j r_j',$$

$$X_j'^2 + X_j \cdot X_j'' = r_j'^2 + r_j r_j''$$

и

$$X_j \cdot X_j'' = p_{jj} r_j^2,$$

так как в силу (21_2), (27_2)

$$X_j'' = p_{jj} X_j. \tag{27_3}$$

Таким образом, в соответствии с (2) § 65, где $a = X_j$, $b = X_j'$, имеем

$$r_j^2 (r_j r_j'' + r_j'^2 - p_{jj} r_j^2) = (r_j r_j')^2 + (X_j \times X_j')^2,$$

т. е.

$$r_j r_j'' = p_{jj} r_j^2 + \frac{(X_j \times X_j')^2}{r_j^2}.$$

Так как в силу (27_3)

$$X_j \times X_j'' = 0,$$

то

$$X_j \times X_j' = A_j,$$

где $A_j = \mathrm{const}$. Таким образом,

$$r_1 r_1'' = p_{11} r_1^2 + \frac{A_1^2}{r_1^2}, \tag{28_1}$$

$$r_2 r_2'' = p_{22} r_2^2 + \frac{A_2^2}{r_2^2}, \tag{28_2}$$

где

$$p_{11} = -\frac{m_1 + m_2}{r_1^3} - \frac{m_3}{(r_2^2 + \nu_1 \nu_2 r_1^2)^{3/2}},$$

$$p_{22} = -\frac{m_1 + m_2 + m_3}{(r_2^2 + \nu_1 \nu_2 r_1^2)^{3/2}}$$

(см. (27_1) и (26_1) — (26_3), где $X_j^2 = r_j^2$). Наконец, подставляя (26_2) — (26_3), где $X_j^2 = r_j^2$, в (23_2) — (24_1), увидим, что в силу (24_2)

$$\frac{1}{2}(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)'' = 2h + \frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_3(m_1 + m_2)}{(r_2^2 + \nu_1 \nu_2 r_1^2)^{1/2}} \qquad (29)$$

где M_j, ν_j определяются согласно (19_1), (20_2) при $h = \text{const}$.

Соотношения (28_1) — (28_2) представляют собой два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые при заданных четырех начальных значениях $r_j(t^0)$, $r_j'(t^0)$, $j = 1, 2$, определяют обе функции $r_j(t)$, $j = 1, 2$, единственным образом. Однако эти функции должны удовлетворять также уравнению (29), так что имеем фактически не два, а три обыкновенных дифференциальных уравнения (алгебраических) для двух функций $r_1(t)$, $r_2(t)$. В соответствии с этим основная идея доказательства, упомянутого в начале параграфа, может быть описана кратко следующим образом.

Аналитические функции r_1, r_2 переменной t, определяемые уравнениями (28_1) — (28_2), обладают в соответствии с этими уравнениями особыми точками в комплексной области. Вместе с тем уравнение (29) также обусловливает наличие некоторых комплексных особых точек. Эти особые точки, хотя и не сами функции $r_1(t)$, $r_2(t)$, могут быть определены a priori с помощью соответствующих операций на основании теории аналитических функций. Но подробный анализ показывает, что особые точки функций $r_1(t)$, $r_2(t)$, соответствующие (28_1) — (28_2), не совпадают с теми, которые определяются согласно (29), лишь тогда, когда $r_1^2 \equiv r_2^2 + \nu_1 \nu_2 r_1^2$ или $m_1 = m_2$. Так как в первом случае соотношения (26_2) — (26_3), где $X_j^2 = r_j^2$, показывают, что $\rho_{12} \equiv \rho_{23} \equiv \rho_{31}$, то, следовательно, $m_1 = m_2$, если только мы не имеем дело с треугольным (лагранжевым) решением *).

Конечно, было бы желательным построить доказательство, основанное на динамических, а не на функционально-теоретических принципах. Однако весьма сомнительно, что такое доказательство существует. Во всяком случае, данный результат весьма сильный и выглядит гораздо более глубоким, чем (*ii*) § 371 (несмотря на § 374а).

§ 389а. Аналогичная проблема возникает при любом $n > 3$. Действительно, если $n > 3$, то все известные компланарные (но не плоские) решения задачи n тел обладают свойством симметрии, аналогичным тому, которое присуще пространственным равнобедренным решениям (*i*) — (*ii*) § 346. Следовательно, возникает во-

---

*) См. предыдущее примечание.

прос о необходимости этих свойств симметрии для любых масс и конфигураций в случае коллинеарных, но не плоских решений при $n > 3$. Эта проблема представляется весьма трудной. Возможно, что она связана с соображениями, аналогичными тем, которые были приведены в § 389.

ИСКЛЮЧЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

§ 390. Обозначим через ξ_i^ν, η_i^ν, C^ν, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, компоненты 3-векторов ξ_i, η_i, C и положим

$$F^\gamma = \sum (\xi_i^\alpha \eta_i^\beta - \xi_i^\beta \eta_i^\alpha), \tag{30}$$

где

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}),\ (\mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{I})\ (\mathrm{III}, \mathrm{I}, \mathrm{II}).$$

Тогда интеграл (10_3), выражающий постоянство кинетического момента, уравнений (9_1) можно записать в виде трех скалярных интегралов

$$F^\nu = C^\nu\ {}^{*}).$$

Так как на основании (30) легко установить, что

$$(F^\beta; F^\alpha) = F^\gamma$$

(см. обозначение (19) § 20), то из § 92 вытекает, что гамильтонова система не может обладать лишь двумя из трех интегралов (30) **) и не обладать третьим интегралом. Тем не менее эти три интеграла являются независимыми в указанном в § 18 смысле, т. е. ни одна из трех функций $F^\nu = F^\nu(\eta, \xi)$ не является функцией $f = f(F^\alpha, F^\beta)$ двух других. Действительно, частное дифференцирование показывает, что якобиан для трех функций (30) по отношению к трем переменным η_1^{I}, η_2^{I}, η_2^{II} не обращается тождественно в нуль.

---

*) Представляет формальный интерес тот факт, что три компонента (30) кинетического момента $\Sigma \xi_i \times \eta_i$ могут быть выражены через элементы $2n$-матрицы (16) § 19 в виде трех скалярных произведений

$$F^\gamma = V^\beta \cdot \mathrm{I}\, V^\alpha,$$

где через V^ν обозначен $2n$-вектор с компонентами $\eta_1^\nu, \ldots, \eta_n^\nu, \xi_1^\nu, \ldots, \xi_n^\nu$.

**) Фактически это вытекает из доказательства (см. § 316), которое устанавливает существование трех интегралов (30). Действительно, если динамическая система в евклидовом трехмерном пространстве инвариантна по отношению к вращению вокруг двух координатных осей, то она инвариантна и по отношению к вращению вокруг третьей координатной оси, так как любое вращение вокруг начала координат может быть разложено на вращение вокруг двух перпендикулярных осей (см. (21) § 78).

§ 391. Исключим из $6n$-мерного пространства (η, ξ) область с меньшим числом измерений, в которых три функции $F^\nu = F^\nu(\eta, \xi)$ становятся зависимыми в силу обращения в нуль всех трехстрочечных якобианов. Припишем произвольные фиксированные значения постоянным компонентам C^ν вектора кинетического момента $(F^{\text{I}}, F^{\text{II}}, F^{\text{III}}) \equiv \Sigma \xi_i \times \eta_i = C$. Тогда мы получим $(6n - 3)$-мерную область, так что консервативная система (9_1) порядка $6n$ сводится к системе порядка $6n - 3$. Фактически из теории пфаффианов следует, что эта консервативная система порядка $6n - 3$ эквивалентна системе порядка $6n - 4 = 2(3n - 2)$ и даже консервативной гамильтоновой системе с $3n - 2$ степенями свободы.

§ 391а. Для того чтобы можно было получить последнюю систему в явном виде, представляется очевидным путь, на котором используется идея, применявшаяся выше при исключении интегралов движения центра масс. В этой связи заметим, что, как легко проверить, сумма n векторов $m_i \xi_i$, а следовательно, также и сумма n векторов $m_i \xi_i' \equiv \eta_i$ обращаются тождественно в нуль в силу (11), где $n - 1$ векторов X_j произвольны. Таким образом, возможность приведения системы (9_1) порядка $6n$ к системе (18) порядка $6(n - 1)$ обусловлена тем, что 6 барицентрических условий (10_1)—(10_2), представляющих собой инвариантную систему для уравнений (9_1), параметризуются с помощью $6(n - 1)$ фазовых переменных так, что они превращаются в тождества. В соответствии с этим основной путь при редукции, указанной в § 391, это введение подходящих новых фазовых переменных, с помощью которых инвариантная для (9_1) система (10_3), где $C = (C^{\text{I}}, C^{\text{II}}, C^{\text{III}})$ фиксировано, параметризуется так, что она превращается при этом в систему тождеств. Конечно, предпочтительны такие новые переменные, в которых η_i^ν, ξ_i^ν выражаются как алгебраические функции симметричной структуры. К сожалению, такая алгебраическая параметризация векторного соотношения (10_3) не была когда-либо указана, по крайней мере для $n > 3$ (что касается случая $n = 3$, то см. ниже § 394).

§ 392. Так как барицентрические соотношения (9_1), (10_3) эквивалентны соотношениям (18), (17_2), где $j = 1, \ldots, n - 1$, то все соображения, приводившиеся в §§ 390—391 (в том числе замечание негативного характера в конце § 391а), остаются справедливыми, если заменить η, ξ, n на Y, X и $n - 1$ соответственно. В частности, число степеней свободы консервативной гамильтоновой системы, упоминавшейся в конце § 391, сводится к $3(n - 1) - 2 = 3n - 5$. Если $n = 2$, то это число степеней свободы равно 1 (что согласуется в силу изложенного в § 343 (с 16_1)—(16_2)

§ 214). В то же время оно равно 4, если $n = 3$. Таким образом, уравнения (9_1) задачи трех тел могут быть приведены с помощью (10_1) — (10_3) к консервативной гамильтоновой системе с 4 степенями свободы. В явной форме эта система будет выписана ниже. Однако остается, по-видимому, неизвестным какое-либо явное представление подобной системы, заслуживающее внимания, если $n \geqslant 4$ (см. § 391а).

§ 393. Рассмотрим сначала коллинеарные (в указанном в § 329 смысле) решения задачи трех тел. Если такое решение не является прямолинейным (в указанном в § 321 смысле), то оно будет в соответствии с § 331 гомографическим. Тогда результаты, приведенные в § 378, позволяют получать это решение в явном виде, поскольку задача сводится к консервативной динамической системе с одной степенью свободы, определяемой уравнением (21_1) § 268. Следовательно, достаточно рассмотреть прямолинейный случай.

Тогда можно выбрать барицентрическую инерциальную систему координат $\xi = (\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}}, \xi^{\mathrm{III}})$, так что $\xi_i^{\mathrm{II}}(t) = 0 = \xi_i^{\mathrm{III}}(t)$ при любых i и t. Соотношение (10_3) сводится к $0 = 0$, а 3-вектор ξ_i в (9_1) можно рассматривать как скаляр ($=\xi_i{}^{\mathrm{I}}$). Тогда при (11) $j = 1, 2(=n-1)$ — скаляр, а уравнения (18) определяют консервативную гамильтонову систему с $n - 1 = 2$ степенями свободы.

В соответствии с этим число 4, упомянутое в § 392, можно заменить числом 2 в любом коллинеарном случае и единицей в коллинеарном непрямолинейном случае задачи трех тел.

§ 394. Предположим теперь, что рассматриваемое решение $\xi_i = \xi_i(t)$ не коллинеарное. Тогда вследствие аналитичности решений прямолинейные конфигурации тел (т. е. сизигии, см. § 327) если и встречаются, то лишь при изолированных t, и ими можно, следовательно, пренебречь. Таким образом, три тела m_1, m_2, m_3 образуют треугольник $\Delta = \Delta(t)$. Пусть этот треугольник ориентирован так, что порядок m_1, m_2, m_3 соответствует положительному направлению. Обозначим через $\theta_i = \theta_i(t)$ ориентированный внешний угол в вершине, где находится масса m_i. Тогда $\Sigma\theta_i = 0$, и если $|\Delta| = |\Delta(t)|$ обозначает площадь треугольника $\Delta = \Delta(t)$, то

$$\sin\theta_i = \frac{2|\Delta|}{\rho_j\rho_k} \qquad \cos\theta_i = \frac{\rho_i^2 - \rho_j^2 - \rho_k^2}{2\rho_j\rho_k}, \tag{31_1}$$

$$|\Delta| = \frac{\Pi(\rho_j + \rho_k - \rho_i)^{1/2}}{4(\Sigma\rho_i)^{-1/2}} > 0, \tag{31_2}$$

где (i, j, k) допускают три циклические перестановки чисел $(1, 2, 3)$, а ρ_i — длина стороны треугольника, противоположной по отношению к вершине m_i, так что если использовать обозначение (3_3) § 314, то $\rho_i = \rho_{jk}$.

Барицентрические позиционные векторы вершин треугольника $\Delta = \Delta(t)$ суть $\xi_i = \xi_i(t)$, так что плоскость $\Pi = \Pi(t)$ этого треугольника, содержащая всегда точку $\xi = 0$, изменяется вообще со временем. Если решение $\xi_i = \xi_i(t)$ не обладает инвариантной плоскостью, т. е. оно такое, что кинетический момент C равен нулю, то это решение является обязательно плоским (см § 326). Поэтому можно принять плоскость его движения за координатную плоскость $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$. Обозначим в этом случае ориентированную плоскость $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ через Π. Если же $C \neq 0$, то обозначим через Π_* инвариантную плоскость $C \cdot \xi = 0$, ориентированную в соответствии с (6), (7) § 323. Из (6) § 323 вытекает, что если решение плоское, то Π_* совпадает с плоскостью $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$ и при $C = 0$, так что $\Pi(t) = \Pi_*$ при любом t. Таким образом, Π_* — вполне определенная неподвижная плоскость, проходящая через центр масс независимо от того, является или не является решение плоским.

Обозначим через $\iota = \iota(t)$ наклонность плоскости $\Pi = \Pi(t)$ треугольника $\Delta = \Delta(t)$ по отношению к фиксированной плоскости Π_*. В частности, $\iota(t) = 0$, если все три тела m_i лежат в плоскости Π_*, так что $\iota(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда решение плоское.

Консервативные гамильтоновы уравнения с $3n - 5 = 4$ степенями свободы, упоминавшиеся в § 394, можно записать, используя координаты ι, ρ_1, ρ_2, ρ_3, в следующем явном виде:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{I}' = -H_\iota, & \iota' = H_{\mathrm{I}}, & \\ \mathrm{P}_i = -H_{\rho_i}, & \rho_i' = H_{\mathrm{P}_i}, & i = 1, 2, 3, \end{array}\right\} \qquad (32)$$

где через I, P_1, P_2, P_3 обозначены канонические сопряженные с этими координатами импульсы, а функция Гамильтона равна *)

---

*) Поскольку первый член в (33) содержит множитель $C^2 \sin^2 \iota$, он считается равным нулю при $|C| = 0$ или при $\sin \iota = 0$, хотя тогда (33) содержит выражение $\sin(\frac{\mathrm{I}}{0} + \ldots)$, не имеющее смысла. Однако при $|C| = 0$ решение обязательно плоское, т. е. тогда $\iota = 0$ при всех t. В то же время, если решение неплоское, то из соображений, связанных с аналитичностью, вытекает, что $\iota = \iota(t)$ может обращаться в нуль лишь при изолированных значениях t. Таким образом, первый член в H или обращается в нуль тождественно (для плоского решения) или может иметь особую точку лишь при изолированных значениях t (для неплоского решения).

$$\begin{aligned} H \equiv H(\mathrm{I}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \iota, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \\ = \frac{|C|^2 \sin^2\iota}{4|\Delta|} \sum \frac{\rho_i^2}{m_i} \sin^2\left(\frac{\mathrm{I}}{|C| \sin\iota} + \frac{\theta_j - \theta_k}{3} \right) + \\ + \sum \frac{\mathrm{P}_j^2 + \mathrm{P}_k^2 - 2\mathrm{P}_j \mathrm{P}_k \cos\theta_i}{2m_i} + \\ + |C| \cos\iota \sum \left(\frac{\mathrm{P}_j}{\rho_k} - \frac{\mathrm{P}_k}{\rho_j} \right) \frac{\sin\theta_i}{3m_i} + \\ + |C|^2 \cos^2\iota \sum \frac{\rho_j^2 + \rho_k^2 - \frac{1}{2}\rho_i^2}{36 m_i \rho_j^2 \rho_k^2} - \sum \frac{m_j m_k}{\rho_i}. \quad (33) \end{aligned}$$

Величины Δ, θ_1, θ_2, θ_3 в этой формуле выражаются согласно $(31_1)-(31_2)$ как функции ρ_1, ρ_2, ρ_3, если $|C| \geqslant 0$ фиксировано и если

$$\Sigma f_{ijk} = f_{123} + f_{231} + f_{312}, \qquad (34_1)$$

$$\rho_i = |\xi_j - \xi_k| = \rho_{jk}. \qquad (34_2)$$

Проверка того факта, что консервативная гамильтонова система (32) с 4 степенями свободы эквивалентна в силу $(10_1)-(10_3)$ консервативной гамильтоновой системе $(9_1)-(9_2)$ с $3n = 9$ степенями свободы, требует лишь последовательного дифференцирования и алгебраических преобразований. Эти элементарные, но громоздкие выкладки мы опустим. В частности, оказывается, что гамильтоновы функции в (9_1) и в (32) совпадают друг с другом после применения геометрических (или, скорее, кинематических) формул преобразования, связывающих координаты ι, ρ_i и соответствующие импульсы I, P_i с трехмерными векторами ξ_i, η_i.

§ 395. Функция Лагранжа

$$L = L(\iota', \rho_1', \rho_2', \rho_3', \iota, \rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad (35)$$

соответствующая гамильтоновой функции (33), может быть получена на основании (2_1) § 15 после того, как импульсы I, P_i будут выражены через скорости ι', ρ_i' и координаты ι, ρ_i (с помощью (1_2) § 15). Однако окончательное представление импульсов через скорости и координаты слишком громоздкое и никогда в явном виде не использовалось. Но, как бы то ни было, четыре консервативных лагранжевых уравнения $[L]_\iota = 0$, $[L]_{\rho_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, описывают неколлинеарную задачу трех тел, причем искомыми переменными служат наклонность $\iota = \iota(t)$ плоскости $\Pi = \Pi(t)$ по отношению к неподвижной плоскости Π_* (см. § 394) и три взаимных расстояния $\rho_i = \rho_i(t)$ в плоскости $\Pi = \Pi(t)$, определяемой тремя барицентрическими инерциальными векторами $\xi_i = \xi_i(t)$.

§ 396. Весьма интересно, что в последних уравнениях участвует лишь один эйлеров угол ι. Действительно, формула (23) § 79 показывает, что для определения относительного положения двух плоскостей $\Pi(t), \Pi_*$ требуется знать кроме наклонности $\iota(t)$ также и узел $\nu(t)$. Однако кинематическое следствие возможности приведения (9_1) к виду (32) состоит в том, что при использовании факта постоянства кинетического момента, т. е. соотношения

$$\Sigma\xi_i \times \eta_i = C \ (C \text{ — \textit{фиксированная} постоянная}),$$

узел $\nu(t)$ плоскости $\Pi(t)$ по отношению к Π_* исключается.

§ 397. Конечно, значения узла требуются для определения трех барицентрических позиционных векторов ξ_i. Однако из операций, ведущих от (9_1)—(10_3) к (32), следует, что если решение неплоское (в ином случае не нужны ни ι, ни ν), то

$$\nu' = \frac{|C| \sum m_i}{|\Delta|} \sum \frac{\rho_i^2}{m_i} \sin^2\left(\frac{\mathrm{I}}{|C| \sin\iota} + \frac{\theta_j - \theta_k}{3}\right). \tag{36}$$

Если же решение приведенных уравнений (32) известно, то правая часть (36) оказывается в силу (31_1)—(31_2) известной функцией t, так что $\nu = \nu(t)$ находится при помощи квадратуры.

§ 398. Если рассматривать только плоские решения задачи n тел, то $3n - 5$ степеней свободы (см. § 392) можно заменить меньшим числом $2n - 3$.

Прежде всего, если решение коллинеарное, то те же рассуждения, которые использовались в § 393, показывают, что число $3n - 5$ сводится к $n - 1$ в случае решения, отличного от прямолинейного, и к 1 в случае прямолинейного решения. Предположим поэтому, что решение не является коллинеарным, и выберем плоскость движения в качестве координатной плоскости $(\xi^{\mathrm{I}}, \xi^{\mathrm{II}})$. Тогда ξ_i и согласно (11) также и X_i — двумерные векторы. Следовательно, уравнения (18), где $j = 1, \ldots, n - 1$, описывают тогда консервативную динамическую систему с $2n - 2$ степенями свободы и допускают интеграл

$$\sum^{0}(X_j^{\mathrm{I}}\,Y_j^{\mathrm{II}}-X_j^{\mathrm{II}}Y_j^{\mathrm{I}})=C^{\mathrm{III}}=\pm\,|C|,$$

к которому сводятся в силу равенства $\xi_i^{\mathrm{III}}\equiv 0\equiv X_j^{\mathrm{III}}$ три скалярных интеграла, соответствующих (17_2). Таким образом, исключение кинетического момента C приводит к консервативной системе порядка $2(2n-2)-1=4n-5$. Вместе с тем в соответствии с теорией пфаффианов (см. замечание в конце § 391) эта консервативная система порядка $4n-5$ эквивалентна системе порядка $4n-6=2(2n-3)$ и, более того, консервативной гамильтоновой системе с $2n-3$ степенями свободы.

§ 399. Если $n=3$, то эта система с $2n-3=3$ степенями свободы может быть выписана на основании изложенного в § 394 в явной форме. Действительно, согласно примечанию в этом параграфе функция (33) приводится в плоском случае к виду

$$H\equiv H(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\rho_1,\rho_2,\rho_3)=\frac{1}{2}\sum m_i^{-1}\;(\mathrm{P}_j^2+\mathrm{P}_k^2-2\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\cos\theta_i)+$$

$$+\,|C|\;\sum\left(\frac{\mathrm{P}_i}{\rho_k}-\frac{\mathrm{P}_k}{\rho_j}\right)\frac{\sin\theta_i}{3m_i}-$$

$$-\Bigl(\sum\;\frac{m_jm_k}{\rho_i}-\frac{\rho_j^2+\rho_k^2-\frac{1}{2}\rho_i^2}{36m_i\rho_j^2\rho_k^2}\,|C|^2\;,\qquad(37)$$

где $\theta_i=\theta_i(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ в силу $(31_1)-(31_2)$. Но тогда число степеней свободы системы (32) понижается с 4 до 3. Это вытекает из того факта, что частные производные H_ι, H_{I} функции (37) равны тождественно нулю, и первые два из восьми уравнений (32) сводятся к $\mathrm{I}=\mathrm{const}$, $\iota=\mathrm{const}$.

Очевидно, что если положить $\mathrm{P}=p$, $\rho=q$ и

$$g^{ii}=m_j^{-1}+m_k^{-1}\;,\qquad g^{ik}=-m_j^{-1}\cos\theta_j,\qquad i\neq j\neq k\neq i,\quad(38)$$

то (37) представится в виде (7) § 157, причем выражение

$$-\Sigma f^i(q)p_i-V(q)$$

соответствует двум последним членам

$$|C|\Sigma\ldots-\Sigma\ldots$$

в (37). В частности, условие обратимости $(f^i) \equiv (0)$ (см. § 158) удовлетворяется лишь при $C = 0$.

Легко установить с помощью (31_1)—(31_2), что матричная функция $(g^{ik}) = (g^{ki})$ от (ρ_1, ρ_2, ρ_3) всюду положительно определенная, так как $\rho_i < \rho_j + \rho_k$. В частности, обратная матрица $(g_{ik}) = (g^{ik})^{-1}$ существует. Ее элементы являются однородными функциями от (ρ_1, ρ_2, ρ_3) нулевой степени, так как этим свойством обладают в силу (31_1) и (38) элементы матрицы (g^{ik}).

§ **399а.** Предположим, в частности, что $C = 0$ (так что решение обязательно плоское). Тогда (37) упрощается и приобретает вид $H = T - U$, где

$$U = \sum \frac{m_j m_k}{\rho_i},$$

а

$$T = \frac{1}{2} \sum \sum g^{ik} P_i P_k$$

в силу (38). Следовательно, если постоянная энергии h фиксирована, то данная задача становится эквивалентной задаче о нахождении геодезических линий на трехмерном римановом многообразии, на котором квадрат элемента дуги дается формулой (13) § 179, где $q_i = \rho_i$. Согласно изложенному в § 178 соответствующая функция Лагранжа и постоянная энергии равны

$$\tilde{L} = \tilde{T} + \tilde{U}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{2}, \tag{39}$$

где

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \sum \sum \tilde{g}_{ik} \dot{\rho}_i \dot{\rho}_k, \quad \tilde{U} \approx 0$$

и точками обозначаются производные по длине дуги вдоль геодезической линии.

§ **400.** В качестве примера рассмотрим те же коллинеарные решения задачи трех тел, для которых не только кинетический момент C, но и постоянная энергии h равны нулю. Тогда

$$\tilde{g}_{ik} = 2(U + h) g_{ik} = 2U g_{ik},$$

где

$$U = \sum \frac{m_j m_k}{\rho_i}$$

Следовательно, функции $\tilde{g}_{ik}$ от (ρ_1, ρ_2, ρ_3) — однородные степени $\alpha = -1$, так как g_{ik} являются функциями нулевой степени (см. § 399). Применение же (16) § 159 к (39) § 399а приводит к соотношению

$$\Bigl(\sum\sum \tilde{g}_{ik}\rho_i\dot{\rho}_k\Bigr)^{\cdot} = (-1+2)\left(0+\frac{1}{2}\right)+\sum 0=\frac{1}{2},$$

т. е. к

$$\sum\sum \tilde{g}_{ik}\rho_i\dot{\rho}_k=\frac{1}{2}s+c,$$

где s — длина дуги, c — постоянная интегрирования и точкой обозначается дифференцирование по s. Так как

$$\tilde{g}_{ik}=2Ug_{ik},$$

то

$$2U\sum g_{ik}\rho_i\dot{\rho}_k-\frac{1}{2}s=c \qquad \left(U=\sum\frac{m_jm_k}{\rho_i}\right). \tag{40}$$

Последнее соотношение представляет собой неконсервативный интеграл, отличный от интеграла энергии

$$U\sum\sum g_{ik}\rho_i\rho_k=\mathrm{const}\left(=\frac{1}{2}\right),$$

соответствующего (39).

§ 401. К аналогичному результату можно прийти в случае, когда лишь предполагается, что $h=0$, а n и C произвольны (так что решение не обязательно плоское).

Действительно, если постоянная энергии h имеет произвольное фиксированное значение ($\gtreqless 0$), то уравнения

$$m_i\xi_i''=U_{\xi_i}$$

задачи n тел сводятся согласно (13) § 179 к уравнениям геодезических линий на 3-мерном римановом многообразии, на котором квадрат элемента дуги равен

$$ds^2=\Sigma 2(U+h)m_i(d\xi_i)^2,$$

где ξ_i — 3-вектор и

$$U=\sum{}^{*}\frac{m_jm_k}{|\xi_j-\xi_k|}$$

Следовательно, если $h=0$, то коэффициенты при $(d\xi_i)^2$ оказываются однородными функциями степени $\alpha=-1$. Повторение же вывода соотношения (40) при $h=0$ приводит к интегралу

$$2U\sum m_i\xi_i\cdot\dot{\xi}_i-\frac{1}{2}s=c, \tag{41}$$

причем

$$U\sum m_i\dot{\xi}_i^2 \equiv \frac{1}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2} \qquad (s = 1).$$

§ 402. Однако было бы ошибочным полагать, что интеграл (41) задачи о геодезических линиях при $h = 0$ содержит что-либо новое. Действительно, (41) можно переписать в виде

$$U\dot{J} - \frac{1}{2}s = c, \qquad s = 1,$$

где

$$J = \Sigma m_i \xi_i{}^2.$$

Следовательно, (41) эквивалентно соотношению

$$(U\dot{J})^{\cdot} = \frac{1}{2}.$$

Однако в силу связи, существующей между временем t и $s(=\bar{t})$ (см. (10) § 176)), последнее соотношение совпадает с соотношением, к которому сводится (7_1) § 315 при $h = 0$.

С помощью (38) и (31_1) можно также установить, что (40) эквивалентно соотношению

$$(U\dot{J})^{\cdot} = \frac{1}{2},$$

поскольку J можно представить в виде (12_2) § 333, где $\rho_{jk} = \rho_i$.

§ 403. Из соотношений (10_1)—(10_3) вытекает для общей задачи трех тел элементарный геометрический факт, который независимо от (10_1)—(10_3) можно установить следующим образом.

Заметим прежде всего, что три векторных уравнения

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{42_0}$$

можно записать в виде

$$\xi_i'' = \varkappa\rho_i^3\,(\xi_* - \xi_i), \tag{42_1}$$

$$\rho_i = |\xi_j - \xi_k| \tag{42_2}$$

$$(i, j, k) = (1, 2, 3,),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),$$

если только определить 3-вектор $\xi_* = \xi_*(t)$ и скаляр $\varkappa = \varkappa(t)$ по формулам

$$\xi = \sum m_i\rho_i^3\xi_i : \sum m_i\rho_i^3, \tag{43_1}$$

$$\varkappa = \sum m_i\rho_i^3 : \prod \rho_i^3 \tag{43_2}$$

Действительно, из (42_2) видно, что в явной форме уравнения (42_0), где

$$U = \sum \frac{m_j m_k}{\rho_i},$$

записываются следующим образом:

$$\xi_i'' = m_k \frac{\xi_k - \xi_i}{\rho_j^3} + m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\rho_k^3} = \frac{\rho_k^3 m_k (\xi_k - \xi_i) + \rho_j^3 m_j (\xi_j - \xi_i)}{\rho_j^3 \rho_k^3} \qquad (44)$$

Добавляя члены

$$\rho_i^3 m_i \sum (\xi_i - \xi_i) = 0$$

к числителю в правой части и используя обозначения (43_1)-(43_2), придем, очевидно, к (42_1).

§ **404.** В соответствии с (42_1) любая из трех сил $U_{\xi_i} = m_i \xi_i''$, $i = 1, 2, 3$, равна при любом t произведению скалярной функции $(= \varkappa m_i \rho_i^3)$ на 3-вектор $\xi_i - \xi_*$, причем $\xi_* = \xi_*(t)$ не зависит от индекса i. Другими словами, для каждого решения $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел все три гравитационные силы, действующие на m_1, m_2, m_3, направлены к некоторой точке $\xi_* = \xi_*(t)$ пространства ξ. Об этом факте и говорилось в начале § 403.

Точка $\xi_*(t)$ определяется, конечно, единственным образом при всех t, за исключением моментов $t = t^0$ сизигий (см. § 327), и называется центром сил. Хотя (43_1) определяет единственную точку $\xi_*(t)$ также и в момент $t = t^0$ сизигий, но мы будем считать все же, что центр сил в этом случае не определен.

Конечно, центр сил не имеет ничего общего с центром масс, совпадающим при всех t с точкой $\xi = 0$. Действительно, центр сил совпадает согласно (43_1) с центром масс не тел m_1, m_2, m_3, а трех фиктивных тел с массами $m_i \rho_i^3$, имеющих те же барицентрические координаты ξ_i, что и m_i.

§ **405.** Так как моменты сизигий исключены, то $\det(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$. Следовательно, если все три ξ_1, ξ_2, ξ_3 таковы, что не только

$$\Sigma m_i \xi_i = 0,$$

но также

$$\Sigma m_i \rho_i^3 \xi_i = 0,$$

то величины $m_i \rho_i^3 / m_i$, т. е. ρ_i, не зависит от индекса i и наоборот. В силу (43_1) и (42_2) это означает, что центр сил может совпадать с центром масс только в те моменты, в которые треугольник, образованный тремя телами, равносторонний.

Очевидное обобщение этих рассуждений показывает, что одно из трех тел, например m_3, находится на одной прямой с центром сил и центром масс в те и только те моменты, в которые конфигурации тел представляют собой равнобедренный треугольник. Разумеется, (19_1) § 344 может и не иметь места.

§ 406. Можно сразу найти также и те конфигурации, для которых центр сил (43_1) совпадает с центром масс в случае сизигий (исключенном в § 404).

Действительно, если все m_i располагаются на прямой линии, то можно считать ξ_i скалярами $(=\xi_i^{\rm I})$ и предположить, что $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Тогда

$$\xi_j - \xi_k = (-1)^j \rho_i$$

в силу (42_3). Следовательно, в соответствии с последней формулой в § 322а

$$\mu\xi_1 = -m_3\rho_2 - m_2\rho_3,$$

$$\mu\xi_2 = m_1\rho_3 - m_3\rho_1,$$

$$\mu\xi_3 = m_2\rho_1 + m_1\rho_2,$$

где

$$\mu = \Sigma m_i.$$

Подставляя эти выражения для ξ_i в (43_1) и замечая, что $\rho_2 = \rho_1 + \rho_3$, сразу найдем, что $\xi_* = 0$ тогда и только тогда, когда отношение $\lambda = \rho_3 : \rho_1$ является корнем уравнения

$$m_1(m_2+m_3)\lambda^4 + m_1(m_3+3m_2)\lambda^3 + 3m_2(m_1-m_3)\lambda^2 - \\ - m_3(m_1+3m_2)\lambda - m_3(m_1+m_2) = 0 \qquad (45)$$

(но не уравнения (11) § 358, как можно было ожидать).

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ

§ 407. Положим вдоль данного решения задачи n тел

$$r(t) \equiv r = \operatorname{Min}(\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{n-1,n}) \qquad (1)$$
$$(\rho_{jk} = \rho_{jk}(t)),$$

где $\rho_{jk} = |\xi_j - \xi_k|$, и если

$$H = \frac{1}{2}\sum m_i^{-1}\eta_i^2 - U(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то согласно § 320

$$\eta_i' = -H_{\xi_i}, \quad \xi_i' = H_{\eta_i}, \tag{2_1}$$

$$\eta_i = \eta_i(t), \quad \xi_i = \xi_i(t). \tag{2_2}$$

Так как частные производные функции $H(\eta_1, \ldots, \xi_n)$ зависят аналитически от $\eta_1, \ldots, \xi_n$, то в соответствии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений любое решение (2_2) уравнений (2_1) будет аналитическим по t.

Мы предполагали всюду выше, что решение (2_2) уравнений (2_1) задается в некотором конечном или бесконечном t-интервале. Мы не задавали ранее вопрос о том, на каком t-интервале существует решение (2_2), соответствующее заданным начальным значениям $\eta_i(t_0)$, $\xi_i(t_0)$ при $t = t_0$. Мы не интересовались также, при каком конечном значении t^* по крайней мере одна из $6n$ аналитических функций (2_2) приобретает особую точку и каков теоретико-функциональный характер и динамический смысл такого особого момента t^*. Ниже будут рассмотрены именно эти фундаментальные вопросы.

Так как дифференциальные уравнения (2_1) нелинейны, то теоретико-функциональные проблемы становятся безнадежно сложными, если только допустить неограниченные комплексные значения t или комплексные начальные значения при вещественном t_0. Следовательно, мы будем всюду предполагать, что, с одной стороны, вещественным t_0 соответствуют вещественные начальные значения, так что поскольку функция H является вещественной при вещественных (η, ξ), то и решение (2_2) будет вещественным при вещественном t. С другой стороны, функции (2_2) предполагаются аналитически продолжаемыми, начиная от t_0, вдоль вещественной оси t. Конечно, это заставляет учитывать и комплексные t в -некоторой узкой области вдоль рассматриваемого вещественного t-интервала. Но все же ниже мы всюду будем считать, если нет соответствующего замечания, что t вещественное.

§ 408. Формальным основанием следующих ниже рассуждений служит замечание о том, что если через μ обозначается полная масса Σm_i, через μ_0 — наименьшее среди $m_i > 0$, а через h — постоянная энергии, равная $H(\eta_1(t_0), \ldots, \xi_n(t_0))$, то

$$\left.\begin{aligned} |H_{\xi_i}(t)| &< \left\{\frac{\mu}{r(t)}\right\}^2, \\ |H_{\eta_i}(t)| &< \left\{\left(\frac{2}{\mu_0^3}\right)\left(|h| + \frac{\mu^2}{r(t)}\right)\right\}^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при любом t в любом t-интервале, в котором ни одно из $^1/_2 n(n-1)$ расстояний $\rho_{jk} = \rho_{jk}(t)$ не обращается в нуль. Действительно,

$$H_{\xi_i} = -U_{\xi_i},$$

где

$$U = \sum{}^* \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}},$$

так что первое из неравенств (3) вытекает из (1). Аналогичным образом

$$H_{\eta_i} = m_i^{-1} \eta_i,$$

так что второе из неравенств (3) вытекает из соотношения

$$\frac{1}{2} \sum m_i^{-1} \eta_i^2 = U + h,$$

поскольку $0 < U < \mu^2 / r$.

Обозначим через I интервал изменения t, в котором решение (2_2), определяемое начальными значениями $\eta_i(t_0)$, $\xi_i(t_0)$ при начальном $t = t_0$, принадлежащем I, существует, является аналитическим и таким, что минимум (1) всех $^1/_2 n(n-1)$ взаимных расстояний при всех t в I превосходит некоторое фиксированное положительное число r^*. Выберем любое фиксированное $\bar{t}$ в I и рассмотрим решение (2_1) при начальных значениях $\eta_i(\bar{t})$, $\xi_i(\bar{t})$. Применяя локальную теорему существования и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями к новому начальному моменту $\bar{t}$, придем на основании (3) к выводу о существовании двух положительных чисел α^*, β^*, зависящих только от заданного $r^* > 0$, масс m_i, постоянной энергии h и обладающих следующими свойствами *):

при всех t, принадлежащих области $|t - \bar{t}| < \alpha^*$, решение (2_2) существует, является регулярным аналитическим и, кроме того,

$$|\eta_i(t) - \eta_i(\bar{t})| < \beta^*, \quad |\xi_i(t) - \xi_i(\bar{t})| < \beta^*, \tag{4_1}$$

$$r(t) \geqslant \frac{1}{2} r^* \quad (\text{см. } (1)). \tag{4_2}$$

Существенно то, что α^*, β^* не зависят от выбора $\bar{t}$. См. также § 79.

---

*) Эти свойства вместе с (4_1)—(4_2) справедливы как в вещественном интервале $\bar{t} - \alpha^* < t < \bar{t} + \alpha^*$, т. е. при $|t - \bar{t}| < \alpha^*$, так и на комплексной плоскости (t) внутри круга радиуса α^* с центром в точке $\bar{t}$ вещественной оси. В последнем случае следует заменить в (1) ρ_{jk} на квадратный корень из суммы квадратов абсолютных значений трех комплексных чисел $\xi_j^\nu(t) - \xi_k^\nu(t)$, $\nu = \mathrm{I, II, III}$ (см. обозначения в § 313).

§ 409. Таким образом, из теоремы Гейне — Бореля следует с очевидностью (см. § 84), что если решение (2_2), определяемое начальными условиями $\eta_i(t_0)$, $\xi_i(t_0)$, перестает существовать при стремлении t к некоторому конечному вещественному $t = t^*$ или же по крайней мере одна из $6n$ аналитических функций (2_2) в этом решении имеет при вещественном $t = t^* \neq \infty$ особую точку, то положительная функция (1) вещественной переменной t должна приближаться сколь угодно близко к нулю при $t \to \infty$. Другими словами, если t стремится к критическому значению t^* (убывая или возрастая при $t_0 > t^*$ или $t_0 < t^*$ соответственно), то нижний предел $\underline{\lim}\, r(t) = 0$. Так как переменная t может быть заменена на $\pm t + \mathrm{const}$, то можно без потери общности предположить, что начальное $t_0 > 0$ и что критическое $t^* = 0$, т. е. что $\underline{\lim}\, r(t) = 0$ при $t \to +0$.

Нетрудно показать, что не только $\underline{\lim}\, r(t) = 0$, но и $\overline{\lim}\, r(t) = 0$. Действительно, допустим, что $\underline{\lim}\, r(t) = 0$, но $\overline{\lim}\, r(t) > 0$. Тогда будут существовать число $r^* > 0$ и последовательность $t_1, t_2, \ldots$ такие, что $r(t_m) > r^*$ при любом m, причем $t_m \to +0$ при $m \to \infty$. Следовательно, полагая $\bar{t} = t_m$, где m — произвольное фиксированное, и используя свойство, указанное в конце предыдущего параграфа, увидим, что тогда (4_2) будет иметь место при любом t в интервале $|t - t_m| < \alpha^*$, где $\alpha^* > 0$ не зависит от m. Но тогда, если m выбрано настолько большим, что интервал $|t - t_m| < \alpha^*$ содержит предельный момент $\lim t_m = 0$, то $r(t) \geqslant {}^1\!/_2 r^*$ при любом t, достаточно близком к $t = 0$ и, следовательно, $\underline{\lim}\, r(t) \geqslant {}^1\!/_2 r^*$. Так как это противоречит предположению $\underline{\lim}\, r(t) = 0$, $r^* > 0$, то справедливость условия $\lim r(t) = 0$ доказана.

§ 410. Нетрудно заметить, что стремление $r(t)$ к нулю при $t \to +0$ является не только необходимым (§ 409), но и достаточным условием того, чтобы по крайней мере одна из аналитических функций $\xi_i(t)$ приобретала при $t \to +0$ особенность. Действительно, если $r(t) \to 0$, то, поскольку

$$U = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}$$

и

$$\frac{1}{2} \sum m_i \xi_i'^2 - U = h = \mathrm{const},$$

в соответствии с (1) получим, что $\overline{\lim}\, |\xi_i'(t)| = \infty$ по крайней мере при одном каком-нибудь i. Отсюда вытекает, что соответствующая функция $\xi_i(t)$ должна иметь при $t = 0$ особую точку (хотя само $\xi_i(t)$ может стремиться при $t \to 0$ к конечному пределу; например, такой является функция $t^{2/3}$).

§ **411.** К сожалению, теоретико-функциональный характер этих особых точек при $n > 3$ остается неизвестным. Затруднения начинаются уже с того, что отсутствует адекватная кинематическая интерпретация необходимого и достаточного условия $\lim r(t) = 0$.

В соответствии с (1) можно было бы попытаться интерпретировать это условие, как соответствующее столкновение некоторых из n тел при $t \to +0$. Однако законность такой интерпретации может быть обоснована в настоящее время лишь при $n \leqslant 3$ (см. §§ 365—367; если $n = 2$, то этот результат очевиден в силу § 343, так как $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0$). Трудность заключается в том, что величина (1) может стремиться при $t \to +0$ к нулю и тогда, когда ни одно из $^1/_2 n(n-1)$ взаимных расстояний $\rho_{jk}(t)$ к нулю не стремится, поскольку эти расстояния обмениваются при $t \to +0$ бесконечное число раз ролью минимального расстояния (см. пример неньютонианской задачи в § 374a). Другими словами, условие $r(t) \to 0$ соответствует «столкновению» лишь тогда, когда каждое взаимное расстояние стремится к пределу. Однако в настоящее время о таком стремлении к пределу нельзя утверждать ни при каком $n > 3$. Но даже тогда, если бы смогли это сделать, отсюда никак не следует, что «столкновение» должно иметь место в определенной точке барицентрической инерциальной системы координат ξ, поскольку доказательство существования предельных положений $\lim \xi_i(t)$ все еще отсутствовало бы (см. § 365).

§ **411a.** Остается даже неизвестным, все или же не все $|\xi_i(t)| < \mathrm{const}$, если $r(t) \to 0$ при $t \to +0$. Можно лишь утверждать, что величина

$$J = \sum' m_i \xi_i^2$$

должна стремиться к пределу ($\geqslant 0$), который может быть равен $+\infty$.

Действительно, так как

$$J'' = 2U + 4h,$$

где

$$U = \sum{}^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}$$

и $h = \mathrm{const}$, то очевидно, что условие $r(t) \to 0$ эквивалентно условию $J''(t) \to +\infty$. Таким образом, функция $J = J(t)$ в достаточно малой окрестности момента $t = 0$ выпуклая и стремится, следовательно, к пределу $\leqslant +\infty$.

§ 412. Здесь и дальше предположим, что $n = 3$, так что

$$r(t) \equiv r = \operatorname{Min}(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}), \tag{5_1}$$

$$\rho_{ik} \leqslant \rho_{ij} + \rho_{jk}, \tag{5_2}$$

причем (5_2) представляет собой неравенство для сторон треугольника (m_1, m_2, m_3), который может выродиться в прямолинейный отрезок.

Прежде всего покажем, что если (5_1) удовлетворяет условию $r(t) \to 0$ при $t \to +0$ (см. §§ 409—410), то по крайней мере одно из трех расстояний $\rho_{jk}(t)$ стремится к нулю.

Действительно, предположим, что все три $\overline{\lim}\, \rho_{jk}(t) > 0$. Тогда ($5_1$) может стремиться к нулю лишь в том случае, когда по крайней мере два из трех ρ_{jk}, например ρ_{13} и ρ_{23}, обмениваются при $t \to +0$ бесконечное число раз ролью наименьшего расстояния среди трех ρ_{jk} при фиксированном t. Обозначим через $t_1, t_2, \ldots$ моменты, когда происходит эта перемена ролями между ρ_{13} и ρ_{23}, так что $\rho_{13}(t)$ и $\rho_{23}(t)$ имеют при любом $t = t_m$ общее значение (5_1), а $t_m \to +0$ при $m \to \infty$. Так как $r(t) \to 0$ при $t \to +0$, то $\rho_{13}(t_m)$ и $\rho_{23}(t_m)$ стремятся при $m \to \infty$ к нулю. Но тогда в силу (5_2) также $\rho_{12}(t_m) \to 0$, и поскольку все три $\rho_{jk}(t_m) \to 0$, то согласно (12_2) § 333 $J(t_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\underline{\lim}\, J(t) = 0$ при $t \to +0$. Но согласно § 411а всегда $\underline{\lim}\, J(t) = \overline{\lim}\, J(t)$ и, следовательно, $J(t) \to 0$ при $t \to +0$. В соответствии с (12_1) § 333 это означает, что все три $\rho_{jk}(t) \to 0$, и мы приходим к противоречию с предположением, что все три $\overline{\lim}\, \rho_{jk}(t) > 0$.

Этим самым доказано, что по крайней мере одно $\rho_{jk}(t) \to 0$. Выберем обозначения так, что

$$\rho_{12}(t) \to 0. \tag{6}$$

Тогда в силу (5_2)

$$\rho_{13}(t) - \rho_{23}(t) \to 0. \tag{6_1}$$

§ 412а. Из сказанного вытекает, что предел $\lim J(t) \leqslant +\infty$, о существовании которого говорилось в § 411а, не может быть равным $+\infty$.

Действительно, предположим, что предел функции $J(t)$, определяемой по формуле (12_2) § 333, равен $+\infty$. Тогда в силу (6) — (6_1) $\rho_{13}(t) \to +\infty$, $\rho_{23}(t) \to +\infty$, так что m_3 не приближается сколь угодно близко к m_1 и m_2 при $t \to +0$. Но так как $\rho_{12}(t) \to 0$, то m_1 и m_2 должны участвовать тогда в парном столкновении (см. § 349). Следовательно, применимы результаты § 352, которые показывают, что для всех трех $\xi_i(t)$, а также для $\rho_{13}(t) = |\xi_1(t) - \xi_3(t)|$ существуют конечные пределы.

Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что $\lim J(t) < +\infty$. Используя же опять (12_2) § 333, придем на основании (6) — (6_1) к выводу, что $\rho_{13}(t)$ и $\rho_{23}(t)$ стремятся к общему конечному пределу $\geqslant 0$.

§ 413. Сравнивая этот результат с § 409, видим, что если решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи $n = 3$ тел существует и является голоморфным при малых $t > 0$ и если по крайней мере один компонент любого из трех векторов $\xi_i(t)$ имеет при $t = 0$ особую точку, то возможны при $t \to +0$ лишь два случая: а) все три $\rho_{jk}(t)$ стремятся к нулю; б) одно из $\rho_{jk}(t)$ стремится к нулю, а два других стремятся к общему положительному конечному пределу. Другими словами, имеет место либо одновременное столкновение в указанном в § 335 смысле, либо парные столкновения (см. § 349).

В первом случае все три $\xi_i(t)$ стремятся к центру масс $\xi = 0$ так, как это было указано в § 367, и в соответствии с (24) § 365. Во втором случае ни одно из $\xi_i(t)$ не может стремиться к $\xi = 0$, и если сталкивающиеся тела обозначить через m_1 и m_2, то в соответствии с § 352 существуют конечные пределы

$$0 \neq \overset{0}{\xi_1} = \overset{0}{\xi_2} \neq \overset{0}{\xi_3} \neq 0, \tag{7_1}$$

$$\xi_3'^{0}, \tag{7_2}$$

$$\overset{0}{\rho_{13}} = \overset{0}{\rho_{23}} \ (>0), \tag{7_3}$$

где верхний индекс $(^0)$ относится к $\lim t = +0$. Более того, в силу (29) § 350 и (28_3) § 349

$$\rho_{12} \sim \mu t^{2/3}, \tag{8_1}$$

где

$$\mu = \left[\frac{9}{2}(m_1 + m_2)\right]^{1/3},$$

и если через X_1 обозначен вектор относительного положения $\xi_2 - \xi_1$, то

$$\frac{1}{2} X_1'^2 |X_1| \to m_1 + m_2 \qquad (|X_1| = \rho_1). \tag{8_2}$$

В первом случае $C = 0$ согласно § 335, так что решение должно быть плоским (см. § 326). Во втором случае C может и не обращаться в нуль, и если $C \neq 0$, то решение может не быть плоским. Наконец, если оно не плоское (как это имеет место в общем случае), то все три тела m_i стремятся (см. § 353) к положениям, находящимся в инвариантной плоскости.

§ 414. Возникает вопрос о том, допускают ли три аналитические вектор-функции $\xi_i(t)$, определенные при $0 < t \to +0$, вещественное аналитическое продолжение в точке столкновения $t = 0$ в сторону малых отрицательных t; см. §§ 265—269. Мы покажем, что ответ на этот вопрос всегда положителен в случае парного столкновения (см. §§ 415—420), но не обязательно положительный в случае одновременного столкновения (см. §§ 421—424). В последнем случае ответ зависит от численных значений масс m_i и постоянных интегрирования.

В §§ 268—269 локально параметризующей переменной была истинная аномалия u, пропорциональная согласно (3_2) § 259 неопределенному интегралу от обратного расстояния. Следовательно, замечание в § 349 наводит на мысль, что в случае парного столкновения можно попытаться регуляризировать задачу с помощью введения вместо t независимой переменной

$$u \equiv u(t) = \int_0^t \frac{d\tilde{t}}{\rho_{12}(\tilde{t})} \qquad (\rho_{12} = |\xi_1 - \xi_2|). \tag{9}$$

В соответствии с (8_1) подынтегральное выражение в последней формуле обращается при $t \to +0$ в бесконечность порядка $^2/_3$, так что этот интеграл существует при $t > 0$ и

$$u \approx 3\mu^{-1} t^{1/3} \qquad (\mu > 0) \tag{10}$$

при $t \to 0$.

§ 414а. В случае одновременного столкновения не только одно, но каждое из трех обратных расстояний обращается в бесконечность интегрируемого порядка $^2/_3$ (см. § 364 и (24) § 365а). Так как (7_3) — (8_1) справедливы для парного столкновения, то независимо от того, будет ли столкновение одновременным или парным, силовая функция

$$U(t) \equiv U = \sum\nolimits_j^{*} \frac{m_j m_k}{\rho_{jk}}$$

обращается в бесконечность порядка $^2/_3$. В силу тождественного соотношения

$$J'' = 2U + 4h$$

этот факт имеет место и для $J'' = J''(t)$. Следовательно, и при одновременном и при парном столкновении $J' = J'(t)$ стремится к конечному пределу.

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР СТОЛКНОВЕНИЙ

§ 415. Оставляя пока в стороне проблему особых точек, соберем формулы, соответствующие (18) § 386, если $n = 3$. Мы имеем

$$Y_j' = -H_{X_j}, \qquad X_j' = H_{Y_j}, \tag{11_1}$$

$$H = \frac{1}{2} M_1^{-1} Y_1^2 + \frac{1}{2} M_2^{-1} Y_2^2 - \sum{}^{*} \frac{m_l m_k}{\rho_{lk}}, \tag{11_2}$$

где $j = 1, 2 (= n - 1)$, и в силу (20_3)—(21_1) § 387

$$\nu_j = \frac{\mu_2 - m_j}{\mu_2}, \qquad \mu_2 = m_1 + m_2, \tag{12_1}$$

$$\rho_{j3} = |X_2 - (-1)^j \nu_j X_1|, \tag{12_2}$$

$$\rho_{12} = |X_1|. \tag{12_3}$$

Наконец, (19_1) § 387 и (25) § 387 можно переписать в виде

$$M_1 = \nu_j m_j, \qquad M_2 = \frac{\mu_2 m_3}{\mu}, \tag{13_1}$$

$$\xi_j = (-1)^j \nu_j X_1 - \mu^{-1} m_3 X_2, \tag{13_2}$$

$$\xi_3 = \left(1 - \frac{m_3}{\mu}\right) X_2. \tag{13_3}$$

Введем далее вместо четырех 3-векторов Y_j, X_j четыре 3-вектора P_j, Q_j по формулам

$$P_1 = \frac{Y_1}{Y_1^2}, \qquad Q_1 = Y_1^2 X_1 - 2(Y_1 \cdot X_1) Y_1, \tag{14_1}$$

$$P_2 = Y_2, \qquad Q_2 = X_2. \tag{14_2}$$

Так как преобразование (14_1) является с точностью до обозначений полностью каноническим и инволюционным (см. § 50), а преобразование (14_2) тождественным, то преобразование (14_1)—(14_2) будет в силу § 33 полностью каноническим и инволюционным. Таким образом, (14_1)—(14_2) обладает обратным преобразованием

$$Y_1 = \frac{P_1}{P_1^2}, \qquad X_1 = P_1^2 Q - 2(P_1 \cdot Q_1) P_1, \tag{15_1}$$

$$Y_2 = P_2, \qquad X_2 = Q_2, \tag{15_2}$$

преобразующим $(11_1)-(11_2)$ в

$$P'_j = -H_{Q_j}, \quad Q'_j = H_{P_j}, \tag{16_1}$$

$$H = H(P_1, P_2, Q_1, Q_2). \tag{16_2}$$

Для вычисления (16_2) заметим, что если положить $\varkappa = 2X_1 \cdot X_2$, то в силу $(15_1)-(15_2)$

$$\frac{1}{4}\varkappa = \det\begin{pmatrix} {}^1\!/_2 P_1 \cdot P_1 & P_1 \cdot Q_1 \\ P_2 \cdot Q_2 & Q_1 \cdot Q_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

и (как уже указывалось в § 50)

$$P_1^2 Y_1^2 = 1, \tag{18_1}$$

$$P_1^2 Q_1^2 = Y_1^2 X_1^2, \tag{18_2}$$

$$P_1 \cdot Q_1 + Y_1 \cdot X_1 = 0 \tag{18_3}$$

в силу (14_1). Из $(18_1)-(18_2)$, (14_2), (12_2) вытекает, что

$$X_1^2 = (P_1^2)^2 Q_1^2, \tag{19_1}$$

$$X_2^2 = Q_2^2, \tag{19_2}$$

$$\rho_{j3}^2 = X_2^2 - (-1)^j \nu_j \varkappa + \nu_j^2 X_1^2. \tag{19_3}$$

Выражая в (11_2) $Y_1{}^2$, $Y_2{}^2$ согласно (18_1), (15_2) и три $\rho_{jk} = \rho_{jk}(P, Q)$ согласно (12_3), $(19_1)-(19_3)$, получим для (16_2) следующее явное представление:

$$H = \frac{1}{2P_1^2 M_1} + \frac{P_2^2}{2M_2} - \frac{m_1 m_2}{P_1^2 |Q_1|} - \\ - \sum_{j=1}^{2} \frac{m_3 m_j}{\{Q_2^2 - (-1)^j \nu_j \varkappa + (\nu_j P_1^2 |Q_1|)^2\}^{1/2}}. \tag{20}$$

§ 416. Очевидно, что преобразование (15_1) — (15_2) представляет собой пример канонического расширения координатного преобразования (24) § 54, использованного в § 259 и приспособленного к данному случаю.

Для того чтобы аналогия с § 259 была полной, рассмотрим те решения уравнений (11_1), которые соответствуют произвольно фиксированному значению постоянной энергии h, и введем далее вместо t новую независимую переменную (9). Обозначая точками полные производные по этой переменной $u = u(t)$ и применяя формулы, имеющиеся в § 180, к $\bar{t} = u$, $G = \rho_{12}$, увидим, что вдоль любого решения с энергией h можно заменить уравнения (16_1) и функцию (16_2) следующими:

$$\dot{P}_j = -\overline{H}_{\ \ j}, \quad \dot{Q}_j = \overline{H}_{P_j}, \tag{21_1}$$

$$\overline{H} = (-h + H)\rho_{12}. \tag{21_2}$$

Обозначая через P_j^λ, Q_j^λ, $j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$, компоненты четырех 3-векторов P_j, Q_j и выражая ρ_{12} с помощью (12_3) и (19_1) через Q_1, P_1, можно переписать (21_2) в виде

$$\overline{H} = \overline{H}(P_1^{\mathrm{I}}, \ldots, P_2^{\mathrm{III}}, Q_1^{\mathrm{I}}, \ldots, Q_2^{\mathrm{III}}), \tag{22_1}$$

причем

$$\rho_{12} = P_1^2 |Q_1|, \tag{22_2}$$

а постоянная энергии h имеет фиксированное значение.

В соответствии с (22_2), (21_2), (20) функция (22_1) двенадцати скалярных переменных выражается в явном виде следующим образом:

$$\overline{H} = |Q_1| \left(-hP_1^2 + \frac{1}{2M_1} + \frac{P_1^2 P_2^2}{2M_2} - \right.$$

$$\left. - m_0 P_1^2 \sum_{j=1}^{2} \frac{m_j}{\{Q_2^2 - (-1)^j \nu_j \varkappa + (\nu_j P_1^2 |Q_1|)^2\}^{1/2}} \right) - m_1 m_2, \tag{23}$$

где $\varkappa$ выражается по формуле (17), скаляры ν_j, M_j — по формулам (12_1), (13_1), так что они зависят только от фиксированных значений масс m_i, и

$$Q_1^2 = (Q_1^{\mathrm{I}})^2 + (Q_1^{\mathrm{II}})^2 + (Q_1^{\mathrm{III}})^2, \tag{24_1}$$

$$Q_2^2 = (Q_2^{\mathrm{I}})^2 + (Q_2^{\mathrm{II}})^2 + (Q_2^{\mathrm{III}})^2. \tag{24_2}$$

§ 417. Применим теперь для изучения парного столкновения m_1 и m_2 изоэнергетическую каноническую систему (21_1), описывающую любую траекторию $\xi_i = \xi_i(t)$ с заданной энергией h. Если это столкновение происходит тогда, когда t, уменьшаясь, стремится к нулю, то $\rho_{12} \to 0$ при $t \to +0$, а ρ_{13}, ρ_{23} стремятся к общему положительному пределу, который обозначим через α.

Используем вместо t независимую переменную (9) уравнений (21_1). Тогда $u \to +0$ при $t \to +0$. Заданное решение этих уравнений определяет при любом $u > 0$ точку

$$(P_1^{\mathrm{I}}, \dots, P_2^{\mathrm{III}}, Q_1^{\mathrm{I}}, \dots, Q_2^{\mathrm{III}}) \tag{25}$$

в двенадцатимерном фазовом пространстве. Мы покажем, что при $u \to +0$ точка (25) остается в ограниченной замкнутой области, лежащей целиком в области регулярности аналитической (но не всюду регулярной) функции (22_1) двенадцати переменных $P_1^{\mathrm{I}}, \dots, Q_2^{\mathrm{III}}$.

§ **417а.** Для доказательства достаточно показать, что при $u \to +0$ оба вектора P_j и оба вектора Q_j остаются ограниченными и что

$$P_1^2 |Q_1| \to 0, \tag{26_1}$$

$$\varkappa \to 0, \tag{26_2}$$

$$|Q_2| \to 0, \tag{26_3}$$

$$|Q_1| \to \beta > 0 \tag{26_4}$$

при выбранных соответствующим образом α, β. Действительно, тогда из (23) и (24_1) — (24_2) с очевидностью следует, что при $u \to +0$ точка (25) не подходит близко к особой точке функции (22_1) двенадцати независимых переменных. При этом величина $\varkappa$ является согласно (17) полиномом по этим переменным.

Прежде всего покажем, что обе пары P_j, Q_j остаются при $u \to +0$ ограниченными. Так как надо доказать также (26_1) — (26_4) и так как из (26_4), (26_3) и (26_1), (26_4) вытекает ограниченность Q_1, Q_2 и P_1 соответственно, то достаточно рассмотреть P_2. Однако P_2 совпадает в силу (14_2) и (11_1) — (11_2) с $Y_2 = M_2 X_2'$, где M_2 — положительная постоянная, а $X_2' = \mathrm{const}\, \xi_3'$ согласно (13_2), причем производная ξ_3' остается ограниченной, так как она стремится к конечному пределу (7_2). Таким образом, остается доказать (26_1) — (26_4).

Далее (22_2) показывает, что (26_1) выполняется, поскольку, по предположению, $\rho_{12} \to 0$. Кроме того,

$$\varkappa = \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + (\nu_2^2 - \nu_1^2)\rho_{12}^2$$

в силу (19_3), (12_1) и (12_3). Поэтому (26_2) следует из того факта, что ρ_{13} и ρ_{23} стремятся к общему пределу α, а $\rho_{12} \to 0$ и $\nu_j = \mathrm{const}$. Так как, по предположению, $\alpha > 0$, то из (19_1) — (19_3) видно, что (26_3) вытекает из (26_1) — (26_2). Наконец,

$$X_1' = M_1^{-1} Y_1, \qquad Y_1^2 |X_1| = |Q_1|$$

в силу (11_1), (11_2) и (19_1), (18_1) соответственно, так что если положить $\beta = 2(m_1 + m_2)M_1^2$, то (26_4) удовлетворяется в силу (8_2) *).

§ 418. Этим самым завершается доказательство факта, указанного в конце § 417. Заметим теперь, что производные аналитической функции могут иметь особенность лишь в особой точке этой функции. Следовательно, если $f_1, \ldots, f_{12}$ — первые частные производные функции (22_1), а D — замкнутая ограниченная область в двенадцатимерном фазовом пространстве $(P_1^{\mathrm{I}}, \ldots, Q_2^{\mathrm{III}})$, то точка (25) на фазовой интегральной кривой уравнений (21_1) остается при $u \to +0$ целиком внутри выбранной соответствующим образом области D, не содержащей особых точек двенадцати аналитических функций $f_1, \ldots, f_{12}$ двенадцати независимых переменных. Эти же функции $f_1, \ldots, f_{12}$ составляют с точностью до знака правые части уравнений (21_1). Следовательно, объединяя теорему покрытия Гейне — Бореля с теоремой о локальном существовании и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений, сразу увидим, что любая из двенадцати скалярных функций $P_1^{\mathrm{I}}, \ldots, Q_2^{\mathrm{III}}$ от u, представляющих решение уравнений (21_1), должна стремиться при $u \to +0$ к конечному пределу. Предельное положение точки (25) в фазовом пространстве находится, таким образом, в ограниченной замкнутой области D. Следовательно, применяя теорему о локальном существовании и единственности к $u = 0$, придем к выводу, что все двенадцать функций $P_1^{\mathrm{I}}, \ldots, Q_2^{\mathrm{III}}$ переменной u остаются регулярными в точке $u = 0$.

Таким образом, в окрестности точки $u = 0$ четыре 3-векторные функции $P_j(u)$, $Q_j(u)$, $j = 1, 2$, можно разложить в степенные ряды, сходящиеся при достаточно малых $|u|$, представляющие данное решение уравнений (21_1) при $u > 0$ и имеющие, конечно, вещественные коэффициенты.

§ 419. Подставим эти разложения функций P_j, Q_j в формулы (15) для X_j и затем получающиеся разложения X_1, X_2 в формулы (13_2)—(13_3) для трех ξ_i. Поскольку при этом требуется выполнить лишь конечное число сложений и умножений степенных рядов, то все барицентрические инерциальные векторы положения ξ_i разлагаются в ряды по целым положительным степеням u с ве-

---

*) В формуле (8^2) $X_1 = \xi_2 - \xi_1$. Это согласуется с (13_2), поскольку $\nu_1 + \nu_2 = 1$ в силу (18_1).

щественными коэффициентами. Однако мы предполагали, что при $t \to +0$ имеет место парное столкновение. Следовательно, подставляя

$$|\xi_1 - \xi_2| = \rho_{12} \equiv \rho_{12}(u)$$

в (8_1), где $\mu > 0$, увидим из определения (9), где $t > 0$, $u > 0$, что функцию $t = t(u)$ можно разложить вблизи точки $u = 0$ в ряд по целым положительным степеням u с вещественными коэффициентами. Эта функция имеет в точке $u = 0$ нуль третьего порядка (т. е. $t(u) = u^3 p(u)$, где $p(0) \neq 0$) и представляет при малых $u > 0$ единственное вещественное обращение функции (9), задававшейся при малых $t > 0$ $(u > 0)$.

Определим теперь три $\xi_i \neq \xi_i(u)$ и $t = t(u)$ при малых $u < 0$ их степенными рядами. Так как коэффициенты этих степенных рядов вещественные и так как функция $t(u)$ имеет в точке $u = 0$ нуль третьего порядка, то $\xi_i = \xi_i(t)$ определяются при малых $t < 0$ единственным образом как вещественные аналитические продолжения функций $\xi_i = \xi_i(t)$, заданных вначале при малых $t > 0$. Действительно, поскольку $t(u) = u^3 p(u)$, где $p(0) \neq 0$, локальная обратная функция $u = u(t)$ может быть разложена в вещественный ряд по степеням $\sqrt[3]{t}$. Следовательно, можно определить функцию $\xi_i(t)$ при любых малых по абсолютному значению t, полагая $\xi_i(t) = \xi_i(u(t))$.

Тогда уравнения (2_1), где $\eta_i = m_i \xi_i'$, будут удовлетворяться в силу соображений, основанных на аналитичности, также при $t < 0$.

§ 420. Таким образом особые точки, о которых упоминалось в § 410, являются в случае парного столкновения при $t = 0$ алгебраическими, причем локальной униформизирующей переменной служит $\sqrt[3]{t}$, так что ситуация такая же, как и в элементарном случае, рассмотренном в §§ 268—269.

В частности, непосредственный анализ приведенного выше доказательства показывает, что функция $\xi_3(t)$ остается голоморфной в точке $t = 0$, если m_3 — тело, не участвующее в столкновении.

§ 420а. Если желательно, чтобы локальная униформизирующая переменная u была пригодной для любой пары сталкивающихся тел и для любого момента столкновения, то (9) можно заменить следующей формулой:

$$u = \int^{t} U(\tilde{t})\,d\tilde{t} \equiv \int^{t} \left(\sum\nolimits^{\bullet} \frac{m_j m_k}{\rho} \right) d\tilde{t}.$$

Действительно, два из трех расстояний стремятся к случае парного столкновения при $t = 0$ к одному и тому же положительному пределу, так что опять $t(u) = u^3 p(u)$, $p(0) \neq 0$.

Заметим, что такой выбор переменной u в настоящей задаче эквивалентен выбору переменной $\bar{t}$ в задаче, рассмотренной в §§ 203—205, где $\frac{dt}{d\bar{t}}$ пропорциональна произведению $r_1 r_2$.

§ 421. Доказательство утверждения, приведенного в § 414 и касающегося парного столкновения, теперь закончено. В оставшемся случае одновременного столкновения утверждение, приведенное в § 414, имеет двойственный характер. А именно, в этом случае ситуация

(*i*) может быть такой же, как в § 269 или в § 420, но также

(*ii*) может быть и иной.

Справедливость (*i*) при произвольно заданных значениях трех масс m_i подтверждается примером тех гомографических (коллинеарных или треугольных) решений $\xi_i = \xi_i(t)$, которые не обладают инвариантной плоскостью (тогда $C = 0$). Действительно, § 378 показывает, что эти решения всегда существуют, и мы приходим именно к той элементарной задаче, которая рассматривалась в §§ 268—269.

Доказательство (*ii*) будет дано в §§ 422—424. Будет показано, что пр произвольно заданных значениях m_i существуют решения

$$\xi_i(t) = t^{2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in} t^{-sn} \qquad (0 < t < \mathrm{const}), \tag{27}$$

где трехмерные векторы α_{i0}, α_{i1}, $\alpha_{i2}, \ldots$ при всех $i = 1, 2, 3$ вещественные и зависят от постоянных интегрирования. При этом не все три α_{i1} обращаются в нуль и ряды $t^{-2/3}\xi_i(t)$, расположенные по степеням t^{-s}, имеют отличные от нуля радиусы сходимости. Наконец, s — отрицательное число, зависящее лишь от заданных значений трех масс m_i и представляемое алгебраической функцией m_i. Таким образом, число $s < 0$ является рациональным лишь при исключительных значениях m_i. Тот факт, что из существования решений (27) вытекает справедливость (*ii*), основан на следующих соображениях.

Очевидно, что инерциальные барицентрические позиционные векторы (27) стремятся при $t \to +0$ к нулю, так что при $t \to +0$ имеет место одновременное столкновение всех трех тел. Выберем три массы m_1, m_2, m_3, так что отрицательное число $s = s(m_1, m_2, m_3)$ иррациональное. Тогда, поскольку не все три α_{i1} обращаются в нуль, по крайней мере одна из аналитических вектор-функций

(27) имеет при $t = 0$ изолированную, но существенно особую (логарифмическую) точку. Таким образом, решение (27) является вещественным при $t < 0$ и обладает бесконечным числом непосредственных аналитических продолжений при $t < 0$, но каждая из получающихся ветвей оказывается комплексной при $t < 0$ (см. §§ 269—271).

§ 421а. Так как ряды типа (27) можно дифференцировать почленно, то очевидно, что для таких решений затруднение, упомянутое в § 368, т. е проблема возможных спиралей, возникнуть не может. Однако, по-видимому, весьма трудно доказать, что любое решение $\xi_i = \xi_i(t)$, которое соответствует одновременному столкновению, можно получить по методу характеристических показателей s, примененному ниже в § 423 при доказательстве существования частных решений вида (27).

§ 422. Пусть $\xi_i = \xi_i(t)$ — некоторое решение уравнений

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i} \qquad (28_1)$$

при $0 < t < \text{const}$. Положим, как и в (18_1) § 364 и (15_1) § 363,

$$\mathbf{t} = -\lg t. \qquad (28_2)$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = t^{-2/3}\xi_i, \qquad (28_3)$$

Тогда уравнения (28_1) запишутся согласно (19_1)—(19_2) § 364 в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}_i - \frac{1}{3}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i - \frac{2}{9}\boldsymbol{\xi}_i = \frac{1}{m}\mathbf{U}_{\boldsymbol{\xi}_i}, \qquad (29_1)$$

где

$$\mathbf{U} = \sum{}^{*}\frac{m_j m_k}{|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k|} \qquad (29_2)$$

и точками обозначается дифференцирование по $\mathbf{t}$. Если $t \to +0$, то $\mathbf{t} \to +\infty$ согласно (28_2).

Пусть $\xi_i = \xi_i(t)$ — гомотетическое решение уравнений (28_1). Выберем это решение так, чтобы постоянная энергии h была равна нулю. Согласно § 378 такие решения существуют при произвольных значениях m_i и могут быть (см. § 367) как коллинеарными, так и треугольными. В любом случае они приводят (см. § 378) к одновременному столкновению при некотором $t = t_0$, например, при $t \to +0$ Так как $h = 0$, то сравнение § 378 с (22)—(22_2) § 268 показывает, что $\xi_i(t)$ и t пропорциональны второй и третьей степени локально униформизирующей переменной u

соответственно. Таким образом, $\xi_i(t) = t^{2/3}\xi_i(1)$. Обозначая три постоянных трехмерных вектора $\xi_i(1)$, образующих треугольную или коллинеарную треугольную конфигурацию, через a_1, a_2, a_3, получим, что согласно (28_2) ξ_i равно a_i, т. е. что $\xi_i(t) \equiv a_i$, $\dot{\xi}_i(t) \equiv 0$ Другими словами, $\xi_i(t) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, есть равновесное решение уравнений (29_1).

Поэтому из § 89 следует, что если через $\zeta_i = \zeta_i(\mathrm{t})$, $i = 1, 2, 3$, обозначено смещение (см. § 86) для этого частного решения (29_1), то уравнения Якоби (см. § 86), определяющие ζ_i, имеют постоянные коэффициенты. Так как $C = 0$, то согласно § 326 третьи компоненты шести трехмерных векторов ξ_i, ξ_i можно выбрать равными тождественно нулю. Тогда порядок уравнений Якоби понижается с $6n = 18$ до $4n = 12$. Таким образом, уравнения Якоби имеют вид (41) § 381, где $n = 3$, штрих $\left(= \frac{d}{dt}\right)$ надо заменить на точку $\left(= \frac{d}{d\mathrm{t}}\right)$ и $A = (a_{jl})$ — постоянная матрица 12-го порядка. Если s — один из 12 корней уравнения $\det(sE - A) = 0$ для характеристических показателей (см. § 89), то уравнения Якоби имеют решения вида $\zeta_i = \varepsilon\beta_i \exp(st)$, где векторы β_i — постоянные и не все равны нулю, а ε — произвольный скалярный коэффициент пропорциональности, который будем считать положительным.

§ 423. Выбирая ε малым и применяя результаты, изложенные в §§ 85—86, увидим, что уравнения (29_1) обладают решением $\xi_i = \xi_i(t)$, которое в фиксированном ограниченном t-интервале аппроксимируется формулой

$$a_i + \zeta_i(\mathrm{t}) \equiv a_i + \varepsilon\beta_i \exp(st), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{30}$$

тем точнее, чем меньше ε. Однако $\xi_i(\mathrm{t}) \equiv a_i$ — точка равновесия для (29_1). Следовательно, если какой-либо характеристический показатель s для уравнений Якоби отрицателен, то общеизвестная теперь *) теорема существования для вещественных нелинейных дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями гарантирует существование семейства решений $\xi_i = \xi_i(\mathrm{t})$ уравнений (29_1), зависящих от малой постоянной интегрирования ε, причем эти решения не только аппроксимируются выражениями (30) на фиксированном конечном t-интервале, но и представляются на бесконечном интервале $\mathrm{const} < \mathrm{t} < \infty$ степенными

---

*) Этот вопрос является центральным в диссертации Пуанкаре. К мысли о существовании рассматриваемых разложений его привело замечание Дарбу.

рядами вида

$$\xi_i = a_i + \beta_i\tau + \sum_{n=2}^{\infty} b_{in}(\varepsilon)\tau^n, \qquad \tau = \varepsilon\exp(s\mathrm{t}) \tag{31}$$

с вещественными коэффициентами, имеющими при любом фиксированном малом ε некоторую конечную область сходимости $|\tau| < \mathrm{const}$.

Фиксируем ε и определим a_{in} при $n = 0, 1, 2, \ldots$, полагая $a_{in} = b_{in}(\varepsilon)\varepsilon^n$, $n = 2, 3, \ldots$, и $a_{i0} = a_i$, $a_{i1} = \beta_i\varepsilon$. Тогда ряды (31) можно переписать в виде

$$\xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in}\exp(ns\mathrm{t}) \qquad (\mathrm{const} < \mathrm{t} < +\infty). \tag{32}$$

§ 424. Решение (32) уравнений (29_1) эквивалентно в силу (28_1)—(28_2) решению (27) уравнений

$$m_i\xi_i'' = U_{\xi_i},$$

преобразовываемых с помощью (28_1)—(28_2) к виду (29_1).

Следовательно, доказательство утверждения (*ii*) § 421 будет закончено, если только по крайней мере один из двенадцати характеристических показателей s для уравнений в вариациях окажется при соответствующих значениях масс m_i отрицательным и иррациональным. Удостовериться в последнем можно путем исследования корней уравнения $\det(sE - A) = 0$. Эти громоздкие и элементарные исследования аналогичны тем, о которых указывалось в § 381. Выполняя их в данном случае, найдем, что если точка равновесия $\xi_i \equiv a_i$ уравнений (29_1) соответствует треугольному решению, то восемь корней уравнения $\det(sE - A) = 0$ из двенадцати принадлежат, как и в § 382, к устойчивому типу. Если исключить эти корни, то остающееся биквадратное уравнение легко разрешимо. Один из его корней $s = s(m_1, m_2, m_3)$ оказывается отрицательным при произвольных m_1, m_2, m_3 и его значение зависит от масс m_i (входящих в коэффициенты уравнения). Кроме того, этот корень $s = s(m_1, m_2, m_3)$ принимает иррациональное значение, так как он является алгебраической, а следовательно, непрерывной функцией m_i.

Аналогичная ситуация имеет место и тогда, когда рассматриваемая центральная конфигурация не треугольная, а коллинеарная.

§ 425. Очевидно, что метод, примененный в § 421—424, можно распространить на случай одновременного столкновения (§ 335) $n \neq 3$ тел. Метод же, примененный в §§ 415—420, распространяется на случай парного столкновения (§ 349) при $n > 3$, если только использовать вместо (14_2) аналогичные $n-2$ тождественные подстановки.

Предположим в более общем случае, что в барицентрической инерциальной системе координат ξ существуют $q(<n)$ точек $O_1, \ldots, O_l, \ldots, O_q$ таких, что именно n_l из n тел $m_1, \ldots, m_n$ стремятся при $t \to +0$ к точке O_l. При этом $n_l \geqslant 1$ и $n_1 + \ldots + n_q = n > q$, так что во всяком случае $n_l \geqslant 2$. Тогда легко заметить, что для тех l, для которых $n_l > 2$, соображения, изложенные в §§ 361—368 и в §§ 421—424, можно применить к группе n_l тел, сталкивающихся в точке O_l. Для тех же l, для которых $n_l = 2$, соображения, изложенные в §§ 349—350 и в §§ 415—420, применимы к паре тел, сталкивающихся в точке O_l.

Затруднение (см. § 411) состоит в том, что если только $n > 3$ (см. §§ 412—413), то неизвестно, всегда ли существуют указанные точки $O_1, \ldots, O_q$, когда удовлетворяется условие $r(t) \to 0$ (см. §§ 409—410).

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 426. Назовем столкновение в задаче трех тел продолжаемым, если оно не принадлежит к одновременному столкновению типа (*ii*) § 421, т. е. если оно не приводит к появлению трансцендентной особенности. В частности, любое парное столкновение продолжаемо.

Рассмотрим некоторое определенное решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел. Пусть в начальный момент $t = t_0$ все три $\rho_{jk} > 0$. Проследим это решение, начиная с $t = t_0$, например, при $t < t_0$. Тогда возможны три случая:

(I) ни при каком t величина (1) § 407 в нуль не обращается, и тогда § 409 показывает, что движение совершается без особенностей до момента $t = -\infty$ или согласно § 413 происходит столкновение, а тогда одно из двух:

(II) в некоторый момент происходит продолжаемое столкновение;

(III) в некоторый момент происходит непродолжаемое столкновение.

Предположим, что имеет место случай II, пусть $t^{(1)}$ — момент столкновения, ближайший к начальному моменту t_0. Тогда, рассматривая аналитическое продолжение данного решения $\xi_i = \xi_i(t)$ в точке $t^{(1)}$, придем к выводу, что при $t < t^{(1)}$ возможен любой из трех случаев (I), (II), (III). Следовательно, повторяя, пока это возможно, аналогичные рассуждения далее, можем заключить, что

а) либо мы придем после конечного числа случаев II к случаю I или III, так что последовательные аналитические продолжения данного решения $\xi_i = \xi_i(t)$ при $t < t_0$ мы получим с помощью конечного числа шагов;

б) либо мы никогда не придем к случаям I или III, так что процесс аналитического продолжения в последовательные моменты столкновений повторяется бесконечное число раз и приводит к бесконечной последовательности $t^{(1)} > t^{(2)} > \ldots > t^{(m)} > \ldots$ моментов продолжаемых столкновений.

Но тогда ниже будет показано, что в последнем случае $t^{(m)} \to -\infty$ при $m \to \infty$.

§ 427. Предположим, что бесконечная последовательность $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots$ существует и не стремится к $-\infty$. Тогда, поскольку $t^{(m)} > t^{(m+1)}$, существует конечное t^* такое, что $t^{(m)} \to t^*$ при $m \to \infty$. Выберем начало на оси времени так, чтобы $t^* = 0$. Пусть знаки $\lim$, $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ относятся к предельному процессу $\lim t = +0$, когда t изменяется непрерывно, проходя, в частности, все дискретные моменты столкновений $t^{(m)}$, имеющие точку сгущения $t = +0$.

В этом смысле $\lim r(t) = 0$, если $r = \min(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31})$. Действительно, из предположения, что $\overline{\lim}\, r(t) > 0$, вытекает существование последовательности $t_1, t_2, \ldots$ такой, что t_m лежит между $t^{(m)}$ и $t^{(m+1)}$, а $r(t_m)$ превосходит при любом m фиксированное положительное число, равное, например r^*. Тогда, поскольку $t_m \to +0$, можно использовать неравенство (4_2) так же, как это было сделано в § 409, и прийти к тому же противоречию.

Так как $\lim r(t) = 0$, то рассуждения, приводившиеся в § 411а, сохраняют свою силу. Таким образом, $\lim J''(t) = +\infty$, и существует неотрицательный $\lim J(t) \leqslant +\infty$.

Из существования $\lim J(t) \leqslant +\infty$ вытекает далее, что условие $\lim r(t) = 0$ можно заменить более сильным условием стремления к нулю по крайней мере одного из трех $\rho_{jk}(t)$. В ином случае можно было бы выбрать последовательность моментов $t_1, t_2, \ldots$ таких, что t_m удовлетворяют тому же условию, о котором говорилось в § 412, и расположено между $t^{(m)}$ и $t^{(m+1)}$. Но это ведет к тому же противоречию, что и в § 412.

Следовательно, можно выбрать обозначения так, что $\lim \rho_{12}(t) = 0$ при $\lim t = +0$.

§ 428. По определению моментов $t^{(m)}$ по крайней мере одно из трех $\rho_{jk}(t)$ обращается в нуль при любом фиксированном $t^{(m)}$, причем $t^{(m)} \to +0$ при $m \to \infty$. Как при парном, так и при одновременном столкновении в фиксированный момент $t^{(m)}$ производная $J'(t)$ остается, как показывает последнее замечание в § 414а, непрерывной при любом $t^{(m)}$, хотя $J''(t)$ становится неограниченной (положительной). Кроме того, из условия $\lim J''(t) = +\infty$

вытекает, что $J'(t)$, а также и сама функция $J(t)$ монотонны в достаточно малой ε-окрестности справа от момента $t = 0$.

Так как $J(t) > 0$ в интервале между $t = t^{(m)}$ и $t = t^{(m+1)}$ и так как $t^{(m)} \to +0$ при $m \to \infty$, то $J(t^{(m)}) \neq 0$ при любых достаточно больших m. Другими словами, столкновения, происходящие при $t = t^{(m)}$, являются, начиная с некоторого m, парными.

Поскольку $\lim \rho_{12}(t) = 0$, то либо все три $\lim \rho_{jk}(t) = 0$, либо обращается в нуль при $t = t^{(m)}$ и различных и достаточно больших m одно и то же расстояние ρ_{jk}, а именно ρ_{12}. Но мы теперь покажем, что оба эти случая, не исключающие друг друга, ведут к противоречию. Это противоречие доказывает отсутствие конечного t^*, о существовании которого мы предположили в § 427.

§ **429.** Предположим сначала, что все три $\lim \rho_{jk}(t) = 0$ при $t \to +0$. Тогда, хотя моменты $t^{(m)}$ столкновений имеют точку сгущения $t = +0$, ничто не препятствует повторить рассуждения, приводившиеся в §§ 335—338а. Эти рассуждения необходимо лишь очевидным образом видоизменить с учетом того факта, что все промежуточные столкновения являются парными столкновениями между m_1 и m_2 (см. § 428). Таким образом, применима формула (18_1) § 337 (если считать, что $\lim t = +0$), и, следовательно, $\lim J''(t)\sqrt{J(t)}$ существует и отличен от нуля. Но $J(t)$ не может обращаться в нуль в моменты t, достаточно близкие к $\lim t = = +0$, поскольку столкновения при $t = t^{(m)}$ не являются, начиная с некоторого m, одновременными. Следовательно, $J''(t)$ конечно при любом t, достаточно близком к $\lim t = +0$. Мы пришли, таким образом, к противоречию, поскольку, как было указано в § 428, $J''(t^m) = +\infty$ при любом m, а $t^{(m)} \to +0$ при $m \to \infty$. Этим самым исключается первый из двух случаев, упомянутых в конце § 428.

Для того чтобы доказать невозможность второго случая, можно, очевидно, предположить, что хотя лишь $\rho_{12}(t)$ из всех трех $\rho_{jk}(t)$ стремится к нулю, но $\rho_{12}(t^{(m)}) = 0$ при всех достаточно больших m. Вместе с тем то же самое доказательство, которое приводилось в § 412, показывает, что существует общий отличный от нуля предел $\lim \rho_{13}(t) = \lim \rho_{23}(t) \leqslant +\infty$. Следовательно, если момент t достаточно близок к $\lim t = +0$, то оба расстояния $\rho_{j3}(t)$ превосходят некоторое фиксированное положительное число, и ничто не препятствует повторить рассуждения, приводившиеся в § 349а. Надо лишь учесть тот факт, что все промежуточные столкновения — парные столкновения между m_1 и m_2 (см. § 428). Таким образом, применима формула (8_2) § 413. Однако из замечаний в §§ 336—337 видно, что (8_2) § 413 влечет за собой (8_1) § 413. Формула же (8_1) § 413 показывает, что $t^{2/3}\rho_{12}(t)$, а также и $\rho_{12}(t)$ положительны при любых достаточно малых

$t > 0$. Следовательно, условие $\rho_{12}(t^{(m)}) = 0$ не может иметь места при достаточно больших m.

Это противоречие завершает доказательство факта, указанного в конце § 426.

§ 430. Таким образом, моменты продолжаемых столкновений (§ 426) не могут иметь конечную точку сгущения t^*. Поэтому из альтернативы, сформулированной перед последним утверждением § 426, следует, что если решение $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел не может быть аналитически продолжено до $t = -\infty$ (или до $t = +\infty$), то это решение перестает существовать лишь при конечном t, представляющем собой изолированную трансцендентную (логарифмическую) особую точку и соответствующем второму из двух случаев (*i*), (*ii*) § 421.

Сравнивая этот результат с § 413, видим, в частности, что если решение обладает инвариантной плоскостью (т. е. если это решение неплоское), то оно существует при всех t от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ при условии, что оно аналитически продолжаемо в моменты парных столкновений. Разумеется, число таких столкновений может быть конечным ($\geqslant 0$) или бесконечным.

По существу, пример, упомянутый в конце § 346а, показывает, что решение, не обладающее инвариантной плоскостью, может и не приводить к одновременному столкновению. Наконец, выбирая $h < 0$ и рассматривая гомографическое решение, используемое в § 421 для доказательства утверждения (*i*), увидим, что решение может существовать при всех t от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ даже и тогда, когда имеет место бесконечно большое число одновременных столкновений.

§ 431. Следует упомянуть, что, если существует инвариантная плоскость, т. е. если $C \neq 0$, то не только сам полярный момент инерции $J = \mu^{-1}\Sigma^* m_j m_k \rho_{jk}$ положителен (это утверждение эквивалентно условию $\operatorname{Min}(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{32}) \equiv r > 0$ при любом t (§ 335)), но также $\underline{\lim}\, J > 0$, т. е. $\underline{\lim}\, r > 0$ при $t \to \pm\infty$. Доказательство этой теоремы, основанное на неравенствах, приведенных в §§ 333—334а, слишком длинное, и мы его приводить здесь не будем *).

§ 431а. Обычно доказательство утверждения, сформулированного в § 426 (и доказанного как при $C \neq 0$, так и при $C = 0$ в §§ 427—429), основывается в случае $C \neq 0$ на теореме, рассмотренной в § 431. Заметим, однако, что эта теорема неприменима при $C = 0$ к тем решениям, которые если и соответствуют столкновениям при $-\infty < t < \infty$, то только парным.

---

*) Труден лишь случай $h < 0$, так как при $h \geqslant 0$ теорема легко доказывается простым методом, применявшимся в §§ 332—332а.

§ 432. Из сформулированного в конце § 426 вытекает, что если решение задачи трех тел не обладает непродолжаемыми особенностями (т. е. если $C \neq 0$), то регуляризующая переменная u, определяемая согласно (26) § 420а, стремится монотонно к $\pm\infty$ при $t \to \pm\infty$.

В случае, когда $C \neq 0$, теорема предыдущего параграфа дает всю дополнительную информацию. Действительно, если применить непосредственное аналитическое продолжение вдоль вещественной оси u, то тогда из примечания в § 408 следует, что три барицентрических вектора положения ξ_i, рассматриваемых как функции переменной u, являются регулярными аналитическими в полосе $|\mathrm{R}(u\sqrt{-1})| < \mathrm{const}$ вдоль вещественной оси на комплексной плоскости u, причем $\mathrm{R}(z)$ обозначает вещественную часть z.

§ 432а. Если эта полоса $|\mathrm{R}(u\sqrt{-1})| < \mathrm{const}$ отображена взаимно однозначно и конформно на внутреннюю часть круга с единичным радиусом на комплексной плоскости*) w, то, конечно, можно разложить ξ_i в степенные ряды по w, сходящиеся при $|w| < 1$. В силу преобразований $w = w(u)$ и $u = u(t)$ мы приходим к некоторым разложениям координат $\xi_i = \xi_i(t)$, справедливым при $-\infty < t < \infty$. Этот факт, представляющий собой тривиальное повторение чисто теоретико-функционального результата, указанного в § 432, часто служит источником той неправильной формулировки, что если $C \neq 0$, то задача трех тел разрешима, поскольку координаты ξ_i могут быть разложены в ряды.

Оказывается, однако, что упомянутые ряды ввиду их крайне медленной сходимости совершенно бесполезны для практических целей даже в таком простом случае, как треугольное гомотетическое решение.

§ 433. Из § 430 видно, что решения задачи трех тел являются вообще (например, всегда, когда $C \neq 0$) неограниченно продолжаемыми в указанном в § 119 смысле. Но тогда возникает вопрос о том, что фактически означают полученные выше результаты с точки зрения «проблемы интеграции» уравнений движения. Для того чтобы сформулировать ответ на этот вопрос, необходимо возвратиться к исключению кинетического момента и количества движения (центра масс).

§ 434. Приведение уравнений (9_1) § 384 к виду (32) § 394 основывалось на использовании интегралов площадей и движения центра масс, но не интеграла энергии. Поэтому функция Гамиль-

---

*) Если $\mathrm{const} = \pi/2$, то это отображение описывается формулой

$$w = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}.$$

тона (33) § 394 содержит постоянную $|C|$ (модуль кинетического момента), но не постоянную энергии h. Используя же дополнительно интеграл энергии $H = h$, где H определяется согласно (33) § 394, можем исключить одну из 8 переменных I, P_i, ι, ρ_i, так что система (32) § 394 восьмого порядка сводится к системе вида

$$z_k' = Z_k(z_1, \ldots, z_7), \qquad k = 1, \ldots, 7,$$

где известные функции Z_k переменных z_i зависят от обеих постоянных $|C|$, h. Так как эта система 7-го порядка не содержит явно t, то ее можно привести к системе 6-го порядка, содержащей независимую переменную, причем роль последней будет играть одно из z_k (при условии, что не все $z_k(t) = \mathrm{const}$). Если же применить к (32) § 394 метод, изложенный в § 181, то данная неконсервативная система 6-го порядка запишется в виде гамильтоновой неконсервативной системы с тремя степенями свободы.

§ **435.** В частности, если $\iota = \iota(t)$ не остается постоянным вдоль рассматриваемого решения, то согласно (18) § 181

$$\dot{\mathrm{P}}_i = -K_{\rho_i}, \quad \dot{\rho}_i = K_{\mathrm{P}_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$K = K(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, h, |C|)$$

и точками обозначены производные по ι. Эта гамильтонова (неконсервативная) система с тремя степенями свободы является натуральной формой уравнений движения в задаче трех тел, так как координатами служат взаимные расстояния ρ_i, а независимой переменной — наклонение переменной плоскости $\Pi(t)$ трех тел по отношению к фиксированной плоскости Π^*, определенной в § 394 независимо от выбора системы координат.

§ **436.** Остается определить те решения задачи трех тел, для которых предположение $\iota(t) \neq \mathrm{const}$ для натуральных гамильтоновых уравнений предыдущего параграфа нарушается. Это обязательно будет в случае плоского решения, так как тогда $\iota(t) = \mathrm{const} = 0$. Однако плоские решения можно не рассматривать, так как для них можно получить (см. § 399) гамильтонову систему в том же виде, но где роль независимой переменной играет t, а не ι, и функция Гамильтона консервативная. Однако равенство $\iota(t) = \mathrm{const}$ может иметь место также и для некоторых неплоских решений. Действительно, на основании изложенного в § 346 легко установить, что наклонность ι постоянна и равна $^1/_2\pi$ для обоих типов (i), (ii) пространственных равнобедренных решений. Насколько можно судить по известным в настоящее время данным, других таких случаев, когда $\iota(t) = \mathrm{const}$, возможно, не существует. Однако вопрос о выделении всех решений, для которых $\iota(t) = \mathrm{const}$, является, по-видимому, сложным (хотя ответ может быть тривиальным). Возможно, что он связан с теоретико-функциональными соображениями, аналогичными тем, которые приведены в § 389. Во всяком случае, не очевидно, что не допускается равенство $\iota(t) = \mathrm{const}$, где const отлична от нуля и $^1/_2\pi$, и что $\mathrm{const} = {}^1/_2\pi$ лишь для равнобедренных решений.

§ **437.** Пусть постоянная $|C|$ в (33) § 394 и энергия h фиксированы. Обозначим тогда через $M_7 = M_7(|C|)$ множество (точнее говоря, совокупность точек в 7-мерном пространстве), которое выделяется из 8-мерного фазового пространства переменных систем (32) § 394 после изоэнергетической редукции.

Более точно можно определить M_7 как геометрическое место тех точек допустимой области ($I, \iota, \ldots, P_3, \rho_3$), в которых функция (33) § 394 принимает постоянное значение h, причем слово «допустимой» означает, что структура этой области отвечает некоторым требованиям. Например, наклонность ι должна рассматриваться как угловая переменная ($\mathrm{mod}\,\pi$), а если требуется (как и в § 394), чтобы треугольник Δ был невырожденным, то подпространство трех расстояний ρ_i должно определяться неравенствами $0 < \rho_i < \rho_j + \rho_k$. Фактически полное многообразие всех возможных состояний движения в задаче трех тел получим лишь в том случае, если также включим, с одной стороны, предельные случаи сизигий и коллинеарных решений, когда $|\Delta| = 0 < \rho_i = \rho_j + \rho_k$ для одной какой-либо системы индексов i, j, k и, с другой стороны, предельные случаи парных и одновременных столкновений, когда по крайней мере одно $\rho_i = 0$. Действительно, в §§ 498—500 мы увидим на сравнительно простом примере, насколько существенными являются столкновения для понимания топологической структуры. Конечно, лишь детальный анализ позволит решить, какова допустимая область (I, ι, P_1, P_2, P_3) в случае, когда (ρ_1, ρ_2, ρ_3) соответствует какому-либо из предельных случаев.

§ **438.** Из всех этих замечаний вытекает, что топология множества $M_7 = M_7$ ($|C|$) подразумевается совпадающей с топологией тех состояний приведенной задачи трех тел, которые совместимы с заданными значениями постоянных $|C|$, h, не меняющимися вдоль любых интегральных кривых уравнений (9_1) § 384. Таким образом, с топологической точки зрения множество M_7 при фиксированных $|C|$, h внутренне связано с задачей трех тел (так что, в частности, M_7 не зависит от выбора фазовых переменных и поэтому может быть также определено с помощью (10_1)—(10_3)

§ 384 и $H(\eta_1, \ldots, \xi_3) = h$). Описание свойств M_7 могло бы иметь фундаментальное значение (см. § 227). К сожалению, никаких конкретных сведений о топологической структуре M_7 мы не имеем.

§ 439. Исключим предельный случай коллинеарных решений, заполняющих пространство с меньшим числом измерений. Тогда легко показать, что множество M_7 ($|C|$, h) не содержит интегральных кривых, состоящих из особых и только из особых точек этого множества, если только $|C|$, h не удовлетворяют условию $1 + h^0|C^0|^2 = 0$ (упомянутому в конце § 378, где $|C^0|$, h^0 определяются в зависимости от $|C|$, h и (m_1, m_2, m_3) по формулам, приведенным в §§ 375, 378). С другой стороны, если $|C|$ и h удовлетворяют условию $1 + h^0|C^0|^2 = 0$ и определяют, таким образом, либрационные треугольные решения, то эти решения соответствуют изолированным точкам (а не кривым) соответствующего множества $\mathrm{M}_7(|C|, h)$, причем эти изолированные точки оказываются особыми точками M_7.

Доказательство может быть проведено следующим образом. Так как нет необходимости рассматривать особые точки $\rho_i = 0$ и $\Delta = 0$ функции (33) § 394, то из примечания в § 394 видно, что вдоль рассматриваемых исключительных решений функцию (33) можно предположить регулярной аналитической. Но тогда множество M_7, определяемое соотношением $H = \mathrm{const} = h$, не может иметь особую точку, в которой частные производные первого порядка функции (33) § 394 восьми переменных не обращаются одновременно в нуль. Следовательно, уравнения (32) § 394 показывают, что все восемь фазовых переменных $\mathrm{I}, \ldots, \rho_3$ не должны зависеть от t вдоль рассматриваемых исключительных решений. Так как, в частности, ρ_i не зависят от t и соответствуют, следовательно, решению относительного равновесия, то из § 367 и в силу исключения коллинеарных решений следует, что три постоянные $\rho_i = \rho$ определяют равносторонний треугольник. Этот факт с учетом (32)—(33) § 394 и (*ii*) § 371 сразу показывает, что ι, I, P_i также не зависят от t и определяют вместе с $\rho_i = \rho$ особую точку множества M_7. Доказательство закончено.

§ 440. Как это следует из §§ 200—201, каждое новое поколение обычно старается по своему интерпретировать существо «проблем» в задаче трех тел. До тех пор, пока Биркгоф не реализовал геометрические идеи Пуанкаре о динамических системах с двумя степенями свободы, ответ на вопрос об этих проблемах был обычно таков: с одной стороны, задача трех тел не может быть «решена» ввиду установленного факта отсутствия интегралов специального вида (см. §§ 129, 320a), но, с другой стороны, задачу трех тел можно рассматривать как «решенную» ввиду сходимости некоторых рядов вдоль всей оси t (см. § 432а). В настоящее время существует мнение, что первая часть этого утверждения не точна, а вторая бессодержательна и что следует формулировать проблему в терминах «несжимаемого потока» в семимерном многообразии следующим образом.

Рассмотрим при фиксированной паре постоянных $|C|$, h все те решения $\xi_i = \xi_i(t)$ задачи трех тел, которые являются непрерывно продолжаемыми при всех $-\infty < t < +\infty$, причем последнее ограничение необходимо наложить лишь в случае $C = 0$. Как при $C = 0$, так и при $C \neq 0$ состояние, соответствующее решению $\xi_i = \xi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, при фиксированном t, представляется точкой в множестве $\mathrm{M}_7 = \mathrm{M}_7\,(|C|,\ h)$. Таким образом, все решение $\xi_i = \xi_i(t)$, $-\infty < t < +\infty$ $(i = 1, 2, 3)$, целиком представляется в $\mathrm{M}_7 = \mathrm{M}_7\,(|C|,\ h)$ кривой, вырождающейся в точку в случае, когда $\xi_i = \xi_i(t)$ — решение относительного равновесия. Эти ∞^7 кривых, не пересекающихся друг с другом, определяют в $\mathrm{M}_7 = \mathrm{M}_7\,(|C|,\ h)$ группу преобразований τ^t, $-\infty < t < +\infty$, аналогичных тем, которые указывались в § 121 (по крайней мере, если случай $C = 0$, соответствующий неограниченно продолжаемому решению, или, точнее говоря, если все такие решения из $\mathrm{M}_7\,(0,\ h)$ исключены). Легко проверить, что «поток» кривых, определяемых в $\mathrm{M}_7\,(|C|, h)$ группой преобразований $\tau^t = \tau^t(|C|, h)$, $-\infty < t < +\infty$, несжимаем в указанном в § 122 смысле, если топологическое множество M_7 рассматривается в каноническом фазовом пространстве (например, в пространстве переменных $(l, \ldots, \rho_3)$ уравнений (32) § 394). Анализ задачи трех тел при произвольно фиксированных $|C|$, h связан, таким образом, с топологическим исследованием этого потока.

ГЛАВА VI

ВВЕДЕНИЕ В ОГРАНИЧЕННУЮ ЗАДАЧУ

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 441. Обозначим через P_1 и P_2 две материальные точки в задаче $n = 2$ тел. Пусть общая масса P_1 и P_2 равна единице, так что если масса P_2 обозначена через μ, то масса P_1 равна $1 - \mu$. В соответствии с § 343 (и с § 207) уравнения движения P_1 и P_2 имеют вид (2_1) § 241, где x, y — прямоугольные координаты P_2 на плоскости (x, y), в которой всегда находится P_2, а P_1 расположено в начале координат с осями, параллельными осям инерциальной координатной системы.

Предположим, в частности, что P_2 движется вокруг P_1 по кругу. Выберем радиус этого круга за единицу расстояния. В соответствии с § 276 материальная точка P_2 будет двигаться тогда с постоянной угловой скоростью n, причем $n^2 \cdot 1^3 = 1$, так что можно положить без потери общности (см. в конце § 214) $n = +1$. Таким образом, если направление оси x выбрано так, что P_2 расположено при $t = 0$ на положительном направлении оси x, то координаты P_2 равны $(\cos t, \sin t)$ при любом t.

Рассмотрим теперь третью материальную точку P, движущуюся в плоскости (x, y) под влиянием ньютонианского притяжения P_1 и P_2, но не возмущающую кеплерово движение P_1 и P_2. Хотя это предположение и не находится в согласии с законом притяжения Ньютона, но оно достаточно хорошо отражает фактическое положение в том случае, когда масса «бесконечно малого» тела P намного меньше массы любого из «конечных» тел P_1 и P_2. Задача о движении P в такой схеме называется ограниченной задачей трех тел.

Эта задача имеет две степени свободы. Действительно, если через $\bar{x}$, $\bar{y}$ обозначить координаты тела P, то в соответствии с

$(11_1)-(11_2)$ § 342 имеем

$$x'' + (1 - \mu + 0)\frac{x}{(x^2 + \bar{y}^2)^{3/2}} = \Omega_{\bar{x}},$$

$$\bar{y}'' + (1 - \mu + 0)\frac{\bar{y}}{(x^2 + \bar{y}^3)^{3/2}} = \Omega_{\bar{y}},$$

где

$$\Omega = \mu\left(\frac{1}{|(\bar{x} - \cos t)^2 + (\bar{y} - \sin t)^2|^{1/2}} - \frac{\bar{x}\cos t + \bar{y}\sin t}{|\cos^2 t + \sin^2 t|^{3/2}}\right),$$

так как 0, $1 - \mu$, μ суть массы, а $(\bar{x}, \bar{y})$, $(0, 0)$, $(\cos t, \sin t)$ суть координаты P, P_1, P_2 соответственно.

Очевидно, что эти уравнения можно переписать в виде

$$\bar{x}'' = \bar{U}_{\bar{x}}, \quad \bar{y}'' = \bar{U}_{\bar{y}},$$

где $\bar{U}$ — неконсервативная силовая функция

$$\bar{U} \equiv \bar{U}(x, y, t) = \frac{1 - \mu}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{1/2}} + \Omega.$$

Следовательно, уравнения движения обладают неконсервативной функцией Лагранжа $\bar{L}$, определяемой формулой

$$\bar{L} = \frac{1}{2}(\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2) + \bar{U}, \tag{1_1}$$

где

$$\bar{U} = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{-1/2} + \mu\bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, t), \tag{1_2}$$

$$\bar{F} = [(\bar{x} - \cos t)^2 + (\bar{y} - \sin t)^2]^{-1/2} - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{-1/2} - \\ -(\bar{x}\cos t + \bar{y}\sin t). \tag{1_3}$$

§ 442. Ограниченная задача трех тел была рассмотрена впервые Эйлером в связи с одной из его теорий движения Луны. Однако математическое и астрономическое значение этой схемы было понято значительно позднее.

Прежде всего Якоби указал, что эта задача является, по существу, консервативной задачей с двумя степенями свободы. Чтобы это показать, достаточно заменить $(\bar{x}, \bar{y})$ системой координат (ξ, η), вращающейся вокруг общего начала $(0, 0)$ и в которой P_2 остается неподвижным. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \bar{x}\cos t + \bar{y}\sin t, \\ \eta &= -\bar{x}\sin t + \bar{y}\cos t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем P_2 будет иметь при любом t координаты $(1, 0)$. Подставляя выражения для $\bar{x}$, $\bar{y}$ через ξ, η в (1_2)—(1_3), получим, что если положить в соответствии с § 95 $\bar{L} \equiv L$, то

$$L = \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + (\xi\eta' - \eta\xi') + \left\{\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U\right\}, \tag{3_1}$$

$$U = (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2} + \mu F, \tag{3_2}$$

$$F = [(\xi - 1)^2 + \eta^2]^{-1/2} + (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2} - \xi. \tag{3_3}$$

Из (3_2)—(3_3) вытекает, что функция Лагранжа (3_1) хотя и необратима, но консервативна. В соответствии с изложенным в § 155 лагранжевы уравнения, описывающие движение P,

$$[L]_\xi = 0, \quad [L]_\eta = 0 \tag{3_4}$$

допускают интеграл

$$\frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) - \{\ \} = \mathrm{const}.$$

Этот интеграл, называемый интегралом Якоби, выражает факт постоянства относительной энергии, причем член $^1/_2(\xi^2 + \eta^2)$ в $\{\ \}$ представляет собой силовую функцию центробежных сил, появляющихся благодаря вращению системы (2), а член $(\xi\eta' - \eta\xi')$ в (3_1) соответствует кориолисовым силам.

Такая постановка ограниченной задачи трех тел становится основной сначала в теории движения Луны, разработанной Делоне, а затем под ее очевидным влиянием в работах последней четверти 19 века. С одной стороны, Хилл развил к этому времени свою теорию движения Луны, опирающуюся на уравнения (3_4). Разработанная детально Брауном, эта теория является в настоящее время наиболее точной, рассматривавшейся когда-либо в небесной механике (как в теоретическом смысле, так и с точки зрения численных расчетов). С другой стороны, оказалось, что схема ограниченной задачи трех тел также дает приемлемое приближение во многих случаях движения малых планет.

В то же самое время эта схема привлекла внимание Пуанкаре, и центральное место в его работах по динамике занимала именно эта задача. Пуанкаре рассматривал систему с функцией Лагранжа (3_1) как прототип тех динамических систем, которые имеют две степени свободы и, в отличие от систем с одной степенью свободы, не приводятся к квадратурам. В некотором отношении необратимая система, определяемая функцией (3_1), является более сложной, чем простейшая «неинтегрируемая» система (обратимая и имеющая две степени свободы). Конечно, некоторые данные свидетельствуют о том, что топология ограниченной задачи трех тел, а также и сама эта задача, хотя и достаточно сложные, являются слишком простыми, чтобы характеризовать «общую» динамическую систему с двумя степенями свободы. Но во всяком случае, почти все математически значительные работы, способствовавшие прогрессу общей аналитической механики в течение 20 века, в особенности работы Леви-Чивита и Биркгофа по динамике систем, были связаны в той или иной мере с исследованием ограниченной задачи трех тел.

В частности, анализ ограниченной задачи трех тел часто (хотя и не всегда) позволял догадываться о некоторых результатах для общей задачи трех тел. Например, регуляризация в ограниченной задаче (Тиле и Бурро, Леви-Чивита, см. §§ 446—452) предшествовала регуляризации в общей задаче трех тел в случае парных столкновений (Зундман, Леви-Чивита, см. §§ 415—420).

§ 443. В соответствии с § 442 тела P_1 и P_2 находятся соответственно в точках (0, 0), (1, 0) вращающейся координатной системы (ξ, η). Так как массы P_1 и P_2 равны $1-\mu$ и μ соответственно, то центр масс имеет координаты $(\mu, 0)$. Целесообразно заменить систему (ξ, η) новой координатной системой (x, y) *), являющейся барицентрической, так что

$$\xi = x + \mu, \quad \eta = y, \tag{4}$$

причем $(-\mu, 0)$ и $(1-\mu, 0)$ — новые фиксированные координаты P_1 и P_2. Новая координатная система (x, y) вращается равномерно вокруг центра масс P_1 и P_2.

Подставляя (4) в (3_1)—(3_2), сразу получим

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (xy' - yx') + U(x, y), \tag{5_1}$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{|(x+\mu)^2 + y^2|^{1/2}} + \frac{\mu}{|(x-1+\mu)^2 + y^2|^{1/2}}, \tag{5_2}$$

если отбросить аддитивные члены $\mu\eta'$ и $^1/_2\mu^2$. Это отбрасывание вполне оправдано, так как (см. § 156) $\mu\eta'$ равно производной G' функции $G \equiv \mu\eta$, а $^1/_2\mu^2 = \text{const}$.

По причинам, которые будут ясны позднее (см. § 517), вращающаяся барицентрическая система координат (x, y) носит

---

*) Следует отличать эту координатную систему от системы (x, y) § 441, которая обозначается теперь через $(\bar{x}, \bar{y})$.

название синодической. Если $\mu = 0$, то $(5_1)-(5_2)$ сводятся к (5_1) § 300, так что используемая терминология такая же, как и в предельном случае, рассмотренном в § 300.

Ось x синодической координатной системы называется осью сизигий. Такое название согласуется с определениями в § 327, так как два из трех тел P_1, P_2, P всегда расположены на этой оси.

В соответствии с $(5_1)-(5_2)$ уравнения Лагранжа

$$[L]_x = 0, \quad [L]_y = 0$$

и их интеграл энергии можно записать в виде

$$x'' - 2y' = U_x, \quad y'' + 2x' = U_y, \tag{6_1}$$

$$x'^2 + y'^2 = 2U(x, y) - C, \tag{6_2}$$

если через $-{}^1/_2C$ обозначить (как и в предельном случае в § 300) постоянную энергии. Сама постоянная C называется постоянной Якоби.

Если через X, Y обозначить импульсы, а через $H(X, Y, x, y)$ гамильтонову функцию, соответствующую $(5_1)-(5_2)$, то в соответствии с § 229

$$X = x' - y, \quad Y = y' + x, \tag{7_1}$$

$$H = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (xY - yX) - V(x, y), \tag{7_2}$$

$$V(x, y) = U(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \tag{7_3}$$

$$H = h, \tag{7_4}$$

$$h = -\frac{1}{2}C. \tag{7_5}$$

§ 443а. С помощью биполярных координат (33) § 56 функцию (5_2) § 443 для двух произвольных масс μ, $1-\mu$ можно записать в симметричной форме

$$U = (1-\mu)\cdot\left(\frac{1}{2}r_1^2 + r_1^{-1}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}r_2^2 + r_2^{-1}\right) + \text{const},$$

где

$$\text{const} = -\frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

поскольку

$$(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 \equiv x^2 + y^2 + \mu(1-\mu).$$

§ **444.** Если отбросить последнюю сумму, соответствующую центробежным силам, то U примет вид

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Если же пренебречь также кориолисовыми силами, представленными в (5_1) членами $(xy' - yx')$, то мы придем к задаче двух неподвижных центров (см. § 203), интегрируемой в эллиптических функциях.

§ **444а.** Если две массы равны, то для того чтобы задача приводилась к квадратурам (выражаемым также с помощью эллиптических функций), необходимо пренебречь лишь кориолисовыми, но не центробежными силами.

Действительно, если $1 - \mu = \mu$, то (см. § 443а)

$$U = \frac{1}{4}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2}(r_1^{-1} + r_2^{-1}) + \text{const}.$$

Таким образом, если выбрать переменные так же, как и в § 203, то обратимая задача, соответствующая лагранжевой функции

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + U,$$

будет принадлежать, как легко видеть, к тому типу, который был рассмотрен в § 194.

§ **445.** Единственным «известным» интегралом для уравнений (6_1) является интеграл энергии (6_2). Отрицательный результат для задачи $n(\geqslant 3)$ тел, упомянутый в § 320а, может быть доказан также и для ограниченной задачи. Единственный интеграл (6_2) играет в этой задаче ту же роль, что и группа всех десяти консервативных интегралов (§ 320). Однако эти отрицательные результаты для уравнений (6_1) не приносят нам никаких конкретных сведений, поскольку опять остаются в силе замечания, сделанные в § 320а.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

§ 446. Лагранжева функция (5_1) § 443 имеет вид (5_1) § 229, где $f(x, y) \equiv 1$, так что $\omega \equiv 1$ в силу (3) § 228. Следовательно, применяя $(11_2)-(13_2)$ § 230 к произвольному конформному отображению

$$x + iy \equiv z = z(\zeta) \equiv z(\xi + i\eta),$$

получим *)

$$\ddot{\xi} - 2|z_\zeta|^2 \dot{\eta} = \bar{U}_\xi, \qquad \ddot{\eta} + 2|z_\zeta|^2 \dot{\xi} = \bar{U}_\eta, \tag{8_1}$$

$$\bar{t}' = \frac{1}{|z_\zeta|^2}, \tag{8_2}$$

где точками обозначены производные по переменной $\bar{t} = \bar{t}(t)$, которая находится с помощью квадратуры из (8_2), и

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \bar{U} = 0, \tag{9_1}$$

$$\bar{U} \equiv \bar{U}\left(\xi\ \eta, -\frac{1}{2}C\right) = |z_\zeta|^2 \left(U - \frac{1}{2}C\right). \tag{9_2}$$

§ 447. Если μ отлично как от 0, так и от 1, то конечными вещественными особыми точками аналитической силовой функции (5_2), а вместе с тем дифференциальных уравнений (6_1) будут точки $(x, y) = (1 - \mu, 0)$ и $(x, y) = (-\mu, 0)$, в которых находятся две притягивающие массы. Если $\mu = 0$, то первая из этих особых точек исчезает, а вторая оказывается такой, которая допускает, как и в §§ 268—269, регуляризацию с помощью преобразования $z = \zeta^2$ § 259. Этот факт указывает на то, что если $0 < \mu < 1$, то вторую и первую особые точки можно регуляризовать, положив $z = -\mu + \zeta^2$ и $z = (1 - \mu) + \zeta^2$ соответственно.

По причине симметрии достаточно рассмотреть особую точку $(x, y) = (-\mu, 0)$ и отображение $z = -\mu + \zeta^2$, т. е. отображение

$$x = -\mu + \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta,$$

рассмотренное в § 54. Таким образом, можно переписать (8_1)—(8_2) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 8(\xi^2 + \eta^2)\dot{\eta} &= \bar{U}_\xi, \\ \ddot{\eta} + 8(\xi^2 + \eta^2)\dot{\xi} &= \bar{U}_\eta, \end{aligned}\right\} \tag{10_1}$$

$$t = 4(\xi^2 + \eta^2), \tag{10_2}$$

а (5_2) показывает, что (9_2) принимает вид

$$\bar{U} = 4(\xi^2 + \eta^2)\left(\mu^2 - 2(\xi^2 - \eta^2)\mu + (\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{1 - \mu}{\xi^2 + \eta^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu}{\{1 - 2(\xi^2 - \eta^2) + (\xi^2 + \eta^2)^2\}^{1/2}} - \frac{1}{2}C\right). \tag{11}$$

---

*) Функция $\bar{U}$, определяемая ниже согласно (9_2), не имеет ничего общего с функцией $\bar{U}$, определяемой формулами (1_1) — (1_3). Последняя функция использоваться ниже не будет.

Из (11) видно, что при малых ξ, η

$$\bar{U} = 4(1-\mu) + 4\left(\mu^2 + \mu - \frac{1}{2}C\right)(\xi^2 + \eta^2) + (\xi, \eta)_4, \qquad (12)$$

где $(\xi, \eta)_4$ — функция, разложение которой в степенной ряд по ξ, η начинается с членов четвертого порядка и имеет вещественные коэффициенты, зависящие только от μ. В частности, $\bar{U}$ сохраняет аналитичность в точке $(\xi, \eta) = (0, 0)$, в которую переходит особая точка $(x, y) = (-\mu, 0)$ функции (5_2) и уравнений (6_1) после преобразования $x + iy = -\mu + \zeta^2$. Другими словами, изоэнергетический переход от (6_1), (6_2) к (10_1), (9_1) исключает, как и ожидалось, особую точку, соответствующую положению массы $1 - \mu$.

§ 448. Для анализа поведения траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ в момент $t = t_0$ столкновения с телом $1 - \mu$ зададим при фиксированном начальном значении независимой переменной $\bar{t}$, например $\bar{t} = 0$, четыре начальных значения ξ_0, η_0, $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ так, что ξ_0, η_0 соответствуют положению $(0, 0)$ тела $1 - \mu$, а $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$ удовлетворяют интегралу энергии (9_1). Тогда

$$\left.\begin{gathered} \xi_0 = 0, \ \eta_0 = 0, \\ \dot{\xi}_0 = (8 - 8\mu)^{1/2}\cos\gamma, \ \dot{\eta}_0 = (8 - 8\mu)^{1/2}\sin\gamma \\ (0 \leqslant \mu < 1) \end{gathered}\right\} \qquad (13)$$

при выбранной соответствующим образом постоянной γ, которая остается произвольной. Постоянная энергии (7_5) является другой постоянной интегрирования, поскольку она входит явно в силовую функцию (11).

Координаты траектории $\xi = \xi(\bar{t})$, $\eta = \eta(\bar{t})$ можно разложить в силу их аналитичности в ряды по положительным степеням $\bar{t}$, сходящиеся при малых $|\bar{t}|$, т. е. для всех моментов, достаточно близких к моменту $\bar{t} = 0$ столкновения. В силу (13) эти ряды Тейлора начинаются с членов

$$\left.\begin{aligned} \xi &= [(8 - 8\mu)^{1/2}\cos\gamma]\cdot\bar{t} + \ldots, \\ \eta &= [(8 - 8\mu)^{1/2}\sin\gamma]\cdot\bar{t} + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

так что, поскольку $x = -\mu + \xi^2 - \eta^2$, $y = 2\xi\eta$ (см. § 447),

$$\left.\begin{aligned} x &= -\mu + [8(1-\mu)\cos 2\gamma]\cdot\bar{t}^2 + \ldots, \\ y &= [8(1-\mu)\sin 2\gamma]\cdot\bar{t}^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Кроме того, в силу (14) имеем

$$\xi^2 + \eta^2 = 8(1-\mu)\bar{t}^2 + \ \ldots,$$

так что в соответствии с (10_2)

$$t=\frac{32}{3}(1-\mu)\bar{t}^3+\ldots \qquad (0\leqslant\mu<1), \tag{16}$$

если положить $t=0$ при $\bar{t}=0$.

§ 449. Из (16) видно, что функция $t=t(\bar{t})$ обладает в окрестности момента столкновения $\bar{t}=0$ единственной обратной функцией $\bar{t}=\bar{t}(t)$, которую можно разложить при малых $t\gtreqless 0$ в вещественный степенной ряд по степеням $\sqrt[3]{t}\gtreqless 0$. Подставляя это разложение Пюизо функции $\bar{t}=\bar{t}(t)$ в (15), видим, что особая точка для координат $x=x(t)$, $y=y(t)$ в момент $t=0$ столкновения имеет такой же характер, как и в § 269 (или в § 414). В частности, формулы (15)—(16) дают униформизацию координат $x=x(t)$, $y=y(t)$ при $t=0$. Таким образом, движение определяется для моментов t, следующих за моментом столкновения $t=0$ с помощью вещественного аналитического продолжения.

§ 450. Так как $1-\mu>0$, то из (15) также видно, что траектория на синодической плоскости (x,y) имеет в момент столкновения точку возврата. Другими словами, тело P достигает тела P_1, находящегося в точке $(x,y)=(-\mu,0)$, двигаясь по определенному направлению, и отражается далее от P_1 в том же направлении. Это направление определяется произвольной постоянной интегрирования γ, входящей в формулы (13).

§ 451. Из §§ 448—450 видно, что для отображения $x+iy=z(\zeta)$ является существенным не его явное выражение $x+iy=-\mu+\zeta^2$, но именно тот факт, что особая точка $(x,y)=(-\mu,0)$ функции (5_2) отображается с помощью преобразования, обратного к $x+iy=z(\zeta)$, в точку (ξ,η), в которой производная $z_\zeta(\zeta)$ однозначной регулярной функции $z(\zeta)\equiv z(\xi+i\eta)$ имеет нуль первого порядка (это значит, что отображение $z(\zeta)$ перестает быть конформным, причем углы удваиваются). Аналогичное замечание относится и к особой точке $(x,y)=(1-\mu,0)$ функции (5_2). Поэтому, если преобразование $z=z(\zeta)$ выбрано в соответствии с (31) § 56, то регуляризируются обе особые точки, и можно использовать одни и те же переменные ξ, η, $\bar{t}$ в случае столкновения с любым из тел μ и $1-\mu$. Действительно, производная z_ζ функции (31) § 56 обращается в нуль (имея первый порядок малости) тогда и только тогда, когда $(\xi,\eta)=(0,0)$, $(\pm\pi,0)$, $(\pm2\pi,0)$, ...; и все эти точки отображаются с помощью (31) § 56 лишь в точку $(x,y)=(-\mu,0)$ или $(x,y)=(1-\mu,0)$.

Чтобы получить явное выражение для (8_1) — (8_2) в случае отображения (31) § 56, заметим, что в силу (32_2) § 56, а также (8_2)

$$|z_\zeta|^2 = \frac{1}{8}(\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\xi), \tag{17_1}$$

$$\dot{t} = |z_\zeta|^2 \tag{17_2}$$

и что подстановка (17_1) и (5_2) в (9_2) приводит в силу (30) — (34) § 56 к выражению

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\eta - (1-2\mu)\cos\xi) + \\ + \frac{1}{16}(1 - 2\mu + \mu^2 - C)(\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\xi) + \frac{1}{256}(\operatorname{ch} 4\eta - \cos 4\xi) + \\ + \frac{1}{64}(1-2\mu)(\operatorname{ch} 3\eta \cos\xi - \operatorname{ch}\eta \cos 3\xi). \tag{18}$$

Подставляя далее (17_1) и (18) в (8_1), (9_1), мы и получим в явном виде уравнения движения при любом фиксированном C. Заметим, что функции (17_1) и (18) — регулярные аналитические на всей плоскости (ξ, η).

§ 452. В случае двух равных масс ($\mu = 1/2$) выражение (18) упрощается и переписывается в виде

$$\bar{U} = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\eta + \frac{1}{64}(1 - 4C)(\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\xi) + \\ + \frac{1}{256}(\operatorname{ch} 4\eta - \cos 4\xi). \tag{18a}$$

Численные расчеты, выполненные на копенгагенской обсерватории для этого симметрического случая $\mu = 1 - \mu$, опираются на уравнения (8_1), (9_1), где $|z_\zeta|$ и $\bar{U}$ определяются согласно (17_1) и (18a).

§ 453. Из изложенного в начале § 451 видно, что отображение (25) § 55 можно использовать для той же цели, что и (31) § 56. Представления $\bar{U}$ и $|z_\zeta|^2$ в случае (25) § 55 имеют по сравнению с (18) и (17_1) то преимущество, что они приводят к алгебраическим, а не к трансцендентным функциям. Соответствие между (x, y) и (ξ, η) будет тогда двузначным (вместо многозначного в § 451) и может быть, следовательно, использовано для топологического анализа в большом (см. § 500 ниже).

§ **454.** В силу изложенного в начале § 451 естественно спросить о том, что произойдет, если заменить преобразование $z = -\mu + \zeta^2$ (§ 447) преобразованием $z = -\mu + \zeta^n$, где n — целое число, превышающее 2. Ответ таков, что это преобразование для цели регуляризации бесполезное.

Действительно, если $n > 2$, то на основании (12) функция $\bar{U}$ в точке столкновения $(\xi, \eta) = (0, 0)$ обращается в нуль (в первом же случае она равна $4 - 4\mu \neq 0$). Следовательно, из (9_1) вытекает, что формулы (13) надо заменить следующими:

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \dot{\xi}_0 = 0, \quad \dot{\eta}_0 = 0.$$

Однако $\xi(\bar{t}) \equiv 0, \eta(\bar{t}) \equiv 0$ — есть одно, а следовательно, и единственное решение уравнений (8_1), удовлетворяющее этим начальным условиям. Действительно, $\bar{U}_\xi$, $\bar{U}_\eta$ обращаются, как легко видеть, в нуль в точке $(\xi, \eta) = (0, 0)$ не только в случае $n = 2$, но и при любом $n \geqslant 2$.

В соответствии со сказанным, если $n > 2$, то особая точка, в которой находится тело P_1, преобразуется в равновесное решение по отношению к независимой переменной $\bar{t}$. Следовательно, если столкновение происходит в конечный момент, например в момент $t = 0$, то значение $\bar{t}$, соответствующее этому моменту, не будет конечным, но $\bar{t} \rightarrow \infty$. Таким образом, по отношению к независимой переменной $\bar{t}$ это столкновение имеет асимптотический характер (см. конец § 167). Другими словами, знаменатель в (8_2), рассматриваемый как функция t, обращается в момент столкновения $t = 0$ в нуль, имея при $n > 2$ гораздо более высокий порядок малости.

§ **455.** Возвращаясь к (5_1)—(6_2), фиксируем постоянные μ, C. Пусть координаты x, y инфинитезимального тела P изменяются так, что значения U остаются ограниченными. В силу (6_2) это будет тогда и только тогда, когда x' и y' остаются ограниченными. С другой стороны, (5_2) показывает, что U_x и U_y остаются ограниченными тогда и только тогда, когда таковыми являются оба расстояния r_i и обратные величины $1 / r_i$, причем

$$r_1 = \{(x + \mu)^2 + y^2\}^{1/2}, \quad r_2 = \{(x + \mu - 1)^2 + y^2\}^{1/2} \tag{19}$$

(см. § 443а).

Следовательно, записав (6_1) в виде системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно x, y, x', y' и полагая вдоль фиксированного решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (6_1)

$$\rho(t) = \operatorname{Min}\left(r_1(t), r_2(t), \frac{1}{r_1(t)}, \frac{1}{r_2(t)}\right), \tag{20}$$

мы сразу придем к следующему аналогу леммы, сформулированной в конце § 408.

Если значение μ и постоянная интегрирования C в (6_2) фиксированы, то при любом положительном числе ρ^* существуют два положительных числа α^*, β^* таких, что решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (6_1), для которого неравенство $\rho(t) > \rho^*$ удовлетворяется при некотором $t = t_0$, не только существует, но является регулярным аналитическим при всех t в интервале $|t - t_0| < \alpha$ и удовлетворяет неравенствам

$$(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2 < \beta^*, \tag{21_1}$$

$$\rho(t) > \frac{1}{2}\rho^* \tag{21_2}$$

при всех t в этом же интервале. Как и в § 408, существенным является то обстоятельство, что α^*, β^* не зависят от выбора t_0 (а только от μ, C и ρ^*).

§ 456. Предположим, что решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ ограниченной задачи трех тел перестает существовать или теряет аналитичность (по t), если t стремится, например убывая, к фиксированному конечному $t = t^0$, скажем к $t^0 = 0$. Тогда в силу леммы, выражаемой неравенством (21_1) — (21_2), получим, что $\underline{\lim}\, \rho(t) = 0$ при $t \to +0$. Доказательство такое же, как и в § 409. Фактически не только $\underline{\lim}\, \rho(t) = 0$, но также $\lim \rho(t) = 0$ при $t \to +0$. Доказательство опять такое же, как и в § 409. Однако сравнение (19) с (20) показывает, что условие $\lim \rho(t) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий

$$\lim r_1(t) = 0, \qquad \lim r_2(t) = 0, \qquad \lim r_1(t) = +\infty,$$

исключающие друг друга. В первом и во втором случаях мы имеем дело со столкновением с телами $1 - \mu$ и μ соответственно. Эти два эквивалентных один другому случая рассматривались в §§ 447—449. Теперь мы покажем, что этот случай одиночного столкновения движущегося тела с одним из двух покоящихся тел P_1, P_2 исчерпывает все возможности, т. е. что третий случай, когда $\lim r_1(t) = +\infty$ не может иметь места.

§ 457. С целью доказательства предположим, что $r_1(t) \to +\infty$ при $t \to +0$. Это предположение эквивалентно в силу (19) условиям $r_2(t) \to +\infty$ и $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +0$. Следовательно, (5_2) показывает, что если момент $t\,(>0)$ близок к моменту $t = 0$, то гравитационные члены в силовой функции U и в векторе силы (U_x, U_y) очень малы. Главную часть вектора (U_x, U_y)

составляет вектор (x, y), представляющий собой градиент центробежных членов $^1/_2(x^2 + y^2)$ в (5_2). Это значит, что при $t \to +0$ уравнения (6_1) и интеграл (6_2) хорошо аппроксимируются следующими уравнениями и интегралом:

$$\bar{x}'' - 2\bar{y}' - \bar{x} = 0, \qquad \bar{y}'' + 2\bar{x}' - \bar{y} = 0, \tag{22_1}$$

$$\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - C. \tag{22_2}$$

Уравнения (22_1) — линейные однородные с постоянными коэффициентами. Следовательно, любое решение $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $\bar{y} = \bar{y}(t)$ этих уравнений является регулярным аналитическим при всех конечных t, так что $\bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t)$ должно стремиться к конечному пределу при $t \to +0$. Вместе с тем, рассматривая отклонение решения уравнений (6_1) от решений уравнений (22_1) в предположении, что $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to +0$, и используя оценки, получаемые на основании обычного процесса последовательных приближений, приходим сразу к выводу, что также $\bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t) \to +\infty$ при $t \to +0$. Это противоречие и показывает, что $x^2(t) + y^2(t)$ не может стремиться к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

§ 458. Сравнивая между собой результаты, изложенные в §§ 457 и 456, и используя опять (20)—(22_2), увидим, что не только $\lim \{x^2(t) + y^2(t)\}$, но также и $\overline{\lim} \{x^2(t) + y^2(t)\}$ остаются ограниченными при t, стремящемся к конечному t_0, например к $t_0 = 0$. Другими словами, пока t изменяется в конечном промежутке, координаты $x(t)$, $y(t)$ для любого решения ограниченной задачи трех тел должны оставаться ограниченными *).

§ 459. Рассуждения в §§ 456—458 опираются на молчаливое предположение о том, что внутри рассматриваемого промежутка изменения t нет столкновений. Однако все остается справедливым и без такого предположения. Доказательство заключается в следующем.

Согласно изложенному в § 449 существует единственное аналитическое продолжение движения в момент столкновения. Сопоставляя этот факт с другими, упомянутыми в конце § 456, видим, что если моменты столкновений не имеют конечную точку сгущения $t = t^*$, то движение определено при $-\infty < t < +\infty$. Вместе с тем мы покажем, что такое конечное t^* не существует, т. е. что моменты столкновений, если они вообще существуют, образуют или конечную последовательность точек на оси t или же бесконечную последовательность, стремящуюся к $\pm\infty$ (возможно, только к $+\infty$ или только к $-\infty$).

---

*) Как видно из примечания в § 186, этот факт сам по себе не очевиден.

§ 460. Предположим, что данному решению $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (6_1) соответствует движение, сопровождающееся бесконечно большим числом столкновений в конечном t-интервале, причем точка сгущения $t^* \neq \pm\infty$ моментов столкновений находится на конце интервала. Обозначим моменты последовательных столкновений через $t_1, t_2, \ldots$, так что $t_n > t_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $t_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $t^* = 0$, и в интервале между $t = t_n$ и $t = t_{n+1}$ столкновений нет.

В соответствии с (19) при любом $t = t_n$ обращается в нуль или $r_1(t)$, или $r_2(t)$, так что согласно (20) $\rho(t_n) = 0$. Так как $t_n \to +0$ при $n \to \infty$, то получим, что $\underline{\lim}\, \rho(t) = 0$ при непрерывном стремлении t к $+0$. Рассуждая далее так же, как и в начале § 456, увидим, что если $\underline{\lim}\, \rho(t) = 0$, то и $\overline{\lim}\, \rho(t) = 0$ при непрерывном стремлении t к $+0$.

Следовательно, повторяя рассуждения, приводившиеся в §§ 456—458, получим, что если t стремится к $+0$ непрерывно, то или $\lim r_1(t) = 0$, или $\lim r_2(t) = 0$. По причине симметрии достаточно рассмотреть первый из этих двух случаев (исключающих друг друга в силу (19)). Однако если $\lim r_1(t) = 0$ при $t \to +0$, то уравнения и формулы (10_1)—(12) вполне применимы при $t = 0$. Следовательно, § 449 показывает, что функция $r_1 = r_1(t)$ обладает при $t = 0$ алгебраической особой точкой. Поэтому эта функция не может достичь нулевого значения в моменты t, для которых $t = 0$ является точкой сгущения. Однако этот вывод противоречит предположению о том, что $\rho(t_n) = 0$ для бесконечно большого числа моментов t_n вблизи точки сгущения $t = 0$. Такое противоречие и доказывает справедливость утверждения, сформулированного в конце § 459.

§ 461. Полученные выше результаты можно резюмировать следующим образом.

Любое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ ограниченной задачи трех тел существует при $-\infty < t < +\infty$, причем вещественные конечные особые точки обязательно соответствуют столкновениям инфинитезимального тела с одним из двух тел $1 - \mu$ и μ. Действительно, движение допускает (см. § 449) единственное вещественное аналитическое продолжение в момент столкновения (если таковые имеются). Если же имеется бесчисленное множество последовательных столкновений (в моменты t_n), то $|t_n| \to \infty$ при $n \to \infty$ согласно § 460.

Отсюда вытекает, что при всех $-\infty < t < +\infty$ допустима регуляризация произвольного решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ ограниченной задачи трех тел с помощью переменных, рассмотренных в § 459 или в § 453. Также видно, что поскольку моменты столкновения t_n не могут иметь конечную точку сгущения, то регуляризованное время $\bar{t} = \bar{t}(t)$, определяемое согласно (8_2) с точностью до аддитивной постоянной, изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ в случае обоих отображений $z = z(\zeta)$, указанных в §§ 451 и 453.

СИЗИГИЙНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ КРИВАЯ

§ 462. Следующие параграфы (до § 473) посвящены изучению силового поля, создаваемого совместно центробежными и гравитационными силами. Это силовое поле описывается 2-векторфункцией, компоненты которой равны $U_x(x, y)$, $U_y(x, y)$, причем в соответствии с (5_2) § 443

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (1 - \mu)\rho^{-1} + \mu\sigma^{-1}, \qquad (1_1)$$

$$\rho = |(x + \mu)^2 + y^2|^{1/2}, \qquad \sigma = |(x + \mu - 1)^2 + y^2|^{1/2}. \qquad (1_2)$$

Удобно рассматривать $U = U(x, y)$ как поверхность, расположенную над плоскостью (x, y) в пространстве (x, y, U). В соответствии с (1_1)—(1_2) различным μ соответствуют различные поверхности $U = U(x, y)$. Мы исключим предельный случай $\mu = 0$, так что $0 < \mu < 1$.

Из (1_1)—(1_2) видно, что координата U рассматриваемой поверхности всюду положительна и делается равной $+\infty$ только в точках, занимаемых двумя массами:

$$1 - \mu\colon \quad (x, y) = (-\mu, 0), \qquad (2_1)$$

$$\mu\colon \quad (x, y) = (1 - \mu, 0) \qquad (2_2)$$

соответственно, а также стремится к $+\infty$ при $x^2 + y^2 \to +\infty$. Кроме того, эта поверхность симметрична относительно плоскости $y = 0$, так как $U(x, y) = U(x, -y)$ согласно (1_1)—(1_2).

Эта плоскость пересекает потенциальную поверхность $U = U(x, y)$ по кривой $U = U(x, 0)$, располагающейся над осью x, т. е. осью сизигий. Ниже (до § 468) мы будем рассматривать только эту сизигийную потенциальную кривую (с учетом, что она лежит на поверхности, поскольку будет изучаться также функция $U_{yy}(x, 0)$ от x).

§ 463. С помощью (1_1)—(1_2) легко проверить, что

$$U(x, 0) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 - \mu}{|x + \mu|} + \frac{\mu}{|x + \mu - 1|}, \qquad (3_1)$$

$$U_x(x, 0) = x - (1 - \mu)\frac{x + \mu}{|x + \mu|^3} - \mu\frac{x + \mu - 1}{|x + \mu - 1|^3} \qquad (3_2)$$

и что

$$U_{xx}(x, 0) = 1 + \frac{1-\mu}{\frac{1}{2}\rho^3} + \frac{\mu}{\frac{1}{2}\sigma^3}, \tag{4_1}$$

$$U_{yy}(x, 0) = 1 - \frac{1-\mu}{\rho^3} - \frac{\mu}{\sigma^3}, \tag{4_2}$$

$$U_y(x, 0) \equiv 0 \equiv U_{xy}(x, 0), \tag{4_3}$$

поскольку (1_2) сводится к

$$\rho = |x+\mu|, \quad \sigma = |x+\mu-1|.$$

При этом (4_3) является очевидным следствием соотношения $U(x, y) = U(x, -y)$.

Заметим, что две точки (2_1) — (2_2) делят ось x на три области

$$-\infty < x < -\mu, \tag{5_1}$$

$$-\mu < x < 1-\mu, \tag{5_2}$$

$$1-\mu < x < +\infty, \tag{5_3}$$

внутри которых

$$\rho = -(\mu + x), \quad \sigma - \rho = 1, \tag{6_1}$$

$$\rho = \mu + x, \quad \sigma + \rho = 1, \tag{6_2}$$

$$\rho = \mu + x, \quad \rho - \sigma = 1 \tag{6_3}$$

соответственно.

Формулу (3_2) можно записать в областях (5_1), (5_2) в виде

$$U_x(x, 0) = -\mu - \rho + \frac{1-\mu}{\rho^2} + \frac{\mu}{(1+\rho)^2}, \tag{7_1}$$

$$U_x(x, 0) = -\mu + \rho - \frac{1-\mu}{\rho^2} + \frac{\mu}{(1-\rho)^2} \tag{7_2}$$

соответственно. Выражение для $U_x(x, 0)$ в области (5_3) получим из (7_1), заменяя $1-\mu$, ρ, σ, U_x на μ, σ, ρ, $-U_x$ соответственно. В силу такой симметрии всегда достаточно рассматривать лишь первые две вместо всех трех областей (5_1) — (5_3) изменения x.

§ **464.** Мы покажем теперь, что при любом фиксированном значении положительного параметра $\mu (<1)$ функция (3_2) переменной x имеет в каждой из трех областей (5_k) один и только один нуль

$x = x_k$, являющийся, конечно, функцией $x_k(\mu)$ параметра μ. Кроме того, мы покажем, что

$$-1 - \mu < x_1(\mu) < -\mu \tag{8$_1$}$$

$$-\mu < x_2(\mu) < 1 - \mu, \tag{8$_2$}$$

$$1 - \mu < x_3(\mu) < 2 - \mu, \tag{8$_3$}$$

так что расстояние между любой из трех точек $(x, y) = (x_k(\mu), 0)$ на оси x и по крайней мере одним из двух тел P_1, P_2 меньше, чем расстояние между P_1 и P_2, равное единице. Другими словами, если $\rho_k = \rho_k(\mu)$, $\sigma_k = \sigma_k(\mu)$ — расстояния (1_2) от точки $(x, y) = (x_k(\mu), 0)$ до P_1 и P_2, то все три $\min(\rho_k, \sigma_k) < 1$, $k = 1, 2, 3$, при любом μ.

Во-первых, $0 < \mu < 1$, так что производная (4_1) положительна при любом x. Следовательно, функция (3_2) переменной x является возрастающей при любом x. Однако эта функция обращается в бесконечность в двух точках (2_1), (2_2). Так как последние делят ось x на три области (5_k), то функция $U_x(x, 0)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией в каждой из этих областей. Вместе с тем $U_x(x, 0)$ стремится к $-\infty$ или $+\infty$, если x стремится к нижнему или верхнему концу каждого из интервалов (5_k) соответственно. Действительно, (3_2) показывает, что

$$U_x(\pm\infty, 0) = \pm\infty,$$

$$U_x(-\mu + 0, 0) = \mp\infty,$$

$$U_x(1 - \mu, \pm 0, 0) = \mp\infty.$$

Следовательно, $U_x(x, 0)$ принимает в каждом из трех интервалов (5_k) любое значение между $-\infty$ и $+\infty$, в частности нуль, один и только один раз. Этим самым доказано существование и единственность трех $x_k = x_k(\mu)$.

Из этого доказательства видно, что если x принадлежит какому-либо интервалу (5_k), то $U_x(x, 0) \lesseqqgtr 0$ при $x \lesseqqgtr x_k(\mu)$ соответственно. Отсюда вытекает, что точка $x = x_k(\mu)$ делит каждую область (5_k) на две подобласти, причем силовая функция $U(x, 0)$ монотонно убывает в первой и монотонно возрастает во второй из них. Другими словами, положительная функция (3_1), обращающаяся в $+\infty$ на обоих концах любого из интервалов (5_k), имеет при $x = x_k(\mu)$ минимум и выпукла (снизу) в этих интервалах. Поэтому для доказательства того, что точка $x = x_1(\mu)$ интервала (5_1) удовлетворяет неравенству (8_1), достаточно показать, что $U_x(x, 0) < 0$ на конце $x = -1 - \mu$ интервала (8_1). Однако это условие удовлетворяется, поскольку в соответствии с (3_2)

$$U_x(-1-\mu, 0) = -\frac{7}{4}\mu.$$

Этим самым (8_1) доказано. Условие же (8_3) эквивалентно (8_1) согласно сказанному в конце § 463. Наконец, неравенство (8_2) автоматически вытекает из того, что $x = x_2(\mu)$ лежит в интервале (5_2). Этим самым завершается доказательство трех неравенств $\min(\rho_k, \sigma_k) < 1$, $k = 1, 2, 3$, которые эквивалентны неравенствам (8_k), $k = 1, 2, 3$.

§ 464а. Как следствие, получим, что при всех k и μ

$$U_{yy}(x_k(\mu), 0) < 0, \tag{9_1}$$

$$\frac{1-\mu}{\rho_k^3} + \frac{\mu}{\sigma_k^3} > 1. \tag{9_2}$$

Прежде всего (9_1) в силу (4_2) эквивалентно (9_2). Далее, если $k = 1$, то $\sigma_1 = 1 + \rho_1$ в силу (6_1). Следовательно, если $k = 1$, то сумма в левой части (9_2) больше чем $(1-\mu)/\rho_1{}^3 + \mu/\rho_1{}^3$ и таким образом больше 1, если $\rho_1 < 1$. Однако последнее условие вытекает из сказанного в конце § 464. Это доказывает (9_2) при $k = 1$ и, следовательно (см. § 463), также и при $k = 3$. Наконец, при $k = 2$ имеем $\rho_k + \rho_\sigma = 1$ в силу (6_2). Поэтому оба положительных числа ρ_k, σ_k меньше 1 и справедливость (9_2) очевидна.

§ 465. Покажем теперь, что все три $\rho_k(\mu)$ и все три $\sigma_k(\mu)$ являются монотонными функциями μ на всем интервале $0 < \mu < 1$.

В силу сказанного в конце § 463 достаточно доказать это утверждение при $k = 1, 2$. В силу же $(6_1)-(6_2)$

$$\sigma_k(\mu) = 1 \pm \rho_k(\mu).$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\rho_k = \rho_k(\mu)$ имеет конечную и отличную от нуля производную $\dfrac{d\rho_k}{d\mu}$ при $k = 1, 2$ и $0 < \mu < 1$.

С этой целью заметим прежде всего, что в силу $(7_1)-(7_2)$ и определения ρ_k

$$0 = -\mu \mp \rho_k \pm \frac{1-\mu}{\rho_k^2} + \frac{\mu}{(1 \pm \rho_k)^2}, \quad k = 1, 2, \tag{10}$$

где верхний знак соответствует индексу $k = 1$, а нижний — индексу $k = 2$. Дифференцируя тождество (10) по μ, где

$\rho_k = \rho_k(\mu)$, получим

$$\mp 1 - \frac{1}{\rho_k^2} \pm \frac{1}{(1 \pm \rho_k)^2} = \left\{1 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_k^3} + \frac{2\mu}{(1 \pm \rho_k)^3}\right\} \frac{d\rho_k}{d\mu}. \quad (11)$$

Однако $1 \pm \rho_k = \sigma_k > 0$ в силу $(6_1)-(6_2)$, так что коэффициент $\{\ \}$ при $\frac{d\rho_k}{d\mu}$ в правой части (11) положителен. Следовательно, для доказательства существования конечной и не обращающейся в нуль производной $\frac{d\rho_k}{d\mu}$ достаточно показать, что левая часть (11) не может обращаться в нуль. Так как $1 \pm \rho_k = \sigma_k$, $k = 1, 2$, то достаточно доказать неравенства

$$1 - \frac{1}{\sigma_1^2} \neq \frac{1}{\rho_1^2}, \quad 1 - \frac{1}{\rho_2^2} \neq \frac{1}{\sigma_2^2}.$$

Следовательно, требуется лишь доказать, что каждое из трех положительных чисел $1/\sigma_1$, ρ_2, σ_2 меньше 1. На это справедливо, поскольку $1 < 1 + \rho_1 = \sigma_1$ и $\rho_2 + \sigma_2 = 1$ в силу $(6_1)-(6_2)$.

§ 465а. Результат предыдущего параграфа может быть дополнен вычислением предельных значений шести монотонных функций $\rho_k(\mu)$, $\sigma_k(\mu)$ на концах интервала $0 < \mu < 1$. Эти значения следующие:

$$\rho_1(+0) = 1, \quad \rho_1(1-0) = 0, \qquad (12_1)$$

$$\rho_2(+0) = 1, \quad \rho_2(1-0) = 0, \qquad (12_2)$$

$$\sigma_3(+0) = 0, \quad \sigma_3(1-0) = 1, \qquad (12_3)$$

$$\sigma_1(+0) = 2, \quad \sigma_1(1-0) = 1, \qquad (12_1^*)$$

$$\sigma_2(+0) = 0, \quad \sigma_2(1-0) = 1, \qquad (12_2^*)$$

$$\rho_3(+0) = 1, \quad \rho_3(1-0) = 2. \qquad (12_3^*)$$

Действительно, $(12_1)-(12_2)$ получим из (10) при $k = 1, 2$, полагая $\mu \to +0$ и $\mu \to 1-0$. Значение (12_3) следует согласно изложенному в конце § 463 из (12_1). Наконец, значения (12_k^*), $k = 1, 2, 3$, эквивалентны в силу (6_k) значениям (12_k).

§ 466. Определим относительные величины функций $\rho_k(\mu)$, $\sigma_k(\mu)$ для любого фиксированного μ, а именно покажем, что

$$\sigma_3(\mu) \lesseqgtr \rho_1(\mu), \qquad (13_1)$$

$$\sigma_2(\mu) \lesseqgtr \rho_2(\mu), \qquad (13_2)$$

при $\mu \gtreqless {}^1/_2$ и

$$\rho_2(\mu) < \rho_1(\mu) \qquad (14)$$

при $0 < \mu < 1$. В силу упомянутой выше симметрии из соотношений (13_1) и (14) вытекают также и эквивалентные им соотношения.

Прежде всего заметим, что при $\mu = {}^1/_2$ обе массы μ и $1-\mu$ одинаковы. Поэтому (13_1) и (13_2) вытекают из определений, данных в § 464 по соображениям симметрии. Действительно, (12_2^*), (12_3) и (12_1), (12_2) позволяют заключить, что из функций $\sigma_2(\mu)$, $\sigma_3(\mu)$ и $\rho_1(\mu)$, $\rho_2(\mu)$, являющихся согласно сказанному в § 465 монотонными, первые две возрастают, а следующие две убывают.

Для доказательства (14) применим формулу (10), полагая в ней $\mu = {}^1/_2$. Мы получим прежде всего, что $\rho_2({}^1/_2) = {}^1/_2$ и что $\rho_1({}^1/_2)$ является положительным корнем λ уравнения пятой степени $\varphi(\lambda) = 0$, где $\varphi(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$. Поскольку $\varphi({}^2/_3) < 0 < \varphi(1)$, то это уравнение имеет корень, заключенный между ${}^2/_3$ и 1. Этот корень и совпадает с $\rho_1({}^1/_2)$, поскольку коэффициенты полинома $\varphi(\lambda)$ имеют лишь одну перемену знака, что несовместимо с существованием более чем одного положительного корня. Но так как $\rho_2({}^1/_2) = {}^1/_2$, то неравенство (14) справедливо при $\mu = {}^1/_2$. Следовательно, (14) будет справедливым при любом μ в интервале между 0 и 1, если ни при каком μ в этом интервале не имеет места равенство $\rho_1(\mu) = \rho_2(\mu)$. Предположим, что при некотором $\mu = \mu^*$ имеем $\rho_1(\mu^*) = \rho_2(\mu^*) = \rho^*$. Тогда, складывая два уравнения (10), получим, что значение ρ^* должно удовлетворять условию

$$0 = -2\mu^* + \frac{\mu^*}{(1-\rho^*)^2} + \frac{\mu^*}{(1+\rho^*)^2}$$

или

$$\mu^*(1-\rho^*)^2 = \mu^*(1+\rho^{*2}),$$

чего не может быть, так как $\mu^* > 0$, $\rho^* > 0$.

§ 467. В соответствии с § 467 минимум функции $U(x, 0)$ в интервале (5_k) достигается лишь в точке $x = x_k(\mu)$. Покажем теперь, что наибольший из трех относительных минимумов соответствует всегда индексу $k = 2$. Действительно,

$$U(x_l(\mu), 0) < U(x_2(\mu), 0), \quad l = 1, 3, \qquad (15_1)$$

при $0 < \mu < 1$, а

$$U(x_1(\mu), 0) \gtreqless U(x_3(\mu), 0) \qquad (15_2)$$

при $\mu \gtreqless {}^1/_2$ соответственно.

Фиксируем μ и обозначим через θ некоторое число в интервале между 0 и $\rho_1 = \rho_1(\mu)$. Тогда число $-\theta - \mu$ лежит между $-\rho_1(\mu)$ и $-\mu$. Следовательно, число $-\theta - \mu$ принадлежит интервалу (5_1), но не совпадает согласно (6_1) с $x_1(\mu)$. Так как минимум функции $U(x, 0)$ в интервале (5_1) достигается лишь при $x_1(\mu)$, то

$$U(x_1(\mu), 0) < U(-\theta - \mu, 0).$$

Кроме того, из предположения $0 < \theta < \rho_1(\mu)$ вытекает, что $0 < \theta < 1$, поскольку, как было указано в § 464a, $\rho_1(\mu) < 1$ при любом μ. Однако с помощью (3_1) легко проверить, что если θ — некоторое число в интервале между 0 и 1, то разность

$$U(-\theta - \mu, 0) - U(\theta - \mu, 0)$$

равна произведению

$$-(1 + \theta^2)(1 - \theta^2)^{-1}\theta\mu$$

и, следовательно, отрицательна. Таким образом,

$$U(-\theta - \mu, 0) < U(\theta - \mu, 0).$$

Сравнивая неравенства, выписанные в конце двух предыдущих параграфов, увидим, что неравенство

$$U(x_1(\mu), 0) < U(\theta - \mu, 0)$$

имеет место при любом θ в интервале между 0 и $\rho_1(\mu)$. Следовательно, для доказательства (15_1) при $l = 1$ достаточно показать, что значение $x = x_2(\mu)$ лежит между 0 и $\rho_1(\mu)$. Но это гарантируется в силу (6_2) неравенством (14). Отсюда вытекает справедливость неравенства (15_1) при $l = 1$, а в силу симметрии (см. в конце § 463) также и при $l = 3$.

§ **467a.** Покажем теперь, что функция $U(x_3(\mu), 0)$ аргумента μ является монотонно убывающей при $0 < \mu < 1$. Отсюда по соображениям симметрии будет вытекать справедливость неравенства (15_2), поскольку тогда ясно, что функция $U(x_1(\mu), 0)$ аргумента μ будет (опять-таки в силу симметрии) монотонно убывающей в интервале $0 < \mu < 1$.

Таким образом, достаточно показать, что полная производная $\dfrac{dU}{d\mu}$ функции $U(x_3(\mu), 0)$ нигде не принимает положительного значения. Однако эта полная производная совпадает со значением частной производной $U_\mu(x, 0)$ при $x = x_3(\mu)$, поскольку $U_x(x, 0) = 0$ при $x = x_3(\mu)$ по определению (§ 464) величины $x_3(\mu)$. Достаточно показать, что $U_\mu(x_3(\mu), 0) < 0$ при $0 < \mu < 1$.

μ	x_1	$U_{xx}(x_1, 0)$	$U_{yy}(x_1, 0)$
0,01	—1,0042	3,0174	—0,087
0,02	—1,0083	3,0356	—0,0178
0,03	—1,0125	3,0532	—0,0266
0,04	—1,0167	3,0710	—0,0355
0,05	—1,0208	3,0898	—0,449
0,10	—1,0416	3,1834	—0,0917
0,20	—1,0828	3,3856	—0,1928
0,30	—1,1232	3,6086	—0,3043
0,40	—1,1620	3,8584	—0,4292
0,50	—1,1984	4,1396	—0,5698

μ	x_2	$U_{xx}(x_2, 0)$	$U_{yy}(x_2, 0)$
0,01	0,8481	11,1334	—4,0667
0,02	0,8035	11,7846	—4,3923
0,03	0,7696	12,2500	—4,6250
0,04	0,7409	12,6380	—4,8190
0,05	0,7152	12,9658	—4,8929
0,10	0,6090	14,1750	—4,5875
0,20	0,4381	15,5972	—6,2986
0,30	0,2861	16,4154	—6,7077
0,40	0,1416	16,8588	—6,9294
0,50	0,0000	17,0000	—7,0000

μ	x_3	$U_{xx}(x_3, 0)$	$U_{yy}(x_3, 0)$
0,01	1,1468	7,4670	—2,2335
0,02	1,1801	7,1264	—2,0632
0,03	1,2012	6,8944	—1,9472
0,04	1,2164	6,7142	—1,8571
0,05	1,2281	6,5594	—1,7797
0,10	1,2597	6,0134	—1,5067
0,20	1,2710	5,3308	—1,1654
0,30	1,2567	4,8488	—0,9244
0,40	1,2308	4,4640	—0,7320
0,50	1,1484	4,1434	—0,5715

С этой целью положим x равным некоторому значению в интервале (5_3). Тогда в силу (3_1)

$$U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-\mu}{x+\mu} - \frac{\mu}{x+\mu-1},$$

и после вычисления частных производных U_μ, U_x функции U получим

$$U_\mu - U_x = -x - \frac{1}{x+\mu} - \frac{1}{x+\mu-1}.$$

Так как согласно (5_3) имеем

$$0 < x,\ 0 < x + \mu - 1 < x + \mu,$$

то $U_\mu - U_x < 0$ при всех x в интервале (5_3). Этим самым доказательство завершается, поскольку в точке $x = x_3(\mu)$ интервала (5_3) имеем $U_x = 0$.

§ 468. В силу (6_k) любые две из трех функций $x_k(\mu)$, $\rho_k(\mu)$, $\sigma_k(\mu)$ аргумента μ определяют при любом фиксированном k третью. Условие же (10) вместе с (7_3) показывает, что каждая из трех функций $\rho_k(\mu)$ аргумента μ определяется уравнением пятой степени (коэффициенты которого зависят линейно от μ). Значения $x_k(\mu)$, приводимые в таблице на этой странице, были вычислены на основании этих уравнений, а соответствующие значения $U = U(x, 0)$, $U_{xx}(x, 0)$, $U_{yy}(x, 0)$ — на основании (3_1), (4_1), (4_2).

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

§ 469. В §§ 463—468 изучалась симметричная поверхность $U = U(x, y)$ §§ 462 при любом фиксированном μ и вдоль плоскости симметрии $y = 0$. В частности, в § 464 было показано, что сечение этой поверхности плоскостью $y = 0$ представляет собой кривую, выпуклую (снизу) в каждом из трех интервалов (5_k) на оси x, и что функция $U(x, 0)$, обращающаяся в $+\infty$ на обоих концах каждого интервала (5_k), имеет в точках $x = x_k(\mu)$ интервалов (5_k) минимумы. Относительные величины этих трех минимумов определяются неравенствами (15_1), (15_2).

Теперь покажем, что при любом фиксированном в (1_1)—(1_2) значении параметра μ, причем $0 < \mu < 1$:

(*i*) на плоскости (x, y) существуют пять и только пять точек, в которых касательная к поверхности $U = U(x, y)$ плоскость параллельна плоскости (x, y).

(*ii*) эти пять точек на плоскости (x, y) следующие:

$$(x, y) = (x_k(\mu), 0), \quad k = 1, 2, 3, \tag{16$_1$}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2} - \mu, \ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \tag{16$_2$}$$

причем три точки (16_1) — это те, которые были рассмотрены в § 464, а каждая из двух точек (16_2) образует с двумя массами $1 - \mu$ и μ равносторонний треугольник;

(*iii*) матрица Гесса для функции $U(x, y)$ в пяти точках (x, y), удовлетворяющих условиям $U_x = 0 = U_y$, равна

$$\begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}, \tag{17$_1$}$$

где $(x, y) = (x_k(\mu), 0), k = 1, 2, 3$, и

$$\begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{27}}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 - 2\mu \\ 1 - 2\mu & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \tag{17$_2$}$$

где $(x, y) = (^1/_2 - \mu, \pm{}^1/_2\sqrt{3})$ соответственно, причем знаком «$+$» в (17_1) обозначена положительная, а знаком «$-$» — отрицательная функция μ и k;

(*iv*) поверхность $U = U(x, y)$ имеет *) в каждой из трех точек (16_1) седло (следовательно, не имеет относительного экстремума), а в точках (16_2) — отрицательные минимумы;

(*v*) функция $U(x, y) \equiv U(x, -y)$, определенная согласно (1_1)—(1_2), обращается в $+\infty$ в обеих точках (2_1)—(2_2) и при

---

*) В силу индексовых соотношений Биркгофа — Морса для критических точек факты, указанные в пунктах (*iv*)—(*v*), не являются совсем независимыми друг от друга.

$x^2+y^2\to+\infty$, а абсолютный минимум этой функции на плоскости (x, y) достигается в точках (16_2), и он равен $^1/_2(3-\mu+\mu^2)$.

§ 469а. С целью доказать $(i)-(v)$ заметим прежде всего, что дифференцирование функции (1_1) по x и y приводит к формулам

$$U_x=xV+(1-\mu)\mu\left(\frac{1}{\sigma^3}-\frac{1}{\rho^3}\right), \qquad (18_1)$$

$$U_y=yV, \qquad (18_2)$$

где

$$V=1-\frac{1-\mu}{\rho^3}-\frac{\mu}{\sigma^3}. \qquad (18_3)$$

В утверждении (i) говорится о точках (x, y), в которых функции (18_1) и (18_2) обращаются одновременно в нуль. Но функция (18_2) обращается в нуль тогда и только тогда, когда $y=0$ или $V=0$. В первом случае, когда $y=0$, обращение в нуль функции (18_1) означает, что x удовлетворяет условию $U_x(x, 0)$. Сопоставляя это условие с определением $x_k(\mu)$ в § 464, придем к трем точкам (16_1). Во втором случае, когда $V=0$, увидим, что функция (18_1) обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\rho=\sigma$. В силу (18_3) получим, что тогда $\rho=\sigma=1$. Но последнее равенство приводит согласно (1_2) к точкам (16_2), что и доказывает окончательно $(i)-(ii)$.

Формула (17_1) очевидна в силу (4_1), (4_3), (9_1), а (17_2) получим, подставляя (16_2) во вторые производные функции U. Это доказывает (iii). Справедливость же утверждения (iv) вытекает из того, что два характеристических числа матрицы (17_1) имеют противоположные знаки, а оба характеристические числа матрицы (17_2) положительны, причем их значения равны

$$\frac{3}{2}\left(1\pm\sqrt{\{1-3\mu(1-\mu)\}}\right),$$

где $\mu(1-\mu)\leqslant{}^1/_4$, так как $0<\mu<1$.

Наконец, (v) вытекает с очевидностью из (i) и (iv). Значение U в точках (16_2) равно $^1/_2\{3-\mu(1-\mu)\}$ (>0) в силу $(1_1)-(1_2)$.

§ 470. В случае двух равных масс μ, $1-\mu$ поверхность $U=U(x, y)$ имеет наряду с плоскостью симметрии $y=0$ плоскость симметрии $x=0$. Действительно, из $(1_1)-(1_2)$ видно, что если $\mu={}^1/_2$, то не только $U(x,-y)=U(x, y)$, но также $U(-x, y)=U(x, y)$.

В §§ 462—469 были исключены два эквивалентных друг другу предельных случая $\mu=0$ и $\mu=1$. Если $\mu=0$, то $(1_1)-(1_2)$

сводятся к

$$U=\frac{1}{2}\rho^2+\rho^{-1},$$

где $\rho^2=x^2+y^2$. Следовательно, $U=U(x, y)$ представляет собой в этом случае поверхность вращения вокруг оси $x=0=y$. Очевидно, что тогда равенства $U_x=0=U_y$ имеют место не только в пяти точках $(16_1)-(16_2)$, но и в каждой точке окружности $x^2+y^2=1$. Таким образом, если $\mu\to 0$, то на основании (1_2) и $(12_1)-(12_3^*)$ можно заключить, что все пять точек $(16_1)-(16_2)$ стремятся к точкам окружности $x^2+y^2=1$.

Ниже мы будем опять предполагать, что $0<\mu<1$.

§ 471. Рассмотрим поверхность (1_1) в декартовом пространстве (x, y, U) при каком-либо фиксированном μ. Тогда множества $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{Z}_h$, $\mathbf{N}_h$ (см. обозначения, введенные в начале § 167) представляют собой множества тех точек плоскости (x, y), в которых аппликаты U поверхности $U=U(x, y)$ лежат выше плоскости $U=-h$, на ней или ниже ее (h — некоторое вещественное число) соответственно. В частности, $\mathbf{Z}_h$ представляет собой ортогональную проекцию на плоскость (x, y) сечения поверхности $U=U(x, y)$ плоскостью $U=-h$ при условии, что такое сечение существует.

Так как поверхность $U=U(x, y)$ является аналитической (и алгебраической), то топологическая структура $\mathbf{Z}_h$ и областей $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{N}_h$, на которые $\mathbf{Z}_h$ подразделяет плоскость (x, y), остается без изменений, если h варьируется в интервале, в котором нет значений $h=-U(a, b)$, причем (a, b) — критическая точка поверхности, т. е. точка, где $\operatorname{grad} U=0$. В соответствии с $(i)-(ii)$ § 469 имеется пять и только пять таких точек (a, b). Пусть через (a_k, b_k), причем $b_k=0$, $a_1<a_2<a_3$ и $a_4=a_5$, $b_4=-b_5$ обозначены три коллинеарные и две треугольные критические точки (16_1) и (16_2). Предполагая без потери общности, что $\mu\leqslant 1-\mu$, и исключая для удобства предельный случай $\mu=1-\mu$ двух равных масс, придем на основании $(15_1)-(15_2)$ и $(iv)-(v)$ § 469 к выводу, что

$$+\infty>U_2>U_3>U_1>U_4\quad(=U_5=\min U(x, y)>0),$$

где обозначено $U_j=U(a_j, b_j)$, $j=1, \ldots, 5$.

Следовательно, топологическая структура множеств $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{N}_h$, $\mathbf{Z}_h$ не зависит от значения h, пока значение $-h$ лежит внутри четырех интервалов

$$+\infty>-h>U_2;\quad U_2>-h>U_3;\quad U_3>-h>U_1;$$
$$U_1>-h>U_4$$

(третий из этих интервалов не существует в предельном случае $\mu = {}^1/_2$, когда $U_1 = U_3$). Кроме того, $\mathbf{P}_h$ не существует, если $U_4 > -h > -\infty$. Если $-h = U_4 = \min U(x, y)$, то кривая $\mathbf{Z}_h$ вырождается в пару точек (16_2).

§ 472. Кривая $\mathbf{Z}_h$ на плоскости (x, y) определяется уравнением $U(x, y) = -h$. Поэтому, если $-h$ равно большому положительному числу, то $\mathbf{Z}_h$ состоит из трех ветвей, которые обозначим через $\mathbf{B}_h^1$, $\mathbf{B}_h^2$, $\mathbf{B}_h^3$. При этом $\mathbf{B}_h^1$ и $\mathbf{B}_h^2$ представляют собой очень малые, близкие к окружностям замкнутые кривые, окружающие массы μ и $1 - \mu$, а $\mathbf{B}_h^3$ — очень большая замкнутая кривая, близкая к окружности с центром в начале координат. Область $\mathbf{P}_h$ на плоскости (x, y), определяемая неравенством $U(x, y) > -h$, будет состоять из трех отдельных подобластей, заключенных внутри $\mathbf{B}_h^1$, $\mathbf{B}_h^2$ и вне $\mathbf{B}_h^3$ соответственно. Согласно § 471 описанная топология не изменяется, если $-h$, не будучи очень большим, превышает значение U_2, соответствующее седловой точке с наибольшей аппликатой.

Применяя к данному случаю соображения, изложенные в § 372, можно сразу сделать вывод *) о том, что произойдет при прохождении $-h$ через последовательные критические значения U_2, U_3, U_1, $U_4 (= U_5)$. Ситуация иллюстрируется схематически рисунками 14, *а*, *б*, *в*, *г*, которые соответствуют четырем упомянутым в конце § 471 интервалам значений h. Заштрихованные области — это области $\mathbf{N}_h$, а их границы — кривые $\mathbf{Z}_h$. Область P_h исчезает в симметричном случае $\mu = {}^1/_2$.

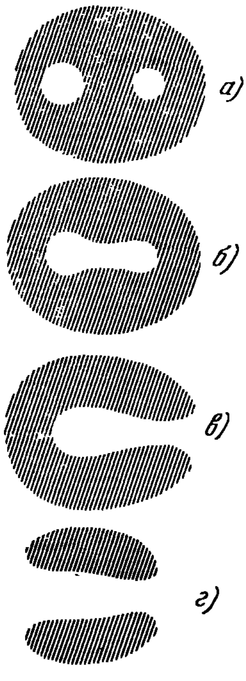

Рис. 14.

§ 473. Сопоставляя (6_2) § 443 с изложенным в § 167, видим, что $\mathbf{Z}_{-{}^1/_2C}$ представляет собой кривую нулевой скорости, соответствующую заданному значению постоянной энергии (7_5) § 443, и что $\mathbf{N}_{-{}^1/_2C}$ = область на плоскости (x, y), запрещенная для любой интегральной кривой, соответствующей заданному значению постоянной Якоби C. Если $h = -{}^1/_2C$ меньше положительного числа ${}^1/_2(3 - \mu + \mu^2)$, упомянутого в конце § 469, то $\mathbf{N}_{-{}^1/_2C}$ — пустое множество (см. конец в § 471), так что

---

*) Детали анализа те же, которые даны ниже в § 496.

область возможного движения, если судить по интегралу энергии, охватывает всю плоскость (x, y).

Здесь применимы общие результаты, изложенные в §§ 167—170 и в §§ 238—240 (надо сказать, что они были впервые установлены именно в связи с ограниченной проблемой трех тел).

§ 474. Легко исследовать равновесные решения ограниченной задачи трех тел, т. е. решения вида $x(t) \equiv a = \text{const}$, $y(t) \equiv b = \text{const}$. Очевидно, что необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют две постоянные a, b, следующие:

$$U_x(x, y) = 0, \qquad U_y(x, y) = 0,$$

если $(x, y) = (a, b)$. Поэтому из (i)—(ii) § 469 следует, что независимо от значения μ $(0 < \mu < 1)$ существует пять и только пять равновесных решений, причем соответствующие пять пар точек $(x, y) = (a, b)$ — это точки (16_1) и (16_2).

Заметим, что эти равновесные решения представляют собой предельные случаи равновесных решений в неограниченной задаче $n = 3$ тел (§ 380), получающиеся при стремлении массы одного тела к нулю. В частности, три уравнения пятой степени, соответствующие (10) и (7_3), получаются из (11) § 358, если положить одно из m_i равным нулю. Аналогичным образом рассуждения, приводимые ниже в §§ 475 и 476, соответствуют §§ 381 и 382 соответственно.

§ 475. Если обозначить через (a, b) одну из пяти точек (16_1)—(16_2), а через $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ — смещение по отношению к решению $x(t) \equiv a$, $y(t) \equiv b$ уравнений (6_1) § 443, то соответствующие уравнения Якоби (см. § 86) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= U_{xx}\xi + U_{xy}\eta, \\ \eta'' + 2\xi' &= U_{xy}\xi + U_{yy}\eta, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где

$$\begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_{xx}(a, b) & U_{xy}(a, b) \\ U_{xy}(a, b) & U_{yy}(a, b) \end{pmatrix} = \text{const}.$$

Для того чтобы получить в каком-либо из пяти случаев четыре характеристических показателя s с помощью процедуры, упомянутой в § 89, требуется определить такие числа s, что уравнения (19) допускают решение вида

$$\xi = Ae^{st}, \qquad \eta = Be^{st},$$

где A, B — выбранные соответствующим образом постоянные, не равные обе нулю. Следовательно, четыре характеристических показателя s определяются из уравнения

$$0 = \begin{vmatrix} s^2 - U_{xx} & -2s - U_{xy} \\ 2s - U_{xy} & s^2 - U_{yy} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv s^4 - (U_{xx} - U_{yy} - 4)s^2 + \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

представляющего собой квадратное уравнение относительно s^2. Обозначая через $(-)$ некоторое отрицательное, а через $(?)$ некоторое вещественное число (каждое из которых зависит от фиксированного значения μ), перепишем (20) на основании (17_1)—(17_2) в виде

$$s^4 + (?)s^2 + (-) = 0, \quad (21_1)$$

$$s^4 + s^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0, \quad (21_2)$$

причем (21_1) относится к случаю, когда точка (a, b) представляет собой одно из коллинеарных либрационных решений (16_1), а (21_2) — к обеим треугольным точкам либрации (16_2).

§ 476. Рассматриваемые два случая отличаются друг от друга:

I) Для любого из трех коллинеарных равновесных решений (16_1) и для любого μ четыре характеристических показателя $s = s(\mu)$ имеют вид $s = \pm\alpha$, $s = \pm i\beta$, где α и β — положительные функции μ. Таким образом, четыре числа s всегда различны и никогда не бывают все устойчивого типа (см. § 89).

II) Для любого из треугольных равновесных решений (16_2) возможны три случая, имеющих место тогда, когда масса одного из двух тел составляет: а) больше, б) точно и в) меньше чем $100(^1/_2 + {}^1/_{18}\sqrt{69})$ процентов общей массы $1 - \mu + \mu = 1$ обоих тел соответственно. (Указанный предельный процент, хотя и ниже, чем в (II) § 382, но все же несколько превышает 96%.) В первом случае все четыре $s = s(\mu)$ устойчивого типа и различны. В третьем случае все $s = s(\mu)$ неустойчивого типа, причем все четыре показателя имеют вид $s = \pm\alpha + i\beta$ и ни одна из положительных функций α, β аргумента μ не обращается в нуль. Во втором случае четыре s имеют вид $s = \pm i\beta_0$, $s = \pm i\beta_0$, где β_0 — одно и то же положительное число. В этом предельном случае общее решение уравнений (19) содержит вековые члены.

Чтобы доказать (I), достаточно показать, что один из корней s^2 квадратного уравнения (21_1) положительный, а другой отрицательный. Однако этот факт очевиден, поскольку свободный член в (21_1) меньше нуля.

Чтобы доказать (II), заметим сначала, что оба корня s^2 квадратного уравнения (21_2) отрицательные или комплексные (но не чисто мнимые), если дискриминант $27\mu(1-\mu)-1$ меньше или больше нуля соответственно. Кроме того, условие $27\mu(1-\mu)-1=0$ для предельного случая эквивалентно, как легко проверить, случаю б) в (II). Следовательно, для полного доказательства (II) достаточно удостовериться в появлении вековых членов в предельном случае $27\mu(1-\mu)-1=0$. Однако такие члены мы получим, если учесть (17_2), при непосредственной интеграции (19).

§ 477. Хотя неравенство $(\mu, 1-\mu) < 0{,}03852\ldots$ является в соответствии с (II) § 476 достаточным (и необходимым) для того, чтобы уравнения в вариациях для треугольных равновесных решений (16_2) были устойчивого типа, но § 136а показывает, что нельзя быть уверенным в устойчивости этих решений, если понимать устойчивость в указанном в § 131 смысле. Проблема об устойчивости (в смысле § 131) этих решений осталась до настоящего времени нерешенной*)). Можно лишь сказать, что если имеет место устойчивость, то она обязана присутствию кориолисовых сил. Другими словами, решения (16_2) ограниченной задачи трех тел оказались бы обязательно неустойчивыми в указанном в § 131 смысле, если в уравнениях (6_1) § 443 были бы опущены члены $-2x'$, $2y'$.

§ 477а. Для того чтобы это доказать, рассмотрим точку равновесия обратимой динамической системы

$$x''=U_x, \quad y''=U_y. \tag{22_1}$$

Без потери общности можно предположить, что эта точка совпадает с началом координат $(x, y)=(0, 0)$ и что $U(0,0)=0$. Тогда, поскольку $\operatorname{grad} U(0,0)=0$, существуют три постоянные a, b, c такие, что

$$\left.\begin{aligned} &U(x,y)=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+\ldots,\\ &U_x=ax+by+\ldots, \quad U_y=bx+cy+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{22_2}$$

где точками заменены члены более высокого порядка. Предположим, что не только сама функция $U(x,y)$, но и ее квадратичная часть имеют в начале координат $(x, y)=(0, 0)$ изолированный минимум, т. е. что $ac-b^2>0$ и $a+c>0$ в (22_2). Мы покажем, что это условие (которое согласно (17_2) удовлетворяется в задаче,

---

*) Эта задача в последнее время решена положительно на основании результатов В. И. Арнольда. (*Прим. перев.*).

рассматриваемой в § 477) является достаточным для того, чтобы равновесное решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ не было устойчивым в указанном в § 131 смысле.

Прежде всего из ограничений, налагаемых на постоянные a, b, c в (22_2), вытекает существование достаточно малого числа $\alpha > 0$ такого, что

$$xU_x(x, y)+yU_y(x, y)>0$$

во всех точках (x, y) круга $\Gamma(\alpha)$: $0 < x^2+y^2 < \alpha^2$. Кроме того, можно выбрать α таким малым, что $U(x, y) > U(0, 0)$, т. е. $U(x, y) > 0$ в любой точке (x, y) круга $\Gamma(\alpha)$.

Предположим теперь, если это возможно, что равновесное решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ устойчиво в указанном в § 131 смысле. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_\varepsilon$ такое, что если (x_0, y_0) — какая-либо точка круга $\Gamma(\delta)$, то интегральная кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$, определяемая начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, существует и остается при всех $-\infty < t < \infty$ внутри круга $\Gamma(\varepsilon)$. Можно, конечно, предположить, что $\delta < \varepsilon < \alpha$. Однако предположение о существовании такого $\delta = \delta_\varepsilon$ сразу приводит к противоречию.

Действительно, для решения $x = x(t)$, $y = y(t)$, определенного начальными условиями $(x_0, y_0, 0, 0)$, постоянная энергии

$$h=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-U(x, y)$$

равна $h = -U(x_0, y_0)$. Следовательно, уравнение кривой нулевой скорости запишется в виде

$$U(x, y)=U(x_0, y_0)$$

и интегральная кривая никогда не может достичь точки (x, y), в которой $U(x, y) < U(x_0, y_0)$. Так как функция $U(x, y)$ имеет в точке $(x, y) = (0, 0)$ изолированный минимум и так как $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то можно утверждать о существовании достаточно малого числа $\eta > 0$, меньшего чем δ и такого, что внутри $\Gamma(\eta)$ нет точек интегральной кривой. Следовательно, интегральная кривая заключена при всех t в кольце $\eta^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \delta^2$. Поскольку это кольцо содержится в $\Gamma(\alpha)$, то из определения α вытекает, что функция

$$xU_x(x, y)+yU_y(x, y)$$

имеет в этом кольце положительный минимум, равный, например, λ. Так как уравнения

$$x''=U_x, \quad y''=U_y$$

влекут за собой соотношение

$$(x^2+y^2)''=2(x'^2+y'^2)+2(xU_x+yU_y),$$

то

$$(x^2+y^2)''\geqslant 2(x'^2+y'^2)+2\lambda$$

при любом t. Следовательно,

$$(x^2+y^2)''\geqslant 2\lambda=\text{const}>0$$

при любом t. Однако отсюда следует, что $x^2+y^2\to+\infty$ при $t\to\pm\infty$.

Очевидно, построение доказательства, эквивалентного приведенному выше, могло бы опираться на непосредственную проверку того факта, что условие, указанное в § 133, не удовлетворяется.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА

§ 478. Рассмотрим ту же самую схему, что и в § 441, но не будем ограничивать начальное положение и вектор начальной скорости тела P плоскостью кругового движения конечных тел P_1, P_2. Таким образом, P не будет всегда оставаться в указанной плоскости и имеет, следовательно, три степени свободы вместо двух. Очевидно, функции $(5_1)-(5_2)$ § 443 нужно заменить следующими:

$$L=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)+(xy'-yx')+U(x,y,z),\qquad (1_1)$$

$$U=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1-\mu}{|(x+\mu)^2+y^2+z^2|^{1/2}}+$$
$$+\frac{\mu}{|(x-1+\mu)^2+y^2+z^2|^{1/2}},\qquad (1_2)$$

где через (x, y, z) обозначены барицентрические синодические координаты P, а вращающаяся плоскость (x, y) совпадает с неподвижной плоскостью, содержащей в себе круговые траектории P_1 и P_2. Три уравнения Лагранжа, соответствующие $(1_1)-(1_2)$, запишутся следующим образом:

$$x''-2y'=U_x,\qquad (2_1)$$

$$y''+2x'=U_y\qquad (2_2)$$

$$z''=U_z,\qquad (2_3)$$

а интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)-U(x,y,z)=\text{const}.\qquad (3)$$

§ 479. Если потребовать, чтобы $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, т. е. чтобы движение P происходило вдоль оси z, то мы придем к элементарному типу движения. Для такого движения

$$U_x(0, 0, z) = 0, \qquad U_y(0, 0, z) = 0$$

в силу (2_1), (2_2). Отсюда получим согласно (1_2), что поскольку $0 < \mu < 1$, то $\mu = 1 - \mu$. Таким образом, тела P_1 и P_2 имеют одну и ту же массу $\mu = {}^1/_2$, а их координаты равны $(x, y, z) = (\pm{}^1/_2, 0, 0)$ при любом t. Так как Р движется, по предположению вдоль оси z, то треугольник, образованный тремя телами, должен быть при любом t равнобедренным.

Для того чтобы найти координату $z = z(t)$ тела P, надо решить уравнение (2_3) при $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ и $\mu = {}^1/_2$. Это уравнение примет тогда согласно (1_2) вид

$$z'' = U_z = -\frac{z}{(z^2 + {}^1/_4)^{3/2}}.$$

Мы придем к уравнению, соответствующему динамической системе с одной степенью свободы, допускающей интеграл энергии

$$\frac{1}{2} z'^2 - U(z) = \text{const}.$$

Отсюда мы и получим $z = z(t)$ после обращения квадратуры (приводящей к эллиптическим функциям).

§ 480. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — некоторая интегральная кривая, не принадлежащая к типу кривых, рассматривавшихся в § 479 $(x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0)$ или в §§ 441—477а $(z(t) \equiv 0)$. Предположим, что

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) \neq 0, \tag{4}$$

и через $P = P(t)$ обозначим при заданном t оскулирующую плоскость интегральной кривой в пространстве (x, y, z). Обозначим через $\iota = \iota(t)$, $\theta = \theta(t)$ эйлеровы углы плоскости $P = P(t)$ по отношению к плоскости (x, y), так что ι — наклонность P, а θ — узел, т. е. угол между осью x и прямой, по которой P пересекает (если $\sin\iota \neq 0$) плоскость (x, y).

Выбирая соответствующим образом направление отсчета этих углов и обозначая через $R = R(t)$ векторное произведение векторов $(x(t), y(t))$ и $(x'(t), y'(t), z'(t))$, получим

$$\left.\begin{aligned} yz' - zy' &= |R|\sin\iota\sin\theta, \\ zx' - xz' &= -|R|\sin\iota\cos\theta, \\ xy' - yx' &= |R|\cos\iota. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Действительно, с одной стороны, величины $-\sin\iota\sin\theta$, $\sin\iota\cos\theta$, $-\cos\iota$ представляют собой направляющие косинусы нормали к плоскости P по отношению к осям x, y, z соответственно. С другой стороны, вектор R перпендикулярен к плоскости P в силу определения P, как оскулирующей плоскости.

Если $\cos\iota\neq 0$, то из (5) вытекает в силу (4), что

$$\left.\begin{aligned} z &= (-x\sin\theta + y\cos\theta)\operatorname{tg}\iota, \\ z' &= (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\operatorname{tg}\iota. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 481. Решения, найденные в § 479, не представляют интереса для астрономии. Заслуживает внимания в приложениях другой крайний случай, когда тело P движется вблизи плоскости (x, y), так что координата $z = z(t)$, не обращаясь тождественно в нуль, остается всегда малой по абсолютной величине.

Для анализа этого случая предположим, что дано плоское решение

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \equiv 0 \tag{7}$$

уравнений (2_1), (2_2), (2_3) или, точнее говоря, уравнений (2_1)—(2_2). Пространственные решения, весьма близкие к этому плоскому решению, можно получить приближенно после замены (2_3) соответствующим уравнением Якоби относительно решения (7). Действительно, если обозначить через $\zeta = \zeta(t)$ смещение для $z(t) \equiv 0$ в указанном в § 86 смысле, то уравнение Якоби получим, пренебрегая в правой части (2_3) членами выше первого порядка относительно z и заменяя x, y, z на $x(t)$, $y(t)$, ζ соответственно. Таким образом, это уравнение, определяющее приближенно $\zeta(t)$, запишется в виде

$$\zeta'' = -f(t)\zeta, \tag{8}$$

где

$$-f(t) = U_{zz}(x(t), y(t), 0).$$

Если $\zeta = \zeta(t)$ — некоторое решение линейного дифференциального уравнения (8), отличное от тривиального $\zeta(t) \equiv 0$, то приближенное пространственное решение уравнений (2_1)—(2_3) представится функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = \zeta(t)$. Точный смысл прилагательного «приближенное» достаточно ясен из §§ 84—86 (см. также § 136).

§ 482. Очевидно, что при предположении, сделанном в § 481, наклонность $\iota = \iota(t)$, введенная в § 480, должна быть очень малой. Поэтому, заменяя z на ζ, можем также заменить (6) следующими формулами:

$$\zeta = (-x\sin\theta + y\cos\theta)\iota, \qquad \zeta' = (-x'\sin\theta + y'\cos\theta)\iota, \tag{9}$$

где x, y и, следовательно, x', y' — функции t, определяемые согласно (7).

Отсюда вытекает, что, исключая тривиальное решение $\zeta(t) \equiv 0$ уравнения (8), можно заменить дифференциальное уравнение второго порядка (8) относительно ζ системой двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно θ и ι. Действительно, из (9) и (4) видно, что якобиан переменных (ζ, ζ') по отношению к (θ, ι) обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\iota = 0$. Однако если функция $\iota = \iota(t)$ обращается при некотором $t = t_0$ в нуль, то в силу (9) также $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. Но решение уравнения (8), отвечающее нулевым начальным условиям $\zeta(t_0) = 0$, $\zeta'(t_0) = 0$, равно $\zeta(t) \equiv 0$.

§ 483. Для того чтобы перейти от (8) к уравнениям относительно эйлеровых углов θ, ι, целесообразно заменить θ, ι их комбинациями

$$u = (xy' - yx')^{1/2}\iota\cos\theta, \qquad v = (xy' - yx')^{1/2}\iota\sin\theta \tag{10}$$

при условии, что отличная от нуля непрерывная функция (4) от t положительна. Изменения, которые следует ввести в (10), если функция (4) отрицательная, очевидны. В соответствии с (10) можно записать (9) в виде

$$\left.\begin{aligned} p &= (xy' - yx')^{-1/2}(yu - xv), \\ q &= (xy' - yx')^{-1/2}(y'u - x'v), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\zeta = p$, $\zeta' = q$. Однако последние формулы определяют линейное преобразование (u, v) в (p, q) с коэффициентами, равными согласно (7) заданным функциям от t, и определителем, равным единице при любом t. Из § 40 следует, то формулы (11) выражают каноническое преобразование с множителем, равным 1. Вместе с тем можно переписать (8) в виде линейной канонической системы с одной степенью свободы и функцией Гамильтона

$$H(p, q, t) = -\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}f(t)p^2, \tag{12}$$

представляющей собой квадратичную форму. Подвергая эту систему линейному каноническому преобразованию (11), получим для u, v линейную каноническую систему, функция Гамильтона которой представляет собой квадратичную форму $K(u, v, t) = H$ плюс остаточная функция. Наконец, явное выражение этой остаточной функции может быть получено из (11) и (4) с помощью правила (17_1)—(17_2) § 38.

§ 483а. В теории Луны рассмотренное уравнение Якоби (8) или эквивалентная каноническая система, в которых опорное плоское решение (7) является периодическим, представляет особый интерес (см. ниже § 517). Этот случай будет исследован в последующих параграфах.

§ 484. Анализ будет опираться на теорему относительно комплексной функции $u + iv \equiv w = w(t)$ вещественной переменной t, принимающей комплексные значения и являющейся почти периодической в смысле Бора. Предположим, что функция $w(t)$ удовлетворяет при всех $-\infty < t < +\infty$ условию $|w(t)| > c$, где c — некоторая положительная постоянная. Тогда функция $w(t) / |w(t)|$ будет почти периодической, равной по модулю 1 при всех t и с частотами, содержащимися в полном спектре частот функции $w(t)$. Положим

$$\frac{w(t)}{|w(t)|} = \exp i\theta(t), \tag{13}$$

так что $\theta(t)$ — вещественная функция, которая может быть выбрана непрерывной и которая определяется после нормализации к некоторому промежутку, например $0 \leqslant \theta(0) < 2\pi$, единственным образом.

Таким образом,

$$\theta(t) = \arg w(t), \tag{14}$$

где $w = u + iv$, так что $(u^2 + v^2)^{1/2}$ и θ суть полярные координаты на плоскости (u, v). Упомянутая выше теорема утверждает, что существует единственная вещественная постоянная ω и единственная вещественная почти периодическая функция $\psi(t)$, для которых $\theta(t) = \omega t + \psi(t)$, и что частоты функции $\psi(t)$ содержатся в полном спектре частот почти периодической функции $\exp i\theta(t) = w(t) / |w(t)|$. Доказательство этой известной общей теоремы мы приводить здесь не будем.

Коэффициент ω «вековой» части ωt функции $\theta(t)$ называется средним движением*) $\theta(t)$. Разумеется, ω, а также ψ могут обращаться иногда в нуль. Очевидно, что если $\psi(t)$ — некоторая вещественная почти периодическая функция и ω — некоторая

---

*) Происхождение этого названия объясняется тем, что если $\theta = \theta(t)$ — абсолютно непрерывная функция и если $\theta(t) / t$ стремится при $t \to \infty$ к конечному пределу ω, то, поскольку

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta'(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\theta(T) - \theta(0)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\theta(t)}{T} = \omega,$$

ω представляет собой среднюю скорость изменения угла $\theta(t)$. По терминологии же, применявшейся в 17 и 18 столетиях, под движением подразумевалась скорость. Таким образом, «среднее движение» = «средней скорости».

постоянная, то $\exp i\theta(t)$, где $\theta(t) = \omega t + \psi(t)$, также представляет собой почти периодическую функцию.

§ 485. Рассмотрим произвольную линейную систему

$$\left.\begin{aligned} u' &= a_{11}(t)u + a_{12}(t)v, \\ v' &= a_{21}(t)u + a_{22}(t)v, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где заданные коэффициенты $a(t)$ — непрерывные вещественные функции, имеющие общий период, например τ. Предположим, что оба характеристических показателя для этой системы принадлежат к устойчивому типу, т. е. что они равны $\pm i\sigma$, где σ — вещественная постоянная, определяемая в зависимости от $a(t)$. Тогда группа монодромии не имеет кратных элементарных делителей, и общее решение системы (15) запишется (см. § 144) в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1A_{11}(t)e^{i\sigma t} + C_2A_{12}(t)e^{-i\sigma t}, \\ v &= C_1A_{21}(t)e^{i\sigma t} + C_2A_{22}(t)e^{-i\sigma t}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $A_{11}(t), \ldots, A_{22}(t)$ — периодические функции с периодом τ, не зависящие от постоянных интегрирования C_1, C_2. Так как требуется рассмотреть лишь вещественные решения системы (15), то можно записать (16) в эквивалентной матричной форме (после выделения вещественных частей произведений $CA(t)e^{\pm i\sigma t}$)

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\sigma t & -\sin\sigma t \\ \sin\sigma t & \cos\sigma t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\alpha(t)$ — вещественные периодические функции с периодом τ, не зависящие от постоянных интегрирования c_1, c_2. Заметим, что произведение матриц в первой части (17) не является вообще периодической функцией t, так как два положительных числа $2\pi/\tau$ и σ не обязательно соизмеримы. Тем не менее вектор (17) не может приближаться сколь угодно близко к нулю при $t \to \pm\infty$, если только исключить из рассмотрения тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ (соответствующее нулевым значениям постоянных интегрирования c_1, c_2).

Для доказательства заметим, во-первых, что второй сомножитель в правой части (17) представляет собой матрицу вращения вектора (c_1, c_2) и им можно, следовательно, пренебречь постольку, поскольку нас интересует только длина $(u^2 + v^2)^{1/2}$ вектора (u, v). Во-вторых, первый сомножитель в правой части (17) представляет собой непрерывную периодическую функцию t. Следовательно, функция $u^2(t) + v^2(t)$ имеет при $-\infty < t < +\infty$ нижнюю границу, равную произведению $c_1^2 + c_2^2$ на число β, причем $\beta = 0$

или $\beta > 0$ соответственно тому, обращается или не обращается непрерывная периодическая функция $\det \alpha_{nm}(t)$ при некотором фиксированном t_0 в нуль. Однако первый случай невозможен. Действительно, $\det \alpha_{nm}(t)$ совпадает тождественно с определителем фундаментальной матрицы, равной произведению двух матриц в правой части (17), так что $\det \alpha_{nm}(t) \neq 0$ при всех t в силу § 138.

Следовательно, существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$u^2(t)+v^2(t) \geqslant (c_1^2+c_2^2)\,\beta.$$

§ 486. Из сказанного выше вытекает, что если $u = u(t)$, $v = v(t)$ — некоторое вещественное решение уравнений (15), отличное от тривиального $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$, то для функции $w(t) = u(t) + iv(t)$ удовлетворяется условие $|w(t)| > \mathrm{const} > 0$, указанное в § 484. Таким образом, полярный угол $\theta = \theta(t)$ на декартовой плоскости (u, v) допускает разложение $\theta(t) = \omega t + \psi(t)$ на вековую и почти периодическую компоненты $\omega(t)$, $\psi(t)$. Кроме того, среднее движение ω и частоты функции $\psi(t)$ — однородные линейные комбинации с целыми коэффициентами двух чисел $2\pi/\tau$, σ (которые могут быть как соизмеримыми, так и несоизмеримыми). Действительно, из (17) видно, что этот факт имеет место для частот функции $w(t) = u(t) + iv(t)$, поскольку функции $\alpha(t)$ имеют период τ.

§ 487. Возвращаясь к проблеме, поставленной в §§ 482—483а, отождествим (15) с канонической системой, найденной в конце § 483. Тогда угол $\theta = \theta(t)$, определяемый в § 484 по формулам

$$u = (u^2+v^2)^{1/2}\cos\theta,$$

$$v = (u^2+v^2)^{1/2}\sin\theta,$$

совпадает с углом $\theta = \theta(t)$, определяемым согласно (10) § 483, где

$$(u^2+v^2)^{1/2} = \pm(xy'-yx')^{1/2}\tau\,.$$

Аналогичным образом результаты, изложенные в § 486, относятся к узлу $\theta = \theta(t)$ (см. §§ 480—483а).

§ 488. Можно упомянуть, что с формальной точки зрения проблема интеграции уравнений (15) упрощается после введения полярных координат

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \qquad r = (u^2+v^2)^{1/2}.$$

Действительно, поскольку

$$uv' - vu' = r^2\theta',$$

$$uu' + vv' = rr',$$

то (15) можно переписать в виде

$$\theta' = a_{21}(t)\cos^2\theta + \{a_{22}(t) - a_{11}(t)\}\cos\theta\sin\theta - a_{12}(t)\sin^2\theta, \qquad (18_1)$$

$$(\lg r)' = a_{11}(t)\cos^2\theta + \{a_{12}(t) + a_{21}(t)\}\cos\theta\sin\theta + a_{22}(t)\sin^2\theta. (18_2)$$

Заметим, что правая часть каждого из этих дифференциальных уравнений является периодической как по θ, так и по t, и поэтому ее можно рассматривать как непрерывную функцию положения на торе (θ, t).

Если решение $\theta = \theta(t)$ дифференциального уравнения (18_1) известно, то $r = r(t)$ найдется согласно (18_2) с помощью квадратуры. Заметим, что (18_1) можно записать в виде дифференциального уравнения Риккати относительно $e^{2i\theta}$.

Нетрудно обнаружить, что если уравнения (15) канонические, например

$$u' = -K_v, \qquad v' = K_u,$$

где $K = K(u, v, t)$ — квадратичная форма относительно u и v, то (18_1) сводится к уравнению

$$\theta' = 2K(\cos\theta, \sin\theta, t).$$

СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ

§ 489. В соответствии с изложенным в § 443 ограниченная задача трех тел может быть представлена уравнениями

$$x'' - 2y' = U_x, \qquad y'' + 2x' = U_y, \qquad (1_1)$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{|(x+\mu)^2 + y^2|^{1/2}} + \frac{\mu}{|(x+\mu-1)^2 + y^2|^{1/2}}, \qquad (1_2)$$

причем начало вращающейся системы координат (x, y) находится в центре масс двух тел μ, $1-\mu$, имеющих координаты $(1-\mu, 0)$, $(-\mu, 0)$ соответственно. Следовательно, если начало координатной системы перенести в точку, где находится масса μ, то координаты x, y третьего тела надо заменить на $\xi = x - (1-\mu)$, $\eta = y$.

Выполняя такую подстановку в (1_1)—(1_2) и обозначая опять переменные через x, y (вместо ξ, η), увидим, что уравнения (1_1) сохранят полностью свой вид, а функция (1_2) заменится следующей:

$$U=\frac{1}{2}(1-\mu)^2+(1-\mu)x+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+$$
$$+(1-\mu)(1+2x+x^2+y^2)^{-1/2}+\mu(x^2+y^2)^{-1/2}. \qquad (2)$$

Тела с массами μ, $1-\mu$ будут иметь теперь координаты
$$(x, y)=(0, 0), \qquad (x, y)=(-1, 0)$$
соответственно.

Следующие ниже соображения относятся к случаю, когда порядки встречающихся расстояний и масс такие же, как и в задаче, в которой μ обозначает Землю, $1-\mu$ — Солнце, а третьим телом с координатами (x, y) является Луна.

§ 490. Предположим, что третье тело движется в области, точки которой более или менее близки к неизменному положению $(0, 0)$ тела μ, и что поэтому можно пренебречь в (1_1) всеми членами, имеющими по крайней мере второй порядок относительно $(x^2+y^2)^{1/2}$, т. е. относительно $|x|+|y|$. Тогда мы должны отбросить в (2) те члены, которые имеют по крайней мере третий порядок относительно $|x|+|y|$. По формуле для бинома мы получим тогда, что

$$(1+2x+x^2+y^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}(2x+x^2+y^2)+\frac{3}{8}(2x+\ldots)^2-\ldots$$

Подставляя это выражение в (2), увидим, что с требуемой точностью аппроксимации

$$U=\mathrm{const}+\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2)+\frac{3}{2}(1-\mu)x^2+\mu(x^2+y^2)^{-1/2}, \qquad (3)$$
$$\mathrm{const}=\frac{1}{2}(1-\mu)^2+1-\mu.$$

§ 490a. Выбор единиц в §§ 489—490 такой же, как и в § 441. Эти единицы связаны, однако, с третьим законом Кеплера (см. § 276). Поскольку этот закон теряет свою силу после перехода от (1_2) или (2) к приближенному выражению (3), необходимо рассмотреть этот вопрос непосредственно.

С этой целью изменим единицы расстояния, массы и времени в пропорциях $1:\alpha$, $1:\beta$, $1:1$ соответственно, причем α и β — произвольные положительные постоянные. Другими словами, подстаним (3) в (1_1) и заменим x, y, μ, $1-\mu$ на αx, αy, $\beta\mu$, $\beta(1-\mu)$ соответственно. Разделив после этого все члены на α, придем к уравнениям

$$x''-2y'=\beta\mu x+3\beta(1-\mu)x-\alpha^{-3}\beta x(x^2+y^2)^{-3/2},$$
$$y''+2x'=\beta\mu y-\alpha^{-3}\beta y(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

§ **491.** Эти уравнения эквивалентны, конечно, уравнениям (1_1) в случае (3), и поэтому в § 490а сохраняется предположение, сделанное в § 490, а именно то, что третье тело движется в области, более или менее близкой к первому телу, находящемуся в точке $(x,\ y)=(0,0)$ и имеющему в выбранных единицах массу $\beta\mu$. Предположим теперь, что масса $\beta\mu$ очень мала по сравнению с массой $\beta(1-\mu)$ второго тела. Тогда, поскольку $|x|$ и $|y|$, по предположению, малы, уравнения, выписанные в конце § 490а, аппроксимируются следующими:

$$x''-2y'=3\beta(1-\mu)x-\alpha^{-3}\beta x(x^2+y^2)^{-3/2},$$
$$y''+2x'=-\alpha^{-3}\beta y(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Очевидно, последние уравнения можно записать в виде (1_1), если положить

$$U=\frac{3}{2}\beta(1-\mu)x^2+\alpha^{-3}\beta(x^2+y^2)^{-1/2}.$$

Определяя далее единицы расстояния и массы, оставшиеся после введения в § 490а множителей α, β произвольными, с помощью условий

$$\alpha=(1-\mu)^{-1/3},\qquad \beta=(1-\mu)^{-1},$$

запишем U в виде

$$U=\frac{3}{2}x^2+(x^2+y^2)^{-1/2}. \tag{4}$$

§ **492.** Используя интерпретацию, данную в конце § 489, можно сказать, что дополнение в § 491 к условию, принятому в § 490, эквивалентно в силу третьего закона Кеплера предположению о том, что расстояние между Землей и Солнцем очень велико. В то же время согласно предположению в § 490 расстояние между Луной и Землей относительно мало. Следовательно, используя терминологию теории Луны, скажем, что при переходе от (3) к приближенному выражению (4) пренебрегают параллаксом Солнца и что это не имеет места при аппроксимировании функции (1_2) выражением (3). При переходе от (3) к (4) пренебрегают, однако, вторыми и более высокими степенями этого параллакса.

Разумеется, параллакс может быть грубо определен как отношение между расстояниями Луна — Земля и Земля — Солнце.

§ 493. Уравнения (1_1), где U определяется формулой (4), лежат в основе современной теории Луны. Эта задача с двумя степенями свободы называется задачей Хилла и представляет предельный случай ограниченной задачи трех тел.

С аналитической точки зрения различие между уравнениями вида (1_1), в которых функция U выражается формулой (3) или (4), едва ли ощутимо. Вместе с тем единственное формальное различие между (3) и (2) состоит в том, что (2) имеет две особые точки $(x, y) = (0, 0)$ и $(x, y) = (-1, 0)$, а (3) имеет лишь одну особую точку $(x, y) = (0, 0)$. Поэтому большинство из главных математических проблем общего характера, которые возникают для уравнений (1_1) в случаях (1_2) или (2), остаются также и в случае (4). В последнем случае

$$x'' - 2y' = U_x, \qquad y'' + 2x' = U_y \tag{5_1}$$

и

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - U(x, y) = -\frac{1}{2}C, \tag{5_2}$$

где соотношение (5_2) представляет собой интеграл энергии уравнений (5_1), причем постоянная C называется, как и в случае, рассмотренном в § 443, постоянной Якоби.

Тот факт, что функция (4), выписанная в (5_1) и (5_2), имеет лишь одну особую точку $(x, y) = (0, 0)$, соответствующую положению Земли, позволяет исключить особенность в (5_1) (обусловленную членом $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ и его производными) с помощью (5_2). Действительно, с учетом (4) и с помощью (5_2) нетрудно записать (5_1) в виде

$$\left.\begin{aligned} xy'' - yx'' + 2xx' + 2yy' + 3xy = 0,\\ xx'' + yy'' + 2yx' - 2xy' + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}C = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где левые части не содержат особых точек. Соотношение (5_2) является инвариантным соотношением (§ 80) не только для (5_1), но и для (6).

§ 494. Из вывода выражения (4) видно, что в предельном случае (2) тело с большой массой $1 - \mu$ можно рассматривать расположенным на оси сизигий $y = 0$ в бесконечности $(x = -\infty)$.

В силу этого замечания ясно, что третья из коллинеарных точек (16_1) и обе треугольные точки либрации (16_2) § 469 исчезают. Действительно, из (4) легко найти, что $U_x = 0 = U_y$ лишь в паре точек $(x, y) = (\pm 3^{-1/3}, 0)$, соответствующих, очевидно, первым двум из трех точек (16_1) § 469. Функция $U(x, y)$ имеет в каждой из этих точек седло, так как матрица Гесса для (4) представится при $(x, y) = (\pm 3^{-1/3}, 0)$, как нетрудно видеть, в виде (17_1) § 469, причем $+ = 9$, $- = -3$.

Подставляя эти значения в (19) — (20) § 475, увидим, что уравнение (21_1) § 475 сохраняет свой вид, причем $(?) = -2$, $(—) = -27$. Таким образом, четыре характеристических показателя s для двух существующих равновесных решений $x(t) \equiv \pm 3^{-1/3}$, $y(t) \equiv 0$ равны $s = \pm\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$, $s = \pm i\sqrt{-1 + 2\sqrt{7}}$. Это согласуется с (I) § 476.

§ 495. Функция (4), принимающая всюду положительные значения, стремится к 0 при стремлении $x^2 + y^2$ к $+\infty$ вдоль оси y. Вместе с тем (4) стремится к $+\infty$ при $x^2 + y^2 \to +\infty$ вдоль любой полупрямой, отличной от оси y, причем равномерно для любого замкнутого множества таких полупрямых на плоскости (x, y). Кроме того, (4) обращается в $+\infty$ в начале координат $(x, y) = (0, 0)$, а поверхность $U = U(x, y)$ в пространстве (x, y, U) симметрична по отношению к обеим плоскостям $x = 0$, $y = 0$. В соответствии с § 494 касательная плоскость к этой поверхности параллельна плоскости (x, y) лишь в двух точках $(x, y) = (\pm 3^{-1/3}, 0)$. В этих точках поверхность $U = U(x, y)$ имеет седло, а матрица Гесса в них неопределенна. Согласно (4) аппликата U в этих точках равна ${}^3/_2\sqrt[3]{3}$.

§ 496. Обозначим, как и в § 471, $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{Z}_h$, $\mathbf{N}_h$ множества тех точек на плоскости (x, y), где аппликата U поверхности $U = U(x, y)$ больше, равна или меньше аппликаты плоскости $U = -h$ соответственно (h — фиксированное вещественное число).

Если $0 \leqslant h < +\infty$, то $\mathbf{P}_h$ и $\mathbf{Z}_h$ — пустые множества ($\mathbf{N}_h$ совпадает со всей плоскостью), так как функция (4) всюду положительна.

Если $-\infty < h < 0$, то топологическая структура областей $\mathbf{P}_h$, $\mathbf{N}_h$ и их границы $\mathbf{Z}_h$ зависит лишь от того, будет ли постоянная $-h$ меньше, больше или равной критическому значению ${}^3/_2\sqrt[3]{3}$. Действительно, значение ${}^3/_2\sqrt[3]{3}$ является согласно § 495 единственным, совпадающим с аппликатой критических точек поверхности, т. е. точек, для которых касательная плоскость параллельна плоскости (x, y) и где $\operatorname{grad} U = 0$.

Во всех трех возможных при $-\infty < h < 0$ случаях $-h \lesseqgtr {}^3/_2\sqrt[3]{3}$ мы увидим из § 495, что кривая $\mathbf{Z}_h : U(x, y) = -h$

симметрична относительно обеих координатных осей и что она должна обладать асимптотами, параллельными оси y. Согласно (4) асимптотами являются две прямые $x = \pm(-{}^{2}/_{3}h)^{1/2}$. Из (4) также видно, что во всех трех случаях, возможных при $-\infty < h < 0$, кривая $\mathbf{Z}_h$ пересекает ось y в двух точках: $(x, y) = (0, +h^{-1})$ и $(x, y) = (0, -h^{-1})$. В то же время пары точек $(\pm|x_0|, 0)$ кривой $\mathbf{Z}_h$ на оси x определятся кубическим уравнением

$$|x_0|^3 + \frac{2}{3}h|x_0| + \frac{2}{3} = 0,$$

где $|x_0| > 0$. Так как дискриминант

$$-4\left(\frac{2}{3}h\right)^3 - 27\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

имеет тот же знак, что и число $-h - {}^{3}/_{2}\sqrt[3]{3}$, то количество пар $(\pm|x_0|, 0)$ точек $\mathbf{Z}_h$ на оси x равно 0, 1 или 2 при $-h \gtreqless {}^{3}/_{2}\sqrt[3]{3}$ соответственно.

§ 497. Эти три случая схематически представлены на рис. 15, *а*, *б*, *в* *). Через C обозначена постоянная, равная $-2h$, а вещественные ветви алгебраической кривой $\mathbf{Z}_{-{}^{1}/_{2}C}$: $U(x, y) = {}^{1}/_{2}C$ представлены границей между заштрихованными и незаштрихованными областями, представляющими множества $\mathbf{P}_{-{}^{1}/_{2}C}$ и $\mathbf{N}_{-{}^{1}/_{2}C}$ соответственно.

В силу (5_2) ветви кривой $\mathbf{Z}_{-{}^{1}/_{2}C}$, где $0 < C < +\infty$, представляют собой кривую нулевой скорости, соответствующую фиксированной постоянной энергии $h = -{}^{1}/_{2}C$. Незаштрихованные же области, т. е. $\mathbf{N}_{-{}^{1}/_{2}C}$, устраняются в соответствии с интегралом энергии (см. § 167).

Из § 492 видно, что в силу предположений, лежащих в основе замены (2) на (4), астрономическое значение имеет лишь случай, в котором траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$ Луны всегда располагается в окрестности Земли, находящейся в начале координат $(0, 0)$. В соответствии с рис. 15, *а*, *б*, *в* это будет лишь тогда, когда C велико и, кроме того, начальное положение Луны выбрано внутри той из трех заштрихованных на рис. 15, *а* областей, которая окружена областью $\mathbf{P}_{-{}^{1}/_{2}C}$ (т. е. внутри заштрихованной области, окружающей начало координат). Эта область приближенно совпадает

---

*) Рис. 14, *а*, *б*, *в*, *г* § 472 соответствуют лишь рис. 15, *а*, *б*, поскольку рис. 15, *б* соответствует трем предельным случаям при переходе от одного к другому из четырех типов, представленных на рис. 14, *а*, *б*, *в*, *г* (предельные случаи на рисунках в § 472 не иллюстрируются). Заштрихованные области представляют собой на рис. 15, *а*, *б*, *в* допустимые области, а на рис. 14, *а*, *б*, *в*, *г* — запрещенные области.

в силу (4) с внутренней частью круга $(x^2+y^2)^{-1/2} = {}^1/_2C$ радиуса $2C^{-1}(\to 0)$ с центром в Земле.

§ 498. Для того чтобы регуляризировать $(5_1)-(5_2)$ при каком-либо фиксированном C $(-\infty < C < +\infty)$, (6) можно заменить

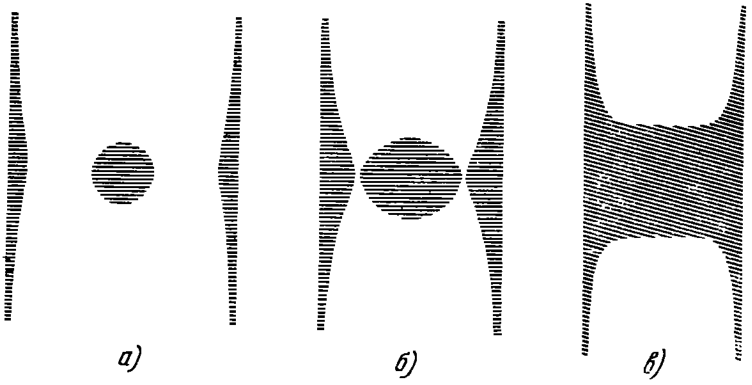

Рис. 15.

уравнениями, получающимися после применения к силовой функции (4) параболического отображения, использовавшегося в § 446,

$$x + iy \equiv z = \zeta^2 \equiv (\xi + i\eta)^2 \tag{7}$$

или

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta \quad (\text{см. § 54}).$$

Действительно, тогда $(9_1)-(9_2)$ § 446 запишутся в виде

$$\xi^2 + \dot{\eta}^2 = 2\bar{U}\left(\xi, \eta, -\frac{1}{2}C\right), \tag{8_1}$$

$$\bar{U} = 4 - 2(\xi^2+\eta^2)C + 6(\xi^2-\eta^2)^2(\xi^2+\eta^2), \tag{8_2}$$

а $(8_1)-(8_2)$ § 446 сведутся в соответствии с $(10_1)-(10_2)$ § 447 к

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} - 8(\xi^2+\eta^2)\dot{\eta} &= \bar{U}_\xi, \\ \ddot{\eta} + 8(\xi^2+\eta^2)\dot{\xi} &= \bar{U}_\eta, \end{aligned}\right\} \tag{9_1}$$

$$\dot{t} = 4(\xi^2+\eta^2), \tag{9_2}$$

где точками обозначается дифференцирование по переменной $\bar{t} = \bar{t}(t)$, определяемой из (9_2) обращением интеграла.

Сравнение (8_2) и (12) § 447 показывает, что формулы, приведенные в § 448, остаются справедливыми и при $\mu = 0$. Таким образом, если столкновение Луны $(\xi(t), \eta(t))$ с Землей $(\xi, \eta) = (0, 0)$ имеет место при $t = 0$ и если начало отсчета $\bar{t}$ выбрано так, что оно соответствует значению $t = 0$, то в силу (13)—(16) § 448

$$\xi = (8^{1/2}\cos\gamma)\,\bar{t} + \ldots, \qquad \eta = (8^{1/2}\sin\gamma)\,\bar{t} + \ldots, \tag{10_1}$$

$$t = \frac{32}{3}\bar{t}^3 + \ldots \tag{10_2}$$

где γ — постоянная интегрирования и $\bar{t} \gtreqless 0$ достаточно мало. Выводы, сделанные в §§ 448—450 на основании такой униформизации особой точки в момент столкновения $t = 0$, сохраняют свою силу. С соответствующими очевидными изменениями (и упрощениями) могут быть также повторены рассуждения, приводившиеся в §§ 445—461.

§ 499. В силу изложенного в §§ 180 и 231а взаимосвязь между (5_1) и (9_1) сводится к тому, что если исключить пару равновесных решений $x(t) = \pm 3^{-1/3}$, $y(t) \equiv 0$ (§ 494), то решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнений (5_1), соответствующие фиксированному значению постоянной энергии (5_2), эквивалентны в силу (7) и (9_2) тем решениям $\xi = \xi(\bar{t})$, $\eta = \eta(\bar{t})$ уравнений (9_1), которые удовлетворяют инвариантному соотношению (8_1). Другими словами, вместо того чтобы рассматривать четырехмерное пространство $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$, т. е. фазовое (в указанном в § 16 смысле) пространство, можно рассматривать трехмерную изоэнергетическую гиперповерхность $\mathbf{F} = \mathbf{F}_C$, соответствующую фиксированному значению C. Эта поверхность определяется в указанном фазовом пространстве уравнением (8_1) или (если учесть (8_2)) уравнением

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 4(\xi^2 + \eta^2)\{C - 3(\xi^2 - \eta^2)^2\} = 8. \tag{11}$$

Поскольку параболическое отображение (7) таково, что точки (ξ, η) и $(-\xi, -\eta)$ соответствуют одной и той же точке (x, y), при определении «точек» гиперповерхности $\mathbf{F}_C$ подразумевается, что если $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ — точка на $\mathbf{F}_C$, то координаты $(-\dot{\xi}, -\dot{\eta}, -\xi, -\eta)$ соответствуют той же самой точке поверхности $\mathbf{F}_C$.

Так как начальные значения скоростей могут быть выбраны произвольно, то из (7) видно, что изоэнергетическое трехмерное множество $\mathbf{F}_C$ в четырехмерном пространстве $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ состоит из такого же числа не связанных друг с другом частей (компонент), как и двумерная область (x, y), обозначавшаяся в § 496 через $\mathbf{P}_h$, где $h = -{}^1/{}_2\, C$.

§ 500. Предположим, что рассматривается случай $3^{4/3} < C < +\infty$, соответствующий рис. 15, *а*. Обозначим через $\mathbf{F}_C{}^*$ ту из трех компонент $\mathbf{F}_C$, которая имеет астрономическое значение в указанном в § 497 смысле. Тогда множество возможных изоэнергетических состояний $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ движения, представляемых точками $\mathbf{F}_C{}^*$, топологически эквивалентны трехмерному (вещественному) проективному пространству.

Для того чтобы это доказать, заметим прежде всего, что при всех $C > 3^{4/3}$ топологическая структура $\mathbf{F}_C{}^*$ остается одной и той же. Это сразу вытекает или из соответствующего замечания, сделанного в § 472 по поводу критического значения $\frac{3}{2}\sqrt[3]{3}$ (§§ 495—496) постоянной $-h = {}^1/_2 C$, или же более непосредственно из анализа ранга матрицы частных производных (11). Таким образом, можно считать, что фиксированное C не только больше $3^{4/3}$, но равно большому положительному числу. Но тогда применимо последнее замечание, сделанное в § 497, из которого в силу (7) вытекает, что множество тех точек плоскости (ξ, η), для которых точка $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ четырехмерного пространства принадлежит при подходящих $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ трехмерному многообразию $\mathbf{F}_C{}^*$, представляет собой односвязную область, приближенно совпадающую с небольшим кругом $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 2C^{-1} (\to 0)$ вокруг начала координат на плоскости (ξ, η). Таким образом, если C — большое положительное число, то $|\xi|$ и $|\eta|$ равномерно малы для всех точек $\mathbf{F}_C{}^*$, а поэтому выражение $\{\ \ \}$ в (11) превосходит на $\mathbf{F}_C{}^*$ положительный нижний предел. Следовательно, полагая

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= 2\xi\,\{C - 3(\xi^2 - \eta^2)^2\}^{1/2}, \\ \tau &= 2\eta\,\{C - 3(\xi^2 - \eta^2)^2\}^{1/2}, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где $\{\ \ \}^{1/2} > \mathrm{const} > 0$, увидим, что уравнение (11) для $\mathbf{F}_C{}^*$ можно записать в виде

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 8.$$

Мы пришли, таким образом, к уравнению трехмерной гиперсферы $\mathbf{S}$ в четырехмерном пространстве $(\xi, \dot{\eta}, \sigma, \tau)$. Однако соответствие между точками гиперповерхности $\mathbf{F}_C{}^*$ и гиперсферы $\mathbf{S}$ не оказывается взаимно однозначным. Как было указано в § 499, изоэнергетические состояния $(\xi, \dot{\eta}, \xi, \eta)$ и $(-\dot{\xi}, -\dot{\eta}, -\xi, -\eta)$ изображаются одной и той же точкой на $\mathbf{F}_C{}^*$. В соответствии с (12) это приводит к отождествлению двух различных точек $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \sigma, \tau)$, $(-\dot{\xi}, -\dot{\eta}, -\sigma, -\tau)$ на $\mathbf{S}$.

Таким образом, точки $\mathbf{F}_C{}^*$ находятся в непрерывном взаимно однозначном соответствии с точками многообразия $\mathbf{S}^*$, которое получим при условии отождествления диаметрально противоположных точек гиперсферы $\mathbf{S}$. Однако это многообразие $\mathbf{S}^*$ совпадает с многообразием всех прямых, проходящих через центр S. Так как S представляет собой трехмерное проективное пространство, то на этом доказательство полностью заканчивается.

Можно упомянуть, что в силу непрерывности доказательство и результат остаются без изменений, если заменить (4) на (2) и не исключать предельный случай $\mu = 0$ (§ 300).

§ 501. Отождествляя (6_1)—(6_2) § 229 и (8_1)—(9_1) § 498, а также (21) § 232 и (11) § 499, увидим, что результаты § 232 применимы. Следовательно, те решения $\dot\xi = \dot\xi(\bar t)$, $\dot\eta = \dot\eta(\bar t)$, $\xi = \xi(\bar t)$, $\eta = \eta(t)$ уравнений (9_1) § 498, которые образуют трехмерное многообразие $\mathrm{F}_C{}^*$, можно получить при рассмотрении системы

$$\dot\xi = \Xi(\xi, \eta, \omega, C), \qquad \dot\eta = \mathrm{H}(\xi, \eta, \omega, C), \qquad \dot\omega = \Omega(\xi, \eta, \omega, C) \tag{13}$$

трех дифференциальных уравнений первого порядка для трех переменных ξ, η, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}$ (см. (24) § 232).

В силу (25) § 232 эта система удовлетворяет условию несжимаемости, приведенному в § 122. Так как (13) получено из (9_1) в результате изоэнергетической редукции, то из § 81 видно, что $\mathrm{F}_C{}^*$ представляет собой для (13) инвариантное множество. Последнее же замечание в § 498 позволяет сделать вывод, что все решения можно рассматривать как неограниченно продолжаемые в смысле, указанном в § 119. Поэтому $\mathrm{F}_C{}^*$ является для уравнений (13) инвариантным неограниченно продолжаемым множеством. Итак, (13) удовлетворяют всем условиям, указанным в §§ 120—121.

§ 501а. Наконец в существенном для астрономии случае $\mathrm{F}_C{}^*$ удовлетворяется также и остающееся предположение, указанное в условии эргодической теоремы (§§ 123—124).

Действительно, это предположение заключается в том, что мера (евклидова) объема пространства (ξ, η) для (13) должна быть конечна. Однако ω — угловая переменная, приведенная к $\operatorname{mod} 2\pi$, так что достаточно показать, что допустимое двумерное пространство (ξ, η) имеет конечную евклидову площадь. Однако в существенном для астрономии случае это условие удовлетворяется, поскольку в этом случае, как это видно из § 497, допустимое пространство оказывается практически равным небольшому кругу $x^2 + y^2 \leqslant 4C^{-2}$, соответствующему согласно (7) двум кругам $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 2C^{-1}$ на плоскости (ξ, η).

§ 502. Заменяя ограниченную задачу трех тел пространственной схемой, рассмотренной в § 478, и повторяя рассуждения, которые привели в §§ 489—492 к (4) — (5_1), легко найдем, что (4) следует заменить функцией

$$U=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2-(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, \tag{14}$$

а (5_1) — уравнениями (2_1) — (2_3) § 478.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ОРБИТА ЛУНЫ

§ 503. Исходной точкой современной теории Луны является некоторое решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ уравнений (5_1) § 493. Это решение, найденное Хиллом, представляет движение, симметричное по отношению к обеим координатным осям $x=0$, $y=0$ и периодическое относительно t с периодом τ, который является постоянной интегрирования уравнений (5_1) § 493. Если выбрать начало отсчета t так, что Луна расположена при $t=0$ на оси x вправо от начала координат и, следовательно, $x(0)>0$, $y(0)=0$, то требуемые условия симметрии представятся четырьмя равенствами

$$\left.\begin{aligned} x(-t)&=x(t)=-x\left(t+\frac{1}{2}\tau\right),\\ -y(-t)&=y(t)=-y\left(t+\frac{1}{2}\tau\right).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Согласно этим равенствам разложения периодического решения в ряды Фурье

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'(\alpha_n\cos\nu nt+\beta_n\sin\nu nt),$$

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'(\gamma_n\cos\nu nt+\delta_n\sin\nu nt),$$

где $\nu=2\pi/\tau$, должны быть таковы, что не только $\beta_n=\gamma_n=0$, но также $\alpha_{2n}=0$, $\delta_{2n}=0$ при всех n. Таким образом, если $\alpha_{2n+1}=A_n$, $\beta_{2n+1}=B_n$, то

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(2n+1)\frac{t}{m},\\ y(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin(2n+1)\frac{t}{m},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\tau=2\pi m, \qquad m=1/\nu.$$

Заменяя A_n, B_n их линейными комбинациями

$$2a_n = A_n + B_n, \qquad 2a_{-n-1} = A_n - B_n, \tag{2a}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, запишем (2) в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos(2k+1)\frac{t}{m}, \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sin(2k+1)\frac{t}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$m = \tau : 2\pi.$$

Конечно, существо проблемы заключается в нахождении решений $x = x(t)$, $y = y(t)$, имеющих вид (2) или (3), где период $\tau = 2\pi m$ есть постоянная интегрирования, определяющая амплитуды

$$a_k = a_k(m), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Эти решения уравнений (5_1) § 493 образуют искомое однопараметрическое семейство решений.

§ 504. Операции, приводящие к этому семейству периодических решений, подчиняются непосредственно программе, указываемой вполне четко, поскольку ее можно описать следующим образом.

Подставляя ряды Фурье (3) в дифференциальные уравнения (5_1) § 493, придем после приравнивания коэффициентов при $\cos(kt/m)$, $\sin(kt/m)$ при всех k в бесконечной системе алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов (4). Обозначим эту бесконечную систему через (S), так что (S) содержит все неизвестные функции (4) и параметр m, который вводится вместе с производными x', y', x'', y'' рядов (3). Поскольку уравнения (5_1) § 493 нелинейные, то такова же и система (S). Кроме того, система (S) не является рекуррентной, так как каждое из уравнений системы содержит всё неизвестные (4).

Тем не менее оказывается возможным показать, что система определяет функции (4) единственным образом, во всяком случае, при условии, что период $2\pi m$, рассматриваемый как независимая переменная, не превышает некоторого предела. Конечно, для полного доказательства существования периодического семейства (3) необходимо показать, что в решении (4) системы (S) величины $a_k(m)$ стремятся при $k \to \pm\infty$ к нулю настолько быстро, что формальные тригонометрические ряды (3) сходятся к периодическим (аналитическим) функциям t при любом фиксированном m в рассматриваемом промежутке.

Наконец, этот промежуток, которому может принадлежать постоянная интегрирования m, должен содержать также численные значения $m = m_0$, соответствующие наблюдаемому движению Луны. Поскольку это значение m_0 мало ($m_0 = 0{,}08084\ldots$; см. ниже § 518), интересующий нас промежуток для значений m охватывает небольшую окрестность вблизи $m = 0$.

§ 505. Непосредственное составление системы (S) облегчается после замены координат x, y, времени t и оператора $' = \dfrac{d}{dt}$ на

$$u = x + iy, \qquad v = x - iy, \tag{5$_1$}$$

$$\zeta = \exp\left(\frac{it}{m}\right), \tag{5$_2$}$$

$$D = \zeta\frac{d}{d\zeta} \tag{5$_3$}$$

соответственно, где $i = \sqrt{-1}$. Прежде всего, используя (5_1), откуда $uv = x^2 + y^2$, $u'v' = x'^2 + v'^2$, и учитывая (4) § 491, представим лагранжевы уравнения (5_1) § 493 и их интеграл энергии (5_2) § 493 в виде

$$\left.\begin{aligned} u'' + 2iu' - \frac{3}{2}(u + v) &= -\frac{u}{(uv)^{3/2}}\\ v'' - 2iv' - \frac{3}{2}(u + v) &= -\frac{v}{(uv)^{3/2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6$_1$}$$

$$u'v' - \frac{3}{4}(u + v)^2 - \frac{2}{(uv)^{1/2}} = -C. \tag{6$_2$}$$

В соответствии же с (5_2) — (5_3), где $' = \dfrac{d}{dt}$, можно переписать (6_1) — (6_2) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} D^2u + 2mDu + \frac{3}{2}m^2(u + v) &= m^2\frac{u}{(uv)^{3/2}},\\ D^2v - 2mDv + \frac{3}{2}m^2(u + v) &= m^2\frac{v}{(uv)^{3/2}}, \end{aligned}\right\} \tag{7$_1$}$$

$$Du\,Dv + \frac{3}{4}m^2(u + v)^2 + 2\frac{m^2}{(uv)^{1/2}} = C. \tag{7$_2$}$$

Разумеется, через D^2 обозначается двукратная операция DD, так что, например,

$$\left.\begin{aligned} D^2(uv) &= uD^2v + 2Du\,Dv + vD^2u, \\ D(Dv - vDu) &= uD^2v - vD^2u, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

поскольку

$$\begin{aligned} D(f+g) &= Df + Dg, \\ D(fg) &= fDg + gDf. \end{aligned}$$

Из (5_1) — (5_2) видно, что формулы (3) для искомого семейства периодических решений можно заменить следующими:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\zeta^{2k+1}, \qquad v = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k-1}\zeta^{2k+1}. \qquad (9)$$

Следовательно, первый пункт программы, изложенной в § 504, а именно, построение системы (S), требует сравнения коэффициентов при различных степенях ζ в правой и левой частях уравнений, получающихся после подстановки (9) в (7_1). Хотя ввиду наличия в (7_1) квадратного корня и знаков деления такая операция представляется весьма мало доступной, можно преодолеть эту трудность благодаря замене $(uv)^{-3/2}$ в (7_1) кубом полинома, который можно выписать для $(uv)^{-1/2}$ на основании (7_2).

Действительно, используя (8) и (7_2), легко найдем, что два уравнения движения (7_1) можно записать при любом фиксированном значении постоянной энергии C в виде

$$\left.\begin{aligned} D^2(uv) - Du\,Dv - 2m(uDv - vDu) + \frac{9}{4}m^2(u+v)^2 &= C, \\ D(uDv - vDu) - 2mD(uv) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - v^2) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где уже нет радикалов и дробей. Между прочим, переход от (7_1) к (10) с помощью (7_2) эквивалентен переходу от (5_1) § 493 к (6) § 493 с помощью (5_2) § 493.

§ 506. Из (5_2) — (5_3) видно, что формальная производная Df ряда Фурье $f = f(\zeta)$, имеющего вид

$$\sum a_k\zeta^{2k+1},$$

равна

$$\sum (2k+1)\alpha_k\zeta^{2k+1}.$$

Вместе с тем из самого определения (5_2) вытекает, что если $g = g(\zeta)$ — другой ряд Фурье, имеющий такой же вид

$$\Sigma\beta_k\zeta^{2k+1},$$

то произведение fg представится рядом Фурье

$$\sum \gamma_k\zeta^{2k},$$

где

$$\gamma_k = \sum \alpha_j\beta_{k-j-1}$$

(индексы k и j пробегают значения от $-\infty$ до $+\infty$). Применяя эти два правила конечное число раз, увидим, что после подстановки (9) в (10) придем к соотношениям

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k\zeta^{2k} = C, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \nu_k\zeta^{2k} = 0, \tag{11}$$

где μ_k, ν_k не зависят от ζ (т. е. от t) и представляют собой полиномы относительно параметра m и бесконечного числа коэффициентов (4). В силу (11) система уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты (4), записывается в виде

$$\mu_0 = C, \quad \nu_0 = 0, \quad \mu_j = 0 = \nu_j, \quad j = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11a}$$

Выполняя непосредственно указанные перед (11) подстановки и комбинируя полученные таким путем уравнения (11a), придем к следующему результату *).

Система уравнений (11a) эквивалентна бесконечной системе, состоящей, с одной стороны, из двух уравнений

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{\left(\overline{2i+1}^2 + 8i + 4m + \frac{9}{2}m^2\right)a_i^2 + \frac{9}{2}m^2 a_i a_{-i-1}\right\} = C, \tag{12}$$

$$\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i\right\}^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \{4i^2 + 4i + 1 + \overline{4i+2m} + 3m^2\}a_i = m^2 \tag{13}$$

---

*) Детали этих элементарных вычислений можно найти в соответствующем мемуаре Хилла.

и, с другой стороны, из бесконечной системы

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \{[j, i]\, a_i a_{i-j} + m^2 [j]\, a_i a_{-i+j-1} + m^2 (j)\, a_{-i-j-1}\} = 0, \tag{14}$$

$$j = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $[j, i]$, $[j]$, (j) — рациональные функции независимой переменной m, а именно

$$[j, i] = -\frac{i}{j} \frac{4(j-1)i + 4j^2 + 4j - 2 - 4(i - j + 1)m + m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2} \tag{15}$$

$$[j] = -\frac{3}{16j^2} \frac{4j^2 - 8j - 2 - 4(j + 2)m - 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \tag{16}$$

$$(j) = -\frac{3}{16j^2} \frac{20j^2 - 16j + 2 - 4(5j - 2)m + 9m^2}{2(4j^2 - 1) - 4m + m^2}, \tag{17}$$

причем $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, но $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Очевидно, система уравнений, обозначенная в § 504 через (S), состоит, с одной стороны, из бесконечного числа уравнений (14) с коэффициентами, выражаемыми согласно (15) — (17), и, с другой стороны, из единственного уравнения (13). Действительно, роль уравнения (12) сводится лишь к тому, что оно позволяет выразить постоянную Якоби C как функцию $C(m)$ параметра m семейства периодических решений (3) после того, как соответствующее решение (4) уже найдено.

§ 507. Теперь необходимо доказать теорему существования, которая применима к системе (S) (см. § 504). Чтобы формулировать эту теорему, определим степенной ряд F бесконечного числа переменных z_0, z_1, z_2, ... (безотносительно к вопросу о сходимости) выражением вида

$$F(z_0, z_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}, \tag{18}$$

где

$$F^{(n)} = \sum \ldots \sum a^{(n)}_{i_1 \ldots i_n} z_{i_1} \ldots z_{i_n}$$

представляет собой форму n-й степени по z_0, z_1, ... При этом n неотрицательных индексов i_1, ..., i_n (не обязательно различные) выбираются так, что в n-кратном ряде $F^{(n)}$ одночлен по z_i встречается только один раз. Обозначим для любого степенного ряда (18) через F^* другой степенной ряд

$$F^*(z_0, z_1, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)*}, \tag{18a}$$

где

$$F^{(n)*} = \sum \ldots \sum |a^{(n)}_{i_1 \ldots i_n}| z_{i_1} \ldots z_{i_n},$$

так что $F^*(z_0, z_1, \ldots) \equiv F(z_0, z_1, \ldots)$ тогда и только тогда, когда все $a \geqslant 0$.

Пусть дана бесконечная последовательность

$$F_1(x, y_1, y_2, \ldots), \ldots, F_k(x, y_1, y_2, \ldots)$$

степенных рядов (18), где $z_0 = x$, $z_1 = y_1, \ldots, z_k = y_k, \ldots$, и предположим, что существуют две положительные постоянные и две последовательности положительных постоянных, например α, γ и $\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots$; $\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$, удовлетворяющие двум бесконечным последовательностям неравенств

$$F_k^*(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots) \leqslant \mu_k, \tag{19$_1$}$$

$$\frac{\beta_k}{\mu_k} \geqslant \gamma \tag{19$_2$}$$

при любом k (заметим, что $\beta_k > 0$ и $\mu_k > 0$ могут зависеть от k произвольным образом, но $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ предполагаются не зависящими от k).

Теорема существования, о которой идет речь, утверждает, что если (19$_1$) — (19$_2$) удовлетворяются, то бесконечная система уравнений

$$y_k = xF_k(x, y_1, y_2, \ldots), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

обладает в достаточно малом круге вокруг начала комплексной плоскости x, а именно, во всяком случае, в круге

$$|x| < \mathrm{Min}(\alpha, \gamma) \qquad (\alpha > 0, \gamma > 0) \tag{21}$$

(радиус которого не зависит от k) одним и только одним аналитическим решением $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... Для этого единственного решения

$$|y_k(x)| < \beta_k \tag{22$_1$}$$

при $|x| < \mathrm{Min}\,(\alpha, \gamma)$,

$$y_k(0) = 0, \tag{22$_2$}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ Наконец, $y_k(x)$ будет вещественным при вещественном x, если все коэффициенты каждого степенного ряда $F_k(x, y_1, y_2, \ldots)$ вещественные.

§ 508. Доказательство этой теоремы состоит в следующем. Используя обозначения (18) — (18а), рассмотрим сначала

$$Y_k = xF_k^{*}(x, Y_1, Y_2, \ldots), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

вместо (20). Сформулированная в § 507 теорема существования может быть применена также и к (23), поскольку предположения (19_1) — (19_2) одни и те же как для (20), так и для (23). Таким образом, необходимо доказать существование одного и только одного аналитического решения

$$Y_k = Y_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{km} x^m$$

уравнений (23) в круге (21). Обозначая n-ю частную сумму

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

любого степенного (формального) ряда

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

через $[f(x)]_n$, подставляя бесконечное число степенных рядов $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ... (еще неизвестные) в (23) и приравнивая коэффициенты при x^n в

$$Y_k(x) = xF_k^{*}(x, Y_1(x), Y_2(x), \ldots),$$

увидим, что если $Y_k(x)$ существует, то частные суммы $[Y_k(x)]_n$ должны удовлетворять соотношению

$$[Y_k(x)]_n = [xF_k(x, Y_1(x), Y_2(x), \ldots)]_n =$$
$$= x[F_k^{*}(x, Y_1(x), Y_2(x), \ldots)]_{n-1} =$$
$$= x[F_k^{*}(x, [Y_1(x)]_{n-1}, [Y_2(x)]_{n-1}, \ldots)]_{n-1}.$$

Другими словами, степенные ряды $Y_k(x)$ должны быть выбраны так, что если через $Y_k^n = Y_k^n(x)$ обозначить полином $[Y_k(x)]_n$

степени n, то

$$Y_k^n(x) = x[F_k^*(x, Y_1^{(n-1)}(x), Y_2^{(n-1)}(x), \dots)]_{n-1}. \tag{24}$$

Эта рекуррентная формула и позволяет определить все частные суммы $Y_k{}^n(x)$ всех рядов $Y_k(x)$ следующим образом.

Полагая $x = 0$ в (23), увидим, что (22_2) удовлетворяется при $y_h = Y_k$, так что $Y_k(0) = 0$, т. е. $Y_k{}^0(x) \equiv 0$. Этим самым определяется первый шаг при нахождении $Y_k^{(n)}(x)$ с помощью рекуррентной системы (24). В частности, при $n = 1$ получим, что

$$Y_k^1(x) = xF_k^*(0, 0, 0, \dots),$$

поскольку в силу определения оператора $[\quad]_n$ имеем

$$[F_k^*(x, Y_1^0(x), Y_2^0(x), \dots)]_0 = [F_k^*(x, 0, 0, \dots)]_0.$$

Предположим, что при некотором $n - 1 \geqslant 0$ и при всех k полиномы $Y_k{}^0(x)$, $Y_k{}^1(x)$, ..., $Y_k^{n-1}(x)$ уже определены в соответствии с (24), причем эти полиномы имеют вещественные, неотрицательные коэффициенты и принимают в круге (21) значения, меньшие по абсолютной величине, чем β_k, $k = 1, 2, \dots$ Эти условия удовлетворяются при $n - 1 = 0$, так как $Y_k{}^0(x) \equiv 0$. Легко перейти по методу индукции от $n - 1$ к n. Действительно, так как $|Y_k^{n-1}(x)| < \beta_k$ в круге (21) и так как полиномы $Y_k^{n-1}(x)$ имеют вещественные неотрицательные коэффициенты (как и степенные ряды $F_k{}^*(x, Y_1, Y_2, \dots)$ по бесконечному числу переменных $x, Y_1, Y_2, \dots$), то из (19_1) видно, что

$$F_k^*(x, Y_1^{n-1}(x), Y_2^{n-1}(x), \dots)$$

определяет в круге (21) регулярную аналитическую функцию, которую можно представить сходящимся степенным рядом по x. При этом сумма этого степенного ряда по x не может превышать μ_k по абсолютной величине в круге (21). Кроме того, коэффициенты этого степенного ряда по x — вещественные неотрицательные числа, так что значения частных сумм

$$[F_k(x, Y_1^{n-1}(x), Y_2^{n-1}(x), \dots)]$$

в круге (21) также не могут превосходить μ_k по абсолютной величине. Следовательно, (24) определяет при всех k полиномы $Y_k{}^n(x)$, имеющие вещественные неотрицательные коэффициенты и удовлетворяющие в круге (21) неравенству

$$|Y_k^n(x)| \leqslant |x| \mu_k,$$

или (в силу (19_2), (21))

$$|Y_k^n(x)| \leqslant \beta_k.$$

Этим завершается переход от $n-1$ к n.

Так как абсолютные значения частных сумм $Y_k^n(x)$ степенных рядов $Y_k(x)$ не превосходят β_k в круге (21), то очевидно, что ряды $Y_k(x)$ сходятся и удовлетворяют в круге (21) неравенству $|Y_k(x)| < \beta_k$.

Это завершает доказательство всех утверждений, сделанных в § 507 в случае, если (20) заменено на (23). Однако очевидно, что (23) представляет собой по отношению к (20) мажорирующую систему. Следовательно, теорема существования, сформулированная в § 507, и формулы (22_1) — (22_2) справедливы также и для системы (20). Наконец, справедливость последнего замечания, сделанного в § 507, вытекает из того, что частные суммы $y_k^n(x)$ степенных рядов $y_k(x)$ находятся с помощью рекуррентной формулы, аналогичной (24):

$$y_k^n(x) = x[F_k(y_1^{n-1}(x), y_2^{n-1}(x), \ldots)]_{n-1}. \tag{24a}$$

§ 509. Имея в виду применение доказанной теоремы существования, заметим, что в силу (15) $[j, j] \equiv -1$ и $[j, 0] \equiv 0$ при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следовательно, (14) можно записать в виде

$$a_0 a_j = 0 + 2m^2 [j] a_0 a_{j-1} + 2m^2 (j) a_0 a_{-j-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i] a_i a_{i-j} + \\ + m^2 [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' a_i a_{-i+j-1} + m^2 (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''' a_i a_{-i-j-1}, \tag{25}$$

если штрихи у знаков сумм означают, что в Σ', Σ'', Σ''' следует опустить пары индексов

$$i = j, \quad i = 0; \quad i = j - 1, \quad i = 0; \quad i = -j - 1, \quad i = 0 \tag{25a}$$

соответственно. Таким образом, разделив (25) на ma_0^2 и полагая

$$c_j = \frac{a_j}{ma_0}, \tag{26}$$

где $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, увидим, что система (25) эквивалентна следующей:

$$c_j = m\left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j, i]\, c_i c_{i-j} + m^2 [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' c_i c_{-i+j-1} + \right.$$

$$\left. + m^2 (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''' c_i c_{-i-j-1} + 2m [j]\, c_{j-1} + 2m (j)\, c_{-j-1} \right\}, \qquad (27)$$

где $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Оказывается, теорема существования, сформулированная в § 507, непосредственно применима к системе (27).

§ 510. Чтобы это показать, обозначим в соответствии с (18)—(18а) через $f^* = f^*(m)$ степенной ряд

$$|C_0| + |C_1|\, m + |C_2|\, m^2 + \ldots,$$

соответствующий функции $f = f(m)$, которая разлагается при малых $|m|$ в ряд Тейлора

$$C_0 + C_1 m + C_2 m^2 + \ldots$$

Тогда для всего бесконечно большого числа рациональных функций (15), (16), (17) параметра m и при соответствующем числе B, не зависящем от i, j и m, справедливы при $|m| \leqslant 1$ неравенства

$$|[j, i]^*| < B\left(\left| \frac{i}{j} \right|^2 + \left| \frac{i}{j} \right| \right), \qquad (28_1)$$

$$|[j]^*| < \frac{B}{j^2}, \qquad |(j)^*| < \frac{B}{j^2}. \qquad (28_2)$$

Действительно, если функция $f(m) = C_0 + C_1 m + \ldots$ является регулярной аналитической в круге $|m| < R$ и если $|f(m)| < M = \mathrm{const}$ в этом круге, то, как известно,

$$|C_n| < \frac{M}{R^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, если $R > 1$, то

$$|f^*(m)| < \frac{MR}{R-1}$$

при $|m| \leqslant 1$. Разделив числитель и знаменатель в (15) на $2(4j^2 - 1)$, увидим, что для доказательства (28_1) достаточно показать существование чисел $M > 0$, $R > 1$, обладающих тем свойством, что все рациональные функции

$$f_j(m) = \left\{1 - \frac{4m - m^2}{2(4j^2 - 1)}\right\}^{-1}, \quad j = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots,$$

являются в круге $|m| < R$ регулярными аналитическими и остающимися по абсолютной величине меньше M. Но это условие удовлетворяется при $R = {}^8/_7$ и достаточно большом $M = \text{const}$, поскольку

$$|4m - m^2| < \left(1 + \frac{1}{7}\right)\left(4 + 1 + \frac{1}{7}\right) < 6 \leqslant 2(4j^2 - 1),$$
$$j = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

если $|m| < 1 + {}^1/_7$.

Таким образом, (28_1) доказано. Неравенство (28_2) выводится с помощью (16) — (17) точно таким же путем.

§ 511. Нам понадобится дополнительно тот элементарный результат *), что при всех $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' i^{-2}(j - i)^{-2} < Cj^{-2}, \tag{28a}$$

где C — некоторая постоянная **), причем индекс i принимает при фиксированном j все целые значения, кроме $i = 0$, $i = j$.

Кроме того, (28a) остается справедливым после замены любого из трех показателей -2 на целые отрицательные числа -3, -4, ..., причем значение постоянной C зависит от этих чисел.

§ 512. Следствием (28_1) — (28a) является существование достаточно большой постоянной A такой, что если бесконечное число переменных m, c_1, c_{-1}, c_2, $c_{-2}, \ldots$ ограничено неравенствами

$$|m| \leqslant 1, \quad |c_j| \leqslant j^{-4}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{29}$$

---

*) Этот хорошо известный результат играет фундаментальную роль в теории Римана тригонометрических рядов, а также в теории умножения таких рядов.

**) Имея в виду доказательство существования такой постоянной C, заметим, что если j четное, то, сдвигая индекс суммирования i на ${}^1/_2 j$, можем записать сумму в левой части (28a) в виде

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}{}' \left(i + \frac{1}{2} j\right)^{-2}\left(\frac{1}{2} j - i\right)^{-2} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left(i^2 - \frac{1}{4} j^2\right)^{-2}.$$

Но очевидно, что последняя сумма меньше, чем произведение некоторой постоянной на j^{-2}, так как $\Sigma i^{-2} < +\infty$. Этим самым (28a) доказано для четного j. Для нечетного j доказательство такое же.

а в остальном произвольны, то при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' |[j, i]^*| \, |c_i c_{i-j}| < A j^{-4}, \tag{30_1}$$

$$\left.\begin{aligned} |[j]^*| \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}'' |m^2 c_i c_{-i+j-1}| < A j^{-4}, \\ |(j)^*| \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}''' |m^2 c_i c_{-i-j-1}| < A j^{-4}, \end{aligned}\right\} \tag{30_2}$$

$$2|[j]^*| \, |m c_{j-1}| < A j^{-4}, \qquad 2|(j)^*| \, |m c_{-j-1}| < A j^{-4}. \tag{30_3}$$

Действительно, из (28_1) видно, что в области (29) выражение в левой части (30_1) меньше, чем произведение постоянной B на

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left|\frac{i}{j}\right|^2 i^{-4}(i-j)^{-4} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \left|\frac{i}{j}\right| i^{-4}(i-j)^{-4}.$$

Но сумма последних двух рядов меньше, чем

$$j^{-2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' i^{-2}(i-j)^{-2} + |j|^{-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' |i|^{-3} |i-j|^{-3},$$

или же (если учесть (28а) и обобщение этого неравенства, упомянутое в конце § 511) меньше, чем

$$j^{-2} \cdot C j^{-2} + |j|^{-1} \cdot \bar{C} |j|^{-3} = \mathrm{const} \cdot j^{-4}.$$

Отсюда следует (30_1). Неравенства же (30_2) вытекают из (28_2) точно так же, как (30_1) и (28_1). Наконец, справедливость (30_3) очевидна в силу (29) и (28_2).

§ 513. Так как рациональные функции (15), (16), (17) параметра m могут быть разложены (см. § 510) в ряды по целым неотрицательным степеням m (при малых $|m|$), то можно записать систему (27) в виде

$$c_j = m G_j(m, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}, \ldots), \qquad j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{31}$$

где G_j — степенные ряды по бесконечному числу переменных m, c_j. Заметим, что относительно бесконечного числа переменных c_j (но не m) каждое G представляет собой полином второй степени.

Так как G_j служит коэффициентом при m в правой части (27) и так как (30_1), (30_2), (30_3), где $A = \mathrm{const}$, справедливы в области (29), то существует достаточно большое $M = \mathrm{const}(\leqslant 5A)$, удовлетворяющее неравенствам

$$G_j^*(1, 1^{-4}, 1^{-4}, 2^{-4}, 2^{-4}, \ldots) < Mj^{-4}, \qquad j = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{32}$$

Если отождествить m, c_1, c_{-1}, ... и G, G_{-1}, ... с x, y_1, y_2, ... и F_1, F_2, ... соответственно, то (31) совпадает с (20). Вместе с тем (32) показывает, что условия (19_1) — (19_2) удовлетворяются при $\alpha = 1$, $\gamma = 1 / M$. Таким образом, круг (21) совпадает с кругом $|m| < M^{-1}$, где верхняя граница M не должна быть меньше 1.

§ 514. Следовательно, теорема, сформулированная в § 507, гарантирует существование одного и только одного решения $c_j = c_j(m)$ системы (31) в круге $|m| < M^{-1}$, причем $c_j(m)$ — регулярные аналитические функции m, остающиеся меньше j^{-4} в этом круге, а $c_j(0) = 0$ (см. (22_1) — (22_2)). Вместе с тем (31) эквивалентно (25), т. е. (14) в силу (26). Таким образом, бесконечная система уравнений (14) относительно бесконечного числа неизвестных функций (4) параметра m определяет отношения a_j / a_0 в круге $|m| < M^{-1}$ единственным образом как аналитические функции m и так, что при $|m| < M^{-1}$

$$\frac{a_j}{a_0} = m^2 P_j(m), \; |mP_j(m)| < j^{-4} (j = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{33}$$

где $P_j(m)$ — степенные ряды по m с вещественными коэффициентами.

Вычисляя несколько первых членов этих рядов с помощью рекуррентной формулы (24а), получим на основании (25) и (15) — (17), что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_1}{a_0} = \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3} m^6 - \ldots, \\
&\frac{a_{-1}}{a_0} = -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \frac{14}{27} m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4} m^6 + \ldots, \\
&\frac{a_2}{a_0} = \frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^6 + \ldots, \\
&\frac{a_{-2}}{a_0} = 0 \cdot m^4 + \frac{23}{640} m^5 + \frac{299}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2} m^6 + \ldots, \\
&\frac{a_3}{a_0} = \frac{833}{2^{12} \cdot 3} m^6 + \ldots, \frac{a_{-3}}{a_0} = \frac{1}{192} m^6 + \ldots, \frac{a_4}{a_0} = \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

Согласно (33) мы получаем лишь отношения неизвестных функций (4). Это обусловлено тем, что при выводе (33) была использована лишь бесконечная система однородных уравнений (14). Система же (S), о которой шла речь в § 504, состоит из (14) и неоднородного уравнения (13) (см. § 506). Поэтому можно теперь использовать (13) для определения $a_0 = a_0(m)$. Для этой цели достаточно записать (13) в виде

$$a_0 = m^{2/3}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0}\right)^{-2/3}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \{4i^2 + 4i + 1 + \overline{4i+2}m + 3m^2\} \frac{a_i}{a_0}\right)^{-1/3} \tag{34}$$

и заметить, что выражение в правой части (34) представляет собой в силу (33) известную функцию m. Используя, в частности, приближенные выражения (33a), получим

$$a_0 = m^{2/3}\left(1 - \frac{2}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{4}{81}m^3 + \ldots\right). \tag{34a}$$

Таким образом, все неизвестные функции (4) параметра m выражаются формулами (33) — (34) или приближенно формулами (33a) — (34a).

§ 514a. Из изложенного в § 506 видно, что оставшееся соотношение (12) выражает лишь тот факт, что ряды (3) удовлетворяют, по крайней мере формально, не только уравнениям движения, но и интегралу энергии. Подставляя в левую часть (12) функции (4), для которых уже получены формулы (33) — (34) или (33a) — (34a), получим постоянную энергии как функцию периода (см. § 100):

$$C = C(m) = m^{-2/3}\left(1 + \frac{8}{3}m + \frac{7}{18}m^2 - \frac{140}{81}m^3 - \ldots\right). \tag{35}$$

§ 515. Теперь можно говорить о существовании семейства периодических решений (3) при всех положительных и отрицательных значениях параметра m, достаточно малых по абсолютной величине.

Действительно, при условии, что $|m|$ достаточно мало, справедливы формулы (33) — (35). Вместе с тем величины $a_j = a_j(m)$ определялись в §§ 506—514 так, чтобы ряды (3) при фиксированном m удовлетворяли формально лагранжевым уравнениям

$$x'' - 2y' = U_x, \qquad y'' + 2x' = U_y.$$

Однако оценка (33) для a_j позволяет гарантировать не только сходимость тригонометрических рядов (3) к функциям $x = x(t)$, $y = y(t)$, но также сходимость рядов, получаемых при почленном дифференцировании (3), к непрерывным вторым производным $x''(t)$, $y''(t)$.

Действительно, коэффициент Фурье при j-й гармонике для $x''(t)$ или $y''(t)$ мажорируется согласно (33) числом $j^2 j^{-4} = j^{-2}$, но в то же время $\Sigma j^{-2} < +\infty$. Поскольку ряды (3) удовлетворяют лагранжевым уравнениям формально, из теоремы единственности для рядов Фурье вытекает, что эти ряды представляют при фиксированном m решения лагранжевых уравнений.

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

§ 516. Заметим, что коэффициенты рядов (3) стремятся вместе с $1/k$ к нулю гораздо быстрее, чем это следует из оценки (33), использованной в § 515. Действительно, правые части уравнений движения являются регулярными аналитическими по x, y (если исключить начало координат $x = 0$, $y = 0$), так что их решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ должны быть регулярными аналитическими по t, если исключить столкновения. Вместе с тем известно (О. Гольдер), что периодический тригонометрический ряд является рядом Фурье для периодической регулярной аналитической функции тогда и только тогда, когда его коэффициенты стремятся к нулю так же быстро, как и члены сходящейся геометрической прогрессии. Следовательно, коэффициенты $a_k(m)$ в рядах (3) должны удовлетворять неравенству $|a_k(m)| < q^{|k|}$, где число $q = q(m)$ меньше 1 и не зависит от k.

Однако оказывается справедливым и более сильный результат. Действительно, вычисляя степенные ряды (33) на основании (31), т. е. (27) и (26) с помощью рекуррентной формулы (24а), мы можем установить с учетом (14)—(17) по методу индукции, что отношения a_j / a_0 имеют в точке $m = 0$ нуль порядка $2j$ (этот факт уже вытекает из приближенных выражений (33а), полученных именно таким путем). Однако, как известно, из принципа максимума для регулярной аналитической функции вытекает лемма (Х. А. Шварц), согласно которой степенной ряд вида

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

где $n \geqslant 1$, сходится, а его сумма в круге $|z| < \rho$ меньше по абсолютной величине постоянной μ лишь при условии, что

$$|f(z)| < |z|^n \frac{\mu}{\rho^n}$$

в этом круге. Поэтому из (33) следует, что для каждого положительного числа K, меньшего чем M^{-1}, существует положительное число L такое, что

$$\left|\frac{a_j(m)}{a_0(m)}\right| < Lm^{2|j|}, \quad j = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots,$$

при $|m| < K$. Это неравенство дает явное выражение для $q = q(m) < 1$.

§ 517. Теперь легко найти динамическое значение периодического семейства (4) при малых значениях постоянной интегрирования $m(\gtrless 0)$. Действительно, пренебрегая коэффициентами $a_j = a_j(m)$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеющими более высокий порядок относительно m, чем $a_0 = a_0(m)$, получим

$$x = a_0(m)\cos\frac{t}{m}, \quad y = a_0(m)\sin\frac{t}{m}, \tag{36}$$

где

$$a_0(m) = m^{2/3} - \ldots, \quad C(m) = m^{-2/3} + \ldots$$

согласно (34а), (35). Эти приближенные формулы определяют синодическую траекторию $x = x(t)$, $y = y(t)$ Луны, отвечающую равномерному движению по кругу с радиусом a_0 и центром в начале координат $(x, y) = (0, 0)$, где находится Земля. Период $2\pi m$ этого движения считается положительным при прямом синодическом движении и отрицательным при обратном. Формулы (36) получены в предположении, что постоянная интегрирования m, а вместе с тем и приближенный «радиус» $a_0 = m^{2/3} - \ldots$ очень малы. Но тогда влияние Солнца пренебрежимо мало, и мы приходим практически к схеме задачи двух тел Земля — Луна, рассмотренной в § 300 при использовании синодической системы координат. В круговом случае применимы результаты § 307. Параметр m, если его определить согласно (13)—(14_1) §§ 306—307, равен отношению синодического периода к 2π. В то же время формулы (14_2)—(14_3) § 307 показывают, что радиус a_0 и постоянная Якоби C равны $m^{2/3} - \ldots$ и $m^{-2/3} + \ldots$ соответственно. Поскольку это согласуется с (36), можно сделать вывод, что если $|m|$ очень мало, то параметр m периодического семейства (3) можно отождествить с (14) § 307.

В соответствии со сказанным можно дать следующую интерпретацию периодического семейства (3).

Если бы Солнце не возмущало систему Земля — Луна, то семейство (3) совпадало бы с семейством круговых траекторий, рассмотренных в § 307. Полученные в §§ 503—516 результаты свидетельствуют о том, что Солнце возмущает систему Земля —

Луна таким образом, что во всяком случае при достаточно малых $|m|$ семейство периодических движений сохраняется, и оно совпадает при очень малых $|m|$ именно с тем, которое описывается приближенно формулами (36).

§ 518. В частности, формулы (13)—(14_1) §§ 306—307 показывают, что если пренебречь возмущениями, производимыми Солнцем, то значение $2\pi m_0$ постоянной интегрирования $2\pi m$, соответствующей движению Луны вокруг Земли, можно определить как синодический период (месяц) обращения Луны по ее орбите, которая считается тогда точно круговой. Значение m_0, упомянутое в конце § 504, несколько меньше, чем $^1/_{12}$, и находится в соответствии с фактическим эмпирическим значением синодического периода $2\pi m_0$.

Выписывая в явном виде оценки §§ 510—512, можно установить, что это значение m_0 действительно «достаточно мало» с точки зрения теоремы существования, т. е. что $m_0 (>0)$ меньше, чем число M^{-1} в неравенстве (33). Поскольку доказательство требует лишь непосредственных численных расчетов, воспроизводить его здесь мы не будем.

§ 518а. Ввиду возможных комплексных особенностей степенных рядов (33)—(33а) можно ожидать, что область сходимости этих рядов будет расширена для положительных m, если подвергнуть параметр разложения m преобразованию, носящему в теории расходящихся рядов имя Эйлера. Это преобразование m представляет собой линейную подстановку

$$m^* = \frac{m}{1 - \varkappa m},$$

где $\varkappa$ — положительное число, выбираемое подходящим образом. Так как особые точки (комплексные) рациональной функции $j_j(m)$ (см. § 510) расположены ближе всего к $m = 0$, если $j^2 = 1$, то Хилл считал целесообразным обратить внимание прежде всего на знаменатель $6 - 4m + m^2$ в формулах (14)—(17). Поэтому представляется выгодным принять постоянную $\varkappa$ в преобразовании Эйлера равной $^1/_3$.

§ 519. Изложенный метод построения в явном виде рядов может быть все же полезен при анализе периодических решений (3) лишь тогда, когда постоянная интегрирования $|m|$ достаточно мала. В противном случае следует прибегать к механическим квадратурам. Тогда оказывается, что если при достаточно малых $|m|$ периодические орбиты лежат внутри соответствующей кривой нулевой скорости, то при стремлении m к положительному числу 0,56096... (значительно превышающему 1 : 12) периодическая орбита достигает своей кривой нулевой скорости. Точка возврата, появляющаяся (см. § 238) при этом критическом m, лежит на оси y. Наконец, если постоянная интегрирования m проходит, возрастая, упомянутое критическое значение, соответствующее периодической орбите с точкой возврата, то точка возврата превращается в небольшую петлю, быстро увеличивающуюся далее с ростом m. К сожалению, было невозможно проследить с помощью механических квадратур поведение периодического семейства (3) до той достаточно далекой стадии, которая позволяла бы судить об окончательной судьбе этого семейства.

§ 519a. Можно лишь с уверенностью утверждать, что этому семейству свойственно то явление, которое Е. Стремгрен на основе материалов численного интегрирования эмпирически сформулировал как принцип естественного исчезновения. Изложение этого общего принципа, строгое математическое доказательство которого стало в настоящее время доступным, выходит за рамки этой книги.

§ 520. Рассмотрим решение (3) уравнений

$$x'' - 2y' = U_x(x, y), \quad y'' + 2x' = U_y(x, y) \tag{37}$$

при фиксированном m (см. § 493). Согласно изложенному в § 234 соответствующие уравнения Якоби имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= U_{xx}(t, m)\xi + U_{xy}(t, m)\eta, \\ \eta'' + 2\xi' &= U_{xy}(t, m)\xi + U_{yy}(t, m)\eta, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $U_{xx}(t, m), \ldots$ — функции, получающиеся при подстановке (3) в $U_{xx}(x, y), \ldots$ Таким образом, коэффициенты этих уравнений являются при фиксированном m известными периодическими функциями t с периодом $2\pi m$. Следовательно, линейная система (38) определяет четыре характеристических показателя s_1, s_2, s_3, s_4 (§ 143), которые можно объединить (см. § 149) в две пары вида $(1, 1)$, $(s, 1/s)$. Разумеется, характеристический показатель s является функцией $s(m)$ от m. Мы будем предполагать, что при рассматриваемом фиксированном значении m имеем $|s| = 1$, но $s \neq \pm 1$. Вычисления показывают, что эти условия удовлетворяются при значениях m в промежутке, включающем в себя малое значение $m_0 = 0{,}0808, \ldots$, которое соответствует наблюдаемому движению Луны вокруг Земли.

§ 520a. Сопоставляя факт двойной симметрии (§ 503) периодического решения (3) с результатами, изложенными в § 144, легко увидим, что уравнения (38) обладают двумя линейно независимыми и соответствующими паре характеристических показателей $(s, 1/s)$ решениями вида

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \cos\left\{ (2k+1+\lambda)\frac{t}{m} + \delta \right\}, \\ \eta &= \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k \sin\left\{ (2k+1+\lambda)\frac{t}{m} + \delta \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

где δ, $\varepsilon(\neq 0)$ — произвольные вещественные постоянные интегрирования, причем вещественные величины

$$\lambda = \lambda(m), \qquad \alpha_k = \alpha_k(m), \qquad \beta_k = \beta_k(m), \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{39a}$$

определяются в зависимости от m единственным образом. В частности, $\lambda = \lambda(m)$ представляет собой характеристический показатель, соответствующий $s = s(m)$ (см. §§ 143—144).

Так как $s \neq \pm 1$, то периодическое решение $\xi = x'$, $\eta = y'$ уравнений (38), получаемое согласно изложенному в § 148, не связано линейной зависимостью с двумя почти периодическими (и периодическими, если $\lambda = \lambda(m)$ рациональное) решениями, которые выражаются формулами (39). Наконец, применяя к семейству (3) правило, указанное в § 149, найдем, во всяком случае при значениях m, не принадлежащих к совокупности изолированных значений, четвертое решение уравнений (38). Это четвертое решение содержит согласно изложенному в § 149 вековой член. Поэтому, как легко заключить на основании формул, приведенных в §§ 235—237а, три линейно независимых решения уравнений (38), соответствующие изоэнергетическим смещениям, суть решения (39) и тривиальное решение $(\xi, \eta) = \mathrm{const}(x'(t), y'(t))$.

Ниже мы будем рассматривать только нетривиальные изоэнергетические смещения (39). Будем предполагать, что постоянные интегрирования δ, ε, выписанные в этих формулах, имеют фиксированные значения, причем $\varepsilon \neq 0$.

§ 521. Прежде всего из классической теоремы о непрерывности для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений сразу вытекает, что функции (39а) непрерывны по m.

Так как $\lambda = \lambda(m)$ зависит от m, то почти периодические функции (39) становятся периодическими для плотного, но счетного множества значений m. Период при таких m тем больше, чем выше порядок соизмеримости $\lambda(m) : 1$.

Что касается коэффициентов $\alpha_k(m)$, $\beta_k(m)$, то можно показать, что при больших $|k|$ и фиксированных малых $|m|$ они ведут себя примерно так же, как и величины $a_k(m)$ (см. § 516). В частности, предельные значения $\alpha_k{}^0 = \lim \alpha_k(m)$, $\beta_k{}^0 = \lim \beta_k(m)$ при $m \to 0$ равны нулю, если только $|2k+1| \neq 1$. Вместе с тем, если $|2k+1| = 1$, т. е. рассматриваются в (39) члены с индексами $k = 0$, $k = -1$, то вычисления показывают, что

$$\overset{0}{\alpha_0} \neq 0, \qquad \overset{0}{\beta_0} = \overset{0}{\alpha_0}, \qquad \overset{0}{\alpha_{-1}} = -3\overset{0}{\alpha_0}, \qquad \overset{0}{\beta_{-1}} = 3\overset{0}{\beta_0}, \tag{40}$$

хотя $\alpha_0{}^k = 0$, $\beta_0{}^k = 0$, если $2k+1 \neq \pm 1$.

Заметим, что можно проверить (40) путем сравнения с формулами для кеплерового кругового движения (см. § 517).

§ 522. Полагая $u = t/m$ и $m \to 0$ в (39)—(39а), а также опуская множитель $\varepsilon \neq 0$ (точнее говоря, $2\varepsilon\alpha_0{}^0 \neq 0$), найдем с помощью (40) после простой редукции, что если λ^0 обозначает предельное значение $(\lambda)_{m=0}$ характеристического показателя $\lambda = \lambda(m)$, то

$$(\xi)_{m=0} = -\cos u \cos(\lambda^0 u + \delta) - 2\sin u \sin(\lambda^0 u + \delta),$$

$$(\eta)_{m=0} = -\sin u \cos(\lambda^0 u + \delta) + 2\cos u \sin(\lambda^0 u + \delta).$$

Следовательно,

$$(\xi^2 + \eta^2)_{m=0} = \cos^2(\lambda^0 u + \delta) + 4\sin^2(\lambda^0 u + \delta),$$

так что непрерывная функция $(\xi^2 + \eta^2)_{m=0}$ аргумента u оказывается положительной, периодической и имеющей при $-\infty < t < +\infty$ положительный нижний предел. Таким образом, из соображений непрерывности видно, что если $|m|$ достаточно мало, то для почти периодических (и периодических, если $\lambda = \lambda(m)$ — рациональное число) функций (39) имеем $\xi^2 + \eta^2 > C > 0$ при $-\infty < t < +\infty$, причем значение постоянной C зависит от постоянных интегрирования δ, $\varepsilon(\neq 0)$ и m.

Следовательно, если $|m|$ достаточно мало, то теорема, упомянутая в § 484, применима к почти периодической функции $\xi(t) + i\eta(t)$, определенной в соответствии с (39). Это означает, что угловая переменная $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(t)$, определяемая формулами

$$\xi = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \cos\tilde{\omega}, \qquad \eta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \sin\tilde{\omega},$$

допускает разбиение $\tilde{\omega}(t) = \mu t + \chi(t)$ на вековой член μt и почти периодический остаточный член $\chi(t)$, причем среднее движение $\mu = \mu(m)$ и частоты функции $\chi(t)$ содержатся в полном спектре частот функций (39).

§ 523. В частности, среднее движение $\mu = \mu(m)$ зависит при фиксированном m от характеристического показателя $\lambda = \lambda(m)$

и от целых чисел j, l, с помощью которых μ представимо в виде

$$\mu = \frac{j\lambda(m) + l}{m}.$$

Хилл определял целые числа j, l, полагая $m \to 0$, что позволило свести определение главного члена μ в среднем движении перигея Луны к нахождению характеристического показателя λ. Вместе с тем сравнение § 530 и §§ 235—237а показывает, что λ можно определить с помощью уравнения для изоэнергетического нормального смещения, т. е. уравнения вида

$$n'' + \varkappa(t) n = 0,$$

где $\varkappa(t)$ — заданная периодическая функция t.

§ 524. В ходе изложенного выше анализа Хилл пришел к методу бесконечных определителей. В то же время Адамс (проделавший несколько раньше Леверье работу, связанную с открытием Нептуна) также использовал этот метод (раньше Хилла) при рассмотрении уравнения (8) § 481, служащего для определения наклонности.

Этот классический метод бесконечных определителей был математически обоснован в работах Пуанкаре и излагается в большинстве учебников применительно к линейным дифференциальным уравнениям в комплексной области. Возможно, будет достаточно, если мы скажем, что этот метод приводит к удобному способу фактического вычисления характеристических показателей и соответствующих решений вида (10_1) § 144. Между тем соображения, приводившиеся в §§ 140—144, гарантировали лишь существование характеристических показателей и соответствующих решений, но не указывали на подходящий метод их вычисления.

Заметим, что хотя мы имеем дело также с бесконечным числом переменных, но дифференциальные уравнения и алгебраические уравнения оказываются теперь линейными, в отличие от нелинейных уравнений, рассматривавшихся в §§ 506—514.

§ 525. Прибавляя (39) к (3), мы получим две почти периодические функции $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$ времени t, которые в соответствии с изложенным в § 86 представляют приближенное решение уравнений (37). Естественно задать вопрос о том, можно или нельзя найти точное решение этих уравнений в виде двойных почти периодических рядов, для которых функции $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$ представили бы собой первые члены. При практическом построении теории Луны молча предполагается, что ответ на этот вопрос положительный. Между тем он представляет собой весьма сложную математическую проблему, решение которой до сих пор ускользало при всех попытках аналитического и топологического ее анализа.

Очевидно, что положение зависит в сильной степени от того, выполняются или не выполняются условия соизмеримости, упомянутые в § 521.

I) Анализ первого случая сравнительно прост, хотя и достаточно громоздок для того, чтобы его можно было изложить в этой книге. Этот анализ случая соизмеримых характеристических показателей связан с общей теорией периодических решений динамических систем с двумя степенями свободы.

II) Второй случай несоизмеримых характеристических показателей сталкивается в небесной механике с фундаментальными трудностями.

Анализ этого случая приводит, по крайней мере формально, к бесконечному итерационному процессу квадратур. Мы покажем теперь, что в этом процессе каждая квадратура в отдельности приводит к сложным и тонким вопросам теории так называемых «малых знаменателей».

§ 526. Каждая из таких квадратур может быть проиллюстрирована на примере определения функции $f = f(t)$, для которой

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^{n+m} \cos(n - \alpha m)t, \tag{41}$$

где μ и α — положительные числа, причем $\mu < 1$, а α — иррациональное. Ряд (41) определяет при $-\infty < t < +\infty$ почти периодическую в смысле Бора (но не периодическую) функцию $f'(t)$.

Если начальное значение $f(0)$ равно нулю, то в соответствии с (41) получим, что

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^{n+m}}{n - \alpha m} \sin(n - \alpha m)t. \tag{42}$$

Действительно, поскольку $0 < \mu < 1$, двойной ряд (41) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < +\infty$ и почленная интеграция допустима. По той же причине двойной ряд (42) сходится абсолютно и равномерно при $-T \leqslant t \leqslant T$, где $T > 0$ — произвольно большое фиксированное число. Отсюда следует, что ряд (42) сходится при $-\infty < t < +\infty$ абсолютно, но не гарантируется равномерная сходимость при $-\infty < t < +\infty$.

§ 527. Оказывается, что функция, представимая рядом (42), не является вообще ограниченной при $-\infty < t < +\infty$. Этот факт имеет исторический интерес, так как основатели небесной механики молчаливо предполагали, что если только рассматриваемые координаты представимы тригонометрическими рядами вида (42), то на вопрос об устойчивости можно ответить положительно.

§ 527а. По-видимому, если понимать устойчивость в указанном в § 131 смысле, то справедливо именно утверждение, противоположное тому, которое молчаливо принималось (и было, как теперь доказано, неверным). Другими словами, появление «малых делителей» $n - am$ в (42) может, по-видимому, служить признаком обычной картины движения, о которой упоминалось в §§ 127, 131 (см. также примечание в § 123).

В этой связи можно заметить, что при формальном подходе к проблемам, рассматривавшимся в §§ 487 и 522, мы пришли бы автоматически к малым делителям, которые оказались безвредными лишь потому, что можно заменить формальный анализ соответствующим применением общей теоремы, приведенной в § 484.

§ 528. С целью анализа вопроса об ограниченности функции $f(t)$ (при $-\infty < t < +\infty$) заметим сначала, что производная (41) функции (42) является почти периодической. Из известной теоремы относительно почти периодических функций (П. Боль) тогда следует, что функция $f(t)$ ограничена тогда и только тогда, когда она почти периодическая.

Вместе с тем необходимое (но само по себе не достаточное) условие почти периодичности функции (42) заключается в требовании сходимости ряда из квадратов амплитуд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^{2(n+m)}}{(n-am)^2}. \tag{43}$$

Кроме того, если ряд (43) сходится при фиксированном $\mu = \mu_0 > 0$ и при некотором a, то гарантируется не только сходимость этого ряда при любом положительном $\mu < \mu_0$ и при том же a, но также сходимость при $0 < \mu < \mu_0$ и том же a ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^{n+m}}{|n-am|}. \tag{43a}$$

Действительно, если ряд (43) сходится при $\mu = \mu_0 > 0$, то, выбирая положительное $\theta < 1$ и полагая $\mu = \theta\mu_0$, можем на основании неравенства

$$\left(\sum |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

заключить, что ряд (43a) при указанных μ и α сходится. Наоборот, сходимость ряда (43a) достаточна для сходимости ряда (43), так как если

$$\sum |c_i| < +\infty,$$

то также

$$\sum c_i^2 < +\infty.$$

Однако из сходимости (43a) вытекает равномерная сходимость при $-\infty < t < +\infty$ ряда (43), сходящегося, следовательно, к почти периодической функции. Таким образом, рассматривая при любом фиксированном α наименьшую верхнюю границу $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ всех тех неотрицательных чисел μ, при которых какой-либо из рядов (43), (43a) или оба они сходятся, придем к следующему результату.

Для каждого положительного иррационального числа α существует неотрицательное число $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ такое, что

(i) если значение функции Λ (определенной лишь при иррациональных $\alpha > 0$) равно при заданном α нулю, то функция (42) времени t при этом α и при сколь угодно малом $\mu > 0$ не является ни ограниченной, ни почти периодической;

(ii) если, с другой стороны, α таково, что $\Lambda = \Lambda(\alpha)$ отлично от нуля, то функция (42) при этом α ограничена и почти периодическая для положительных $\mu < \Lambda(\alpha)$, но не будет ограниченной и почти периодической для положительных $\mu > \Lambda(\alpha)$. В предельном случае $\mu = \Lambda(\alpha) > 0$ сказать ничего нельзя.

§ 528a. Конечно, $0 \leqslant \Lambda(\alpha) \leqslant 1$. Действительно, ряд

$$\sum\sum \mu^{n+m}$$

сходится лишь при $\mu < 1$. Поэтому если $\Lambda(\alpha) > 1$ для некоторого α, то сходимость ряда (43a) могла бы иметь место лишь при условии, что $|n - m\alpha| \to \infty$ при $n + m \to \infty$. Но последнее условие не выполняется ни при каком фиксированном α, так как известно, что при любом иррациональном $\alpha > 0$ существует бесконечное число пар целых чисел n_k, m_k, для которых

$$\left|\alpha - \frac{n_k}{m_k}\right| < \frac{1}{m_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$ (см. доказательство (ii) § 125).

§ 529. Результат, указанный в § 528, сводит рассматриваемую проблему к исследованию функции $\Lambda(\alpha)$, определенной для всех иррациональных $\alpha > 0$ как наименьшая верхняя граница тех $\mu \geqslant 0$, при которых ряд (43а) сходится. Оказывается, что $\Lambda(\alpha)$ является вообще разрывной функцией α. Действительно, хотя $\Lambda(\alpha) = 1$ для всюду плотного множества значений α, но при некоторых α это равенство может нарушаться и даже $\Lambda(\alpha) = 0$ для значений α, образующих всюду плотное множество. Можно доказать это (и значительно большее) следующим образом.

С одной стороны, те значения α, для которых $\Lambda(\alpha) = 0$ образуют множество, принадлежащее в каком-либо промежутке изменения α ко второй категории в смысле Бэра. Поэтому это множество содержит несчетное множество точек в промежутке изменения α сколь угодно малой длины и как угодно расположенного на оси α. Этот вывод можно сделать на том основании, что ряд (43а) представляет собой частный случай рядов, известных в теории функций действительного переменного как ряды Бореля *).

С другой стороны, почти всюду $\Lambda(\alpha) = 1$. Другими словами, множество тех α, для которых $0 \leqslant \Lambda(\alpha) < 1$, имеет нулевую лебегову меру. Этот результат **) является прямым следствием теоремы относительно диофантовых приближений. Действительно, известно, что не только для любого алгебраического иррационального числа α, но и почти для любого иррационального α существует два положительных числа $c = c(\alpha)$, $C = C(\alpha)$ таких, что

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| > \frac{C}{m^c}$$

для любых целых чисел n, m. Из существования же такой пары чисел $c = c(\alpha)$, $C = C(\alpha)$ вытекает, что ряд (43а) сходится при всех $\mu < 1$, т. е. что $\Lambda(\alpha) = 1$.

---

*) Интересно, что астроном Брунс пришел к рядам вида (43а) и к довольно подробному анализу их необычного поведения гораздо раньше (в 1884 г.), чем была развита математиками общая теория рядов Бореля.

**) Выраженный в терминах «геометрической вероятности» астрономом Гюльденом гораздо раньше (в 1888 г.). чем математики развили теорию меры.

ИСТОРИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

Последующие страницы содержат ссылки на литературу и дополнения к соответствующим разделам основного текста, а также некоторые сведения исторического характера, которые могут представить интерес.

Вопросы, излагаемые в главах I и II, хотя и не само их изложение, являются настолько классическими, что не было возможным привести столь же полные сведения о имеющейся литературе, как в случае остальных глав.

ГЛАВА I

Основными являются следующие монографии (они относятся также к главам II и III): C. G. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik (1866 [1842—1843]; позднее (1884) издано как дополнительный том к собранию сочинений Якоби); H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste 1 (1892); 2 (1893); 3 (1899); G. D. Birkhoff, Dynamical Systems (1927); T. Levi-Civita — U. Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale (три тома, года издания нет) *).

Ссылки на классическую литературу по теории канонических систем можно найти в статье Кэли (Cayley, 1857, Papers 3, 156—204) и в некоторых учебниках (в частности, в книге E. T. Whittaker, Treatise on the analytical dynamics of particles and Rigid bodies, 3 rd. ed., 1927) **).

Было бы весьма желательным дать подробный критический анализ исторического развития исследований по этому вопросу. Имеющиеся в литературе ссылки относительно происхождения фундаментальных математических понятий в аналитической динамике почти все ошибочны. Например, «преобразование Лежандра» (§§ 5—7) встречается впервые не у Лежандра, а у Эйлера, если не у Лейбница (см. P. Stäckel, Bibl. Math. (3), 1 (1900), 517). Точно так же использование импульсов вместо скоростей имело место уже в работах Лагранжа и Пуассона, так что название «уравнения Гамильтона» неоправдано. Кроме того, «теория Гамильтона — Якоби» является лишь частным случаем теории характеристик Коши, развитой ранее.

Учитывая эти обстоятельства, мы старались свести в основном тексте до минимума число определений, связанных с тем или иным именем. Тем не менее терминология, которой мы пользовались, часто нелогична с исторической точки зрения. (Например, «лагранжевы производные» следовало бы назвать «эйлеровыми» или хотя бы производными «Эйлера — Лагранжа».)

Хотя некоторые пункты в §§ 11—13 связаны с классическим выводом десяти консервативных интегралов (см. ниже комментарий к §§ 315—320),

---

*) Имеются в русском переводе: К. Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, 1936; Г. Биркгоф, Динамические системы, Гостехиздат, 1941; Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Курс теоретической механики, ИЛ, т. I, 1952, т. 2, 1951.

**) Имеется русский перевод: Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.

но вся общность применяющегося формализма стала очевидной благодаря теории Ли лишь в связи с принципами общей теории относительности. В отношении литературы см. E. Hölder, Math. Ztschr, 31 (1930), 198—201 230—231.

Изложение в тексте теории канонических преобразований следует методике, применявшейся в линейном случае (§§ 57—64) Уинтнером (A. Wintner, Ann. di Mat. (4) 13 (1934), 105—112) и впоследствии перенесенной на общий случай Ван Кампеном и А. Уинтнером (E. R. van Kampen, A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 58 (1936), 851—863); см. также E. R. van Kampen, A. Wintner, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 168—195.

Единственное полярное разложение (§ 59) неособых матриц содержится, во всяком случае неявно, в статье Оттона (L. Autonne, Palerma Rend. 16 (1902), 123—125; см. примечание в цитированной выше статье Уинтнера). Что касается особого случая, то см. J. Williamson, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 118—123; 45 (1939), 920—922.

ГЛАВА II

Приводимые ссылки относятся, как и выше, лишь к недавним результатам и исследованиям, не перекрывающимся в работах, упомянутых вначале. Что касается исторического развития этой области исследований до середины 19 века, то см. статью Кэли.

По поводу § 100 см. работы Клаузиуса, Больцмана и Сили (1870), обзор которых дан Больцманом в Fortschr. d. Physik 26 (1875), 453—460; см. также E. Betti, Ann. di Mat. (2) 8 (1877), 301—311; P. Bohl, Ztschr. für Math. 35 (1890), 188—191; G. Herglotz., Seeliger Festschrift (1924), 197—199.

Доказательство Пуанкаре (Acta Math. 13 (1890), 67—73) его теоремы возвращения (§ 123a) является вполне корректным, хотя в нем нет непосредственно ссылки на понятие нулевого множества (понятие лебеговой меры относится к более позднему времени). Модернизированная формулировка теоремы Пуанкаре была дана Ван Флеком (E. B. Van Vleck, Bull. Amer. Math. Soc. 21 (1915), 335). Эргодическая теорема (§ 123) была доказана Биркгофом (Proc. Nat. Acad. Wash. 17 (1931), 656—666, 650—655; см. Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 361—379).

Понятие метрической транзитивности (§ 124a) было введено Биркгофом и Смитом (Journ. de Math. (9) 7 (1928), 360—368). Что касается формулировки эргодической теоремы с помощью функции асимптотического распределения (§§ 123—124), см. A. Wintner, Proc. Nat. Acad. Wash. 18 (1932), 248—251; P. Hartman and A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 61 (1939), 977—984. В отношении соответствующей формулировки классического круга проблем Пуанкаре и Данжуа см. D. C. Lewis, Jr., and A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 56 (1934), 407—410. Понятие распределенной устойчивости (примечание к § 123) было предложено Уинтнером (A. Wintner, Nature 145 (1940), 225—226). Относительно результатов, упоминаемых в примечании к § 124, см. J. Hadamard, Journ. de Math. (5) 3 (1897), 382—383; G. D. Birkhoff, Bull. Soc. Math. de France 40 (1912), 305—323.

Относительно систем с известной транзитивностью см. статью Гедлунда (G. A. Hedlund, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), 241—260). Большая сложность всех проблем этого типа проявляется уже в элементарном случае, рассмотренном Фоксом и Кершнером (R. H. Fox, R. B. Kershner, Duke Math. Journ. 2 (1936), 147—150). Плоский предельный случай проблемы геодезических линий на эллипсоиде (см. § 20a) был указан Виртингером (W. Wirtinger, Jahresber. d. D. M. V. 9 (1900), 130—131).

Что касается § 125—130, см. T. Levi-Civita, Prace Mat.-Fiz. **17** (1904), 35—38; Atti del Congr. Intern. Fis. 1927, 1—39; Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), 326—366.

Критерий устойчивости, указанный в §§ 132—133, принадлежит в основном Пуанкаре и Биркгофу (см. их работы, указанные в начале ссылок к гл. I). Критерий устойчивости в том виде, в каком он дан в тексте, свободен от требования, чтобы точечное преобразование сохраняло объем. В соответствии с этим предполагается, что устойчивость относится как к будущему, так и к прошлому.

Пример, приведенный в § 135, был дан в слегка другой форме в статье Пенлеве (P. Painlevé, Comptes Rendus **138** (1904), 1555—1557), а пример, приведенный в § 136, имеется в статье Шерри (T. M. Cherry, Trans. Cambr. Phil. Soc. **23** (1925), 199—200).

По поводу примечания к § 134 см. H. Bruns, Berl. Sitzber, 1890, 543—545 и (что касается Ф. Миндинга) P. Stäckel, Jahresber. d. D. M. V. **14** (1905), 504—506.

Линейные канонические преобразования, указанные Уинтнером (Ann. di Mat. (4) **13** (1934), 105—112), можно также определить как вещественную подгруппу «комплексной» (или «симплектической») группы. Алгебраические проблемы, связанные с вопросами, возникающими в линейной динамике (см. § 153a, § 154a), были полностью решены Вильямсоном (J. Williamson, Amer. Journ. of Math. **58** (1936), 141—163; **59** (1937), 599—617; **61** (1939), 897—911 [см. также **62** (1940), 881—911]). К сожалению, в эту книгу невозможно было включить его алгебраические результаты.

ГЛАВА III

§§ 155—158. Исторически исследования в динамике концентрировались вокруг задач с функциями Лагранжа и Гамильтона в виде квадратичных форм (1) и (7) не только в силу физических соображений (см. G. D. Birkhoff, Dynamical Systems (1927), 14—32), но также благодаря возможности использования римановой n-мерной дифференциальной геометрии (см. §§ 178—179). Вначале рассматривали, как правило, лишь обратимые системы. Однако, как было замечено Леви-Чивита (Torino Atti **31** (1895), 816—823), если L имеет вид $T+U$, но содержит явно время t, то L можно заменить консервативной функцией необратимого типа (1) при условии, что t вводится как $(n+1)$-я координата (см. § 9a, § 93); соответствующий импульс оказывается циклической координатой в указанном в §§ 182—183 смысле (классический переход от (1_1) — (1_3) § 441 к (3_1) — (3_3) § 442 можно рассматривать как элемент этой процедуры). См. также E. Cartan, Lecons sur les invariants integraux (1922), passim; G. D. Birkhoff, Dynamikal Systems, 89—96.

§§ 159—162. Что касается (14), то см. Jacobi (1845), Werke **4**, 478—488; A. Wintner, Quart. Journ. Math. (Oxford) **7** (1936), 214—218.

Наиболее ранний вариант перехода от (15_2) к (15_3) следует из разделов 2 и 9 1-й книги «Начал» Ньютона. Интеграл (16) является некоторым обобщением интеграла, данного Якоби, который заметил, что соотношение (19_1), найденное Лагранжем для $\beta=-2$, остается справедливым при любом β (см. комментарий к § 321). Факт, упоминаемый во втором примечании к § 159, указал Герглотц (G. Herglotz, Seeliger — Festschrift (1924), 197—199; см. P. Bohl, Ztschr. für Math. **35** (1890), 188—191). Боль, а затем Герглотц получили результат, указанный в § 160a, с помощью непосредственного интегрирования, не опираясь на произвольный выбор коэффициента размерности. Что касается §§ 160—161, то см. A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **60** (1938), 473—476.

§§ 163—164. См. L. P. Eisenhart, Ann. of Math. (2) **30** (1929), 591—606.

§§ 165—170. Множество скорости встречается в видоизмененной форме в критерии Миндинга (1838) для устойчивости точки равновесия (см. примечание к § 134) и было введено явно Хиллом (1878) при рассмотрении своего случая ограниченной задачи трех тел (см. комментарий к §§ 462—476 и §§ 489—502). В соответствии с этим общее правило, указанное в § 170 (см. A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **60** (1938), 471—472) принимает стандартную форму в евклидовом случае, рассмотренном в § 238.

§§ 171—181. Что касается возникновения принципа наименьшего действия, см. комментарии Журдена (P. E. B. Jourdain, No. 167 (1908), Ostwald's Klass), где дана подробная библиография. Вначале рассматривался только обратимый случай в римановом пространстве (§§ 178—179). Например, см. статью Миндинга (1864), перепечатанную в Math. Annalen **55** (1902), 119—135, предшествующую соответствующим соображениям Бельтрами и Липшица. По существу переход к общему случаю, рассмотренному в § 171, может быть выполнен непосредственно (см. Poincaré, Méth. Nouv. 3 (1899), 266; Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 203). Полезное формальное замечание, приведенное в § 180, не является как будто общеизвестным, хотя оно и было использовано Леви-Чивита в его теории канонической регуляризации (см. библиографию к §§ 398—399, 415—420, 446—454); см. также G. Darboux, Comptes Rendus **108** (1889), 449—450; P. Painlevé, Journ. de Math. (4) **10** (1894), 35—36. Правило, указанное в § 181, которое играет фундаментальную роль в теории преобразований поверхностей (см. H. Poincaré, Méth. Nouv. 2 (1893), 370; T. Levi-Civita, Ann. di Mat. (3) 5 (1901), 274—278; G. D. Birkhoff, Dynamikal Systems (1927), 159—162, 210) и использовалось, например, Брунсом (Acta Math. **11** (1887), 71—73), было получено еще Якоби и встречается, возможно, также в работах Гамильтона.

§§ 182—183. Возможность «редукции с помощью исключения» становится очевидной после замены функции как Лагранжа, так и Гамильтона так называемой функцией Рауса (см. T. Levi-Civita — V. Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale 2_1 [1927], 373—375). Эта функция, существующая также и тогда, когда исключение каких-либо координат (или импульсов) не является возможным, приводит к комбинации лагранжевых и канонических уравнений и сводится к L или H в двух предельных случаях. См. также E. R. van Kampen, A. Wintner, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 181—182.

§§ 185—187. Трудно решить, кто первый выписал интеграл энергии (1_1), который позволяет свести задачу к квадратуре (он должен был быть известным Эйлеру, но, возможно, относится к более ранней дате). Что касается качественного анализа этой квадратуры, то см., например, G. Dillner, Bordeaux Mém. (2) 5 (1883), 291—304; P. Stäckel, Diss. (Berlin, 1885), 13—17. С целью подчеркнуть методическое различие между проблемами в малом и в большом, рассуждения в §§ 186, 187 опираются преднамеренно не на эту квадратуру, а на множестве нулевой скорости.

§ 188. Эта процедура униформизации и разложения приписывается обычно Вейерштрассу (1866, Werke **2**, 1—18), хотя она имеется не только в посмертной заметке Абеля (Oevres, 2 nd ed. **2**, 40—42), но также в учебнике Миндинга Handbuch der Theoretischen Mechanik (1838). Наиболее ранним вариантом этой процедуры является введение эксцентрической аномалии при анализе эллиптического движения (см. комментарий к § 259).

§ 189. Линейный член, следующий за постоянным членом — результатом инверсии квадратного корня в приближенной формуле (11), был рассмотрен Фату (P. Fatou, Acta Astr. (a) 2 (1931), 135—139); его вычисления содержат, однако, численные ошибки. Уточнение (11) более общего характера было получено независимо Леви-Чивита (Revista Vniv. San Marcos (Lima) 1937, №. 421). Вариантом (11) является результат Ньютона (Principia, Book I. Prop. XLV) о вековой прецессии перигелия в случае неньютонианского статистического гравитационного поля; см. также комментарий к § 219.

§§ 194—198. Вначале Лиувилль пришел (Journ. de Math. (1) 14 (1849), 257—299) к выделению класса проблем, носящего его имя, используя метод разделения переменных (Якоби) (см., например, § 248). Эквивалентный подход, рассмотренный в § 194, ведет к цели более непосредственно и является лишь частным случаем линейного (изоэнергетического) U-преобразования Дарбу — Пенлеве (см. комментарий к § 180). Определение систем более общего вида, допускающих фактическое разделение переменных, является частным вопросом римановой геометрии, так что результаты, имеющиеся в обширной литературе относительно обобщения лиувиллевых систем, выходят за рамки этой книги. Следует лишь упомянуть, что разделение переменных само по себе не решает проблем динамики и что остающийся вопрос об «униформизации» возникающей абелевой проблемы инверсии (см. § 196) освещается обычно в литературе совсем неудовлетворительно. Однако Адамар показал (Bull. des Sci. Math. (2) 35 (1911), 106—113), каким образом можно преодолеть препятствия с помощью непосредственного топологического анализа. Сведéние этой нелокальной абелевой проблемы инверсии для лиувиллевых систем к теории почти периодических функций, как это изложено в тексте, было достигнуто Уинтнером (Amer. Journ. of Math. 60 (1938), 463—472). Теорема, упомянутая в начале § 198 (H. Bohr, Medd. Danske Akad. 10 (1931), No. 12_{IV}; см. также H. Bohr, B. Jessen, Pisa Ann. (2) 1 (1932), 387—398), аналогична теореме, указанной в § 484.

§§ 200—202. Методическое содержание приведенных замечаний представляется в настоящее время банальным как вследствие развития математических исследований в течение последних шести — десяти лет, так и благодаря тому, что можно назвать устной традицией.

Фундаментальная проблема, сформулированная Эренфестом (P. Ehrenfest, Ztshr. für Physik 19 (1923), 242—245), еще не решена; см. действительно A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 60 (1938), 471.

§ 203. Все это принадлежит Эйлеру (около 1765 г.); его многие статьи на этот счет и последующая литература, выходившая до 1862 г., обсуждаются в статье Кэли (Cayley, Papers, 4, 524—532); ссылки, охватывающие публикации до 1905 г., даны в статье Штеккеля (Enc. d. math. Wiss. 4 , 497—498).

§ 205. См. J. Andrade, Journ. de l'Ec. Polytech. 60 (1890), 55.

§§ 206—210. В этих и следующих параграфах преследуется цель систематизировать ряд элементарных фактов, которые, даже если они не освещались в литературе, можно все же рассматривать как известные. Что касается изящного результата, связанного с теорией Ли, то см. Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei (5) 5_2 (1896), 164—171. Соображения, изложенные в § 207, можно, по-видимому, уточнить в том смысле, что если $j > k$, то интегралы площадей позволяют выполнить редукцию от n до k в случае проблемы k тел в пространстве j измерений ($k = 2$ в § 207; при $k = 3$ см. W. Ebert, Astr. Nachr. 157 (1902), 229—256).

§§ 211—212. В то время как (12_3) имеется в «Началах» Ньютона (Book I, sections 2, 3), интеграл энергии (12_2) относится, по-видимому, к более позднему времени (см. комментарий к §§ 241 и 185). Вместе с тем дифференциальное уравнение второго порядка относительно одного только r (см. § 214) было Ньютону известно. Действительно, к этому уравнению приводит сравнение (12_3) с Principia, Prop. VI, Book I. Такое дифференциальное уравнение второго порядка (относительно $1/r$), в котором независимой переменной служит полярный угол, приводится явно в «Теории Луны» Клеро (1765).

§ 213. Это замечание было сделано Борелем (Nouv. Ann. de Math. (3) **15** (1896), 236—238). См. также о необходимости исключения круговых орбит в § 221. В частности, соображения Якоби о вычислении последнего множителя (1845, Werke 4, 460) также не могут быть применены в круговом случае.

§ 214. Ссылки на большое количество работ, посвященных явному виду траекторий в случае силовых функций U частного вида, имеются в статьях Кэлп (стр. 516—521) и Штеккеля (стр. 494—496), упоминавшихся выше (§ 203). Динамический смысл второго члена в правой части (16_2) объяснен в «Началах» Ньютона (Book I, section 9).

§§ 215—219а. Вопрос, поставленный в § 217 и обобщенный в § 219, был сформулирован и решен Бертраном (J. Bertrand, Comptes Rendus **77** (1873), 849—853). Что касается последующей обширной литературы, то см. P. Stäckel, Enc. d. math. Wiss. 4 (1905), 498—499; P. Liebmann, ibid. 3_3 (1914), 526—528. В стандартных изложениях этого материала указывается, что даже для упрощенной задачи, рассмотренной в § 217, требуется нахождение второго приближения. Однако непосредственный анализ, приведенный в § 218, показывает, что ответ на вопрос, поставленный в § 217, зависит лишь от первого приближения, т. е. от уравнений Якоби, так что длинные вычисления, упомянутые в § 219, не необходимы. Трудно сказать, почему это оставляют обычно без внимания. Одной из причин может служить то, что топологическая природа проблемы (см. § 215) или, говоря иначе, связь этой проблемы с существованием дополнительного интеграла в большом (см. § 218а) обычно не реализуется. В то же время именно этот дополнительный интеграл налагает ограничения (см. §§ 148—149, 151) на характеристические показатели уравнений Якоби. (Дополнительный интеграл существует также в случае, указанном в § 219а, но в этом случае период и характеристические показатели не зависят от постоянных интегрирования; см. § 153). Другой причиной является, по-видимому, то, что тривиальное представление кругового движения, данное в § 216, оказывается бесполезным, если отказаться от существенного ограничения, обусловленного тем фактом, что задача относится не к произвольным замкнутым траекториям, а только к траекториям, близким к круговым. Следует подчеркнуть, что без этого ограничения проблема стала бы исключительно трудной, поскольку коэффициенты уравнений Якоби будут тогда не постоянными, а неизвестными периодическими функциями t. В частности, доказательство, приведенное в § 218, опирается лишь на соответствующую комбинацию круговых условий (§ 216) с формулой Ньютона для прецессии, на которую мы ссылались выше (§ 189). Действительно, (21) § 218 сводится к ньютоновой оценке вековой прецессии перигелия в случае, когда U равно некоторой степени r.

§§ 220—226. Излагаемый метод отличается лишь деталями (и оговорками; см. (31_1)—(32_2) и § 221) от метода интеграции, применявшегося Якоби (24 th Vorl. ü. Dyn.) и до некоторой степени еще Гамильтоном (Phil. Trans. 1834), 280—281, 1835, 135—139) в случае статического поля с радиальной симметрией.

§§ 228—232а. См. G. D. Birkhoff, Palermo Rend. 39 (1915), 270—275, или Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), 202—216. В обратимом случае некоторые выводы относятся, конечно, к более раннему времени. См. также D. J. Korteweg, Sitzber. Akad. Wien 93 (1886), 995—1040; Lord Kelvin, Papers 4 (1891—92), 513—522; Sir G. H. Darwin, Papers 4 (1897), 12—15; также Н. Моисеев, Rend. Acc. Lincei (6) 20_2 (934), 172—182, 256—261, 261—265, 321—327.

§§ 233—233а. См. Lord Kelvin, Papers 4; E. T. Whittaker, M. N. Royal Astr. Soc. 62 (1902), 186—193, 346—352. Уиттекер не рассматривал проблемы существования; см. Birkhoff, Trans Amer. Math. Soc. 18 (1917), где имеются ссылки на A. Signorini (1912) и L. Tonelli (1911). Систематический обзор важных исследований Морса можно найти в его Calculus of Variations in the Large (1934). Чтобы убедиться в том, что анализ ряда систем с помощью характеристик более сложен, чем с помощью индексовых соотношений, см. Birkhoff, Pisa Ann. (2) 5 (1936), 31—34; Mem. Pont. Acad. Novi Lync. (3) 1 (1936), Chap. V. В связи с вопросом, затронутым в конце § 233, см. попытку В838ториса (L. Victoris, Math. Ztschr. 19 (1924), 130—135) относительно периодических решений ограниченной задачи трех тел (эти решения не являются алгебраическими функциями t).

§§ 234—235. G. W. Hell (1877), Works 1, 244—246; H. Poincaré, Méth. Nouv. 3 (1899), 280—282. См. также комментарий к §§ 228—232а.

§§ 236—237а. См. Wintner, Sächs. Sitzber. 82 (1930), 345—354, где показано, что уравнения Якоби, выписанные Пуанкаре (Méth. Nouv. 3, 282—283) как для обратимого, так и для необратимого случаев в последнем случае неверны. Другой подход, основанный на применении конформного отображения, был указан Биркгофом (см. выше). См. также G. H. Darwin, ibid., 27—34. Что касается § 237а, то см. A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 53 (1931), 621—622.

§§ 238—240. E. Strömgren, Astr. Nachr. 174 (1906), 33—46, см. G. H. Darwin, ibid., 25—27.

ГЛАВА IV

§ 241. Было бы резонно предположить, что Ньютон вывел (3_2) как следствие (2_1). Однако целый ряд важных страниц в «Началах» касаются вывода (2_1) из кеплеровых законов для кругового планетного движения (и опираются, следовательно, на операцию дифференцирования, а не интегрирования). Первым, кто доказал, что все траектории при $U(r) = \frac{1}{r}$ являются коническими сечениями, был, по-видимому, Иван Бернулли (Opera 1, 1710, 470). Его вычисления описаны в основном в § 214 и совпадают с теми, которые можно найти сегодня в элементарных учебниках; см. также комментарий к § 259. Метод, изложенный в § 241 и гораздо более простой, принадлежит Лапласу (1798, Oevres 1, 183). Сейчас он, по-видимому, почти забыт, хотя был открыт также Якоби (1842, Werke 4, 282).

§ 244. Тот факт, что названия трех типов конических сечений оказываются соответствующими поверхностям, имеющим в каждой своей регулярной точке вторую фундаментальную форму с соответствующей сигнатурой (индикатрисой Дюпена), является чистым совпадением, не имеющим исторического смысла. Действительно, в те времена дифференциальная геометрия этих поверхностей еще совсем не затрагивалась в литературе.

§ 245. На геометрический смысл W указал P. G. Tait (1865, Papers **1**, 68—70). Что касается его статьи, упомянутой в примечании, то см. Quart. Journ. of Math. **7** (1866), 45 где имеется ссылка на формулу Гамильтона).

§§ 247—248. В случае параболических орбит (см. (15_1) § 249) теорема, рассматриваемая в этих параграфах, была получена впервые Эйлером (Misc. Berol. **7** (1743), 16). Общая теорема была открыта Ламбертом (1761) и опубликована в его монографии Insigniores orbitae cometarum proprietates (No. 133 (1902) в Ostwald's Klass). Доказательство Ламберта основано на громоздких геометрических соображениях. Доказательство, найденное позже Лагранжем (1778, Oevres **3**, 559—582), является аналитическим, но не более коротким. Доказательство, помещенное в § 248, было дано Якоби (1837, Werke **4**, 122); аналогичное, хотя и более длинное доказательство встречается в работах Гамильтона (См. Phil. Trans, 1834, 280—286).

§§ 249—257. На два варианта, имеющие место для эллиптического случая и рассмотренные в § 249, указал Кэли (Cayley, 1869, Papers **7**, 387—389). Представляется затруднительным дать ссылки на литературу относительно всех результатов, описанных в §§ 250—257. Фактически все эти результаты, за исключением тех, которые касаются разрывных решений, введенных Тодхунтером (I. Todhunter, Researches in the Calculus of Variations (1871), Chap. VIII), вытекают из замечания Якоби (Werke, 1837, **4**, 47—48) о сопряженных точках. Конечно, точная теория рассмотренных минимизирующих орбит связана с позднейшим развитием вариационного исчисления; см., например, Ph. Frank, Monatshefte für Math. **20** (1909), 171—185, 189—192.

§ 259. Этот изящный метод интегрирования принадлежит, по-видимому, Болину (K. Bohlin, Bull. Astr. **28** (1911), 144). Некоторые варианты относятся, конечно, к более раннему времени (см. §§ 261, 267). Таким образом, из соотношений, полученных Ньютоном и в более явном виде Клеро (см. комментарий к §§ 211—212), вытекает, что функция $1/r$ от t определяется в случае $U = 1/r$ линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

§§ 261—265. В более или менее явном виде все эти соотношения имеются в «Началах» Ньютона (Book I, section 3), где, конечно, анализ трех типов орбит скорее синтетический и не всегда исчерпывает все случаи.

§§ 268—269. Все это восходит к Бурро (C. Burrau, Astr. Nachr. **135**, (1894), 164).

§ 271. Траектории, отвечающие силовой функции $U = 1/r^2$, были рассмотрены Ньютоном в его «Началах» и позднее дискутировались более детально Котсом: см. Cailay, 1862, Papers **4**, 517.

Если притяжение обратно пропорционально не второй, а произвольной степени расстояния и аналитическая регуляризация оказывается невозможной, то было бы желательно исследовать топологическую структуру семейства интегральных кривых вблизи (x, y) = (0, 0). При таком исследовании были бы введены топологические инварианты (которые должны в сильной степени зависеть от показателя силы притяжения).

Что касается дальнейших ссылок на литературу, относящуюся к задаче двух тел, то см. G. Herglotz, Enc. d. math. Wiss. **6**, 381—390 (1907) и в отношении разложений (§§ 274—299) H. Burkhardt, ibid. 2_1 (1912), 827—829, 891—902, 1345—1349, W. F. Osgood, ibid. 2_2 (1901), 44—47.

§ 278. Lagrange (1771), Oevres **3**, 113—138; Bessel (1824), Ges. Abh. **1**, 84—102.

§§ 279—280. Bessel (1818, 1824), ibid. 1, 17—20; 100.

§§ 281—282. См. Burkhardt, ibid., 829—827, 892—895.

§§ 283—284. Первый корректный вывод (44_1), т. е. (44а) принадлежит Карлини (1817; см. Jacobi, Werke 6 (1850), 188—245), чья работа оставалась, однако, незамеченной до тех пор, пока Якоби (1848, Werke 6, 175—188) не исправил имеющиеся там вычислительные ошибки. Лаплас (Oevres 5, 473—489) пришел к (44_1), используя соображения, которые были опубликованы (1827) после его смерти и которые были, как он признавал (ibid., стр. 489), эвристическими; действительно, он доказал асимптотическую формулу для мнимых, хотя требовалось доказать для вещественных значений аргумента в этой связи см. A. Wintner, Proc. Nat. Acad. Wash. 20 (1934), 57—62; P. Hartman, Amer. Jorn. of Math. 62 (1940), 115—121). Соотношение (44_2) не столь определенное, как (44_1), и рассматривалось только Карлини (но не Лапласом); см. Jacobi, предыдущая ссылка. Согласно Коши (1843, Oevres (1) 12, 164), который вывел (45_1), обе формулы (44_1) и (44_2) могут быть просто получены с помощью его метода теории функций комплексного переменного (1843, Oevres (1) 8, 128—133, и 1845, Oevres (1) 9, 75—83); этот факт был вновь обнаружен Риманом (1863 (1876); Werke 2 nd. ed., 426—430), которому принадлежит более простой вывод. Что касается современного изложения этого «метода скорейшего спуска», то см. O. Perron, Münch. Sitzenber., 1917, 191—220, где также доказывается (45_2). Число 0,6..., определяемое согласно (48), было введено Лапласом (см. предыдущую ссылку); что касается его значения (49), то см. письмо (1889) Стилтьеса Эрмиту (Correspondence 1, 433—434).

Другие источники, относящиеся к §§ 277—284, можно найти в книге Ватсона Treatise on Bessel Functions и в статье Буркгардта (см. Jahresber d. D. M. V. 10_1 (1908), Chap. III). Значение проблем, затронутых в §§ 283—299, в историческом развитии теории аналитических функций обсуждается в статье Брилла и Нотера (Brill and Noether, ibid. 3 (1894), Chap. II).

§§ 285—299. Лагранж получил свою формулу (59) § 289 в 1770 г. (Oevres 3, 126) и применил ее (1771) к уравнению Кеплера (ibid., 113—138). Имея в виду формальную перегруппировку рядов, путь, указанный в §§ 287—288, можно рассматривать как модернизацию метода Лагранжа (см. §§ 297—298). Стандартным доказательством (53_1) и (53_2) является не это, а описанное в §§ 291—292 (см. А. П. Чебышев, Oevres 1, 251—270 [1857]) или замечание Пюизо в Lagrange's Oevres 12, 341—346) и полученное Коши (1829, Oevres (1) 2, 41—48) в его теории аналитических функций (другие источники в этой области см. Brill—Noether, предыд. ссылка, 176—179, 187—189; Osgood, предыд. ссылка, 46—47). Критическое замечание, приведенное в конце § 292, относится, конечно, к более поздней дате (1906, A. Hurwitz, Werke 1, 655—659). Результаты, изложенные в §§ 294—295, были получены Шарлье (C. L. V. Charlier, Lund. Obs. Medd., № 22) и Леви-Чивита (Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei (5) 13_1 (1904), 260—268). Фактическое неравенство (68) было вновь найдено Каптейном (Kapteyn, Ann. Éc. Norm. Sup. (3) 10 (1893), 96—99), который также признавал его значение для анализа решения уравнения Кеплера (см. также Watson, предыд. ссылка, 268—270 и Chap. XVII). Что касается аналогов разложений, приведенных в § 295 для случая гиперболического движения, то см. H. Block, Ark. för Math. Astr. Fys. 1 (1904), 467—479.

Значение соображений, приведенных в §§ 300—312а, заключается в том, что они дают грубую аппроксимацию решения ограниченной задачи трех тел. Например, (7_2) § 300 объясняет замечание Якоби, сделанное им в связи с формулой (11) в его 5-м томе Vorl. ü. Dyn. Аналогичным образом, правило, приведенное в §§ 302—303, может быть полезным в связи с кольцевым преобразованием, рассмотренным Пуанкаре (Acta Math. **13** (1890), 171—174; Méth. Nouv. **3** (1899), 196—200, 374—381; Palermo Rend. **33** (1922), 375—407) и Биркгофом (Palermo Rend. **39** (1915), 288—295; см. Trans. Amer. Math. Soc. **14** (1913), 14—22; Acta. Math. **47** (1926), 297—311; Dynamical Systems (1927), Chap VI). Что касается материала, помещенного в §§ 307—309 и в §§ 312—312a, то см. A. Wintner, Math. Ztschr. **34** (1932), 367—373.

§§ 305—307. Условия, о которых идет речь, требуются в теории периодических решений ограниченной задачи трех тел. См. наиболее разработанные разделы только что упомянутых работ Пуанкаре, а также его статьи в Bull. Astr. **1** (1884), 65—74; **8** (1891), 12—24; **19** (1902), 177—198; T. Levi-Civita, Ann. di Mat. (3) **5** (1901), 284—289; G. D. Birkhoff, Palermo Rend. **39** (1915), 295—313; Pisa Ann. (2) **4** (1935), 267—306; B. O. Koopman, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 310—331; P. Stäckel, Jahresber. d. D. M. V. **28** (1919), 180—181; A. Wintner, Sächs. Sitzber. **82** (1930), 3—56; Math. Annalen **96** (1926), 284—318; M. Martin, Amer. Journ. of Math. **53** (1931), 259—273; E. Hölder, Sächs. Sitzber. **83** (1931), 179—184; Amer. Journ. of Math. **60** (1938), 801—814; Math. Ztschr. **31** (1929), 225—239 (см. L. Lichtenstein, ibid. **17** (1923), 62—110); также T. Uno, Sendai Astr. Rap. **1** (1938), 149—191.

§§ 310—311. T. Levi-Civita, Ann. di Mat. (3) **9** (1904), 21—25; см. также F. R. Moulton, Proc. London Math. Soc. (2) **11** (1913), 367—384, где имеются ссылки на работу Бурра (см. §§ 268—269 выше).

ГЛАВА V

Ссылки на классические работы, относящиеся к задаче многих тел, могут быть найдены в следующих учебниках: O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegung, 1888; F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 1, 1896; H. C. Plummer, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, 1918.

Весьма полезные библиографические сведения дает R. Marcolongo, Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni (No. 403—405 (1919) of the Manuali Hoelpi).

§ 313. Этот формальный подход к «физической» проблеме не принадлежит конечно, Ньютону, и на формулировках лежит печать влияния критики Маха. Астрономические выводы обсуждаются Арндтом (E. Arndt, Enc. d. math. Wiss. 6_1, (1905) 3—15) и Баушингером (I. Bauschinger, там же (1919) 843—895). Запись силовой функции { } в виде (1) принадлежит Лагранжу (1773, Oevres 6, 348, также 1777, 4, 408).

§§ 315—320. Хотя фактическое содержание десяти классических интегралов было уже известно в конце первой половины 18 века (см. комментарии Журдена в связи с работами Ньютона, Клеро, Д. Арчи, Д. Бернулли и Эйлера в № 191 (1914), Ostwald's, Klass), но их нынешняя форма и открытие формулировки (7_1) интеграла (7_2) принадлежит Лагранжу (см., например, Oevres 9, 386; Oevres 6, 240, где (7_1) записано для $n = 3$). Фундаментальное замечание, что интегралы, выписанные в §§ 316—317, вытекают из галилеевого автоморфизма уравнений движения, дано впервые Якоби в Vorl. ü. Dyn. (1842), но оно должно было быть известным также Лагранжу (1777, Oevres 4, 406) по крайней мере в неявной форме). Связь материала, изложенного в §§ 315—317, с общей теорией Ли обсуждается, например, Энгелем (F. Engel, Gött. Nachr, 1916, 270—275, 1917, 189—198). Что касается § 319, то см. также J. R. Schütz, Gött. Nachr. 1897, 110—123. Свойство полноты галилеевой группы, доказанное в § 318, считается обычно очевидным (хотя это не так; A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 60 (1938), 473—476). Произвольность множителя в § 315 (см. Jacobi, Werke 4 (1845), 485—488; явно сформулировано Дзиобеком в цитированной выше книге, стр. 64) является лишь одной из деталей принципа динамического подобия Галилея — Ньютона.

§ 320а. H. Bruns, Sächs. Sitzenber. 13 (1887), 1—39, 55—82 (-Asta Math. 11 (1887), 25—96); H. Poincaré, Méth. Nouv. 1 (1892), 233—334; P. Painlevé, Comptes Rendus 124 (1897), 173—176; Bull. Astr. 15 (1898), 81—113; Comptes Rendus 130 (1900), 1699—1701.

Ошибка в работе Брунса была исправлена Пуанкаре, Comptes Rendus, 123 (1896), 1224—1228. Точка зрения на алгебраические интегралы, высказанная в § 320а, не является, возможно, общепринятой, но она с необходимостью вытекает из геометрического, т.е. нелокального, понятия неинтегрируемой динамической системы.

В этой связи см. T. Levi-Civita, Verh. des III, Int. Math. Kongr. 1904 (1905), 407—408 и его статью в Comptes Rendus du 2 me Congr Int. de Méc. Appliquél, 1926 (1927); см. также J. Chazy, Bull. Astr. (2) 8 (1933), 403—436.

§ 321. См. Wintner, предыдущая ссылка. Интеграл (17) был получен Якоби (4th. Vorl. ü. Dyn.), который также показал, что этот интеграл позволяет свести задачу о прямолинейном движении трех тел к квадратурам (1837, 1844, Werke 4, 481—488, 533—539).

§ 322а. Lagrange (1772), Oevres 6, 233—240 (где $n = 3$).

§ 323. Laplace (1798), Oevres 1, 65—69 (см. 3, 173), где случай $C \neq 0$ исключен.

§§ 324—331а. Систематического изложения и доказательств этих кинематических результатов в литературе нет. хотя большинство из них нельзя рассматривать как «очевидные» (см. § 373а, 374а). Формулы в § 325а рассчитаны на компланарное решение, понятие которого было введено в § 325, и хотя это понятие излишне, если $n = 3$, оно оказывается полезным при попытке обобщить для произвольного n некоторые результаты, являющиеся классическими для $n = 3$. Это иллюстрируется результатом, приведенным в § 326, который встречается в литературе лишь для случая $n = 3$, вводящего до некоторой степени в заблуждение (рассмотрен впервые Дзиобеком, предыд. ссылка, стр. 63, и более просто Зундманом в начале статьи, на которую мы ссылаемся ниже). Другие результаты даются теорией гомографических решений (§§ 373—374), где основные теоремы связаны неявно с понятием компланарного решения (хотя утверждаемые в этих теоремах результаты встречаются в литературе). Результат, указанный в § 327, принадлежит в астрономии к общеизвестным, по крайней мере при $n = 3$. То же самое замечание можно сделать по поводу §§ 328—329. В то же время результат, изложенный в § 331, принадлежит Пицетти (P. Pizetti, Rend. Acc. Lincei (5) 13_1 (1904), 24—25, где n произвольно; представляется затруднительным указать ссылку на более раннюю работу даже для $n = 3$). Пример, указанный в примечании к § 325, был сообщен мне недавно ван Кампеном в личной беседе.

§§ 332—332а. Эти фундаментальные следствия из тождества Лагранжа (2_4) были получены Якоби (4th. Vorl. ü. Dyn. (1842)).

Ошибочное объяснение парадокса Якоби (предыд. ссылка) относительно столкновений было дано Зеелигером (Astr. Nachr. 113 (1885), 358), а правильное — Фройндлихом (E. Frendlich, там же, 208 (1919), 209—212).

Существенные уточнения к соображениям, приведенным в §§ 332—332а, содержатся в исследованиях Шази, которые были опубликованы впервые в Comptes Rendus, а затем собраны в его статье в Ann. Ec. Norm. Sup. (2) 39 (1922), 29—130. [Соответствующие вопросы в предельном случае ограниченной задачи трех тел были в дальнейшем рассмотрены Копманом (B. O. Koopman, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), 288—304)]. Шази впервые показал, что если $h > 0$, то отношение наименьшего к наибольшему из $\frac{1}{2}n(n-1)$ взаимных расстояний стремится при стремлении t к бесконечности к пределу, и что этот предел является непрерывной функцией начальных условий. После этого Шази классифицирует при $n = 3$ различные решения при положительном h в соответствии с порядком величины (при больших t) взаимных расстояний. К аналогичным результатам он приходит также в предельном случае $h = 0$. Наконец, он развивает предварительную теорию классификации также в случае отрицательной энергии (являющемся наиболее трудным; см. замечание в скобках в § 332а). В его статье (Journ. de Math. (3) 8 (1929), 353—380) и в его сообщении (Bull. Astr. (2) 8 (1933), 403—436), касающихся его теории классификации, Шази удалось получить в этом направлении дальнейшие результаты. К сожалению, доказательства его глубоких результатов слишком длинны, чтобы их можно было воспроизвести в этой книге. См. также комментарий к §§ 431—431а.

§§ 333—338а. Хотя изложение в тексте слегка упрощено, но все эти результаты и методы принадлежат Зундману (K. F. Sundman, Acta Soc. Sci. Fenn. 35 (1909), № 9, где $n = 3$; его соображения остаются, однако, справедливыми при любом n, как было замечено Блоком (H. Block, Lund. Astr. Obs. Medd. (2) 6 (1909), № 6), а затем и Шази (Bull. Astr. 35 (1918), 321—341; см. Comptes Rendus, 157 (1913), 688—691). После публикации статьи Зундмана оказалось, что его предварительный результат для $C = 0$ (§ 335) был известен Вейерштрассу (письмо (1889) к Миттаг-Лефлеру; Acta Math. 35 (1912), 57—58). Эта фундаментальная работа Зундмана привлекла гораздо меньшее внимание, чем его теория парных столкновений (она не была даже прореферирована в Fortschr. a. Math., и позже не была воспроизведена в Acta Math. 36 (1913); см. ниже §§ 348—352.

Представлялось целесообразным отложить формулировку фактического содержания этих результатов до §§ 361—364.

На отчетливый тауберов характер соображений Зундмана, из которых вытекают соответствующие $(C, 1)$-результаты, относящиеся к несколько более поздней дате (Гарди — Литтлвуд), было недавно указано Уинтнером [см. R. P. Boas, Jr., Amer. Journ. of Math. 61 (1939), 161—174); позже Карамата (J. Karamata, там же 769—770) показал, что тауберовы условия Зундмана относительно односторонней ограниченности можно заменить соответствующими условиями осцилляции]. Интересно, что одна из наиболее ранних тауберовых теорем, а именно теорема, указанная в § 362, была приведена Адамаром в связи с одним вопросом динамики (Journ. de Math. (5) 3, 334); что касается уточнения константы в этой теореме, то см., например, E. Landau, Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1914), 43—49.

§ 339. См. J. Chazy, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) 39 (1922), 124. Для $n = 3$ Шази доказал (там же, 124—126; Comptes Rendus 157 (1913), 1398—1400) аналогичную, хотя и более слабую теорему относительно парных столкновений, показав, что расстояние между двумя из трех тел не может стремиться к нулю при стремлении t к бесконечности, если в это же время их расстояния от третьего тела превосходят некоторый положительный предел.

§§ 340—343. Гелиоцентрические уравнения (12) так же стары, как и первые теории возмущения, и стали уже стандартными в конце первой половины 18 века. Введение возмущающей функции (11_2) относится к более поздней дате, так как это стало возможным лишь после введения Лагранжем функции (3_2) § 314.

§§ 344—347. Эти частные решения принадлежат Франсену (A. E. Fransen. Öfv. Stockh. Acad. **52** (1895), 783—805). См. также J. Chazy, Comptes Rendus **169** (1919), 526—529, Bull. Astr. (2) **1** (1921), 171—188.

§§ 348—352. Эта теория в ее настоящей форме принадлежит Зундману (Acta Soc. Sci. Fenn. **34** (1907), № 6; воспроизведена в Acta Math. **36** (1912), 105—179), хотя многие результаты были известны ранее (Брунс, Пенлеве, Вейерштрасс); см. комментарий к §§ 407—412. Попытка Бисконини (G. Bisconini, Acta Math. **30** (1904), 49—91) была неудачной, поскольку он сформулировал результат, эквивалентный тому, который был доказан в § 352. Хотя Зундман рассматривал только случай $n = 3$, переход к любому n выполняется непосредственно, во всяком случае, если упростить его анализ, как это было сделано выше, в некоторых несущественных пунктах.

§§ 353—354. Эти факты согласуются с астрономической традицией, но впервые были доказаны Шази (Comptes Rendus **168** (1919), 81—83; Ann. Ec. Norm. Sup. (3) **39** (1922), 127).

§§ 355—360. Центральные конфигурации при $n = 3$ были обнаружены в коллинеарном случае (§ 358) Эйлером (Nova Comm. Petrop. **11** (1767), 144—151; Hist. de l'Acad. Berl. **1770**, 194—220), а в случае, изложенном в § 359, Лагранжем (1772, Oevres **6**, 272—292), который нашел также случай Эйлера. В частности, Эйлер получил свое уравнение пятой степени (путем непосредственного анализа) также для предельного случая ограниченной задачи. Общий анализ центральных конфигураций (§§ 355, 357), приведенный в §§ 358—359, принадлежит Дзиобеку (Astr. Nachr. **152** (1900), 33—46). Фактически понятие центральной конфигурации было введено Лапласом (1789, Oevres **11**, 553—558; 1805, **4**, 307—313), который пришел к этому понятию путем непосредственного, но неполного анализа лагранжевых гомотетических решений (см. ниже). Любопытно, что в большинстве элементарных учебников и даже в весьма полезном в остальном историческом обзоре Кэли (1862, Papers **4**, 540) эти решения приписываются Лапласу (который, со своей стороны, не имел привычки давать ссылки). Фундаментальная статья Дзиобека обычно в литературе не упоминается (см., например, H. Andoyer, Bull. Astr. **23** (1906), 50—59; F. R. Moulton, Ann. of Math. (2) **12** (1910), 1—17; W. D. MacMillan and W. Bartky, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), 838—875; см. также W. L. Williams, ibid. **44** (1938), 562—579, где рассматривается неколлинеарный плоский случай задачи $n = 5$ тел). В частности, Дзиобек пришел к (13) и к нескольким дальнейшим результатам для случая $n = 4$ и высказал предположение, дискутировавшееся позже детально Мак-Милланом и Бартки (предыд. ссылка). Статье Дзиобека предшествовала заметка Лемана-Фильгеса (R. Lehmann-Filhès, Astr. Nachr. **127** (1891), 137—144), обнаружившего конфигурацию, указанную в § 359, для $n = 4$ и рассмотревшего случай (*i*) § 360 при любом n (что касается последнего случая, то см. также F. R. Moulton, предыд. ссылку, где анализ, опирающийся на метод, который был описан в § 356, связан с определителем, рассмотренным Гильдебрандтом). Вычисления, связанные с известными конфигурациями, упомянутыми в (*iii*) § 360, являются, конечно, тривиальными; см., например, R. Hoppe, Arch. der Math. **64** (1879), 218—223; Emilia Breglia, Giorn. di Mat. (3) **7** (1916), 165—168.

§§ 361—364. См. примечание к §§ 333—338a.

§§ 365—368а. На затруднения этого типа (см. также §§ 411, 425) впервые указал Пенлеве (см. его Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, Stockholm, 1895, Paris, 1897, 543—577, 587—589, где имеются ссылки на соображения Пуанкаре). Заметка Цейпеля (H. von Zeipel, Arc. för Mat. Astr. Fys. 4 (1898), № 32) содержит рассуждения, цель которых сводится к тому, что если U обращается в бесконечность при стремлении t к конечному пределу, то J должно стремиться к бесконечности, если только все тела не стремятся к определенным предельным положениям. Однако представляется затруднительным заполнить пробел. В анализе Фройндлиха (E. Freundlich, Berl. Sitzber., 1918, 168—188) встречающиеся фактические трудности были, по-видимому, просмотрены. Их появление в проблеме одновременных столкновений было проанализировано позже Шази (Bull. Astr. 35 (1918), 321—389). Согласно Шази (см. предыд. ссылку, 341—364) случайное обстоятельство, указанное в § 368 относительно спиралей, не имеет, конечно, места при $n = 3$. Фактически какие-либо случаи, где это обстоятельство имеет место, не известны.

§§ 369—378. Результат, приведенный в § 373, принадлежит Пицетти (Pizzetti, Rend. Acc. Lincei (5) 13 (1904), 276—283), результат, указанный в § 374, при любом n также принадлежит Пицетти (там же), а при $n = 3$ — Лагранжу (1772, Oevres 6, 272—292, где подчеркивается, что эта теорема является центральной; Лаплас в своем анализе, упомянутом выше, полностью игнорирует эту теорему). В частности, § 377 восходит к работе Лагранжа для $n = 3$; см. Дзиобек, предыд. ссылку. Необходимым является полное подтверждение результатов, изложенных в §§ 375—377, которое обычно опускается в литературе. Иначе едва ли возможно доказать, что все случаи, перечисленные в § 378, фактически существуют. Пример, приведенный в § 374а, был дан Банахевичем (Comptes Rendus 142 (1906), 510—512). Однако его анализ довольно сложен, поскольку не упоминается и не используется тот факт, что конфигурация тел для этих решений представляет собой равнобедренный треугольник (см. A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 60 (1938), 473); по-видимому, по этой же причине не встречается в литературе пример, приведенный в § 373а, для которого чисто аналитические выкладки без использования какой-либо геометрии гораздо более сложны.

§§ 379—380. Это — решения, «стационарные в смысле Рауса» (T. Levi-Civita, Prace Mat.-Fys. 17 (1906), 1—40). См. также H. Andoyer, Bull. Astr. 23 (1906), 50—59.

§§ 381—382. Что касается § 381, то см., например, H. Andoyer, там же, 129—146. Результаты (I) и (II) § 382 принадлежат Лиувиллю (Journ. de Math. (1) 7 (1842), 110—113; (2) 1 (1856), 248—264) и Гашо (G. Gascheau, Thèse, Paris, Bachelier, 1843; Comptes Rendus 16 (1843), 393—394) соответственно. Можно считать, что последующие результаты Гюльдена (Bull. Astr. 1 (1884), 361—369) и Плюммера (M. N. Royal Astr. Soc. 62 (1902), 6—17) для предельного случая ограниченной задачи содержатся в результатах Гашо и Лиувилля соответственно.

§ 382а. J. C. Maxwell (1856), Papers 1, 288—376 (Part II); см. L. Lichtenstein, Math. Ztschr. 17 (1923), 62—110; Pisa Ann. (2) 1 (1932), 173—213.

§§ 383—388. Что касается введения подходящих линейных комбинаций барицентрических координат, то см. P. Pizetti, Atti Acc. Torino 38 (1903), 954—961. Замечание в § 384 принадлежит Пуанкаре (Bull. Astr. 14 (1897), 53—67; перепечатано в Acta Math. 21 (1897), 83—97). Идеальные массы

(§ 385) и соответствующие цепочки координат вместе с их изящными следствиями (15_1)—(15_3) были введены для $n = 3$ Якоби (Werke 4, 299—306) и позднее обобщены для любого n Радау (R. Radau, Ann. Ec. Norm. Sup. (1) 5 (1868), 311—375); см. также F. Hopfner, Astr. Nachr. **195** (1913), 256—262. Геометрическая интерпретация принципа сохранения кинематического момента $n = 3$ тел (§ 388) была также предложена Якоби (там же, 307—308). О факте, что существуют исключительные случаи, в которых эта интерпретация оказывается непригодной, в литературе как будто не упоминалось. Сама проблема в том виде, как она сформулирована в § 388а, представляется не простой. Фундаментальный факт, указанный в § 389, был доказан Мак-Милланом (в статье E. J. Wilczynski, Ann. di Mat. (3) 21 (1913), 17—31); см. также J. Chazy, Bull. Astr. (2) 1 (1921), 171—188). Соответствующая проблема для $n > 3$ в том виде, как она сформулирована в § 389а, в литературе не рассматривалась, поскольку она связана с понятием компланарного решения.

§§ 390—397. Теория редукции задачи n тел восходит к Лагранжу (1771, Oevres 6, 227—331), который доказал, что классические интегралы позволяют привести общую задачу $n = 3$ тел к системе седьмого порядка (см. § 434). Статья Лагранжа, по-видимому, ускользнула от внимания Якоби (1842, Werke 4, 295—314), который пришел к тому же самому результату с помощью соображений, излагавшихся выше (§§ 387—388). Знаменитый результат Якоби об «исключении узлов» содержится, хотя не в такой непосредственной геометрической форме, в формуле Лагранжа (однако ни Лагранж, ни Якоби не пришли к канонической форме редуцированных уравнений движения). Последующая литература по этому поводу весьма обширна, и она обсуждается на стр. 29—44 сообщения Марколонго. Последний метод, рассмотренный там и принадлежащий Леви-Чивита (Atti Ist. Veneto **74** (1915), 907—939), был позже представлен в иной форме Ронки (там же, **76** (1917), 1221—1225). См. также E. R. van Kampen, A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **59** (1937), 153—166, 269, где редукция симметрична по отношению к $n = 3$ массам. Геометрический в известной степени подход к лагранжевой редукции принадлежит Биркгофу (Dynamical Systems, 1927, 283—288); его соображения относятся непосредственно к 18-мерному фазовому пространству (см. §§ 390—392 для $n = 3$), в котором рассматривается поток, состоящий из интегральных кривых, которые представляют собой линии пересечения гиперповерхностей, образованных десятью классическими интегралами. По этому поводу см. E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, 1922, 172—181, где проблема редукции интерпретируется кинематически и с точки зрения используемого инфинитезимального преобразования. В литературе функция H для редуцированных уравнений, записанная в виде (33) § 394, не встречается. Однако эта функция может быть получена после применения к выражению для H, данному ван Кампеном и Уинтнером (цит. соч.), бинарной подстановки, представляющей собой каноническое расширение третьего из их уравнений (51). Применение этой подстановки представляется целесообразным по причинам, которые ясны из § 435. Поток, рассмотренный Биркгофом, тогда записывается (§§ 437—440) более или менее явно с помощью дифференциальных уравнений, являющихся симметричными по отношению к массам и имеющих натуральную форму. Однако этот подход к редуцированной задаче связан с интереснейшей нерешенной проблемой, сформулированной в § 436 (встречающиеся особые случаи являются, конечно, исключительными).

§§ 398—399. Кроме литературы, указанной в гл. 2 библиографии Марколонго, см. работы Леви-Чивита (Rend. Acc. Lincei (5) 24 (1915), 61—75, 235—248, 421—433, 485—501, 553—569) относительно плоского случая для $n = 3$, лекции Картана (предыд. ссылка) и, наконец, заметку Мурнагана (E. D. Murnaghan, Amer. Journ. of Math. **58** (1936), 829—832), где дан короткий вывод (37) § 399. Было бы интересно вычислить (см. W. Kaplan, Composito Math. 5 (1938), 327—346), по крайней мере в некоторых случаях (прежде всего для $n = 3$, $C = 0$), основные топологические характеристики алгебраических множеств, представимых пересечениями классических интегральных поверхностей.

Качественный результат в прямолинейном случае для $n = 3$ [в приведенной форме дан Эйлером (Nova Acta Petrop. **3** (1776), 126—141) и затем Якоби (1845, Werke 4, 478—485)] принадлежит Шази (Bull. Soc. Math. de France 55 (1927), 222—268). Этот случай, который в астрономии не вызывает большого интереса, является сегодня единственным, в котором можно пытаться (см. G. D. Birkhoff, Dynamical Systems (1927), 288—291) провести детальное качественное исследование.

§§ 399a—402. Формальные упрощения, возникающие при $h = 0$, вытекают из общего замечания Якоби (предыд. ссылка, 485—488) и в прямолинейном случае при $n = 3$ были известны еще Эйлеру (предыд. ссылка). Наиболее ранним вариантом этого упрощения является интеграция задачи двух тел в случае параболического движения, более простая чем в более сложных случаях эллиптического или гиперболического движения. На стр. 65 своей книги Дзиобек приводит результат, касающийся случая, в котором также $C = 0$. По этому поводу см. Cartan, предыд. ссылку, 181—185. Что касается метода, изложенного в §§ 399a—400, то см. A. Wintner, Quart. Journ. Math. (Oxford) **7** (1936), 214—218. Замечания, имеющиеся в §§ 401—402, поясняют статью Эберта (W. Ebert, Comptes Rendus **131** (1900), 251—253).

§§ 403—406. Соображения о существовании центра сил при $n = 3$ были высказаны в неявном виде Лапласом (Oevres **11**, 554—555), но впервые встречаются, по-видимому, в заметке Харграве (J. Hargrave, Phil. Mag. (4) **16** (1858), 466—473). Было бы ошибкой считать, что замечания, имеющиеся в § 405, сводят проблемы, указанные в §§ 374—374a, к элементарным кинематическим соображениям. Уравнение пятой степени (§ 406) было вычислено лишь ради полноты, но его кинематический смысл, если он вообще имеется, неизвестен.

§§ 407—412. Все эти результаты принадлежат Пенлеве (стр. 569—577, 582—586 его лекций, на которые мы ссылались выше (§§ 365—368a) и Comptes Rendus **123** (1896), 636—639, 871—873; см. также **139** (1904), 1170—1174). Некоторые из его результатов при $n = 3$ были известны, по-видимому, Вейерштрассу; см. письмо (1889), на которое мы ссылались выше (§§ 333—338a). О введении (9) § 414 упоминалось уже Брунсом (Astr. Nachr. **109** (1884). 219—220).

§§ 415—420a. На справедливость результата, приведенного в § 420, указал еще Брунс (предыд. ссылка). Этот результат был известен также Вейерштрассу (предыд. ссылка). Однако первое опубликованное доказательство принадлежит Зундману (см. комментарий к §§ 348—352). Его вычисления весьма сложны, по-видимому, по той причине, что не была использована каноническая форма дифференциальных уравнений. Фундаментальное каноническое преобразование (§ 50), а также изящный подход, изложенный в §§ 415—419, при котором не жертвуется динамической формой уравнений, были обнаружены Леви-Чивита (Comptes Rendus **162** (1916), 625—628; см. Acta Math. **42** (1920), 99—144).

§§ 421—424. Все это принадлежит Блоку (H. Block, Ark. för Mat. Astr. Fys. 5 (1909), № 9; см. Lund. Astr. Obs. Medd. (2) 6 (1909), № 6). Теория

Блока была вновь открыта Шази, который рассматривал (Bull. Astr. 35 (1918), 341—364) дополнительно вопрос о полноте, упоминаемый в § 421а. Что касается примечания в § 423, то см. H. Poincaré (1879), Oevres 1, стр. XCIX—CXXIX; Acta Math. 13 (1890), 27—41.

§ 425. Это распространение на случай одновременного столкновения является очевидным. Что касается остальных случаев, то см. комментарий к §§ 365—368а.

§§ 426—430. В литературе анализ вопроса, о котором идет речь в §§ 427—429, не излагается непосредственно, поскольку он связывается с более глубокой теоремой, сформулированной в § 431 (которая исключает, в частности, случай $C = 0$ § 431а). Однако с методической точки зрения представляется целесообразным изложить непосредственный подход (§§ 427—430) к более простому факту, сформулированному в конце § 426, оставляя теорему § 431 в стороне. На дальнейшее возможное упрощение, приведенное в § 429, было указано ван Кампеном.

§§ 431—431а. Результаты, изложенные в § 431а для $C = 0$ вытекают, хотя и не совсем непосредственно, из исследований Шази, упомянутых в конце комментария к §§ 365—368а; см. действительно предыд. ссылку, стр. 382—383. Теорема для $C \neq 0$, упомянутая в § 431, принадлежит Зундману (см. его статьи, на которые мы ссылались в связи с §§ 348—352). Его доказательство содержит ошибку, которая была легко исправлена Адамаром (Bull. des Sci. Math. 39 (1915), 249—264), при сохранении идей Зундмана. Эти идеи существенно уточняют соображения Якоби (см. §§ 332—332а). Действительно, теперь бесполезно устремлять t к бесконечности, поскольку требуются явные оценки расстояний в конечных интервалах измерения t, скапливающихся при $t = \infty$. В этом смысле можно считать, что теорема, изложенная в § 431, имеет тот же самый тауберов характер, что и результат, приведенный в §§ 337—338а (хотя та часть соображений, которая имеет явно тауберов характер, не была выделена в отдельную общую лемму относительно вещественных функций). Методы Зундмана — Адамара для вычисления встречающихся оценок были развиты впоследствии Шази (Ann. Ec. Norm. Sup. (2) 39 (1922), 109—126) и Биркгофом (Dynamical Systems, 1927, 275—283) (также 291—292; см. J. L. Hinrichsen, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 306—314).

Образец результатов, которые оказываются доступными благодаря этому методу уточненных оценок, можно сформулировать следующим образом. Если $n = 3$ массы и постоянные интегрирования $h < 0$, $C \neq 0$ фиксированы, то существует достаточно малое положительное число с тем свойством, что если $J = J(t)$ становится при некотором t меньше, чем это число, то два из взаимных расстояний должны стремиться вместе с t к бесконечности, а третье расстояние остается меньше некоторого фиксированного предела; кроме того, относительно удаленным в процессе всего движения является всегда одно и то же тело.

§§ 432—440. На методическое содержание этих параграфов большое влияние оказали неоднократные дискуссии с профессором Г. Д. Биркгофом. О связи §§ 433—440 с имеющейся по этому поводу литературой можно судить по комментарию к §§ 390—397 (см., в частности, Биркгоф, цит. соч.). Разложения, выписанные в §§ 432—432а, были получены Зундманом, цит. соч. [в этой связи см. Пуанкаре ((1886), Oevres 1, 181—189); P. Painlevé, Stockholm, Leçons, 577—582; также посмертные (1857) записки Коши (Oevres (1) 12, 445—455); наконец, утверждения Брунса и Вейерштрасса, на которые указывалось в связи с §§ 415—420а]. Типичными замечаниями по поводу формулировки, упомянутой в § 432а, являются те, которые сделаны Пикаром (E. Picard, Bull. des Sci. Math. (2) **37** (1913), 313—320). Вместе с тем астрономы имели с самого начала весьма скептическое мнение о полезности разложений Зундмана. Что касается конца § 432а, то см. вычисления Д. Белорицкого (Bull. Astr. (2) **6** (1930), 417—434).

ГЛАВА VI

§§ 441—443. Вторая эйлерова теория Луны, опирающаяся на применение вращающейся системы координат и на схему, указанную в § 441, была опубликована в 1772 г. в монографии «Theoria motum lunae...». Якоби, который вновь пришел к этой схеме в 1836 г. (Werke 4, 37—38), по-видимому, признавал ее целесообразность также для теории малых планет, и указал на интеграл (7_4). Что касается дальнейших ссылок, то см., например, статью Ньюкома, посвященную теории Луны (Atti del IV Congr. Int. Mat. 1908, 1, 135—143).

§ 443а. См. G. H. Darwin ((1897), Papers 4, 4).

§ 444. См. комментарий к § 203.

§ 444а. Это замечание имеется в статье Замтера (H. Samter, Astr. Nachr. **217** (1922), 129—152), хотя он не упоминает, что схема двух неподвижных центров (Эйлер) здесь фактически уточнена благодаря включению центробежных членов и что в этом отношении случай двух равных масс является исключительным.

§ 445. Доказательство отсутствия новых интегралов того типа, который был указан во второй половине § 320а, дано впервые Пуанкаре в случае ограниченной задачи (Acta Math. **13** (1890), 259—265; см. Méth. Nouv. 1 (1892), Chap. V). Недавно Зигель (C. L. Siegel, Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), 225—233) перенес на ограниченную задачу результаты Брунса об отсутствии новых алгебраических интегралов (см. § 320а).

§§ 446—454. Преобразование, примененное в § 451, является именно тем, с помощью которого Эйлер проинтегрировал свою задачу двух неподвижных центров (см. § 203). После опубликования фундаментальной статьи Бурро (Astr. Nachr. **135** (1894), 233—240; **136** (1894), 161—174; см. также его статью в Astr. Ges. Vjs. **33** (1898), 21—23 о вычислениях Дарвина), которая начиналась с рассмотрения вопроса вычислительного характера, сформулированного Тиле (1892) как тема на приз Датской академии, он же (Тиле) показал (Astr. Nachr. **138** (1896), 1—10), что подстановка Эйлера приводит также к регуляризации ограниченной задачи. Фактически Тиле рассматривал (цит. соч.) только случай равных масс (см. § 452). Распространение его способа регуляризации на случай произвольных масс (§ 451) было выполнено Бурро (Astr. Ges. Vjs. **41** (1906), 261—266; см. Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei (5) **24** (1915), 553—559). Однако Леви-Чивита несколько раньше, чем была опубликована эта статья Бурро, и не зная об исследованиях, выполненных Тиле в симметрическом случае, нашел (Verh. des III Int. Math. Kongr. 1904 (1905), 402—408; Acta Math. **30** (1904), 305—327) более простой (и принципиально эквивалентный, хотя и локальный) способ регуляризации, описанный в §§ 447—451. Простое описание столкновения посредством координат Леви-Чивита упоминается Биркгофом (Pisa Ann. (2) 4 (1935), 272—273). Регуляризация, указанная в § 453, была введена Биркгофом с целью облегчить топологические исследования (Palermo Rend. **39** (1915), 276—288). Что касается § 454, то см. Wintner, Math. Ztshr. **32** (1930), 691—698.

Большинство исследований численного характера, упоминаемых в § 452, о семействах периодических (и асимптотических) решений принадлежат Е. Стремгрену и его сотрудникам. Список публикаций с этими исследованиями весьма обширен и его можно найти в статье Стремгрена. Наиболее полная из этих статей напечатана в Bull. Astr. (2) 9 (1933), 87—130, где дан исчерпывающий обзор выполненных исследований. См. также ниже комментарий к § 519а.

§§ 455—461. Подробный анализ рассмотренной здесь важной проблемы в литературе как будто отсутствует. Как было указано Гамелем (G. Hamel, Fortschr. d. Math. 45 (1914), 1175), заметка Армеллини (G. Armellini, Comptes Rendus 158 (1914), 253—255) ошибочна. См. также T. Levi-Civita, Ann. di Mat. (3) 9 (1903), 1—32.

§§ 462—476. Некоторые из этих результатов можно рассматривать как уточнение фактов, относящихся к плоской задаче трех тел в предельном случае ограниченной задачи. См., в частности, § 464 и §§ 469, 474—476, сопоставляя их с §§ 358—359 и §§ 380—382 соответственно (литературные ссылки см. в § 382). Поэтому представляется затруднительным дать точные ссылки на литературу, касающуюся всех фактов, которые рассмотрены в §§ 462—467а, где изложение более простое и более полное, чем то, которое обычно встречается; см. M. H. Martin, Amer. Journ. of Math. 53 (1931), 167—174, и Н. Рейн, там же, 58 (1936), 735—736. Таблица, помещенная в § 468, была вычислена Джени Розенталь (Jenny E. Rosenthal, Astr. Nachr. 224 (1931), 169—172, где надписи в двух последних столбцах можно, очевидно, поменять местами). Кривые нулевой скорости, составленные Хиллом в его предельном случае (§§ 495—497), были распространены на случай ограниченной задачи (§§ 471—473) Болином (K. Bohlin, Bihang Stockh. Akad. 13 (1887), № 1; Acta Math. 10 (1887), 115—118, где о Хилле не упоминается). Подробное исследование этих кривых было выполнено для $\mu = {}^1/_{11}$ Дж. Дарвином (1897, Papers. 4, 6—12). В то же время Кобб (G. Kobb, Bull. Astr. 18 (1901), 219—221; 25 (1908), 411—415) применил эти результаты к случаю малых планет, где отношение масс соответствует тому, которое имеется для Юпитера и Солнца. Решения линейных уравнений (19) были рассмотрены в случае характеристических показателей устойчивого типа Шарлье (C. V. L. Charlier, Öfv. Stockh. Akad. 57 (1900), 1059—1082); см. исправления Н. Моисеева, Revista Univ. San Marcos (Lima), 1937, № 421) в случае неустойчивого треугольного типа Е. Стремгрена (Astr. Nachr. 168 (1905), 105—108). Е. Стремгрен изучал также (Medd. Danske Acad. 10 (1930), № 11) вопрос о слиянии этих двух типов в последнем случае. Появление вековых членов в предельном случае (см. конец § 476) можно считать первым примером такого явления в линейной консервативной динамической системе, на что указал Уинтнер (Math. Ztschr. 32 (1930), 660—661). Что касается детального анализа решений уравнений (19), то см. также M. Martin, Astr. Nachr. 224 (1931), 161—170.

§§ 477—477а. По причине исключительной простоты случая, рассмотренного в § 477а, проблема, сформулированная в § 477 и представляющаяся очень трудной, обычно оставалась вне внимания. Короткое, но достаточно специфическое исследование в § 477а (см. L. Fejér, Crelle's Journ. 131 (1906), 216—233), не связанное с общим критерием (§ 133), а также с классической теорией решений, стремящихся асимптотически к положению равновесия (Пуанкаре, Ляпунов, Адамар) служит лишь примером использования соображений Якоби (§ 332).

§§ 478—488. Элементарные решения, приведенные в § 479, были получены Леви-Чивита (см. G. Pavanini, Ann. di Mat. (3) 13 (1906), 184—192). Вопрос, упоминаемый в § 483, восходит к «Началам» Ньютона, а спустя два столетия он привел Адамса к бесконечным определителям (см. § 524 ниже). Изложение в §§ 480—482 следует из Леви-Чивита (Ann. Éc. Norm. Sup. (3) 28 (1911), 325—376), которым был получен (там же) результат, указанный в § 487, но в менее четкой форме путем доказательства того, что остаточный член линейного приближения для узла ограничен. Почти периодичность этого остаточного члена (§§ 485—487) была замечена Уинтнером (Ann. di Mat. (4), 10 (1932), 277—282; см. Amer. Journ. of Math. 62 (1940), 49—60). Исследования Леви-Чивита были распространены на общую задачу трех тел в статье Тревизани (жены Леви-Чивита) (Libera Trevisani, Atti Ist. Veneto 71_2 (1912), 1089—1137). См. также Emma Trapani, Rend. Acc. Napoli (3) 25 (1919), 48—69). Результаты относительно существования среднего движения и почти периодичности остаточного члена в общей теореме (§ 484) были сформулированы в виде предположения Уинтнером, а впоследствии доказаны Бором (Medd. Danske Akad. 10 (1930), № 10; Comm. Math. Helv. 4 (1931), 51—64, где доказано постоянство спектра частот). Изящное замечание в § 488 принадлежит Леви-Чивита, цит. соч., 352—353; см. также Acad. Polyt. Ann. do Porto 12 (1912), 193—206.

§§ 489—502. Фундаментальная работа Хилла (Works 1, 284—335), где рассматривается случай (4), появилась в 1878 г. Кривые нулевой скорости (§§ 495—497) были введены Хиллом (цит. соч.) с целью доказать, что расстояние между Землей и Луной должно оставаться во все времена ограниченным, если движение определяется согласно (1_1) и (4). Характеристические показатели для либрационных решений (§ 494) были рассмотрены Пуанкаре (Méth. Nouv. 1 (1892), 159—161). Метод регуляризации, предложенный Леви-Чивита (1904; см. §§ 447—450), был применен к предельному случаю Хилла (§ 498) Биркгофом (Palermo Rend. 39 (1915), 314—315). Результат, приведенный в § 501a, был доказан Пуанкаре (Acta Math. 13 (1890), 74—79; см. K. Bohlin, там же, 10 (1887), 115—117) с помощью более косвенных соображений. В частности, хотя изложенное остается справедливым, если (4) заменить на (2), но все рушится в случае общей задачи трех тел (см. Bohlin, цит. соч., 118—121; Poincaré, Méth. Nouv. 3 (1899), 165—174). Можно полагать, что эта ситуация связана с вопросами транзитивности. Результат, полученный в § 500 с помощью способа регуляризации Леви-Чивита, впервые был доказан Биркгофом (цит. соч., 284—285) для (2) вместо (4) с помощью его собственного метода регуляризации (§ 453); ему удалось при этом определить (цит. соч.) топологическую структуру изоэнергетического фазового пространства также в оставшихся трех из четырех общих типов, описанных в § 472. Применимость эргодической теоремы, подчеркнутая в § 501a (см. Wintner, Math. Ztshr. 36 (1933), 637), обусловлена тем фактом, что встречающиеся асимптотические распределения (§§ 123—124) не подвергаются изменениям при преобразованиях изоэнергетического фазового пространства и времени, аналогичных тем, которые были рассмотрены в примечании к § 49.

Интересно, что в то время, как Пуанкаре сразу признал фундаментальное значение исследований Хилла, другой ведущий авторитет в области математической астрономии в ту эпоху, Брунс, который реферировал работу Хилла в Fortschr. d. Math. (10 (1878), 782), не обратил на нее серьезного внимания.

§§ 503—515. В статьях, упомянутых среди ссылок к §§ 305—307, применяются три различных, хотя принципиально эквивалентных, аналитических метода для доказательства существования периодических решений простого типа в случае общей динамической системы: (*i*) метод аналитического продолжения, опирающийся на теорему Коши о локальном существовании

(Пуанкаре); (*ii*) метод последовательных приближений для интегральных уравнений с использованием функции Грина (Лихтенштейн); (*iii*) метод сравнения коэффициентов рядов Фурье, который связан с теоремами существования решения бесконечных систем нелинейных уравнений, определяющих неявные функции. Этот третий метод и является методом Хилла (цит. соч.), рассмотренным в §§ 505—506, хотя сам Хилл и подчеркивает (см. цит. соч., стр. 287, абзац: «Я сожалею, что ввиду трудности вопроса... ничто в сочинениях Коши не поможет нам, по-видимому, выяснить условия сходимости»), что он не смог дать необходимое доказательство существования (сходимости). Такое доказательство сходимости (§§ 507—515) было дано впоследствии Уинтнером (Math. Ztschr. 24 (1935), 259—265). Следует упомянуть, что в соответствии с весьма элементарными соображениями Биркгофа (цит. соч., 316—317) вопрос о существовании периодических решений в случае обратного движения ($m < 0$) является гораздо более легким, чем в случае Хилла ($m > 0$). Насколько можно судить по короткому реферату в Fortschr. d. Math. 26 (1895), 1103, доказательство сходимости тригонометрических рядов Хилла было дано Ляпуновым (опубликовано в русском журнале в 1895 г.).

§ 516. Что касается подробностей полной индукции в отношении m-множителей для a_j/a_0, то см. H. Poincaré, Leçons de Méc. Cél. 2_2 (1909), 35—36. Критерий Гольдера (O. Hölder, Sächs. Sitzber, 63 (1911), 388—393) может быть доказан тем же путем, что и его аналогия (или, скорее, обобщение) для случая преобразований Фурье — Стилтьеса, для которого этот критерий был применен совсем недавно при доказательстве гладкости некоторых распределений.

§ 517. Несмотря на почти круговой характер орбиты, анализ этого главного неравенства в движении Луны (называемого в лунной теории «вариацией» и рассмотренного еще в «Началах» Ньютона) являлся до работы Хилла одним из главных препятствий для удовлетворительного аналитического описания движения Луны.

§ 518. См. Wintner, Math. Ztschr. 30 (1929), 211—227. Связь «эйлеровых преобразований» (§ 518a) с более ранними теориями движения Луны рассматривалась Хиллом, цит. соч., 315—316.

§ 519. Сначала Хилл (цит. соч., 326) сделал любопытное некорректное утверждение о продолжении своих орбит с точками возврата (цит. соч., 328—335). Впоследствии он упоминает в Coll. Works (цит. соч., 326), что правильное утверждение было сообщено ему Адамсом (по-видимому, не опубликовано) до Пуанкаре (Méth. Nouv. (1892), 105—109). Траектория, в которой небольшая петля, рождающаяся из точки возврата, становится значительной, была вычислена в 1892 г. Кельвином (Lord Kelvin, Papers 4, 520). См. также K. Matukuma, Proc. Imp. Acad. Jap. 6 (1930), 6—8; 9 (1933), 364—366 (и 8 (1932), 147—150, где были рассмотрены траектории с обратным движением).

§ 519a. Что касается подробного анализа эмпирических принципов Стремгрена, то см. Wintner, Die Naturwiss. 19 (1931), 1008—1017; Bull. Astr. (2) 9 (1936), 251—253. Тот путь, которым Стремгрен пришел к этому принципу анализируется им самим, например, в статье Bull. Astr. (2) 9 (1933), 87—130, где даны подробные ссылки на численные исследования, проведенные на Копенгагенской обсерватории. Математическое доказательство справедливости эмпирического принципа Стремгрена было дано Уинтнером (Math. Ztschr. 34 (1931), 321—349). Что касается краткого изложения фактически того же доказательства, то см. G. D. Birkhof, Pisa Ann. (2) **5** (1936), 39—42. Справедливость принципа исчезновения можно вывести явно для интегрируемых случаев (см. P. Stäckel, Math. Annalen **42** (1893), 537—563); в то же время некоторые утверждения, содержащиеся в общей формулировке Стремгрена, встречались в литературе и раньше при анализе ряда неинтегрируемых случаев (см., в частности, Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), 257—258, где имеются ссылки на работы Пуанкаре).

§ **520.** В принципе, хотя и не в деталях, все эти результаты восходят к Хиллу (1877, Works **1**, 244—251); см. H. Poincaré, Bull. Astr. **17** (1900), 87—104; A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **53** (1931), 611—616.

§§ **521—522.** A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **59** (1937), 795—802.

§§ **523—524.** G. W. Hill, цит. соч., 252—270; J. C. Adams, Papers **1**, 181—188 (1877); **2**, 85—103 (посмертно). Математическое обоснование метода Адамса — Хилла бесконечных определителей принадлежит Пуанкаре (Bull. Soc. Math. de France **14** (1886), 77—90; Méth. Nouv. **2** (1893), 260—267, где используется теория Адамара целых функций, и Bull. Astr. **17** (1900), 134—143, где дано, пожалуй, слишком сжатое изложение; см. также Lecons de Méc. Cél. 2_2 (1909), 44—57). Что касается дальнейших ссылок, то см. H. Burkhardt, Ind. Math. Congr. Chicago (1893), Papers, 1896, стр. 13—34.

§ **525.** Трудности, появляющиеся при последовательном применении метода бесконечно большого числа переменных, едва ли отличаются от проблемы «малых делителей» в классической небесной механике; см., Wintner, Math. Annalen **96** (1926), 303, и Math. Ztschr. **30** (1929), 214—215. Как было недавно показано (Wintner, Pros. Nat. Acad. Wash. **26** (1940), 127), эти классические трудности теории возмущений как будто совпадают с современной проблемой иррациональных чисел вращения (см., в частности, Birkhoff, Ann. Inst. Poincaré **2** (1932), 369—386; Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), 374—375). Из исследований Биркгофа с очевидностью вытекает, что эта проблема связана фактически с проблемой интегрируемости (см. соответственно подтверждение, полученное в некоторых интегрируемых случаях Хорном (J. Horn, Crelle's Journ. **126** (1903), 194—232), который также дал (там же, **131** (1906), 224—245) четкую схему формальных вычислений в соответствующем неинтегрируемом случае, причем в обоих случаях рассматривалась окрестность равновесного решения). Более ранняя литература о формальных тригонометрических разложениях указана на стр. 61—79 в библиографическом списке Марколонго. Современный анализ этих формальных разложений принадлежит Биркгофу (Amer. Journ. of Math. **49** (1927), 1—38 и Dynamical Systems (1927), Chap. IV; см. также Dynamical Systems, Chap. III и Acta Math. **43** (1920), 1—79).

§§ **526—529.** Сведение § 526 к § 529 с помощью теории почти периодических функций принадлежит Уинтнеру (Math. Ztschr. **31** (1929), 434—440). Результаты, которые упоминаются в примечаниях к § 529, содержатся в статьях H. Bruns, Astr. Nachr. **109** (1884), 215—222 [о рядах Бореля (1894) и категориях Бэра (1899) см., например, H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen (1921), 313—317 и 75—82, 99—109, о вариантах аргумента Бэра до Брунса см. H. Hankel (1870), № 153 (1905) в Ostvald's Klass, стр. 95—98] и H. Gyldén, Comptes Rendus **106** (1888), 1584—1587; Öfv. Stockh. Akad. **45** (1888), 77—87, 349—358. В связи с этими примечаниями интересно заметить, что ввиду исследований Бродена (см. Öfv. Stockh. Akad. **57** (1900), 239—266 и его статью, дискутировавшуюся Ханом, цит. соч., 311—313) знаменитый принцип «или 0 или 1» меры вероятности в теории функций действительного переменного (см., например, P. Hartmann, R. Kershner, Amer. Journ. of Math. 59 (1937), 809—822) также содержит в себе, как исходный пункт, рассуждения Гюльдена, так что даже теория меры пространства для бесконечного произведения может считаться имеющей астрономическое происхождение. Что касается дальнейших ссылок на литературу, касающуюся малых делителей, то см. A. Wintner, цит. соч.

Краткое математическое введение в формальные основы современной теории движения Луны, см. H. Poincaré, Bull. Astr. 17 (1900), 167—204, где преобладает, однако, чисто аналитическая точка зрения. Астрономической точке зрения уделено большее внимание в лекциях Адамса (Papers 2, 1—84) и в работе Дарвина (G. H. Darwin, Papers 5, 16—58), которые в силу их краткости и ясности могут быть рекомендованы в качестве введения в практические задачи теории движения. Известными учебниками, где излагается эта теория, являются Tisserand, Mécanique Céleste, 3 (1894). E. W. Brown, Treatise (1896) и (менее астрономические по содержанию) «Лекции» Пуанкаре, 2_2 (1909).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аурел Уинтнер

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

М., 1967 г., 524 стр. с илл.

Редактор *Г. С. Куликов*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *З. А. Автонеева*

Сдано в набор 24/XI 1966 г.
Подписано к печати 11/IV 1967 г. Бумага 60×90/16.
Физ. печ. л. 32,75. Условн. печ. л. 32,75.
Уч.-изд. л. 29,44. Тираж 3500 экз. Цена книги 2 р. 32 к.
Заказ 1612.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10