ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

АНРИ ПУАНКАРЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

# АНРИ ПУАНКАРЕ

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

## В ТРЕХ ТОМАХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

академика Н. Н. БОГОЛЮБОВА
(главный редактор),

доктора физ.-матем. наук В. И. АРНОЛЬДА,

доктора физ.-матем. наук И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

АНРИ ПУАНКАРЕ

# ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

## II

## НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

## ТОПОЛОГИЯ

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

УДК 521.1+513.83+511

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*



**Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.** Изд-во «Наука», 1972 г.

В настоящую книгу входит третий том «Новых методов небесной механики», а также вторая часть мемуара «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики», послужившего основой создания «Новых методов небесной механики».

Кроме того, в книгу включены классические работы А. Пуанкаре по топологии и мемуары «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях» и «Об одной геометрической теореме», которые примыкают и к «Новым методам небесной механики» и к топологическим работам А. Пуанкаре.

В настоящий том входят также арифметические работы А. Пуанкаре «О тернарных и кватернарных кубических формах» и «Об арифметических свойствах алгебраических кривых».

Редактор второго тома *В. И. Арнольд*

Составитель *И. Б. Погребысский*

2-6-2

Подписное издание

# ОТ РЕДАКЦИИ

Во втором томе собрания трудов А. Пуанкаре заканчивается публикация «Новых методов небесной механики». Помещенный здесь третий и последний том этого труда переведен с французского В. К. Абалакиным, перевод отредактирован и прокомментирован Г. А. Мерманом.

Первоисточником «Новых методов небесной механики» были исследования, изложенные в обширном мемуаре 1889 г. «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики», едва ли не наиболее известной работе А. Пуанкаре. Представлялось нецелесообразным дать этот мемуар целиком, так как многое (главным образом, из его первой части) вошло в «Новые методы небесной механики» либо почти без изменений, либо в настолько расширенном виде, что прежняя трактовка потеряла свое значение. Но мемуар 1889 г. интересен не только для ознакомления с генезисом основных идей Пуанкаре — в нем немало поучительного и для самого внимательного читателя «Новых методов небесной механики». Поэтому здесь дана в наибольшей мере сохранившая актуальность вторая часть мемуара, снабженная необходимым введением и примечаниями. Перевод выполнен А. А. Бряндинской, отредактирован И. Б. Погребысским.

В настоящем томе помещена также серия замечательных работ А. Пуанкаре по топологии, работ, с которых начинается история топологии как самостоятельной математической дисциплины. Основной мемуар (Analysis situs), первое, четвертое и пятое дополнения к нему переведены А. Н. Боголюбовым, второе и третье дополнения — А. В. Чернавским. А. В. Чернавский провел также общую редакцию этого раздела и прокомментировал входящие в него работы.

Еще две работы Пуанкаре, примыкающие как к топологическому циклу его исследований, так и к работам по небесной механике, вошли в этот том. С мемуаром «О геодезических линиях на выпуклых поверхностях» мы находимся у истоков вариационного исчисления «в целом», а работа, посвященная «последней геометрической теореме Пуанкаре», дала импульсы для различных исследований по динамическим системам, начиная с Д. Д. Биркгофа и вплоть до наших дней. Обе работы замечательны по богатству и разнообразию применяемых в них средств, хотя в последней Пуанкаре, как известно, не удалось добиться полного обоснования найденного им результата.

Переведены эти работы А. Н. Боголюбовым, отредактированы переводы И. Б. Погребысским.

В настоящий том включены также две арифметические работы Пуанкаре «О тернарных и кватернарных кубических формах» и «Об арифметических свойствах алгебраических кривых» (перевод Ю. Н. Сударева, комментарий и редакция Ю. И. Манина). Первая работа интересна тем, что ряд ее результатов остается не понятым до конца с современной точки зрения. Вторая послужила основой большого количества дальнейших исследований и оказала большое влияние на развитие арифметических методов алгебраической геометрии.

Подстрочные примечания, помеченные Р. Г., принадлежат Р. Гарнье (R. Garnier), А. Ш. — А. Шателе (A. Châtelet), Ф. Ш. — Ф. Шателе (F. Châtelet), А. Н. — А. Нерону (A. Neron), Ж. Л. — Ж. Лере (J. Leray), редакторам французского издания собрания сочинений Пуанкаре.

Редакция этого собрания трудов А. Пуанкаре считает своим приятным долгом выразить благодарность академику П. С. Александрову, предоставившему ей для публикации свою речь «Пуанкаре и топология», произнесенную на посвященном столетию со дня рождения А. Пуанкаре заседании Международного математического конгресса 1954 г.

# НОВЫЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

## III

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ.
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА.
ДВОЯКО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

# LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

## III

INVARIANTS INTÉGRAUX.
SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.
SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES

## Глава XXII

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ [1]

### Установившееся движение потока

233. Для того чтобы пояснить происхождение и смысл понятия интегральных инвариантов, я полагаю полезным начать с изучения частного примера, заимствованного из одного физического приложения.

Рассмотрим какой-нибудь поток, и пусть $u$, $v$, $w$ — три компоненты скорости молекулы, имеющей в момент $t$ координаты $x$, $y$, $z$.

Мы будем считать $u$, $v$, $w$ функциями от $t$, $x$, $y$, $z$ и предположим, что эти функции заданы.

Если $u$, $v$, $w$ не зависят от $t$ и зависят только от $x$, $y$, $z$, то говорят, что движение потока *установившееся*. Мы предположим, что это условие выполнено.

Тогда траектория любой молекулы потока является кривой, определенной дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}. \tag{1}$$

Если бы мы умели интегрировать эти уравнения, то нашли бы с их помощью

$$x=\varphi_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$y=\varphi_2(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$
$$z=\varphi_3(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$

так что $x$, $y$, $z$ были бы выражены в функции времени $t$ и их начальных значений $x_0$, $y_0$, $z_0$.

Зная начальное положение молекулы, мы определили бы с их помощью таким образом положение этой же молекулы в момент $t$.

Рассмотрим молекулы жидкости, множество которых образует в начальный момент некоторую фигуру $F_0$; когда эти молекулы сместятся, их множество образует новую фигуру, которая будет деформироваться непрерывным образом, и в момент $t$ множество рассматриваемых молекул образует новую фигуру $F$.

Мы предположим, что движение потока непрерывно, т. е. что $u$, $v$, $w$ — непрерывные функции от $x$, $y$, $z$; тогда между фигурами $F_0$ и $F$ существуют некоторые соотношения, очевидность которых следует из непрерывности.

Если фигура $F_0$ является непрерывной кривой или поверхностью, то фигура $F$ будет непрерывной кривой или поверхностью.

Если фигура $F_0$ представляет собой односвязный объем, то фигура $F$ будет односвязным объемом.

Если фигура $F_0$ — замкнутая кривая или поверхность, то такой же будет фигура $F$.

Исследуем, в частности, случай жидкости; именно тот случай, когда жидкость несжимаема, т. е. когда объем жидкой массы не изменяется.

Предположим тогда, что фигура $F_0$ — объем; по истечении времени $t$ жидкая масса, которая заполняла этот объем, займет другой объем, который будет не чем иным, как фигурой $F$.

Объем жидкой массы не должен был измениться; следовательно, $F_0$ и $F$ имеют один и тот же объем, что можно записать так:

$$\int\int\int dxdydz = \int\int\int dx_0dy_0dz_0; \tag{2}$$

первый интеграл распространен на объем $F$, а второй — на объем $F_0$.

Мы скажем тогда, что интеграл

$$\int\int\int dxdydz$$

есть *интегральный инвариант*.

Известно, что условие несжимаемости может быть выражено уравнением

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{3}$$

Оба уравнения (2) и (3), следовательно, эквивалентны

Обратимся к случаю газа, т. е. к случаю, когда объем текучей массы переменен; тогда неизменной остается масса, так что если через $\rho$ обозначить плотность газа, будем иметь

$$\int\int\int \rho dxdydz = \int\int\int \rho_0 dx_0dy_0dz_0. \tag{4}$$

Первый интеграл распространен на объем $F$, второй — на объем $F_0$. Другими словами, интеграл

$$\int\int\int \rho dxdydz$$

есть интегральный инвариант.

В этом случае, так как движение установившееся, уравнение нераз рывности записывается в виде

$$\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}=0. \tag{5}$$

Следовательно, условия (4) и (5) опять эквивалентны.

234. Второй пример нам доставляет теория вихрей Гельмгольца. Предположим, что фигура $F_0$ — замкнутая кривая; то же будет и для фигуры $F$.

Предположим, что поток, сжимаемый или несжимаемый, имеет постоянную температуру и подвержен только влиянию сил, допускающих потенциал; тогда для того чтобы движение оставалось установившимся, необходимо, чтобы $u$, $v$, $w$ удовлетворяли определенным условиям, которые здесь нет надобности развивать.

Предположим эти условия выполненными.

Рассмотрим при этом предположении интеграл

$$\int (udx + vdy + wdz).$$

Как мы знаем из теоремы Гельмгольца, этот интеграл будет иметь одно и то же значение вдоль кривой $F$ и вдоль кривой $F_0$.

Другими словами, этот интеграл есть интегральный инвариант.

## Определение интегральных инвариантов

235. В примерах, которые были только что указаны мною, мы легко приходим, по самой природе вопроса, к рассмотрению интегральных инвариантов.

Но ясно, что можно применить эти инварианты, обобщая их определение, в гораздо более распространенных случаях, когда им нельзя было бы больше приписывать столь же простой физический смысл.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt, \tag{1}$$

где $X$, $Y$, $Z$ — заданные функции от $x$, $y$, $z$.

Если бы мы умели интегрировать эти уравнения, то с их помощью были бы найдены $x$, $y$, $z$ в функции от $t$ и их начальных значений $x_0$, $y_0$, $z_0$.

Если мы будем рассматривать $t$ как время, а $x$, $y$, $z$ — как координаты движущейся точки $M$ в пространстве, то уравнения (1) определят законы движения этой движущейся точки.

Те же уравнения после интегрирования определили бы нам положение движущейся точки $M$ в момент $t$, если известно ее начальное положение $M_0$, координаты которого суть $x_0$, $y_0$, $z_0$.

Если рассматриваются точки, движущиеся по одному и тому же закону, множество которых образует в начальный момент фигуру $F_0$, то множество этих же точек образует в момент $t$ другую фигуру $F$, которая будет линией, поверхностью или объемом в зависимости от того, будет ли сама фигура $F_0$ линией, поверхностью или объемом.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int (Adx + Bdy + Cdz), \tag{2}$$

где $A$, $B$, $C$ — известные функции от $x$, $y$, $z$; может случиться, что если $F_0$ есть линия, этот интеграл (2), распространенный на все элементы линии $F$, будет постоянной, не зависящей от времени, и равной, следовательно, значению того же интеграла, распространенного на все элементы линии $F_0$.

Предположим теперь, что $F$ и $F_0$ — поверхности, и рассмотрим двойной интеграл

$$\int\int (A'dydz + B'dxdz + C'dxdy), \tag{3}$$

где $A'$, $B'$, $C'$ —функции от $x$, $y$, $z$. Может случиться, что этот интеграл имеет одно и то же значение как при распространении его на все элементы поверхности $F$, так и на все элементы поверхности $F_0$.

Вообразим теперь, что $F$ и $F_0$ — объемы, и рассмотрим тройной интеграл

$$\int\int\int Mdxdydz, \tag{4}$$

где $M$ — функция от $x$, $y$, $z$; может случиться, что он имеет одно и то же значение для $F$ и для $F_0$.

В этих различных случаях мы скажем, что интегралы (2), (3) и (4) являются *интегральными инвариантами*.

Иногда может случиться, что интеграл (2) будет иметь одно и то же значение для линий $F$ и $F_0$ только тогда, когда эти две кривые замкнуты; или же что двойной интеграл (3) будет иметь одно и то же значение для поверхностей $F$ и $F_0$ только тогда, когда эти две поверхности замкнуты.

Тогда мы скажем, что (2) является интегральным инвариантом *относительно замкнутых кривых* и что (3) — интегральный инвариант *относительно замкнутых поверхностей*.

**236.** Использованное нами геометрическое представление не играет, очевидно, никакой существенной роли; мы можем оставить его в стороне, и ничто не помешает более распространить предыдущие определения на случаи, когда число переменных больше трех.

Рассмотрим тогда уравнения

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt, \tag{1}$$

где $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$ — заданные функции от $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$; если бы мы умели их интегрировать, мы нашли бы $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ как функции от $t$ и их начальных значений $x_1^0$, $x_2^0, \ldots, x_n^0$. Чтобы сохранить ту же терминологию, мы можем назвать точкой $M$ систему значений $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, а точкой $M_0$ — систему значений $x_1^0$, $x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Рассмотрим множество точек $M_0$, образующих многообразие $F_0$, и множество соответствующих точек $M$, образующих другое многообразие $F$ *.

Мы предположим, что $F_0$ и $F$ — непрерывные многообразия $p$ измерений, где $p \leqslant n$.

Рассмотрим тогда интеграл порядка $p$

$$\int \sum A d\omega, \tag{2}$$

где $A$ — функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $d\omega$ — произведение $p$ дифференциалов, взятых среди $n$ дифференциалов

$$dx_1, \ dx_2, \ \ldots, \ dx_n.$$

Может оказаться, что этот интеграл имеет одно и то же значение для двух многообразий $F$ и $F_0$. Тогда мы скажем, что это — *интегральный инвариант*.

Может случиться также, что этот интеграл принимает одно и то же значение для двух многообразий $F$ и $F_0$, но *только при условии, что эти два многообразия замкнуты*. Тогда это — интегральный инвариант относительно замкнутых многообразий.

Можно еще вообразить другие виды интегральных инвариантов. Допустим, например, что $p=1$ и что $F$ и $F_0$ сводятся к линиям; может случиться, что интеграл

$$\int (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n) = \int \sum A_i dx_i$$

имеет одно и то же значение для $F$ и $F_0$ и есть интегральный инвариант; но может также случиться, что интеграл

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2\sum C_{i,k} dx_i dx_k},$$

где $B$, $C$, так же как и $A$, — суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; может случиться, говорю я, что этот интеграл принимает одно и то же значение для $F$ и $F_0$, и было бы легко вообразить себе другие аналогичные примеры.

Число $p$ будет называться *порядком интегрального инварианта*.

---

* Слово «многообразие» теперь достаточно употребительно, чтобы я не считал необходимым напоминать его определение. Таким образом обозначают всякое непрерывное множество точек (или систему значений): так же, как и в пространстве трех измерений, любая поверхность является многообразием двух измерений, а любая линия — многообразием одного измерения.

### Связь инвариантов с интегралами

**237.** Возьмем снова систему

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt. \tag{1}$$

Если бы мы умели ее интегрировать, мы смогли бы образовать все ее интегральные инварианты.

Действительно, если бы интегрирование было выполнено, можно было представить результат в форме

$$\begin{aligned} y_1&=C_1,\\ y_2&=C_2,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ y_{n-1}&=C_{n-1},\\ z&=t+C_n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, $y$ и $z$ — заданные функции от $x$.

Заменим переменные, принимая за новые переменные $y$ и $z$ вместо $x$.

Рассмотрим теперь какой-нибудь интегральный инвариант; этот инвариант должен содержать под знаком $\int$ (который будет повторен $p$ раз, если инвариант имеет порядок $p$) некоторое выражение, функцию от $x$ и их дифференциалов $dx$. После замены переменных это выражение станет функцией от $y$, $z$ и их дифференциалов $dy$ и $dz$.

Чтобы перейти от точки фигуры $F_0$ к соответствующей точке фигуры $F$, следует, не меняя $y$, заменить $z$ на $z+t$. Следовательно, при переходе от бесконечно малой дуги $F_0$ к соответствующей дуге $F$ дифференциалы $dy$ и $dz$ не изменяются (в самом деле, величина $t$, прибавляемая к $z$, одна и та же для обоих концов дуги); наконец, если рассмотреть бесконечно малую фигуру $F_0$ любого числа измерений и соответствующую фигуру $F$, то произведение дифференциалов $dy$ и $dz$ (количество которых равно числу измерений $F_0$ и $F$) также не изменится, если перейдем от одной фигуры к другой.

Короче говоря, для того чтобы некоторое выражение было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы величина $z$ не входила в него; $y$, $dy$ и $dz$ могут входить в него любым образом.

Рассмотрим выражение того же вида, что и выражение, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе

$$\int \sum A\,d\omega; \tag{3}$$

это выражение представляет интеграл порядка $p$, $A$ — функция от $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, $d\omega$ — произведение $p$ дифференциалов, взятых из числа $n$ дифференциалов

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n.$$

Мы хотим узнать, является ли это выражение интегральным инвариантом; производя замену переменных, указанную выше, приведем выражение (3) к виду

$$\int \sum B d\omega',$$

где $B$ — функция от $y$ и $z$, $d\omega'$ — произведение $p$ дифференциалов, взятых из числа $n$ дифференциалов

$$dy_1,\ dy_2,\ \ldots,\ dy_{n-1},\ dz.$$

Чтобы выражение (3) было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы все $B$ были независимы от $z$ и зависели только от $y$.

Рассмотрим снова, как и в предыдущем параграфе, выражение

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2\sum C_{i,k} dx_i dx_k}, \tag{4}$$

где $B_i$ и $C_{i,k}$ суть функции от $x$.

После замены переменных это выражение примет вид

$$\int \sqrt{\sum B'_i dx_i'^2 + 2\sum C'_{i,k} dx'_i dx'_k};$$

положил для бо́льшей симметрии в обозначениях

$$x'_i = y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1); \qquad x'_n = z.$$

Чтобы выражение (4) было интегральным инвариантом, необходимо и достаточно, чтобы все $B'_i$ и $C'_{i,k}$ были независимы от $z$ и зависели только от $y$.

### Относительные инварианты

238. Мы можем попытаться теперь образовать относительные интегральные инварианты на замкнутых многообразиях. Предположим сначала, что $p=1$, и разыщем условие того, что интеграл

$$\int (A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n) \tag{1}$$

является интегральным инвариантом относительно замкнутых линий.

Совершим замену переменных, указанную выше, тогда наш интеграл примет вид

$$\int (B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{n-1} dy_{n-1} + B_n dz),$$

что я могу записать, возвращаясь к более симметричным обозначениям, введенным в конце предыдущего пункта, в виде

$$\int \sum B_i dx'_i. \tag{1bis}$$

Этот интеграл, распространенный на замкнутое одномерное многообразие, т. е. на замкнутую линию, может быть преобразован, согласно теореме Стокса, в двойной интеграл, распространенный на незамкнутое многообразие двух измерений, т. е. на незамкнутую поверхность; имеем

$$\int \sum B_i dx'_i = \int \sum \left( \frac{dB_i}{dx'_k} - \frac{dB_k}{dx'_i} \right) dx'_i dx'_k. \tag{2}$$

Но интеграл в правой части (2) должен быть абсолютным интегральным инвариантом, а не только инвариантом относительно замкнутых многообразий.

Итак, мы заключаем следующее:

Чтобы интеграл (1) был интегральным инвариантом относительно замкнутых линий, *необходимо и достаточно, чтобы все биномы*

$$\frac{dB_i}{dx'_k} - \frac{dB_k}{dx'_i}$$

*не зависели от* $z$.

Точно так же пусть

$$\int \sum A d\omega \tag{3}$$

будет интегральным выражением порядка $p$ того же вида, что и в предыдущих пунктах; мы хотим узнать, является ли это выражение интегральным инвариантом относительно замкнутых многообразий порядка $p$.

Мы предполагаем, что этот интеграл распространен на какое-то замкнутое многообразие порядка $p$; тогда теорема, аналогичная теореме Стокса, покажет нам, что он может быть преобразован в интеграл порядка $p+1$, распространенный на любое многообразие, замкнутое или незамкнутое, порядка $p+1$. Преобразованный интеграл записывается в виде

$$\int \sum \sum_k \pm \frac{dA}{dx_k} dx_k d\omega. \tag{4}$$

Знак $+$ берется, если $p$ — четное, и поочередно знак $+$ и знак $-$, если $p$ — нечетное. [Я отсылаю за бо́льшими подробностями к своему мемуару о вычетах двойных интегралов (Acta Mathematica, том 7) и к моему мемуару, опубликованному в юбилейном выпуске Журнала Политехнической школы (Journal de l'École Polytechnique), посвященном столетию журнала [2].]

Необходимое и достаточное условие того, чтобы (3) было интегральным инвариантом порядка $p$ относительно замкнутых многообразий, заключается в том, чтобы (4) было *абсолютным* интегральным инвариантом порядка $p+1$.

**239.** Возьмем снова выражение (1) из предыдущего пункта и предположим, что оно является относительным инвариантом, скажем, интегральным инвариантом относительно замкнутых линий.

Приведем его к виду (1bis) нашей заменой переменных.

Пусть $M_0$ есть точка $F_0$, а

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ z$$

— ее координаты (в новых переменных).

Пусть $M$ — соответствующая точка $F$, а

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ z+t$$

— ее координаты.

$B_k$ будут функциями от $y$ и $z$, но я выделю $z$, записывая $B_k$ в виде

$$B_k(z).$$

Тогда, если линия $F_0$ замкнута, мы будем иметь

$$\int \sum B_k(z+t)\,dx'_k = \int \sum B_k(z)\,dx'_k;$$

это означает, что выражение

$$\sum [B_k(z+t) - B_k(z)]\,dx'_k \tag{3}$$

есть полный дифференциал, который я полагаю равным $dV$; функция $V$ будет зависеть не только от $y$ и $z$, но еще и от $t$. При $t=0$ она должна свестись к постоянной.

Если мы предположим $t$ бесконечно малым и обозначим через $B'_k(z)$ производную от $B_k(z)$ по $z$, то выражение (3) приведется к

$$\sum [tB'_k(z)]\,dx'_k.$$

Тогда выражение

$$\sum B'_k(z)\,dx'_k \tag{4}$$

есть полный дифференциал, который я полагаю равным $dU$. Функция $U$, определенная таким образом, будет зависеть от $y$ и $z$, но не будет более зависеть от $t$. Я снова выделю $z$, записав $U(z)$; тогда получается

$$\frac{dV}{dt} = \int \sum B'_k (z+t)\, dx'_k = \int dU(z+t) = U(z+t) + f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция от $t$. Но функцию $U(z)$ можно рассматривать как производную по $z$ от некоторой другой функции $W(z)$, зависящей также от $y$, и мы получим

$$\frac{d}{dt} W(z+t) = U(z+t).$$

Так как, с другой стороны, $V$ должна при $t=0$ свестись к постоянной, то окончательно придем к заключению

$$V = W(z+t) - W(z) + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ означает произвольную функцию только от $t$, которую, впрочем, можно было бы положить равной нулю, не ограничивая существенно общности.

Тогда находим

$$B_k(z) = \frac{d}{dx'_k} W(z) + C_k,$$

где $C_k$ не зависит от $z$, так что выражение (1bis) приводится к виду

$$\int dW + \int \sum C_k dx'_k,$$

где первый интеграл есть интеграл от полного дифференциала, а второй — абсолютный интегральный инвариант.

**240.** Рассмотрим таким же образом относительный инвариант порядка выше первого; пусть

$$\int \sum A d\omega$$

есть этот инвариант, который после замены переменных перейдет в

$$\int \sum B d\omega'.$$

Интеграл

$$\int \sum [B(z+t) - B(z)]\, d\omega' = J \tag{1}$$

должен быть нулем, каково бы ни было замкнутое многообразие порядка $p$, на которое он распространен.

Следовательно, он должен удовлетворять определенным «условиям интегрируемости», аналогичным тем, которые выражают, что дифференциал первого порядка есть полный дифференциал.

Рассмотрим теперь многообразие $V$ $p$ измерений, но незамкнутое и ограниченное многообразием $v$ $p-1$ измерения, которое будет служить ему границей.

Интеграл (1), распространенный на многообразие $V$, не будет нулем, но если его вычислить для других аналогичных многообразий $V'$, $V''$, . . ., имеющих ту же границу $v$, найдем одно и то же значение, т. е. что значение интеграла (1) зависит только от границы $v$.

Он равен интегралу порядка $p-1$

$$J=\oint\sum C d\omega'', \tag{2}$$

распространенному на многообразие $v$, где $d\omega''$ означает любое произведение $p-1$ дифференциалов, причем $C$ есть функция от $y$, $z$ и $t$.

Очевидно, интеграл (2) есть функция от $t$, зависящая, кроме того, от многообразия $v$.

Рассмотрим его производную по $t$; мы будем иметь

$$\frac{dJ}{dt}=\int\sum\frac{dC}{dt}d\omega''=\int\sum B'(z+t)\,d\omega'.$$

Эта производная, как это показывает ее последнее выражение, не меняется, если заменим $t$ на $t-h$ и одновременно преобразуем $V$ (или $v$), заменяя всюду $z$ на $z+h$.

Отсюда заключаем, что $J$ имеет следующий вид:

$$J=\int\sum D(z+t)\,d\omega''-\int\sum D(z)\,d\omega'',$$

где $D(z)$ — функция от $x$, $y$, $z$.

Интеграл

$$\int\sum D(z)\,d\omega'' \tag{3}$$

порядка $p-1$, однако его легко можно преобразовать в интеграл порядка $p$; достаточно применить преобразование, которое позволило нам в п. 238 перейти от интеграла (3) к интегралу (4), и обратное преобразованию, при помощи которого мы в настоящем пункте перешли от интеграла (1) к интегралу (2).

Интеграл (3), распространенный на многообразие $v$, равен поэтому интегралу порядка $p$

$$\int\sum E(z)\,d\omega', \tag{4}$$

распространенному на многообразие $V$.

По аналогии с терминологией, принятой для однократных интегралов, мы скажем, что интеграл (4) есть интеграл от полного дифференциала. И действительно:

1) он равен нулю для всякого замкнутого многообразия;

2) он приводим к интегралу меньшего порядка.

Установив это, будем иметь

$$J=\int\sum E(z+t)\,d\omega'-\int\sum E(z)\,d\omega',$$

где интегралы распространены на многообразие $V$.

Но это равенство может быть записано еще в виде

$$\int\sum[B(z+t)-E(z+t)]\,d\omega'=\int\sum[B(z)-E(z)]\,d\omega',$$

и оно верно для любого многообразия $V$.

Это значит, что

$$\int\sum[B(z)-E(z)]\,d\omega'$$

есть абсолютный интегральный инвариант.

Итак, мы приходим к следующему результату.

*Всякий относительный интегральный инвариант есть сумма интеграла от полного дифференциала и абсолютного интегрального инварианта.*

**241.** Мы видели в п. 238, каким образом из относительного инварианта порядка $p$ можно вывести абсолютный инвариант порядка $p+1$.

Очевидно, та же процедура применима к абсолютным инвариантам, так что можно было бы попытаться применить ее шаг за шагом и последовательно построить инварианты порядка $p+2$, $p+3$, ....

Однако мы скоро остановились бы на этом пути.

Действительно, имеется случай, когда процедура, о которой идет речь, является иллюзорной, а именно, когда инвариант, который мы хотим преобразовать, является интегралом от полного дифференциала.

Интегральный инвариант, к которому привело бы преобразование, был бы тогда тождественно равен нулю.

Если теперь преобразовать инвариант порядка $p$, то получится инвариант порядка $p+1$, но этот инвариант есть интеграл от полного дифференциала, так что если мы захотим его снова преобразовать, то придем в результате к тождественному нулю.

## Связь инвариантов с уравнением в вариациях

**242.** Возьмем снова систему

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt. \tag{1}$$

Мы можем составить соответствующие уравнения в вариациях в том смысле, как они были определены в начале главы IV.

Для того чтобы составить эти уравнения, заменяем в уравнениях (1) $x_i$ на $x_i+\xi_i$ и пренебрегаем квадратами $\xi_i$; таким образом находим систему линейных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{dt}=\frac{dX_k}{dx_1}\xi_1+\frac{dX_k}{dx_2}\xi_2+\ldots+\frac{dX_k}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Между интегралами уравнений (2) и интегральными инвариантами уравнений (1) имеется внутренняя связь, которую легко заметить.

Пусть

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)=\text{const}$$

— какой-либо интеграл уравнений (2). Это будет однородная функция относительно $\xi$ и, кроме того, зависящая каким-либо образом от $x$. Я всегда смогу предположить, что эта функция $F$ однородна относительно $\xi$ степени 1, ибо если бы это было не так, то стоит лишь возвысить $F$ в подходящую степень, чтобы найти однородную функцию степени 1.

Рассмотрим теперь выражение

$$\int F(dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n); \tag{3}$$

я говорю, что это интегральный инвариант системы (1).

Я замечаю сначала, что величина под знаком интеграла

$$F(dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n)$$

есть бесконечно малая первого порядка, поскольку величины $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ — бесконечно малые первого порядка, и что $F$ — однородная функция первого порядка относительно этих количеств.

Интеграл (3), следовательно, конечен.

Установив это, допустим сначала, что фигура $F_0$ сводится к бесконечно малой линии, концы которой имеют следующие координаты:

$$\begin{gathered}x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\\ x_1+\xi_1,\ x_2+\xi_2,\ \ldots,\ x_n+\xi_n.\end{gathered}$$

Интеграл (3) сведется к единственному элементу и, следовательно, будет равен

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n).$$

Это выражение, будучи интегралом уравнений (2), останется постоянным и будет иметь одно и то же значение для линии $F_0$ и для линии $F$.

Если теперь линия $F_0$ и, следовательно, линия $F$ конечны, мы разбиваем линию $F_0$ на бесконечно малые части. Интеграл (3), распространенный на одну из этих бесконечно малых частей линии $F_0$, будет равен интегралу (3), распространенному на соответствующую бесконечно малую часть линии $F$. Интеграл, распространенный целиком на всю линию $F_0$, будет равен интегралу (3), распространенному целиком на всю линию $F$.

Итак, интеграл (3) есть интегральный инвариант, что и требовалось доказать.

Обратно, допустим, что (3) — интегральный инвариант первого порядка; я говорю, что

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

будет интегралом уравнений (2).

Действительно, интеграл (3) должен быть одним и тем же для линии $F_0$ и для линии $F$, каковы бы ни были эти линии, и, в частности, если $F_0$ сводится к бесконечно малому элементу, концы которого имеют координаты

$$x_i \text{ и } x_i + \xi_i.$$

Тогда интеграл (3) сводится, как мы это уже видели, к

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{4}$$

Поскольку интеграл есть инвариант, это выражение (4) должно быть постоянным.

Итак, это есть интеграл уравнений (2), что и требовалось доказать.

**243.** Посмотрим теперь, чему соответствуют инварианты порядка выше первого.

Рассмотрим какие-нибудь два частных решения уравнений (2); пусть

$$\begin{gathered} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \\ \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n' \end{gathered} \tag{5}$$

— эти два решения.

Могут существовать функции

$$F(x_i, \xi_i, \xi_i'),$$

которые одновременно зависят от $x_i$, $\xi_i$ и $\xi_i'$ и которые сводятся, каковы бы ни были выбранные два решения, к постоянным, не зависящим от времени.

Другими словами, функция $F$ будет интегралом системы

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n, \\ \frac{d\xi_k'}{dt} &= \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1' + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2' + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n', \end{aligned} \tag{6}$$

которой удовлетворяют $\xi_i$ и $\xi_i'$.

Сделаем более частную гипотезу и предположим, что $F$ имеет вид

$$\sum A_{ik}(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),$$

где $A_{ik}$ — функции только от $x$.

Тогда я утверждаю, что двойной интеграл

$$J = \int \sum A_{ik} dx_i dx_k$$

есть интегральный инвариант уравнений (1).

Предположим, в самом деле, что фигура $F_0$ сводится к бесконечно малому параллелограмму, координаты вершин которого имеют значения

$$x_i, \quad x_i + \xi_i, \quad x_i + \xi'_i, \quad x_i + \xi_i + \xi'_i,$$

взятые при $t=0$.

Фигура $F$ также будет подобна бесконечно малому параллелограмму, координаты вершин которого имеют значения

$$x_i, \quad x_i + \xi_i, \quad x_i + \xi'_i, \quad x_i + \xi_i + \xi'_i,$$

взятые при $t=t$.

Интеграл $J$ сводится к единственному элементу, значение которого в точности равно

$$\sum A_{ik}(\xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i),$$

и, так как это выражение по предположению есть интеграл системы (6), то он будет иметь одно и то же значение для обеих фигур $F$ и $F_0$.

Предположим теперь, что $F$ и $F_0$ — две конечные поверхности; разложим $F_0$ на бесконечно малые параллелограммы, каждому из которых будет соответствовать элементарный параллелограмм на $F$. Значение $J$ одно и то же для каждого элемента на $F_0$ и для соответствующего элемента на $F$; следовательно, оно опять одинаково для всей поверхности $F_0$ и для всей поверхности $F$.

Итак, интеграл $J$ есть интегральный инвариант.

Обратное утверждение можно было бы доказать так же, как и в предыдущем пункте.

**244.** Очевидно, эта теорема является общей и применима к инвариантам порядка выше второго. Сформулируем ее еще раз для инвариантов третьего порядка. Рассмотрим три частных решения уравнений (2), $\xi_i$, $\xi'_i$, $\xi''_i$; эти три решения должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi_i, \\ \frac{d\xi'_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi'_i, \\ \frac{d\xi''_k}{dt} &= \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi''_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Если система (7) допускает интеграл вида

$$\sum A_{i,k,l} \begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k \\ \xi_l & \xi'_l & \xi''_l \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где коэффициенты $A$ — функции от $x$, то тройной интеграл

$$\int \sum A_{i,k,l}\, dx_i dx_k dx_l \tag{9}$$

будет интегральным инвариантом уравнений (1), и наоборот [3].

## Преобразование инвариантов

**245.** Так как инварианты приводятся таким образом к интегралам уравнения в вариациях, то легко найти очень большое число способов. которые позволяют преобразовывать эти инварианты.

Если известно некоторое число интегральных инвариантов уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{1}$$

то из каждого из них выведем интеграл уравнений в вариациях

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \sum \frac{dX_k}{dx_i}\xi_i. \tag{2}$$

Комбинируя между собой эти различные интегралы, получим новый интеграл уравнений (2), откуда выведем новый инвариант уравнений (1).

Начнем с изучения случая инвариантов первого порядка.

Пусть

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_p$$

— некоторое число интегралов уравнений (1), причем эти интегралы будут функциями только от $x_i$.

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i),\ \ldots,\ \int F_q(dx_i)$$

— $q$ интегральных инвариантов первого порядка тех же уравнений (1).

Функции под знаком интеграла

$$F_1(dx_i),\ F_2(dx_i),\ \ldots,\ F_q(dx_i)$$

зависят от $x_i$ и их дифференциалов $dx_i$. Они могут зависеть от $x_i$ любым образом; однако относительно дифференциалов

$$dx_1,\ dx_2, \ldots,\ dx_n$$

они должны быть однородными первой степени.

Тогда

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i),\ \ldots,\ F_q(\xi_i)$$

будут интегралами уравнений (2) и будут однородными первой степени относительно $\xi_i$.

Пусть теперь

$$\Theta(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_p;\ F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_q) = \Theta[\Phi_k,\ F_l]$$

— функция от $\Phi$ и $F$, зависящая от $\Phi$ любым образом, но однородная первой степени относительно $F$.

Тогда функция

$$\Theta[\Phi_k,\ F_l(\xi_i)]$$

будет новым интегралом уравнений (2); кроме того, она будет однородной функцией первой степени относительно $\xi_i$.

Отсюда следует, что

$$\int \Theta[\Phi_k,\ F_l(dx_i)]$$

— интегральный инвариант первого порядка уравнений (1).

Можно было бы прийти столь же легко к тому же результату, преобразуя инварианты заменой переменных п. 237.

Например,

$$\int (F_1 + F_2 + \ldots + F_q)$$

и

$$\int \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_q^2}$$

будут интегральными инвариантами.

**246.** Эти же вычисления можно применить к инвариантам более высокого порядка.

Пусть снова

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$$

$p$ интегралов уравнений (1) и

$$\int F_1(dx_i dx_k), \int F_2(dx_i dx_k), \ldots, \int F_q(dx_i dx_k)$$

— $q$ интегральных инвариантов второго порядка. $F$ будут функциями $x_i$ и произведений дифференциалов

$$dx_i dx_k.$$

Они будут однородными первой степени относительно этих произведений.

Тогда

$$F_l(\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i)$$

будут интегралами системы (6) п. 243.

Если теперь

$$\Theta[\Phi_\mu, F_l]$$

есть какая-либо функция от $\Phi$ и $F$, однородная первой степени относительно $F$, то выражение

$$\Theta[\Phi_k, F_l(\xi_i \xi'_k - \xi'_i \xi_k)]$$

будет интегралом тех же уравнений (6); кроме того, оно будет однородным первой степени относительно определителей

$$\xi_k \xi'_i - \xi'_k \xi_i.$$

Отсюда следует, что двойной интеграл

$$\int \Theta[\Phi_\mu, F_l(dx_i dx_k)]$$

будет интегральным инвариантом второго порядка уравнений (1).

**247.** Таким образом, мы имеем средство, зная несколько инвариантов одного и того же порядка, комбинировать их так, чтобы получить другие инварианты того же порядка.

Тот же способ позволяет, если известно несколько инвариантов одного и того же порядка, получить новые инварианты другого порядка.

Пусть, например,

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i)$$

— два интегральных инварианта первого порядка; я предполагаю, и это есть наиболее общий случай, что $F_1$ и $F_2$ — линейные и однородные функции от дифференциалов $dx_i$.

Выражения

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i)$$

будут однородными функциями первого порядка относительно $\xi_i$ и они будут интегралами уравнений (2).

Аналогично

$$F_1(\xi_i'),\ F_2(\xi_i')$$

будут интегралами уравнений (6).

Отсюда вытекает, что

$$F_1(\xi_i)F_2(\xi_k') - F_1(\xi_i')F_2(\xi_k) \tag{10}$$

будет интегралом системы (6).

Так как $F_1$ и $F_2$ линейны относительно $\xi_i$, то будем иметь

$$F_1(\xi_i+\xi_i') = F_1(\xi_i) + F_1(\xi_i');$$
$$F_2(\xi_i+\xi_i') = F_2(\xi_i) + F_2(\xi_i').$$

Отсюда следует, что выражение (10), которое, кроме того, меняет знак при перестановке $\xi_i$ и $\xi_i'$, не изменяется при замене $\xi_i$ на $\xi_i+\xi_i'$.

Отсюда мы делаем вывод, что это выражение (10) — линейная и однородная функция от определителей

$$\xi_i\xi_k' - \xi_k\xi_i',$$

причем коэффициенты зависят только от $x$, но не от $\xi$ и $\xi'$.

Следовательно, из выражения (10) можно вывести интегральный инвариант второго порядка уравнений (1).

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_i),\ \int F_2(dx_i dx_k)$$

— два интегральных инварианта уравнений (1), один — первого порядка, а другой — второго. Я предположу, что $F_1$ и $F_2$ — линейные и однородные функции: первая — относительно $n$ дифференциалов $dx_i$, вторая — относительно $n(n-1)/2$ произведений

$$dx_i dx_k.$$

Функции

$$F_1(\xi_i),\ F_2(\xi_i\xi'_k-\xi_k\xi'_i)$$

будут интегралами системы (6).

Выражение

$$F_1(\xi_i)F_2(\xi'_i\xi''_k-\xi'_k\xi''_i)+F_1(\xi'_i)F_2(\xi''_i\xi_k-\xi''_k\xi_i)+F_1(\xi''_i)F_2(\xi_i\xi'_k-\xi_k\xi'_i) \quad (11)$$

будет интегралом системы (7).

С другой стороны, легко проверить, что оно будет линейным и однородным относительно определителей

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k \\ \xi_l & \xi'_l & \xi''_l \end{vmatrix}.$$

Поэтому из него можно вывести интегральный инвариант третьего порядка.

Пусть теперь

$$\int F_1(dx_idx_k),\ \int F_2(dx_idx_k)$$

— два инварианта второго порядка уравнений (1).

Мы выведем из них два интеграла уравнений (6), а именно:

$$F_1(\xi_i\xi'_k-\xi_k\xi'_i),\ F_2(\xi_i\xi'_k-\xi_k\xi'_i),$$

что я смогу записать для краткости

$$F_1(\xi\xi'),\ F_2(\xi\xi').$$

Тогда выражение

$$F_1(\xi\xi')F_2(\xi''\xi''')+F_1(\xi''\xi''')F_2(\xi\xi')+F_1(\xi\xi'')F_2(\xi'''\xi')+F_1(\xi'''\xi')F_2(\xi\xi'')+$$
$$+F_1(\xi\xi''')F_2(\xi'\xi'')+F_1(\xi'\xi'')F_2(\xi\xi''') \quad (12)$$

будет интегралом системы, полученной присоединением к уравнениям (7) уравнений

$$\frac{d\xi'''_k}{dt}=\sum\frac{dX_k}{dx_i}\xi'''_i.$$

Сверх того, это будет линейная и однородная функция относительно определителей, составленных из четырех величин $\xi_i$ и соответствующих величин $\xi'_i$, $\xi''_i$, $\xi'''_i$.

Я продолжаю предполагать, разумеется, что $F_1$ и $F_2$ однородны и линейны относительно произведений $dx_idx_k$.

Следовательно, из выражения (12) можно вывести интегральный инвариант четвертого порядка.

Следует отметить, что этот инвариант не становится тождественным нулем, если предположить, что

$$F_1 = F_2.$$

Тогда выражение (12), деленное на два, сводится к

$$F_1(\xi\xi')\,F_1(\xi''\xi''') + F_1(\xi\xi'')\,F_1(\xi'''\xi') + F_1(\xi\xi''')\,F_1(\xi'\xi'').$$

Поэтому из инварианта второго порядка всегда можно вывести инвариант четвертого порядка; тем же способом из него получим инвариант шестого порядка; и вообще, получим из него инвариант порядка $2p$ (где $2p$ — любое четное число).

248. Пусть вообще

$$\int F_1, \int F_2$$

— два любых инварианта уравнений (1), первый — порядка $p$, второй — порядка $q$.

Я предполагаю, что $F_1$ и $F_2$ — линейные и однородные функции, первая — относительно произведений $p$ дифференциалов $dx$, вторая — относительно произведений $q$ дифференциалов.

Пусть

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}$$

суть $p+q$ решений уравнений (2). Эти решения будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k^{(\mu)}}{dt} = \sum \frac{dX_k}{dx_i}\,\xi_i^{(\mu)} \tag{13}$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p+q).$$

Тогда пусть $F_1'$ означает результат замены в $F_1$ каждого произведения $p$ дифференциалов соответствующим определителем, образованным при помощи $p$ решений

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)}, \ldots, \xi_i^{(p)}.$$

Пусть также $F_2'$ означает результат замены в $F_2$ каждого произведения $q$ дифференциалов соответствующим определителем, образованным при помощи $q$ решений

$$\xi_i^{(p+1)},\ \xi_i^{(p+2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}.$$

Тогда произведение

$$F_1'F_2'$$

будет интегралом системы (13).

При этих предположениях подвергнем $p+q$ букв

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}$$

какой-либо перестановке. Произведение $F_1'F_2'$ перейдет в

$$F_1''F_2''$$

и это снова будет интегралом системы (13).

Мы приписываем этому произведению знак $+$, если перестановка принадлежит четной группе, т. е. если она приводится к четному числу перестановок между двумя буквами. Наоборот, мы приписываем произведению знак $-$, если перестановка не принадлежит к четной группе, т. е. если она приводится к нечетному числу перестановок между двумя буквами.

Во всех случаях выражение

$$\pm F_1''F_2'' \tag{14}$$

будет интегралом системы (13).

Мы имеем $(p+q)!$ возможных перестановок, следовательно, получим $(p+q)!$ выражений, аналогичных (14). Однако среди них будем иметь только

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}$$

различных, ибо выражение (14) не меняется, если переставлять между собой только $p$ букв, входящих в $F_1''$, и с другой стороны, только $q$ букв между собой, которые входят в $F_2''$.

Составим теперь сумму всех выражений (14). Опять получим интеграл системы (13). Но этот интеграл будет линейным и однородным относительно определителей порядка $p+q$, которые можно составить из букв

$$\xi_i^{(1)},\ \xi_i^{(2)},\ \ldots,\ \xi_i^{(p+q)}.$$

Следовательно, из него можно вывести инвариант порядка $p+q$ уравнений (1).

Если $p=q$ и $F_1$ тождественно с $F_2$, то инвариант, полученный таким образом, будет тождественным нулем, если $p$ — нечетное; но он не будет таковым, если $p$ — четное, как я объяснил это в конце предыдущего параграфа.

## Другие соотношения между инвариантами и интегралами

**249.** Посмотрим теперь, каким образом, зная некоторое число инвариантов, можно вывести один или несколько интегралов.

Сперва я предполагаю, что известны два инварианта $n$-го порядка

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

и

$$\int M' dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где $M$ и $M'$ — функции от $x$; я утверждаю, что отношение $M'/M$ будет интегралом уравнений (1).

Действительно, рассмотрим уравнения в вариациях (2), и пусть

$$\xi_i^{(1)}, \ \xi_i^{(2)}, \ \ldots, \ \xi_i^{(n)}$$

— $n$ любых линейно независимых решений этих уравнений.

Эти $n$ решений будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений, аналогичной системам (6) и (7), которую я буду называть системой $S$.

Пусть $\Delta$ — определитель, образованный при помощи $n^2$ букв $\xi_i^{(k)}$. Тогда

$$M\Delta \text{ и } M'\Delta$$

будут интегралами системы $S$; следовательно, то же будет и для отношения

$$\frac{M'}{M},$$

и так как это отношение зависит только от $x$ и не зависит от $\xi$, то оно будет интегралом уравнений (1).

Тот же результат можно доказать другим способом.

Совершим замену переменных п. 237. Наши два интегральных инварианта превратятся в

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz$$

и

$$\int M'J dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz,$$

где $J$ означает якобиан, или функциональный определитель старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z$.

Согласно п. 237, $MJ$ и $M'J$ должны зависеть только от

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1};$$

следовательно, то же имеет место и для отношения $M'/M$, а так как всякая функция от $y_i$ есть интеграл уравнений (1), то это отношение — интеграл уравнений (1), что и требовалось доказать.

**250.** Можно видоизменять эту методику несколькими способами. Пусть, например,

$$\int F_1(dx_i), \int F_2(dx_i), \ \ldots, \int F_p(dx_i)$$

— $p$ линейных инвариантов первого порядка. Предположим, что мы имеем тождественно

$$F_1 = M_2F_2 + M_3F_3 + \ldots + M_pF_p,$$

где $M_i$ зависят только от $x$, но не от дифференциалов $dx$.

Я говорю, что $M_i$, если $p \leqslant n+1$, будут интегралами уравнений (1).

Действительно, пусть $A_{i,\,k}$ — коэффициент при $dx_k$ в $F_i$; мы должны будем иметь

$$A_{1,\,k} = M_2A_{2,\,k} + M_3A_{3,\,k} + \ldots + M_pA_{p,\,k}.$$

Совершим замену переменных п. 237; наши инварианты перейдут в

$$\int F_1'(dx_i'), \int F_2'(dx_i'), \ \ldots, \int F_p'(dx_i').$$

Если, кроме того, положим

$$F_i' = \sum A_{i,\,k}' dx_k',$$

то получим

$$A_{1,\,k}' = M_2A_{2,\,k}' + M_3A_{3,\,k}' + \ldots + M_pA_{p,\,k}'.$$

Мы будем иметь здесь $n$ линейных уравнений, из которых сможем найти $M_i$, лишь бы только было $p \leqslant n+1$.

Но коэффициенты $A_{i,\,k}$, согласно п. 237, зависят только от $y$, но не от $z$; следовательно, то же будет и для $M_i$, а это значит, что $M_i$ — интегралы уравнений (1).

**251.** Пусть теперь

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

— интеграл; ясно, что

$$\int \left(\frac{dF}{dx_1}dx_1 + \frac{dF}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}dx_n\right)$$

будет интегральным инвариантом первого порядка.

Тогда можно поставить себе следующий вопрос:

Рассмотрим интегральный инвариант первого порядка

$$\int (A_1dx_1 + A_2dx_2 + \ldots + A_ndx_n)$$

и предположим, что величина под знаком интеграла есть полный дифференциал; какое соотношение будет между интегралом от этого полного дифференциала и интегралами уравнений (1)?

Чтобы отдать себе в этом отчет, совершим замену переменных п. 237; наш инвариант перейдет в

$$\int dU = \int (B_1 dy_1 + B_2 dy_2 + \ldots + B_{n-1} dy_{n-1} + C dz).$$

Коэффициенты $B$ и $C$ должны зависеть от $y$, но не от $z$.

Если выражение $dU$ есть полный дифференциал, то функция $U$ должна будет, следовательно, иметь вид

$$U = U_0 + zU_1,$$

где $U_0$ и $U_1$ — интегралы уравнений (1). Тогда будем иметь

$$\frac{dU}{dt} = U_1.$$

Но мы имеем, если вернуться к старым переменным $x_i$,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx_1} X_1 + \frac{dU}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n} X_n.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dU}{dx_1} X_1 + \frac{dU}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n} X_n$$

есть интеграл уравнений (1). Если это выражение равно нулю, то имеем

$$U_1 = 0, \quad U = U_0,$$

и $U$ есть интеграл уравнений (1).

252. Можно было бы умножить число примеров этого рода; я приведу из них лишь один.

Рассмотрим инвариант первого порядка вида

$$\int \sqrt{\sum B_i dx_i^2 + 2 \sum C_{i,k} dx_i dx_k} = \int \sqrt{\Phi}.$$

Пусть $\Delta$ — дискриминант квадратичной формы $\Phi$.

Совершим замену переменных п. 237; наш инвариант перейдет в

$$\int \sqrt{\sum B'_i dx'^2_i + 2 \sum C'_{i,k} dx'_i dx'_k} = \int \sqrt{\Phi'}.$$

Пусть $\Delta'$ — дискриминант квадратичной формы $\Phi'$.

Пусть $J$ — якобиан, или функциональный определитель $x$ относительно $x'$; будем иметь

$$\Delta' = \Delta J^2.$$

Кроме того, очевидно, что $\Delta'$ будет (как и коэффициенты $B'$ и $C'$) интегралом уравнений (1).

Пусть теперь дан инвариант $n$-го порядка

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

После замены переменных п. 237 он станет

$$\int MJ dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n,$$

и $MJ$ должно быть интегралом уравнений (1).

Отсюда я заключаю, что

$$\frac{\Delta'}{M^2 J^2},$$

т. е.

$$\frac{\Delta}{M^2}$$

должно быть интегралом уравнений (1).

### Замены переменных

**253.** При любой замене переменных $x_i$, не затрагивающей переменной $t$, которая представляет время, необходимо только применить к интегральным инвариантам обычные правила замены переменных в простых или кратных определенных интегралах. Мы уже делали это несколько раз.

Однако замена переменной $t$ представляет бо́льшую трудность.

A priori могло бы даже показаться, что это преобразование не должно вести ни к какому результату.

И действительно: рассмотрим систему

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{1}$$

Введем новую переменную $t_1$, определяемую соотношением

$$\frac{dt}{dt_1} = Z,$$

где $Z$ — заданная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Система (1) превратится в

$$dt_1 = \frac{dx_1}{ZX_1} = \frac{dx_2}{ZX_2} = \ldots = \frac{dx_n}{ZX_n}. \qquad (2)$$

Предположим, что начальные значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ представляют собой координаты некоторой точки $M_0$ пространства $n$ измерений.

Если движение этой точки определяется уравнениями (1), где $t$ представляет время, то эта точка в момент $t = \tau$ придет в $M$.

Если движение, напротив, определяется уравнениями (2), где $t_1$ представляет время, то точка $M_0$ в момент $t_1 = \tau$ придет в $M'$.

Рассмотрим теперь фигуру $F_0$, занятую в нулевой момент различными точками $M_0$.

Если движение и деформация этой фигуры определяются уравнениями (1), то в момент $t = \tau$ она превратится в новую фигуру $F$.

Если движение определяется уравнениями (2), то фигура $F_0$ в момент $t_1 = \tau$ превратится в новую фигуру $F'$, отличную от $F$.

$F'$ не только будет отличной от $F$, но она не будет также совпадать, вообще говоря, с каким-либо из положений, занимаемых $F$ в момент, отличный от момента $t = \tau$.

Поэтому кажется, что параметры проблемы основательно изменены, и мы не должны ожидать, чтобы из инвариантов (1) можно было вывести инварианты (2).

Вот что, однако, происходит с инвариантами порядка $n$.

Совершим замену переменных п. 237; система (1) превратится в

$$dt = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{1}, \qquad (1\text{bis})$$

а система (2) — в

$$dt_1 = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz}{Z}, \qquad (2\text{bis})$$

где предполагается, что $Z$ должна быть выражена в функции от $y$ и $z$.

Теперь положим

$$z_1 = \int \frac{dz}{Z},$$

где интегрирование выполняется по $z$ ($y$ рассматриваются как постоянные), а нижний предел может зависеть от $y$.

Система (2) примет вид

$$dt_1 = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dz_1}{1} \qquad (2\text{ter})$$

и будет иметь ту же форму, что и (1bis).

Пусть тогда

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

есть инвариант $n$-го порядка уравнений (1); при помощи замены переменных п. 237 он станет

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz,$$

где $J$ — якобиан $x$ относительно $y$ и $z$, $MJ$ должно быть функцией от $y$.

Тогда

$$\int MJ dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz_1$$

будет инвариантом уравнений (2ter);

$$\int \frac{MJ}{Z} dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1} dz$$

будет инвариантом уравнений (2bis), и, наконец,

$$\int \frac{M}{Z} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

будет инвариантом уравнений (2).

### Различные замечания

**253bis.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_i = X_i dt \tag{1}$$

и их уравнения в вариациях

$$d\xi_i = \Xi_i dt. \tag{2}$$

Предположим, что уравнения (1) допускают интегральный инвариант первого порядка

$$\int \sum A_i dx_i;$$

выражение $\sum A_i \xi_i$ будет интегралом уравнений (2).

С другой стороны, эти уравнения (2) будут допускать в качестве решения

$$\xi_i = \varepsilon X_i,$$

где $\varepsilon$ — любая бесконечно малая постоянная [4].

Действительно, пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

есть какое-либо решение уравнений (1); если $\varepsilon$ — очень малая постоянная, то

$$x_i = \varphi_i(t+\varepsilon) = \varphi_i(t) + \varepsilon \frac{dx_i}{dt}$$

опять будет решением уравнений (1), и

$$\xi_i = \varphi_i(t+\varepsilon) - \varphi_i(t) = \varepsilon \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon X_i$$

будет решением уравнений (2).

Отсюда следует, что

$$\sum A_i \xi_i = \varepsilon \sum A_i X_i$$

должно быть постоянно.

Следовательно, $\Sigma A_i X_i$ является интегралом уравнений (1).

Предположим теперь, что уравнения (1) допускают интегральный инвариант второго порядка

$$\int\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k .$$

Тогда

$$\sum A_{i,k} (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i)$$

будет интегралом уравнений (2) и уравнений (2bis), которые выводим из (2), заменяя $\xi_i$ на $\xi'_i$.

Положим

$$\xi'_i = \varepsilon X_i,$$

где $\varepsilon$ — постоянная. Это позволительно, так как $\xi'_i = \varepsilon X_i$ — решение (2bis).

Тогда

$$\sum A_{i,k} (\xi_i X_k - X_i \xi_k)$$

будет интегралом (2); это показывает, что

$$\int \sum A_{i,k} (X_k dx_i - X_i dx_k)$$

— интегральный инвариант первого порядка уравнений (1).

Итак, этот способ позволяет найти инвариант порядка $n-1$, когда известен инвариант порядка $n$; иногда эта методика может быть иллюзорной, так как инвариант, полученный таким образом, может быть тождественным нулем.

Рассмотрим теперь инвариант следующего вида:

$$\int \sum (A_i + tB_i)\, dx_i,$$

где $A_i$ и $B_i$ — функции от $x$; в дальнейшем мы встретимся с инвариантами этого вида.

Тогда

$$\sum (A_i + tB_i)\, \xi_i$$

будет интегралом уравнений (2); отсюда следует, что выражение

$$\sum (A_i + tB_i)\, X_i$$

должно быть постоянным.

Пусть для краткости

$$\Phi = \sum A_i X_i; \quad \Phi_1 = \sum B_i X_i;$$

выражение

$$\Phi + t\Phi_1$$

должно быть постоянным, что влечет за собой условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + t\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \Phi_1 = 0$$

или же

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i + \Phi_1 + t \sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i = 0, \tag{3}$$

где $X_i$, $A_i$, $B_i$ — функции от $x$. Следовательно, то же относится и к

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i,\ \sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i.$$

Следовательно, тождество (3) будет выполняться только, если имеем тождественно

$$\sum \frac{d\Phi_1}{dx_i} X_i = 0$$

и

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i} X_i + \Phi_1 = 0.$$

Первое из этих соотношений показывает нам, что $\Phi_1$ — интеграл уравнений (1).

**253ter.** Пусть

$$\Phi = \text{const}$$

есть интеграл уравнений (2); функция $\Phi$ должна быть некоторой формой, т. е. целым и однородным полиномом относительно $\xi_i$, коэффициенты которого как-то зависят, кроме того, от $x_i$

Пусть $m$ — степень этого полинома. Выражение

$$\int \sqrt[m]{\Phi'}$$

(где $\Phi'$ есть не что иное, как $\Phi$, где $\xi_i$ заменены дифференциалами $dx_i$), как я утверждаю, будет интегральным инвариантом уравнений (1).

При этих предположениях пусть $I$ означает какой-нибудь инвариант формы $\Phi$.

Совершим замену переменных п. 237; уравнения (1) этого пункта примут вид

$$\frac{dy_i}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 1, \tag{1bis}$$

и, если обозначить через $\eta_i$ и $\zeta$ вариации $y_i$ и $z$, то уравнения в вариациях системы (1bis) приведутся к

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

В этих новых переменных $\Phi$ превратится в форму $\Phi_0$, целую, однородную и степени $m$ относительно $\eta_i$ и $\zeta$; коэффициенты могут быть любыми функциями от $y_i$, но, согласно теореме п. 237, поскольку мы имеем дело с интегральным инвариантом, эти коэффициенты не могут зависеть от $z$.

Величины $x_i$ являются функциями от $y$ и $z$, и мы выводим отсюда следующие соотношения между вариациями:

$$\xi_i = \sum \frac{dx_i}{dy_k} \eta_k + \frac{dx_i}{dz} \zeta. \tag{4}$$

Следовательно, $\xi$ являются линейными функциями от $\eta$ и $\zeta$, и определитель линейных уравнений (4) будет не чем иным, как якобианом $x$ относительно $y$ и $z$, якобианом, который я обозначаю через $J$.

Таким образом, мы переходим от формы $\Phi$ к форме $\Phi_0$ посредством линейной подстановки (4), определитель которой равен $J$.

Пусть $I_0$ — инвариант $\Phi_0$, который соответствует инварианту $I$ формы $\Phi$; мы будем иметь

$$I = I_0 J^p,$$

где $p$ — степень инварианта.

Но $I_0$ — функция коэффициентов $\Phi_0$ и, следовательно, функция $y$, не зависящая от $z$; следовательно, это — интеграл уравнений (1).

Пусть $M$ — последний множитель уравнений (1), так что мы имеем

$$\sum \frac{dMX_i}{dx_i} = 0$$

и

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

— интегральный инвариант порядка $n$.

Мы видели в п. 252, что $MJ$ будет интегралом уравнений (1). Следовательно,

$$I_0 (MJ)^p = IM^p$$

будет интегралом уравнений (1). Следовательно, каждому инварианту формы $\Phi$ соответствует интеграл этих уравнений.

Пусть теперь $C$ — некоторый ковариант формы $\Phi$ степени $p$ относительно коэффициентов формы $\Phi$ и $q$ — относительно переменных $\xi$.

Если $C_0$ — соответствующий ковариант $\Phi_0$, то будем иметь

$$C = C_0 J^p.$$

Коэффициенты $C_0$ являются функциями коэффициентов $\Phi_0$, следовательно, они не зависят от $z$; это же будет и для коэффициентов

$$C_0 (MJ)^p = CM^p;$$

следовательно, $CM^p$ является интегралом уравнений (2); следовательно,

$$\int \sqrt[q]{C' M^p},$$

где $C'$ есть не что иное, как $C$, где $\xi_i$ заменены на $dx_i$, — интегральный инвариант уравнений (1).

Итак, вот средство для построения большого числа интегральных инвариантов; заслуживает внимания частный случай, когда $p$ равно нулю (т. е. случай инвариантов или ковариантов, называемых абсолютными); если $C$, например, есть абсолютный ковариант $\Phi$, то

$$\int \sqrt[q]{C'},$$

будет интегральным инвариантом уравнений (1). Следовательно, можно образовать новый интегральный инвариант, не зная последнего множителя $M$.

Та же методика применяется к интегральным инвариантам высшего порядка. Пусть, например,

$$\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k$$

— интегральный инвариант второго порядка.

С этим интегральным инвариантом связана билинейная форма

$$\Phi = \sum A_{i,k} (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i),$$

которая является интегралом уравнений (2) и (2bis).

Всякий инвариант или ковариант этой формы, умноженный на подходящую степень $M$, будет интегралом уравнений (2), (2bis) и, следовательно, породит новый интегральный инвариант.

Таким же образом, если имеется система интегральных инвариантов, мы выведем из нее систему форм, подобных $\Phi$, которые будут интегралами уравнений (2), (2bis). Всякому инварианту этой системы форм будет соответствовать интеграл уравнений (1); всякому коварианту этой системы форм будет соответствовать интегральный инвариант уравнений (1).

Пусть, например, $F$ и $F_1$ — две квадратичные формы относительно $\xi$; $F'$ и $F'_1$ — то, чем они становятся, если заменить в них $\xi_i$ на $dx_i$.

Предположим, что $F$ и $F_1$ — интегралы уравнений (2) и что, следовательно,

$$\int \sqrt{F'}, \quad \int \sqrt{F'_1}$$

— интегральные инварианты системы (1).

Рассмотрим форму

$$F - \lambda F_1,$$

где $\lambda$ — неопределенный множитель. Приравняв дискриминант этой формы нулю, мы получим алгебраическое уравнение степени $n$ относительно $\lambda$, корни которого будут, очевидно, абсолютными инвариантами системы форм $F$, $F_1$. Следовательно, они будут интегралами уравнений (1).

Но это не все; пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — эти корни, тогда $F$ и $F_1$ могут быть представлены в виде

$$F = \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_n A_n^2,$$
$$F_1 = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — линейные формы, которые можно определить чисто алгебраическими операциями. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно рассматривать как коварианты нулевой степени системы $F$, $F_1$, так что

$$\int A'_1, \int A'_2, \ldots, \int A'_n$$

— интегральные инварианты уравнений (1), если обозначить через $A'_i$ результат замены в $A_i$ переменных $\xi_i$ дифференциалами $dx_i$.

Однако существует исключение, если уравнение относительно $\lambda$ имеет кратные корни. Если, например, $\lambda_1$ равно $\lambda_2$, то нельзя утверждать более, что

$$\int A_1', \quad \int A_2'$$

— интегральные инварианты, а только что

$$\int \sqrt{A_1'^2 + A_2'^2}$$

— интегральный инвариант.

Пусть теперь

$$\int \sum A_{i,k} dx_i dx_k, \quad \int \sum B_{i,k} dx_i dx_k$$

— два интегральных инварианта второго порядка.

Две билинейные формы

$$\Phi = \sum A_{i,k} (\xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i'),$$
$$\Phi_1 = \sum B_{i,k} (\xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i')$$

будут интегралами (2) и (2bis).

Самый интересный случай тот, когда $n$ четно; пусть, следовательно, $n=2m$.

Рассмотрим форму

$$\Phi - \lambda\Phi_1$$

и приравняем ее определитель нулю. Мы получим алгебраическое уравнение относительно $\lambda$ степени $n=2m$; но левая часть этого уравнения есть полный квадрат, так что оно приводится к уравнению порядка $m$. Его $m$ корней

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

будут по той же причине, что и выше, интегралами уравнений (1).

Теперь можно представить $\Phi$ и $\Phi_1$ в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i (P_i Q_i' - Q_i P_i'),$$
$$\Phi_1 = \sum (P_i Q_i' - Q_i P_i'),$$

где $P_i$ и $Q_i$ — $2m$ линейных полиномов относительно $\xi$, а $P_i'$ и $Q_i'$ — те же полиномы, в которых $\xi$ заменены на $\xi'$.

Тогда выражения

$$P_1Q'_1 - Q_1P'_1; \qquad P_2Q'_2 - Q_2P'_2; \ \ldots; \qquad P_mQ'_m - Q_mP'_m$$

будут ковариантами системы $\Phi$, $\Phi_1$ и, следовательно, интегралами уравнений (2), (2bis), которым будут соответствовать интегральные инварианты.

Если уравнение относительно $\lambda$ имеет кратные корни, то будет иметь место исключение.

Если имеем, например,

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

то уже нельзя утверждать, что два выражения

$$P_1Q'_1 - P'_1Q_1, \qquad P_2Q'_2 - P'_2Q_2$$

— интегралы уравнений (2), (2bis), но только что их сумма

$$P_1Q'_1 - P'_1Q_1 + P_2Q'_2 - P'_2Q_2$$

— интеграл уравнений (2), (2bis).

Глава XXIII

# ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ

## Применение последнего множителя

254. Прежде всего, имеется интегральный инвариант, который образуется очень легко, когда известен последний множитель дифференциальных уравнений.

Пусть

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt \qquad (1)$$

— наши дифференциальные уравнения.

Предположим, что существует такая функция $M$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что имеем тождественно

$$\frac{d\,(MX_1)}{dx_1}+\frac{d\,(MX_2)}{dx_2}+\ldots+\frac{d\,(MX_n)}{dx_n}=0.$$

Эту функцию $M$ называют последним множителем.

В таком случае я утверждаю, что интеграл порядка $n$

$$J=\int Mdx_1dx_2\ldots dx_n$$

есть интегральный инвариант. Действительно, допустим, что мы проинтегрировали уравнения (1), выразив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции от $t$ и $n$ постоянных интегрирования

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;$$

интеграл $J$ примет вид

$$J=\int M\Delta d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

где $\Delta$ — якобиан, или функциональный определитель переменных $x$ относительно $\alpha$; тогда получим

$$\frac{dJ}{dt}=\int\frac{dM\Delta}{dt}d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_n.$$

Но

$$\frac{dM\Delta}{dt} = M\frac{d\Delta}{dt} + \Delta\frac{dM}{dt},$$

$$\frac{dM}{dt} = \sum X_i \frac{dM}{dx_i}.$$

С другой стороны,

$$\Delta = \left| \frac{dx_1}{d\alpha_1} \frac{dx_2}{d\alpha_1} \dots \frac{dx_n}{d\alpha_1} \right|.$$

Я записываю только первую строку этого определителя; остальные получаются заменой $\alpha_1$ на $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

Следовательно, $\Delta + dt\frac{d\Delta}{dt}$ должно быть якобианом

$$x_i + dt\frac{dx_i}{dt} = x_i + X_i dt$$

относительно постоянных $\alpha$; он будет равен произведению якобиана от $x_i$ относительно $\alpha$, т. е. $\Delta$, на якобиан $x_i + X_i dt$ относительно переменных $x_i$, который я обозначу через $D$; я записываю

$$\Delta + dt\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \cdot D.$$

Но якобиан $D$ легко составить; элементы главной диагонали конечны, элементы, принадлежащие $i$-й строке и $i$-му столбцу, записываются в виде

$$1 + dt\frac{dX_i}{dx_i}.$$

Остальные элементы бесконечно малы; элементы, принадлежащие $i$-й строке и $k$-му столбцу ($i \neq k$), записываются в виде

$$dt\frac{dX_i}{dx_k}.$$

Отсюда следует, что если пренебречь членами порядка $dt^2$, получим

$$D = 1 + dt\sum\frac{dX_i}{dx_i},$$

откуда

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta\sum\frac{dX_i}{dx_i} \quad [5].$$

Отсюда заключаем

$$\frac{dM\Delta}{dt} = \Delta\sum X_i\frac{dM}{dx_i} + \Delta\sum M\frac{dX_i}{dx_i} = \Delta\sum\frac{d(MX_i)}{dx_i} = 0,$$

откуда, наконец,

$$\frac{dJ}{dt} = 0,$$

что и требовалось доказать.

### Уравнения динамики

255. В случае уравнений динамики легко составить большое число интегральных инвариантов. Действительно, мы научились в п. 56 и следующих составлять некоторое число интегралов уравнения в вариациях, а в предыдущей главе мы узнали, каким образом из них получить интегральные инварианты.

Первым интегралом (уравнение (3), т. I, стр. 147) является следующий:

$$\eta_1'\xi_1 - \xi_1'\eta_1 + \eta_2'\xi_2 - \xi_2'\eta_2 + \ldots = \text{const}.$$

Из него получается следующий интегральный инвариант:

$$J_1 = \int (dx_1dy_1 + dx_2dy_2 + \ldots + dx_ndy_n).$$

Он второго порядка и очень важен для последующего. Немного далее (также на стр. 147, т. I) я получаю второй интеграл, который записываю в виде

$$\sum \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix} = \text{const}.$$

Интегральный инвариант, который я вывожу из него, — четвертого порядка и записывается так:

$$J_2 = \int \sum dx_idy_idx_kdy_k.$$

Суммирование, указанное знаком $\Sigma$, распространено на $n(n-1)/2$ сочетаний индексов $i$ и $k$.

Аналогично, интеграл

$$J_3 = \int \sum dx_idy_idx_kdy_kdx_ldy_l,$$

где суммирование распространяется на $n(n-1)(n-2)/6$ сочетаний трех индексов $i$, $k$ и $l$, опять будет инвариантом, и т. д.

Таким образом, мы получаем $n$ интегральных инвариантов, если мы имеем $n$ пар сопряженных переменных; один из этих инвариантов $J_1$ —

второго порядка, $J_2$ — четвертого, $J_3$ — шестого, . . . , последний $J_n$ — порядка $2n$.

Однако не следует думать, что эти инварианты все различны. Действительно, в конце п. 247 я сказал, что всегда можно вывести из одного инварианта второго порядка один инвариант четвертого порядка, один инвариант шестого порядка и так далее. Инварианты $J_1$, $J_2$, . . . , $J_n$, которые я только что определил, — не что иное, как инварианты, которые можно вывести подобным образом из первого из них.

Эти инварианты можно связать с рассуждениями из другой области; в начале стр. 149 тома I я показал, как можно вывести теорему Пуассона из интеграла (3) на стр. 147, или, что сводится к тому же, из интегрального инварианта $J_1$.

Оперируя таким же образом с инвариантом $J_2$, мы нашли бы теорему, аналогичную теореме Пуассона.

Пусть

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$$

— четыре интеграла уравнений динамики.

Пусть

$$\Delta_{i,k}$$

— якобиан этих четырех интегралов относительно

$$x_i,\ y_i,\ x_k,\ y_k.$$

Выражение

$$\sum \Delta_{i,k},$$

где суммирование распространено на все сочетания индексов $i$, $k$, будет опять интегралом.

Мы пришли бы к аналогичной теореме, исходя из какого-нибудь из инвариантов $J_3$, $J_4$, . . . , $J_n$.

Но согласно сделанному мною только что замечанию, все эти теоремы фактически не отличаются от теоремы Пуассона.

Однако среди этих инвариантов имеется один, которому следует придать большее значение, — это последний из них

$$J_n = \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \ldots dx_n dy_n.$$

Его можно было бы получить по способу, изложенному в предыдущем пункте; действительно, известно, что уравнения динамики допускают в качестве последнего множителя единицу.

**256.** Теперь я предполагаю, что $x$ означают прямоугольные координаты $n$ точек в пространстве, и возвращаюсь к обозначениям стр. 149 I тома.

Мы нашли (стр. 150) следующий интеграл уравнений в вариациях

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const}.$$

Соответствующий интегральный инвариант записывается в виде

$$\int \sum \left(\frac{ydy}{m} - \frac{dV}{dx}dx\right).$$

Аналогично, интегралу

$$\sum \eta_{1,i} = \text{const}$$

соответствует инвариант

$$\int (dy_{1,1} + dy_{1,2} + \ldots + dy_{1,n});$$

интегралу

$$\sum_i (x_{1,i}\eta_{2,i} - y_{1,i}\xi_{2,i} - x_{2,i}\eta_{1,i} + y_{2,i}\xi_{1,i}) = \text{const}$$

соответствует инвариант

$$\int \sum (x_{1,i}dy_{2,i} - y_{1,i}dx_{2,i} - x_{2,i}dy_{1,i} + y_{2,i}dx_{1,i}).$$

Однако все эти инварианты не представляют большого интереса, так как их можно непосредственно вывести из интегралов живых сил, центра масс и площадей.

Этого нельзя сказать о последующем инварианте, который существует, если функция $V$ является однородной относительно переменных $x$.

Мы видели в п. 56, что если $V$ — однородная функция степени $-1$, то уравнения в вариациях допускают интеграл

$$\sum (2x_{k,i}\eta_{k,i} + y_{k,i}\xi_{k,i}) = 3t\left[\sum \left(\frac{y_{k,i}\eta_{k,i}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{k,i}}\xi_{k,i}\right)\right] + \text{const},$$

или, опуская индексы,

$$\sum (2x\eta + y\xi) = 3t \sum \left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right) + \text{const}.$$

Вообще, если $V$ — однородная функция степени $p$, то тем же способом получим следующий интеграл:

$$\sum (2x\eta - py\xi) = (2 - p)\, t \sum \left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right) + \text{const},$$

откуда имеем интегральный инвариант

$$J = \int \sum (2xdy - pydx) + (p - 2)\, t \int \sum \left(\frac{ydy}{m} - \frac{dV}{dx}dx\right)$$

— инвариант совершенно особого характера, поскольку он зависит от времени.

Второй интеграл можно записать в виде

$$\int d\sum\left(\frac{y^2}{2m}-V\right),$$

следовательно, это интеграл от полного дифференциала, и легко видеть, что

$$\sum\left(\frac{y^2}{2m}-V\right)$$

— не что иное, как постоянная живых сил, которую я обозначу через $C$.

Инвариант $J$ — первого порядка; следовательно, это интеграл, взятый вдоль дуги некоторой кривой.

Пусть $C_0$ и $C_1$ — значения постоянной живых сил на двух концах этой дуги.

Эта дуга представляет собой фигуру, обозначенную нами в предыдущей главе через $F_0$; когда эта фигура деформируется, превращаясь в $F$, то, как я объяснил в предыдущей главе, $C_0$ и $C_1$ не изменяются.

Отсюда вытекает, что мы имеем

$$J=\int\sum(2xdy-pydx)+(p-2)\,t\,(C_1-C_0).$$

Интеграл

$$\int\sum(2xdy-pydx)$$

не останется, следовательно, постоянным, когда фигура $F$ (которая сводится здесь к дуге кривой) деформируется; но его изменения пропорциональны времени.

Интеграл этот постоянен, если оба конца дуги соответствуют одному и тому же значению постоянной живых сил.

В частности, он также постоянен, если дуга кривой замкнута. Следовательно, этот интеграл есть то, что я назвал в предыдущей главе относительным инвариантом.

Но если предположить дугу кривой замкнутой, то под знаком интеграла можно добавить любой полный дифференциал, не меняя величины интеграла; например, прибавить

$$\sum(xdy+ydx)$$

с любым постоянным коэффициентом.

Таким образом, интегралы

$$\int \sum y dx, \quad \int \sum x dy$$

— также относительные инварианты.

В п. 238 мы видели, что из относительного инварианта первого порядка можно вывести абсолютный инвариант второго порядка. Инвариант второго порядка, получаемый таким образом, есть не что иное, как

$$J_1 = \int \sum dx dy,$$

который мы изучили выше.

Существует случай, когда выражение

$$\sum (2x dy - p y dx),$$

которое входит под знак интеграла, становится полным дифференциалом. Это случай, когда $p = -2$, который имел бы место, если бы притяжение, вместо того чтобы подчиняться закону Ньютона, действовало обратно пропорционально кубу расстояния.

Тогда

$$\int \sum (2x dy - p y dx) = \sum 2xy.$$

Следовательно, $\sum 2xy$ есть полином первой степени относительно времени, и поскольку

$$\sum 2xy = \sum 2mx \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sum mx^2,$$

то выражение $\sum mx^2$ — полином второй степени относительно времени.

Это результат, к которому пришел Якоби в начале своих «Лекций по динамике».

Но, вообще

$$\sum (2x dy - p y dx)$$

не есть полный дифференциал.

В частном случае ньютонова притяжения наш инвариант принимает вид

$$\int \sum (2x dy + y dx) - 3t (C_1 - C_0).$$

## Интегральные инварианты и характеристические показатели

**257.** Можно задаться вопросом, существуют ли другие алгебраические интегральные инварианты кроме тех, которые мы только что образовали.

Можно было бы применить либо метод Брунса, либо метод, который я использовал в главах IV и V; действительно, интегральные инварианты соответствуют, как мы это видели, интегралам уравнений в вариациях, и к этим уравнениям можно было бы применить те же методы, что и к самим уравнениям движения.

Но, может быть, лучше стоит видоизменить эти методы, по крайней мере, по форме.

Пусть дана какая-нибудь система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \tag{1}$$

и их уравнения в вариациях

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \frac{dX_i}{dx_k} \xi_k. \tag{2}$$

Ищем сперва интегральные инварианты первого порядка вида

$$\int (B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_n dx_n), \tag{3}$$

где выражение под знаком интеграла линейно относительно дифференциалов $dx$ и где $B$ — алгебраические функции от $x$.

Эти инварианты соответствуют линейным интегралам уравнений (2).

Итак, каковы условия, чтобы уравнения (2) допускали интегралы, линейные относительно $\xi$ и алгебраические относительно $x$?

Предположим, что переменным $x$ даются значения, которые соответствуют периодическому решению с периодом $T$. Тогда коэффициенты уравнений (2) будут известными функциями от $t$, периодическими с периодом $T$, и из них найдется общее решение уравнений (2) следующего вида:

$$\xi_i = \sum_k A_k e^{\alpha_k t} \psi_{i,k}, \tag{4}$$

где $\psi_{i,k}$ — периодические функции от $t$, $\alpha_k$ — характеристические показатели, $A_k$ — постоянные интегрирования.

Затем мы сможем разрешить линейные уравнения (4) относительно неизвестных $A_k e^{\alpha_k t}$ и найдем

$$A_k e^{\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta_{i,k}, \tag{5}$$

где $\theta_{i,k}$ — периодические функции от $t$.

Следовательно, между $\xi$ будет иметься $n$ соотношений вида (5) и, кроме них, никаких других.

Если уравнения (1) и (2) допускают $q$ *различных* интегралов, линейных относительно $\xi$ и алгебраических относительно $x$, то может случиться, что какие-либо из этих $q$ интегралов перестанут быть различными, если заменить в них переменные $x$ значениями, которые соответствуют одному из периодических решений уравнений (1).

Каким же образом это может произойти?

Пусть

$$H_i = B_{1,i}\xi_1 + B_{2,i}\xi_2 + \ldots + B_{n,i}\xi_n = \text{const} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$

— эти $q$ линейных интегралов, где $B$ будут алгебраическими функциями от $x$, которые будут соответствовать $q$ интегральным инвариантам вида (3).

Они различны, т. е. между ними не существует тождественных соотношений вида

$$\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2 + \ldots + \beta_q H_q = 0, \tag{6}$$

где коэффициенты $\beta$ — постоянные, а также соотношений вида

$$\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2 + \ldots + \psi_q H_q = 0, \tag{6bis}$$

где $\psi$ — интегралы уравнений (1).

Возможно ли тогда, чтобы между ними выполнялось соотношение вида

$$\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2 + \ldots + \varphi_q H_q = 0, \tag{6ter}$$

где $\varphi$ — произвольные функции только от $x$?

Согласно п. 250, если бы подобное соотношение имело место, то отношения функций $\varphi$ должны были быть интегралами уравнений (1).

Следовательно, мы имели бы

$$\frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{\varphi_2}{\psi_2} = \ldots = \frac{\varphi_q}{\psi_q},$$

где $\psi$ — интегралы, и, следовательно,

$$\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2 + \ldots + \psi_q H_q = 0,$$

что противоречит предположению.

Итак, между $H_i$ не может существовать тождественного соотношения вида (6ter).

Однако если $x$ даны значения, которые соответствуют частному решению, периодическому или непериодическому, то может случиться, что левая часть (6) тождественно обращается в нуль.

Тогда мы найдем, что уравнение (6), которое не удовлетворяется тождественно, каковы бы ни были $x$, будет удовлетворяться, когда $x$ будут заменены подходящим образом выбранными функциями от $t$, а именно, теми из этих функций, которые соответствуют частному решению.

Я назову особым всякое частное решение, для которого возникнет это обстоятельство.

При этом могут представиться два случая:

Либо все периодические решения уравнений (1) особые.

Либо не все они особые.

258. Рассмотрим особое решение $S$.

Пусть
$$\beta_1 B_{k,1} + \beta_2 B_{k,2} + \ldots + \beta_q B_{k,q} = B_k,$$
откуда
$$B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 + \ldots + B_n \xi_n = \beta_1 H_1 + \beta_2 H_2 + \ldots + \beta_q H_q.$$

Поскольку соотношение (6) не выполняется тождественно, то не имеют место тождества
$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0, \tag{7}$$
но так как соотношение (6) должно быть выполнено для решения $S$, то эти соотношения (7) (согласно нашему предположению — алгебраические) должны удовлетворяться значениями $x$, которые соответствуют решению $S$.

Пусть теперь
$$B'_i = X_1 \frac{dB_i}{dx_1} + X_2 \frac{dB_i}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dB_i}{dx_n},$$
затем
$$B''_i = X_1 \frac{dB'_i}{dx_1} + X_2 \frac{dB'_i}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dB'_i}{dx_n}, \ \ldots .$$

Очевидно, решение $S$ должно удовлетворять соотношениям
$$B'_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7bis}$$
затем соотношениям
$$B''_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{7ter}$$
и так далее.

Итак, мы составим последовательно соотношения (7), (7bis), (7ter) и т. д. и остановимся тогда, когда придем к системе соотношений, которые являются только следствиями соотношений, образованных ранее.

Соотношения (7), (7bis), (7ter) и т. д. будут алгебраическими согласно нашим предположениям, и их совокупность образует то, что я назвал в п. 11 системой инвариантных соотношений.

Следовательно, если система дифференциальных уравнений допускает особое периодическое решение, то она будет допускать систему инвариантных алгебраических соотношений.

Вероятно, задача трех тел не допускает инвариантных алгебраических соотношений, отличных от тех, которые уже известны. Однако я еще не в состоянии доказать это.

Допустим, что мы имеем несколько особых решений; для каждого из них должно быть

$$\beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \ldots + \beta_q B_{i,q} = 0. \tag{8}$$

Только постоянные $\beta$ могут не быть одинаковыми для двух различных особых решений. Следовательно, не очевидно, что эти два особых решения должны удовлетворять одной и той же системе инвариантных соотношений. Тем не менее, как мы сейчас докажем, это имеет место.

Допустим для определенности, что $q=4$; последовательность рассуждений была бы такой же в случае $q > 4$. Рассмотрим $n$ соотношений

$$\beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \beta_3 B_{i,3} + \beta_4 B_{i,4} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Образуем таблицу $T$ из $4n$ коэффициентов $B$; все определители, составленные при помощи четырех столбцов этой таблицы, должны быть равны нулю.

Если они обращаются в нуль не тождественно, то мы найдем таким образом одно или несколько соотношений, которым должны удовлетворять все особые решения, куда войдут только $x$ и не войдут неопределенные коэффициенты $\beta$.

Если же они равны нулю тождественно, то рассмотрим тройку из соотношений (17); мы выведем из них

$$\frac{M_1}{\beta_1} = \frac{M_2}{\beta_2} = \frac{M_3}{\beta_3} = \frac{M_4}{\beta_4},$$

где $M$ — миноры первого порядка таблицы $T$.

Следовательно, мы будем иметь

$$M_1 H_1 + M_2 H_2 + M_3 H_3 + M_4 H_4 = 0. \tag{18}$$

Это соотношение (18) должно быть тождественным, ибо коэффициентом при $\xi_k$ является один из определителей таблицы $T$, которые, как я предполагаю, тождественно равны нулю.

Следовательно, мы получили бы здесь соотношение вида (6ter), что противоречит нашему предположению, по крайней мере, если не допускать, что все $M$ равны тождественно нулю.

Если все миноры первого порядка таблицы $T$ тождественно равны нулю, то составим миноры второго порядка.

Пусть $M'_1$, $M'_2$, $M'_3$ — три из этих миноров, полученные выбором в таблице трех каких-либо столбцов и вычеркиванием в ней строк 1 и 4 для $M'_1$, 2 и 4 — для $M'_2$, 3 и 4 — для $M'_3$.

Мы получим

$$M'_1 H_1 + M'_2 H_2 + M'_3 H_3 = 0. \tag{19}$$

Это соотношение также должно быть тождественным, ибо коэффициентом при $\xi_k$ в левой части является один из миноров первого порядка из $T$, которые все, как я предполагаю, тождественно равны нулю.

Следовательно, это снова было бы соотношением вида (6ter), по крайней мере, если не предполагать, что все миноры второго порядка $M'$ тождественно равны нулю.

Если же это так, то придем к тождеству

$$B_{i,2} H_1 - B_{i,1} H_2 = 0,$$

что снова является соотношением вида (6ter).

Следовательно, не может случиться, чтобы все определители из таблицы $T$ тождественно обращались в нуль. Поэтому мы будем иметь, по крайней мере, одно соотношение (и, следовательно, систему инвариантных соотношений), которому должны будут удовлетворять все особые решения уравнений (1).

Можно было бы немедленно заключить, что все решения уравнений (1) не могут быть особыми.

Однако это не все; мы можем расширить наше определение особых решений.

Мы определили только что особые решения относительно $q$ интегралов $H_i$ уравнений (2), линейных относительно $\xi$ и соответствующих $q$ инвариантам (линейным и первого порядка) уравнений (1).

Мы могли бы определить абсолютно таким же образом особые решения относительно любых $q$ интегралов

$$H_1, H_2, \ldots, H_q$$

уравнений (2) и уравнений (2bis), полученных заменой $\xi$ на $\xi'$.

Эти интегралы должны быть однородными одной и той же степени как относительно $\xi$, так и относительно $\xi'$; это будут целые полиномы относительно этих переменных; однако они не обязательно линейны относительно $\xi$; следовательно, они могут соответствовать интегральным инвариантам высшего порядка или интегральным инвариантам первого порядка, но нелинейным.

Кроме того, интегралы должны быть различными, т. е. они не должны тождественно удовлетворять соотношениям вида (6), (6bis) или (6ter).

Я скажу тогда, что частное решение $S$ — особое, если для значений $x$, которые соответствуют этому решению, удовлетворяется соотношение (6).

Тогда мы будем иметь

$$H_i = \sum B_{k,i} A_k,$$

где $A_k$ — одночлен, образованный произведением определенного числа сомножителей $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, возведенных в подходящую степень, а $B_{k,i}$ — алгебраические функции от $x$.

Кроме того, мы положим, как и выше,

$$B_i = \beta_1 B_{i,1} + \beta_2 B_{i,2} + \ldots + \beta_q B_{i,q}$$

и нам ничего не нужно будет изменять в предыдущих рассуждениях. Мы придем к тому же заключению.

Все особые решения относительно $q$ интегралов $H_i$ удовлетворяют одной и той же системе инвариантных алгебраических соотношений.

Эти результаты также верны, если рассмотреть интегралы следующего вида:

$$H_i = B_{1,i}\xi_1 + B_{2,i}\xi_2 + \ldots + B_{n,i}\xi_n + B_{n+1,i}t\xi_1 + B_{n+2,i}t\xi_2 + \ldots + B_{2n,i}t\xi_n.$$

Определение особых решений относительно этих интегралов будет опять тем же, и особые решения будут удовлетворять той же системе инвариантных алгебраических соотношений.

Нужно было бы лишь повторить предыдущее доказательство, ничего в нем не изменяя. Только коэффициенты при величинах $B_{k,i}$, которые играли бы в этом доказательстве ту же роль, что и $\xi_i$, могли быть либо $\xi_i$, либо произведениями $\xi_i$ и $\xi'_i$, либо произведениями вида $t\xi_i$.

**259.** Я не хочу входить здесь в подробности тех соображений, которые заставляют меня считать правдоподобным, что в случае задачи трех тел все периодические решения не могут быть особыми.

Это увело бы слишком далеко от темы; я вернусь к этому позже; но пока я временно допущу это предположение, обращая внимание лишь на то, насколько маловероятно, чтобы все периодические решения задачи трех тел удовлетворяли одной системе инвариантных соотношений, что было бы необходимым согласно предыдущему пункту, для того, чтобы они могли быть особыми. Примем снова обозначения и нумерацию уравнений п. 257.

Если уравнения (1) и (2) допускают $q$ различных интегралов, линейных относительно $\xi$ и алгебраических относительно $x$, то эти $q$ интегралов продолжают оставаться различными, когда $x$ в них заменяются теми значениями, которые соответствуют неособому периодическому решению.

Записывая, что эти $q$ интегралов равны постоянным, и заменяя в уравнениях, полученных таким путем, величины $x$ значениями, соответствующими некоторому периодическому решению, мы получим $q$ уравнений вида (5), в которых, однако, показатель $\alpha_k$ будет нулем. Значит, эти $q$ уравнений должны находиться среди уравнений (5). Следовательно, для того чтобы уравнения (1) допускали $q$ различных интегральных инвариантов, линейных относительно $x$, необходимо, чтобы для всякого неособого периодического решения $q$ характеристических показателей $\alpha_k$ были нулями.

Поищем теперь интегральные инварианты вида

$$\int \sqrt{\sum A_i dx_i^2 + 2B_{i,k} dx_i dx_k} = \int \sqrt{F(dx_i)}. \tag{7}$$

Эти инварианты будут соответствовать интегралам уравнений (1) и (2), квадратичным относительно $\xi$. В самом деле, инварианту (7) будет соответствовать интеграл

$$F(\xi_i) = \text{const},$$

который должен быть квадратичным относительно $\xi$ и алгебраическим относительно $x$. Заменим в этом уравнении $x$ теми значениями, которые соответствуют некоторому неособому периодическому решению; мы придем к

$$F^*(\xi_i) = \text{const}, \tag{8}$$

где $F^*$ — однородный квадратичный полином относительно $\xi$, коэффициенты которого суть периодические функции от $t$.

Все уравнения вида (8) должны выводиться из уравнений (5), а именно следующим образом.

В случае какой-либо проблемы динамики и, в частности, в случае задачи трех тел мы видели, что характеристические показатели попарно равны и противоположны по знаку. Следовательно, мы можем сгруппировать уравнения (5) попарно; пусть

$$A_k e^{\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta_{ik}, \tag{5bis}$$

$$B_k e^{-\alpha_k t} = \sum_i \xi_i \theta'_{ik}. \tag{5ter}$$

Перемножая друг на друга уравнения (5bis) и (5ter), получим уравнение вида (8), а все уравнения вида (8) должны быть линейными комбинациями уравнений, полученных таким образом.

Итак, если предположить, что уравнения (1) имеют каноническую форму уравнений динамики и что они содержат $p$ пар сопряженных переменных, мы получим $p$ пар уравнений, аналогичных уравнениям (5bis) и (5 ter), и, следовательно, для каждого периодического решения будет $p$ линейно независимых уравнений вида (8).

Выберем одно уравнение среди этих $p$ уравнений и их линейных комбинаций, пусть это будет $F^*(\xi_i) = c$; поступим таким же образом со всеми остальными периодическими решениями; тогда мы будем иметь некоторый однородный полином $F^*(\xi_i)$, второй степени относительно $\xi$, коэффициенты которого будут функциями от переменных $x$, определенными только для тех значений $x$, которые соответствуют периодическому решению.

Остается узнать, можно ли сделать этот выбор таким образом, чтобы коэффициенты $F^*$ были алгебраическими функциями от $x$ или даже непрерывными функциями от $x$. Я ставлю задачу, не пытаясь пока ее решить.

Поищем теперь инварианты второго порядка, т. е. те, которые имеют вид двойного интеграла

$$\iint F,$$

где $F$ — линейная функция произведений $dx_i dx_k$ (коэффициенты этой линейной функции будут, разумеется, функциями от $x$). Эти инварианты второго порядка будут иметь следующее значение.

Вернемся к уравнениям (1) и (2) (мы все время сохраняем нумерацию п. 257) и составим, кроме того, уравнения

$$\frac{d\xi_i'}{dt}=\sum\frac{dX_i}{dx_k}\xi_k'. \tag{2a}$$

Они приведут нас к уравнениям, аналогичным уравнениям (5), которые я запишу в виде

$$A_k' e^{\alpha_k t}=\sum \xi_i'\theta_{i,k}. \tag{5a}$$

Впрочем, они отличаются от уравнений (5) лишь штрихованными буквами.

Инварианты второго порядка будут соответствовать тогда, согласно предыдущей главе, тем из интегралов (1), (2) и (2а), которые линейны относительно определителей

$$\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i'$$

и алгебраичны относительно переменных $x$.

Пусть

$$F(\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i')$$

— один из этих интегралов; если в нем заменить $x$ величинами, соответствующими периодическому решению, то получим уравнение вида

$$F^*(\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i')=\text{const}, \tag{9}$$

где $F^*$ — линейная функция от определителей

$$\xi_i\xi_k'-\xi_k\xi_i',$$

коэффициенты которой будут периодическими функциями от $t$.

Вот каким образом теперь можно будет составить все соотношения вида (9), относящиеся к заданному периодическому решению.

В случае уравнений динамики уравнения (5а) разделяются на пары, как и уравнения (5); пусть

$$A'_k e^{\alpha_k t} = \sum \xi'_i \theta_{i,k}, \tag{5a bis}$$

$$B'_k e^{-\alpha_k t} = \sum \xi'_i \theta'_{i,k} \tag{5a ter}$$

— одна из этих пар; умножим (5a bis) на (5ter), (5a ter) — на (5bis) и вычтем; мы получим уравнение вида (9). Каждая пара уравнений даст нам одно, а все другие уравнения вида (9) будут только линейными комбинациями тех уравнений, которые можно образовать таким путем.

Среди всех уравнений вида (9), полученных таким образом, выберем одно; поступим так же со всеми остальными периодическими решениями; тогда мы будем иметь соотношение

$$F^* (\xi_i \xi'_k - \xi_k \xi'_i) = \mathrm{const},$$

левая часть которого будет линейной функцией определителей; коэффициенты этой линейной функции будут функциями $x$, определенными только для значений $x$, которые соответствуют периодическому решению.

Остается узнать, можно ли сделать выбор таким образом, чтобы эти коэффициенты были алгебраическими функциями или даже непрерывными функциями от $x$.

Обратимся теперь к линейным инвариантам первого порядка. Согласно п. 29, вид уравнений (4) и, следовательно, уравнений (5), оказывается измененным, если два или несколько характеристических показателей становятся равными.

Если, например, $q$ из этих показателей равны нулю, то можно записать соответствующее уравнение (5) в виде

$$P_k = \sum_i \xi_i \theta_{i,k}, \tag{10}$$

где $P_k$ означает полином, целый относительно $t$, с постоянными коэффициентами.

Наибольшая степень этих полиномов есть $q-1$; точнее, число этих полиномов равно $q$; первый сводится к постоянной, степень второго — не больше единицы, третьего — не больше двух и т. д., и, наконец, последнего — не больше $q-1$.

В случае, когда степень этого последнего полинома достигает своего максимума и равна $q-1$, предпоследний полином является производной последнего, $(q-2)$-й — производной $(q-1)$-го и т. д.

Во всех случаях можно разделить $q$ полиномов на несколько групп; в каждой группе первый полином сводится к постоянной и каждый из них является производной последующего.

Следовательно, для существования $p$ линейных интегральных инвариантов недостаточно, чтобы $p$ характеристических показателей были нулями; нужно еще, чтобы $p$ полиномов $P_k$ сводились к постоянным (или, что то же, чтобы эти полиномы разделялись, по меньшей мере, на $p$ групп).

Каков же тогда, с интересующей нас точки зрения, смысл уравнений (10), в которых $P_k$ не сводится к постоянной?

Мы определили в п. 256 интегральный инвариант, роль которого весьма важна. Этот инвариант имеет вид

$$\int F+t\int F_1,$$

где $F$ и $F_1$ — функции, алгебраические относительно $x$ и линейные относительно дифференциалов $dx$.

Подобный инвариант соответствует интегралу уравнений (2) следующего вида

$$F+tF_1=\text{const},$$

где $F$ и $F_1$ — функции, алгебраические относительно $x$ и линейные относительно $\xi$.

Если в этом интеграле заменим $x$ значениями, которые соответствуют периодическому решению, то придем к

$$F^*+tF_1^*=\text{const},$$

где $F^*$ и $F_1^*$ — линейные относительно $\xi$ функции, коэффициенты которых — периодические функции от $t$.

Вот как можно теперь получить все соотношения вида (11), исходя из уравнений (10).

Рассмотрим два полинома $P_k$, первый — сводящийся к постоянной, а второй — первой степени, причем первый является производной второго. Соответствующие уравнения (10) запишутся

$$A_1=\sum\xi_i\theta_i, \tag{10bis}$$

$$A_2+A_1t=\sum\xi_i\theta_i', \tag{10ter}$$

где $\theta_i$ и $\theta_i'$ периодичны по $t$; из них выводим

$$\sum\xi_i\theta_i'-t\sum\xi_i\theta_i=\text{const},$$

что представляет собой соотношение вида (11).

Заметим еще, что уравнение (10bis), возведенное в квадрат, доставляет нам соотношение вида (8) и что из уравнений (10bis) и (10ter) можно вывести соотношение вида (9), а именно:

$$(\sum\xi_i\theta_i)(\sum\xi_i'\theta_i')-(\sum\xi_i'\theta_i)(\sum\xi_i\theta_i')=\text{const}.$$

**260.** Применим предыдущее к задаче трех тел и будем искать для этой задачи, каково максимальное число интегральных инвариантов различных типов, изученных в предыдущем пункте; а именно, следующих типов:

Первый тип — инварианты, линейные относительно дифференциалов $dx$. Второй тип — инварианты, в которых функция под знаком интеграла является квадратным корнем из полинома второй степени относительно дифференциалов $dx$. Третий тип — инварианты второго порядка, линейные относительно произведений дифференциалов $dx_i dx_k$. Четвертый тип — инварианты вида, рассмотренного в конце предыдущего параграфа, т. е. вида

$$\int F + t \int F_1.$$

Эти различные типы инвариантов соответствуют различным типам интегралов уравнений (2) и (2а), а именно: первый тип — интегралы, линейные относительно $\xi$; второй тип — интегралы, квадратичные относительно $\xi$; третий тип — интегралы, линейные относительно определителей $\xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i'$; четвертый тип — интегралы вида

$$F + tF_1,$$

где $F$ и $F_1$ линейны относительно $\xi$.

Мы можем считать крайне правдоподобным, что все периодические решения задачи трех тел неособые.

В задаче трех тел число степеней свободы равно шести; число характеристических показателей равно двенадцати. Согласно тому, что мы видели в п. 78, среди них имеется шесть и только шесть уничтожающихся; шесть остальных попарно равны и противоположны по знаку. Следовательно, имеется шесть уравнений вида (10) и шесть полиномов $P_k$, из которых четыре — нулевой степени и два — степени единица. Или же иначе, имеется три пары уравнений вида (5bis), (5ter), четыре уравнения вида (10bis), два уравнения вида (10ter).

Итак, посмотрим, каково будет наибольшее число независимых инвариантов каждого типа.

Я уточняю, что́ я понимаю под этим; я не буду рассматривать в качестве независимых $n$ инвариантов первого типа

$$\int F_1, \quad \int F_2, \quad \ldots, \quad \int F_n,$$

или $n$ инвариантов второго типа

$$\int \sqrt{F_1}, \quad \int \sqrt{F_2}, \quad \ldots, \quad \int \sqrt{F_n},$$

или $n$ инвариантов третьего типа

$$\iint F_1, \quad \iint F_2, \quad \ldots, \quad \iint F_n,$$

или $n$ инвариантов четвертого типа

$$\int F_1,\quad \int F_2,\ \ldots,\ \int F_n \quad (F_i = F'_i + tF''_i),$$

если между $F_1, F_2, \ldots, F_n$ будет существовать тождественное соотношение вида

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_n F_n = 0,$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — интегралы уравнений (1).

С самого начала ясно, что нельзя получить более четырех инвариантов первого типа, т. е. более числа уравнений (10bis). Эти четыре инварианта уже известны.

Нельзя получить более тринадцати инвариантов второго типа, три из которых происходили бы из трех пар уравнений вида (5bis), (5ter), а десять остальных получались бы при помощи возведения в квадрат четырех уравнений (10bis) и их попарных произведений. Эти десять последних действительно существуют; но они не являются независимыми от четырех инвариантов первого типа, поскольку их можно вывести из них с помощью процедуры п. 245. Следовательно, здесь можно было бы иметь три новых инварианта.

Нельзя получить более одиннадцати инвариантов третьего типа, три из которых происходили бы из трех пар уравнений вида (5bis), (5ter); шесть получались бы попарной комбинацией четырех уравнений (10bis); два — комбинацией двух уравнений (10ter) с соответствующим уравнением (10bis).

Семь из этих инвариантов известны; одним является инвариант $J$ из п. 255, шесть остальных — это инварианты, которые выводятся из четырех уравнений (10bis), но их нельзя считать независимыми от четырех инвариантов первого типа, поскольку их можно вывести из них, пользуясь методикой п. 247.

Следовательно, здесь можно было бы иметь четыре новых инварианта третьего типа.

Наконец, нельзя получить более двух инвариантов четвертого типа, т. е. более числа уравнений (10ter).

Один из этих инвариантов известен, это — инвариант из п. 256; можно было бы получить еще один новый инвариант.

Вероятно, что эти новые инварианты, существование которых не исключается предыдущим рассмотрением, не существуют; но чтобы доказать это, следовало бы обратиться к другим методам, аналогичным, например, методу Брунса.

## Применение кеплеровых переменных

**261.** Инвариант четвертого типа из п. 256 может быть получен в другом виде.

Пусть имеем любую систему канонических уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Рассмотрим следующий интеграл, взятый вдоль дуги какой-либо кривой:

$$J=\int (x_1dy_1+x_2dy_2+\ldots+x_ndy_n).$$

Предположим, что мы записываем уравнения дуги кривой, вдоль которой происходит интегрирование, выражая $x$ и $y$ в функции параметра $\alpha$, и что значения этого параметра, которые соответствуют концам дуги, — $\alpha_0$ и $\alpha_1$. Интеграл $J$ будет равен

$$J=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left[\sum x\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha.$$

Предположим, что мы рассматриваем нашу дугу кривой как фигуру $F$ предыдущей главы, которая меняется с временем и сводится к $F_0$ при $t=0$.

Тогда $x$, $y$ и функции от $x$ и $y$, такие, как $F$, $dF/dx$, $dF/dy$, ... будут функциями $\alpha$ и $t$.

Мы придем к

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dx}{dt}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha+\int\left[\sum x\frac{d^2y}{dt\,d\alpha}\right]d\alpha,$$

или

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha-\int\left[\sum x\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dF}{dx}\right)\right]d\alpha.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{dJ}{dt}=\int\left[\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}\right]d\alpha+\int\left[\sum\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\right]d\alpha-\left[\sum x\frac{dF}{dx}\right].$$

Но

$$\sum\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\sum\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}=\frac{dF}{d\alpha},$$

следовательно,

$$\frac{dJ}{dt}=\left[F-\sum x\frac{dF}{dx}\right]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1}. \tag{2}$$

Если мы предположим, что $F$ — однородная функция степени $p$ относительно $x$, то придем к равенству

$$\sum x \frac{dF}{dx} = pF.$$

Пусть тогда $C$ — постоянная живых сил, такая, что уравнение живых сил записывается в виде

$$F = C.$$

Пусть $C_0$ и $C_1$ — значения этой постоянной, которые соответствуют $\alpha_0$ и $\alpha_1$; будем иметь

$$\frac{dJ}{dt} = (1-p)(C_1 - C_0). \tag{3}$$

Следовательно, $F$ не является инвариантом в собственном смысле слова; но его производная по времени постоянна и, если пользоваться выражением, определенным в предыдущем параграфе, — это инвариант четвертого типа [6].

**262.** Предположим теперь, что $F$ представляет некоторый иной вид однородности.

Разделим пары сопряженных переменных на два класса и обозначим через $x_i$, $y_i$ пары сопряженных переменных первого класса, через $x'_i$, $y'_i$ — пары сопряженных переменных второго класса.

Я предполагаю, что $F$ — однородная функция степени $p$ относительно $x_i$, $(x'_i)^2$ и $(y'_i)^2$, так что имеем

$$\sum x \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} \sum \left( x' \frac{dF}{dx'} + y' \frac{dF}{dy'} \right) = pF.$$

Положим тогда

$$J = \int \left[ \sum (x\,dy) + \frac{1}{2} \sum (x'dy' - y'dx') \right],$$

или

$$J = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[ \sum x \frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left( x' \frac{dy'}{d\alpha} - y' \frac{dx'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha,$$

откуда

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[ \sum \frac{dx}{dt}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left( \frac{dx'}{dt}\frac{dy'}{d\alpha} - \frac{dy'}{dt}\frac{dx'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha +$$
$$+ \int \left[ \sum x \frac{d^2 y}{d\alpha\, dt} + \frac{1}{2} \sum \left( x' \frac{d^2 y'}{d\alpha\, dt} - y' \frac{d^2 x'}{d\alpha\, dt} \right) \right] d\alpha,$$

или

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left[ \sum \frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{1}{2} \sum \left( \frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha} \right) \right] d\alpha -$$
$$- \int \left[ \sum x \frac{d}{d\alpha}\frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} \sum \left( x' \frac{d}{d\alpha}\frac{dF}{dx'} + y' \frac{d}{d\alpha}\frac{dF}{dy'} \right) \right] d\alpha.$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{dJ}{dt}=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\sum\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha}+\frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha}\right)d\alpha-$$

$$-\left[\sum x\frac{dF}{dx}+\frac{1}{2}\sum\left(x'\frac{dF}{dx'}+y'\frac{dF}{dy'}\right)\right]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1},$$

или

$$\frac{dJ}{dt}=[F-pF]_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\alpha_1},$$

или, наконец,

$$\frac{dJ}{dt}=(1-p)(C_1-C_0),$$

что показывает, что $J$ опять является инвариантом четвертого типа.

**263.** Применим предыдущее к задаче трех тел и посмотрим, какой вид примет инвариант из п. 256 при различном выборе переменных.

В п. 11 мы взяли в качестве переменных

$$\begin{array}{cccccc}\beta L, & \beta G, & \beta\Theta, & \beta' L', & \beta' G', & \beta'\Theta',\\ l, & g, & \theta, & l', & g', & \theta'.\end{array}$$

$F$ однородна степени $-2$ относительно переменных первого рода, следовательно,

$$\int[\beta(L\,dl+G\,dg+\Theta\,d\theta)+\beta'(L'\,dl'+G'\,dg'+\Theta'\,d\theta')]+3t(C_1-C_0)$$

будет инвариантом.

Та же однородность имеет место, если за переменные принять, как в п. 12,

$$\begin{array}{cccccc}\Lambda, & H, & Z, & \Lambda', & H', & Z',\\ \lambda, & h, & \zeta, & \lambda', & h', & \zeta'.\end{array}$$

Следовательно,

$$\int(\Lambda\,d\lambda+H\,dh+Z\,d\zeta)+\Lambda'\,d\lambda'+H'\,dh'+Z'\,d\zeta')+3t(C_1-C_0)$$

будет инвариантом.

Если принять за переменные (см. п. 12)

$$\begin{array}{cccccc}\Lambda, & \Lambda', & \xi, & \xi', & p, & p',\\ \lambda, & \lambda', & \eta, & \eta', & q, & q',\end{array}$$

функция $F$ будет однородной степени $-2$ относительно $\Lambda$, $\xi$, $\eta$, $p$ и $q$.

Отсюда следует, что

$$\int \sum (2\Lambda d\lambda + \xi d\eta - \eta d\xi + pdq - qdp) + 6t\,(C_1 - C_0)$$

— инвариант.

Знак $\Sigma$ означает, что к каждому члену указанного вида следует присоединить член, получающийся из него приписыванием буквам штрихов. Так

$$\sum \xi d\eta = \xi d\eta + \xi' d\eta'.$$

Если, наконец, мы примем переменные из пунктов 131 и 137

$$\Lambda,\ \Lambda';\ \tau_i,$$
$$\lambda,\ \lambda';\ \sigma_i,$$

то мы увидим таким же образом, что

$$\int [2\Lambda d\lambda + 2\Lambda' d\lambda' + \sum (\tau_i d\sigma_i - \sigma_i d\tau_i)] + 6t\,(C_1 - C_0)$$

будет инвариантом четвертого типа.

### Замечание об инварианте п. 256

**264.** В п. 256 мы рассмотрели случай, когда $x$ обозначают координаты $n$ точек в пространстве, и уравнения динамики принимают вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dx},$$

где $V$ — однородна степени $p$ относительно $x$.

Мы видели, что в этом случае

$$J = \int \sum (2xdy - pydx) + (p-2)\,t\,(C_1 - C_0)$$

— инвариант четвертого типа.

Два частных случая заслуживают некоторого внимания. Предположим

$$p = 2;$$

тогда приходим к равенству

$$J = 2\int \sum (xdy - ydx),$$

и $J$ — инвариант первого типа.

Это получается, в частности, когда предполагают, что несколько материальных точек притягиваются прямо пропорционально расстоянию. Тогда проверка чрезвычайно легка.

Действительно, в этом случае имеем

$$x = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$$

и

$$y = -m\lambda A\sin\lambda t + m\lambda B\cos\lambda t,$$

где $\lambda$ — абсолютная постоянная, в то время как $A$ и $B$ — постоянные интегрирования, которые, вообще говоря, различны для различных пар сопряженных переменных. Тогда получаем

$$dx = \cos\lambda t dA + \sin\lambda t dB,$$

$$dy = -m\lambda\sin\lambda t dA + m\lambda\cos\lambda t dB,$$

откуда

$$xdy - ydx = m\lambda(AdB - BdA).$$

Это показывает, что

$$J = 2\lambda\int\sum m(AdB - BdA)$$

является инвариантом, поскольку время исчезло, и в нем фигурируют только одни постоянные интегрирования и их дифференциалы.

Пусть теперь $p = -2$; этот случай осуществляется, в частности, когда несколько материальных точек притягиваются обратно пропорционально кубу расстояний.

Тогда инвариант $J$ превращается в

$$J = 2\int\sum(xdy + ydx) - 4t(C_1 - C_0).$$

Но количество под знаком интеграла — полный дифференциал выражения

$$S = \sum xy,$$

так что если обозначить через $S_0$ и $S_1$ значения $S$, соответствующие двум концам дуги интегрирования, то получится

$$J = (2S_1 - 4C_1t) + (2S_0 - 4C_0t).$$

Если мы, в частности, предположим, что один из концов дуги интегрирования соответствует частному положению системы, в котором $n$ материальных точек находятся в покое и на очень большом расстоянии друг от друга, взаимные силы будут очень малы, так что скорости этих материальных точек будут оставаться весьма долго очень малыми, а расстояния — очень большими. Отсюда получается, что $C_0$ будет нулем, так же, как и $S_0$, и для всех значений $t$, как и для $t=0$, останется

$$J = 2S_1 - 4C_1t.$$

| | Задачи | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ограниченная | Плоская | Общая | Плоская приведенная | Общая приведенная |
| Число степеней свободы | 2 | 4 | 6 | 3 | 4 |
| Число пар (5bis), (5ter) | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| Число уравнений (10bis) | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 |
| Число уравнений (10ter) | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| *Максимальное* число возможных инвариантов: | | | | | |
| первого типа | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 |
| второго типа | 2 | 5 | 13 | 3 | 4 |
| третьего типа | 2 | 5 | 11 | 3 | 4 |
| четвертого типа | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| *Максимальное* число возможных *новых* инвариантов: | | | | | |
| первого типа | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| второго типа | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| третьего типа | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 |
| четвертого типа | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

## Глава XXIV

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

### Методы проверки

**266.** В томе II мы изложили различные методы нахождения рядов, которые формально удовлетворяют уравнениям задачи трех тел. Так как эти ряды могут иметь большое практическое значение и поскольку они получаются ценою длинных и трудных вычислений, то все средства, которые можно найти для проверки этих вычислений, могут оказаться ценными; рассмотрение интегральных инвариантов доставляет нам одно из таких средств, не лишенное интереса.

Обозначим через $x_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) координаты двух планет (которые должны быть отнесены, как мы говорили в п. 11 и как мы всегда делали с тех пор, первая — к Солнцу, вторая — к центру тяжести первой планеты и Солнца); обозначим также через $y_i$ компоненты их количеств движения; эти количества $x_i$ и $y_i$ могут быть разложены в ряды следующим образом.

Вспомним результаты глав XIV и XV и, в частности, результаты п. 155. В этих главах вместо двенадцати переменных $x_i$ и $y_i$, которые я только что определил, мы употребили для определения положений двух планет двенадцать других переменных

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \lambda_1,\ \lambda_1',\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4.$$

Кроме того, мы ввели шесть аргументов

$$w_1,\ w_2,\ w_1',\ w_2',\ w_3',\ w_4',$$

полагая

$$w_i=n_it+\varpi_i;\quad w_i'=n_i't+\varpi_i',$$

и шесть других постоянных интегрирования

$$\Lambda_0,\ \Lambda_0',\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ x_3'^0,\ x_4'^0,$$

и мы видели, что можно удовлетворить уравнениям движения следующим образом.

Количества

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \lambda_1-w_1,\ \lambda_1'-w_2,\ \sigma_i,\ \tau_i$$

разложимы по степеням $\mu$ и $x_i'^0$. Каждый член периодичен относительно $w$ и $w'$ и зависит, кроме того, от двух постоянных интегрирования $\Lambda_0$ и $\Lambda_0'$.

Постоянные $n_i$ и $n_i'$ разложимы по степеням $\mu$ и $x_i'^0$ и зависят, кроме того, от $\Lambda_0$ и $\Lambda_0'$.

Величины $w_i$ и $w_i'$ суть шесть постоянных интегрирования.

Наконец,

$$\Lambda d\lambda + \Lambda' d\lambda' + \sum \sigma_i d\tau_i$$

— полный дифференциал, если заменить в нем двенадцать переменных $\Lambda$, $\lambda$, $\sigma$ и $\tau$ их разложениями и рассматривать в этих разложениях $w$ и $w'$ как шесть независимых переменных, а шесть количеств $\Lambda_0$, $\Lambda_0'$, $x_i'^0$ — как постоянные.

Наши величины $x_i$ и $y_i$, которые я только что определил, легко выражаются при помощи двенадцати переменных $\Lambda$, $\lambda$, $\sigma$ и $\tau$.

Мы заключаем, что $x_i$ и $y_i$ могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням $\mu$ и $x_i'^0$, равно как по косинусам и синусам кратных $w$ и $w'$, в которых каждый коэффициент зависит, кроме того, от $\Lambda_0$ и $\Lambda_0'$.

Сверх того, выражение

$$\sum x_i dy_i$$

будет полным дифференциалом, если считать $w$ и $w'$ шестью независимыми переменными, а $\Lambda_0$, $\Lambda_0'$, $x_i'^0$ — постоянными.

Ряды, полученные таким образом (едва ли есть нужда напоминать об этом), не являются сходящимися; они имеют значение только с точки зрения формальных вычислений, что придает им, однако, определенную практическую полезность, как я это объяснил в главе VIII.

Тем не менее, если подставить эти разложения $x_i$ и $y_i$ в выражение интегрального инварианта, то результат подстановки опять должен будет, по крайней мере с формальной точки зрения, удовлетворять условиям, которым должен удовлетворять интегральный инвариант, что и доставит метод проверки, к которому я хочу привлечь внимание.

**267.** Выше мы видели, что

$$\int \sum (2x dy + y dx) - 3t (C_1 - C_0) \tag{1}$$

— интегральный инвариант.

Чтобы воспользоваться этим инвариантом, сделаем замену переменных, аналогичную замене п. 237.

Положим для большей симметрии в обозначениях

$$w_i' = w_{i+2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad n_i' = n_{i+2}, \qquad \varpi_i' = \varpi_{i+2},$$

$$\Lambda_0 = \xi_1, \qquad \Lambda_0' = \xi_2, \qquad x_i'^0 = \xi_{i+2}.$$

Мы видели, что $x$ и $y$ можно разложить в ряды, зависящие от $w$, $w'$, $\Lambda_0$, $\Lambda'_0$ и от $x_i'^0$, т. е. в новых обозначениях, от $w_i$ и $\xi_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Тогда можно взять за новые переменные $\xi_i$ и $w_i$, и дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\frac{d\xi_i}{0}=\frac{dw_i}{n_i}=dt \tag{2}$$

(подобно тому, как в п. 237, уравнения (1) после замены переменных приводились к виду

$$\left.\frac{dy_i}{0}=\frac{dz}{1}=dt\right).$$

Здесь $n_i$ — функции только $\xi_i$.

Но еще лучше взять другие переменные; в самом деле, так как шесть $n_i$ — функции только шести $\xi_i$, то ничто не мешает взять вместо $\xi_i$ и $w_i$ в качестве переменных $n_i$ и $w_i$ таким образом, чтобы дифференциальные уравнения приводились к виду

$$\frac{dn_i}{0}=\frac{dw_i}{n_i}=dt. \tag{3}$$

Интегральный инвариант первого порядка примет вид

$$J=\int\left(\sum A_i dn_i+\sum B_i dw_i\right),$$

где $A$ и $B$ — функции $n_i$ и $w_i$.

Я могу предположить, что фигура $F$ — дуга кривой, уравнения которой, меняющиеся со временем, имеют следующий вид:

$$n_i=f_i(\alpha,\ t),\qquad w_i=f'_i(\alpha,\ t),$$

причем переменные $n_i$ и $w_i$ выражены в функции времени $t$ и параметра $\alpha$, который меняется от $\alpha_0$ до $\alpha_1$ при прохождении всей дуги $F$. Тогда уравнения дуги $F_0$ будут

$$n_i=f_i(\alpha,\ 0),\qquad w_i=f'_i(\alpha,\ 0).$$

Приняв эти условия, я могу написать

$$J=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\sum A_i\frac{dn_i}{d\alpha}+\sum B_i\frac{dw_i}{d\alpha}\right)d\alpha,$$

откуда

$$\frac{dJ}{dt}=\int d\alpha\sum\left(\frac{dA_i}{dt}\frac{dn_i}{d\alpha}+\frac{dB_i}{dt}\frac{dw_i}{d\alpha}+A_i\frac{d^2n_i}{dt\,d\alpha}+B_i\frac{d^2w_i}{dt\,d\alpha}\right).$$

Но мы имеем

$$\frac{dA_i}{dt}=\sum n_k\frac{dA_i}{dw_k},$$

$$\frac{dB_i}{dt}=\sum n_k\frac{dB_i}{dw_k},$$

$$\frac{d^2n_i}{dt\,d\alpha}=0,\qquad \frac{d^2w_i}{dt\,d\alpha}=\frac{dn_i}{d\alpha},$$

откуда, наконец,

$$\frac{dJ}{dt}=\int\sum_i\left[dn_i\left(\sum_k n_k\frac{dA_i}{dw_k}+B_i\right)+dw_i\sum_k n_k\frac{dB_i}{dw_k}\right].$$

Если $J$ — абсолютный интегральный инвариант, то мы должны будем, следовательно, иметь

$$\sum_k n_k\frac{dB_i}{dw_k}=0, \tag{4}$$

$$\sum_k n_k\frac{dA_i}{dw_k}=-B_i. \tag{5}$$

Изучим теперь, что произойдет в случае, когда $A$ и $B$ — периодические функции $w$ и могут, следовательно, быть разложены в тригонометрические ряды.

Рассмотрим сначала уравнение (4); пусть

$$B_i=\sum\left[b\cos(m_1w_1+\ldots+m_6w_6)+b'\sin(m_1w_1+\ldots+m_6w_6)\right],$$

где $b$ и $b'$ зависят от $n_i$.

Уравнение (4) приводится к виду

$$\sum(m_1n_1+\ldots+m_6n_6)\left[-b\sin(m_1w_1+\ldots+m_6w_6)+\right.$$
$$\left.+b'\cos(m_1w_1+\ldots+m_6w_6)\right]=0,$$

что может иметь место только, если

$$m_1n_1+\ldots+m_6n_6=0, \tag{6}$$

или если

$$b=b'=0.$$

Но $m$ — целые постоянные, $n$ — наши независимые переменные, между которыми не может быть никакого линейного соотношения; уравнение (6), следовательно, влечет за собой

$$m_1=m_2=\ldots=m_6=0.$$

Это означает, что тригонометрическое разложение $B_i$ сводится к его среднему значению, т. е. что $B_i$ — функция только $n_i$, не зависящая от $w_i$.

Перейдем теперь к уравнению (5); пусть

$$A_i = \sum (a \cos \omega + a' \sin \omega),$$

где для краткости записано $\omega$ вместо

$$m_1 w_1 + \ldots + m_6 w_6.$$

Тогда уравнение (5) записывается так:

$$\sum (m_1 n_1 + \ldots + m_6 n_6)(-a \sin \omega + a' \cos \omega) = -B_i.$$

Рассмотрим сначала член, зависящий от $w$, т. е. такой член, что $m_1, m_2, \ldots, m_6$ не обращаются в нуль одновременно. Будем иметь

$$m_1 n_1 + \ldots + m_6 n_6 \neq 0.$$

$B_i$ в правой части не зависит от $w$; значит, эта правая часть не содержит ни члена с $\cos \omega$, ни члена с $\sin \omega$. Отсюда вытекает, что

$$a = a' = 0.$$

Следовательно, $A_i$ не зависит от $w$ и сводится к постоянному члену его тригонометрического разложения, члену, который зависит только от $n_i$.

Но тогда уравнение (5) сводится к

$$B_i = 0.$$

Вообще, всякий абсолютный линейный интегральный инвариант первого порядка, в котором выражение под знаком интеграла алгебраично относительно $x$ и $y$ и, следовательно, периодично по $w$, должен будет иметь вид

$$\int \sum A_i dn_i,$$

где $A_i$ зависят только от $n_i$; это действительно имеет место для известных нам абсолютных инвариантов, которые получаются дифференцированием интегралов площадей, живых сил или движения центра тяжести.

Но относительный * инвариант

$$J = \int \sum (2x dy + y dx)$$

заслуживает бóльшего внимания. Мы видели, что

$$J - 3t (C_1 - C_0)$$

---

* Как показывает дальнейшее изложение, для него выполнены условия п. 238. (*Прим. ред. перев.*).

(где $C_0$ и $C_1$ — значения постоянной живых сил на двух концах дуги $F_0$) есть интегральный инвариант. Следовательно, будем иметь

$$\frac{dJ}{dt}=3(C_1-C_0)=3\int dC. \tag{7}$$

Если мы опять положим

$$J=\int\sum(A_i dn_i+B_i dw_i),$$

то уравнение (7) примет вид

$$\int\sum_i\left[dn_i\left(\sum_k n_k\frac{dA_i}{dw_k}+B_i\right)+dw_i\sum_k n_k\frac{dB_i}{dw_k}\right]=3\int\sum_i\frac{dC}{dn_i}dn_i$$

ибо постоянная живых сил $C$ — функция только от $n_i$.

Уравнения (4) и (5), следовательно, должны быть заменены следующими:

$$\sum_k n_k\frac{dB_i}{dw_k}=0, \tag{4bis}$$

$$\sum_k n_k\frac{dA_i}{dw_k}=3\frac{dC}{dn_i}-B_i. \tag{5bis}$$

$A$ и $B$ должны быть периодическими функциями $w$.

Если мы поступим с уравнениями (4bis) и (5bis) так же, как поступили с уравнениями (4) и (5), то снова найдем:

1) что $B_i$ не зависят от $w$;
2) что $A_i$ не зависят от $w$;
3) что

$$3\frac{dC}{dn_i}=B_i.$$

Итак, мы находим окончательно

$$\sum(2x\,dy+y\,dx)=\sum A_i dn_i+3\sum\frac{dC}{dn_i}dw_i,$$

где $A_i$ зависят только от $n_i$.

Другими словами, выражения

$$\sum_i\left(2x_i\frac{dy_i}{dn_k}+y_i\frac{dx_i}{dn_k}\right),$$

или

$$\sum_i\left(2x_i\frac{dy_i}{d\xi_k}+y_i\frac{dx_i}{d\xi_k}\right) \tag{8}$$

не зависят от $w$ и являются функциями только либо $\xi$, либо $n$, в зависимости от того, выражено ли все в функции $\xi$ и $w$ или в функции $n$ и $w$.

Таким же образом будем иметь

$$\sum_i \left(2x_i \frac{dy_i}{dw_k} + y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right) = 3 \frac{dC}{dn_k}. \tag{9}$$

$x_i$, $y_i$ и $C$ разложены, как я сказал, по степеням $\mu$ и $x_i'^0$. Выражения (8) и обе части равенств (9) также, следовательно, разложимы по степеням этих количеств.

Все члены разложений выражений (8) по степеням $\mu$ и $x_i'^0$ должны, следовательно, быть независимыми от $w$.

С другой стороны, каждый член разложения левой части (9) должен равняться соответствующему члену правой части.

Мы имеем, таким образом, очень большое число способов проверки наших вычислений.

**268.** Я сказал, что

$$\sum x_i dy_i$$

— полный дифференциал, если считать $\xi_i$ постоянными, а $w$ — независимыми переменными.

Действительно, мы тогда находим

$$\int \sum (2xdy + ydx) = 3 \int \sum \frac{dC}{dn_i} dw_i,$$

или, так как $dC/dn_i$ зависят только от $\xi$ и, следовательно, должны быть рассматриваемы как постоянные, то

$$\int \sum (2xdy + ydx) = 3 \sum \frac{dC}{dn_i} w_i,$$

откуда

$$\int \sum xdy + \int \sum (xdy + ydx) = 3 \sum \frac{dC}{dn_i} w_i,$$

откуда, наконец,

$$\int \sum xdy = 3 \sum \frac{dC}{dn_i} w_i - \sum xy. \tag{10}$$

Вернемся на мгновение к обозначениям п. 162. В этом пункте, как и в п. 152, мы взяли за переменные

$$\begin{matrix} \Lambda, & \Lambda', & \sigma_i, \\ \lambda_1, & \lambda_1', & \tau_i; \end{matrix} \tag{11}$$

мы положили

$$dS = (\Lambda - \Lambda_{0,0})\, d\lambda_1 + (\Lambda' - \Lambda_{0,0}')\, d\lambda_1' + \sum \sigma_i d\tau_i - d\,(\sigma_i^{0,1}\tau_i).$$

С другой стороны, переменные (11) так же, как и переменные $x_i$, $y_i$, являются сопряженными переменными. Отсюда вытекает, что, как мне случалось несколько раз объяснять, выражение

$$\sum x_i dy_i - \Lambda d\lambda_1 - \Lambda' d\lambda_1' - \sum \sigma_i d\tau_i = dU$$

есть полный дифференциал. Я прибавлю, что мы легко образуем функцию $U$, которую, следовательно, можно считать известной функцией $x_i$ и $y_i$.

Тогда имеем

$$S = 3\sum \frac{dC}{dn_i} w_i - \sum xy - U - \Lambda_{0,0}\lambda_1 - \Lambda'_{0,0}\lambda'_1 - \sigma_i^{0,1}\tau_i. \tag{12}$$

Так как при приложении методики главы XV мы пришли к построению функции $S$, уравнение (12) доставляет в новом виде искомую контрольную формулу.

### Связь с одной теоремой Якоби

**269.** Известно, что Якоби в начале своих «Vorlesungen über Dynamik» доказал, что в случае ньютонова притяжения среднее значение кинетической энергии равно с точностью до постоянного множителя среднему значению потенциальной энергии при допущении, разумеется, что координаты могут быть выражены тригонометрическими рядами того же вида, что и ряды, которые мы здесь изучаем.

Эта теорема Якоби непосредственно примыкает к предыдущему. Уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = y_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dV}{dx_i},$$

откуда

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i} - V = C.$$

Тогда $-V$ представляет собой потенциальную энергию, $C$ — полную энергию, а

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i}$$

— кинетическую энергию.

С другой стороны, так как функция $V$ однородна степени $-1$, мы будем иметь

$$-V = \sum \frac{dV}{dx_i} x_i = \sum x_i \frac{dy_i}{dt},$$

$$\sum \frac{y_i^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum y_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Уравнение живых сил можно, следовательно, записать в виде

$$\frac{1}{2}\sum y_i \frac{dx_i}{dt}+\sum x_i \frac{dy_i}{dt}=C.$$

С другой стороны, возьмем снова уравнения (9) п. 267 и просуммируем их после умножения соответственно на $n_k$; получим

$$\sum_i \left(2x_i \sum_k n_k \frac{dy_i}{dw_k}+y_i \sum_k n_k \frac{dx_i}{dw_k}\right)=3\sum_k n_k \frac{dC}{dn_k}.$$

Замечая, что

$$\sum n_k \frac{dx}{dw_k}=\frac{dx}{dt}$$

$\left(\text{поскольку } \frac{dw_k}{dt}=n_k\right)$, заключаем, что

$$\sum \left(2x_i \frac{dy_i}{dt}+y_i \frac{dx_i}{dt}\right)=3\sum n_k \frac{dC}{dn_k}.$$

Сравнивая с уравнением живых сил, находим

$$\sum n_k \frac{dC}{dn_k}=\frac{2}{3}C;$$

это показывает, что $C$ должна быть однородной степени $^2/_3$ относительно $n_k$, что можно было бы увидеть, впрочем, непосредственно. Теперь, среднее значение функции $U$, которое я обозначу $[U]$, будет нулем, если $U$ — производная периодической функции; следовательно, имеем

$$\sum \left[y_i \frac{dx_i}{dt}+x_i \frac{dy_i}{dt}\right]=0$$

и, сопоставляя с уравнением живых сил, выводим

$$\left[\frac{1}{2}\sum y_i \frac{dx_i}{dt}\right]=-C,$$

$$\left[\sum x_i \frac{dy_i}{dt}\right]=2C,$$

откуда

$$\frac{\left[\sum \frac{y_i^2}{2m_i}\right]}{[-V]}=-\frac{1}{2}.$$

Это — теорема Якоби.

Рассматривая частные производные $dx/dw_k$ вместо полных производных $dx/dt$, мы пришли бы к аналогичным результатам. Мы нашли бы

$$\sum_i \left[x_i \frac{dy_i}{dw_k}+y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right]=0$$

и, следовательно,

$$\left[\sum_i x_i \frac{dy_i}{dw_k}\right] = 3\frac{dC}{dn_k},$$

$$\left[\sum_i y_i \frac{dx_i}{dw_k}\right] = -3\frac{dC}{dn_k}.$$

### Приложение к задаче двух тел

**270.** Предыдущие рассуждения прилагаются, в частности, к задаче двух тел. Рассмотрим планету и Солнце и отнесем планету к осям с фиксированным направлением, проходящим через Солнце; рассмотрим, следовательно, относительное движение планеты по отношению к Солнцу.

Пусть $x_1$, $x_2$, $x_3$ — три координаты планеты; $y_1$, $y_2$, $y_3$ — три составляющие количества движения.

Пусть $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — три координаты планеты, отнесенные к особым осям, а именно, к большой оси орбиты, параллели малой оси и перпендикуляру к плоскости орбиты; мы будем иметь

$$x_1 = h_1\xi + h_1'\eta + h_1''\zeta,$$

$$x_2 = h_2\xi + h_2'\eta + h_2''\zeta,$$

$$x_3 = h_3\xi + h_3'\eta + h_3''\zeta,$$

где $h$ — постоянные, связанные хорошо известными соотношениями, выражающими ортогональность преобразования координат.

Таким же образом будем иметь

$$y_i = \mu h_i \frac{d\xi}{dt} + \mu h_i' \frac{d\eta}{dt} + \mu h_i'' \frac{d\zeta}{dt},$$

где $\mu$ — масса планеты.

Теперь ясно, что $\zeta$ — нуль и что $\xi$ и $\eta$ — функции единственного аргумента $w$, являющегося средней аномалией, и двух постоянных — большой оси $a$ и эксцентриситета $e$.

С другой стороны, $h$ — функции трех углов Эйлера, или, более общо, каких-либо трех функций $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ этих трех углов.

Таким образом, $x$ и $y$ — функции $w$, $a$, $e$ и $\omega$.

Тогда будем иметь, называя $C$ постоянной живых сил и $n$ средним движением,

$$\sum\left(2x_i \frac{dy_i}{dw} + y_i \frac{dx_i}{dw}\right) = 3\frac{dC}{dn},$$

а с другой стороны, выражения

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{da}+y_i\frac{dx_i}{da}\right),$$

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{de}+y_i\frac{dx_i}{de}\right),$$

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{d\omega_k}+y_i\frac{dx_i}{d\omega_k}\right)$$

должны быть независимы от $w$.

Некоторые из этих высказываний были очевидны заранее и не доставляют нам нового контроля.

Действительно, $dx_i/d\omega_k$ — такие линейные функции $x_i$, коэффициенты которых зависят от $\omega$, что

$$\sum_i x_i\frac{dx_i}{d\omega_k}=0.$$

Отсюда вытекает, что мы можем написать следующее тождество:

$$\alpha_1\frac{dx_1}{d\omega_k}+\alpha_2\frac{dx_2}{d\omega_k}+\alpha_3\frac{dx_3}{d\omega_k}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix},$$

где $\alpha$ — *любые* постоянные, а $\varphi_i^k$ — заданные функции $\omega$; также будем иметь

$$\alpha_1\frac{dy_1}{d\omega_k}+\alpha_2\frac{dy_2}{d\omega_k}+\alpha_3\frac{dy_3}{d\omega_k}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что мы имеем

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{d\omega_k}+y_i\frac{dx_i}{d\omega_k}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ \varphi_1^k & \varphi_2^k & \varphi_3^k\end{vmatrix}.$$

Это выражение должно сводиться к постоянной, не зависящей от $w$, и, так как мы имеем три аналогичных соотношения, которые получаются, если положить $k=1, 2, 3$, мы можем написать

$$y_3x_2-y_2x_3=\text{const},$$

$$y_1x_3-y_3x_1=\text{const},$$

$$y_2x_1-y_1x_2=\text{const}.$$

Но это не новый результат; это уравнения площадей.

Изучим теперь выражение

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{da}+y_i\frac{dx_i}{da}\right).$$

Посмотрим, как $x$ и $y$ зависят от $a$. Величины $x$ содержат $a$ множителем, а $y$ содержат $an$, ибо имеем

$$y_i=\mu\frac{dx_i}{dt}=\mu n\frac{dx_i}{dw}.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{dx_i}{da}=\frac{x_i}{a},\qquad \frac{dy_i}{da}=\frac{y_i}{a}+\frac{y_i}{n}\frac{dn}{da}.$$

Следовательно, наше выражение превращается в

$$\sum x_iy_i\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{n}\frac{dn}{da}\right).$$

Легко проверить, что оно равно нулю; действительно, имеем согласно третьему закону Кеплера,

$$n^2a^3=\text{const},$$

откуда

$$\frac{2dn}{n}+\frac{3da}{a}=0.$$

Мы и здесь не получаем таким образом нового способа контроля.

Остается изучить два выражения

$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{dw}+y_i\frac{dx_i}{dw}\right)=W,$$
$$\sum\left(2x_i\frac{dy_i}{de}+y_i\frac{dx_i}{de}\right)=E.$$

Мы должны проварьировать только $e$ и $w$; поэтому не должны больше варьировать $\omega$, т. е. направление большой оси орбиты. Следовательно, можем выбрать особые (орбитальные) оси и положить

$$x_1=\xi=a\left[-\frac{3}{2}e+\sum J_{p-1}(pe)\frac{\cos pw}{p}\right],$$
$$x_2=\eta=a\sqrt{1-e^2}\left[\sum J_{p-1}(pe)\frac{\sin pw}{p}\right],$$
$$x_3=\zeta=0.$$

Функции $J$ — функции Бесселя; под знаком $\Sigma$ индекс $p$ принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, за исключением значения 0.

Отсюда получим

$$y_1 = -\mu a n \sum J_{p-1}(pe)\sin pw,$$

$$y_2 = +\mu a n \sqrt{1-e^2} \sum J_{p-1}(pe)\cos pw.$$

Тогда выражение $W$ после сокращения на общий множитель $\mu a^2 n$ принимает вид

$$3e\sum J_{p-1}p\cos pw - 2\sum J_{p-1}\frac{\cos pw}{p}\sum J_{p-1}p\cos pw +$$
$$+\left[\sum J_{p-1}\sin pw\right]^2 - 2(1-e^2)\sum J_{p-1}\frac{\sin pw}{p}\sum J_{p-1}p\sin pw +$$
$$+(1-e^2)\left[\sum J_{p-1}\cos pw\right]^2 = W'.$$

Я писал всюду для краткости $J_{p-1}$ вместо $J_{p-1}(pe)$.

Мы должны иметь

$$W = 3\frac{dC}{dn}.$$

Но

$$C = -\frac{m\mu}{2a}, \qquad n^2a^3 = m,$$

где $m$ обозначает массу Солнца, сложенную с массой планеты; следовательно,

$$C = -\frac{\mu}{2} m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

и

$$3\frac{dC}{dn} = -\mu m^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{3}} = -\mu a^2 n.$$

Но так как

$$W = \mu a^2 n W',$$

то получится

$$W' = -1.$$

Приравнивая подобные члены, получим ряд соотношений между функциями Бесселя $J$.

Изучение выражения $E$ привело бы нас к ряду аналогичных соотношений, в которые на этот раз вошли бы функции Бесселя $J$ и их первые производные.

**271.** Можно было привести еще примеры частных приложений; можно было бы, например, после разбора, как мы это только что сделали в предыдущем пункте, случая кеплерова движения, т. е. после учета членов степени 0 относительно возмущающих масс, приложить те же принципы к совокупности членов степени 1. Без всякого сомнения, мы пришли бы к интересным соотношениям.

Равным образом, можно было бы изучать по тому же способу уравнения вековых возмущений, которые рассмотрены в главе X. Тогда было бы выгоднее вместо интегрального инварианта

$$\int \sum (2x_i dy_i + y_i dx_i)$$

воспользоваться аналогичными инвариантами, которые определены в пунктах 261, 262, 263.

Мы оставим все эти вопросы в стороне.

### Приложение к асимптотическим решениям

**272.** Применим еще эти принципы к асимптотическим решениям. Возьмем за переменные координаты $x_i$ и

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Рассмотрим инвариант

$$J = \int \sum (2x dy + y dx);$$

мы знаем, что если $C$ — постоянная живых сил и если $C_1$ и $C_0$ — значения этой постоянной на двух концах линии интегрирования, то будем иметь

$$J - 3t\,(C_1 - C_0) = \text{const.} \tag{1}$$

Если рассмотреть систему асимптотических решений, то она представится в следующем виде: $x_i$ и $y_i$ будут разложены по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты будут периодичны по $t+h$, и

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ h$$

суть $n+1$ произвольных постоянных.

Если эти значения $x_i$ и $y_i$ подставить в уравнение живых сил, то левая часть окажется разложенной по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты будут периодичны по $t+h$; а так как она не должна зависеть от $t$, то отсюда вытекает, что она не будет зависеть также и от $A_1$, $A_2$, . . ., $A_k$ и $h$.

Следовательно, если мы подставим значения $x_i$ и $y_i$ в уравнение (1), то получим

$$C_1 = C_0$$

и, следовательно,

$$J = \text{const}.$$

В $J$ выражение под знаком интеграла оказывается разложенным по степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t}, \; A_2 e^{\alpha_2 t}, \; \ldots, \; A_k e^{\alpha_k t},$$

причем коэффициенты периодичны по $t+h$; оно зависит линейно от $k+1$ дифференциалов

$$dA_1, \; dA_2, \; \ldots, \; dA_k, \; dh.$$

Следовательно, мы должны иметь

$$\begin{gathered} \sum \left(2x \frac{dy}{dA_i} + y \frac{dx}{dA_i}\right) = \text{const}, \\ \sum \left(2x \frac{dy}{dh} + y \frac{dx}{dh}\right) = \text{const}. \end{gathered} \tag{2}$$

Левые части уравнений (2) оказываются разложенными по степеням $A_i e^{\alpha_i t}$; все члены этого разложения должны быть нулями, кроме свободного члена. Таким образом, получаем множество соотношений между коэффициентами разложения $x_i$ по степеням $A_i e^{\alpha_i t}$.

Я ограничусь в качестве примера рассмотрением первого члена и напишу

$$x_i = X_i + Z_i A e^{\alpha t},$$

где $X_i$ и $Z_i$ периодичны по $t+h$.

Отсюда выводим

$$y_i = m_i \left[X_i' + A e^{\alpha t} (Z_i' + \alpha Z_i)\right],$$

$X_i'$ и $Z_i'$ означают производные от $X_i$ и $Z_i$.

Тогда, пренебрегая все время членами с $e^{2\alpha t}$ и т. д., получим

$$\sum \left(2x \frac{dy}{dA} + y \frac{dx}{dA}\right) = \sum m e^{\alpha t} \left[2X (Z' + \alpha Z) + X'Z\right].$$

Следовательно,

$$\sum m (2XZ' + 2\alpha XZ + X'Z) = 0,$$

что дает первое соотношение между коэффициентами $X_i$ и $Z_i$.

Соотношение

$$\sum \left(2x \frac{dy}{dh} + y \frac{dx}{dh}\right) = \text{const}$$

доставит другое, которое, однако, в действительности не будет отличаться от первого, так как, комбинируя его с этим первым соотношением, мы нашли бы уравнение, которое является непосредственным следствием принципа живых сил.

## Глава XXV

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

### Возвращение к методу Болина

**273.** Прежде чем идти дальше, я должен дополнить некоторые из результатов глав VII, XIX и XX. Я хочу сначала резюмировать результаты, которые я буду сравнивать друг с другом и которые послужат мне сейчас отправным пунктом.

Мы видели в главе VII, что если система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

допускает периодическое решение

$$x_i = x_i^0 \tag{2}$$

и если положить

$$x_i = x_i^0 + \xi_i,$$

то $\xi_i$ будут разложимы по возрастающим степеням

$$A_1 e^{\alpha_1 t},\ A_2 e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ A_n e^{\alpha_n t}, \tag{3}$$

причем коэффициенты будут периодическими функциями от $t$; $A_i$ суть постоянные интегрирования, $\alpha_i$ — характеристические показатели периодического решения (2).

Эти ряды всегда формально удовлетворяют уравнениям (1); они сходятся при определенных условиях, которые мы высказали в п. 105.

Имеется исключение в случае, когда между показателями $\alpha$ существует соотношение вида:

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты $\beta$ — целые, положительные или нули, коэффициент $\gamma$ — целый, положительный или отрицательный (ср. т. I, стр. 290, строка 7; записывая это соотношение, я предполагаю, что единица времени была выбрана таким образом, чтобы период решения (2) был равен $2\pi$).

Если имеется соотношение вида (4), то $\xi$ не будут более разложимы по степеням количеств (3), а разлагаются по степеням этих количеств и $t$.

Это как раз и происходит, если уравнения (1) имеют каноническую форму уравнений динамики.

Действительно, в этом случае два показателя — нули, а остальные попарно равны и имеют противоположные знаки.

В случае уравнений динамики [или в более общем случае, когда имеется соотношение вида (4)], мы опять-таки смогли получить известный результат; достаточно было придать постоянным интегрирования $A$ частные значения таким образом, чтобы обратить в нуль те из них, которые соответствуют нулевому показателю, и одну из тех двух постоянных, которые соответствуют каждой паре показателей, равных и противоположных по знаку. [Более общо: мы уничтожим постоянную $A$, соответствующую одному из показателей, входящих в соотношение вида (4), таким образом, чтобы между показателями, соответствующими постоянным $A$, которые отличны от нуля, не существовало соотношения этого вида].

Например, если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \;\; \alpha_3 = -\alpha_4, \;\; \alpha_5 = -\alpha_6, \;\; \ldots, \;\; \alpha_{n-1} = -\alpha_n, \;\; (n \text{ — четно})$$

то положим

$$A_1 = A_2 = 0, \;\; A_3 = 0, \;\; A_5 = 0, \;\; \ldots, \;\; A_{n-1} = 0.$$

Тогда $\xi$ опять будут разложимы по степеням тех количеств (3), которые отличны от нуля; только теперь мы не будем иметь больше общего решения уравнения (1), а получим частное решение, зависящее от меньшего чем $n$ $\left(\text{а именно, } \frac{n-1}{2} \text{ в общем случае уравнений динамики}\right)$ числа произвольных постоянных.

Вот каким образом мы пришли к асимптотическим решениям: мы исходили из уничтожения определенного числа постоянных $A$, не только тех, которые приравняли нулю по причине, о которой я только что говорил, но и тех, которые мы должны уничтожить, чтобы удовлетворить условиям сходимости п. 105.

Я не занимаюсь в настоящий момент разложением $\xi$ по степеням $\mu$ или $\sqrt{\mu}$.

В главе XIX я изучил метод Болина, который, в сущности, является только приложением метода Якоби, поскольку задача сведена к разысканию функции $S$, удовлетворяющей уравнению в частных производных. Только эта функция берется в виде, который специально приспособлен к случаю, когда между средними движениями имеется приближенное линейное соотношение с целыми коэффициентами. Случаи, которые должны нас интересовать больше всего, близки к тому, который я назвал предельным случаем (п. 207). Мы видели в этом параграфе, что функция $S$ разложима по степеням $\sqrt{\mu}$ в виде

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + \mu S_2 + \ldots$$

и что

$$\frac{dS_p}{dy_k}$$

периодична с периодом $2\pi$ относительно

$$y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$$

(если принять обозначения упомянутого параграфа).

Но результаты могут быть упрощены заменой переменных, изложенной в пунктах 209 и 210.

Я определил в п. 206 $n+1$ функций

$$\eta,\ \zeta,\ \xi_i,$$

периодических относительно переменных

$$y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n;$$

эти функции я рассматривал как обобщения периодических решений.

Мы положили затем в п. 210

$$x_1 = x_1' + \eta, \qquad y_1' = y_1 - \zeta, \qquad y_i' = y_i \qquad (i > 1),$$
$$x_i = x_i' + \xi_i + y_1' \frac{d\eta}{dy_i} - x_1' \frac{d\zeta}{dy_i}.$$

С новыми переменными $x_i'$, $y_i'$ уравнения сохраняют каноническую форму; только новые уравнения будут допускать следующие инвариантные соотношения:

$$x_1' = x_i' = y_1' = 0,$$

которые можно рассматривать как обобщения периодических решений для новых уравнений, так же как

$$x_1 = \eta, \qquad y_1 = \zeta, \qquad x_i = \xi_i$$

— для старых.

Мы можем, следовательно, без ограничения общности предположить, что канонические уравнения допускают в качестве инвариантных соотношений

$$x_1 = x_i = y_1 = 0.$$

Если это так, то мы видели в п. 210, что $y_1 = 0$ является простым нулем для производных $dS_p/dy_1$ и двойным нулем для производных $dS_p/dy_i$ $(i > 1)$.

Таким образом, $S$ или точнее $S-S_0$ может разлагаться по степеням $y_1$, и разложение будет начинаться с члена второй степени; мы будем иметь

$$S=S_0+\sum\nolimits_2 y_1^2+\sum\nolimits_3 y_1^3+\sum\nolimits_4 y_1^4+\ldots, \tag{5}$$

где $\sum$ — ряды, зависящие от $y_2, y_3, \ldots, y_n$ и разложенные по степеням $\sqrt{\mu}$; кроме того, мы видим, что $\sum$ — периодические функции от $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Но этого, к сожалению, для нашей цели недостаточно.

Функция $S$, определенная уравнением (5), зависит, в действительности только от $n-1$ произвольных постоянных

$$x_2^0,\ x_3^0,\ \ldots,\ x_n^0,$$

в то время как для полного решения задачи их необходимо иметь $n$.

Для более углубленного исследования обратимся к замене переменных п. 206. Если примем обозначения этого параграфа, т. е. если положим

$$z_1=\frac{1}{2}\int\frac{dy_1}{\sqrt{x_1'-\psi}},\qquad z_i=y_i-\frac{y_1}{A}\frac{dB}{dx_i'},\ \ldots,$$

если определим, как в упомянутом параграфе, переменные $x_i'$, $u_1$, $\nu_1$, функции $T$ и $V$, то производные $V$ по $\nu_1$ и $z_i$ будут периодическими функциями $z_i$ [ср. т. II, стр. 645.]

Исследуем более подробно уравнения в начале стр. 646 (т. II), которые записываются в виде

$$y_1=\theta(\nu_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n),$$
$$x_k=\zeta_k(\nu_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n),$$

затем, считая $y_2, y_3, \ldots, y_n$ постоянными, рассмотрим, как в названном параграфе, уравнения

$$y_1=\theta(v_1),\qquad x_1=\zeta_1(v_1).$$

Если мы заставим меняться $v_1$, точка $(x_1, y_1)$ опишет кривую, которую я хочу изучить. Предположим, что мы, не меняя постоянных $x_2'$, $x_3'$, $\ldots$, $x_n'$, заставим меняться $x_1'$; получим бесконечное множество кривых, соответствующих различным значениям $x_1'$.

Выше мы предположили, что имеем инвариантные соотношения

$$x_1=x_i=y_1=0,$$

которые являются как бы обобщением периодических решений.

Этим соотношениям будет соответствовать точка

$$x_1=y_1=0,$$

т. е. начало координат. Именно в окрестности этой точки я буду изучать наши кривые.

Дадим $x_1'$ значение, которое соответствует частной функции $S$, определенной уравнением (5); получим

$$x_1 = 2\sum\nolimits_2 y_1 + 3\sum\nolimits_3 y_1^2 + \ldots.$$

Следовательно, соответствующая кривая проходит через начало; мы получили бы вторую кривую, проходящую через начало, заменяя $\sqrt{\mu}$ на $-\sqrt{\mu}$.

Следовательно, имеем две кривые, пересекающиеся в начале; другие кривые смогут пройти вблизи начала, не достигая его и не пересекаясь друг с другом; множество кривых будет напоминать по своему общему виду в непосредственной окрестности начала фигуру, образованную рядом гипербол, имеющих одни и те же асимптоты, и их асимптотами.

**274.** Для того чтобы лучше изучить эти кривые и соответствующие функции $S$, ограничимся сначала случаем, когда имеются только две степени свободы.

Допустим, что мы сделали замену переменных п. 208, так что

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0$$

— периодическое решение; это означает, что для

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0$$

имеем

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2} = \frac{dF}{dx_1} = 0.$$

Разложим $F$ по возрастающим степеням $x_1$, $x_2$ и $y_1$. Член степени 0 будет зависеть только от $y_2$ и так как мы должны иметь

$$\frac{dF}{dy_2} = 0,$$

то он сведется к постоянной. Так как $F$ определена лишь с точностью до постоянной, то можно предположить, что этот член нулевой степени есть нуль.

Будем искать члены первой степени; так как

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

то не будет других членов первой степени, кроме члена с $x_2$.

Положим теперь

$$x_1 = \varepsilon x_1', \qquad y_1 = \varepsilon y_1', \qquad x_2 = \varepsilon^2 x_2', \qquad y_2 = \varepsilon^2 y_2'.$$

Мы видим, что $F$ делится на $\varepsilon^2$ и что если положить

$$F = \varepsilon^2 F',$$

то уравнения сохранят каноническую форму и станут

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{dF'}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{dF'}{dx'_i}. \tag{1}$$

Кроме того, $F'$ будет разлагаться по степеням $\varepsilon$ в виде

$$F'=F'_0+\varepsilon F'_1+\varepsilon^2 F'_2+\ldots;$$

с другой стороны, $F'$ будет разлагаться по степеням $x'_1$, $x'_2$, $y'_1$, причем коэффициенты будут периодическими функциями от $y_2'$. Наконец,

$$F'_0=Hx'_2+Ax'^2_1+2Bx'_1y'_1+Cy'^2_1,$$

где $H$, $A$, $B$ и $C$ — периодические функции $y'_2$.

Применим сейчас к нашим уравнениям один метод, аналогичный методу Болина, в котором параметр $\varepsilon$ будет играть ту же роль, которую в главе XIX играл параметр $\mu$.

Отбросим штрихи, ставшие ненужными, и будем писать $x_i$, $y_i$, $F$, $F_i$ вместо $x'_i$, $y'_i$, $F'$, $F'_i$.

Прежде всего, я утверждаю, что всегда можно предположить

$$H=1.$$

Если бы, в самом деле, это было не так, то я взял бы за новые переменные

$$x_2^*=Hx_2, \qquad y_2^*=\int\frac{dy_2}{H}.$$

Каноническая форма уравнений не изменилась бы, поскольку

$$x_2^*dy_2^*-x_2dy_2=0$$

— полный дифференциал.

Сверх того, $y_2^*$ увеличивается на постоянную, когда $y_2$ увеличивается на $2\pi$; я всегда могу выбрать единицу времени таким образом, чтобы эта постоянная была равна $2\pi$. Тогда всякая периодическая функция от $y_2$ с периодом $2\pi$ будет периодической функцией от $y_2^*$ с периодом $2\pi$. Итак, вид функции $F$ не изменится; лишь первый член $Hx_2$ сведется к $x_2^*$.

Итак, предположим $H=1$.

Я утверждаю затем, что можно предположить

$$A=C=0, \qquad B=\text{const}.$$

В самом деле, образуем канонические уравнения (1), предполагая $\varepsilon=0$; получим

$$\frac{dy_2}{dt}=-1; \qquad \frac{dx_1}{dt}=-\frac{dx_1}{dy_2}=2(Bx_1+Cy_1),$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{dy_1}{dy_2}=-2(Ax_1+By_1)$$

и одно уравнение относительно $dx_2/dt$, которое я могу заменить уравнением живых сил

$$x_2+Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2=\text{const}.$$

Уравнения

$$\frac{dx_1}{dy_2}=-2(Bx_1+Cy_1),\quad \frac{dy_1}{dy_2}=2(Ax_1+By_1)$$

— линейные с периодическими коэффициентами. В силу п. 29 они будут иметь общее решение

$$x_1=w\varphi+w_1\psi;\qquad y_1=w\varphi_1+w_1\psi_1,$$
$$w=\alpha e^{ay_2},\qquad w_1=\beta e^{by_2},$$

где $\varphi$, $\psi$, $\varphi_1$, $\psi_1$ — периодические функции $y_2$; $\alpha$ и $\beta$ — постоянные интегрирования; $a$ и $b$ — постоянные.

Легко видеть, что $b=-a$ и что $\varphi\psi_1-\psi\varphi_1$ — постоянная, которую я могу предположить равной 1.

При этих предположениях совершим новую замену переменных, полагая

$$x_1=x_1'\varphi+y_1'\psi;\qquad y_1=x_1'\varphi_1+y_1'\psi_1,$$
$$x_2=x_2'+Hx_1'^2+2Kx_1'y_1'+Ly_1'^2;\ y_2=y_2',$$

где $H$, $K$, $L$ — функции $y_2$, выбранные таким образом, чтобы каноническая форма уравнений не изменилась. Для этого достаточно, чтобы

$$x_1dy_1-x_1'dy_1'+x_2dy_2-x_2'dy_2'$$

было полным дифференциалом.

Но мы видим, что $x_1dy_1-x_1'dy_1'$ равно полному дифференциалу, увеличенному на

$$-\frac{dy_2}{2}\left[x_1'^2(\varphi_1\varphi'-\varphi\varphi_1')+y_1'^2(\psi_1\psi'-\psi\psi_1')+2x_1'y_1'(\varphi_1\psi'-\varphi\psi_1')\right],$$

где $\varphi'$, $\varphi_1'$, ... означают производные от $\varphi$, $\varphi_1$, ... по $y_2$.

Следовательно, для того чтобы каноническая форма уравнений не изменилась, достаточно взять

$$2H=\varphi_1\varphi'-\varphi\varphi_1';\qquad 2K=\varphi_1\psi'-\varphi\psi_1';\qquad 2L=\psi_1\psi'-\psi\psi_1'.$$

Мы видим, что $H$, $K$, $L$ — периодические функции $y_2$, откуда следует, что вид функции $F$ также не изменится.

Но если мы предположим $\varepsilon=0$, то уравнения должны допускать в качестве решения

$$x_1'=\alpha e^{+ay_2};\qquad y_1'=\beta e^{-ay_2},$$

откуда

$$B=-\frac{a}{2}, \qquad A=C=0.$$

Можно, следовательно, без ограничения общности предположить

$$H=1, \qquad A=C=0, \qquad B=\text{const},$$

откуда (поскольку мы убрали штрихи)

$$F_0=x_2+2Bx_1y_1.$$

Это мы и будем делать впредь.

Совершим еще одну замену переменных, полагая

$$x_1y_1=u, \qquad \log\frac{y_1}{x_1}=2v.$$

Так как

$$x_1dy_1-udv=\frac{d(x_1y_1)}{2}$$

— полный дифференциал, то каноническая форма не изменится.

Кроме того, получаем

$$x_1=e^v\sqrt{u}, \qquad y_1=e^{-v}\sqrt{u}.$$

Тогда функция $F$ разлагается по степеням

$$\varepsilon,\ x_2,\ \sqrt{u},\ e^v,\ e^{-v},\ e^{iy_2},\ e^{-iy_2}.$$

Кроме того, имеем

$$F_0=x_2+2Bu.$$

Итак, возьмем $F$ в виде

$$F(x_2,\ u;\ y_2,\ v)$$

и определим функцию $S$ уравнением Якоби

$$F\left(\frac{dS}{dy_2},\ \frac{dS}{dv};\ y_2,\ v\right)=C,$$

где $C$ — постоянная. Разложим $S$ и $C$ по степеням $\varepsilon$:

$$S=S_0+\varepsilon S_1+\varepsilon^2S_2+\ldots,$$

$$C=C_0+\varepsilon C_1+\varepsilon^2C_2+\ldots.$$

Для определения $S_0$, $S_1$, $S_2$, ... получим следующие рекуррентные уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{dS_0}{dy_2}+2B\frac{dS_0}{dv}=C_0,\\ &\frac{dS_1}{dy_2}+2B\frac{dS_1}{dv}=\Phi+C_1,\\ &\frac{dS_2}{dy_2}+2B\frac{dS_2}{dv}=\Phi+C_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Я обозначаю, как это уже делал много раз, всякую известную функцию через $\Phi$; во втором уравнении (2) я считаю $S_0$ известным; в третьем считаю $S_0$ и $S_1$ известными и т. д.

Положим

$$S_0=\alpha_0 y_2+\beta_0 v$$

при условии

$$\alpha_0+2B\beta_0=C_0.$$

Так как $C_0$ — произвольно, то обе постоянные $\alpha_0$ и $\beta_0$ могут быть выбраны произвольно. Однако важно не брать $\beta_0=0$. Вот почему.

Предположим, что мы доказали, что

$$\frac{dS_0}{dv}+\varepsilon\frac{dS_1}{dv}+\ldots+\varepsilon^p\frac{dS_p}{dv}$$

разложимо по степеням

$$\varepsilon,\ e^{\pm v},\ e^{\pm i y_2};$$

мы сможем (если $\beta_0$ не нуль) заключить отсюда, что то же будет и для

$$\sqrt{\frac{dS_0}{dv}+\varepsilon\frac{dS_1}{dv}+\ldots+\varepsilon^p\frac{dS_p}{dv}},$$

поскольку подкоренное количество сводится к $\beta_0$ при $\varepsilon=0$. Если бы $\beta_0$ было нулем, мы не смогли бы сделать этот вывод; однако нам важно прийти к такому выводу из-за присутствия радикала $\sqrt{u}$ в $F$.

Рассмотрим теперь второе уравнение (2). Функция $\Phi$, входящая в него, зависит от $v$ и $y_2$ и имеет вид

$$\Phi=\sum A_{m,n}e^{mv+iny_2}+A_{0,0}.$$

Коэффициенты $A$ суть постоянные, могущие зависеть от $\alpha_0$ и $\beta_0$. Индексы $m$ и $n$ могут принимать все целые значения — положительные, отрицательные или нулевые. Для ясности я выделяю из-под знака $\Sigma$ член, в котором эти два индекса — нули.

Тогда второе уравнение (2) дает

$$S_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 v + \sum \frac{A_{m,\,n} e^{mv + iny_2}}{in + 2Bm}$$

при условии

$$\alpha_1 + 2B\beta_1 = A_{0,\,0} + C_1.$$

За исключением этого условия, постоянные $\alpha_1$ и $\beta_1$ и $C_1$ произвольны; я могу предположить, следовательно, что

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

Я определяю $S_2$ третьим уравнением (2); это уравнение имеет совершенно тот же вид, что и второе, и решается таким же образом и т. д.

В результате производные $dS/dy_2$ и $dS/dv$ разлагаются по степеням

$$\varepsilon,\ e^{\pm v},\ e^{\pm iy_2}.$$

Если сравнить этот анализ с проведенным в п. 125, то видно, что между ними имеется аналогия. Только вместо того, чтобы иметь лишь мнимые показательные функции

$$e^{\pm iy_1},\ e^{\pm iy_2},\ \ldots,\ e^{\pm iy_n},$$

мы имеем здесь вещественные показательные функции

$$e^{\pm v}.$$

275. Коль скоро функция $S$ определена, мы можем, применяя метод Якоби, прийти к рядам, аналогичным рядам п. 127.

Функция $S$ зависит от $v$, $y_2$ и двух постоянных $\alpha_0$ и $\beta_0$. Постоянная живых сил

$$C = C_0 + \varepsilon C_1 + \ldots$$

есть функция $\alpha_0$ и $\beta_0$.

Тогда мы имеем в качестве решения канонических дифференциальных уравнений следующие уравнения:

$$x_2 = \frac{dS}{dy_2};\ u = \frac{dS}{dv};\ n_1 t + \varpi_1 = \frac{dS}{d\alpha_0};\ n_2 t + \varpi_2 = \frac{dS}{d\beta_0};$$

$$n_1 = -\frac{dC}{d\alpha_0};\qquad n_2 = -\frac{dC}{d\beta_0},$$

где $\varpi_1$ и $\varpi_2$ — две новые постоянные интегрирования. Прежде всего, я вижу, что $n_1$ и $n_2$, которые зависят, между прочим, от $\alpha_0$ и $\beta_0$, разложимы по степеням $\varepsilon$.

С другой стороны, $S$ можно разложить по степеням $\varepsilon$ и при $\varepsilon=0$ я имею в качестве первого приближения

$$x_2=\frac{dS_0}{dy_2}=\alpha_0; \qquad u=\frac{dS_0}{dv}=\beta_0;$$

$$n_1t+\varpi_1=\frac{dS_0}{d\alpha_0}=y_2; \quad n_2t+\varpi_2=\frac{dS_0}{d\beta_0}=v.$$

Мы имеем четыре уравнения, из которых можно найти $x_2$, $u$, $y_2$ и $v$, разложенные по степеням $\varepsilon$ и зависящие, кроме того, от $\alpha_0$, $\beta_0$, $n_1t+\varpi_1$, $n_2t+\varpi_2$.

С помощью рассуждения, совершенно аналогичного проведенному в п. 127, мы увидели бы, что

$$x_2, \ u, \quad y_2-(n_1t+\varpi_1), \quad v-(n_2t+\varpi_2)$$

разложимы по степеням

$$\varepsilon, \ e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}, \ e^{\pm(n_2t+\varpi_2)}.$$

Кроме того, то же будет для $\sqrt{u}$, $x_1$ и $y_1$.

Я мог бы даже добавить, что все эти количества разложимы по степеням

$$\varepsilon, \ \alpha_0, \ e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}, \ \sqrt{\beta_0}e^{(n_2t+\varpi_2)}, \ \sqrt{\beta_0}e^{-(n_2t+\varpi_2)};$$

в самом деле, $S-S_0$ разлагается по степеням

$$\varepsilon, \ \alpha_0, \ e^{\pm iy_2}, \ \sqrt{\beta_0}e^{v}, \ \sqrt{\beta_0}e^{-v}.$$

Если мы положим на мгновение

$$y_2-(n_1t+\varpi_1)=z_2, \quad v-(n_2t+\varpi_2)=z_3,$$

то два уравнения

$$n_1t+\varpi_1=\frac{dS}{d\alpha_0}, \quad n_2t+\varpi_2=\frac{dS}{d\beta_0}$$

примут вид

$$z_2=\varepsilon\psi_2, \quad z_3=\varepsilon\psi_3, \tag{3}$$

причем $\psi_2$ и $\psi_3$ разлагаются по степеням

$$\varepsilon, \ \alpha_0, \ e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}, \ \sqrt{\beta_0}e^{(n_2t+\varpi_2)}, \ \sqrt{\beta_0}e^{-(n_2t+\varpi_2)},$$
$$z_2, \ z_3;$$

[в самом деле, мы имеем, например,

$$\sqrt{\beta_0}e^{v}=\sqrt{\beta_0}e^{n_2t+\varpi_2}\left(1+\frac{z_3}{1}+\frac{z_3^2}{1\cdot 2}+\frac{z_3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\right)$$

и аналогичные формулы для $e^{\pm iy_2}$ и $\sqrt{\beta_0}e^{-v}$].

Тогда для доказательства высказанного предложения достаточно приложить к уравнениям (3) теорему п. 30.

Сравним теперь полученный результат с результатом главы VII, который я упоминал в начале настоящей главы.

В главе VII мы видели, что в окрестности периодического решения

$$x_1=y_1=x_2=0$$

переменные $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ разлагаются по степеням

$$e^{\pm i\left(n_1't+\varpi_1\right)},\quad Ae^{n_2't},\quad A'e^{-n_2't}\quad \text{и}\quad t,$$

где $A$, $A'$ — постоянные интегрирования; $n_1'$ и $n_2'$ — абсолютные постоянные, зависящие только от периода периодического решения и его характеристических показателей.

Мы только что видели, что эти же переменные должны разлагаться по степеням

$$e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)},\quad \sqrt{\beta_0}e^{(n_2t+\varpi_2)},\quad \sqrt{\beta_0}e^{-(n_2t+\varpi_2)}.$$

Очевидно, оба результата находятся в согласии; действительно, можно сначала положить

$$A=\sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2},\quad A'=\sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}.$$

С другой стороны, $n_1$ и $n_2$ — постоянные, которые разлагаются по степеням $\varepsilon$, $\alpha_0$ и $\beta_0$ и сводятся к $n_1'$ и $n_2'$ для $\varepsilon=\alpha_0=\beta_0=0$.

Тогда мы можем, например, написать

$$e^{n_2t}=e^{n_2't}\cdot e^{\left(n_2-n_2'\right)t},$$

а затем разложить второй сомножитель по степеням $\varepsilon$, $\alpha_0$, $\beta_0$; тогда этот второй сомножитель окажется разложенным, кроме того, по степеням $t$.

Вот почему мы видели в главе VII, что время $t$ и его степени выходят из-под знаков показательной и тригонометрических функций, что могло в определенных случаях создать трудность; предыдущий анализ показывает, что эта трудность была чисто искусственной.

Если я хочу теперь сравнить наш результат с результатами главы XIX, я рассмотрю кривые

$$y_1=0\,(v_1),\qquad x_1=\zeta_1\,(v_1),$$

определение которых я упоминал в конце п. 273. Для того чтобы получить уравнения этих кривых, я должен только взять выражения $x_1$ и $y_1$ и дать в них величинам $\alpha_0$, $\beta_0$, $n_1t+\varpi_1$ постоянное значение. Тогда $y_1$ и $x_1$ разлагаются по степеням

$$e^{\pm(n_2t+\varpi_2)}.$$

Изменяя $n_2t+\varpi_2$, мы видим, что кривые имеют форму, которую я описал в конце п. 273.

В заключение я напомню, что все результаты верны лишь с формальной точки зрения; ряды сходятся только в случае асимптотических решений, уравнения которых получаются, если положить

$$\beta_0=0, \quad \varpi_2=+\infty,$$

что означает

$$\sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2}=A, \quad \sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}=0,$$

или же если положить

$$\beta_0=0, \quad \varpi_2=-\infty,$$

что означает

$$\sqrt{\beta_0}e^{\varpi_2}=0, \quad \sqrt{\beta_0}e^{-\varpi_2}=A',$$

где $A$ и $A'$ — конечные постоянные.

276. Перейдем к случаю, когда имеется более двух степеней свободы. Предыдущие результаты могут быть обобщены двумя различными способами.

Для того чтобы пояснить это, нам достаточно предположить три степени свободы. Может оказаться, что мы хотим изучить уравнения в окрестности системы инвариантных соотношений

$$x_1=x_2=x_3=y_1=0,$$

играющих роль обобщения периодических решений в смысле п. 209.

Может оказаться также, что мы хотим их изучить в окрестности истинного периодического решения

$$x_1=x_2=x_3=y_1=y_2=0.$$

В первом случае имеется четыре инвариантных соотношения и одно линейное соотношение между средними движениями, соотношение, которое мы взяли, употребляя в случае надобности замену переменных п. 202, в виде

$$n_1=0.$$

Во втором случае имеется пять инвариантных соотношений и два линейных соотношения между средними движениями, которые мы взяли в виде

$$n_1=0, \ n_2=0.$$

Начнем с первого случая и положим

$$F=\varepsilon^2 F'; \quad x_1=\varepsilon x_1', \quad y_1=\varepsilon y_1', \quad x_2=\varepsilon^2 x_2', \quad x_3=\varepsilon^2 x_3';$$

уравнения остаются каноническими, а $F'$ становится разложенной по степеням $\varepsilon$ в виде

$$F'=F_0'+\varepsilon F_1'+\ldots.$$

К тому же имеем

$$F_0'=h_2 x_2'+h_3 x_3'+A x_1'^2+2B x_1' y_1'+C y_1'^2,$$

или, отбрасывая штрихи, ставшие ненужными,

$$F_0=h_2 x_2+h_3 x_3+A x_1^2+2B x_1 y_1+C y_1^2.$$

Функции $h_2$, $h_3$, $A$, $B$, $C$ зависят только от $y_2$ и $y_3$ и периодичны по этим двум переменным с периодом $2\pi$.

Я произведу сейчас снова замены переменных п. 274; все, что я сказал там о них, остается верным, но только с формальной точки зрения.

Для того чтобы применить принципы формального вычисления, необходимо, чтобы имелся параметр, по степеням которого выполняются разложения. Здесь это будет параметр $\mu$.

В самом деле, $F$ и, следовательно, $h_2$, $h_3$, $A$, $B$, $C$ разлагаются по целым степеням $\mu$. Я добавляю, что при $\mu=0$ $B$ и $C$ обращаются в 0 и что $h_2$, $h_3$, $A$ сводятся к постоянным, которые я называю $h_2^0$, $h_3^0$ и $A_0$.

Постараемся проинтегрировать следующие уравнения:

$$\frac{dy_2}{dt}=-h_2, \quad \frac{dy_3}{dt}=-h_3. \tag{1}$$

Я стремлюсь выполнить интегрирование таким образом, чтобы

$$y_2-y_2', \ y_3-y_3'$$

были периодическими функциями с периодом $2\pi$ от двух новых переменных $y_2'$ и $y_3'$, которые сами должны иметь вид

$$y_2'=n_2 t+\varpi_2, \ y_3'=n_3 t+\varpi_3;$$

$n_2$ и $n_3$ — постоянные, разлагающиеся по степеням $\mu$; $\varpi_2$ и $\varpi_3$ — постоянные интегрирования.

Тогда уравнения (1) принимают вид

$$n_2 \frac{dy_2}{dy'_2} + n_3 \frac{dy_2}{dy'_3} = -h_2, \quad n_2 \frac{dy_3}{dy'_2} + n_3 \frac{dy_3}{dy'_3} = -h_3. \tag{2}$$

Положим

$$h_i = h_i^0 + \mu h_i^{(1)} + \mu^2 h_i^{(2)} + \ldots,$$
$$y_i = y_i^0 + \mu y_i^{(1)} + \mu^2 y_i^{(2)} + \ldots,$$
$$n_i = n_i^0 + \mu n_i^{(1)} + \mu^2 n_i^{(2)} + \ldots$$

и предположим, что $n_i^{(k)}$ — постоянные; что $h_i^{(k)}$ — периодические функции $y_2$ и $y_3$ ($h_i^0$ сводятся, как мы это видели, к постоянным) и, наконец, что $y_i^{(k)}$ — периодические функции $y'_2$ и $y'_3$, за исключением $y_i^0$, которые сведутся к $y'_i$.

Приравняем в уравнениях (2) коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$ и получим последовательность уравнений, которые позволят определить $y_i^{(k)}$ и $n_i^{(k)}$ одни за другими.

Эти уравнения записываются так:

$$\begin{gathered}
n_2^0 \frac{dy_2^0}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_2^0}{dy'_3} = -h_2^0, \\
n_2^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy'_3} + n_2^1 \frac{dy_2^0}{dy'_2} + n_3^1 \frac{dy_2^0}{dy'_3} = \Phi, \\
n_2^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy'_3} + n_2^{(2)} \frac{dy_2^0}{dy'_2} + n_3^{(2)} \frac{dy_2^0}{dy'_3} = \Phi, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{3}$$

Я обозначаю через $\Phi$ всякую известную функцию; во втором уравнении я считаю известными $y_i^{(0)}$ и $n_i^{(0)}$; в третьем — $y_i^{(0)}$, $y_i^{(1)}$, $n_i^{(0)}$ и $n_i^{(1)}$ и так далее.

Сначала мы имеем

$$y_2^0 = y'_2, \qquad y_3^0 = y'_3; \qquad n_2^0 = -h_2^0, \qquad n_3^0 = -h_3^0,$$

так что уравнения (3) приводятся к

$$\begin{gathered}
n_2^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_2^{(1)}}{dy'_3} + n_2^{(1)} = \Phi, \\
n_2^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_2^{(2)}}{dy'_3} + n_2^{(2)} = \Phi, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{3bis}$$

к которым необходимо присоединить уравнения

$$\begin{gathered}
n_2^0 \frac{dy_3^{(1)}}{dy'_2} + n_3^0 \frac{dy_3^{(1)}}{dy'_3} + n_3^{(1)} = \Phi, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{3ter}$$

выведенные из второго уравнения (2), как уравнения (3bis) из первого уравнения (2).

Все эти уравнения будут интегрироваться одним и тем же способом; возьмем, например, первое уравнение (3bis). Функция $\Phi$, которая входит в него (как, впрочем, все другие функции $\Phi$), периодична по $y'_2$ и $y'_3$. Приравняем $n_2^{(1)}$ среднему значению этой функции и нам будет легко затем, пользуясь методикой, которую мы применяли уже столько раз, удовлетворить уравнению функцией $y_2^{(1)}$, периодичной по $y'_2$ и $y'_3$.

Определив таким образом $y_2$ и $y_3$ в функции $y'_2$ и $y'_3$, я полагаю

$$x'_2 = x_2 \frac{dy_2}{dy'_2} + x_3 \frac{dy_3}{dy'_2},$$
$$x'_3 = x_2 \frac{dy_2}{dy'_3} + x_3 \frac{dy_3}{dy'_3}.$$

Ясно, что выражение

$$x'_2 dy'_2 + x'_3 dy'_3 - x_2 dy_2 - x_3 dy_3,$$

равное нулю, есть полный дифференциал и, следовательно, каноническая форма уравнений не изменится, когда мы возьмем за новые переменные $x'_2$, $x'_3$, $y'_2$, $y'_3$ вместо $x_2$, $x_3$, $y_2$, $y_3$.

Вид функции $F$ также не изменится, но мы видим, что имеем тождественно

$$-n_2 x'_2 - n_3 x'_3 = h_2 x_2 + h_3 x_3,$$

что показывает, что коэффициенты при $x'_2$ и $x'_3$ сводятся к постоянным.

*Итак, я всегда могу предположить, что $h_2$ и $h_3$ — постоянные.*

*Это я и буду делать впредь.*

Пусть теперь необходимо проинтегрировать уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = 2(Bx_1 + Cy_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = -2(Ax_1 + By_1),$$

или, что то же [7]

$$\begin{aligned} h_2 \frac{dx_1}{dy_2} + h_3 \frac{dx_1}{dy_3} &= -2(Bx_1 + Cy_1), \\ h_2 \frac{dy_1}{dy_2} + h_3 \frac{dy_1}{dy_3} &= 2(Ax_1 + By_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Постараемся удовлетворить этим уравнениям, полагая

$$x_1 = e^{at} z, \qquad y_1 = e^{at} s,$$

где $a$ — постоянная, $z$ и $s$ — периодические функции $y_2$ и $y_3$.

Уравнения станут

$$
\begin{aligned}
&h_2 \frac{dz}{dy_2} + h_3 \frac{dz}{dy_3} - az = -2(Bz + Cs),\\
&h_2 \frac{ds}{dy_2} + h_3 \frac{ds}{dy_3} - as = 2(Az + Bs).
\end{aligned}
\tag{4 bis}
$$

Разложим $A$, $B$, $C$ по степеням $\mu$ в виде

$$
\begin{aligned}
A &= A_0 + \mu A_2 + \ldots,\\
B &= B_0 + \mu B_2 + \ldots,\\
C &= C_0 + \mu C_2 + \ldots .
\end{aligned}
$$

Заметим, что $A_0$ — постоянная и что $B_0 = C_0 = 0$. Разложим таким же образом $h_2$ и $h_3$

$$h_i = h_i^0 + \mu h_i^1 + \ldots .$$

Коэффициенты этих разложений — известные количества. Разложим, с другой стороны, неизвестные $z$, $s$ и $a$ по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$ в виде

$$
\begin{aligned}
a &= a_1\sqrt{\mu} + a_2\mu + a_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,\\
z &= z_1\sqrt{\mu} + z_2\mu + z_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,\\
s &= s_0 + s_1\sqrt{\mu} + s_2\mu + \ldots .
\end{aligned}
$$

Чтобы представить уравнения в более симметричной форме, я запишу разложение $A$ в виде

$$A = A_0 + A_1\sqrt{\mu} + A_2\mu + A_3\mu\sqrt{\mu} + A_4\mu^2 + \ldots .$$

Надо будет только помнить, что $A_1$, $A_3$, $A_5$, ... — нули. То же — для разложений $B$ и $C$.

При этих предположениях я приравниваю в уравнениях (4bis) коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$. Я назову (4bis $p$) два уравнения, полученные приравниванием, с одной стороны, коэффициентов при $\mu^{\frac{p+1}{2}}$ в первом уравнении (4bis) и, с другой стороны, коэффициентов при $\mu^{\frac{p}{2}}$ во втором уравнении (4bis).

Уравнения (4bis 0) и (4bis 1) определят $a_1$, $s_0$ и $z_1$;
уравнения (4bis 1) и (4bis 2) определят $a_2$, $s_1$ и $z_2$;
уравнения (4bis 2) и (4bis 3) определят $a_3$, $s_2$ и $z_3$;
и так далее.

Я хочу показать, что уравнения (4bis $p$) определят $s_p$ и $z_{p+1}$ с точностью до постоянной, что они определят $a_p$ и завершат определение $s_{p-1}$

и $z_p$, которые нам стали известны из (4bis $p-1$) только с точностью до постоянной.

Если мы вспомним, что

$$B_0 = B_1 = C_0 = C_1 = 0,$$

то увидим, что уравнения (4bis 0) записываются

$$\begin{aligned} h_2^0 \frac{dz_1}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_1}{dy_3} &= 0, \\ h_2^0 \frac{ds_0}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_0}{dy_3} &= 0; \end{aligned} \tag{4bis 0}$$

уравнения (4bis 1) записываются

$$\begin{aligned} h_2^0 \frac{dz_2}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_2}{dy_3} - a_1 z_1 &= -2C_2 s_0, \\ h_2^0 \frac{ds_1}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_1}{dy_3} - a_1 s_0 &= 2A_0 z_1; \end{aligned} \tag{4bis 1}$$

уравнения (4bis 2) записываются

$$\begin{aligned} h_2^0 \frac{dz_3}{dy_2} + h_3^0 \frac{dz_3}{dy_3} - a_2 z_1 - a_1 z_2 &= -2B_2 z_1 - 2C_2 s_1 - 2C_3 s_0 + \Phi, \\ h_2^0 \frac{ds_2}{dy_2} + h_3^0 \frac{ds_2}{dy_3} - a_2 s_0 - a_1 s_1 &= 2A_0 z_2 + 2A_1 z_1 + 2B_2 s_0 + \Phi. \end{aligned} \tag{4bis 2}$$

[Буквы $\Phi$ означают известные функции, периодические по $y_2$ и $y_3$, которые равны нулю в уравнениях (4bis 2), но которые я, тем не менее, записываю, поскольку они появятся в последующих уравнениях.]

Уравнения (4bis 0) показывают нам, что $z_1$ и $s_0$ — постоянные. Перейдем затем к уравнениям (4bis 1) и приравняем средние значения обеих частей; получим

$$-a_1 z_1 = -2s_0 [C_2],$$

$$-a_1 s_0 = 2A_0 z_1,$$

что определяет $a_1$, $s_0$ и $z_1$; мы находим для $a_1$ два значения, равные по величине и противоположные по знаку. Уравнения (4bis 1) определяют затем с точностью до постоянной $z_2$ и $s_1$, которые суть периодические функции $y_2$ и $y_3$. Следовательно, можно считать известными

$$z_2 - [z_2] \quad \text{и} \quad s_1 - [s_1].$$

Перейдем к уравнениям (4bis 2) и приравняем средние значения обеих частей; получим два уравнения, из которых можно будет найти $a_2$, $[z_2]$ и $[s_1]$.

Так как средние значения обеих частей равны, то уравнения (4bis 2) дадут $z_3$ и $s_2$ с точностью до постоянных в виде периодических функций $y_2$ и $y_3$.

И так далее.

Так как мы нашли для $a_1$ два значения, то уравнения (4bis) допускают два решения. Пусть

$$a = a, \qquad z = \varphi, \qquad s = \varphi_1,$$
$$a = -a, \qquad z = \psi, \qquad s = \psi_1$$

— эти два решения. Общее решение уравнений (4) будет

$$x_1 = Ae^{at}\varphi + Be^{-at}\psi,$$
$$y_1 = Ae^{at}\varphi_1 + Be^{-at}\psi_1.$$

Мы всегда можем предположить

$$\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi = 1.$$

Тогда, как в п. 274, мы увидели бы, что если положить

$$x_1 = x_1'\varphi + y_1'\psi, \qquad y_1 = x_1'\varphi_1 + y_1'\psi_1,$$
$$x_2 = x_2' + H_2x_1'^2 + 2K_2x_1'y_1' + L_2y_1'^2, \quad y_2 = y_2',$$
$$x_3 = x_3' + H_3x_1'^2 + 2K_3x_1'y_1' + L_3y_1'^2, \quad y_3 = y_3'$$

и если $H_2$, $K_2$, $L_2$, $H_3$, $K_3$, $L_3$ — подходящим образом выбранные периодические функции $y_2$ и $y_3$, то каноническая форма уравнений не изменится.

Вид $F$ также не изменится, но $B$ сведется к постоянной, $A$ и $C$ — к 0. Итак, всегда можно предположить

$$B = \text{const}, \quad A = C = 0.$$

Остальные вычисления завершаются, как в пунктах 274 и 275, и мы окончательно приходим к следующему заключению:

Переменные $x_i$ и $y_i$ могут разлагаться по степеням $\varepsilon$, $\sqrt{\mu}$, трех постоянных $\alpha_0$, $\alpha_0'$ и $\beta_0$, $e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}$, $e^{\pm i(n_1't+\varpi_1')}$, $\sqrt{\beta_0}e^{(n_2t+\varpi_2)}$, $\sqrt{\beta_0}e^{-(n_2t+\varpi_2)}$.

Сами постоянные $n_1$, $n_1'$ и $n_2$ также разложимы по степеням $\varepsilon$, $\sqrt{\mu}$, $\alpha_0$, $\alpha_0'$, $\beta_0$.

**277.** Перейдем ко второму приему обобщения и предположим, что мы хотим изучить уравнения в окрестности истинного периодического решения, взятого в виде

$$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0.$$

Положим

$$F=\varepsilon^2F',\ x_1=\varepsilon x_1',\ y_1=\varepsilon y_1',\ x_2=\varepsilon x_2',$$
$$y_2=\varepsilon y_2',\ x_3=\varepsilon^2 x_3',\ y_3=y_3',$$

откуда

$$F=F_0'+\varepsilon F_1'+\dots .$$

Уравнения остаются каноническими, и мы имеем

$$F_0'=hx_3'+\Phi(x_1',\ y_1',\ x_2',\ y_2'),$$

где $\Phi$ — однородная квадратичная форма от $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, $y_2'$; коэффициенты формы $\Phi$ и $h$ — периодические функции от $y_3=y_3'$.

Мы отбросим впредь штрихи, ставшие ненужными, и просто запишем

$$F_0=hx_3+\Phi(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2).$$

Так же, как и в пунктах 274 и 276, мы доказали бы, что всегда можно предположить, что $h$ сводится к постоянной.

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{dy_3}{dt}=-h,\quad \frac{dx_1}{dt}=\frac{d\Phi}{dy_1},\quad \frac{dy_1}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{d\Phi}{dy_2},\quad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx_2}.$$

Они линейны и имеют периодические коэффициенты. Их общее решение будет, следовательно, иметь вид:

$$\begin{aligned}
x_1&=A_1e^{at}\varphi_{1,1}+A_2e^{-at}\varphi_{2,1}+A_3e^{bt}\varphi_{3,1}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,1},\\
y_1&=A_1e^{at}\varphi_{1,2}+A_2e^{-at}\varphi_{2,2}+A_3e^{bt}\varphi_{3,2}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,2},\\
x_2&=A_1e^{at}\varphi_{1,3}+A_2e^{-at}\varphi_{2,3}+A_3e^{bt}\varphi_{3,3}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,3},\\
y_2&=A_1e^{at}\varphi_{1,4}+A_2e^{-at}\varphi_{2,4}+A_3e^{bt}\varphi_{3,4}+A_4e^{-bt}\varphi_{4,4}.
\end{aligned}$$

$A$ — постоянные интегрирования, $\varphi$ — периодические функции $y_3$.

Легко проверить, что выражение

$$\varphi_{i,1}\varphi_{k,2}-\varphi_{i,2}\varphi_{k,1}+\varphi_{i,3}\varphi_{k,4}-\varphi_{i,4}\varphi_{k,3}$$

— нуль, за исключением двух следующих случаев:

$$i=1,\quad k=2;\qquad i=3,\ k=4.$$

В этих двух случаях это выражение сводится к постоянной, которую я могу предположить равной 1.

Положим теперь

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1'\varphi_{1,1} + y_1'\varphi_{2,1} + x_2'\varphi_{3,1} + y_2'\varphi_{4,1},\\
y_1 &= x_1'\varphi_{1,2} + y_1'\varphi_{2,2} + x_2'\varphi_{3,2} + y_2'\varphi_{4,2},\\
x_2 &= x_1'\varphi_{1,3} + y_1'\varphi_{2,3} + x_2'\varphi_{3,3} + y_2'\varphi_{4,3},\\
y_2 &= x_1'\varphi_{1,4} + y_1'\varphi_{2,4} + x_2'\varphi_{3,4} + y_2'\varphi_{4,4}.
\end{aligned}
$$

Тогда мы видим, что

$$x_1dy_1 - y_1dx_1 + x_2dy_2 - y_2dx_2 = x_1'dy_1' - y_1'dx_1' + x_2'dy_2' - y_2'dx_2' + \psi dy_3,$$

где $\psi$ — однородная квадратичная форма относительно $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, $y_2'$, коэффициенты которой есть периодические функции $y_3$.

Тогда, если мы положим

$$x_3 = x_3' - \frac{\psi}{2}, \qquad y_3 = y_3',$$

выражение

$$x_1dy_1 + x_2dy_2 + x_3dy_3 - x_1'dy_1' - x_2'dy_2' - x_3'dy_3'$$

будет полным дифференциалом, а каноническая форма уравнений не изменится.

Вид функции $F$ не изменится, только $F_0$ сводится к

$$hx_3' + Ax_1'y_1' + Bx_2'y_2',$$

где $h$, $A$ и $B$ — постоянные.

Если бы мы положили затем

$$x_1'y_1' = u_1, \qquad \log\frac{y_1'}{x_1'} = 2v_1,$$

$$x_2'y_2' = u_2, \qquad \log\frac{y_2'}{x_2'} = 2v_2,$$

то вычисления завершились бы, как в пунктах 275 и 276; мы пришли бы к следующему заключению:

$x_i$ и $y_i$ разлагаются по степеням $\varepsilon$, трех постоянных $\alpha_0$, $\beta_0$ и $\beta_0'$, $e^{\pm i(n_1t+\varpi_1)}$, $\sqrt{\beta_0}\,e^{n_2t+\varpi_2}$, $\sqrt{\beta_0}\,e^{-(n_2t+\varpi_2)}$, $\sqrt{\beta_0'}\,e^{n_2't+\varpi_2'}$, $\sqrt{\beta_0'}\,e^{-(n_2't+\varpi_2')}$.

Сами показатели $n_1$, $n_2$ и $n_2'$ разлагаются по степеням $\varepsilon$, $\alpha_0$, $\beta_0$ и $\beta_0'$.

Это обобщение тотчас прилагается, когда имеется $n$ степеней свободы; первый случай — случай предыдущего параграфа — соответствует тому, когда имеется $n+1$ инвариантных соотношений и единственное линейное соотношение между средними движениями. Это — случай, которым мы занимались в главе XIX.

Второй случай — случай настоящего пункта — соответствует тому, когда имеется $2n-1$ инвариантных соотношений, определяющих истинное периодическое решение, и когда имеется $n-1$ линейных соотношений между средними движениями. Это — случай асимптотических решений, которые занимали нас в главе VII.

Однако имеются промежуточные случаи, когда мы имеем $n+q$ инвариантных соотношений и $q$ линейных соотношений между средними движениями. Тогда $x_i$ и $y_i$ могут разлагаться по положительным или отрицательным степеням $q$ вещественных и $n-q$ мнимых показательных функций [8].

### Связь с интегральными инвариантами

278. Итак, предположим, что канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}; \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

допускают периодическое решение следующего вида:

$$x_i=\varphi_i(t+h), \qquad y_i=\psi_i(t+h),$$

где $h$ — постоянная интегрирования; и пусть $T$ — период, так что $\varphi_i$ и $\psi_i$ разлагаются в ряды по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$.

Рассмотрим решения, близкие к этому периодическому решению; они могут быть, согласно предыдущему, взяты в следующем виде: $x_i$ и $y_i$ будут расположены по степеням $2n-2$ попарно сопряженных количеств, которые я обозначу

$$\begin{array}{ll}
A_1e^{\alpha_1 t}, & A'_1e^{-\alpha_1 t},\\
A_2e^{\alpha_2 t}, & A'_2e^{-\alpha_2 t},\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\\
A_{n-1}e^{\alpha_{n-1} t}, & A'_{n-1}e^{-\alpha_{n-1} t}.
\end{array}$$

$A$ и $A'$ — произвольные постоянные интегрирования; сами показатели $\alpha$ могут разлагаться по степеням $A_1A'_1,\ A_2A'_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A'_{n-1}$.

Кроме того, коэффициенты разложения $x_i$ и $y_i$ — периодические функции $t+h$ с периодом $T$. Эти коэффициенты (так же, как и показатели $\alpha$) зависят, помимо того, от постоянной живых сил $C$.

Мы знаем, что существует интегральный инвариант

$$\int\sum dx_i dy_i, \tag{2}$$

откуда вытекает, что если $\beta$ и $\gamma$ — две постоянные интегрирования, мы должны иметь

$$\sum\left(\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\gamma}-\frac{dx_i}{d\gamma}\frac{dy_i}{d\beta}\right)=\text{const}.$$

Мы сможем написать это уравнение в другой форме; предположим, что мы даем $\beta$ приращение $\delta\beta$ и что отсюда для $x_i$, $y_i$, $A_i e^{\alpha_i t}$, ... получаются приращения

$$\delta x_i, \quad \delta y_i, \quad \delta A_i e^{\alpha_i t}, \ \ldots .$$

Предположим, с другой стороны, что мы даем $\gamma$ приращение $\delta'\gamma$ и что отсюда для $x_i$, $y_i$, ... получаются приращения

$$\delta' x_i, \quad \delta' y_i, \ \ldots .$$

Наше уравнение запишется в виде

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = \text{const}. \tag{3}$$

Правая часть — постоянная; я хочу сказать, что это — функция постоянных интегрирования, умноженная на $\delta\beta\delta'\gamma$.

Но мы, очевидно, имеем

$$\delta A e^{\alpha t} = e^{\alpha t}(\delta A + At\delta\alpha).$$

С другой стороны,

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dC}\delta C + \frac{dx_i}{dh}\delta h + \sum \frac{dx_i}{d(A_k e^{\alpha_k t})}\delta A_k e^{\alpha_k t} + \sum \frac{dx_i}{d(A'_k e^{-\alpha_k t})}\delta A'_k e^{-\alpha_k t},$$

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dC}\delta C + \sum \frac{d\alpha}{d(A_k A'_k)}\delta(A_k A'_k).$$

Мы видим, таким образом, что $\delta x_i$ и $\delta y_i$ имеют следующий вид:

$$\delta y_i = \eta_i + t\eta_{1,i}; \qquad \delta' y_i = \eta'_i + t\eta'_{1,i};$$

$$\delta x_i = \xi_i + t\xi_{1,i}; \qquad \delta' x_i = \xi'_i + t\xi'_{1,i},$$

где $\xi_i$, $\xi_{1,i}$, $\eta_i$, $\eta_{1,i}$ линейны относительно $\delta C$, $\delta h$ и $\delta A e^{\alpha t}$, $\delta A' e^{-\alpha t}$; с другой стороны, они разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$ и $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$. Мы легко найдем выражения $\delta' x_i$, $\delta' y_i$; достаточно заменить $\delta$ на $\delta'$ в выражениях $\delta x_i$ и $\delta y_i$. Мы видим, что уравнение (3) можно написать в виде

$$D + Et + Ft^2 = \text{const},$$

где

$$D = \sum (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i),$$

$$E = \sum (\xi_i \eta'_{1,i} - \xi'_i \eta_{1,i} + \xi_{1,i}\eta'_i - \xi'_{1,i}\eta_i),$$

$$F = \sum (\xi_{1,i}\eta'_{1,i} - \xi'_{1,i}\eta_{1,i})$$

разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$, $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$ и, с другой стороны, билинейны относительно

$$\begin{gathered}\delta A e^{\alpha t}, \quad \delta A' e^{-\alpha t}, \quad \delta C, \quad \delta h, \\ \delta' A e^{\alpha t}, \quad \delta' A' e^{-\alpha t}, \quad \delta' C, \quad \delta' h.\end{gathered}$$

Так как левая часть должна быть независимой от $t$, мы будем иметь прежде всего

$$E = F = 0,$$

что уже доставляет определенные контрольные соотношения, которым должны удовлетворять разложения $x_i$ и $y_i$.

Далее, $D$ должно быть независимым от $t$; следовательно, оно будет линейным относительно следующих определителей:

$$\begin{aligned}&\delta A_k \delta' A'_k - \delta' A_k \delta A'_k, \\ &A'_k A'_j (\delta A_k \delta' A_j - \delta A_j \delta' A_k), \\ &A'_k (\delta A_k \delta' C - \delta' A_k \delta C), \\ &A'_k (\delta A_k \delta' h - \delta' A_k \delta h), \\ &\delta C \delta' h - \delta' C \delta h\end{aligned} \tag{4}$$

(или относительно аналогичных определителей, выведенных из первых перестановкой $A_k$ и $A'_k$ или $A_j$ и $A'_j$).

Коэффициенты будут разложены по степеням $A_k A'_k$ и зависеть, кроме того, от $C$.

В самом деле, время должно исчезнуть. Показательные функции должны, следовательно, исчезнуть; это может произойти только, если каждый множитель $Ae^{\alpha t}$ умножен на $A'e^{-\alpha t}$, или на $\delta A' e^{-\alpha t}$, или на $\delta' A' e^{-\alpha t}$.

Отсюда можно вывести новый ряд контрольных соотношений.

**279.** Среди показателей $\alpha_k$ одни мнимые, другие вещественные; среди последних одни положительны, другие отрицательны. Но так как из двух равных показателей противоположного знака я могу произвольно выбрать тот, который называю $\alpha_k$, то я не ограничу общности, предполагая, что $\alpha_k$ положительно, если оно вещественно.

Теперь обратим в нуль коэффициенты $A_k$, которые соответствуют мнимому или положительному показателю.

Тогда, если $\alpha_k$ — вещественно, будем иметь

$$A_k = 0, \quad A'_k \neq 0,$$

и, если $\alpha_k$ — мнимое,

$$A_k = A'_k = 0.$$

Кроме того, я положу

$$C=C_0,$$

где $C_0$ — значение постоянной живых сил, которое соответствует рассматриваемому периодическому решению.

Тогда наши ряды становятся сходящимися и представляют асимптотические решения, которые мы изучили в главе XII. Они содержат в качестве произвольных постоянных $h$ и $A'_k$, которые соответствуют отрицательным показателям.

Следовательно, мы будем иметь $2n$ равенств, которые выразят $x_i$ и $y_i$ в функции $t$ и этих постоянных $h$ и $A'_k$. Если из этих $2n$ равенств мы исключим $t$, $h$ и $A'_k$, получим определенное число инвариантных соотношений между $x_i$ и $y_i$.

Если множество значений $x_i$ и $y_i$ рассматривать как точку в пространстве $2n$ измерений, то эти инвариантные соотношения представляют определенное многообразие $V$ этого пространства; я назову это *асимптотическим многообразием*.

Возьмем снова интегральный инвариант

$$\int \sum dx_i dy_i$$

и распространим интегрирование на часть этого асимптотического многообразия $V$.

Другими словами, предположим, что все системы значений $x_i$ и $y_i$, которые входят в область интегрирования, удовлетворяют инвариантным соотношениям.

*Я говорю, что интегральный инвариант будет нулем.*

Мне достаточно доказать, что

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = 0,$$

а это очевидно, ибо мы имеем

$$A_k = 0, \qquad C = C_0,$$

откуда

$$\delta A_k = 0, \qquad \delta C = 0,$$

$$\delta' A_k = 0, \qquad \delta' C = 0,$$

что показывает, что все выражения (4) обращаются в нуль. Равным образом мы смогли бы сделать

$$C = C_0,$$

$$A_k \neq 0, \qquad A'_k = 0 \text{ (для вещественных } \alpha_k),$$

$$A_k = A'_k = 0 \text{ (для мнимых } \alpha_k).$$

Мы получили бы новый ряд асимптотических решений и, следовательно, новое асимптотическое многообразие, к которому прилагались бы те же заключения.

То, что мы сделали для инварианта (2), можно было бы сделать для любого билинейного инварианта (инварианта третьего типа п. 260), т. е. вида

$$\iint \sum B dx_i dx_k, \tag{5}$$

где $B$ — функция $x_i$ и $y_i$ и где под знаком $\Sigma$ один или два из дифференциалов $dx_i$, $dx_k$ могут быть заменены на $dy_i$ или $dy_k$.

Выражение

$$\sum B (\delta x_i \delta' x_k - \delta x_k \delta' x_i)$$

снова было бы линейным относительно количеств (4). Это применимо также к квадратичному инварианту (инварианту второго типа п. 260) вида

$$\int \sqrt{\sum B dx_i dx_k}, \tag{6}$$

где $B$ — функция $x_i$ и $y_i$ и где под знаком $\Sigma$ один или два из дифференциалов $dx_i$, $dx_k$ могут быть заменены на $dy_i$, $dy_k$.

Мы можем увидеть, что выражение

$$\sum B \delta x_i \delta x_k$$

должно быть линейным относительно выражений

$$\begin{aligned} &\delta A_k \delta A'_k, \\ &A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j, \\ &A'_k \delta A_k \delta C, \\ &\delta C \delta h \end{aligned} \tag{4bis}$$

и тех, которые можно вывести из них перестановкой $A_k$ и $A'_k$, $A_j$ и $A'_j$.

Для всякого асимптотического многообразия как инвариант (5), так и инвариант (6) должны обратиться в нуль.

## Другой способ анализа

280. Изучение этого же вопроса может быть продвинуто, если несколько видоизменить рассуждения.

Предположим, например, что мы имеем дело с задачей динамики, что $x_i$ — координаты различных материальных точек системы и что сопряженные переменные $y_i$ — составляющие их количеств движения.

Мы изучим интегральные инварианты, алгебраические относительно $x_i$ и $y_i$, и посмотрим, могут ли существовать другие, отличные от известного, который записывается в виде

$$\iint \sum dx_i dy_i.$$

Мы видели, что в окрестности периодического решения $x_i$ и $y_i$ могут разлагаться по степеням $Ae^{\alpha t}, \ldots$. Рассмотрим сейчас снова эти разложения. Мы можем предположить, что значение постоянной живых сил, которое соответствует периодическому решению, есть нуль, так что разложение будет вестись не только по степеням $Ae^{\alpha t}$, но еще и по степеням $C$. Кроме того, они будут зависеть от $t+h$.

Приравняв $x_i$ и $y_i$ этим разложениям, получаем $2n$ уравнений, которые разрешим относительно $Ae^{\alpha t}$, $C$ и $t+h$.

Получим

$$\begin{aligned}
&A_k e^{\alpha_k t} = f_k,\\
&A'_k e^{-\alpha_k t} = f'_k,\\
&C = \Phi\\
&\alpha_0 t + \beta_0 = \frac{2\pi}{T}(t+h) = \Theta.
\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что $\alpha_0$, как и $\alpha_k$, разлагается по степеням $C$ и $A_k A'_k$; мы видим, что $f_k$, $f'_k$, $\Phi$, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$ — однозначные функции $x_i$ и $y_i$ в окрестности периодического решения. Более того, $x_i$ и $y_i$ могут быть разложены по степеням $f_k$, $f'_k$ и $\Phi$ и по синусам и косинусам кратных $\Theta$.

С другой стороны, выражение (3) п. 278

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i),$$

которое соответствует инварианту (2) или аналогичным выражениям, которые соответствовали бы другому билинейному инварианту вида (5), должны быть разложимы по степеням $f_k$, $f'_k$, $\Phi$ и билинейны относительно

$$\delta f_k, \quad \delta f'_k, \quad \delta\Phi, \quad \delta\Theta,$$

$$\delta' f_k, \quad \delta' f'_k, \quad \delta'\Phi, \quad \delta'\Theta.$$

Кроме того, когда мы заменяем в нем величины $f_k$, $f'_k$, $\Phi, \Theta$ их значениями (7), это выражение должно стать независимым от $t$. Но время $t$ могло бы туда войти тремя способами: 1) в экспоненциальной форме; 2) в виде косинуса или синуса кратных $(t+h)$; 3) вне знаков показательной и тригонометрических функций (и, как мы это сейчас увидим, самое большее во второй степени).

Оно не должно войти ни одним из этих способов.

1. Для того чтобы время не входило в экспоненциальной форме, необходимо и достаточно, чтобы это выражение было линейным относительно следующих величин, аналогичных (4):

$$
\begin{aligned}
&\delta f_k \delta' f'_k - \delta' f_k \delta f'_k,\\
&f'_k f'_j (\delta f_k \delta' f_j - \delta f_j \delta' f_k),\\
&f'_k (\delta f_k \delta' \Phi - \delta' f_k \delta \Phi),\\
&f'_k (\delta f_k \delta' \Theta - \delta' f_k \delta \Theta),\\
&\delta \Phi \delta' \Theta - \delta' \Phi \delta \Theta,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где коэффициенты разлагаются по степеням $f_k$, $f'_k$ и $\Phi$.

2. Для того чтобы $t$ не входило в тригонометрической форме, необходимо и достаточно, чтобы наше выражение не зависело от $\Theta$, а только от его вариаций $\delta\Theta$, $\delta'\Theta$.

3. Нам остается определить условие того, чтобы $t$ не входило туда вне знаков показательных и тригонометрических функций. Заметим, что мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\delta f_k = e^{\alpha_k t} (\delta A_k + A_k t \delta \alpha_k),\\
&\delta f'_k = e^{-\alpha_k t} (\delta A'_k - A'_k t \delta \alpha_k),\\
&\delta \Phi = \delta C, \qquad \delta \Theta = \delta \beta_0 + t \delta \alpha_0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Будем различать в нашем выражении члены пяти видов в зависимости от того, будут ли они содержать множителем одну из величин, фигурирующих в первой, второй, третьей, четвертой или пятой строке таблицы (8).

При этих условиях, если мы заменим $\delta f_k, \ldots$ их значениями (9), увидим, что члены пяти видов будут содержать множителем соответственно:

$$
\begin{aligned}
&(\delta A_k \delta' A'_k - \delta A'_k \delta' A_k) + t\,[\delta \alpha_k \delta' (A_k A'_k) - \delta' \alpha_k \delta (A_k A'_k)],\\
&A'_k A'_j (\delta A_k \delta' A_j - \delta A_j \delta' A_k) + A'_k A'_j t\,[A_k (\delta \alpha_k \delta' A_j - \delta' \alpha_k \delta A_j) -\\
&\quad - A_j (\delta \alpha_j \delta' A_k - \delta' \alpha_j \delta A_k)] + A_k A'_k A_j A'_j t^2 (\delta \alpha_k \delta' \alpha_j - \delta \alpha_j \delta' \alpha_k),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' C - \delta' A_k \delta C) + A_k A'_k t\,(\delta \alpha_k \delta' C - \delta' \alpha_k \delta C),\\
&A'_k (\delta A_k \delta' \beta_0 - \delta' A_k \delta \beta_0) + A_k A'_k t\,(\delta \alpha_k \delta' \beta_0 - \delta' \alpha_k \delta \beta_0) +\\
&\quad + A'_k t\,(\delta A_k \delta' \alpha_0 - \delta' A_k \delta \alpha_0) + A_k A'_k t^2 (\delta \alpha_k \delta' \alpha_0 - \delta' \alpha_k \delta \alpha_0),\\
&(\delta C \delta' \beta_0 - \delta' C \delta \beta_0) + t\,(\delta C \delta' \alpha_0 - \delta' C \delta \alpha_0).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Мы видим, что время могло бы войти во второй степени.

Заставим сначала исчезнуть члены с $t^2$; они могут произойти только от членов второго и четвертого вида.

Я говорю, что коэффициент при

$$t^2 (\delta \alpha_k \delta' \alpha_j - \delta \alpha_j \delta' \alpha_k)$$

должен обратиться в нуль.

В самом деле, так как виртуальные приращения постоянных произвольны, мы сможем предположить, что все $\delta\alpha_j$ обращаются в нуль, за исключением $\delta\alpha_k$, а также, что все $\delta'\alpha_j$ обращаются в нуль, кроме $\delta'\alpha_k$. Тогда все члены с $t^2$ обращаются в нуль, за исключением члена

$$t^2(\delta\alpha_k\delta'\alpha_j - \delta\alpha_j\delta'\alpha_k).$$

*Мы имели бы исключения, если бы существовало соотношение между $n-1$ показателями $\alpha_j$*; действительно, более нельзя было бы предполагать, что все $\delta\alpha_j$, кроме одного, обращаются в нуль без того, чтобы этот последний сам обратился в нуль.

Теперь имеется четыре члена второго вида, которые дают члены с

$$t^2(\delta\alpha_k\delta'\alpha_j - \delta\alpha_j\delta'\alpha_k).$$

Я запишу их для краткости в виде

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4;$$

$\psi$ разложены по степеням $f_i$, $f'_i$ и $\Phi$. Я обозначаю через $\omega_1$ выражение, которое фигурирует во второй строке таблицы (8):

$\omega_2$ выводится из $\omega_1$ перестановкой $f_k$ и $f'_k$,

$\omega_3$ выводится из $\omega_1$ перестановкой $f_j$ и $f'_j$,

$\omega_4$ выводится из $\omega_1$, если совершить одновременно эти две перестановки.

Для того чтобы исчезали члены с $t^2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4 = 0. \qquad (11)$$

Если это условие выполняется, четыре члена

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4$$

доставят нам в качестве членов с $t$

$$(\psi_1 - \psi_2)\,tA_kA'_k\,[\delta\alpha_k\delta'(A_jA'_j) - \delta'\alpha_k\delta(A_jA'_j)] +$$
$$+ (\psi_3 - \psi_4)\,tA_jA'_j\,[\delta\alpha_j\delta'(A_kA'_k) - \delta'\alpha_j\delta(A_kA'_k)].$$

Рассмотрим теперь члены четвертого вида, которые мы объединим попарно; пусть

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2$$

— группа из двух членов, где $\psi_1$ и $\psi_2$ разложимы по степеням $C$ и $A_kA'_k$, $\omega_1$ — выражение, которое фигурирует в четвертой строке таблицы (10), и $\omega_2$ — выражение, получающееся из него перестановкой $A_k$ и $A'_k$ и заменой $\alpha_k$ на $-\alpha_k$.

Для того чтобы исчезали члены с $t^2$, необходимо, чтобы

$$\psi_1 = \psi_2$$

и тогда члены с $t$ сведутся к

$$\psi_1 t\,[\delta (A_k A_k')\,\delta'\alpha_0 - \delta' (A_k A_k')\,\delta\alpha_0].$$

**281.** Теперь члены с $t$ разлагаются по степеням $C$, $A_k A_k'$ и по вариациям $\delta$, $\delta'$ величин $\alpha_0$, $\alpha_k$, $C$, $A_k A_k'$. Нам остается заставить исчезнуть эти члены; я напишу сейчас, что они — нули, когда мы полагаем

$$C = 0, \qquad A_k A_k' = 0,$$

не предполагая, разумеется, что $\delta C$, $\delta' C$, $\delta A_k A_k'$, $\delta' A_k A_k'$ — нули.

Пусть $B_k$ в нашем инварианте означает то, чем становится коэффициент члена с $(\delta f_k \delta' f_k' - \delta f_k' \delta' f_k)$, когда мы делаем в нем $C = A_k A_k' = 0$.

Пусть $D_k$ есть то, чем становится коэффициент члена с

$$f_k' (\delta f_k \delta' \Theta - \delta\Theta \delta' f_k),$$

и $D_0$ — то, чем становится коэффициент члена с

$$(\delta\Phi \delta'\Theta - \delta\Theta\delta'\Phi).$$

Мы должны будем иметь тождественно

$$\sum B_k [\delta\alpha_k \delta' (A_k A_k') - \delta'\alpha_k \delta (A_k A_k')] +$$
$$+ \sum D_k [\delta (A_k A_k')\,\delta'\alpha_0 - \delta' (A_k A_k')\,\delta\alpha_0] + D_0 (\delta C \delta'\alpha_0 - \delta' C \delta\alpha_0) = 0.$$

Будем писать для сокращения $\gamma_k$ вместо $A_k A_k'$, $\gamma_0$ вместо $C$ и

$$\partial (u,\ v)$$

вместо

$$\delta u \delta' v - \delta v \delta' u.$$

Мы получим

$$\sum B_k \partial (\alpha_k,\ \gamma_k) + \sum D_k \partial (\gamma_k,\ \alpha_0) + D_0 \partial (\gamma_0,\ \alpha_0) = 0$$

или же

$$\sum\sum B_k \frac{d\alpha_k}{d\gamma_j} \partial (\gamma_j,\ \gamma_k) + \sum\sum D_k \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} \partial (\gamma_k,\ \gamma_j) + \sum D_0 \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} \partial (\gamma_0,\ \gamma_j) = 0.$$

Под знаком $\sum$ или $\sum\sum$ индекс $k$ может принимать значения $1, 2, \ldots, n-1$, а $j$ — значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial (\gamma_i,\ \gamma_k)$, находим

$$B_k \frac{d\alpha_k}{d\gamma_j} - B_j \frac{d\alpha_j}{d\gamma_k} - D_k \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} + D_j \frac{d\alpha_0}{d\gamma_k} = 0. \tag{12}$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial(\gamma_0, \gamma_j)$, находим

$$B_j \frac{d\alpha_j}{d\gamma_0} - D_j \frac{d\alpha_0}{d\gamma_0} + D_0 \frac{d\alpha_0}{d\gamma_j} = 0. \tag{12bis}$$

Эти уравнения выражают тот факт, что

$$-D_0\alpha_0 d\gamma_0 + \sum (B_k\alpha_k - D_k\alpha_0)\, d\gamma_k \tag{13}$$

есть полный дифференциал.

В уравнениях (12) и (12bis) необходимо положить $\gamma_j = 0$, следовательно, $d\alpha/d\gamma$ — постоянные, следовательно, $\alpha_j$ — линейные функции $\gamma$; в действительности, как мы это видели, $\alpha$ могут быть разложены по степеням $\gamma$, но результат, который мы только что получили, верен только в том случае, если мы пренебрегаем квадратами $\gamma$ и если обрываем разложения $\alpha$ на членах первой степени. Кроме того, $B$ и $D$ — постоянные. Следовательно, выражение (13) является полным дифференциалом полинома второй степени.

Для того чтобы продвинуться дальше, выразим $\alpha_k$ не в функции

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1},$$

а в функции

$$\alpha_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1},$$

и, для того чтобы избежать путаницы, обозначим при помощи $\partial$ производные по новым переменным, а при помощи $d$ — производные по старым.

Тогда мы видим, что

$$\sum B_k\alpha_k d\gamma_k + d\alpha_0 \sum D_j\gamma_j$$

есть полный дифференциал, что влечет за собой условия

$$B_k \frac{\partial\alpha_k}{\partial\gamma_i} = B_i \frac{\partial\alpha_i}{\partial\gamma_k}. \tag{14}$$

Если мы знаем соотношения между $\alpha$ и $\gamma$, то эти уравнения позволят нам определить коэффициенты $B_i$.

Мы можем выразить $\sum D_j\gamma_j$ в функции переменных

$$\alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1},$$

записывая

$$\sum D_j\gamma_j = E_0\alpha_0 + \sum E_k\gamma_k.$$

Величины $E_k$ будут заданы уравнениями

$$E_k = B_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_0}, \tag{14bis}$$

и $E_0$ можно выбрать произвольно.

Прежде всего необходимо, чтобы уравнения (14) были совместными, что при $n > 3$ требует определенных условий

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \gamma_k} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_j}. \tag{15}$$

Эти условия (15) будут всегда выполнены, поскольку всегда имеется интегральный инвариант

$$\int \sum dx_i dy_i.$$

Если имеется несколько интегральных инвариантов, которые не обращаются в нуль тождественно для рассматриваемого периодического решения, то каждому из этих инвариантов должна соответствовать одна система значений коэффициентов $B_i$ и $E_i$.

Если уравнения (4) допускают $q$ линейно независимых решений, то можно вычислить соответствующие значения $E_k$ при помощи уравнений (14bis), а так как $E_0$ остается произвольным, мы будем иметь $q+1$ линейно независимых систем значений коэффициентов $B_i$ и $E_i$.

Следовательно, мы можем получить $q+1$ различных интегральных инвариантов (если рассматриваемое периодическое решение не является особым в смысле п. 257), но мы не можем получить их больше.

282. Выше я сказал, что условия (15) наверное выполнены; можно было бы усомниться в этом; в самом деле, если уравнения (14) допускают $q$ различных решений, то можно иметь $q+1$ инвариантов; если, следовательно, имеется только один инвариант, то можно было бы предположить $q=0$, следовательно, наличие единственного инварианта

$$\int \sum dx_i dy_i$$

не было бы достаточным для того, чтобы можно было утверждать, что уравнения (14) наверняка допускают одно решение.

Мне остается рассеять это сомнение.

Прежде всего я замечаю, то в случае задачи трех тел имеется не один, а два интегральных инварианта.

В самом деле, в I томе в главе IV мы изучили уравнения в вариациях этой задачи.

На стр. 150 и 152 мы получили следующие интегралы:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const}, \tag{1}$$

$$\sum (2x\eta + y\xi) - 3t\left(\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi\right) = \text{const}. \tag{2}$$

Мы найдем также

$$\sum \frac{y\eta'}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi' = \text{const}, \tag{1bis}$$

$$\sum (2x\eta' + y\xi') - 3t\left(\sum \frac{y\eta'}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi'\right) = \text{const}. \tag{2bis}$$

Умножим (2bis) на (1), (1bis) — на (2) и вычтем, получим

$$\sum\left(\frac{y\eta}{m} - \frac{dV}{dx}\xi\right)\sum(2x\eta' + y\xi') - \sum\left(\frac{y\eta'}{m} - \frac{dV}{dx}\xi'\right)\sum(2x\eta + y\xi) = \text{const}.$$

Левая часть линейна относительно определителей вида

$$\eta_i\eta'_k - \eta_k\eta'_i, \qquad \eta_i\xi'_k - \eta'_k\xi_i, \qquad \xi_i\xi'_k - \xi_k\xi'_i.$$

Следовательно, мы имеем интеграл уравнений в вариациях и сможем вывести из него новый билинейный интегральный инвариант.

В случае задачи трех тел мы имеем, следовательно, по меньшей мере $q=1$, и можно быть уверенным, что условия (15) выполнены.

**283.** Будет ли то же самое в общем случае? Предположим, что этого нет. Тогда все коэффициенты, которые мы назвали $B_i$, должны быть нулями, так же как и все $E_k$, за исключением $E_0$.

Следовательно, когда мы даем $x_i$ и $y_i$ значения, которые соответствуют рассматриваемому периодическому решению, т. е. когда полагаем

$$C = A_k A'_k = 0,$$

коэффициенты членов с $\delta f_k \delta' f'_k - \delta f'_k \delta' f_k$ должны обратиться в нуль, и остаются только члены с

$$f'_k(\delta f_k \delta'\Theta - \delta\Theta\delta' f_k),$$

$$(\delta\Phi\delta'\Theta - \delta\Theta\delta'\Phi).$$

*Следовательно, наш инвариант должен был бы обратиться в нуль, когда мы имели бы*

$$\delta\Theta = \delta'\Theta = 0.$$

Но это не имеет места в случае инварианта

$$\int \sum dx_i dy_i,$$

которому соответствует выражение

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i).$$

Пусть, в самом деле,

$$\delta\Theta = \sum a_i \delta x_i + \sum b_i \delta y_i,$$

$$\delta'\Theta = \sum a_i \delta' x_i + \sum b_i \delta' y_i.$$

Мы должны были бы иметь равенство вида

$$\sum (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i) = \sum (a_i \delta x_i + b_i \delta y_i) \sum (c_i \delta' x_i + e_i \delta' y_i) - \\ - \sum (a_i \delta' x_i + b_i \delta' y_i) \sum (c_i \delta x_i + e_i \delta y_i).$$

Но это невозможно, поскольку левая часть является билинейной формой с определителем, равным 1, а правая часть — билинейной формой с определителем, равным 0.

Следовательно, мы должны заключить, что условия (15) выполнены всегда.

**284.** Исследуем теперь, могут ли уравнения (14) допускать несколько решений.

Пусть

$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

$$B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$$

— два таких решения, и предположим, что равенство

$$\frac{B_k}{B'_k} = \frac{B_i}{B'_i}$$

не выполняется; тогда два уравнения

$$B_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = B_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k},$$

$$B'_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = B'_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k}$$

повлекут за собой

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_k} = 0.$$

Тогда индексы

$$1, 2, \ldots, n$$

разделятся на определенное число групп, которых будет столько же, сколько имеется различных значений для отношения $B_i/B'_i$; два индекса будут принадлежать одной и той же группе, если они соответствуют одному и тому же значению отношения $B_i/B'_i$.

Тогда для того чтобы $\alpha_k$ зависело от $\gamma_i$ (или $\alpha_i$ — от $\gamma_k$), необходимо, чтобы индексы $i$ и $k$ принадлежали одной и той же группе.

Предположим для определенности, что мы имеем только две группы, содержащие соответственно индексы

$$1, 2, \ldots, p,$$

$$p+1, p+2, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

будут зависеть только от

$$\alpha_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p,$$

а

$$\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_{n-1}$$

будут зависеть только от

$$\alpha_0, \gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \ldots, \gamma_{n-1}.$$

Тогда имеет место тот факт, что характеристические показатели $\alpha_k$ образуют несколько независимых групп, так что $\alpha_k$ одной группы не зависят от произведений $A_jA'_j$, относящихся к другой группе.

Периодические решения, для которых возникнет это обстоятельство (или для которых имело бы место соотношение между $\alpha_k$), можно будет назвать *частными*.

Мы приходим к следующему заключению:

*Для того чтобы существовал алгебраический инвариант, отличный от тех, которые нам известны, необходимо, либо чтобы все периодические решения были частными, либо чтобы они все были особыми в смысле* п. 257.

Я не буду доказывать, что это обстоятельство не может представиться в задаче трех тел; но противоположное допущение кажется весьма неправдоподобным.

## Квадратичные инварианты

**285.** Изучим теперь с той же точки зрения квадратичные инварианты, т. е. интегральные инварианты вида

$$\int \sqrt{F},$$

где $F$ — квадратичная форма относительно дифференциалов $dx_i$, $dy_i$.

Пусть

$$F = \sum H dx_i dx_k,$$

где $H$ — функции $x$ и $y$ и где произведение $dx_i dx_k$ может быть заменено в определенных членах произведением $dx_i dy_k$ или $dy_i dy_k$.

Тогда мы сможем написать следующее уравнение, аналогичное уравнению (3) п. 278:

$$\sum H \delta x_i \delta x_k = \mathrm{const}. \tag{1}$$

С другой стороны, мы нашли в п. 278

$$\delta x_i = \xi_i + t\xi_{1,i}, \quad \delta y_i = \eta_i + t\eta_{1,i}.$$

Тогда мы сможем записать уравнение (1) в виде

$$D + Et + Ft^2 = \mathrm{const},$$

где $D$, $E$, $F$ разлагаются по степеням $Ae^{\alpha t}$, $A'e^{-\alpha t}$ и по синусам и косинусам кратных $\frac{2\pi}{T}(t+h)$ и, с другой стороны, квадратичны относительно

$$\delta Ae^{\alpha t},\ \delta A'e^{-\alpha t},\ \delta C,\ \delta h.$$

Следовательно, мы должны иметь

$$E = F = 0$$

и, кроме того, $D$ должно быть независимым от $t$, что показывает, что $D$ должно быть линейным относительно выражений

$$\begin{gathered} \delta A_k \delta A'_k, \\ A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j, \\ A'_k \delta A_k \delta C, \\ A'_k \delta A_k \delta h, \\ \delta C \delta h \end{gathered}$$

или относительно выражений, выводимых из них перестановкой $A_k$ и $A'_k$ или $A_j$ и $A'_j$.

Коэффициенты будут разложены по степеням произведений $A_k A'_k$ и $C$ (если предположить, что периодическое решение соответствует нулевому значению постоянной живых сил).

286. Обратимся снова к уравнениям (7) п. 280 и будем рассуждать, как в п. 280; мы увидим, что выражение

$$\Pi = \sum H \delta x_i \delta x_k,$$

когда $x_i$ и $y_i$ заменяются в нем их разложениями в функции $f_k$, $f'_k$, $\Phi$ и $\Theta$, должно удовлетворять следующим условиям.

1. Оно должно быть линейным относительно следующих количеств:

$$\begin{aligned} &\delta f_k \delta f'_k, \\ &f'_k f'_j \delta f_k \delta f_j, \\ &f'_k \delta f_k \delta \Phi, \\ &f'_k \delta f_k \delta \Theta, \\ &\delta \Phi \delta \Theta, \\ &\delta \Phi^2,\ \delta \Theta^2, \end{aligned} \tag{8bis}$$

причем коэффициенты будут разложены по степеням $f_k f'_k$ и $\Phi$.

2. Оно не будет зависеть от $\Theta$, а только от $\delta\Theta$.

3. Если эти условия выполнены, то выражение II не будет содержать время ни в показательной форме, ни в тригонометрической.

Остается искать условие того, чтобы время также не входило вне знаков показательных и тригонометрических функций.

Возьмем снова уравнения (9) п. 280; мы увидим, что различным членам таблицы (8bis) соответствуют следующие члены:

$$\begin{aligned} &\delta A_k \delta A'_k + t\,(A_k \delta A'_k \delta\alpha_k - A'_k \delta A_k \delta\alpha_k) - A_k A'_k t^2 (\delta\alpha_k)^2, \\ &A'_k A'_j \delta A_k \delta A_j + A'_k A'_j t\,(A_k \delta\alpha_k \delta A_j + A_j \delta\alpha_j \delta A_k) + A_k A'_k A_j A'_j t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j, \\ &A'_k \delta A_k \delta C + A_k A'_k t \delta\alpha_k \delta C, \\ &A'_k \delta A_k \delta\beta_0 + A'_k t\,(\delta A_k \delta\alpha_0 + A_k \delta\alpha_k \delta\beta_0) + A_k A'_k t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_0, \\ &\delta C \delta\beta_0 + t \delta C \delta\alpha_0, \quad \delta C^2, \quad \delta\beta_0^2 + 2t\delta\beta_0\delta\alpha_0 + t^2 \delta\alpha_0^2. \end{aligned} \tag{10bis}$$

Заставим сначала исчезнуть члены с $t^2$.

Совокупность этих членов является квадратичной формой относительно

$$\delta\alpha_0,\ \delta\alpha_1,\ \ldots,\ \delta\alpha_{n-1}.$$

Эта квадратичная форма должна быть тождественным нулем.

Следовательно, коэффициент при $\delta\alpha_k \delta\alpha_j t^2$ должен быть нулем. Но имеется четыре члена, которые могли бы ввести произведение $t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j$, — это члены с

$$f'_k f'_j \delta f_k \delta f_j,\ f'_k f_j \delta f_k \delta f'_j,\ f_k f'_j \delta f'_k \delta f_j,\ f_k f_j \delta f'_k \delta f'_j.$$

Обозначим для краткости эти четыре выражения через $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$; тогда совокупность наших четырех членов запишется в виде:

$$\psi_1\omega_1 + \psi_2\omega_2 + \psi_3\omega_3 + \psi_4\omega_4,$$

где $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ и $\psi_4$ разлагаются по степеням $f_k f'_k$ и $\Phi$. Для того чтобы коэффициент при $t^2 \delta\alpha_k \delta\alpha_j$ исчез, мы должны иметь тождественно

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 0.$$

Коэффициент при $t^2(\delta\alpha_k)^2$ также должен обратиться в нуль; но он происходит от членов с

$$\delta f_k \delta f'_k,\ f_k^2 \delta f'^2_k,\ f'^2_k \delta f_k^2.$$

Обозначим для краткости эти три выражения через $\omega'_1$, $\omega'_2$, $\omega'_3$, а совокупность трех членов — через

$$\psi'_1\omega'_1 + \psi'_2\omega'_2 + \psi'_3\omega'_3,$$

где $\psi'_1$, $\psi'_2$, $\psi'_3$ разлагаются по степеням $f_k f'_k$ и $\Phi$.

Для того чтобы исчез коэффициент при $t^2\delta\alpha_k^2$, мы должны были бы иметь

$$f_k f'_k(\psi'_2 + \psi'_3) - \psi'_1 = 0. \tag{11}$$

Для периодического решения мы имеем

$$f_1 = f'_1 = f_2 = f'_2 = \ldots = f_{n-1} = f'_{n-1} = 0.$$

Все члены, которые содержат множителем одно из выражений, фигурирующих во 2-й, 3-й и 4-й строках таблицы (8bis), должны тогда обратиться в нуль, ибо каждое из этих выражений содержит множителем $f_k$ или $f'_k$.

Следовательно, единственными членами выражения П, не обращающимися в нуль для периодического решения, являются члены с

$$\delta f_k \delta f'_k,\ \delta\Phi\delta\Theta,\ \delta\Phi^2,\ \delta\Theta^2.$$

Уравнение (11) показывает, что $\psi'_1$ содержит множителем $f_k f'_k$; следовательно, член $\psi'_1 \delta f_k \delta f'_k$ равным образом должен обратиться в нуль. Остаются еще только члены с

$$\delta\Phi^2,\ \delta\Phi\delta\Theta,\ \delta\Theta^2.$$

Первый не содержит $t$, второй содержит время в 1-й степени, третий — во 2-й степени.

Так как только этот третий член содержит $t^2$, он должен быть нулем; если он нуль, то второй член также будет нулем, так как только он содержит $t$.

Окончательно, все члены П обращаются в нуль для периодического решения, кроме члена с $\delta\Phi^2$.

Но в общей задаче динамики, так же как в случаях задачи трех тел, которые мы назвали *ограниченной задачей*, *общей приведенной задачей* и *плоской приведенной задачей*, мы знаем один и только один квадратичный инвариант.

Если я напишу уравнение живых сил в виде

$$F = \text{const},$$

то этот инвариант является не чем иным, как

$$\int \sqrt{(dF)^2};$$

именно этому инварианту соответствует член с $\delta\Phi^2$, который не обращается в нуль.

Следовательно, если существует квадратичный инвариант, отличный от уже известного, то этот инвариант должен будет обратиться в нуль для всех точек периодического решения.

Другими словами, это периодическое решение должно быть особым в смысле п. 257 в том, что касается этого инварианта.

Мы имели бы исключение, если бы $n$ показателей

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$$

не были независимы друг от друга, а если бы между ними имелось соотношение. В этом случае коэффициент при $t^2$, который является квадратичной формой относительно $n$ переменных

$$\delta\alpha_0, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_{n-1},$$

в самом деле смог бы обратиться в нуль тождественно без обращения в нуль всех его коэффициентов, поскольку эти $n$ переменных не были бы более независимыми.

Резюмируем: *для того чтобы существовали квадратичные инварианты, отличные от тех, которые нам известны, необходимо, чтобы все периодические решения были особыми или частными.*

Мало правдоподобно, чтобы это имело место для задачи трех тел.

## Случай ограниченной задачи

287. Можно представить другой способ рассмотрения, который мы приложим только к случаю ограниченной задачи. В п. 265 допускалась возможность существования двух квадратичных инвариантов, один из которых известен. Предположим, что эти два квадратичных инварианта существуют, и пусть $\Pi$ — квадратичная форма, соответствующая одному из этих инвариантов. Согласно предыдущему, $\Pi$ может содержать члены с

$$\begin{gathered}\delta f_1 \delta f_1', \ f_1'\delta f_1\delta\Phi, \ f_1\delta f_1'\delta\Phi, \ f_1'\delta f_1\delta\Theta, \ f_1\delta f_1'\delta\Theta,\\ f_1'^2\delta f_1^2, \ f_1^2\delta f_1'^2, \ \delta\Theta^2, \ \delta\Phi\delta\Theta, \ \delta\Phi^2.\end{gathered} \tag{1}$$

С другой стороны, $\Pi$ — квадратичная форма относительно количеств

$$\delta x_1, \delta x_2, \delta y_1, \delta y_2,$$

коэффициенты которой — алгебраические функции от $x_1, x_2, y_1, y_2$.

Вот какими будут переменные $x_i$ и $y_i$, которые мы выберем. В этой задаче, которую я называю *ограниченной*, два тела описывают концентрические окружности, а третье, масса которого нуль, движется в плоскости этих окружностей. Я отнесу это третье тело к подвижным осям, вращающимся равномерно вокруг центра тяжести двух первых; одна из этих осей постоянно будет совпадать с прямой, соединяющей два первых тела. Я обозначу через $x_1$ и $x_2$ координаты третьего тела относительно этих подвижных осей, а $y_1$ и $y_2$ — проекции абсолютной скорости на подвижные оси.

Тогда положим

$$\Phi = F + \omega G,$$

где $F$ и $G$ означают функцию живых сил и функцию площадей в абсолютном движении и где $\omega$ означает угловую скорость вращения двух первых тел вокруг их общего центра тяжести. Уравнения примут каноническую форму

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_i}.$$

Интеграл $\Phi = \text{const}$ есть не что иное, как «интеграл Якоби» (ср. том I, п. 9, стр. 27).

При этих предположениях выражение $\Pi$ будет квадратичной формой относительно

$$\delta x_1, \ \delta x_2, \ \delta y_1, \ \delta y_2,$$

коэффициенты которой будут алгебраическими относительно $x_i$ и $y_i$. Если мы предположим, что четыре переменных $x_i$ и $y_i$ связаны соотношением

$$\Phi = \text{const},$$

которое влечет за собой

$$\delta\Phi = 0,$$

то четыре переменных $\delta x_i$, $\delta y_i$ не будут более независимыми; мы сможем исключить одну из них, и $\Pi$ станет тройничной квадратичной формой.

Рассмотрим одну точку периодического решения; для этой точки мы будем иметь

$$f_1 = f_1' = 0.$$

Следовательно, все выражения (1) обратятся в нуль, за исключением

$$\delta f_1 \delta f_1', \ \delta\Theta^2, \ \delta\Phi\delta\Theta \text{ и } \delta\Phi^2.$$

Если мы предположим, что $\delta\Phi = 0$, то они все обратятся в нуль за исключением

$$\delta f_1 \delta f_1' \text{ и } \delta\Theta^2.$$

Итак, пусть для точки периодического решения

$$\text{II} = B\delta f_1 \delta f_1' + C\delta\Theta^2.$$

Совокупность членов с $t^2$ сведется, следовательно, для этой же точки к

$$-Bf_1 f_1' t^2 \delta\alpha_1^2 + Ct^2\delta\alpha_0^2$$

(ср. выше таблицу (10bis)) и, поскольку $f_1 = f_1' = 0$, к

$$Ct^2\delta\alpha_0^2.$$

Члены с $t^2$ должны исчезнуть; это — единственный, который не обращается в нуль для рассматриваемой точки; все остальные — нули, *даже если бы мы не подчинили их условию* $\delta\Phi = 0$, ибо $\delta\Phi\,\delta\Theta$ и $\delta\Phi^2$ не дают членов с $t^2$.

Но $\delta\alpha_0$ не есть тождественный нуль. Мы имеем для точки периодического решения

$$\frac{d\alpha_0}{df_1} = \frac{d\alpha_0}{df_1'} = \frac{d\alpha_0}{d\Theta} = 0,$$

но мы не могли бы иметь $d\alpha_0/d\Phi = 0$; это значило бы, что имеется непрерывное бесконечное множество периодических решений одного и того же периода, что не имеет места.

Можно заметить, однако, что $d\alpha_0/d\Phi$ содержит множителем малое количество, которое я обозначу через $\mu$, т. е. массу второго тела, и, следовательно, что $\delta\alpha_0$ обращается в нуль при $\mu = 0$, т. е. в кеплеровском движении.

Следовательно, члены с $t^2$ могут исчезнуть, только если мы имеем

$$C = 0,$$

откуда

$$\text{II} = B\delta f_1 \delta f_1'.$$

Но это последнее равенство означало бы, что II сводится к бинарной квадратичной форме и, следовательно, что ее дискриминант нуль. *Таким образом, дискриминант* $\Delta$ *формы* II *должен был бы обращаться в нуль для всех точек всех периодических решений.*

288. Однако алгебраическое соотношение

$$\Delta = 0$$

не может быть справедливым, по крайней мере, если оно не обращается в тождество для всех точек всех периодических решений.

Действительно, если мы присоединим к соотношению

$$\Delta = 0 \tag{2}$$

два других соотношения

$$F=\beta, \qquad G=\gamma \tag{3}$$

(где $\beta$ и $\gamma$ — две произвольные постоянные, $F$ и $G$ — две функции, обозначенные так в предыдущем параграфе) и любое четвертое алгебраическое соотношение

$$H=0, \tag{4}$$

то число решений этих четырех алгебраических уравнений будет ограниченным, какими бы ни были постоянные $\beta$ и $\gamma$.

Рассмотрим теперь периодическое решение; переменные $x_i$ и $y_i$ будут разложены по степеням $\mu$ в виде

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0+\mu x_i^1+\ldots, \\ y_i &= y_i^0+\mu y_i^1+\ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Функция $F$ также будет разложима по степеням $\mu$, и мы будем иметь

$$F=F_0+\mu F_1+\ldots.$$

$G$ и $H$ будут независимы от $\mu$.

Остается $\Delta$; я говорю, что эта функция, которая по предположению алгебраична по $x_i$ и $y_i$, зависит также алгебраически от $\mu$.

Действительно, выражая то, что

$$\int\sqrt{\Pi}$$

— интегральный инвариант, мы придем к определенным соотношениям, в которые войдут коэффициенты $\Pi$, их производные и коэффициенты дифференциальных уравнений движения.

Мы предположим, что $\Pi$ — алгебраическая функция от $x_i$ и $y_i$; мы можем предположить, что эта алгебраическая функция относится как частный случай к определенному типу, не содержащему явно $\mu$, но зависящему алгебраически от некоторого числа произвольных параметров. Тогда $\int\sqrt{\Pi}$ не будет интегральным инвариантом при произвольных значениях параметров, а только тогда, когда эти параметры будут принимать некоторые частные значения, *зависящие от* $\mu$.

Выражая то, что $\int\sqrt{\Pi}$ — интегральный инвариант, мы придем к некоторым алгебраическим уравнениям между $\mu$ и этими параметрами; эти уравнения должны быть совместными, и ясно, что из них мы получим параметры в виде алгебраических функций от $\mu$.

Коэффициенты формы $\Pi$ и $\Delta$ будут, следовательно, также алгебраичны по $\mu$.

Таким образом, уравнение $\Delta=0$ является алгебраическим относительно $\mu$, и мы можем предположить, что оно преобразовано так, что левая часть — целый полином относительно $\mu$.

Итак, будем писать

$$\Delta=\Delta_0+\mu\Delta_1+\mu^2\Delta_2+\ldots.$$

Кроме того, $\Delta_0$ не будет тождественным нулем, если только таковым не будет $\Delta$. Если бы действительно, $\Delta_0$ обращалось в нуль, то $\Delta$ содержало множитель $\mu$, который можно было устранить.

Функция $\Delta$ должна обратиться в нуль, когда в ней $x_i$ и $y_i$ заменены разложениями (5). В таком случае она становится разложимой по степеням $\mu$ и так как член, не зависящий от $\mu$, должен обратиться в нуль, то мы имеем

$$\Delta_0(x_i^0,\ y_i^0)=0. \tag{2bis}$$

Заметим теперь, что мы должны иметь

$$\begin{aligned} F_0(x_i^0,\ y_i^0)&=\beta_0,\\ G_0(x_i^0,\ y_i^0)&=\gamma_0, \end{aligned} \tag{3bis}$$

где $\beta_0$ и $\gamma_0$ — постоянные. Для того чтобы в этом удостовериться, достаточно вспомнить, что при $\mu=0$ движение сводится к кеплерову.

Примем теперь, например,

$$H=x_1^2+x_2^2-1$$

и напишем уравнение

$$(x_1^0)^2+(x_2^0)^2=1. \tag{4bis}$$

Заметим далее, что если предположить $\mu=0$, то третье тело будет описывать кеплеров эллипс; пусть $\xi$ и $\eta$ — координаты этого тела, отнесенные не к подвижным осям, а к осям симметрии этого эллипса.

Тогда уравнения кеплерова эллипса запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi&=\xi_0+\xi_1\cos\varphi+\xi_2\cos 2\varphi+\ldots,\\ \eta&=\qquad\ \eta_1\sin\varphi+\eta_2\sin 2\varphi+\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты $\xi_k$, $\eta_k$ будут зависеть от двух постоянных, которыми являются большая полуось и эксцентриситет эллипса, и, следовательно, от $\beta_0$ и $\gamma_0$. При этом мы будем иметь

$$\varphi=n_1t+\varpi_1,$$

где среднее движение $n_1$ зависит от $\beta_0$, а $\varpi_1$ — новая постоянная интегрирования.

Пересечение эллипса (6) с окружностью

$$\xi^2+\eta^2=1$$

будет иметь место в двух точках, которые будут даны уравнениями

$$\xi = \cos\theta, \qquad \eta = \pm\sin\theta, \qquad \varphi = \pm\varphi_0. \tag{7}$$

Далее мы будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \xi\cos(\omega t + \varpi_2) + \eta\sin(\omega t + \varpi_2), \\ x_2^0 &= \xi\sin(\omega t + \varpi_2) - \eta\cos(\omega t + \varpi_2), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varpi_2$ — новая постоянная интегрирования.

Мы получим решения уравнения (4bis), комбинируя уравнения (7) и (8), что дает

$$x_1^0 = \cos\left[\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2\right],$$

$$x_1^0 = \cos\left[-\theta + \frac{\omega}{n_1}(-\varphi_0 + 2k\pi - \varpi_1) + \varpi_2\right]$$

($k$ — любое целое число).

Для того чтобы решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\omega/n_1$ было рациональным. Представим это отношение в виде дроби, приведенной к наиболее простому выражению, и пусть $D$ — ее знаменатель. Мы видим, что уравнение (4bis) будет допускать $2D$ различных решений.

Уравнения (2bis), (3bis) и (4bis) должны были бы допускать лишь ограниченное число решений, каковы бы ни были постоянные $\beta_0$ и $\gamma_0$. Но я могу выбрать $\beta_0$ таким образом, чтобы $\omega/n_1$ имело какое угодно значение, и, следовательно, чтобы $D$ было сколь угодно большим.

*Это может случиться, только если* $\Delta_0$ *и, следовательно,* $\Delta$ *тождественно равно нулю.*

Следовательно, дискриминант формы П — тождественный нуль, и эта форма должна свестись к бинарной форме.

Таким же способом мы доказали бы, что не может случиться, чтобы все периодические решения были особыми в смысле п. 257.

Таким образом, доказательство дано только в очень частном случае, но можно предвидеть возможность его распространения на общий случай.

**289.** Форма П, рассматриваемая как бинарная форма, должна свестись к

$$B\delta f_1 \delta f_1'$$

для точки периодического решения; следовательно, эта бинарная форма будет определенной (т. е. равной сумме двух квадратов), если периодическое решение устойчиво, т. е. если характеристические показатели мнимы; она будет неопределенной (т. е. равной разности двух квадратов), если периодическое решение неустойчиво, т. е. если характеристические показатели вещественны.

Предположим опять, что $\mu$ очень мало, и снова возьмем уравнение (4bis).

Согласно принципам главы III (п. 42), для заданного значения $\beta_0$ мы будем иметь, по крайней мере, два периодических решения, из которых одно — устойчиво и одно — неустойчиво. Пусть

$$\varpi_1', \ \varpi_2'; \quad \varpi_1'', \ \varpi_2''$$

— соответствующие значения постоянных $\varpi_1$ и $\varpi_2$.

Пусть

$$\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 - \varpi_1') + \varpi_2' = \psi',$$

$$\theta + \frac{\omega}{n_1}(\varphi_0 - \varpi_1'') + \varpi_2'' = \psi'';$$

тогда уравнение (4bis) даст для первого периодического решения

$$x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{2k\omega\pi}{n_1}\right)$$

и для второго

$$x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{2k\omega\pi}{n_1}\right).$$

Мы сможем без ограничения общности предположить, что $\psi'' > \psi'$ и при этом $\psi'$ и $\psi''$ заключены между 0 и $2\pi/D$. Тогда форма П будет

$$\begin{aligned}
&\text{определенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{2\pi}{D}\right),\\
&\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{2\pi}{D}\right),\\
&\text{определенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi' + \frac{4\pi}{D}\right),\\
&\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos\left(\psi'' + \frac{4\pi}{D}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\text{определенной для } x_1^0 = \cos(\psi' + 2\pi)\\
&\text{неопределенной для } x_1^0 = \cos(\psi'' + 2\pi)
\end{aligned}$$

что показывает, что дискриминант формы П, рассматриваемой как бинарная форма, должен обращаться в нуль, по крайней мере, $2D$ раз, откуда, как и выше, можно заключить, что он — тождественный нуль.

Таким образом, форма П сводится к квадрату; следовательно, так как она должна быть равной

$$B\delta f_1 \delta f_1'$$

для всех точек периодического решения, она должна обращаться в нуль во всех этих точках.

То же рассуждение показало бы снова, что она — тождественный нуль.

В итоге, по крайней мере для частного случая ограниченной задачи, не существует квадратичного инварианта, отличного от известного.

## Глава XXVI

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПУАССОНУ [9]

### Различные определения устойчивости

290. Слово *устойчивость* понимали в весьма различном смысле, и разница между различными понятиями устойчивости станет очевидной, если вспомнить историю науки.

Лагранж доказал, что если пренебречь квадратами масс, большие оси орбит остаются неизменными. Этим он хотел сказать, что с этой степенью приближения большие оси можно разложить в ряды, члены которых имеют вид

$$A \sin(\alpha t + \beta),$$

где $A$, $\alpha$ и $\beta$ — постоянные.

Отсюда следует, что если эти ряды равномерно сходятся, большие оси остаются заключенными в определенных пределах; система небесных светил, следовательно, не может пройти все положения, совместимые с интегралами живых сил и площадей, и, кроме того, она также пройдет вновь бесконечное число раз сколь угодно близко от ее начального положения.

Это — полная устойчивость.

Продвинув приближения далее, Пуассон объявил, что устойчивость существует, если учесть квадраты масс и пренебречь их кубами.

Однако это не имело того же смысла.

Он хотел сказать, что большие оси могут быть разложены в ряды, содержащие не только члены вида

$$A \sin(\alpha t + \beta),$$

но и члены вида

$$At \sin(\alpha t + \beta).$$

Значение большой оси испытывает в этом случае непрерывные колебания, но ничто не доказывает, что амплитуда этих колебаний не возрастает неограниченно со временем.

Мы можем утверждать, что система всегда вновь будет проходить бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения; но нельзя сказать, что она не удаляется значительно от него.

Таким образом, слово *устойчивость* не имеет одного и того же смысла для Лагранжа и для Пуассона.

Еще стоит заметить, что теоремы Лагранжа и Пуассона допускают важное исключение: они не верны более, если отношение средних движений соизмеримо.

Оба геометра тем не менее заключают об устойчивости, потому что *бесконечно мало вероятно*, чтобы это отношение было в точности соизмеримым.

Таким образом, имеется повод для точного определения устойчивости.

Для того чтобы имела место полная устойчивость в проблеме трех тел, необходимы три условия:

1) чтобы ни одно из трех тел не могло неограниченно удаляться;

2) чтобы два тела не могли столкнуться и чтобы расстояние между этими двумя телами не могло стать меньше некоторого предела;

3) чтобы система проходила бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения.

Если выполнено одно третье условие и неизвестно, выполнены ли первые два, то я буду говорить, что существует только *устойчивость по Пуассону*.

Имеется случай, в котором давно доказано, что выполнено первое условие. Мы видим сейчас, что третье условие также выполнено. Что же касается второго, то я ничего не могу сказать.

Это — случай проблемы п. 9, когда предполагают, что три тела движутся в одной и той же плоскости, масса третьего тела равна нулю, а два первых тела описывают концентрические окружности вокруг их общего центра тяжести. Это то, что я для краткости назову *ограниченной задачей*.

## Движение жидкости

**291.** Для того чтобы лучше разъяснить принцип доказательства, я возьму сначала простой пример.

Рассмотрим жидкость, заключенную в сосуде неизменной формы и заполняющую его полностью.

Пусть $x$, $y$, $z$ — координаты молекулы жидкости, $u$, $v$, $w$ — компоненты ее скорости, так что уравнения движения записываются в виде

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt. \tag{1}$$

Компоненты $u$, $v$, $w$ — функции от $x$, $y$, $z$ и $t$, которые я предполагаю заданными.

Я предполагаю движение установившимся, так что $u$, $v$, $w$ зависят только от $x$, $y$, $z$.

Так как жидкость несжимаема, то мы имеем

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Другими словами, объем

$$\int dxdydz$$

— интегральный инвариант.

Изучим траекторию какой-либо молекулы; я говорю, что эта молекула пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от ее начального положения. Более точно, пусть $U$ — какой-либо объем внутри сосуда и сколь угодно малый; я говорю, что существуют молекулы, которые пересекут этот объем бесконечное число раз.

Пусть $U_0$ — какой-нибудь объем внутри сосуда; молекулы жидкости, которые заполняют этот объем в момент 0, заполнят в момент $\tau$ некоторый объем $U_1$, в момент $2\tau$ — некоторый объем $U_2, \ldots$, в момент $n\tau$ — некоторый объем $U_n$.

Несжимаемость жидкости или, что то же, существование интегрального инварианта, показывает, что все объемы

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$$

равны между собой.

Пусть $V$ — общий объем сосуда; если

$$V < (n+1)\,U_0,$$

то мы будем иметь

$$V < U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

Следовательно, невозможно, чтобы все эти объемы $U_0, U_1, \ldots, U_n$ были внешними по отношению друг к другу; необходимо, чтобы, по крайней мере, два из них, например $U_i$ и $U_k$, имели общую часть.

Я говорю, что если $U_i$ и $U_k$ имеют общую часть, то это же будет и для $U_0$ и $U_{k-i}$ (предполагая, например, что $k > i$).

Действительно, пусть $M$ — общая точка $U_i$ и $U_k$; молекула, находящаяся в точке $M$ в момент $i\tau$, находится в момент 0 в точке $M_0$, принадлежащей $U_0$, поскольку точка $M$ принадлежит $U_i$.

Таким же образом молекула, находящаяся в точке $M$ в момент $k\tau$, в момент $(k-i)\tau$ находится в точке $M_0$, поскольку движение установившееся; с другой стороны, она находится в момент 0 в точке $M_1$, принадлежащей $U_0$, так как $M$ принадлежит $U_k$, и мы должны прийти к выводу, что $M_0$ принадлежит $U_{k-i}$.

Таким образом, $U_{k-i}$ и $U_0$ имеют общие точки, что и требовалось доказать.

*Следовательно, можно выбрать число $\alpha$ таким образом, чтобы $U_0$ и $U_\alpha$ имели общую часть.*

Пусть $U'_0$ — эта общая часть; построим $U'_1, U'_2, \ldots$ по $U'_0$, как мы строим $U_1, U_2, \ldots$ по $U_0$. Мы сможем найти такое число $\beta$, чтобы $U'_0$ и $U'_\beta$ имели общую часть. Пусть $U''_0$ — эта общая часть. Мы сможем найти такое число $\gamma$, чтобы $U''_0$ и $U''$ имели общую часть.

И так далее.

Отсюда вытекает, что $U_0'$ составляет часть $U_0$, $U_0''$ — часть $U_0'$, $U_0'''$ — часть $U_0''$, .... Вообще, $U_0^{(p+1)}$ составит часть $U_0^{(p)}$. Когда число $p$ неограниченно возрастает, объем $U_0^{(p)}$ делается, следовательно, все меньше и меньше.

Согласно хорошо известной теореме, имеется, по крайней мере, одна точка, быть может, несколько, быть может, бесконечное множество точек, принадлежащих одновременно $U_0$, $U_0'$, $U_0''$, ... и $U_0^{(p)}$, как велико бы ни было $p$.

Это множество точек, которое я назову $E$, будет в некотором роде пределом, к которому стремится объем $U_0^{(p)}$, когда $p$ неограниченно возрастает.

Оно может состоять из изолированных точек; но оно может быть и другим; может, например, случиться, что $E$ — область пространства конечного объема.

Молекула, которая будет находиться внутри $U_0$ и, следовательно, $U_\alpha$ в нулевой момент, будет находиться внутри $U_0$ в момент $-\alpha\tau$.

Молекула, которая будет находиться внутри $U_0''$ и, следовательно, $U_\beta'$ в нулевой момент, будет находиться внутри $U_0'$ в момент $-\beta\tau$ и, следовательно, внутри $U_0$ в момент $-(\alpha+\beta)\tau$. Молекула, которая будет находиться внутри $U_0'''$ в нулевой момент, будет находиться внутри $U_0''$ в момент $-\gamma\tau$, внутри $U_0'$ в момент $-(\beta+\gamma)\tau$, внутри $U_0$ в момент $-(\alpha+\beta+\gamma)\tau$.

Так как $U_0'''$, $U_0''$, $U_0'$ составляют часть $U_0$, эта молекула будет находиться в четыре различных момента (кратные $\tau$) внутри $U_0$.

Аналогично молекула, которая находится внутри $U_0^{(p)}$ в нулевой момент, находилась внутри $U_0$ в $p$ предыдущих моментов (которые равны отрицательным кратным $\tau$).

А так как $E$ составляет часть $U_0^{(p)}$, как велико бы ни было $p$, отсюда следует, что молекула, которая в нулевой момент составляет часть $E$, проходила через $U_0$ бесконечное число раз в моменты, которые все равны отрицательным кратным $\tau$.

Таким образом, имеются молекулы, которые пересекают объем $U_0$ бесконечное число раз для любого как угодно малого значения этого объема, что и требовалось доказать.

Уравнения

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt$$

превращаются в

$$\frac{dx}{-u}=\frac{dy}{-v}=\frac{dz}{-w}=dt,$$

если заменить $t$ на $-t$; следовательно, они сохраняют ту же форму.

Следовательно, подобно тому, как мы только что доказали, что существуют молекулы, которые пересекают $U_0$ бесконечное число раз *до нулевого момента*, мы смогли бы доказать, что имеются молекулы, которые пересекают $U_0$ бесконечное число раз *после нулевого момента*.

Предыдущее рассуждение указывает нам моменты, когда молекула, которая в нулевой момент принадлежит $E$, пересекает $U_0$.

Будучи внутри $E$ и, следовательно, $U_0'$ и $U_\alpha$ в нулевой момент, она будет внутри $U_0$ в момент

$$-\alpha\tau.$$

Будучи внутри $E$ и, следовательно, $U_0''$ и $U_\beta'$ в нулевой момент, она будет находиться внутри $U_0'$ и $U_\alpha$ в момент

$$-\beta\tau$$

и внутри $U_0$ в момент

$$-(\alpha+\beta)\tau.$$

Таким образом, она будет находиться внутри $U_0$ в два момента $-\beta\tau$ и $-(\alpha+\beta)\tau$.

Поскольку она принадлежит $E$ и $U_0'''$ в нулевой момент, она будет принадлежать $U_0''$ в момент $-\gamma\tau$, $U_0'$ — в момент $-(\beta+\gamma)\tau$, $U_0$ — в момент $-(\alpha+\beta+\gamma)\tau$, так что она пересечет $U_0$ в три момента

$$-\gamma\tau, \quad -(\beta+\gamma)\tau, \quad -(\alpha+\beta+\gamma)\tau.$$

В момент $-\gamma\tau$ она принадлежит $U_0''$ и, следовательно, $U_0'$ и $U_\alpha$; в момент

$$-(\alpha+\gamma)\tau$$

она, таким образом, опять будет принадлежать $U_0$.

В итоге эта молекула должна будет пересечь $U_0$ в различные моменты

$$\begin{array}{llll}
-\alpha\tau, & -\beta\tau, & -\gamma\tau, & \ldots, \\
-(\alpha+\beta)\tau, & -(\beta+\gamma)\tau, & -(\alpha+\gamma)\tau, & \ldots, \\
-(\alpha+\beta+\gamma)\tau, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots,
\end{array}$$

где коэффициент при $-\tau$ будет, таким образом, произвольной комбинацией чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ...

Каковы же теперь среди всех этих моментов те, когда молекула будет находиться не только внутри $U_0$, но и внутри $U_0'$?

Легко видеть, что достаточно взять комбинации, в которые не входит число $\alpha$.

Точно так же моменты, когда молекула будет находиться внутри $U''_0$, будут соответствовать комбинациям, в которые не входят ни число $\alpha$, ни число $\beta$.

292. Возьмем снова объемы

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n. \tag{1}$$

Условимся говорить для краткости, что каждый из них есть *последующий* относительно того, который расположен перед ним в последовательности (1), и *предшествующий* относительно того, который расположен после него.

Точно так же $U_2$, $U_3$ будут вторым, третьим последующим объема $U_0$.

Я могу продолжить последовательность (1) за $U_n$, строя последовательные последующие объема $U_n$

$$U_{n+1},\ U_{n+2},\ \ldots.$$

Я могу равным образом продолжить ее налево и построить последовательные предшествующие объема $U_0$

$$U_{-1},\ U_{-2},\ \ldots$$

таким образом, что молекулы, которые находятся в нулевой момент в $U_0$, находятся в $U_{-1}$ в момент $-\tau$ и в $U_{-2}$ — в момент $-2\tau$.

При этих условиях, если я всегда буду обозначать через $V$ весь объем сосуда и через $k$ — любое целое число, и если мы имеем

$$kV < (n+1)U_0,$$

то будут существовать точки, которые будут принадлежать одновременно $k+1$ объемам ряда (1).

Действительно, сумма объемов ряда (1) равна $(n+1)\,U_0$; если бы ни одна точка не могла принадлежать одновременно более чем $k$ этих объемов, то эта сумма должна была бы быть меньше $kV$.

Таким образом, мы сможем найти в ряде (1) $k+1$ объемов

$$U_{\alpha_0},\ U_{\alpha_1},\ U_{\alpha_2},\ \ldots,\ U_{\alpha_k},$$

которые будут иметь общую часть.

Отсюда я делаю вывод, что $k+1$ объемов

$$U_0,\ U_{\alpha_1-\alpha_0},\ U_{\alpha_2-\alpha_0},\ \ldots,\ U_{\alpha_k-\alpha_0}$$

имеют общую часть.

Пусть, например, $k=2$,

$$2V < (n+1)\,U_0;$$

мы сможем найти три объема

$$U_\alpha,\ U_\beta,\ U_\gamma,$$

которые будут иметь общую часть; индексы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha \leqslant n; \quad 0 \leqslant \beta \leqslant n; \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant n; \quad \alpha < \beta < \gamma.$$

Отсюда мы заключаем, что три объема

$$U_0,\ U_{\beta-\alpha},\ U_{\gamma-\alpha}$$

имеют общую часть, и что то же будет иметь место для трех объемов

$$U_{\alpha-\beta},\ U_0,\ U_{\gamma-\beta}$$

или для трех объемов

$$U_{\alpha-\gamma},\ U_{\beta-\gamma},\ U_0.$$

**293.** Выше мы видели, что имеются молекулы, пересекающие $U_0$ бесконечное число раз *до нулевого момента*, и молекулы, которые пересекают $U_0$ бесконечное число раз *после нулевого момента*. Я ставлю перед собой задачу установить, существуют ли среди них такие, которые пересекают $U_0$ бесконечно много раз как до, *так и после нулевого момента*.

Пусть $U_0$ — какой-нибудь объем; согласно предыдущему пункту, мы всегда можем найти два таких числа $a$ и $\alpha$, первое из которых отрицательно, а второе положительно, что три объема

$$U_a,\ U_0,\ U_\alpha$$

будут иметь общую часть. Пусть $U'_0$ — эта общая часть.

Любая молекула, находящаяся в $U'_0$ в нулевой момент, будет находиться в $U_0$ в три момента

$$-a\tau,\ 0,\ -a\tau.$$

Из этих трех моментов первый отрицателен, последний положителен.

Наша молекула пересечет, следовательно, $U_0$, по крайней мере, один раз до нулевого момента и, по крайней мере, один раз после этого момента.

Поступая в дальнейшем с $U'_0$, как с $U_0$, мы найдем два числа $b$ и $\beta$, первое из которых отрицательно, второе положительно, такие, что три объема

$$U'_b,\ U'_0,\ U'_\beta$$

будут иметь общую часть. Пусть $U''_0$ — эта общая часть.

Каждая молекула, находящаяся в $U''_0$ в нулевой момент, будет находиться в $U'_0$ в три момента

$$-\beta\tau,\ 0,\ -b\tau$$

и, следовательно, в $U_0$ в пять моментов

$$-(\alpha+\beta)\tau, \ -\beta\tau, \ 0, \ -b\tau, \ -(a+b)\tau.$$

Из этих моментов два первых отрицательны, два последних положительны.

Каждая молекула, находящаяся в $U_0''$ в момент 0, пересечет $U_0$, по крайней мере, два раза до нулевого момента и, по крайней мере, два раза после этого момента.

И так далее.

Если мы построим $U_0'''$ с $U_0''$, $U_0^{\mathrm{IV}}$ с $U_0'''$, то увидим, что каждая молекула, находящаяся в $U_0^{(p)}$ в момент 0, пересекает $U_0$, по крайней мере, $p$ раз до нулевого момента и, по крайней мере, $p$ раз после этого момента.

Но $U_0'$ составляет часть $U_0$, $U_0''$ — часть $U_0'$ и так далее. Таким образом, мы будем иметь точечное множество $E$ (содержащее, по крайней мере, одну точку), составляющее часть всех объемов $U_0^{(p)}$ одновременно, как бы ни было велико $p$.

Каждая молекула, которая в нулевой момент находится в $E$, будет, следовательно, также находиться внутри

$$U_0, \ U_0', \ U_0'', \ \ldots, \ U_0^{(p)}, \ \textit{ad inf.},$$

потому что $E$ — часть всех этих объемов.

Следовательно, она пересечет $U_0$ бесконечно много раз до момента 0 и бесконечно много раз после этого момента.

Таким образом, существуют молекулы, пересекающие $U_0$ бесконечное число раз как до, так и после нулевого момента, что и требовалось доказать.

**294.** Множество $E$, определенное в п. 291 (так же, как и множество $E$, рассмотренное в предыдущем пункте), может состоять из единственной точки (хотя, разумеется, всегда имеется бесконечное число молекул, которые пересекают $U_0$ бесконечно много раз).

Оно может состоять из конечного числа точек или бесконечного числа отдельных точек.

Можно предположить также, что это множество $E$ обладает конечным объемом; посмотрим, каковы будут следствия из этой гипотезы. Рассмотрим множество $E$, определенное в п. 291.

Я рассматриваю последовательность целых чисел

$$\alpha, \ \beta, \ \ldots,$$

определенных в этом пункте, и я утверждаю, что

$$\beta \geqslant \alpha.$$

Действительно, $U_\alpha$ — первый из последующих объема $U_0$, имеющий общую часть с $U_0$.

Объем $U'_\beta$ — первый из последующих объема $U'_0$, имеющий общую часть с $U'_0$.

Но $U'_0$ составляет часть $U_0$, а $U'_\beta$ — часть $U_\beta$. Если, следовательно, $U'_\beta$ имеет общую часть с $U'_0$, то это значит, что $U_\beta$ — один из последующих объема $U_0$, имеющий общую часть с $U_0$. Это влечет за собой неравенство

$$\alpha \leqslant \beta.$$

Мы найдем также

$$\beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \ldots .$$

Числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, . . ., следовательно, возрастают или, по крайней мере, никогда не убывают.

С другой стороны, согласно п. 294, мы имеем

$$1+\alpha < \frac{V}{U_0}; \quad 1+\beta < \frac{V}{U'_0}; \quad 1+\gamma < \frac{V}{U''_0}.$$

Очевидно, имеем

$$U_0 > U'_0 > U''_0 > \ldots,$$

и если $E$ имеет конечный объем, который я назову также $E$, то, каково бы ни было $p$,

$$E < U_0^{(p)},$$

поскольку $E$ составляет часть $U_0^{(p)}$.

Следовательно, все числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . меньше чем

$$\frac{V}{E} - 1.$$

Таким образом, они не могут беспредельно возрастать, и мы можем заключить, что в последовательности чисел $\alpha$, $\beta$, . . ., начиная с некоторого ранга, все члены равны между собой.

Предположим, что начиная с $p$-го ранга все члены равны $\lambda$.

Тогда $U_0^{(p)}$ и $U_\lambda^{(p)}$ будут иметь общую часть $U_0^{(p+1)}$; $U_0^{(p+1)}$ и $U_\lambda^{(p+1)}$ будут иметь общую часть $U_0^{(p+2)}$ и т. д.

Пусть $E_\lambda$ — $\lambda$-й последующий $E$. $E$ — множество точек, принадлежащих одновременно $U_0$, $U'_0$, $U''_0$, . . ., *ad inf*; $E_\lambda$ будет множеством точек, принадлежащих одновременно $U_\lambda$, $U'_\lambda$, $U''_\lambda$, . . .; я могу также сказать, что $E$ — множество точек, которые одновременно принадлежат

$$U_0^{(p+1)},\ U_0^{(p+2)},\ \ldots, \tag{1}$$

поскольку каждая из областей $U_0$, $U'_0$, . . . является лишь частью предыдущей. Также $E_\lambda$ — множество точек, принадлежащих одновременно

$$U_\lambda^{(p)},\ U_\lambda^{(p+1)},\ \ldots . \tag{2}$$

Но $U_0^{(p+1)}$ — часть $U_\lambda^{(p)}$, $U_0^{(p+2)}$ — часть $U_\lambda^{(p+1)}$, ...; каждый член ряда (2) является частью соответствующего члена ряда (1). Таким образом, $E$ — часть $E_\lambda$ или же совпадает с $E_\lambda$.

Но мы предположили, что $E$ — некоторая область пространства, имеющая конечный объем. Так как жидкость несжимаема, то $\lambda$-й последующий этой области $E_\lambda$ должен быть также некоторой областью пространства, обладающей *тем же* объемом. Следовательно, $E$ не может быть частью $E_\lambda$. Значит, $E$ и $E_\lambda$ совпадают.

Итак, если предположить, что $E$ — некоторая область пространства конечного объема, то необходимо допустить, что $E$ совпадает с одним из своих последующих.

**295.** Вот несколько теорем, которые почти очевидны и формулировкой которых я ограничусь. Пусть

$$U_{\alpha_1},\ U_{\alpha_2},\ \ldots,\ U_{\alpha_\mu},\ \ldots$$

— те из последующих $U_0$, которые имеют общую часть с $U_0$; числа $\alpha_\mu$ расположены в порядке возрастания; мы будем иметь

$$1+\alpha_\mu \leqslant \mu\frac{V}{U}.$$

Пусть, далее,

$$U_{\gamma_1},\ U_{\gamma_2},\ \ldots,\ U_{\gamma_\mu}$$

— $\mu$ последующих $U_0$, имеющих общую часть друг с другом и с $U_0$. Я выбираю эти числа $\gamma$ таким образом, чтобы $\gamma_\mu$ было сколь возможно малым; мы получим

$$1+\alpha_\mu \leqslant 1+\gamma_\mu \leqslant \mu\frac{V}{U}.$$

Если мы вновь примем обозначения п. 291 и обозначим через $U_\alpha$ — первый последующий, который имеет общую часть с $U_0$, через $U_0'$ — эту общую часть, через $U_\beta'$ — первый последующий $U_0'$, имеющий общую часть с $U_0'$, то я говорю, что если $\beta$ не равно $\alpha$, мы будем иметь

$$\beta \geqslant 2\alpha;$$

действительно, $U_{\beta-\alpha}$ будет иметь общую часть с $U_0$.

## Вероятности

**296.** В п. 291 мы видели, что существуют молекулы, пересекающие $U_0$ бесконечно много раз. С другой стороны, вообще, среди них имеются другие, которые пересекают $U_0$ лишь конечное число раз. Я ставлю себе целью показать, что эти последние должны рассматриваться как исключительные или, точнее, что *вероятность* того, что молекула пересечет $U_0$ лишь конечное число раз, бесконечно мала [10], если *допустить*, что эта молекула находится внутри $U_0$ в начальный момент. Однако сначала я должен объяснить смысл, который придаю слову *вероятность*. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — какая-нибудь положительная функция трех координат $x, y, z$; я условлюсь говорить, что вероятность того, что в момент $t=0$ молекула находится внутри некоторого объема, пропорциональна интегралу

$$J = \int \varphi(x, y, z)\, dx dy dz,$$

распространенному на этот объем. Следовательно, она равна интегралу $J$, деленному на значение этого же интеграла, распространенного на весь сосуд $V$.

Мы можем произвольным образом выбрать функцию $\varphi$, и вероятность окажется, таким образом, определенной полностью; так как траектория молекулы зависит только от ее начального положения, то вероятность того, что молекула будет вести себя тем или иным образом, является полностью определенной величиной, как только выбрана функция $\varphi$.

При этих условиях я приму сначала просто $\varphi=1$ и буду искать вероятность $p$ того, что молекула не пересечет более $k$ раз области $U_0$ между моментом $-n\tau$ и нулевым моментом.

Итак, пусть $\sigma_0$ — область, составляющая часть $U_0$ и определенная следующим свойством. Всякая молекула, которая в начальный момент находится внутри $\sigma_0$, пересечет $U_0$ не более $k$ раз между моментами $-n\tau$ и 0.

Если мы допустим, что наша молекула находится внутри $U_0$ в нулевой момент, то искомая вероятность будет

$$p = \frac{\sigma_0}{U_0}. \tag{1}$$

Пусть

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

— первые $n$ последующих области $\sigma_0$. Среди $n+1$ областей

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

не может существовать более $k$ областей, имеющих общую часть, ибо в противном случае всякая молекула, которая в нулевой момент находилась бы в этой общей области, пересекла бы $\sigma_0$ и, следовательно, $U_0$ более чем $k$ раз между моментами $-n\tau$ и 0.

Таким образом, мы имеем

$$(n+1)\sigma_0 < kV$$

и, следовательно,

$$p < \frac{kV}{(n+1)U_0}.$$

Каким бы малым ни был объем $U_0$ и сколь велико бы ни было $k$, всегда можно взять $n$ достаточно большим, чтобы правая часть этого неравенства была сколь угодно малой. Таким образом, когда $n$ стремится к бесконечности, $p$ стремится к нулю.

Итак, вероятность того, что молекула, находящаяся в начальный момент в области $U_0$, пересечет эту область не более $k$ раз между моментами $-\infty$ и 0, эта вероятность, говорю я, бесконечно мала.

Также бесконечно мала вероятность того, что эта молекула пересечет эту область не более $k$ раз между моментами 0 и $+\infty$.

Положим теперь $n=k^3+x$. Вероятность того, что молекула пересечет $U_0$ не более $k$ раз между моментами $-(k^3+x)\tau$ и 0, будет меньше

$$\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}.$$

Она стремится к нулю, когда $k$ неограниченно возрастает.

Вероятность $P$ того, что молекула не пересекает $U_0$ бесконечное число раз между моментами $-\infty$ и 0, таким образом, бесконечно мала.

В самом деле, эта вероятность $P$ является суммой вероятностей того, что молекула пересечет $U_0$ только один раз, что она пересечет $U_0$ два и только два раза, что она пересечет $U_0$ три и только три раза и т. д.

Но вероятность того, что молекула пересечет $U_0$ $k$ и только $k$ раз между моментами $-\infty$ и 0, очевидно, меньше, чем вероятность того, что она пересечет $U_0$ $k$ раз или менее $k$ раз между моментами $-(k^3+x)\,\tau$ и 0, меньше, следовательно, чем

$$\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}.$$

Таким образом, общая вероятность $P$ будет

$$P<\frac{V}{(x+2)\,U_0}+\frac{2V}{(x+9)\,U_0}+\ldots+\frac{kV}{(k^3+x+1)\,U_0}+\ldots.$$

Ряд в правой части сходится равномерно. Каждый из членов стремится к нулю, когда $x$ стремится к бесконечности. Таким образом, сумма этого ряда стремится к нулю. Следовательно, вероятность $P$ бесконечно мала.

Также бесконечно мала вероятность того, что молекула не пересечет $U_0$ бесконечное число раз между моментами 0 и $+\infty$.

Те же результаты имеют место, когда вместо того, чтобы принять $\varphi=1$, выбирают функцию $\varphi$ любым другим образом.

Тогда равенство (1) должно быть заменено следующим:

$$p=\frac{J(\sigma_0)}{J(U_0)},$$

где $J(\sigma_0)$ и $J(U_0)$ означают интеграл $J$, распространенный соответственно на области $\sigma_0$ и $U_0$.

Я предполагаю, что функция $\varphi$ непрерывна; следовательно, она не становится бесконечной, и я могу назначить ей верхний предел $\mu$; тогда будем иметь

$$J(\sigma_0) < \mu\sigma_0,$$

и поскольку

$$(n+1)\sigma_0 < kV,$$

то отсюда выведем

$$p < \frac{\mu k V}{(n+1)\, J(U_0)}.$$

Каким бы малым ни было значение $J(U_0)$ и сколь велико бы ни было $k$, всегда можно взять $n$ достаточно большим, чтобы правая часть этого неравенства была сколь угодно малой. Итак, мы снова приходим к тем же результатам, *которые, таким образом, не зависят от выбора функции* $\varphi$.

В итоге молекулы, пересекающие $U_0$ только конечное число раз, исключительны в той же мере, что и рациональные числа, представляющие исключение в ряду чисел, тогда как иррациональные числа являются правилом.

Таким образом, если Пуассон полагал возможным ответить утвердительно на тот вопрос об устойчивости, который он поставил, хотя он не исключил случай, когда средние движения соизмеримы, мы также имеем право считать устойчивость доказанной, в смысле нашего определения, хотя вынуждены исключить особые молекулы, о которых только что говорили.

Я добавлю, что существование асимптотических решений в достаточной мере доказывает, что эти исключительные молекулы существуют в действительности.

### Обобщение предыдущих результатов

**297.** До сих пор мы ограничивались весьма частным случаем несжимаемой жидкости, заключенной в сосуде, т. е., говоря аналитическим языком, уравнениями вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

где $X$, $Y$, $Z$ — три функции, связанные между собой соотношением

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

и такие, что во всех точках замкнутой поверхности (поверхности сосуда) мы имеем

$$lX + mY + nZ = 0,$$

где $l$, $m$, $n$ — направляющие косинусы нормали к этой замкнутой поверхности.

Все предыдущие результаты, однако, останутся верными и в гораздо более общих случаях; при этом ничего не надо менять ни в самих результатах, ни в рассуждениях, которые к ним приводят.

Пусть $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — любые однозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

так что уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Я предполагаю, кроме того, что $M$ — положительно; мы будем говорить тогда, что уравнения (1) допускают положительный интегральный инвариант.

Еще я предполагаю, что уравнения (1) таковы, что если точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находится в начальный момент внутри некоторой области $V$ (играющей ту же роль, которую только что играл сосуд с заключенной в нем жидкостью), то она будет оставаться неопределенно долго внутри этой области.

Наконец, я предполагаю, что интеграл

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный на эту область, конечен.

В этих условиях, если рассматривается область $U_0$, содержащаяся в $V$, можно будет выбрать бесконечным числом способов начальное положение точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таким образом, чтобы эта точка пересекала эту область $U_0$ бесконечно много раз. Если этот выбор начального положения делается наудачу внутри $U_0$, то вероятность того, что точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не пересечет область $U_0$ бесконечное число раз, будет бесконечно мала.

Другими словами, если начальные условия не являются исключительными в смысле, который я придал этому слову выше, то точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения.

При этом в предыдущих доказательствах ничего не нужно изменять. Мы вновь найдем, например, неравенство

$$V < (n+1)\, U_0,$$

где $V$ и $U_0$ означают интеграл (2), распространенный соответственно на области $V$ и $U_0$.

Мы сможем вывести отсюда те же следствия; в самом деле, интеграл (2), будучи по предположению существенно положительным, обладает тем же свойством, что и объем, а именно, распространенный на всю область, он будет больше интеграла, взятого только по части этой области.

**298.** Как нам теперь узнать, существует ли такая область $V$, чтобы точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда оставалась внутри этой области, если она находилась в ней в начальный момент времени?

Предположим, что уравнения (1) допускают интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}.$$

Рассмотрим область $V$, определенную неравенствами

$$h < F < h',$$

где $h$ и $h'$ — две какие-нибудь постоянные, сколь угодно близкие друг другу.

Ясно, что если эти неравенства удовлетворяются в начальный момент времени, то они будут выполнены всегда. Следовательно, область $V$ удовлетворяет поставленным условиям.

## Приложение к ограниченной задаче

**299.** Сейчас мы применим эти принципы к ограниченной задаче п. 9 [11]: нулевая масса, круговое движение двух других масс, нулевой наклон Если мы отнесем нулевую массу, движение которой изучаем, к двум осям, вращающимся вокруг общего центра тяжести двух других масс с постоянной угловой скоростью $n$, равной угловой скорости этих двух других масс; если обозначим через $\xi$, $\eta$ координаты нулевой массы относительно двух подвижных осей и через $V$ — силовую функцию, то уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\xi}{dt} = \xi', \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta', \\ \frac{d\xi'}{dt} = 2n\eta' + n^2\xi + \frac{dV}{d\xi}, \\ \frac{d\eta'}{dt} = -2n\xi' + n^2\eta + \frac{dV}{d\eta},\end{gathered} \tag{1}$$

и мы видим тотчас, что они допускают положительный интегральный инвариант

$$\int d\xi d\eta d\xi' d\eta'. \tag{2}$$

С другой стороны, они допускают интеграл Якоби

$$\frac{\xi'^2+\eta'^2}{2}=V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)+h, \tag{3}$$

где $h$ — постоянная.

Поскольку сумма $\xi'^2+\eta'^2$ существенно положительна, то мы должны иметь

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)>-h. \tag{4}$$

Следовательно, приходим к построению кривых

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=\text{const}.$$

Левая часть соотношения (4) существенно положительна, так как мы имеем

$$V=\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2},$$

где $m_1$ и $m_2$ — массы двух главных тел, $r_1$ и $r_2$ — их расстояния от нулевой массы. Левая часть (4) обращается в бесконечность при $r_1=0$, при $r_2=0$, а также на бесконечности; следовательно, она должна иметь, по меньшей мере, один минимум и две точки, в которых ее две первые производные обращаются в нуль, не имея в них ни максимума, ни минимума.

Вообще, если имеется $n$ относительных минимумов или максимумов, мы будем иметь $n+1$ точек, в которых обе производные обращаются в нуль, но нет ни максимума, ни минимума.

Однако очевидно, что эти точки, в которых обе производные обращаются в нуль, соответствуют тем частным решениям задачи трех тел, которые Лаплас изучал в главе VI его книги X «Небесная механика».

Но мы получаем две из этих точек, строя на $m_1m_2$ равносторонний треугольник либо сверху, либо снизу от прямой $m_1m_2$, которую мы принимаем за ось $\xi$. Третья вершина этого треугольника является одним из решений задачи.

Все другие точки, удовлетворяющие задаче, лежат на оси $\xi$. Легко видеть, что левая часть (4), когда $\xi$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, представляет три и только три минимума, первый — между бесконечностью и массой $m_1$, второй — между обеими массами $m_1$ и $m_2$, третий — между бесконечностью и массой $m_2$.

Действительно, производная $\frac{dV}{d\xi}+n^2\xi$ обращается в нуль (при $\eta=0$) только один раз в каждом из этих интервалов, поскольку она является суммой трех членов, которые все возрастают.

Уравнения

$$\frac{dV}{d\xi}+n^2\xi=\frac{dV}{d\eta}+n^2\eta=0,$$

которые выражают тот факт, что две производные левой части (4) равны нулю, имеют, следовательно, только пять решений, а именно, точки $B_1$ и $B_2$ — вершины равносторонних треугольников, точки $A_1$, $A_2$ и $A_3$, расположенные на оси $\xi$; мы предположим, что эти точки встречаются в следующем порядке

$$-\infty,\ A_1,\ m_1,\ A_2,\ m_2,\ A_3,\ +\infty.$$

Остается узнать, какие из этих точек соответствуют минимуму; мы знаем заранее, что их существует две.

Заметим, что если мы заставим меняться непрерывным образом обе массы $m_1$ и $m_2$, то любая из пяти точек $A$ и $B$ всегда будет соответствовать минимуму или же не будет ему соответствовать никогда.

В самом деле, от одного случая к другому можно перейти, только если гессиан левой части (4) обратится в нуль, если две точки $A$ и $B$ совпадают, чего не произойдет никогда.

Следовательно, достаточно будет изучить частный случай, например тот, когда $m_1=m_2$.

В этом случае из соображений симметрии можно предугадать, что оба решения $A_1$ и $A_3$ должны быть одной и той же природы, так же, как и оба решения $B_1$ и $B_2$; следовательно, только $A_1$ и $A_3$ или же только $B_1$ и $B_2$ соответствуют минимуму. Итак, $A_2$ не соответствует минимуму.

Можно установить, что $A_1$ не соответствует минимуму.

Следовательно, оба минимума соответствуют решениям $B_1$ и $B_2$.

Предположим теперь, что $m_1$ намного меньше $m_2$, что представляет собой случай, имеющий место в природе.

Для достаточно больших значений $-h$ кривая

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=-h$$

будет состоять из трех замкнутых ветвей: $C_1$, окружающей $m_1$, $C_2$, окружающей $m_2$, и $C_3$, охватывающей $C_1$ и $C_2$. Для меньших значений она будет содержать две замкнутые ветви: $C_1$, охватывающую $m_1$ и $m_2$, $C_2$, окружающую $C_1$.

Для еще более малых значений мы имели бы единственную замкнутую ветвь, оставляющую $m_1$ и $m_2$ снаружи и охватывающую $B_1$ и $B_2$.

Наконец, для еще более малых значений мы будем иметь две симметричные одна другой замкнутые ветви, охватывающие соответственно $B_1$ и $B_2$.

То, что мы сейчас скажем, будет применимо только к двум первым случаям; следовательно, два последних случая мы оставим в стороне.

В первом случае множество точек, удовлетворяющих неравенству (4), распадается на три частичных множества: множество точек, внутренних по отношению к $C_1$, множество точек, внутренних по отношению к $C_2$, множество точек, внешних по отношению к $C_3$.

Во втором случае множество точек, удовлетворяющих (4), распадается на два частичных множества: множество точек, внутренних по отношению к $C_1$, множество точек, внешних по отношению к $C_2$.

То, что мы сейчас скажем, неприложимо ни к множеству точек, внешних по отношению к $C_3$ в первом случае, ни к множеству точек, внешних по отношению к $C_2$ во втором случае.

Напротив, оно будет приложимо в первом случае к множеству точек, внутренних по отношению к $C_1$, или к множеству точек, внутренних по отношению к $C_2$, и во втором случае — к множеству точек, внутренних по отношению к $C_1$.

Для определенности рассмотрим первый случай и множество точек, внутренних по отношению к $C_2$.

В этом случае мы возьмем в качестве области $V$ область, определенную неравенствами

$$+h+\varepsilon > \frac{\xi'^2+\eta'^2}{2} - V - \frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2) > +h-\varepsilon. \tag{5}$$

Предположим, что $\varepsilon$ очень мало́ и что $h$ имеет такое значение, что мы находимся в условиях первого случая; наконец, для завершения определения области $V$ поместим точку $(\xi, \eta)$ внутрь кривой $C_2$.

Тогда ясно, что если точка $(\xi, \eta, \xi', \eta')$ находится в области $V$ в начальный момент времени, то она останется там навсегда.

Чтобы показать, что результаты предыдущих пунктов применимы к случаю, который нас интересует, остается показать, что интеграл

$$\int d\xi d\eta d\xi' d\eta', \tag{2}$$

распространенный на область $V$, конечен.

Каким образом этот интеграл может стать бесконечным? Так как кривая $C_2$ замкнута, то $\xi$ и $\eta$ ограничены; следовательно, интеграл может стать бесконечным, только если $\xi'$ и $\eta'$ бесконечны. Но в силу неравенств (5) $\xi'$ и $\eta'$ могут стать бесконечными, только если

$$V + \frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)$$

станет бесконечным, или, поскольку $\xi$ и $\eta$ ограничены, если $V$ станет бесконечным.

Но $V$ становится бесконечным при $r_1=0$ и при $r_2=0$. Но так как точка $m_1$ — внешняя по отношению к $C_2$, то мы должны исследовать только случай

$$r_2=0.$$

Итак, оценим ту часть интеграла, которая лежит в окрестности точки $m_2$. Если $r_2$ очень малó, то сумма $\xi^2+\eta^2$ очень близка к $(Om_2)^2$, член $m_1/r_1$ также близок к постоянной; так что, если положим

$$h+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)+\frac{m_1}{r_1}=H,$$

$H$ можно будет считать постоянной.

Тогда, если положим

$$(\xi-Om_2)=r_2\cos\omega,\quad \eta=r_2\sin\omega,\quad \xi'=\rho\cos\varphi,\quad \eta'=\rho\sin\varphi,$$

то неравенства (5) примут вид

$$H+\varepsilon>\frac{\rho^2}{2}-\frac{m_2}{r_2}>H-\varepsilon, \tag{5bis}$$

и интеграл (2) примет вид

$$\int\rho r_2 d\rho dr_2 d\omega d\varphi. \tag{2bis}$$

Мы присоединим к неравенствам (5bis) неравенство

$$r_2<\alpha,$$

где $\alpha$ — очень малó, поскольку речь идет о том, чтобы оценить часть интеграла, лежащую в окрестности $m_2$, а оставшаяся часть наверняка конечна.

Если проинтегрируем сначала по $\omega$ и по $\varphi$, то интеграл (2bis) примет вид

$$4\pi^2\int\rho r_2 d\rho dr_2. \tag{2ter}$$

Проинтегрируем сначала по $\rho$. Необходимо вычислить интеграл

$$\int\rho d\rho=\frac{\rho^2}{2},$$

взятый в пределах

$$\rho=\sqrt{2\left(H-\varepsilon+\frac{m_2}{r_2}\right)}\ \text{ и }\ \rho=\sqrt{2\left(H+\varepsilon+\frac{m_2}{r_2}\right)},$$

что дает $2\varepsilon$.

Следовательно, интеграл (2ter) приводится к интегралу

$$8\pi^2\varepsilon\int_0^\alpha r_2 dr_2=4\pi^2\varepsilon\alpha^2,$$

следовательно, он конечен.

Теоремы, доказанные выше, применимы, следовательно, к интересующему нас случаю. Нулевая масса пройдет бесконечное число раз сколь угодно близко от своего начального положения, если не налагаются некоторые исключительные начальные условия, вероятность которых бесконечно мала.

Следовательно, если в ограниченной задаче допустить, что начальные условия таковы, что точка $\xi$, $\eta$ должна оставаться внутри замкнутой кривой $C_1$ или $C_2$, то первое из условий устойчивости, в смысле п. 290, оказывается выполненным.

Но, более того, равным образом выполнено третье условие: следовательно, имеет место *устойчивость по Пуассону.*

300. Очевидно, результат будет тем же, каков бы ни был закон притяжения.

В самом деле, если движение материальной точки $\xi, \eta$ определяется уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dV}{d\xi}, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dV}{d\eta}$$

или в случае относительного движения уравнениями

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}=\frac{dV}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{d\eta},$$

так что интеграл живых сил записывается в виде

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right]-V=h,$$

и если функция $V$ и постоянная $h$ таковы, что значения $\xi$ и $\eta$ остаются ограниченными, то будет иметь место устойчивость по Пуассону.

Но это не все, то же самое будет в более общем случае.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты $n/3$ материальных точек.

Пусть $V$ — силовая функция, зависящая от этих $n$ переменных.

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — соответствующие массы, так что мы обозначаем через $m_1$, $m_2$ или через $m_3$ массу материальной точки, координаты которой суть $x_1$, $x_2$ и $x_3$.

Уравнения запишутся в виде

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{dV}{dx_i},$$

а интеграл живых сил будет иметь вид

$$\sum\frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=V+h.$$

Если функция $V$ и постоянная $h$ таковы, что в силу этого равенства координаты $x_i$ ограничены, то мы будем иметь устойчивость по Пуассону.

Действительно, речь идет о том, чтобы доказать, что интегральный инвариант

$$\int dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{dt}\right)$$

конечен, когда интегрирование распространено на область, которую я назвал $V$ и которая определяется неравенствами

$$V + h - \varepsilon < \sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 < V + h + \varepsilon. \tag{1}$$

Обозначим через $A$ интеграл

$$\int dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n,$$

взятый по области, определенной неравенством

$$\sum \frac{m_i}{2} x_i'^2 < 1.$$

Этот же интеграл, распространенный на область

$$\sum \frac{m_i}{2} x_i'^2 < R^2,$$

очевидно, будет равен

$$AR^n.$$

Взятый по области, определенной неравенствами (1), он будет равен

$$A\left[(V + h + \varepsilon)^{n/2} - (V + h - \varepsilon)^{n/2}\right],$$

или, поскольку $\varepsilon$ очень мало,

$$nA\varepsilon\,(V + h)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Следовательно, интегральный инвариант равен

$$nA\varepsilon \int (V + h)^{\frac{n}{2}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \tag{2}$$

причем интегрирование должно быть распространено на все такие точки, чтобы выражение $V+h$ было положительным.

Согласно моему предположению, область $V+h > 0$ ограничена.

В таком случае будет легко узнать, является ли интеграл (2) конечным или бесконечным.

Он всегда будет конечным, если $n=2$, ибо в этом случае показатель степени у $V+h$ равен нулю.

Предположим теперь, что $n>2$ и что выражение $V+h$ становится бесконечно большим порядка $p$, когда расстояние между двумя точками $x_1$, $x_2$, $x_3$ и $x_4$, $x_5$, $x_6$ становится бесконечно малым первого порядка. Тогда величина под знаком интеграла в (2) будет порядка

$$p\left(\frac{n}{2}-1\right).$$

Многообразие

$$x_1=x_4, \qquad x_2=x_5, \quad x_3=x_6$$

имеет $n-3$ измерения; интеграл имеет порядок $n$; условие того, чтобы интеграл был конечен, записывается, следовательно, в виде

$$n-(n-3)>p\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

откуда

$$p<\frac{6}{n-2}.$$

Это условие того, чтобы имела место устойчивость по Пуассону.

## Приложение к задаче трех тел

301. Предыдущие рассуждения приложимы к случаю, когда уравнение

$$\sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=V+h \tag{1}$$

влечет за собой следствие, что $x_i$ могут изменяться только в конечных пределах.

К сожалению, в задаче трех тел этого нет. Я приму обозначения п. 11; я обозначу через $x_1$, $x_2$, $x_3$ координаты второго тела относительно первого; через $x_4$, $x_5$, $x_6$ — координаты третьего тела относительно центра тяжести двух первых; через $a$, $b$, $c$ — расстояния между тремя телами; через $M_1$, $M_2$, $M_3$ — их массы и, наконец, через

$$m_1=m_2=m_3=\beta,$$
$$m_4=m_5=m_6=\beta'$$

— величины, которые в п. 11 я назвал $\beta$ и $\beta'$.

Тогда мы будем иметь

$$V=\frac{M_2M_3}{a}+\frac{M_3M_1}{b}+\frac{M_1M_2}{c}.$$

Равенство (1) влечет за собой неравенство

$$V+h>0. \tag{2}$$

Функция $V$ существенно положительна; если, следовательно, постоянная $h$ положительна, то неравенство будет удовлетворяться всегда; но вопрос заключается в том, чтобы узнать, можно ли давать $h$ достаточно малые отрицательные значения, чтобы неравенство могло удовлетворяться только для *ограниченных* значений координат $x_i$. Это сводится к вопросу о том, может ли удовлетворяться неравенство

$$\frac{M_2M_3}{a}+\frac{M_3M_1}{b}+\frac{M_1M_2}{c}+h>0, \tag{3}$$

присоединенное к неравенствам, налагаемым на три стороны треугольника

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad a+c>b \tag{4}$$

только для конечных значений $a$, $b$, $c$.

Примем $a=c$ и очень большим; примем $b$ очень малым; неравенства (4) выполняются сами собой.

Что касается неравенства (3), которое принимает вид

$$\frac{M_2M_3+M_1M_2}{a}+\frac{M_3M_1}{b_1}+h>0,$$

то оно может быть удовлетворено, каково бы ни было $h$, сколь угодно большими значениями $a$.

Как бы мало ни было $h$, как бы велико ни было $a$, всегда можно взять $b$ достаточно малым, чтобы левая часть была положительной.

Существование интегралов площадей не изменяет этого заключения; в самом деле, интегралы эти записываются в виде

$$\begin{aligned}
\beta(x_2x_3'-x_3x_2')+\beta'(x_5x_6'-x_6x_5')&=a_1,\\
\beta(x_3x_1'-x_1x_3')+\beta'(x_6x_4'-x_4x_6')&=a_2,\\
\beta(x_1x_2'-x_2x_1')+\beta'(x_4x_5'-x_5x_4')&=a_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

В силу этих уравнений имеем

$$\frac{\beta}{2}(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)+\frac{\beta'}{2}(x_4'^2+x_5'^2+x_6'^2)>\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}, \tag{6}$$

где $I$ — момент инерции, которым обладала бы система, образованная двумя материальными точками, массы которых были бы $\beta$ и $\beta'$, а координаты относительно трех неподвижных осей — $x_1$, $x_2$, $x_3$; $x_4$, $x_5$, $x_6$; момент инерции, говорю я, который эта система имела бы относительно прямой, служащей мгновенной осью вращения твердого тела, которое совпадало бы в данный момент времени с этой системой и вращалось бы таким образом, что постоянные площадей были бы те же, что и для системы.

Тогда неравенство (2) должно быть заменено следующим:

$$V+h>\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}. \tag{2bis}$$

Но это неравенство, как и само неравенство (2), может быть удовлетворено сколь угодно большими значениями $x_i$; ибо для очень больших значений $x_i$ момент инерции $I$ очень велик, и, так как правая часть очень близка к нулю, мы снова возвращаемся к неравенству (2).

Следовательно, мы должны заключить, что рассуждения предыдущего пункта неприменимы.

Для того чтобы лучше отдать себе в этом отчет, вычислим интегральный инвариант

$$\int dx_1'dx_2' \ldots dx_6'dx_1dx_2 \ldots dx_6,$$

распространяя его на область, определенную следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} &h-\varepsilon<T-V<h+\varepsilon,\\ &a_1-\varepsilon_1<K_1<a_1+\varepsilon_1,\\ &a_2-\varepsilon_2<K_2<a_2+\varepsilon_2,\\ &a_3-\varepsilon_3<K_3<a_3+\varepsilon_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Величины $\varepsilon$ очень малы; $K_i$ суть левые части равенств (5), а $T$ — приведенная живая сила, т. е. левая часть (6).

Проинтегрируем сначала по $x_i'$; найдем

$$\frac{64\pi}{(\beta\beta')^{3/2}}\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\int\left(V+h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}\right)^{3/2}\frac{dx_1dx_2\ldots dx_6}{\sqrt{I_1I_2I_3}},$$

где $I_1$, $I_2$, $I_3$ представляют три главных момента инерции системы.

Я замечу мимоходом, что если выбрать оси координат, параллельные главным осям инерции, то согласно определению $I$ мы будем иметь

$$\frac{a_1^2}{I_1}+\frac{a_2^2}{I_2}+\frac{a_3^2}{I_3}=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{I}.$$

Мы видим, что интеграл, распространенный на все такие системы значений, что

$$V+h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}>0,$$

конечен, хотя знаменатель $\sqrt{I_1I_2I_3}$ становится бесконечным, когда одна из точек $x_1$, $x_2$, $x_3$ или $x_4$, $x_5$, $x_6$ бесконечно удаляется. В самом деле, в этом случае область интегрирования есть бесконечность третьего порядка, а знаменатель обращается в бесконечность лишь второго порядка [12].

302. Но хотя рассуждения предыдущих пунктов более неприменимы, тем не менее, из существования интегрального инварианта можно извлечь некоторые заключения, не лишенные интереса.

Итак, предположим, что расстояние $b$ между двумя из тел становится малым и что третье тело удаляется в бесконечность. Третье тело из-за его большого расстояния перестанет возмущать движение двух первых тел, которое станет весьма близким к эллиптическому.

Это третье тело притом будет описывать почти гиперболу вокруг центра тяжести двух первых тел.

Для того чтобы лучше пояснить мою мысль, я сначала возьму простой пример: я предполагаю, что тело описывает гиперболу относительно неподвижной точки. Гипербола состоит из двух ветвей; одна из этих ветвей является *аналитическим* продолжением другой, хотя для механика траектория состоит только из одной единственной ветви.

Тогда мы можем задаться вопросом, допускает ли траектория в случае задачи трех тел аналитическое продолжение и как его можно определить.

Координаты второго тела относительно первого суть $x_1$, $x_2$, $x_3$, координаты третьего тела относительно центра тяжести двух первых тел суть $x_4$, $x_5$, $x_6$, так что мы приходим к рассмотрению движения двух фиктивных точек, координаты которых относительно трех неподвижных осей суть $x_1$, $x_2$, $x_3$ для первого и $x_4$, $x_5$, $x_6$ — для второго.

Первая из этих точек будет описывать почти эллипс, вторая — почти гиперболу и будет двигаться, бесконечно удаляясь по одной из ветвей этой гиперболы. Для того чтобы получить искомое аналитическое продолжение, построим вторую ветвь этой гиперболы и присоединим ее к эллипсу, описанному первой точкой.

Рассмотрим теперь две частные траектории нашей системы. Для первой начальные условия движения будут таковы, что если $t$ положительно и очень велико, точка $x_4$, $x_5$, $x_6$ находится очень близко к первой ветви гиперболы, а точка $x_1$, $x_2$, $x_3$ — очень близко к эллипсу, так что расстояние этих двух точек как от гиперболы, так и от эллипса стремится к нулю, когда $t$ неограниченно возрастает.

Примем асимптоту гиперболы за ось $x_4$ и пусть $V$ — скорость точки, описывающей эту гиперболу для положительного и очень большого значения $t$. Тогда

$$x_4-Vt$$

будет стремиться к конечному и определенному пределу $X$, когда $t$ будет неограниченно возрастать.

Пусть также $n$ — среднее движение по эллипсу, а $l$ — средняя аномалия, тогда разность

$$l - nt$$

будет стремиться к конечному и определенному пределу $l_0$.

Если мы зададим эллипс и гиперболу и, следовательно, $V$ и $n$, если кроме того зададим $X$ и $l_0$, то начальные условия движения, соответствующего первой траектории, будут полностью определены.

Рассмотрим теперь вторую траекторию и предположим, что начальные условия движения таковы, что для отрицательного и очень большого $t$ точка $x_4$, $x_5$, $x_6$ будет очень близка ко второй ветви гиперболы, а точка $x_1$, $x_2$, $x_3$ — очень близка к эллипсу и что эти две точки приближаются к этим двум кривым, когда $t$ стремится к $-\infty$.

Разности

$$x_4 - Vt, \quad l - nt$$

стремятся к конечным и определенным пределам $X'$ и $l'_0$, когда $t$ стремится к бесконечности.

Начальные условия, соответствующие второй траектории, полностью определены, когда заданы эллипс, гипербола, $X'$ и $l'_0$.

*Если мы имеем*

$$X = X', \quad l_0 = l'_0,$$

*то обе траектории могут быть рассматриваемы как аналитическое продолжение одна другой.*

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции $X_i$, зависящие только от $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, удовлетворяют соотношению

$$\sum \frac{dX_i}{dx_i} = 0;$$

эти уравнения допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Допустим, что мы узнали каким-то образом, что точка $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ должна оставаться внутри некоторой области $V$, аналогичной области $V$, рассмотренной в предыдущих пунктах, но неограниченно простирающейся таким образом, что интеграл (2), распространенный на эту область, бесконечен. Заключения пунктов 297 и 298 не будут более применимы.

Однако заменим уравнения (1) следующими:

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{M} = X'_i, \tag{1bis}$$

где $M$ — любая заданная функция $x_1$, $x_2$, ... $x_n$.

Точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$, движение которой определяется уравнениями (1bis), будет описывать те же траектории, что и точка, движение которой определяется уравнениями (1). В самом деле, дифференциальные уравнения этих траекторий как в одном, так и в другом случае суть

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Однако если я называю $P$ точку, движение которой определено уравнениями (1), и $P'$ — точку, движение которой определено уравнениями (1bis), то мы видим, что эти две точки описывают одну и ту же траекторию, но по различным законам.

Если я назову $t$ момент времени, когда $P$ проходит через точку своей траектории, а $t'$ — момент, когда $P'$ проходит эту же самую точку, то эти два момента времени будут связаны соотношением

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{M}.$$

При этом мы имеем

$$\sum \frac{d(MX'_i)}{dx_i} = 0,$$

что означает, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt'} = X'_i \tag{1bis}$$

допускают интегральный инвариант

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \tag{2bis}$$

Допустим, что функция $M$ всегда положительна и что она стремится к нулю, когда точка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удаляется в бесконечность, *и притом достаточно быстро, чтобы интеграл* (2bis), *распространенный на область* $V$, *был конечен.*

Выводы п. 297 и следующих приложимы к уравнениям (1bis). Следовательно, уравнения (1bis) обладают устойчивостью по Пуассону.

Я уточняю мою мысль.

Мы имеем

$$t = \int_0^{t'} \frac{dt'}{M}. \tag{3}$$

Поскольку функция $M$ существенно положительна, $t$ будет возрастать вместе с $t'$; но, так как $M$ может обратиться в нуль, то может случиться, что интеграл в правой части (3) будет бесконечен.

Предположим, например, что $M$ обращается в нуль при $t' = T$; тогда $t$ будет бесконечным при

$$t' = T \text{ или } t' > T.$$

Рассмотрим траекторию точки $P'$; мы можем разделить ее на две части — первую $C$, которую $P'$ проходит от момента $t'=0$ до момента $t'=T$, вторую — $C'$, которую $P'$ проходит от момента $t'=T$ до $t'=\infty$.

Точка $P$ будет описывать ту же траекторию, что и $P'$, но она опишет только часть $C$, ибо она может достигнуть части $C'$ только по истечении бесконечного времени $t$.

Для механика траектория $P$ будет состоять, следовательно, только из $C$; для аналитика она состоит не только из $C$, но и из $C'$, являющейся ее *аналитическим продолжением*.

Рассмотрим точку $P_1$, положение которой определено следующим образом: точка $P_1$ будет занимать в момент $t_1$ то же положение, что и точка $P'$ в момент $t'$; что же касается $t_1$, оно будет определено равенством

$$t_1=\int\limits_{t'_0}^{t'}\frac{dt'}{M}\quad (\text{где } t'_0>T).$$

Движение точки $P_1$ будет происходить в соответствии с уравнениями (1), и эта точка опишет $C'$, так что можно рассматривать траектории точек $P$ и $P_1$ как аналитическое продолжение одна другой.

Предположим теперь, что точка $P$ в начальный момент времени лежит внутри некоторой области $U_0$. Если начальные условия движения не являются исключительными в смысле, данном этому слову в п. 296, то траектория точки $P$ и *ее последовательные аналитические продолжения* пересекут бесконечное число раз область $U_0$, какой бы малой она ни была. Однако может случиться, что точка $P$ никогда не войдет в эту область, потому что эта область пересекается не траекториями точки $P$ в собственном смысле, а их аналитическими продолжениями [13].

**303.** Это приложимо к задаче трех тел.

Выше мы видели, что необходимо рассмотреть интеграл

$$\int dx_1\ldots dx_6 dx'_1\ldots dx'_6,$$

который мы свели при этом к шестикратному интегралу

$$\int\left(V+h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2I}\right)^{3/2}\frac{dx_1dx_2\ldots dx_6}{\sqrt{I_1I_2I_3}}.$$

Но мы видели, что этот интеграл, взятый по области $V$, бесконечен, и это помешало нам заключить об устойчивости по Пуассону.

Запишем уравнения движения в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i,\qquad \frac{dx'_i}{dt}=Y_i,$$

где $X_i$ и $Y_i$ — функции от $x_i$ и $x'_i$.

Тогда пусть

$$M = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_6^2 + 1)^2},$$

и запишем новые уравнения

$$\frac{dx_i}{dt'} = \frac{X_i}{M}, \qquad \frac{dx'_i}{dt'} = \frac{Y_i}{M}.$$

Новые уравнения допускают в качестве интегрального инварианта

$$\int M dx_1 \ldots dx_6 dx'_1 \ldots dx'_6,$$

или же

$$\int \left(V + h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2I}\right)^{3/2} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_6}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}} M.$$

*Но этот интеграл конечен.*

Следовательно, если начальное положение системы таково, что точка $P$ пространства двенадцати измерений, координаты которой суть $x_1$, $x_2$, ... ..., $x_6$; $x'_1$, $x'_2$, ..., $x'_6$, в начальный момент времени лежит внутри некоторой области $U_0$, то траектория этой точки и ее аналитические продолжения [13], как мы их определили в конце п. 302, пересекут эту область $U_0$ бесконечное число раз, по крайней мере, если начальное положение системы не является исключительным в смысле, данном этому слову в п. 296.

304. На первый взгляд кажется, что это следствие может интересовать только аналитика и не имеет никакого физического смысла. Однако этот взгляд не совсем оправдан.

В самом деле, можно заключить, что если система не проходит вновь бесконечное число раз сколь угодно близко от своего первоначального положения, то интеграл

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{dt}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 + 1)^2}$$

будет конечен.

Это предложение верно, если оставить в стороне некоторые исключительные траектории, вероятность которых равна нулю в смысле, данном этому слову в п. 296.

Если этот интеграл конечен, то мы заключим, что промежуток времени, в течение которого периметр треугольника, составленного тремя телами, остается меньше заданного количества, всегда конечен.

## Глава XXVII

## ТЕОРИЯ ПОСЛЕДУЮЩИХ [14]

305. Представляя теорию интегральных инвариантов в слегка видоизмененной форме, мы можем вывести из нее еще ряд заключений, которые будут полезны в дальнейшем.

Начнем с изучения простого примера. Пусть дана точка, координаты которой в пространстве суть $x$, $y$ и $z$ и движение которой определяется уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=X, \quad \frac{dy}{dt}=Y, \quad \frac{dz}{dt}=Z. \tag{1}$$

Величины $X$, $Y$ и $Z$ суть заданные и однозначные функции от $x$, $y$, $z$; предположим сначала, что $X$ и $Y$ обращаются в нуль на всей оси $z$, так что

$$x=y=0$$

есть решение уравнений (1).

Далее положим

$$x=\rho\cos\omega, \quad y=\rho\sin\omega;$$

тогда уравнения (1) примут вид

$$\frac{d\rho}{dt}=R, \quad \frac{d\omega}{dt}=\Omega, \quad \frac{dz}{dt}=Z, \tag{2}$$

где $R$, $\Omega$ и $Z$ — функции от $\rho$, $\omega$, $z$, периодические с периодом $2\pi$ относительно $\omega$.

Мы условимся давать $\rho$ только положительные значения и сможем это легко сделать, поскольку $x=y=0$ есть решение.

Я предполагаю теперь, кроме того, что $\Omega$ никогда не может обратиться в нуль, оставаясь, например, положительной; тогда $\omega$ всегда будет возрастать вместе с $t$.

Вообразим, что мы проинтегрировали уравнения (2) и что их решение представлено в форме

$$\rho=f_1(\omega, a, b), \quad z=f_2(\omega, a, b).$$

Буквы $a$ и $b$ представляют постоянные интегрирования.

Пусть

$$\rho_0 = f_1(0,\ a,\ b), \qquad z_0 = f_2(0,\ a,\ b),$$
$$\rho_1 = f_1(2\pi,\ a,\ b), \qquad z_1 = f_2(2\pi,\ a,\ b).$$

Пусть $M_0$ — точка, координаты которой суть

$$x = \rho_0, \qquad y = 0, \qquad z = z_0,$$

а $M_1$ — точка с координатами

$$x = \rho_1, \qquad y = 0, \qquad z = z_1.$$

Эти две точки принадлежат полуплоскости $xz$, расположенной со стороны положительных $x$.

Будем называть точку $M_1$ *последующей* точки $M_0$.

Это название оправдано тем, что если рассмотреть семейство кривых, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1), и если провести через точку $M_0$ кривую этого семейства и продолжить ее до тех пор, пока она снова не встретит полуплоскость ($y=0$, $x > 0$), то это новое пересечение будет иметь место в $M_1$.

Если в этой полуплоскости построить любую фигуру $F_0$, то последующие различных точек $F_0$ образуют фигуру $F_1$, которую мы будем называть *последующей* $F_0$.

Ясно, что $\rho_1$ и $z_1$ — непрерывные функции от $\rho_0$ и $z_0$.

Следовательно, последующая непрерывной кривой будет непрерывной кривой, последующая замкнутой кривой будет замкнутой кривой, последующая $n$-связной области будет $n$-связной областью.

Предположим теперь, что три функции $X$, $Y$ и $Z$ связаны соотношением

$$\frac{dMX}{dx} + \frac{dMY}{dy} + \frac{dMZ}{dz} = 0,$$

где $M$ — положительная и однозначная функция от $x$, $y$, $z$.

Тогда уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int Mdxdydz,$$

а уравнения (2) допускают

$$\int M\rho d\rho d\omega dz.$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{R}{\Omega}, \qquad \frac{dz}{d\omega} = \frac{Z}{\Omega}, \qquad \frac{d\omega}{d\omega} = 1, \tag{3}$$

где $\omega$ рассматривается как независимая переменная.

Очевидно, они допускают интегральный инвариант

$$\int M\Omega\rho d\rho d\omega dz \tag{4}$$

(см. п. 253).

Так как $M$, $\Omega$ и $\rho$ предполагались выше существенно положительными, то это — положительный интегральный инвариант.

Пусть $F_0$ — любая область, расположенная в полуплоскости

$$(y=0, \quad x>0),$$

а $F_1$ — ее последующая.

Пусть $J_0$ есть интеграл

$$\int M\Omega\rho d\rho dz, \tag{5}$$

распространенный на плоскую область $F_0$, а $J_1$ — тот же самый интеграл, распространенный на плоскую область $F_1$.

Пусть тогда $\Phi_0$ — объем, порожденный областью $F_0$ при ее повороте вокруг оси $z$ на бесконечно малый угол $\varepsilon$; интеграл (4), распространенный на $\Phi_1$, будет равен $J_1\varepsilon$.

Так как интегральный инвариант (4) должен иметь одно и то же значение для $\Phi_0$ и для $\Phi_1$, то должно быть

$$J_0 = J_1.$$

Таким образом, *интеграл* (5) *имеет одно и то же значение для любой области и ее последующей.*

Это — новая форма фундаментального свойства интегральных инвариантов.

**306.** Итак, пусть дана замкнутая кривая $C_0$, лежащая в полуплоскости ($y=0$, $x>0$) и ограничивающая область $F_0$. Пусть $C_1$ — последующая кривой $C_0$, она будет также замкнутой кривой, ограничивающей область $F_1$, а эта область $F_1$ будет последующей $F_0$.

Если интеграл (5), распространенный на $F_0$ и на $F_1$, имеет значения $J_0$ и $J_1$, то

$$J_0 = J_1$$

и отсюда следует, что $F_0$ не может быть частью $F_1$, а $F_1$ — частью $F_0$.

Можно сделать четыре предположения об относительном расположении обеих замкнутых кривых $C_0$ и $C_1$:

1) $C_1$ лежит внутри $C_0$;
2) $C_0$ лежит внутри $C_1$;
3) обе кривые лежат вне друг друга;
4) обе кривые взаимно пересекаются.

Уравнение $J_0=J_1$ исключает две первые из этих гипотез.

Если по какой-либо причине исключается также и третье предположение, то наверняка обе кривые пересекаются.

Предположим, например, что $X$, $Y$, $Z$ зависят от произвольного параметра $\mu$ и что для $\mu=0$ кривая $C_0$ будет своей собственной последующей; тогда для очень малых значений $\mu$ кривая $C_0$ будет очень мало отличаться от $C_1$; следовательно, не может случиться, чтобы обе кривые $C_0$ и $C_1$ лежали вне друг друга; они должны пересекаться.

## Инвариантные кривые

307. Я назову *инвариантной кривой* всякую кривую, которая будет своей собственной последующей.

Легко построить инвариантные кривые; пусть, в самом деле, $M_0$ — любая точка полуплоскости, $M_1$ — ее последующая; соединим $M_0$ с $M_1$ любой дугой кривой $C_0$; пусть $C_1$ — последующая дуги $C_0$, $C_2$ — последующая $C_1$ и так далее. Множество дуг кривых $C_0$, $C_1$, $C_2$, . . ., очевидно, составит инвариантную кривую. Однако мы должны также рассмотреть инвариантные кривые, происхождение которых будет более естественным.

Допустим, что уравнения (1) допускают периодическое решение. Пусть уравнения

$$x=\varphi_1(t), \qquad y=\varphi_2(t), \qquad z=\varphi_3(t) \tag{6}$$

представляют это периодическое решение, так что функции $\varphi_i$ периодичны по $t$ с периодом $T$.

Я предполагаю, что когда $t$ увеличивается на $T$, $\omega$ увеличивается на $2\pi$.

Уравнения (6) представляют кривую; пусть $M_0$ — точка, в которой эта кривая пересекает полуплоскость; эта точка $M_0$, очевидно, будет своей собственной последующей.

Предположим теперь, что существуют асимптотические решения, очень близкие к периодическому решению (6). Пусть уравнения

$$x=\Phi_1(t), \qquad y=\Phi_2(t), \qquad z=\Phi_3(t) \tag{7}$$

представляют эти решения.

Функции $\Phi_i$ будут разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$, причем коэффициенты будут периодическими функциями от $t$. В этом выражении $\alpha$ — характеристический показатель, $A$ — постоянная интегрирования.

В уравнениях (7) три координаты $x$, $y$, $z$ выражены, следовательно, в функции двух параметров $A$ и $t$; таким образом, эти уравнения представляют поверхность, которую можно назвать *асимптотической поверхностью*. Эта асимптотическая поверхность пройдет через кривую (6), потому что уравнения (7) приводятся к уравнениям (6), если в них положить $A=0$.

Асимптотическая поверхность пересечет полуплоскость вдоль некоторой кривой, проходящей через точку $M_0$ и, очевидно, являющейся инвариантной кривой.

308. Рассмотрим инвариантную кривую $K$. Я предполагаю, что $X$, $Y$, $Z$ зависят от параметра $\mu$ так же, как и кривая $K$.

Я предполагаю, что при $\mu=0$ кривая $K$ замкнута, но что она перестает быть замкнутой для малых значений $\mu$.

Пусть $A_0$ — точка кривой $K$. Положение этой точки будет зависеть от $\mu$; при $\mu=0$ кривая $K$ замкнута, так что после обхода этой кривой, начиная с $A_0$, мы возвращаемся в точку $A_0$; если $\mu$ *очень мало́*, этого более не произойдет, но мы вновь пройдем *очень близко* от $A_0$; следовательно, мы будем иметь на кривой $K$ дугу кривой, отличной от той, на которой лежит $A_0$, но которая пройдет очень близко от $A_0$. Пусть $B_0$ — точка этой дуги кривой, которая наиболее близка к $A_0$.

Я соединяю $A_0$ с $B_0$.

Пусть $A_1$ и $B_1$ — последующие $A_0$ и $B_0$; эти две точки будут лежать на $K$; пусть $A_1B_1$ — последующая кривая малого отрезка прямой $A_0B_0$.

Мы должны будем рассмотреть замкнутую кривую $C_0$, которая состоит из дуги $A_0MB_0$ кривой $K$, заключенной между $A_0$ и $B_0$, и малого отрезка прямой $A_0B_0$. Какова будет ее последующая?

Предположим для определенности, что четыре точки $A_1$, $A_0$, $B_1$, $B_0$ следуют на $K$ в порядке $A_1A_0B_1B_0$. Последующая $C_1$ кривой $C_0$ будет

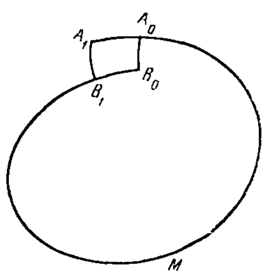


Рис. 1

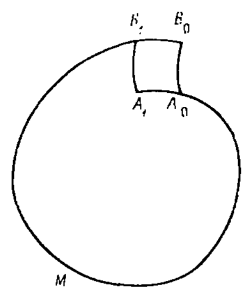


Рис. 2

состоять из дуги $A_1MB_1$ кривой $K$ и малой дуги $A_1B_1$ — последующей малого отрезка прямой $A_0B_0$.

Можно сделать несколько предположений.

1. *Малый криволинейный четырехугольник* $A_0B_0A_1B_1$ — *выпуклый*; я хочу сказать, что ни одна из его криволинейных сторон не имеет двойной точки и что единственными точками, общими для двух сторон, являются вершины. При этом предположении кривая представится в том виде, как это указано на одном из следующих двух рисунков (рис. 1 и 2).

Эта гипотеза должна быть отброшена, ибо очевидно, что интеграл $J$ в случае рис. 1 больше для $C_1$, чем для $C_0$, и меньше в случае рис. 2.

2. *Дуга* $A_0A_1$ *или* $A_1B_1$ *имеет двойную* точку. Если бы инвариантная кривая $K$ имела двойную точку, то мы должны были бы иметь двойную точку на дуге, соединяющей любую точку кривой с ее первой последующей; мы *предположим*, что это не так; и, в самом деле, это обстоятельство не представится ни в одном из приложений, которые я имею в виду; в частности, оно не представится в случае инвариантной кривой, порожденной *асимптотической поверхностью*, как я это объяснил в конце предыдущего пункта. В самом деле, легко установить, что асимптотическая поверхность не содержит кривых, состоящих из двойных точек, если ограничиться частью этой поверхности, соответствующей малым значениям величин, которые я назвал выше $Ae^{\alpha t}$.

С другой стороны, прямая $A_0B_0$ не имеет двойной точки, и то же самое должно быть на ее последующей $A_1B_1$. В итоге мы можем предположить, что четыре стороны нашего четырехугольника не имеют двойной точки.

3. *Дуга* $A_0A_1$ *пересекает дугу* $B_0B_1$. (Этот случай содержит как частный случай тот, когда кривая $K$ замкнута.) Тогда наши кривые имеют вид, представленный на рис. 3.

4. *Дуга* $A_0B_0$ *пересекает свою последующую* $A_1B_1$. В этом случае наши кривые будут иметь вид, представленный на рис. 4.

Имеются случаи, когда это предположение следует отбросить. Предположим, например, что $X$, $Y$, $Z$ зависят от параметра $\mu$, что при $\mu=0$ кривая $K$ замкнута и что каждая из ее точек является своей собственной последующей, так что при $\mu=0$ четыре вершины четырехугольника совпадают.

Тогда четыре расстояния $A_0B_0$, $A_1B_1$, $A_1A_0$, $B_1B_0$ будут бесконечно малыми, если $\mu$ является основной бесконечно малой. Предположим, что $A_1A_0$ — бесконечно малая порядка $p$, $A_0B_0$ — бесконечно малая порядка $q$ и что $q$ больше $p$.

Так как $A_1B_1$ — последующая $A_0B_0$, то длина дуги $A_1B_1$ должна быть порядка $q$. Пусть тогда $C$ — одна из точек пересечения дуги $A_0B_0$. В треугольнике, у которого две стороны — прямые $A_1A_0$ и $A_0C$, а третьей стороной является дуга кривой $A_1C$, составляющая часть $A_1B_1$, сторона $A_1C$ больше разности двух других; следовательно, она должна быть порядка $p$, а мы видели, что она должна быть порядка $q$.

Следовательно, это предположение должно быть отброшено.

5. *Две смежные стороны четырехугольника пересекаются, например* $A_1A_0$ и $A_1B_1$. В этом случае необходимо, чтобы дуга $A_0B_0$, являющаяся предшествующей $A_1B_1$, сама пересекала $K$; если $A_0'$ — точка пересечения $A_0B_0$ с $K$, а $A_1'$ — точка пересечения $A_1B_1$ с дугой $A_0A_1$, то $A_1'$ будет последующей $A_0'$, и мы получим следующую фигуру (рис. 5).

Очевидно, что $A_0'$ и $A_1'$ могут играть ту же самую роль, что и $A_0$ и $A_1$, и что мы приходим снова к первому случаю.

Следовательно, это новое предположение должно быть отброшено. В итоге две дуги $A_0A_1$ и $B_0B_1$ будут пересекаться всякий раз, когда по той или иной причине предположения 2 и 4 должны быть отброшены.

Остается изучить случай, когда точки $A_1$, $A_0$, $B_1$, $B_0$ следуют на кривой $K$ в другом порядке. Порядки $B_1B_0A_1A_0$, $B_0B_1A_0A_1$, $A_0A_1B_0B_1$ не отличаются существенным образом от того, который мы только что изучили.

Такие порядки, как $A_1B_1B_0A_0$, $A_1B_0B_1A_0$, $A_1B_0A_0B_1$, . . ., не представятся в последующих приложениях; в самом деле, мы всегда будем предполагать, что если $\mu$ — очень мало́, то расстояния $A_0A_1$ и $B_0B_1$ будут очень малы по сравнению с длиной дуг $A_0MB_0$ или $A_1MB_1$.

Остается порядок $A_1A_0B_0B_1$ или эквивалентные порядки; мы также не будем говорить о них; ясно, что если будет иметь место этот порядок, то на дуге $A_0MB_0$ будет существовать точка, являющаяся своей собственной последующей.

**309.** Предположим, например, что уравнения (1) допускают периодические решения

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t) \tag{6}$$

и асимптотические решения

$$x = \Phi_1(t), \qquad y = \Phi_2(t), \qquad z = \Phi_3(t). \tag{7}$$

Предположим, что уравнения (1) зависят от очень малого параметра $\mu$ и что $X$, $Y$, $Z$ разложимы по степеням этого параметра.

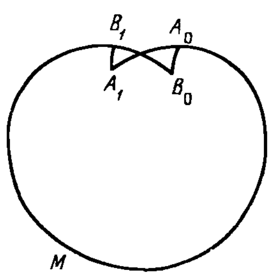


Рис. 3

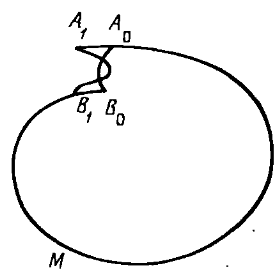


Рис. 4

Предположим, что при $\mu=0$ асимптотические решения (7) приводятся к периодическим решениям. Вот каким образом это может произойти. Мы сказали, что $\Phi_i$ разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$, причем коэффициенты будут периодическими функциями от $t$. Но показатель $\alpha$ зависит от $\mu$; предположим, что он обращается в нуль при $\mu=0$; тогда при $\mu=0$ функции $\Phi_i$ станут периодическими функциями от $t$, а решения (7) сведутся к периодическим решениям.

Асимптотическая поверхность пересечет полуплоскость по некоторой кривой $C_0$, проходящей через точку $M_0$ — точку пересечения полуплоскости с пространственной кривой (6).

Кривая $C_0$, очевидно, инвариантна, как я сказал в конце п. 307; при $\mu=0$ каждая из точек $C_0$ является своей собственной последующей.

Кроме того, я предположу, что при $\mu=0$ кривая $C_0$ замкнута.

Обратимся к главе VII тома I; мы видели в п. 107 и следующих, что в случае динамики характеристические показатели разложимы по степеням $\sqrt{\mu}$ и притом попарно равны и противоположны по знаку. Мы предположим, что имеет место этот случай.

Тогда мы имеем в действительности две асимптотические поверхности, соответствующие двум равным и противоположным по знаку показателям $\alpha$ и $-\alpha$; следовательно, мы имеем две кривые $C_0$, которые пересекутся в точке $M_0$.

Будем различать четыре ветви кривой

$$C_0', \; C_0'', \; C_1', \; C_1'',$$

сходящиеся в точке $M_0$; $C_0'$ и $C_0''$ будут соответствовать показателю $\alpha$, $C_1'$ и $C_1''$ — показателю $-\alpha$.

Эти различные ветви кривой представлены на рис. 6. Ветвью $C_0'$ является ветвь $M_0P_0P_1A_0A_1$, ветвью $C_0''$ — ветвь $M_0E_0E_1$; ветвью $C_1'$ является ветвь $M_0Q_1Q_0$ и ветвью $C_1''$ — ветвь $M_0R_1R_0B_1B_0$.

Эти четыре ветви кривой, очевидно, инвариантны.

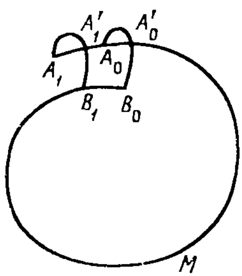


Рис. 5

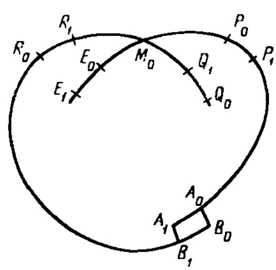


Рис. 6

Теперь, при $\mu=0$, $C_0'$ сливается с $C_1'$, $C_0''$ — с $C_1''$, и (если мы предположим, что при $\mu=0$ кривая $C_0$, которую мы назовем тогда $C_0^0$, замкнута) эти четыре ветви кривой совпадут с замкнутой кривой $C_0^0$.

Отсюда можно заключить, что для очень малого $\mu$ эти ветви кривой будут мало отличаться друг от друга; что $C_0'$ будет мало отличаться от $C_1'$; $C_0''$ — от $C_1''$ и что если достаточно продолжить кривую $C_0'$, то она пройдет очень близко от $C_1''$, если и ее достаточно продолжить.

Я отметил на рисунке различные точки этих ветвей кривой и их последующие. Так, $A_1$, $B_1$, $E_1$, $P_1$, $Q_1$, $R_1$ суть соответственно последующие точек $A_0$, $B_0$, $E_0$, $P_0$, $Q_0$, $R_0$.

Мы отметим сначала, что точки $A_1$, $A_0$, $B_1$, $B_0$ следуют одна за другой (как мы предположили в начале п. 308) в порядке $A_1A_0B_1B_0$, если обходить инвариантную кривую, образованную двумя ветвями $C_0'$ и $C_1''$, от $A_1$ к $B_0$.

Эта инвариантная кривая не замкнута, но она мало отличается от замкнутой кривой $C_0^0$.

Рассмотрим пять предположений п. 308 относительно этой инвариантной кривой. Первое предположение, как мы видели, всегда следует отбрасывать. Второе также не будет иметь места. В самом деле, оно могло бы осуществиться лишь в том случае, если бы асимптотическая поверхность (7) имела линию, состоящую из двойных точек.

Мы сказали, что $\Phi_i$ разложимы по степеням $Ae^{\alpha t}$; итак, пусть

$$\Phi_i = \Phi_i^0 + Ae^{\alpha t}\Phi_i^1 + A^2e^{2\alpha t}\Phi_i^2 + \ldots .$$

Если бы наша поверхность имела линию двойных точек, то эта линия должна была бы удовлетворять уравнениям (1); действительно, асимптотическая поверхность порождена бесконечным числом линий, удовлетворяющих этим уравнениям, так что если два куска этой поверхности пересекаются, то пересечение не может быть не чем иным, как одной из этих линий.

Так как $\Phi_i$ зависит одновременно от времени $t$ и от параметра $A$, то мы подчеркиваем это, записывая

$$\Phi_i = \Phi_i(t, A).$$

Если бы существовала линия двойных точек, то мы должны были бы иметь три тождества:

$$\Phi_i(t, A) = \Phi_i(t', B) \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где $A$ и $B$ — две постоянные и где $t'$ — функция от $t$; эти три тождества должны существовать, каково бы ни было $t$.

Дифференцируя, будем иметь

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi_i}{dt'}\frac{dt'}{dt}.$$

Но в силу уравнений (1) мы будем иметь

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = X\,[\Phi_1(t, A),\ \Phi_2(t, A),\ \Phi_3(t, A)]$$

и также

$$\frac{d\Phi_1}{dt'} = X\,[\Phi_1(t', B),\ \Phi_2(t', B),\ \Phi_3(t', B)],$$

откуда

$$\frac{d\Phi_i}{dt}=\frac{d\Phi_i}{dt'}, \qquad \frac{dt'}{dt}=1,$$

откуда, наконец,

$$t'=t+h,$$

где $h$ — постоянная.

Отсюда мы выводим, что

$$\Phi_i^0(t)+Ae^{\alpha t}\Phi_i^1(t)+A^2e^{2\alpha t}\Phi_i^2(t)+\ldots=\Phi_i^0(t+h)+Ce^{\alpha t}\Phi_i^1(t+h)+\ldots,$$

где

$$C=Be^{\alpha h}.$$

Это тождество должно быть справедливым при $t=-\infty$, откуда

$$Ae^{\alpha t}=Ce^{\alpha t}=0$$

и

$$\Phi_i^0(t)=\Phi_i^0(t+h),$$

откуда $h=0$ и

$$\Phi_i^0(t)+Ae^{\alpha t}\Phi_i^1(t)+\ldots=\Phi_i^0(t)+Ce^{\alpha t}\Phi_i^1(t)+\ldots,$$

или

$$A\Phi_i^1(t)+A^2e^{\alpha t}\Phi_i^2(t)+\ldots=C\Phi_i^1(t)+C^2e^{\alpha t}\Phi_i^2(t)+\ldots,$$

или, полагая снова $t=-\infty$,

$$A=C=B.$$

Если оба значения $A$ и $B$ равны, то линии двойных точек не существует, что и требовалось доказать.

Третье предположение — то, которое следует принять.

Перейдем к четвертому; для того чтобы посмотреть, должно ли оно быть отброшено, необходимо постараться дать себе отчет о порядке величины расстояний $A_1A_0$ и $A_0B_0$; это мы и сделаем в различных приложениях, которые последуют в дальнейшем.

Наконец, пятое предположение всегда сводится к первому, как мы это видели.

## Обобщение предыдущих результатов

**310.** Выше мы сделали об уравнениях (1) очень частные предположения, но не все они одинаково необходимы.

В самом деле, рассмотрим *односвязную* область $D$, составляющую часть полуплоскости ($y=0$, $x>0$), и предположим, что мы каким-то образом узнали, что если точка ($x$, $y$, $z$) находится в начальный момент времени в точке $M_0$ этой области, то $\omega$ переходит от 0 к $2\pi$, постоянно возрастая, когда $t$ возрастает от 0 до $t_0$, так что кривая, удовлетворяющая уравнениям (1) и проходящая через точку $M_0$, при ее продолжении от этой точки $M_0$ до ее нового пересечения с полуплоскостью никогда не будет касаться плоскости, проходящей через ось $z$.

Тогда мы сможем определить, как и в п. 305, последующую точки $M_0$, и ясно, что все предыдущее будет снова применимо к фигурам, находящимся внутри области $D$.

Кривые, удовлетворяющие уравнениям (1) и пересекающие полуплоскость вне области $D$, не обязаны подчиняться требованию не соприкасаться с плоскостью, проходящей через ось $z$. Также не обязательно, чтобы $x=y=0$ было решением уравнений (1).

Тогда если $C_0$ — замкнутая кривая внутри $D$ и если $C_1$ — ее последующая, то обе кривые будут внешними относительно друг друга или пересекаться.

Результаты п. 308 будут равным образом применимы к инвариантным кривым, не выходящим из области $D$; и если даже инвариантная кривая выходит из области $D$ при ее достаточном продолжении, то результаты будут снова приложимы к той части этой кривой, которая лежит внутри этой области.

**311.** Рассмотрим теперь вместо плоской области $D$ односвязную криволинейную область $S$. Проведем через точку $M_0$ этой криволинейной области кривую $\gamma$, удовлетворяющую уравнениям (1), и продолжим эту кривую до тех пор, пока она снова не пересечет $S$; новая точка пересечения $M_1$ может быть опять названа последующей точки $M_0$.

Если мы рассмотрим две точки $M_0$ и $M'_0$, очень близкие друг к другу, то их последующие будут, вообще, очень близки друг к другу; исключение будет иметь место, если точка $M_1$ окажется на границе $S$ или если кривая $\gamma$ касается поверхности в точке $M_1$ или в точке $M_0$. Кроме этих исключительных случаев, координаты $M_1$ являются аналитическими функциями координат точки $M_0$.

Чтобы избежать этих исключительных случаев, я рассмотрю область $D$, составляющую часть $S$, и такую, что кривая $\gamma$, выходящая из точки $M_0$ внутри $D$, снова пересекает $S$ в точке $M_1$, которая никогда не попадает на границу $S$; такую также, что кривая $\gamma$ не касается $S$ ни в точке $M_0$, ни в $M_1$. Наконец, я предположу, что область $D$ односвязна.

Примем частную систему координат, которую я назову, например, $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ и о которой я предположу только следующее.

1. Когда $|\xi|$ и $|\eta|$ будут меньше 1, прямоугольные координаты $x$, $y$ и $z$ будут аналитическими и однозначными функциями от $\xi$, $\eta$ и $\zeta$, периодическими с периодом $2\pi$ относительно $\zeta$.

2. Одной точке $(x, y, z)$ пространства не может соответствовать более одной системы значений $\xi$, $\eta$, $\zeta$, такой, что,

$$|\xi|<1, \quad |\eta|<1, \quad 0<\zeta<2\pi. \tag{$\lambda$}$$

3. При $\zeta=0$ или $\zeta=2\pi$ и изменении $\xi$ и $\eta$ от $-1$ до $+1$ точка $x$, $y$, $z$ описывает поверхность $S$ или часть этой поверхности, заключающую в себе область $D$.

4. Из условий (1) и (2) вытекает, что функциональный определитель $\Delta$ от $\xi$, $\eta$, $\zeta$ относительно $x$, $y$, $z$ никогда не обращается ни в бесконечность, ни в нуль, когда выполняются неравенства $(\lambda)$.

5. Можно преобразовать уравнения (1), приведя их к виду

$$\frac{d\xi}{dt}=\Xi, \quad \frac{d\eta}{dt}=H, \quad \frac{d\zeta}{dt}=Z^*. \tag{1bis}$$

Я предположу, что $Z^*$ остается положительным для

$$|\xi|<1, \quad |\eta|<1, \quad \zeta=0.$$

Уравнения (1bis) будут допускать интегральный инвариант

$$\int \frac{M}{\Delta}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

а уравнения

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\frac{\Xi}{Z^*}, \quad \frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{H}{Z^*}, \quad \frac{d\zeta}{d\zeta}=1 \tag{3bis}$$

будут допускать интегральный инвариант

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Пусть $F_0$ — какая-нибудь фигура, составляющая часть $D$, и $F_1$ — ее последующая; предположим, что различные точки $F_0$ и $F_1$ смещаются таким образом, что $\xi$ и $\eta$ остаются постоянными и что $\zeta$ возрастает от 0 до $\varepsilon$, где $\varepsilon$ — очень малó; фигура $F_0$ породит объем $\Phi_0$, а фигура $F_1$ — объем $\Phi_1$; интеграл

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\varepsilon\int \frac{MZ^*}{\Delta}\,d\xi\,d\eta$$

будет иметь одно и то же значение для $\Phi_0$ и для $\Phi_1$; следовательно, двойной интеграл

$$\int \frac{MZ^*}{\Delta}\,d\xi\,d\eta,$$

аналогичный интегралу (5) из п. 305, будет иметь одно и то же значение для $F_0$ и $F_1$. Кроме того, он существенно положителен.

Отсюда вытекает, что результаты п. 306 применимы к замкнутым кривым $C_0$, лежащим внутри $D$, и что результаты п. 308 приложимы к инвариантным кривым $K$ или, по крайней мере, к части этих кривых, лежащих внутри $D$.

Даже если инвариантная кривая покидает область $D$ при достаточном продолжении, результаты будут приложимы к части этой кривой, лежащей внутри этой области.

## Приложение к уравнениям динамики

312. Пусть $F$ — функция четырех переменных $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$; составим канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Я предположу, как я это обычно делаю, что:

1) $F$ — периодическая функция от $y_1$ и $y_2$;

2) $F$ зависит от параметра $\mu$ и разложима по степеням этого параметра в виде

$$F=F_0+\mu F_1+\mu^2 F_2+\ldots;$$

3) $F_0$ — функция только от $x_1$ и $x_2$.

При этих условиях мы будем иметь интеграл

$$F=C, \tag{2}$$

где $C$ — постоянная.

Установив это, дадим $C$ значение, определенное раз навсегда, и пусть $M$ — подвижная точка, прямоугольные координаты которой суть

$$[1+\varphi(x_1)\cos y_1]\cos y_2, \quad [1+\varphi(x_1)\cos y_1]\sin y_2, \quad \varphi(x_1)\sin y_1.$$

Функция $\varphi(x_1)$ — функция от $x_1$, которую я в дальнейшем определю более точно.

Предположим сначала, что $F$, которое будет зависеть каким-то образом от $x_2$, разложимо по возрастающим степеням $x_1\cos y_1$ и $x_1\sin y_1$. Отсюда следует, что при $x_1=0$ функция $F$ не будет зависеть более от $y_1$ и, с другой стороны, что функция $F$ не будет изменяться при замене $x_1$ на $-x_1$ и $y_1$ на $y_1+\pi$. Таким образом, мы предположим, что $\varphi(x_1)$ — *нечетная* функция от $x_1$, которая возрастает от 0 до 1, когда $x_1$ растет от 0 до $+\infty$; например, можно взять

$$\varphi(x_1)=\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}.$$

Если принять это предположение, точка $M$ всегда будет находиться внутри тора радиуса 1, касающегося оси $z$.

Каждой точке $M$ внутри этого тора будет соответствовать бесконечное число систем значений $x_1$, $y_1$ и $y_2$; однако эти системы не будут существенно различаться между собой, поскольку они переходят друг в друга при увеличении $y_1$ или $y_2$ на кратное $2\pi$ или при замене $x_1$ на $-x_1$ и $y_1$ на $y_1+\pi$.

Если задать $x_1$, $y_1$ и $y_2$, то $x_2$ получится из них при помощи уравнения (2). Предположим, что переменные $x$ и $y$ меняются согласно уравнениям (1); тогда соответствующая точка $M$ опишет некоторую кривую, которую я назову *траекторией*.

Через каждую точку внутри тора проходит одна и только одна траектория.

Легко видеть, каков вид этих траекторий при $\mu=0$.

При $\mu=0$ дифференциальные уравнения сводятся к следующим:

$$\frac{dx_i}{dt}=0, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF_0}{dx_i}.$$

Следовательно, $x_i$ — постоянные, что показывает, что наши траектории расположены на торах и что $y_i$ — линейные функции времени; ибо производная

$$-\frac{dF_0}{dx_i}=n_i,$$

зависящая только от $x_i$, есть постоянная.

Если $n_1$ и $n_2$ — соизмеримы, то траектории суть замкнутые кривые, они, наоборот, не замкнуты, если эти величины несоизмеримы.

Пусть $m_1$, $m_2$, $p_1$, $p_2$ — четыре таких целых числа, что

$$m_1p_2-m_2p_1=1;$$

положим

$$y'_1=m_1y_1+m_2y_2,$$
$$y'_2=p_1y_1+p_2y_2,$$
$$x'_1=p_2x_1-p_1x_2,$$
$$x'_2=-m_2x_1+m_1x_2.$$

Тождество

$$x'_1y'_1+x'_2y'_2=x_1y_1+x_2y_2$$

показывает, что при переходе от переменных $x_i$, $y_i$ к переменным $x'_i$, $y'_i$ мы не изменяем канонической формы уравнений.

Предположим, что $n_2$ не обращается в нуль, когда $x_1$ остается меньше некоторого предела $a$. Тогда $dy_2/dt$ всегда будет сохранять один и тот же знак, и мы будем иметь, например,

$$\frac{dy_2}{dt}>0.$$

Это неравенство, верное при $\mu=0$, будет верным также при малых значениях $\mu$.

В таком случае соотношения

$$y_2=0, \qquad |x_1|<a-\varepsilon$$

определят некоторую плоскую область $D$, которая притом будет иметь форму круга.

Тогда траектории, выходящие из точки этой области, никогда не будут касаться плоскости, проходящей через ось $z$, по крайней мере, до нового пересечения с полуплоскостью $y_2=0$.

Следовательно, наша область сможет играть роль области $D$ из п. 310.

Уравнения (1) допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2,$$

откуда мы выводим следующий интегральный инвариант при помощи интеграла $F=\text{const}$:

$$J=-\int \frac{dx_1 dy_1 dy_2}{\frac{dF}{dx_2}}.$$

Но производная $dF/dx_2$ равна $-dy_2/dt$ и, следовательно, отрицательна. В таком случае инвариант $J$ является положительным инвариантом.

Результаты пунктов 306 и 308 применимы, следовательно, к кривым, проведенным в области $D$.

При этих предположениях пусть $b$ — значение $x_1$, меньшее $a-\varepsilon$, и такое, что соответствующие значения $n_1$ и $n_2$ удовлетворяют соотношению

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0,$$

где $m_1$ и $m_2$ — два целых взаимно простых числа.

Кривая

$$x_1=b,$$

являющаяся окружностью, будет инвариантной кривой при $\mu=0$.

Предполагая опять $\mu=0$, получим для траекторий, выходящих из различных точек этой окружности, общее уравнение

$$y_1=n_1 t+\text{const}, \quad y_2=n_2 t+\text{const},$$

откуда

$$y_1=\frac{n_1}{n_2} y_2+\text{const}.$$

Для того чтобы получить последовательные последующие заданной точки, достаточно положить последовательно

$$y_2=0, \quad y_2=2\pi, \quad y_2=4\pi, \ \ldots, \ y_2=2k\pi.$$

Чтобы перейти от точки к ее последующей, достаточно, следовательно, увеличить $y_1$ на

$$\frac{2\pi n_1}{n_2}=-\frac{2\pi m_2}{m_1},$$

откуда следует, что все точки инвариантной окружности $x_1=b$ совпадут с их $m_1$-й последующей.

Эта точка и ее $m_1-1$ первых последующих распределены на этой окружности в круговом порядке, который легко восстановить, зная два целых числа $m_1$ и $m_2$; я назову этот порядок $\Omega$.

Не будем предполагать более, что $\mu=0$; уравнения (1), согласно главе III, снова будут допускать периодические решения, мало отличающиеся от решений

$$x_1=b, \quad y_1=n_1t+\text{const}, \quad y_2=n_2t+\text{const}.$$

Они допускают, по крайней мере, два таких решения, из которых одно неустойчиво, а другое устойчиво. Каждому из этих периодических решений будет соответствовать замкнутая траектория; я рассматриваю одну из этих траекторий, которую обозначаю $T$ и которую буду считать соответствующей неустойчивому решению, с тем, чтобы через $T$ проходили две асимптотические поверхности.

Пусть $M_0$ — точка, в которой эта траектория пересекает полуплоскость $y_2=0$, $M_1$, $M_2$, . . . — ее последовательные последующие (рис. 7). Точка $M_0$ совпадет со своей $m_1$-й последующей $M_{m_1}$.

Я соединяю точку $M_k$ с центром окружности $x_1=b$; проведенный таким образом радиус пересекает окружность в точке $M'_k$, очень близкой к $M_k$.

Различные точки $M'_k$ будут следовать на окружности в круговом порядке $\Omega$.

Я сделал рисунок, предполагая для определенности, что $m_1=5$, $m_2=2$. Замкнутая траектория $T$ пересекает полуплоскость в пяти точках $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$. Через эту траекторию проходят две пересекающиеся асимптотические поверхности.

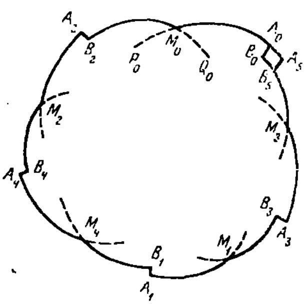


Рис. 7

Пересечение этих асимптотических поверхностей с полуплоскостью будет состоять из различных кривых; мы будем иметь две кривые, пересекающиеся в $M_0$, две — в $M_1$, две — в $M_2$, две — в $M_3$, две — в $M_4$. Все эти кривые представлены на рисунке.

Рассмотрим, в частности, две кривые, проходящие через $M_0$; будем различать четыре ветви кривой, а именно, $M_0A_0$, $M_0B_2$, $M_0P_0$, $M_0Q_0$; две первые представлены сплошной линией, две последние — пунктиром; первая и третья, так же как вторая и четвертая, лежат на продолжении друг друга.

Аналогично, в каждую из точек $M$ входят четыре ветви кривой, из которых две представлены сплошной линией, а две — пунктиром, и которые лежат попарно на продолжении друг друга.

Пусть $A_0$ — точка ветви $M_0B_0$; проведем через $A_0$ радиус, идущий к центру окружности $x_1=b$, и продолжим этот радиус до пересечения его в точке

$B_0$ с кривой, изображенной сплошной линией $M_3B_0$. Так как $\mu$ очень малó и все наши кривые мало отличаются от окружности $x_1=b$, отрезок $A_0B_0$ будет очень малым.

Тогда мы видим, что $M_1A_1$, $M_2A_2$, $M_3A_3$, $M_4A_4$, $M_0A_5$ являются последовательными последующими $M_0A_0$; что $M_4B_1$, $M_0B_2$, $M_1B_3$, $M_2B_4$, $M_3B_5$ есть последующие $M_3B_0$ и, наконец, что $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_5B_5$ — последующие $A_0B_0$.

Дуги $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_5B_5$, вообще, более не прямолинейны, а являются очень малыми дугами кривой.

Часть фигуры, состоящая из сплошной линии, воспроизводит рис. 1 или 2 из п. 308, а множество сплошных кривых представляет инвариантную кривую $K$.

Я сделал рисунок при первом предположении, которое, как мы видели, должно быть отброшено, так же как и пятое; согласно сказанному в п. 309, то же относится и ко второму предположению.

Четвертое предположение необходимо изучить более детально. Для этого найдем уравнение асимптотических поверхностей. Согласно тому, что мы видели в п. 207, это уравнение можно получить следующим образом.

Построим функцию $S$, разложимую по степеням $\sqrt{\mu}$ так, что

$$S=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p+\ldots.$$

Что касается $S_p$, то это периодическая функция с периодом $2\pi$ относительно $y_2'$ и с периодом $4\pi$ по $y_1'$.

Далее мы имеем

$$\begin{gathered} x_1'=\frac{dS}{dy_1'}, \qquad x_2'=\frac{dS}{dy_2'}, \\ x_1=m_1\frac{dS}{dy_1'}+m_2\frac{dS}{dy_2'}. \end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением асимптотической поверхности. Если бы ряд $S$ сходился, то из периодичности $S_p$ следовало, что кривые должны быть замкнуты, а две точки $A_0$ и $B_0$ совпали бы. Но это не так (см. п. 225 и след.).

Что же означает тогда уравнение (4)? Оно может быть верным только с формальной точки зрения, т. е. если $\Sigma_p$ есть сумма $p+1$ первых членов ряда $S$ так, что

$$\Sigma_p=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p,$$

то уравнение

$$x_1=m_1\frac{d\Sigma_p}{dy_1'}+m_2\frac{d\Sigma_p}{dy_2'} \tag{4bis}$$

будет верным с точностью до величин порядка $\mu^{\frac{p+1}{2}}$.

$B_0$ с кривой, изображенной сплошной линией $M_3B_0$. Так как $\mu$ очень мало́ и все наши кривые мало отличаются от окружности $x_1=b$, отрезок $A_0B_0$ будет очень малым.

Тогда мы видим, что $M_1A_1$, $M_2A_2$, $M_3A_3$, $M_4A_4$, $M_0A_5$ являются последовательными последующими $M_0A_0$; что $M_4B_1$, $M_0B_2$, $M_1B_3$, $M_2B_4$, $M_3B_5$ есть последующие $M_3B_0$ и, наконец, что $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_5B_5$ — последующие $A_0B_0$.

Дуги $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_5B_5$, вообще, более не прямолинейны, а являются очень малыми дугами кривой.

Часть фигуры, состоящая из сплошной линии, воспроизводит рис. 1 или 2 из п. 308, а множество сплошных кривых представляет инвариантную кривую $K$.

Я сделал рисунок при первом предположении, которое, как мы видели, должно быть отброшено, так же как и пятое; согласно сказанному в п. 309, то же относится и ко второму предположению.

Четвертое предположение необходимо изучить более детально. Для этого найдем уравнение асимптотических поверхностей. Согласно тому, что мы видели в п. 207, это уравнение можно получить следующим образом.

Построим функцию $S$, разложимую по степеням $\sqrt{\mu}$ так, что

$$S=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p+\ldots.$$

Что касается $S_p$, то это периодическая функция с периодом $2\pi$ относительно $y'_2$ и с периодом $4\pi$ по $y'_1$.

Далее мы имеем

$$\begin{gathered} x'_1=\frac{dS}{dy'_1}, \qquad x'_2=\frac{dS}{dy'_2}, \\ x_1=m_1\frac{dS}{dy'_1}+m_2\frac{dS}{dy'_2}. \end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением асимптотической поверхности. Если бы ряд $S$ сходился, то из периодичности $S_p$ следовало, что кривые должны быть замкнуты, а две точки $A_0$ и $B_0$ совпали бы. Но это не так (см. п. 225 и след.).

Что же означает тогда уравнение (4)? Оно может быть верным только с формальной точки зрения, т. е. если $\Sigma_p$ есть сумма $p+1$ первых членов ряда $S$ так, что

$$\Sigma_p=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\ldots+\mu^{\frac{p}{2}}S_p,$$

то уравнение

$$x_1=m_1\frac{d\Sigma_p}{dy'_1}+m_2\frac{d\Sigma_p}{dy'_2} \tag{4bis}$$

будет верным с точностью до величин порядка $\mu^{\frac{p+1}{2}}$.

Если мы предположим, что эксцентриситет очень мал, то $L$ и $G$ будут очень мало отличаться по абсолютной величине; следовательно, одно из двух количеств $x_1$ и $x_2$ очень мало́.

Я замечаю, кроме того, что равенства

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1 - e^2)}$$

показывают, что $G$ всегда меньше $L$ по абсолютной величине. Следовательно, $x_1$ и $x_2$ существенно положительны.

Предположим, что $x_1$ очень мало́; функция $F'$ будет функцией $a$ и $l + g - t$, разложимой, кроме того, по степеням $e \cos g$ и $e \sin g$. Следовательно, она будет также функцией $x_2$ и $y_2$, разложимой, кроме того, по степеням

$$\sqrt{x_1} \cos y_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{x_1} \sin y_1.$$

Она будет периодической с периодом $2\pi$ как по $y_1$, так и по $y_2$.

Если, наоборот, $x_2$ очень мало́, то функция $F'$ будет функцией $x_1$ и $y_1$, разложимой, кроме того, по степеням

$$\sqrt{x_2} \cos y_2 \quad \text{и} \quad \sqrt{x_2} \sin y_2.$$

Но мы предполагаем, что четыре переменные $x$ и $y$ связаны уравнением живых сил

$$F = C;$$

это уравнение приближенно приводится к

$$F_0 = C.$$

Построим кривую $F_0 = C$, принимая $x_1$ и $x_2$ в качестве координат точки на плоскости.

Уравнение это можно записать в виде

$$(x_1 + x_2)^2 (2C + x_1 - x_2) = 4.$$

Эта кривая имеет две асимптоты

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = 2C$$

и симметрична относительно первой из этих двух асимптот.

Но важно заметить, что единственная часть кривой, которая нам полезна, расположена в первом квадранте

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

В зависимости от значений $C$ кривая может представлять одну из форм, изображенных на рис. 8 и 9.

Оси координат представлены штрих-пунктиром, асимптоты и полезные части кривой — сплошной линией, ненужные части кривой — пунктирной линией.

Предположим, что $C$ дано такое значение, что кривая имеет форму, представленную рис. 9, и что она содержит две полезные дуги $AB$ и $CD$. При этом рассмотрим только дугу $AB$.

Заметим, что при обходе дуги $AB$ $x_1$ монотонно убывает от $OA$ до нуля, $x_2$ монотонно возрастает от нуля до $OB$, а $x_2/x_1$ монотонно возрастает от нуля до $+\infty$.

Если мы построим теперь кривую $F=C$, считая $y_1$ и $y_2$ постоянными, а $x_1$ и $x_2$ — координатами точки на плоскости, то кривая будет мало отличаться от $F_0=C$, и мы сможем снова представлять ее на рис. 9; она будет иметь полезную дугу $AB$, и при обходе этой дуги отношение $x_2/x_1$ будет монотонно возрастать от нуля до $+\infty$.

Так мы приходим к следующему способу геометрического представления: представим положение системы точкой, прямоугольные координаты которой есть

$$\frac{\sqrt{x_2}\cos y_2}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}}, \qquad \frac{\sqrt{x_2}\sin y_2}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}},$$

$$\frac{2\sqrt{x_1}\sin y_1}{\sqrt{x_2+4x_1-2\sqrt{x_1}\cos y_1}};$$

эти три функции разложимы по степеням $\sqrt{x_1}\cos y_1$ и $\sqrt{x_1}\sin y_1$, если $x_1$

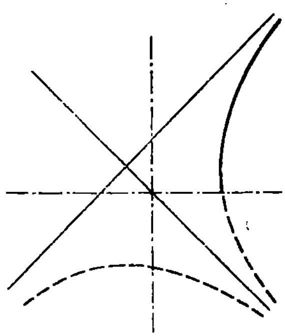

Рис. 8

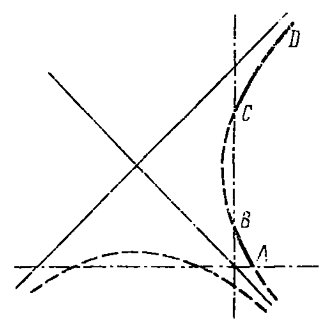


Рис. 9

очень мало́, и по степеням $\sqrt{x_2}\cos y_2$ и $\sqrt{x_2}\sin y_2$, если $x_2$ очень мало́. Они зависят только от отношения $x_1/x_2$.

Каждой системе значений $y_1$ и $y_2$ и каждой точке полезной дуги $AB$ соответствует, таким образом, одна и только одна точка пространства.

Функциональный определитель от трех координат относительно $y_1$, $y_2$ и отношения $\sqrt{x_1/x_2}$ всегда сохраняет один и тот же знак.

Следовательно, мы можем применить результаты предыдущего пункта внутри всей области $D$, где $n_2$ не обращается в нуль.

Но $n_2$ обращается в нуль при $x_1+x_2=2$.

Однако если $x_1+x_2=2$, $x_1>0$, $x_2>0$, то мы, очевидно, будем иметь

$$\frac{2}{(x_1+x_2)^2}+\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{2}{(x_1+x_2)^2}+\frac{x_2+x_1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Но левая часть этого равенства есть $F_0$, а строя кривую $F_0=C$, мы предположили, что имеют место условия случая, соответствующего рис. 9; в случае же рис. 9 предполагается, что

$$C>\frac{3}{2}.$$

Поскольку $F_0$ очень мало отличается от $F$ и, следовательно, от $C$, то мы не можем иметь одновременно

$$C>\frac{3}{2}, \quad F<\frac{3}{2}$$

(если только $C$ не очень близко к своему пределу $^3/_2$, чего мы не предполагаем).

Следовательно, при наших условиях мы не будем иметь $n_2=0$.

Итак, результаты предыдущего пункта применимы, и если построить асимптотические поверхности и рассмотреть пересечение этих поверхностей с полуплоскостью $y_2=0$, то две дуги, аналогичные дугам, названным нами выше $A_0A_5$ и $B_0B_5$, пересекаются.

Я добавлю еще несколько слов.

Координаты третьего тела относительно большой и малой оси описываемого им эллипса согласно известной формуле суть

$$L^2(\cos l+\ldots),$$
$$LG(\sin l+\ldots).$$

Таким образом, мы видим, что когда $G$ меняет знак, вторая из этих координат меняет знак.

Отсюда вытекает, что возмущаемая планета обращается в том же направлении, что и возмущающая планета, если $G$ положительно, и в противоположном направлении, если $G$ отрицательно.

## Глава XXVIII

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

**314.** Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $X_i$ — функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $t$, периодические с периодом $T$ относительно $t$.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{2}$$

— периодическое решение с периодом $T$ уравнений (1).

Мы сейчас посмотрим, допускают ли уравнения (1) другие периодические решения, близкие к (2), период которых кратен $T$.

Эти решения, если они существуют, будут называться *периодическими решениями второго рода*.

Рассмотрим решение уравнений (1), очень близкое к (2). Пусть

$$\varphi_i(0) + \beta_i$$

— значение $x_i$ при $t=0$ и

$$\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i = \varphi_i(kT) + \beta_i + \psi_i$$

— значение $x_i$ при $t=kT$ ($k$ — целое).

Величины $\beta_i$ и $\psi_i$, определение которых, таким образом, то же, что и в главе III, будут очень малы, и, как в главе III, мы увидим, что $\psi$ — функции от $\beta$, разложимые по возрастающим степеням $\beta$.

Для того чтобы решение было периодическим с периодом $kT$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{3}$$

Так как $\varphi_i(t)$ — периодические функции, то $\psi$ обращаются в нуль вместе с $\beta$.

Предположим, что функции $X_i$, фигурирующие в уравнениях (1), зависят от некоторого параметра $\mu$. Тогда функции $\varphi_i(t)$ будут зависеть не только от $t$, но и от $\mu$; относительно $t$ они будут периодическими с периодом $T$, где $T$ — постоянная, не зависящая от $\mu$.

При этих условиях функции $\psi$, определение которых остается тем же самым, будут зависеть не только от $\beta$, но и от $\mu$. Если мы будем считать

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \mu$$

координатами точки в пространстве $n+1$ измерений, то уравнения (3) представят кривую в этом пространстве. Каждой точке этой кривой будет соответствовать периодическое решение с периодом $kT$.

Поскольку все $\psi$ обращаются в нуль, когда все величины $\beta$ одновременно обращаются в нуль, то эта кривая будет содержать прямую

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0. \tag{4}$$

Различным точкам этой прямой будет соответствовать решение (2), которое, будучи периодическим решением с периодом $T$, является периодическим решением с периодом $kT$.

Но мы должны поставить вопрос, существуют ли другие периодические решения, близкие к первому, или, другими словами, содержит ли кривая (3), кроме прямой (4), другие ветви кривой, приближающиеся очень близко к прямой (4)?

Другими словами, имеются ли точки прямой (4), через которые проходят ветви кривой (3), отличные от этой прямой?

Пусть

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0, \qquad \mu = \mu_0$$

— точка $P$ прямой (4).

Для того чтобы через точку $P$ проходило несколько ветвей кривой, *необходимо, чтобы в этой точке $P$ функциональный определитель, или якобиан, величин $\psi$ относительно $\beta$ обращался в нуль.*

Как мы увидим дальше, это условие не является достаточным для того, чтобы через точку $P$ проходило несколько действительных ветвей кривой.

Составим определитель от величин $\psi$ по $\beta$, прибавим $-S$ ко всем членам на главной диагонали и приравняем полученный таким образом определитель нулю. Мы получим уравнение, известное под названием *$S$-уравнения.*

Корни этого уравнения (см. п. 60) суть

$$e^{k\alpha T} - 1,$$

где $\alpha$ — один из характеристических показателей уравнения (1).

Для того чтобы функциональный определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы один из корней был равен нулю; следовательно, необходимо иметь

$$e^{k\alpha T} = 1,$$

что означает, что $k\alpha T$ есть кратное $2i\pi$.

*Итак, чтобы через точку $P$ проходило несколько ветвей кривой, необходимо, чтобы один из характеристических показателей был кратным $2i\pi/kT$.*

**315.** Это условие не достаточно, и требуется более полное исследование. Положим

$$\mu = \mu_0 + \lambda$$

и попытаемся разложить величины $\beta$ по целым или дробным степеням $\lambda$.

Мы предполагаем, что якобиан величин $\psi$ относительно $\beta$ равен нулю; этот якобиан обращается в нуль при $\lambda=0$, но вообще не будет тождественным нулем; для этого необходимо было бы, чтобы один из характеристических показателей был постоянным, не зависящим от $\mu$ и равным кратному $2i\pi/kT$.

Следовательно, мы предположим, что якобиан обращается в нуль при $\lambda=0$, но что его производная по $\lambda$ в нуль не обращается.

Мы также предположим сначала, что миноры первого порядка этого якобиана не обращаются в нуль все одновременно.

В этом случае в силу теоремы п. 30 из $n-1$ уравнений (3) можно найти $n-1$ величин $\beta$ в виде рядов, расположенных по целым степеням $\lambda$ и $n$-й величины $\beta$, например $\beta_n$.

В $n$-е уравнение (3) подставим значения

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1},$$

найденные таким образом. Левая часть этого $n$-го уравнения окажется, таким образом, разложенной по степеням $\lambda$ и $\beta_n$; запишем ее в форме

$$\Theta(\lambda, \beta_n) = 0.$$

Я замечаю сначала, что $\Theta$ должно делиться на $\beta_n$, так как прямая (4) должна составлять часть кривой (3).

С другой стороны, производная $\Theta$ по $\beta_n$ должна обратиться в нуль при $\lambda=0$, поскольку якобиан обращается в нуль. При $\lambda=0$ $\Theta$ не содержит, следовательно, члена первой степени; предположим, что она также не содержит членов второй, ..., $(p-1)$-й степени, но содержит член степени $p$.

Наконец, так как производная якобиана по $\lambda$ не обращается в нуль, то мы будем иметь член с $\lambda\beta_n$.

Таким образом, я могу написать

$$\Theta = A\lambda\beta_n + B\beta_n^p + C,$$

где $C$ — совокупность членов, содержащих множителем $\beta_n^{p+1}$, $\lambda\beta_n^2$ или $\lambda^2\beta_n$; $A$ и $B$ — постоянные коэффициенты, не равные нулю.

Мы видим, что отсюда можно получить $\beta_n$ в виде ряда, расположенного по степеням $\lambda^{\frac{1}{p-1}}$, и вопрос заключается в том, чтобы установить, является ли этот ряд вещественным.

Если $p$ — четное или если при нечетном $p$ коэффициенты $A$ и $B$ имеют противоположные знаки, то ряд вещественный, и периодические решения второго рода существуют.

Если $p$ — нечетное и если $A$ и $B$ одного знака, то ряд мнимый, и периодических решений второго рода нет.

Теперь я предполагаю, что не только якобиан, но и его миноры первого, второго,. . ., $(p-1)$-го порядков обращаются в нуль при $\lambda=0$. Однако я предполагаю, что миноры $p$-го порядка не обращаются в нуль все одновременно.

При этих условиях, согласно п. 57, мы будем иметь не один, а $p$ характеристических показателей, которые будут кратны $2i\pi/kT$.

Тогда из $n-p$ уравнений (3) можно будет найти $n-p$ величин $\beta$ в виде рядов, расположенных по степеням $\lambda$ и $p$ остальных величин $\beta$.

Для краткости я обозначу $n-p$ первых количеств $\beta$ через $\beta'$, а $p$ остальных количеств $\beta$ — через $\beta''$. Следовательно, мы будем иметь $\beta'$ разложенными по степеням $\lambda$ и $\beta''$.

Подставим эти разложения вместо $\beta'$ в $p$ последних уравнений (3), тогда получим $p$ уравнений

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0, \tag{5}$$

левые части которых будут разложимы по степеням $\lambda$ и $\beta''$.

Поскольку якобиан и его миноры $p-1$ первых порядков равны нулю, эти левые части не будут содержать членов первой степени относительно $\beta''$, не зависящих от $\lambda$.

Пусть $\theta_i$ — совокупность членов $\Theta$ первой степени относительно $\beta''$; ясно, что $\theta_i$ можно будет разложить по степеням $\lambda$; пусть

$$\theta_i = \theta_i^{(0)} + \lambda\theta_i^{(1)} + \lambda^2\theta_i^{(2)} + \ldots$$

— это разложение; $\theta_i^{(k)}$ будут однородными полиномами первой степени относительно $\beta''$.

Согласно предыдущему, $\theta_i^{(0)}$ будет тождественным нулем; но необходимо посмотреть, не будет ли таким же $\theta_i^{(1)}$.

Якобиан величин $\psi$ относительно $\beta$ равен

$$\prod (1 - e^{k\alpha T}),$$

причем произведение, обозначенное знаком $\prod$, распространяется на $n$ сомножителей, соответствующих $n$ характеристическим показателям $\alpha$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ — эти $n$ показателей и пусть

$$\varphi(\alpha) = (1 - e^{k\alpha T});$$

якобиан будет равен произведению

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\,\ldots\,\varphi(\alpha_n).$$

При $\lambda=0$ якобиан, так же как его миноры $p-1$ первых порядков, обращается в нуль; отсюда вытекает, что $p$ показателей кратны $2i\pi/kT$. Таким образом, $p$ множителей $\varphi(\alpha)$ при $\lambda=0$ обращаются в нуль, и, следовательно, делятся на $\lambda$. Произведение их, т. е. якобиан, будет, следовательно, делиться на $\lambda^p$.

Предположим, что при $\lambda=0$ ни одна производная $d\alpha/d\lambda$ не обращается в нуль, что мы уже предположили выше. При этих условиях ни одно $\varphi(\alpha)$ не делится на $\lambda^2$. Следовательно, произведение не делится на $\lambda^{p+1}$.

Итак, якобиан делится на $\lambda^p$, но не на $\lambda^{p+1}$.

Отсюда вытекает, что определитель величин $\theta_i^{(1)}$ отличен от нуля и, следовательно, ни одна из величин $\theta_i^{(1)}$ не обращается тождественно в нуль.

Наиболее простым случаем является тот, когда при $\lambda=0$ члены второй степени не исчезают в $\Theta_i$ и когда эти члены второй степени не могут обратиться в нуль одновременно, если только все $\beta''$ не обращаются в нуль одновременно.

Пусть тогда $\eta_i$ — совокупность членов второй степени из $\Theta_i$ при $\lambda=0$.

Тогда будет достаточно рассмотреть алгебраические уравнения

$$\eta_i+\lambda\theta_i^{(1)}=0,$$

левые части которых суть однородные полиномы второй степени относительно $\lambda$ и величин $\beta''$.

Если эти уравнения допускают вещественные решения, мы будем иметь периодические решения второго рода.

Я не буду рассматривать другие случаи, имея в виду сделать это полностью для уравнений динамики.

### Случай, когда время не входит явно

**316.** Предположим, что функции $X_i$, фигурирующие в уравнениях (1), не зависят от времени $t$.

В этом случае, как мы это видели в п. 61, один из характеристических показателей всегда равен нулю.

С другой стороны, если

$$x_i=\varphi_i(t)$$

— периодическое решение с периодом $T$, то таким же будет

$$x_i=\varphi_i(t+h),$$

какова бы ни была постоянная $h$.

В предыдущем пункте мы предполагали, что, каково бы ни было $\mu$, существует периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t),$$

и период мог быть равен только $T$, поскольку $X_i$ были периодическими функциями $t$ с периодом $T$.

Таким образом, период не зависел от $\mu$.

Здесь это уже не так. Мы всегда будем предполагать, что, каково бы ни было $\mu$, уравнения (1) допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Но период будет, вообще говоря, зависеть от $\mu$. Я назову $T$ периодом, а $T_0$ — значением $T$ при $\mu = \mu_0$, т. е. при $\lambda = 0$.

Тогда мы изменим слегка определение количеств $\beta$ и $\psi$.

Обозначим снова через $\varphi_i(0) + \beta_i$ значение $x_i$ при $t=0$; но $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ представит значение $x_i$ при $t = k(T + \tau)$ (а не при $t = kT$).

В этом случае $\psi_i$ будут функциями $n+2$ переменных

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau, \lambda.$$

Если продолжать считать $\beta$ и $\lambda$ координатами точки в пространстве $n+1$ измерений, то уравнения (3) п. 314

$$\psi_i = 0$$

будут представлять не кривую, а поверхность, поскольку мы можем менять независимым и непрерывным образом два параметра $\tau$ и $\lambda$.

Но важно заметить, что на этой поверхности проведены кривые, различные точки которых соответствуют периодическим решениям, которые нельзя считать существенно различными.

В самом деле, если

$$x_i = f_i(t)$$

— периодическое решение, то таким же будет

$$x_i = f_i(t + h),$$

какова бы ни была постоянная $h$, и это новое решение на самом деле не будет отличаться от первого.

Первому решению соответствует точка

$$\beta_i = f_i(0) - \varphi_i(0),$$

а второму — точка

$$\beta_i = f_i(h) - \varphi_i(0).$$

Когда $h$ изменяется непрерывным образом, вторая точка описывает кривую, различные точки которой не соответствуют, следовательно, действительно разным решениям.

В частности, рассмотрим решение

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Этому решению будет соответствовать точка

$$\beta_i = 0,$$

которая принадлежит прямой (4).

Решению

$$x_i = \varphi_i(t+h),$$

которое не отличается в действительности от первого, будет соответствовать точка

$$\beta_i = \varphi_i(h) - \varphi_i(0), \tag{4bis}$$

принадлежащая некоторой поверхности (4bis), составляющей часть поверхности (3).

Речь идет о том, чтобы узнать, содержит ли поверхность (3) другие ветви, кроме (4bis), и такие, которые очень близки к (4bis); т. е. существуют ли на поверхности (4bis) точки, через которые проходят другие ветви поверхности (3), кроме самой поверхности (4bis).

Без ограничения общности мы сможем предположить, что $\beta_1 = 0$ (или принять другое произвольное соотношение между величинами $\beta$).

Действительно, решения

$$x_i = f_i(t), \qquad x_i = f_i(t+h)$$

на самом деле не отличаются друг от друга, и будет достаточно рассмотреть одно из них.

Таким образом, мы можем выбрать произвольно постоянную $h$; и мы можем сделать это, например, так, чтобы

$$f_1(h) = \varphi_1(0),$$

откуда

$$\beta_1 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если мы примем условие $\beta_1 = 0$, то две поверхности (3) и (4bis) сведутся к кривым и, в частности, поверхность (4bis) сведется к прямой (4).

Мы снова приходим к исследованию того, проходит ли через точку прямой (4) другая ветвь кривой (3).

Для этого составим комбинацию уравнения $\beta_1 = 0$ с уравнениями (3); эти уравнения представят кривую (3) или же кривую, частью которой будет кривая (3). Для того чтобы эта кривая не сводилась в рассматриваемой области к прямой (4), необходимо, чтобы якобианы величин $\psi_1$, $\psi_2$, ..., $\psi_n$, $\beta_1$ относительно $\beta_1$, $\beta_2$, ..., $\beta_n$, $\tau$ и якобиан от $\psi_1$, $\psi_2$, ..., $\psi_n$ относительно $\beta_2$, $\beta_3$, ..., $\beta_n$, $\tau$ были равны нулю при $\lambda=0$.

Поскольку $\beta_1$ ничем не отличаются от остальных $\beta$, то все якобианы величин $\psi$ относительно $\tau$ и $n-1$ любых $\beta$ должны обращаться в нуль, т. е. все определители, содержащиеся в матрице пунктов 38 и 63, должны одновременно обращаться в нуль. Рассуждая так же, как в п. 63, мы увидим, что $S$-уравнение должно иметь два нулевых корня.

Отсюда вытекает, что два характеристических показателя должны быть кратными $2i\pi/kT$. Это уже справедливо для одного из них, равного нулю. Второй показатель должен быть кратным $2i\pi/kT$.

Если это условие выполняется, то мы составим систему $n+1$ уравнений, содержащую уравнения (3) и $\beta_1=0$. Из нее найдем $\tau$ и величины $\beta$ в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням $\lambda$.

Если эти ряды вещественны, то будут существовать периодические решения второго рода; если ряды комплексные, то таких решений не будет.

Я не буду развивать это более подробно.

**317.** Предположим теперь, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i, \tag{1}$$

в которые время входит явно, допускают однозначный интеграл

$$F=C,$$

так что мы имеем

$$\sum\frac{dF}{dx_i}X_i=0.$$

Мы видели в п. 64, что в этом случае якобиан величин относительно $\psi$ обращается в нуль и что один из характеристических показателей равен нулю.

Уравнения (3) п. 314

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_n=0$$

в таком случае не являются независимыми, поскольку мы имеем тождественно

$$F[\varphi_i(0)+\beta_i+\psi_i]-F[\varphi_i(0)+\beta_i]=0.$$

Таким образом, они представляют не кривую, а поверхность.

Но в этом случае согласно принципам главы III мы имеем $\infty^2$ периодических решений с периодом $T$

$$x_i=\varphi_i(t),$$

поскольку каждому значению параметра $\mu=\mu_0+\lambda$ и каждому значению постоянной $C$ соответствует одно периодическое решение. Условимся придавать постоянной $C$ определенное значение $C_0$ и получим только $\infty^1$ периодических решений с периодом $T$

$$x_i=\varphi_i(t),$$

каждое из которых соответствует одному значению $\lambda$.

Так как уравнения (3) не являются независимыми, то они могут быть заменены $n-1$ из их числа, например, следующими:

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_{n-1}=0.$$

Рассмотрим тогда систему

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_{n-1}=0, \qquad F[\varphi_i(0)+\beta_i]=C_0. \tag{3bis}$$

Уравнения (3bis) представляют уже не поверхность, а кривую, частью которой является прямая

$$\beta_i=0. \tag{4}$$

Для того чтобы через точку прямой (4) проходила другая ветвь кривой, необходимо, чтобы якобиан величин

$$\psi_1, \ \psi_2, \ \ldots, \psi_{n-1}, \ F$$

относительно $\beta$ обращался в нуль.

Это условие можно представить еще и в другой форме.

Предположим, что мы разрешили уравнение

$$F(x_i)=C_0$$

относительно $x_n$, и это решение дает

$$x_n=\theta(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{n-1}).$$

Подставим $\theta$ вместо $x_n$ в $X_i$, и пусть $X'_i$ — результат этой подстановки. Таким образом, уравнения (1) окажутся замененными следующими:

$$\frac{dx_i}{dt}=X'_i \quad (i=1, \ 2, \ \ldots, \ n-1). \tag{1bis}$$

Эти уравнения (1bis) будут допускать периодическое решение

$$x_i=\varphi_i(t).$$

Число характеристических показателей этого периодического решения, рассматриваемого как решение уравнений (1bis), будет равно $n-1$. Пусть $\alpha_1$, $\alpha_2$, . . ., $\alpha_{n-1}$ — эти $n-1$ показателей. Они будут теми же, что и показатели этого периодического решения $x_i=\varphi_i(t)$, рассматриваемого как решение уравнений (1), исключая тот из $n$ показателей, который равен нулю.

Для того чтобы в окрестности точки прямой (4) уравнения (1) допускали периодические решения второго рода, необходимо и достаточно, чтобы их допускали уравнения (1bis), т. е. чтобы в точке прямой (4) один из $n-1$ характеристических показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ был кратным $2i\pi/kT$.

Таким образом, условие, сформулированное выше, что якобиан величин $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, F$ равен нулю, допускает совершенно иную формулировку. Для того чтобы оно выполнялось, необходимо, чтобы два показателя были кратными $2i\pi/kT$; это всегда справедливо для одного из них, равного нулю; это должно быть верным и для второго показателя.

Предположим, что это условие выполнено. Из уравнений (3bis) найдем $\beta$ в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням $\lambda$.

Я не буду выяснять, являются ли эти ряды вещественными.

318. Предположим теперь, что $X_i$ не зависят явно от времени и что уравнения (1) допускают интеграл

$$F=C.$$

В этом случае согласно п. 66 два из характеристических показателей равны нулю. Если для некоторой системы значений $\mu$ и $C$ уравнения допускают периодическое решение, то они будут допускать его также для близких значений, так что мы будем иметь $\infty^2$ периодических решений

$$x_i=\varphi_i(t),$$

зависящих от двух параметров $\mu$ и $C$. Период $T$ не будет постоянным, он будет функцией $\mu$ и $C$.

Дадим тогда $C$ определенное значение $C_0$, и пусть снова

$$\varphi_i(0)+\beta_i, \quad \varphi_i(0)+\beta_i+\psi_i$$

— значения $x_i$ при $t=0$ и при $t=k(T+\tau)$.

К уравнениям (3) п. 314

$$\psi_1=\psi_2=\ldots=\psi_n=0$$

присоединим сначала уравнение $F=C_0$, а затем произвольное соотношение между величинами $\beta$, например $\beta_1=0$.

В самом деле, мы можем без ограничения общности и по той же причине, что и в п. 316, предположить $\beta_1=0$.

Таким образом, получим систему

$$\psi_i=0, \quad F=C_0, \quad \beta_1=0. \tag{3ter}$$

Эти уравнения представляют кривую; в самом деле, число уравнений равно $n+2$; но $n$ уравнений (3) не независимы и могут быть заменены $n-1$ из их числа по той же причине, что и в предыдущем пункте. Таким образом, система (3ter) сводится к $n+1$ уравнениям. Число переменных равно $n+2$, а именно:

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \tau,\ \mu.$$

Эта кривая (3ter) содержит прямую

$$\beta_i = 0.$$

Пусть $\beta_i=0$, $\mu=\mu_0$ — точка этой прямой. Для того чтобы через эту точку проходила другая ветвь кривой, необходимо, чтобы якобиан левых частей уравнений (3ter) был равен нулю, или, что означает то же, чтобы якобиан $n-1$ величин $\varphi$ и $F$ относительно $\beta_2$, $\beta_3$, ..., $\beta_n$ и $\tau$ был равен нулю, или, наконец, поскольку $\beta_1$ ничем не отличается от остальных $\beta$, чтобы якобианы от $F$ и любых $n-1$ из величин $\beta$ были все равны нулю.

Это условие допускает другую формулировку.

Как и в предыдущем пункте, из уравнения $F=C_0$ найдем

$$x_n = 0\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$$

и получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X'_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{1bis}$$

Тогда согласно п. 316 необходимо, чтобы из $n-1$ характеристических показателей [если периодическое решение считается принадлежащим уравнениям (1bis)] один был нулем, а второй — кратным $2i\pi/kT$; или, что означает то же, чтобы из $n$ характеристических показателей [если периодическое решение считать принадлежащим уравнениям (1)] два были равны нулю, а третий был кратным $2i\pi/kT$.

Предположим, что это условие выполнено; из (3ter) найдем величины $\beta$ и $\tau$ в виде рядов, расположенных по целым или дробным степеням $\lambda$; я воздержусь также здесь от их исследования.

### Приложение к уравнениям динамики

**319.** Мне хотелось бы провести более полное исследование, связанное с уравнениями динамики; но для этого нужно сначала доказать одно важное свойство этих уравнений.

Пусть $\xi_i$ и $\eta_i$ — значения $x_i$ и $y_i$ при $t=0$; пусть $X_i$ и $Y_i$ — значения $x_i$ и $y_i$ при $t=T$. Мы знаем, что

$$\iint \sum dx_i dy_i$$

— интегральный инвариант; следовательно, будем иметь

$$\int\int \sum (dX_i dY_i - d\xi_i d\eta_i) = 0,$$

где двойной интеграл распространен на какую-нибудь область $A$.

Это можно записать так:

$$\int \sum (X_i dY_i - Y_i dX_i - \xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i) = 0,$$

где интеграл распространен на границу области $A$, т. е. на какой-нибудь замкнутый контур.

Другими словами, выражение

$$\sum (X_i dY_i - Y_i dX_i - \xi_i d\eta_i + \eta_i d\xi_i)$$

есть полный дифференциал.

Отсюда следует, что

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i)\, d\,(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i)\, d\,(X_i + \xi_i)]$$

есть тоже полный дифференциал.

**320.** Если изменять $T$, то ясно, что $S$ будет функцией от $T$. Вычислим производную от $S$ по $T$ при помощи уравнений

$$\frac{dX_i}{dT} = \frac{dF}{dY_i}, \qquad \frac{dY_i}{dT} = -\frac{dF}{dX_i}.$$

Имеем

$$\frac{dS}{dT} = \int \sum \left[\frac{dX}{dT}\, d\,(Y + \eta) - \frac{dY}{dT}\, d\,(X + \xi) + (X - \xi)\, d\,\frac{dY}{dT} - (Y - \eta)\, d\,\frac{dX}{dT}\right],$$

или же

$$\frac{dS}{dT} = \int \sum \left[\frac{dF}{dY}\, d\,(Y + \eta) + \frac{dF}{dX}\, d\,(X + \xi) - (X - \xi)\, d\,\frac{dF}{dX} - (Y - \eta)\, d\,\frac{dF}{dY}\right],$$

или, интегрируя по частям,

$$\frac{dS}{dT} = -\sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right] + 2\int \sum \left(\frac{dF}{dX}\, dX + \frac{dF}{dY}\, dY\right),$$

или, наконец,

$$\frac{dS}{dT} = 2F - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right] + \text{произвольная функция от } T.$$

Мы примем произвольную функцию от $T$ равной постоянной $-2C$ и будем иметь

$$\frac{dS}{dT} = 2\,(F - C) - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta)\frac{dF}{dY}\right].$$

При $T=0$ имеем $dS=0$ и, следовательно,

$$S=\text{const}.$$

Примем эту постоянную равной нулю, так что $S$ обратится в нуль тождественно при $T=0$; таким образом, функция $S$ определена полностью.

**321.** Будем искать максимумы и минимумы функции $S$. Будем сначала считать $T$ постоянной. Для того чтобы функция $S$ имела максимум или минимум, необходимо, *в предположении, что эту функцию $S$ можно считать однозначной функцией переменных $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ в рассматриваемой области*, необходимо, говорю я, чтобы ее производные по этим переменным были равны нулю, т. е. чтобы было

$$X_i=\xi_i, \qquad Y_i=\eta_i.$$

Следовательно, соответствующее решение является периодическим решением с периодом $T$, и этот период $T$ здесь является одним из параметров задачи.

Не будем более считать $T$ заданной величиной; для того чтобы $S$ имела максимум или минимум, необходимо, чтобы было

$$X_i=\xi_i, \qquad Y_i=\eta_i$$

и, кроме того,

$$\frac{dS}{dT}=0.$$

Но если $X=\xi$, $Y=\eta$, то остается

$$\frac{dS}{dT}=2(F-C),$$

откуда

$$F=C.$$

Соответствующее решение снова будет периодическим с периодом $T$.

Но период $T$ не будет более параметром задачи; в этом случае заданной будет постоянная живых сил $C$, которая не встречалась в предыдущем случае.

Два способа разыскания максимумов $S$ связаны с двояким пониманием принципа наименьшего действия — принципа Гамильтона и принципа Мопертюи. Это станет более понятным после чтения следующей главы.

**322.** Определение функции $S$ может быть изменено также следующим образом.

Очень часто в приложениях $F$ — периодическая функция с периодом $2\pi$ относительно $y_i$. В этом случае решение можно также считать периодическим, когда $X_i=\xi_i$, а величина $Y_i-\eta_i$ кратна $2\pi$.

Тогда ясно, что если мы положим

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i)\, d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i - 2m_i\pi)\, d(X_i + \xi_i)],$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — какие-нибудь целые числа, то выражение $dS$ снова будет полным дифференциалом.

При этом мы найдем

$$\frac{dS}{dT} = 2F - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta - 2m\pi)\frac{dF}{dY}\right] +$$

$$+ \text{произвольная функция от } T.$$

Примем

$$\frac{dS}{dT} = 2(F - C) - \sum \left[(X - \xi)\frac{dF}{dX} + (Y - \eta - 2m\pi)\frac{dF}{dY}\right].$$

При $T=0$ имеем

$$dS = \sum 4m_i\pi d\xi_i.$$

Примем

$$S = 4\pi \sum m_i \xi_i,$$

что завершает определение функции $S$.

Максимумы и минимумы $S$ в предположении, что период $T$ задан, получаются приравниванием нулю ее производных, что дает

$$X_i = \xi_i, \quad Y_i = \eta_i + 2m_i\pi.$$

Соответствующее решение снова является периодическим, поскольку величина $Y_i - \eta_i$ кратна $2\pi$. Период $T$ задан.

Если $T$ не задано, то необходимо сначала, чтобы было

$$X_i = \xi_i, \quad Y_i = \eta_i + 2m_i\pi$$

и, кроме того, чтобы

$$\frac{dS}{dT} = 0,$$

откуда

$$F = C.$$

**323.** Теперь нам нужно научиться распознавать истинные максимумы и истинные минимумы $S$; действительно, до сих пор мы искали условие того, чтобы первые производные от $S$ были равны нулю; но известно, что этого условия недостаточно, чтобы существовал максимум; надо еще, чтобы вторые производные удовлетворяли определенным неравенствам.

Предположим сначала, что мы находимся в условиях п. 319, и будем считать $T$ заданным.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \varphi'_i(t)$$

— периодическое решение с периодом $T$, так что

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(T), \qquad \varphi'_i(0) = \varphi'_i(T).$$

Этому решению может соответствовать максимум или минимум функции $S$.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) + x'_i, \qquad y_i = \varphi'_i(t) + y'_i,$$

$$x_i = \varphi_i(t) + x''_i, \qquad y_i = \varphi'_i(t) + y''_i$$

— два решения, очень мало отличающиеся от этого периодического решения.

Я предположу, что $x'_i$, $y'_i$, $x''_i$, $y''_i$ достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их квадратами и считать эти количества удовлетворяющими уравнениям в вариациях (ср. главу IV).

Пусть $\xi'_i$ и $\eta'_i$ — значения $x'_i$ и $y'_i$ при $t=0$; $X'_i$ и $Y'_i$ — значения $x'_i$ и $y'_i$ при $t=T$.

Для того чтобы узнать, имеет ли $S$ максимум или минимум, достаточно изучить совокупность членов второй степени в разложении $S$ по степеням $\xi'_i$ и $\eta'_i$.

Но легко видеть, что эта совокупность членов сводится к

$$\sum (X'_i \eta'_i - Y'_i \xi'_i).$$

Изучим выражение

$$\sum (x''_i y'_i - y''_i x'_i). \tag{1}$$

Согласно п. 56, это выражение должно сводиться к постоянной.

Каков вид общего решения уравнений в вариациях?

Если имеется $n$ степеней свободы, мы будем иметь $n-1$ частных решений вида

$$x'_i = e^{\alpha_k t} \theta_{k,i}(t), \qquad y'_i = e^{\alpha_k t} \theta'_{k,i}(t).$$

Величины $\alpha_k$ — характеристические показатели, а $\theta$ — периодические функции с периодом $T$.

Мы будем иметь еще $n-1$ решений вида

$$x'_i = e^{-\alpha_k t} \theta''_{k,i}(t), \quad y'_i = e^{-\alpha_k t} \theta'''_{k,i}(t),$$

соответствующих показателям $-\alpha_k$, которые равны $n-1$ показателям $\alpha_k$ и противоположны им по знаку.

Мы будем иметь очевидное решение

$$x_i' = \frac{d\varphi_i}{dt}, \qquad y_i' = \frac{d\varphi_i'}{dt}$$

и, наконец, $2n$-е частное решение будет

$$x_i' = t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i, \quad y_i' = t\frac{d\varphi_i'}{dt} + \psi_i'.$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$x_i' = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi_i}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right),$$

$$y_i' = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta'_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta'''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi_i'}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi_i'}{dt} + \psi_i'\right),$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — постоянные интегрирования.

Мы будем иметь также

$$x_i'' = \sum A_k' e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B_k' e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C'\frac{d\varphi_i}{dt} + D'\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right)$$

с аналогичной формулой для $y_i''$.

Величины $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — новые постоянные.

Подставим эти значения в выражение (1); это выражение станет билинейной формой относительно двух рядов постоянных

$$A,\ B,\ C,\ D,$$
$$A',\ B',\ C',\ D'.$$

Так как эта форма должна обращаться тождественно в нуль при

$$A_k = A_k',\ B_k = B_k',\ C = C',\ D = D',$$

то она будет линейной формой относительно определителей, содержащихся в матрице

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & \ldots A_{n-1} & B_{n-1} & C & D \\ A_1' & B_1' & A_2' & B_2' & \ldots A_{n-1}' & B_{n-1}' & C' & D' \end{matrix}\right\|.$$

Коэффициенты этой линейной формы должны быть постоянными, поскольку выражение (1) должно приводиться к постоянной.

Вообще говоря, ни один из характеристических показателей не будет нулем и никакие два из этих показателей не будут равны между собой.

Мы будем иметь очевидное решение

$$x'_i = \frac{d\varphi_i}{dt}, \qquad y'_i = \frac{d\varphi'_i}{dt}$$

и, наконец, $2n$-е частное решение будет

$$x'_i = t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i, \quad y'_i = t\frac{d\varphi'_i}{dt} + \psi'_i.$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$x'_i = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi_i}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right),$$

$$y'_i = \sum A_k e^{\alpha_k t}\theta'_{k,i}(t) + \sum B_k e^{-\alpha_k t}\theta'''_{k,i}(t) + C\frac{d\varphi'_i}{dt} + D\left(t\frac{d\varphi'_i}{dt} + \psi'_i\right),$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — постоянные интегрирования.

Мы будем иметь также

$$x''_i = \sum A'_k e^{\alpha_k t}\theta_{k,i}(t) + \sum B'_k e^{-\alpha_k t}\theta''_{k,i}(t) + C'\frac{d\varphi_i}{dt} + D'\left(t\frac{d\varphi_i}{dt} + \psi_i\right)$$

с аналогичной формулой для $y''_i$.

Величины $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — новые постоянные.

Подставим эти значения в выражение (1); это выражение станет билинейной формой относительно двух рядов постоянных

$$A,\ B,\ C,\ D,$$
$$A',\ B',\ C',\ D'.$$

Так как эта форма должна обращаться тождественно в нуль при

$$A_k = A'_k,\ B_k = B'_k,\ C = C',\ D = D',$$

то она будет линейной формой относительно определителей, содержащихся в матрице

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & \ldots A_{n-1} & B_{n-1} & C & D \\ A'_1 & B'_1 & A'_2 & B'_2 & \ldots A'_{n-1} & B'_{n-1} & C' & D' \end{Vmatrix}.$$

Коэффициенты этой линейной формы должны быть постоянными, поскольку выражение (1) должно приводиться к постоянной.

Вообще говоря, ни один из характеристических показателей не будет нулем и никакие два из этих показателей не будут равны между собой.

откуда

$$\sum (X_i'\eta_i' - Y_i'\xi_i') = \sum M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k - NTD^2. \tag{3}$$

**324.** Для рассмотрения уравнения (3) необходимо различать несколько случаев:

1. Показатели $\pm\alpha_k$ вещественны; тогда функции

$$\theta_{k,i}, \quad \theta'_{k,i}, \quad \theta''_{k,i}, \quad \theta'''_{k,i}$$

также вещественны.

2. Показатели $\pm\alpha_k$ чисто мнимые, и квадрат $\alpha_k^2$ — вещественное отрицательное число.

Тогда функции $\theta_{k,i}$ и $\theta''_{k,i}$, $\theta'_{k,i}$ и $\theta'''_{k,i}$ — комплексные сопряженные числа.

3. Показатели $\pm\alpha_k$ комплексные. Тогда среди характеристических показателей будем иметь показатели $\pm\alpha_j$, которые будут комплексными сопряженными с показателями $\pm\alpha_k$, а

$$\theta_{j,i}, \quad \theta'_{j,i}, \quad \theta''_{j,i}, \quad \theta'''_{j,i}$$

будут комплексными сопряженными с

$$\theta_{k,i}, \quad \theta'_{k,i}, \quad \theta''_{k,i}, \quad \theta'''_{k,i}.$$

Предположим теперь, что величины $x_i'$ и $y_i'$ вещественны. Для вычисления постоянных $A$, $B$, $C$, $D$ будем иметь $2n$ уравнений, которые получатся, если в уравнении, дающем $x_i'$, положить, например,

$$t = 0, \quad t = T, \quad t = 2T, \ldots, t = (2n-1)T.$$

Эти $2n$ уравнений линейны относительно $2n$ неизвестных $A$, $B$, $C$, $D$. Правые части вещественны, а коэффициенты — вещественные или комплексные попарно сопряженные.

Если заменить $\sqrt{-1}$ на $-\sqrt{-1}$, то

1) $A_k$ и $B_k$ не меняются, если $\alpha_k$ — вещественное число;

2) $A_k$ и $B_k$ взаимно меняются местами, если $\alpha_k$ — чисто мнимое число;

3) $A_k$ и $B_k$ переходят в $A_j$ и $B_j$, если $\alpha_k$ — комплексное число, сопряженное с $\alpha_j$.

Итак:

1) $A_k$ и $B_k$ вещественны, когда $\alpha_k$ вещественно;

2) $A_k$ и $B_k$ комплексные сопряженные, когда $\alpha_k$ — чисто мнимое число;

3) $A_k$ и $A_j$, $B_k$ и $B_j$ — комплексные сопряженные, когда $\alpha_k$ — комплексное число, сопряженное с $\alpha_j$.

Наконец, $C$ и $D$ вещественны.

Эти условия, кроме того, достаточны, чтобы $x_i'$ и $y_i'$ были вещественны.

Дадим постоянным $A_k$, $B_k$, $C$, $D$ так же, как и постоянным $A'_k$, $B'_k$, $C'$, $D'$, значения, удовлетворяющие этим условиям. Тогда правая часть (2) должна быть вещественной; а для того чтобы это было так, необходимо:

1) чтобы $M_k$ было вещественным, если $\alpha_k$ — вещественное число;
2) чтобы $M_k$ было чисто мнимым, если $\alpha_k$ — чисто мнимое число;
3) чтобы $M_k$ и $M_j$ были комплексными сопряженными, если $\alpha_k$ и $\alpha_j$ комплексные и сопряженные.

Форма (3) содержит член

$$M_k(e^{-\alpha_k T}-e^{\alpha_k T})A_kB_k$$

и не содержит других членов, зависящих от $A_k$ или $B_k$.

Если показатель $\alpha_k$ — вещественное число, то присутствия члена с $A_kB_k$ достаточно, чтобы квадратичная форма (3) не могла быть определенной.

Таким образом, если хотя бы один-единственный показатель $\alpha_k$ вещественен, то функция $S$ не может иметь ни максимума, ни минимума.

Предположим теперь, что два показателя $\alpha_k$ и $\alpha_j$ комплексные и сопряженные.

Обратим в нуль все постоянные, за исключением

$$A_k,\ B_k,\ A_j,\ B_j,$$

тогда форма (3) примет вид

$$M_k(e^{-\alpha_k T}-e^{\alpha_k T})A_kB_k+M_j(e^{-\alpha_j T}-e^{\alpha_j T})A_jB_j.$$

Эти два члена — комплексные сопряженные, так что форма (3) вещественна.

Предположим, что $A_k$ не изменяется, а $B_k$ меняет знак; $A_j$, комплексно сопряженное с $A_k$, также не изменится, а $B_j$, комплексно сопряженное с $B_k$, изменится на $-B_j$.

Следовательно, форма (3) изменит знак; таким образом, она не может быть определенной.

Итак, если один из показателей $\alpha_k$ — комплексный, функция $S$ не может иметь ни максимума, ни минимума.

Предположим теперь, что $\alpha_k$ — чисто мнимое число. Тогда $A_k$ и $B_k$ комплексно сопряжены, а произведение $A_kB_k$ равно сумме двух квадратов.

Для того чтобы функция $S$ имела максимум, необходимо и достаточно, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}}\sin\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}},\quad -NT$$

были отрицательны; для того чтобы $S$ имела минимум, необходимо и достаточно, чтобы все эти количества были положительны.

Важно заметить, что все эти количества вещественны, так как $\frac{M_k}{\sqrt{-1}}$ и $\frac{\alpha_k}{\sqrt{-1}}$ вещественны.

325. Как изменятся эти результаты, если предположить, что постоянная живых сил рассматривается как один из фиксированных параметров задачи? Тогда мы имеем тождественно

$$\sum\left(\frac{dF}{dx}x'+\frac{dF}{dy}y'\right)=0,$$

где предполагается, что в $dF/dx$, $dF/dy$ величины $x_i$ и $y_i$ заменены периодическими функциями $\varphi_i(t)$ и $\varphi_i'(t)$.

Действительно, постоянное значение функции $F$ должно быть одним и тем же для периодического решения

$$x_i=\varphi_i(t),\qquad y_i=\varphi_i'(t)$$

и для бесконечно близкого решения

$$x_i=\varphi_i(t)+x_i',\qquad y_i=\varphi_i'(t)+y_i'.$$

Это соотношение является линейным уравнением, связывающим постоянные

$$A_k,\ B_k,\ C,\ D,$$

коэффициенты которого должны быть независимыми от $t$.

Отсюда вытекает, что $A_k$ и $B_k$ не должны фигурировать в этом соотношении, поскольку эти постоянные всегда умножаются на $e^{\pm\alpha_k t}$, а эта показательная функция не может исчезнуть.

Кроме того, $C$ также не фигурирует в нем, поскольку решение

$$x_i=\varphi_i(t)+C\frac{d\varphi_i}{dt},\qquad y_i=\varphi_i'(t)+C\frac{d\varphi_i'}{dt},$$

где $C$ — очень малая постоянная, получается из периодического решения, если дать времени бесконечно малое приращение $C$, и соответствует, следовательно, тому же значению постоянной живых сил, что и периодическое решение.

Наше соотношение, которое не может свестись к тождеству, приводится, таким образом, к равенству

$$D=0.$$

Но если $D$ — нуль, то член $NTD^2$ исчезает из формы (3).

Для того чтобы функция $S$ допускала максимум или минимум, необходимо, таким образом, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}}\sin\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

имели один и тот же знак.

Если имеется только две степени свободы, то существует только одна из этих величин.

Таким образом, если имеется только две степени свободы и если $\alpha_k$ — чисто мнимое, то функция $S$ всегда имеет либо максимум, либо минимум.

**326.** Предположим теперь, что мы находимся в условиях п. 322, так что

$$dS = \sum [(X_i - \xi_i)\, d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i - 2m_i\pi)\, d(X_i + \xi_i)],$$

и будем считать $T$ постоянной. Чтобы функция $S$ имела максимум или минимум, необходимо прежде всего, чтобы существовало периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \varphi_i'(t),$$

где

$$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t), \qquad \varphi_i'(t+T) = \varphi_i'(t) + 2m_i\pi$$

В таком случае рассмотрим близкое решение

$$x_i = \varphi_i(t) + x_i', \qquad y_i = \varphi_i'(t) + y_i',$$

и ход рассуждений будет таким же, как выше; результаты те же.

Для существования максимума или минимума необходимо прежде всего, чтобы все показатели $\alpha_k$ были чисто мнимыми; необходимо затем, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}, \quad -NT$$

были одного и того же знака.

Если считать постоянную живых сил заданной, то $D$ — нуль, член $-NTD^2$ исчезает, и достаточно, чтобы все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

были одного знака.

**327.** Что произойдет теперь, если уравнения допускают еще другие однозначные интегралы, отличные от интеграла живых сил, и если, следовательно, некоторые из характеристических показателей равны нулю?

Как увидим, и в этом случае можно провести рассуждения, аналогичные предшествующим.

Предположим, например, что наши уравнения допускают кроме интеграла живых сил еще $p$ однозначных интегралов

$$F_1, F_2, \ldots, F_p,$$

так что скобки $[F_i, F_k]$, составленные из пар этих интегралов, равны нулю. В таком случае мы знаем из п. 69, что $2p+2$ характеристических показателей равны нулю. Предположим, что все остальные показатели отличны от нуля.

Тогда мы будем иметь $n-p-1$ пар постоянных, аналогичных постоянным $A_k$ и $B_k$, и $p+1$ пар постоянных $C_k$ и $D_k$, аналогичных постоянным $C$ и $D$.

Тогда форма (3) примет вид

$$\sum M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T}) A_k B_k - \sum N_k T D_k^2,$$

где $\sum N_k T D_k^2$ означает сумму членов, аналогичных члену $NTD^2$.

Если мы будем считать теперь значения наших $p+1$ интегралов заданными, то все постоянные $D_k$ будут нулями, члены $N_k T D_k^2$ исчезнут, и условием того, чтобы $S$ имела максимум или минимум, будет снова условие, чтобы все количества

$$M_k (e^{-\alpha_k T} - e^{\alpha_k T})$$

были одного и того же знака.

Я, впрочем, не останавливаюсь на этом, ибо в случае задачи трех тел мы либо будем иметь дело с ограниченной задачей п. 9, либо сможем уменьшить число степеней свободы, употребляя методы пунктов 15 и 26.

Но в случае приведенных задач пунктов 9, 15 и 16 существует только один однозначный интеграл — интеграл живых сил — и только два показателя равны нулю, как мы это видели в п. 78.

### Решения второго рода уравнений динамики

328. Заменим $T$ последовательно на $2T$, $3T$, . . ., $mT$, . . .; функция $S$, определенная выше, зависит от $T$; пусть

$$S_m = S(mT)$$

Будем искать максимумы и минимумы функции $S_m$, считая период $T$ постоянным.

Если мы рассмотрим периодическое решение с периодом $T$, то оно будет также периодическим решением с периодом $mT$. Следовательно, первые производные $S_m$ равны нулю.

Для существования максимума или минимума необходимо, прежде всего, чтобы все показатели $\alpha_k$ были чисто мнимыми.

Если, далее, все количества

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{m\alpha_k T}{\sqrt{-1}} \tag{1}$$

отрицательны, то будет максимум; если они все положительны, то мы будем иметь минимум.

Вот первый пункт, на который я хотел бы обратить внимание.

Если мы дадим целому $m$ всевозможные целые значения, то $n-1$ количеств (1), вообще говоря, дадут всевозможные комбинации знаков.

Действительно, положим для краткости

$$\frac{\alpha_k T}{\sqrt{-1}} = \omega_k$$

и пусть

$$z_k = m\omega_k + 2m_k\pi.$$

Дадим $m$ и $m_k$ всевозможные целые значения; если мы рассматриваем $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ как координаты точки в пространстве $n-1$ измерений, то получим таким образом бесконечное число точек. Я говорю, что в любой сколь угодно малой части пространства $n-1$ измерений будет бесконечно много этих точек.

Для того чтобы это показать, я должен только обратиться к рассуждениям, с помощью которых устанавливается, что однозначная функция от $n$ вещественных переменных не может иметь $n+1$ различных периодов.

Величины, записанные в таблице

$$\begin{array}{llll}
\omega_1, & \omega_2, & \ldots, & \omega_{n-1}, \\
2\pi, & 0, & \ldots, & 0, \\
0, & 2\pi, & \ldots, & 0, \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\
0, & 0, & \ldots, & 2\pi,
\end{array}$$

играют в этом рассуждении роль периодов.

Мы имели бы исключение, если бы эти периоды не были независимыми, т. е. если бы одна из величин $\omega$ была соизмерима с $2\pi$ или, если бы вообще существовала линейная комбинация $z$, допускающая только один период, т. е. существовало соотношение вида

$$b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \ldots + b_{n-1}\omega_{n-1} + 2\pi b_n = 0, \tag{2}$$

где величины $b$ — целые числа.

Оставим сначала в стороне этот исключительный случай; количества (1) будут равны

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin z_k.$$

Сказать, что можно выбрать целое число $m$ так, чтобы эти количества составили комбинацию заданного знака, значит сказать, что имеются числа $z_k$, удовлетворяющие неравенствам вида

$$a_1 < z_1 < a_1 + \pi, \quad a_2 < z_2 < a_2 + \pi, \quad \ldots, \quad a_{n-1} < z_{n-1} < a_{n-1} + \pi, \tag{3}$$

где величины $a_k$ равны 0 или $\pi$.

Но это как раз и вытекает немедленно из того, что мы только что сказали выше.

Перейдем к случаю, когда имеется соотношение вида (2). Мы всегда можем предположить, что целые числа $b$ взаимно простые; в этом случае выражение

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_{n-1} z_{n-1} \tag{4}$$

допускает в качестве единственного периода $2\pi$.

Для того чтобы не существовало чисел $z_k$, удовлетворяющих неравенствам (3), необходимо и достаточно, чтобы разность между наибольшим и наименьшим значением, которое принимает выражение (4), когда величинам $z_k$ дают все значения, совместимые с неравенствами (3), чтобы эта разность, говорю я, была меньше $2\pi$, т. е. периода выражения (4).

Но эта разность, очевидно, равна

$$\pi(|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-1}|);$$

следовательно, мы должны иметь

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_{n-1}| \leqslant 2. \tag{5}$$

Неравенство может иметь место только в том случае, если все $b$ равны нулю, за исключением одного из них, которое должно быть равно $\pm 1$.

В этом случае $\omega_k$ должно быть равно кратному $2\pi$; это означает, что $\alpha_k$ должно быть нулем, поскольку $\alpha_k$ определено только с точностью до кратного $2\pi\sqrt{-1}/T$.

Но мы как раз исключили случай, когда один из показателей $\alpha_k$ равен нулю. Равенство может иметь место, только если все $b$ нули, за исключением двух из них, которые должны быть равны $\pm 1$.

Тогда сумма или разность двух из $\omega_k$ будет кратной $2\pi$ и если мы заметим, что $\alpha_k$ определены только с точностью до кратного $2\pi\sqrt{-1}/T$, мы можем сформулировать этот результат другим образом: два характеристических показателя будут равными.

Это единственный исключительный случай, который существует и который легко может быть исключен из рассмотрения.

**329.** Предположим теперь, что рассматриваемые уравнения динамики зависят от произвольного параметра $\mu$, подобно тому как это имеет место, как мы знаем, в задаче трех тел.

Когда мы непрерывно меняем $\mu$, периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \varphi'_i(t)$$

будет также меняться непрерывным образом, в чем можно убедиться при чтении главы III.

Количества $M_k$ также будут изменяться непрерывным образом, но, как было объяснено в п. 323, они никогда не смогут обратиться в нуль; следовательно, они всегда будут сохранять один и тот же знак; но как раз только их знак нас и интересует.

Постоянная живых сил будет считаться одним из фиксированных параметров задачи; этот параметр может зависеть от $\mu$, и мы выберем его так, чтобы период $T$ периодического решения оставался постоянным.

Показатели $\alpha_k$ будут также изменяться непрерывно, когда мы будем непрерывно менять $\mu$; посмотрим, как происходит это изменение в случае задачи трех тел. При $\mu=0$ все показатели равны нулю; но как только $\mu$ перестает быть нулем, показатели также перестают быть равными нулю; один из этих показателей сможет обратиться в нуль, или стать равным кратному $2\pi\sqrt{-1}/T$, или стать равным другому характеристическому показателю только для определенных частных значений $\mu$.

**330.** Рассмотрим такое периодическое решение с периодом $T$, что все показатели $\alpha_k$ чисто мнимые; выше мы назвали это устойчивым решением; мы доказали существование этих решений в главах III и IV.

Рассмотрим один из показателей, например $\alpha_1$; когда $\mu$ будет изменяться непрерывным образом, величина $\alpha_1/\sqrt{-1}$, которая вещественна, будет бесконечно много раз становиться соизмеримой с $2\pi/T$.
Дадим $\mu$ такое значение $\mu_0$, что

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{-1}}=\frac{2k\pi}{pT},$$

где $k$ и $p$ — взаимно простые целые числа, которые, кроме того, не соответствуют максимуму или минимуму величины $\alpha_1/\sqrt{-1}$.

Мы увидим дальше, в п. 334, почему я пишу в числителе $2k\pi$, а не $k\pi$.

На всяком сколь угодно малом интервале имеется бесконечное число подобных значений.

Если $m$ — какое-нибудь целое число, то для этого значения $\mu_0$ выражение

$$\frac{M_1}{\sqrt{-1}}\sin\frac{pm\alpha_1 T}{\sqrt{-1}}$$

равно нулю; кроме того, так как $\mu_0$ не соответствует максимуму или минимуму величины $\alpha_1/\sqrt{-1}$, это выражение изменит знак, когда $\mu$ перейдет от $\mu_0-\varepsilon$ к $\mu_0+\varepsilon$.

Предположим, например, что оно переходит от отрицательного значения к положительному.

Рассуждая, как в п. 328, мы увидим, что можно выбрать такое целое число $m$, что выражения

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}}\sin\frac{pm\alpha_k T}{\sqrt{-1}} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$$

представляют все возможные комбинации знаков и, в частности, что все они отрицательны.

При этих предположениях при $\mu=\mu_0-\varepsilon$ наша функция $S_{m,p}$ будет иметь максимум, поскольку все наши выражения будут отрицательными, но при $\mu=\mu_0+\varepsilon$ периодическое решение не будет более соответствовать максимуму $S_{m,p}$, поскольку одно из этих выражений станет положительным.

## Теоремы о максимумах

331. Для того чтобы идти дальше, необходимо доказать одно свойство максимумов; пусть $V$ — функция трех переменных $x_1$, $x_2$ и $z$, разложимая по возрастающим степеням этих трех переменных. Я предполагаю:

1) что при $x_1=x_2=0$ функция $V$ обращается в нуль так же, как и ее производные $dV/dx_1$, $dV/dx_2$, и это имеет место, каково бы ни было $z$;

2) что при $x_1=x_2=0$ $V$ имеет максимум при $z>0$ и минимум при $z<0$.

Я говорю, что уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

будут допускать вещественные решения, отличные от решения

$$x_1=x_2=0.$$

Действительно, разложим $V$ по степеням $z$, и пусть

$$V=V_0+zV_1+z^2V_2+\ldots.$$

Функции $V_0$, $V_1$, $V_2$, ... разложимы, в свою очередь, по степеням $x_1$ и $x_2$; но эти разложения не будут содержать ни членов степени 0, ни членов степени 1, так как при любом $z$ мы должны иметь

$$V=\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

при $x_1=x_2=0$.

Кроме того, $V_0$ также не содержит членов второй степени, в противном случае при переходе от $z>0$ к $z<0$ мы не смогли бы перейти от случая максимума к случаю минимума.

Напротив, $V_1$ будет содержать члены второй степени, по крайней мере, мы это предполагаем. Тогда рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} 0&=\frac{dV_0}{dx_1}+z\frac{dV_1}{dx_1}+z^2\frac{dV_2}{dx_1}+\ldots,\\ 0&=\frac{dV_0}{dx_2}+z\frac{dV_1}{dx_2}+z^2\frac{dV_2}{dx_2}+\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

о разрешении которых идет речь.

Пусть $U_0$ и $U_1$ — члены наинизшей степени функций $V_0$ и $V_1$; согласно тому, что мы видели, $U_1$ — второй степени, а $U_0$ — степени $p$, где $p$ больше двух; положим

$$(p-2)\mu=1;\quad x_1=y_1t;\quad x_2=y_2t;\quad V=Wt^p,\quad z=\pm t^{p-2}.$$

Функцию $W$ можно разложить по степеням $t$; пусть

$$W=W_0+tW_1+t^2W_2+\ldots.$$

Очевидно, мы имеем

$$W_0=\pm U_1t^{-2}+U_0t^{-p}=\pm U_1'+U_0',$$

где $U_1'=U_1t^{-2}$ и $U_0'=U_0t^{-p}$ — два однородных полинома относительно $y_1$ и $y_2$, один — степени 2, другой — степени $p$. Я беру знак $+$ или $-$ согласно тому, каким я принял $z=\pm t^{p-2}$. Выражение

$$\frac{dV}{dx_1}\frac{dU_1}{dx_2}-\frac{dV}{dx_2}\frac{dU_1}{dx_1}$$

будет также разложенным по степеням $t$, когда мы заменим в нем $x_1$ и $x_2$ на $y_1t$ и $y_2t$; оно будет содержать множителем определенную степень $t$; разделим его на этот множитель, и пусть $H$ есть частное. Это частное. будучи разложенным по степеням $t$, запишется в виде

$$H=H_0+tH_1+t^2H_2+\ldots.$$

$H_0$ будет первым из выражений

$$\frac{dW_k}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_k}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1},$$

не обращающимся в нуль.

Уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=0$$

можно заменить следующими:

$$H=0,\qquad \frac{dW}{dy_1}=0,$$

и я докажу что можно найти величины $y$ из этих уравнений в виде рядов, расположенных по целым и дробным степеням $t$, обращающихся в нуль вместе с $t$, с вещественными коэффициентами.

Для этого достаточно установить, согласно пунктам 32 и 33, что при $t=0$ эти уравнения допускают *вещественное* решение *нечетного порядка.*

Но при $t=0$ эти уравнения сводятся к

$$H_0=0, \quad \frac{dW_0}{dy_1}=0$$

или же

$$\frac{dW_k}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_k}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0 \tag{2}$$

и

$$\pm\frac{dU_1'}{dy_1}+\frac{dU_0'}{dy_1}=0. \tag{3}$$

Уравнение (2) означает, что если предположить, что $y_1$ и $y_2$ связаны соотношением $U_1'=\text{const}$, то $W_k$ допускает максимум или минимум.

Но, если считать $y_1$ и $y_2$ координатами точки на плоскости, то соотношение $U_1'=\text{const}$ представит эллипс, так как квадратичная форма $U_1$ (и, следовательно, форма $U_1'$) должна быть определенной, чтобы функция $V$ могла допускать максимум или минимум. Но так как эллипс — замкнутая кривая, то функция $W_k$ должна иметь, по крайней мере, один максимум и один минимум, когда точка $y_1$, $y_2$ будет описывать эту замкнутую кривую.

Следовательно, каково бы ни было постоянное значение, присвоенное $U_1'$, уравнение (2) будет допускать, по крайней мере, два корня, и *притом два корня нечетного порядка*, ибо мы видели в п. 34, что максимум или минимум всегда соответствует корню нечетного порядка. Впрочем, здесь, когда мы имеем только одну независимую переменную, теорема п. 34 почти очевидна.

При этих условиях следует различать два случая.

*Первый случай.* $U_0'$ не является степенью $U_1'$; в этом случае мы не имеем тождественно

$$\frac{dW_0}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dW_0}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0.$$

Следовательно, мы имеем $W_k=W_0$ и

$$H_0=\frac{dU_0'}{dy_1}\frac{dU_1'}{dy_2}-\frac{dU_0'}{dy_2}\frac{dU_1'}{dy_1}=0.$$

Тогда уравнение $H_0=0$ однородно относительно $y_1$ и $y_2$. Каково бы ни было постоянное значение, присвоенное $U_1'$, оно даст нам для отношения $y_1/y_2$ одно и то же значение.

Таким образом, мы найдем сначала $y_1/y_2$ из уравнения (2) и согласно предыдущему получим, по крайней мере, два решения нечетного порядка.

Пусть $y_1/y_2=\alpha_1/\alpha_2$ — одно из этих решений; положим $y_1=\alpha_1 u$, $y_2=\alpha_2 u$ и подставим в уравнение (3); получим

$$U_0'=Au^p, \quad U_1'=Bu^2,$$

и уравнение (3) приведется к следующему:

$$Au^{p-2} \pm B = 0.$$

Если $p-2$ — нечетно, это уравнение даст для $u$ вещественное значение

Если $p-2$ — четное, следует различать два случая.

Если $A$ и $B$ — одного и того же знака, то мы возьмем нижний знак

$$Au^{p-2} - B = 0.$$

Если $A$ и $B$ — противоположных знаков, мы возьмем верхний знак

$$Au^{p-2} + B = 0$$

и будем всегда иметь для $u$ два вещественных значения.

Во всех случаях эти вещественные решения суть простые.

Таким образом, уравнения (2) и (3) всегда допускают решения нечетного порядка.

*Второй случай.* Мы имеем

$$U'_0 = A\,(U'_1)^{p/2}.$$

В этом случае мы начнем с разрешения уравнения (3), которое записывается в виде

$$\frac{p}{2} A\,(U'_1)^{\frac{p}{2}-1} \pm 1 = 0.$$

Это уравнение дает значение $U'_1$; это значение вещественное и простое; но этого недостаточно, так как $U'_1$ — определенно-отрицательная форма; для того чтобы решение годилось, необходимо, чтобы найденное значение $U'_1$ было отрицательным; следовательно, мы выберем знак $\pm$.

После такого определения значения $U'_1$ мы приписываем $U'_1$ это постоянное значение и для разрешения уравнения (2) мы должны только искать максимумы и минимумы функций $W_k$. Как мы видели, найдем, по крайней мере, два решения нечетного порядка.

Итак, мы установили, что уравнения (2) и (3) всегда имеют вещественные решения нечетного порядка. Таким образом, теорема, сформулированная в начале этого пункта, доказана.

**332.** Пусть теперь $V$ — функция $n+1$ переменных

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \text{ и } z.$$

Я предполагаю:

1) что $V$ разложима по степеням $x$ и $z$;

2) что при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

каково бы ни было $z$, мы имеем

$$V=\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=\ldots=\frac{dV}{dx_n}=0;$$

3) рассмотрим совокупность членов $V$ второй степени относительно $x$. Они представляют квадратичную форму, которую можно приравнять сумме $n$ квадратов с положительными или отрицательными коэффициентами.

Я предполагаю, что когда $z$ переходит от положительных к отрицательным значениям, два из этих $n$ коэффициентов переходят от отрицательных к положительным значениям и что $n-2$ остальных коэффициентов не обращаются в нуль.

Я говорю, что при этих условиях уравнения

$$\frac{dV}{dx_1}=\frac{dV}{dx_2}=\ldots=\frac{dV}{dx_n}=0 \tag{1}$$

допускают вещественные решения, отличные от

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

В самом деле, разложим $V$ по степеням $z$, и пусть

$$V=V_0+V_1z+V_2z^2+\ldots.$$

Пусть $U_0$ и $U_1$ — совокупность членов второй степени из $V_0$ и $V_1$.

Совокупность $U_0$ является квадратичной формой, представимой в виде суммы $n-2$ квадратов, ибо мы знаем, что при $z=0$ два коэффициента, о которых шла речь выше, обращаются в нуль.

Таким образом, если мы рассмотрим дискриминант формы $U_0$, т. е. функциональный определитель от

$$\frac{dU_0}{dx_1},\ \frac{dU_0}{dx_2},\ \ldots,\ \frac{dU_0}{dx_n}$$

по

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,$$

то этот определитель, как и все его миноры первого порядка, обращается в нуль; однако не все миноры второго порядка обращаются в нуль, в противном случае третий коэффициент был бы нулем, чего мы не предполагаем.

Мы можем также предположить, что произведена такая линейная замена переменных, что $U_0$ принимает вид

$$U_0=A_3x_3^2+A_4x_4^2+\ldots+A_nx_n^2$$

и, следовательно, что функциональный определитель от

$$\frac{dU_0}{dx_3},\ \frac{dU_0}{dx_4},\ldots,\ \frac{dU_0}{dx_n}$$

относительно

$$x_3,\quad x_4,\ldots,\quad x_n$$

не равен нулю.

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{dV}{dx_3}=\frac{dV}{dx_4}=\ldots=\frac{dV}{dx_n}=0, \tag{2}$$

которые представляют собою $n-2$ уравнения из (1).

Я говорю, что из них можно найти

$$x_3,\quad x_4,\ldots,\quad x_n$$

в виде рядов, расположенных по степеням

$$z,\quad x_1,\quad x_2.$$

Для этого достаточно, в силу п. 30, чтобы функциональный определитель уравнений (2) относительно

$$x_3,\quad x_4,\ldots,\quad x_n$$

не обращался в нуль, если положить

$$z=x_1=x_2=x_3=x_4=\ldots=x_n=0.$$

Но уравнения (2), если положить $z=0$ и ограничиться членами первой степени относительно $x$, приводятся к следующим:

$$\frac{dU_0}{dx_3}=\frac{dU_0}{dx_4}=\ldots=\frac{dU_0}{dx_n}=0,$$

и мы только что видели, что соответствующий функциональный определитель не равен нулю.

Заменим в функции $V$ величины $x_3$, $x_4,\ldots$, $x_n$ их значениями, найденными таким образом из уравнений (2); я говорю, что мы окажемся теперь в условиях предыдущего пункта.

1) действительно, мы имеем только три независимых переменных $z$, $x_1$ и $x_2$;

2) функция $V$ разложима по степеням этих переменных;

3) уравнения (1) можно заменить следующими:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{\partial V}{\partial x_2}=0, \tag{3}$$

где символ $\partial$ означает производные, взятые в предположении, что $x_3$, $x_4, \ldots, x_n$ суть функции от $x_1$ и $x_2$, определенные уравнениями (2).

В самом деле, мы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{dV}{dx_1}+\frac{dV}{dx_3}\frac{dx_3}{dx_1}+\frac{dV}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_1}+\ldots+\frac{dV}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1},$$

откуда в силу уравнений (2)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{dV}{dx_1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{dV}{dx_2};$$

4) при $z > 0$ функция $V$, рассматриваемая как функция от $x_1$ и $x_2$, имеет максимум, когда эти две переменные равны нулю.

Чтобы увидеть это, нам необходимо найти в $V$ члены второй степени относительно $x_1$ и $x_2$. Пусть

$$W_0+zW_1+z^2W_2+\ldots$$

— эти члены. Чтобы получить члены

$$W_0+zW_1,$$

только и интересующие меня, я беру два члена

$$U_0+zU_1$$

и пренебрегаю остальными членами $V$, которые не могут повлиять на $W_0+zW_1$.

Я нахожу из уравнений (2)

$$x_3, \quad x_4, \ldots, x_n$$

в виде рядов, расположенных по степеням $x_1$ и $x_2$; я сохраняю в этих рядах только члены, которые имеют степень 1 относительно $x_1$ и $x_2$ и степень 0 или 1 относительно $z$; другими членами можно пренебречь, ибо они не влияют на

$$W_0+zW_1.$$

Тогда уравнения (2) сведутся к

$$2A_3x_3+z\frac{dU_1}{dx_3}=0,$$

$$2A_4x_4+z\frac{dU_1}{dx_4}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$2A_nx_n+z\frac{dU_1}{dx_n}=0.$$

Если в $U_0$ мы подставим вместо $x_3, x_4, \ldots, x_n$ значения, полученные таким образом, мы увидим, что $U_0$ станет делиться на $z^2$; что же касается $U_1$, то оно сведется к

$$U_1^0 + zU_1^1 + z^2U_1^2 + \ldots,$$

где $U_1^0$ не что иное, как значение функции $U_1$, когда $x_3, x_4, \ldots, x_n$ обращаются в нуль, и где $U_1^1$ и $U_1^2$ — две другие квадратичные формы от $x$. Итак, мы будем иметь

$$U_0 = z^2U_0^2; \qquad U_1 = U_1^0 + zU_1^1 + z^2U_1^2$$

и

$$U_0 + zU_1 = zU_1^0 + z^2(U_0^2 + U_1^1) + z^3U_1^2.$$

При вычислении $W_0 + zW_1$ я могу пренебречь двумя последними членами, которые делятся на $z^2$ и $z^3$, и получу просто

$$W_0 + zW_1 = zU_1^0.$$

Я докажу, что $V$ имеет максимум при $x_1 = x_2 = 0$ и при положительном и очень малом $z$; но достаточно показать это для $W_0 + zW_1$, т. е. для $zU_0^1$.

Таким образом, окончательно остается доказать, что $U_1^0$ — определенно-отрицательная форма.

Для того чтобы убедиться в этом, запишем квадратичную форму $U_1$ следующим образом:

$$U_1 = U_1' + U_1'';$$

$U_1'$ — сумма двух квадратов с коэффициентами, знак которых я не предрешаю; $U_1''$ зависит только от $n-2$ переменных

$$x_3, x_4, \ldots, x_n.$$

Это всегда возможно в силу общих свойств квадратичных форм.

Рассмотрим форму

$$U_0 + zU_1 = zU_1' + (U_0 + zU_1''),$$

где $z$ предполагается положительным и очень малым. Форму $U_0 + zU_1''$, зависящую только от $n-2$ переменных $x_3, x_4, \ldots, x_n$, можно приравнять сумме $n-2$ квадратов с коэффициентами, знаки которых должны быть теми же, что и знаки $A_3, A_4, \ldots, A_n$, поскольку эта форма очень мало отличается от $U_0$, так как $z$ очень мало́. *Следовательно, они не изменяют знака, когда $z$ переходит от положительных значений к отрицательным.*

Согласно нашим предположениям, когда $z$ переходит от положительных значений к отрицательным, наши $n-2$ коэффициента не обращаются в нуль, а два коэффициента переходят, напротив, от отрицательных значений к положительным.

Эти два последних могут быть только коэффициентами формы $U_1'$.

Таким образом, $U_1'$ *является суммой двух квадратов с отрицательными коэффициентами.*

Чтобы получить $U_1^0$, необходимо в $U_1$ положить

$$x_3=x_4=\ldots=x_n=0.$$

Тогда $U_1''$ обращается в нуль, а $U_1$ сводится к $U_1'$. Таким образом, $U_1^0$ — определенно-отрицательная форма, что требовалось доказать.

Итак, функция $V$, рассматриваемая как функция от $x_1$ и $x_2$, имеет максимум при положительном и очень малом $z$ и при $x_1=x_2=0$.

Мы могли бы увидеть также, или, скорее, видим в то же время, что $V$ имеет минимум при отрицательном и очень малом $z$ и при $x_1=x_2=0$.

Таким образом, мы пришли, как я это утверждал, к условиям предыдущего пункта, и теорему, сформулированную в начале этого пункта, можно считать установленной.

## Существование решений второго рода

333. Обратимся вновь к предположениям п. 330; мы определили функцию $S_{mp}$, которая зависит от $\mu$, от $2n$ переменных

$$\begin{gathered} X_1+\xi_1, \ldots, X_n+\xi_n, \\ Y_1+\eta_1,\ Y_2+\eta_2, \ldots, Y_n+\eta_n. \end{gathered} \tag{$\alpha$}$$

Величины $\xi_i$ и $\eta_i$ являются значениями $x_i$ и $y_i$ при $t=0$; $X_i$ и $Y_i$ суть значения $x_i$ и $y_i$ при $t=mpT$.

Мы хотим изучить решения уравнений

$$\frac{dS_{mp}}{d(X_i+\xi_i)}=\frac{dS_{mp}}{d(Y_i+\eta_i)}=0; \tag{1}$$

согласно пунктам 321 и 322 эти решения соответствуют периодическим решениям с периодом $mpT$. Из них мы уже знаем одно решение, поскольку периодическое решение с периодом $T$ является в то же время периодическим с периодом $mpT$; я покажу, что в их числе имеются и другие.

Но прежде я хочу показать, с помощью какого приема можно сделать $S_{mp}$ зависящей только от $\mu$ и $n-1$ переменных

$$\begin{gathered} X_1+\xi_1,\quad X_2+\xi_2,\quad \ldots,\quad X_{n-1}+\xi_{n-1}, \\ Y_1+\eta_1,\quad Y_2+\eta_2,\quad \ldots,\quad Y_{n-1}+\eta_{n-1},\quad Y_n+\eta_n. \end{gathered} \tag{$\beta$}$$

Для этого предположим, что

$$X_n+\xi_n=0.$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{\partial S_{mp}}{\partial (X_i+\xi_i)}=\frac{\partial S_{mp}}{\partial (Y_i+\eta_i)}=0. \qquad (1\text{bis})$$

Мы применяем символ $d$, чтобы обозначить производные от функции $S$, рассматриваемой как функция переменных ($\alpha$), и $\partial$, чтобы обозначить производные этой же самой функции $S$, рассматриваемой как функция переменных ($\beta$).

Я докажу эквивалентность уравнений (1) и (1bis). Из п. 322 имеем

$$dS=\sum[(X_i-\xi_i)\,d(Y_i+\eta_i)-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)\,d(X_i+\xi_i)].$$

Таким образом, уравнения (1) можно записать

$$-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)=X_i-\xi_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а уравнения (1bis)

$$-(Y_i-\eta_i-2m_i\pi)=(X_i-\xi_i)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$X_n-\xi_n=0.$$

Но в соответствии с уравнением живых сил мы имеем тождественно

$$F(X_i,\ Y_i)=F(\xi_i,\ \eta_i+2m_i\pi).$$

Однако согласно уравнениям (1bis) все $X_i$ равны $\xi_i$ и все $Y_i$ (за исключением одного) равны $\eta_i+2m_i\pi$.

Итак, предыдущее тождество можно записать следующим образом; я пишу для краткости

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n;\ \eta_1+2m_1\pi,\ \eta_2+2m_2\pi,\ \ldots,\ \eta_{n-1}+2m_{n-1}\pi,\ Y_n)=F(Y_n).$$

Тождество можно написать в виде

$$F[\eta_n+2m_n\pi+(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)]-F(\eta_n+2m_n\pi)=0$$

или в силу теоремы о конечных приращениях

$$(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)F'[\eta_n+2m_n\pi+\theta(Y_n-\eta_n-2m_n\pi)]=0, \qquad (2)$$

где $\theta$ заключено между 0 и 1 и где $F'$ — производная от $F$ по $Y_n$.

Пусть $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ — значения $\xi_i$ и $\eta_i$, соответствующие периодическому решению с периодом $T$; рассматриваемая область содержит только близкую окрестность точки $\mu=\mu_0$, $\xi_i=\xi_i^0$, $\eta_i=\eta_i^0$; следовательно, $\xi_i$ и $X_i$ никогда не отклоняются намного от $\xi_i^0$, а $\eta_i$ или $Y_i-2m_i\pi$ — от $\eta_i^0$; таким образом, второй множитель $F'$ в соотношении (2) никогда не отклоняется сильно от своего значения при $\xi_i=\xi_i^0$, $\eta_i=\eta_i^0$ и это значение, вообще говоря, не будет нулем.

Следовательно, первый множитель соотношения (2) должен обратиться в нуль, и мы имеем

$$Y_n - \eta_n - 2m_n\pi = 0.$$

Другими словами, уравнения (1bis) влекут за собой уравнения (1). Таким образом, мы можем считать $S_{mp}$ функцией переменных ($\beta$), и когда она будет иметь максимумы как функция переменных ($\beta$), она будет также иметь максимумы как функция переменных ($\alpha$).

Я назвал $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ значения $\xi_i$ и $\eta_i$, которые соответствуют периодическому решению с периодом $T$; соответствующие значения $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ будут $2\xi_i^0$ и $2\eta_i^0+2m_imp\pi$ (если в периодическом решении с периодом $T$ переменная $y_i$ меняется на $y_i+2m_i\pi$ в соответствии с предположениями п. 322).

Пусть $S_0$ — соответствующее значение $S_{mp}$; положим

$$\mu = \mu_0 + \mu'; \qquad V = S_{mp} - S_0; \qquad X_i + \xi_i = 2\xi_i^0 + \xi_i',$$
$$Y_i + \eta_i = 2\eta_i^0 + 2m_imp\pi + \eta_i'$$

и будем считать $V$ функцией $\mu'$ и величин $\xi'$ и $\eta'$; функция $V$ будет находиться в тех же самых условиях, что и функция $V$ предыдущего пункта.

Действительно, каково бы ни было $\mu'$, функция $V$ и ее первые производные по $\xi'$ и $\eta'$ обращаются в нуль, когда

$$\xi_i' = \eta_i' = 0.$$

Если рассмотреть совокупность членов $V$ второй степени относительно величин $\xi'$ и $\eta'$ и считать эту совокупность квадратичной формой, состоящей из суммы квадратов, то мы увидим, что два из коэффициентов при этих квадратах переходят от отрицательных значений к положительным или от положительных значений к отрицательным, когда $\mu'$ изменяет знак, и что другие коэффициенты не обращаются в нуль.

Действительно, выражение

$$\frac{M_1}{\sqrt{-1}} \sin \frac{pm\alpha_1 T}{\sqrt{-1}}$$

меняет знак, а другие выражения

$$\frac{M_k}{\sqrt{-1}} \sin \frac{pm\alpha_k T}{\sqrt{-1}}$$

не обращаются в нуль. Коэффициент, который в п. 323 я назвал $D$, также не обращается в нуль и притом других коэффициентов нет, так как мы имеем только $2n-1$ переменных — переменные ($\beta$).

Таким образом, мы находимся в условиях предыдущего пункта и можем утверждать, что уравнения

$$\frac{dV}{d\xi_i'}=\frac{dV}{d\eta_i'}=0$$

допускают вещественные решения, отличные от решения $\xi_i'=\eta_i'=0$, или, что то же, что уравнения

$$\frac{dS_{mp}}{d(X_i+\xi_i)}=\frac{dS_{mp}}{d(Y_i+\eta_i)}=0 \tag{1}$$

допускают вещественные решения, отличные от решений, соответствующих периодическому решению с периодом $T$.

Но максимумы функции $S_{mp}$ или вообще решения уравнений (1) соответствуют периодическим решениям с периодом $mpT$.

Таким образом, мы должны заключить, что наши дифференциальные уравнения допускают периодические решения с периодом $mpT$, отличные от решения с периодом $T$, сливающиеся с этим решением при $\mu=\mu_0$ и очень мало отличающиеся от него при $\mu$, близком к $\mu_0$.

Если мы обратим внимание на предыдущее рассуждение, то увидим, что не требуется, чтобы периодическое решение с периодом $T$ соответствовало максимуму $S_{mp}$.

Итак, мы сможем предположить, что $m=1$.

Не требуется даже, чтобы решение с периодом $T$ было устойчивым; достаточно, чтобы один из характеристических показателей $\alpha_1$ при $\mu=\mu_0$ был равен

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Если уравнения динамики допускают такое периодическое решение с периодом $T$, что один из характеристических показателей близок к

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

то они будут также допускать периодические решения с периодом $pT$, мало отличающиеся от решения с периодом $T$ и сливающиеся с ним, когда характеристический показатель становится равным

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT}.$$

Это решения второго рода [15].

### Замечание

334. При всех этих рассуждениях предполагают, что $S_{mp}$ — однозначная функция от $X_i+\xi_i$, $Y_i+\eta_i$. Только благодаря этому условию можно утверждать, что все максимумы $S_{mp}$ соответствуют периодическому решению (см. п. 321). Это обстоятельство, на которое следует обратить самое серьезное внимание, представляет препятствие, с которым мы часто встречаемся, когда хотим вывести следствия из теоремы п. 321.

Проверим, действительно ли $S_{mp}$ является однозначной функцией от этих переменных. Мы можем предположить, что $m=1$ согласно тому, что мы только что видели. С другой стороны, $S_p$, очевидно, является однозначной функцией от величин $\xi_i$ и $\eta_i$; она будет также однозначной функцией от $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$, если только функциональный определитель величин $X_i+\xi_i$ и $Y_i+\eta_i$ относительно $\xi_i$ и $\eta_i$ не обращается в нуль в рассматриваемой области; так как эта область сводится к близкой окрестности значений

$$\mu=\mu_0, \quad \xi_i=\xi_i^0, \quad \eta_i=\eta_i^0,$$

то достаточно, чтобы функциональный определитель не был равен нулю в этой точке. Этот функциональный определитель записывается в виде (для определенности предполагается, что $n=2$)

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{d\xi_1}+1 & \frac{dX_1}{d\eta_1} & \frac{dX_1}{d\xi_2} & \frac{dX_1}{d\eta_2} \\ \frac{dY_1}{d\xi_1} & \frac{dY_1}{d\eta_1}+1 & \frac{dY_1}{d\xi_2} & \frac{dY_1}{d\eta_2} \\ \frac{dX_2}{d\xi_1} & \frac{dX_2}{d\eta_1} & \frac{dX_2}{d\xi_2}+1 & \frac{dX_2}{d\eta_2} \\ \frac{dY_2}{d\xi_1} & \frac{dY_2}{d\eta_1} & \frac{dY_2}{d\xi_2} & \frac{dY_2}{d\eta_2}+1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, необходимо проверить, что $S$-уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{d\xi_1}-S & \frac{dX_1}{d\eta_1} & \frac{dX_1}{d\xi_2} & \frac{dX_1}{d\eta_2} \\ \frac{dY_1}{d\xi_1} & \frac{dY_1}{d\eta_1}-S & \frac{dY_1}{d\xi_2} & \frac{dY_1}{d\eta_2} \\ \frac{dX_2}{d\xi_1} & \frac{dX_2}{d\eta_1} & \frac{dX_2}{d\xi_2}-S & \frac{dX_2}{d\eta_2} \\ \frac{dY_2}{d\xi_1} & \frac{dY_2}{d\eta_1} & \frac{dY_2}{d\xi_2} & \frac{dY_2}{d\eta_2}-S \end{vmatrix}=0$$

не имеет корня, равного $-1$.

Корни этого уравнения, согласно п. 60, равны

$$e^{\alpha_p T},$$

где $\alpha$ — характеристические показатели; следовательно, необходимо проверить, что не имеет места равенство

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

где $k$ — целое, но показатель $\alpha_1$ равен по предположению

$$\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT},$$

где $k$ — целое, а другие показатели, вообще говоря, несоизмеримы с $\pi\sqrt{-1}/T$.

Итак, трудности, которая нас интересует, не представится.

*Для того чтобы избежать ее, я и предположил в п.* 330, *что*

$$\alpha_1 = \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT} \qquad (k \text{ — целое}),$$

*а не*

$$\alpha_1 = \frac{k\pi\sqrt{-1}}{pT} \qquad (k \text{ — целое}).$$

## Частные случаи

**335.** Скажем несколько слов о наиболее простых случаях; предположим, что имеются только две степени свободы.

Предположим, что форма, аналогичная той, которую я при анализе п. 331 назвал $U_0$, однородна и имеет только третью степень относительно $x_1$ и $x_2$.

Уравнение

$$\frac{dU_0}{dx_1}\frac{dU_1}{dx_2} - \frac{dU_0}{dx_2}\frac{dU_1}{dx_1} = 0 \tag{1}$$

всегда допускает, как мы это видели, вещественные корни.

Теорема здесь, впрочем, очевидна, поскольку это уравнение третьей степени относительно $x_1/x_2$. Оно может иметь один или три вещественных корня; предположим сначала для определенности, что оно имеет только один корень.

Тогда, если мы положим

$$x_1 = a_1\rho\cos\varphi + b_1\rho\sin\varphi,$$
$$x_2 = a_2\rho\cos\varphi + b_2\rho\sin\varphi,$$

выбирая здесь коэффициенты $a$ и $b$ таким образом, чтобы $U_1$ сводилась к $-\rho^2$, то отношение

$$\frac{U_0}{U_1^{3/2}},$$

рассмотренное в п. 331, будет допускать только один максимум и один минимум, когда $\varphi$ будет изменяться от 0 до $2\pi$; эти максимум и минимум, притом равные и противоположные по знаку, будут соответствовать значениям $\varphi$, отстоящим друг от друга на $\pi$.

Тогда мы получим

$$U_0 + zU_1 = \rho^3 f(\varphi) - z\rho^2.$$

Функция $f(\varphi)$ имеет максимум и минимум, равные и противоположные по знаку; тогда функция $U_0+zU_1$ имеет:

при $z > 0$ максимум при $\rho=0$ и два минимакса [16];

при $z < 0$ минимум при $\rho=0$ и два максимума.

По примеру англичан я называю *минимаксом* точку, в которой первые производные обращаются в нуль и нет ни максимума, ни минимума.

Функция $V$ будет вести себя таким же образом, поскольку если $z$ очень мало́, влияют только члены $U_0+zU_1$.

Следовательно, каково бы ни было $z$, дифференциальные уравнения будут допускать:

решение с периодом $T$, первого рода, устойчивое;

решение с периодом $pT$, второго рода, устойчивое при $z < 0$ и неустойчивое при $z > 0$.

Предположим теперь, что уравнение (1) имеет три вещественных корня.

Функция $f(\varphi)$ будет иметь три максимума и три минимума, попарно равные и противоположные по знаку.

В этом случае $U_0+zU_1$ и, следовательно $V$, имеет:

при $z > 0$ максимум при $\rho=0$ и шесть минимаксов;

при $z < 0$ минимум при $\rho=0$ и шесть максимумов.

Таким образом, каково бы ни было $z$, дифференциальные уравнения будут допускать:

решение с периодом $T$, первого рода, устойчивое;

три решения с периодом $pT$, второго рода.

Дальше мы увидим, что с определенной точки зрения не все эти решения являются различными.

Перейдем к немного более сложному случаю и предположим, что $U_0$ — четвертой степени.

В этом случае уравнение (1) четвертой степени, а так как оно всегда имеет, согласно п. 331, по крайней мере два вещественных корня, то оно будет их иметь два или четыре. Тогда мы будем иметь уже не

$$f(\varphi) = -f(\varphi + \pi),$$

а

$$f(\varphi) = f(\varphi + \pi).$$

Предположим сначала, что имеется только два вещественных корня. Тогда функция $f(\varphi)$ будет иметь один максимум и один минимум, когда $\varphi$ меняется от 0 до $\pi$ и столько же, когда $\varphi$ меняется от $\pi$ до $2\pi$.

Необходимо различать три случая в зависимости от знаков этих максимума и минимума.

*Первый случай.* Максимум и минимум положительны.

Функции $U_0+zU_1$ и $V$ имеют:

при $z>0$ максимум при $\rho=0$, два минимума и два минимакса;

при $z<0$ минимум при $\rho=0$.

Дифференциальные уравнения допускают, кроме решения первого рода, которое существует всегда, два решения второго рода при $z>0$ и не допускают ни одного решения при $z<0$; из этих двух решений одно устойчивое и одно неустойчивое.

*Второй случай.* Максимум положителен, а минимум отрицателен.

Функции $U_0+zU_1$ и $V$ имеют:

при $z>0$ максимум при $\rho=0$, два минимакса;

при $z<0$ минимум при $\rho=0$, два минимакса.

Дифференциальные уравнения всегда допускают, кроме решения первого рода, которое устойчиво, неустойчивое решение второго рода.

*Третий случай.* Сам максимум отрицателен.

Тогда дифференциальные уравнения имеют:

при $z>0$ устойчивое решение первого рода;

при $z<0$ устойчивое решение первого рода и два решения второго рода, из которых одно устойчиво, другое — неустойчиво.

Остается изучить случай, когда уравнение (1) имеет четыре вещественных корня.

Тогда уравнения допускают:

при $z>0$ устойчивое решение первого рода, $h$ неустойчивых решений второго рода, $k$ устойчивых решений второго рода;

при $z<0$ устойчивое решение первого рода, $2-h$ устойчивых решений второго рода, $2-k$ неустойчивых решений второго рода.

В зависимости от знаков максимумов и минимумов функции $f(\varphi)$, целые числа $h$ и $k$ могут принимать следующие значения:

$h=k=2$; $h=2$, $k=1$; $h=2$, $k=0$; $h=1$, $k=0$; $h=k=0$; $h=k=1$.

# Глава XXIX

## РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

336. Пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

двойной ряд переменных и $F$ — какая-нибудь функция этих переменных. Рассмотрим интеграл

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left(-F+\sum y_i\frac{dx_i}{dt}\right)dt.$$

Вариацию этого интеграла можно записать в виде

$$\delta J=\int\left(-\delta F+\sum\delta y_i\frac{dx_i}{dt}+\sum y_i\frac{d\delta x_i}{dt}\right)dt.$$

Чтобы эта вариация была равна нулю, необходимо сначала, чтобы было

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i},\tag{1}$$

что дает нам канонические уравнения, но это условие не является достаточным. Если оно выполнено, то

$$\delta J=\sum\left[y_i\delta x_i\right]_{t=t_0}^{t=t_1}$$

и необходимо еще, чтобы правая часть этого равенства была нулем. Это как раз имеет место, если предположить, что $\delta x_i$ обращаются в нуль при обоих пределах, т. е. что начальные и конечные значения $x_i$ заданы. В этих условиях интеграл $J$, называемый *действием*, есть минимум.

Заменим переменные; пусть $x_i'$, $y_i'$ — новые переменные, и вообразим, что они выбраны таким образом, чтобы выражение

$$\sum y_i'dx_i'-\sum y_idx_i=dS\tag{2}$$

было полным дифференциалом. Мы видели, что в этом случае замена переменных не изменяет канонической формы уравнений; этот результат является, впрочем, непосредственным следствием различных предложений, которые сейчас последуют; пусть

$$J' = \int_{t_0}^{t_1} \left(-F + \sum y'_i \frac{dx'_i}{dt}\right) dt.$$

Мы имеем

$$J' - J = \int \frac{dS}{dt} dt = S_1 - S_0,$$

где $S_0$ и $S_1$ — значения функции $S$ при $t = t_0$ и $t = t_1$.

Таким образом,

$$\delta J' = \delta J + [\delta S]_{t=t_0}^{t=t_1}. \tag{3}$$

Если канонические уравнения (1) удовлетворяются, то мы имеем

$$\delta J = +\left[\sum y_i \delta x_i\right]_{t=t_0}^{t=t_1} \tag{4}$$

и, следовательно, в силу (2) и (3)

$$\delta J' = +\left[\sum y'_i \delta x'_i\right]_{t=t_0}^{t=t_1}. \tag{4bis}$$

Подобно тому как соотношение (4) эквивалентно уравнениям (1), соотношение (4bis) эквивалентно уравнениям

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{dF}{dy'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{dF}{dx'_i}. \tag{1bis}$$

Но мы только что видели, что (4) равносильно (4bis); уравнения (1) эквивалентны уравнениям (1bis), что означает, что, как мы уже знаем, замена переменных не изменяет канонической формы уравнений.

Тогда действие $J'$ будет минимумом, если предположить, что начальные и конечные значения переменных $x'_i$ заданы. Каждой системе канонических переменных соответствует, таким образом, новая форма принципа наименьшего действия.

Уравнения (1) влекут за собой интеграл живых сил

$$F = h, \tag{5}$$

где $h$ — постоянная.

До сих пор мы предполагали два предела $t_0$ и $t_1$ заданными; что произойдет, если считать эти пределы переменными? Так как $F$ не зависит явно от времени, то мы не ограничим общности, предполагая, что $t_0$ постоянно и давая приращение $\delta t_1$ только пределу $t_1$. Предположим, например, что $t_0 = 0$ и вообразим, что после вариации переменные $x_i$ и $y_i$

имеют в момент времени $t\ (t_1+\delta t_1)/t_1$ те же значения, которые они имели в момент $t_1$ до вариации.

До вариации мы будем иметь

$$J=-ht_1+\sum\int y_i\frac{dx_i}{dt}\,dt.$$

Но интеграл

$$\int y_i\frac{dx_i}{dt}\,dt=\int y_i dx_i$$

не зависит от времени; следовательно, его вариация равна нулю. Таким образом, получаем

$$\delta J=-h\delta t_1.$$

Производная от действия $J$ по верхнему пределу интегрирования $t_1$ равна, следовательно, постоянной энергии $h$ с обратным знаком.

Если эта постоянная равна нулю, действие $J$ снова является минимумом, если считать начальные и конечные значения переменных $x_i$ заданными *и если даже не считать заданными начальное и конечное значения времени* $t_0$ *и* $t_1$.

Если заменить $F$ на $F-h$, $J$ заменится на

$$J+h(t_1-t_0); \tag{6}$$

так как уравнения (1) не изменяются, то это выражение (6) опять есть минимум.

Но если заменить $F$ на $F-h$, постоянная живых сил, которая была равна $h$, становится нулем; следовательно, выражение (6) есть минимум, даже если мы не считаем $t_1$ и $t_0$ заданными.

Действие $J$ есть минимум, каковы бы ни были переменные $x_i$ и $y_i$; таким образом, оно будет a fortiori минимумом, если на него налагается новое условие, совместное с уравнениями (1).

Наложим, например, условие, чтобы удовлетворялся первый ряд уравнений (1), т. е.

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},$$

откуда

$$J=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(-F+\sum y_i\frac{dF}{dy_i}\right)dt=\int\limits_{t_0}^{t_1}H\,dt,$$

если положить

$$H=-F+\sum y_i\frac{dF}{dy_i}.$$

Действие $J$, определенное таким образом, есть минимум.

Это принцип наименьшего действия, взятый в его гамильтоновой форме.

Предположим теперь, что

$$h=0.$$

Таким образом, мы не будем более считать переменные $x_i$ и $y_i$ независимыми, а подчиним их условию

$$F=0.$$

Это ограничение, совместное с уравнениями (1), не мешает действию $J$ быть минимумом.

Тогда

$$J=\int\sum y_i\frac{dx_i}{dt}\,dt,$$

и, так как $h$ равно нулю, этот интеграл является минимумом, если даже не считать заданными $t_1$ и $t_0$.

Тогда наложим условия

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},$$

откуда найдем величины $y_i$ в функции $dx_i/dt$

$$y_i=\varphi_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}\right)$$

или же

$$y_i=\varphi_i\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dx_1}\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_3}{dx_1}\frac{dx_1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}\right). \tag{7}$$

Подставим вместо $y_i$ их значения (7) в $J$ и в уравнение

$$F=0.$$

Из этого уравнения найдем $dx_1/dt$ в функции величин $x_k$ и $dx_k/dx_1$. Затем подставим это значение $dx_1/dt$ в выражения (7) и в $J$; этот последний интеграл примет вид

$$\int\sum y_i\frac{dx_i}{dx_1}\,dx_1=\int\Phi\,dx_1,$$

где $\Phi$ — функция переменных $x_k$ и производных $dx_k/dx_1$. Этот интеграл, взятый таким образом в форме, независимой от времени, снова есть минимум. Это принцип наименьшего действия в форме Мопертюи.

Если бы $h$ не было нулем, то мы должны были бы только заменить $F$ на $F-h$.

337. Изучим сначала наиболее важный частный случай. Предположим, что мы имеем

$$F=T-U,$$

где $T$ — однородная функция второй степени относительно переменных $y_i$, тогда как $U$ не зависит от этих переменных.

Тогда

$$\sum y_i \frac{dF}{dy_i}=2T, \qquad H=T+U.$$

Согласно принципу Гамильтона, интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$$

должен быть минимумом.

Посмотрим, какую форму принимает принцип Мопертюи; уравнение живых сил записывается в виде

$$T-U=h.$$

Тогда действие в смысле Мопертюи выражается в виде

$$\int(T+U+h)\,dt.$$

В уравнениях

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF_i}{dy_i}=\frac{dT}{dy_i}$$

правые части линейны и однородны относительно переменных $y_i$; следовательно, $T$ — однородная функция второй степени относительно $dx_i/dt$; пусть тогда $d\tau^2$ означает результат замены в $T$ производных $dx_i/dt$ дифференциалами $dx_i$; мы получим

$$T=\frac{d\tau^2}{dt^2}$$

и $d\tau^2$ будет квадратичной и однородной формой относительно $n$ дифференциалов $dx_i$; отсюда выводим

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{T}}=\frac{d\tau}{\sqrt{U+h}}.$$

Тогда выражение действия по Мопертюи имеет вид

$$2\int d\tau\,\sqrt{U+h}.$$

338. Чтобы можно было изучить другие частные случаи, положим для краткости

$$x_i'=\frac{dx_i}{dt};$$

найдем $y_i$ из уравнений

$$x'_i = \frac{dF}{dy_i}$$

так, чтобы принять за новые переменные величины $x_i$ и $x'_i$; обозначим через обычные $d$ производные, взятые по $x_i$ и $y_i$, и через $\partial$ производные, взятые по $x_i$ и $x'_i$.

Мы легко найдем хорошо известные соотношения:

$$y_i = \frac{\partial H}{\partial x'_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{dF}{dx_i},$$

$$F = \sum x'_i \frac{\partial H}{\partial x'_i} - H$$

и увидим, что уравнения (1) эквивалентны уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

При этих условиях исследуем случай, когда $H$ имеет вид

$$H = H_0 + H_1 + H_2,$$

где $H_0$, $H_1$, $H_2$ — однородные функции соответственно степени 0, 1, 2 относительно переменных $x'_i$.

Тогда мы имеем

$$\sum x'_i \frac{\partial H}{\partial x'_i} = 2H_2 + H_1,$$

$$F = H_2 - H_0,$$

и величины

$$y_i = \frac{\partial H_2}{\partial x'_i} + \frac{\partial H_1}{\partial x'_i}$$

будут линейными функциями, но не однородными относительно $x'_i$.

Гамильтоново действие сохраняет ту же форму

$$\int H dt.$$

Посмотрим, какой вид примет действие по Мопертюи.

Пусть $h$ — постоянная живых сил; выражение действия по Мопертюи будет иметь вид

$$\int (H + h)\, dt,$$

но его необходимо привести к форме, независимой от времени.

Для этого положим

$$H_2 = \frac{d\tau^2}{dt^2}$$

и

$$H_1 = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Функция $H_2$ является не чем иным, как живой силой, а $d\tau^2$ есть результат замены в живой силе переменных $x_i'$ дифференциалами $dx_i$. Аналогично, $d\sigma$ представляет собой функцию $H_1$ после замены в ней $x_i'$ на $dx_i$; таким образом, это линейная однородная форма относительно дифференциалов $dx_i$.

Если принять во внимание уравнение живых сил

$$H_2 = H_0 + h,$$

откуда

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{H_0 + h}},$$

то действие по Мопертюи примет вид

$$\int \left[2d\tau\sqrt{H_0 + h} + d\sigma\right].$$

Таким образом, принцип Мопертюи приложим к случаю, который нас интересует, как и к случаю абсолютного движения; но здесь имеется существенное различие с точки зрения того, что сейчас последует.

Во всех задачах, с которыми мы встретимся, живая сила $T$ или $H_2$ существенно положительна; это определенно-положительная квадратичная форма. В случае абсолютного движения (п. 337) действие

$$\int 2d\tau\sqrt{U + h}$$

существенно положительно; оно не изменяется при взаимной перестановке пределов. Напротив, в настоящем случае действие состоит из двух членов; первый

$$\int 2d\tau\sqrt{H_0 + h}$$

всегда положителен и не изменяет знака при перестановке пределов.

Второй

$$\int d\sigma$$

меняет знак, если переставить пределы; таким образом, он может быть положительным или отрицательным.

Если заметить, кроме того, что в некоторых случаях первый член обращается в нуль без того, чтобы обратился в нуль второй член, то мы увидим, что действие не всегда положительно, и это обстоятельство доставит нам в последующем много затруднений.

**339.** Для того чтобы показать, как предыдущие рассуждения применяются к относительному движению, рассмотрим сначала абсолютное движение системы; итак, пусть

$$H=T+U,$$

и представим себе, что положение системы определено $n+1$ переменными

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \omega,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ достаточны для определения *относительного* положения различных точек системы, а $\omega$ — для определения ориентации системы в пространстве.

Если система изолированная, то $U$ будет зависеть только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $T$ будет однородной квадратичной формой относительно $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \omega'$, коэффициенты которой зависят только от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда мы будем иметь уравнение

$$\frac{dT}{d\omega'}=p,$$

где $p$ есть постоянная; это интеграл площадей.

При этих предположениях пусть $J$ есть гамильтоново действие

$$J=\int\limits_{t_0}^{t_1} H\,dt;$$

если уравнения движения удовлетворяются, мы будем иметь

$$\delta J=\left[\sum \frac{dT}{dx'_i}\delta x_i+\frac{dT}{d\omega'}\delta\omega\right]_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Действие будет минимумом (или, вернее, его первая вариация будет равна нулю), если начальные и конечные значения переменных $x_i$ и $\omega$ считать заданными, т. е. если $\delta x_i=\delta\omega=0$ при $t=t_0$ и $t=t_1$.

Предположим теперь, что мы считаем заданными начальные и конечные значения $x_i$, но не $\omega$; мы получим

$$\delta J=[p\delta\omega]_{t=t_0}^{t=t_1}=p\,[\delta\omega]_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Тогда пусть

$$H'=H-p\omega'$$

и

$$J' = \int H' dt;$$

очевидно, будет

$$\delta J' = 0.$$

Из уравнения $\frac{dT}{d\omega'} = p$ мы находим величину $\omega'$, которая является линейной неоднородной функцией от $x'_i$; мы видим, следовательно, что $H'$ является неоднородной квадратичной функцией относительно $x'_i$.

Таким образом, $H'$ имеет вид $H_0 + H_1 + H_2$, изученный в п. 338. Следовательно, интеграл $J'$ будет минимумом, если даже начальные и конечные значения $\omega$ не считаются заданными.

Притом мы имеем

$$J' = J - p(\omega_1 - \omega_0),$$

где $\omega_0$ и $\omega_1$ — значения $\omega$ при $t = t_0$ и $t = t_1$.

**340.** Предположим теперь, что система отнесена к подвижным осям и подвержена действию сил, которые зависят только от относительного положения системы относительно подвижных осей. Предположим, кроме того, что оси равномерно вращаются с постоянной угловой скоростью $\omega'$.

Эта проблема немедленно сводится к предыдущей; необходимо только приписать подвижным осям очень большой момент инерции таким образом, чтобы угловая скорость оставалась постоянной.

Тогда для абсолютного движения имеем

$$H = T + U = T_1 + T_2 + U.$$

Силовая функция $U$ зависит только от переменных $x_i$, которые определяют положение системы относительно подвижных осей; живая сила системы $T_1$ зависит от $x_i$ и является квадратичной формой относительно $x'_i$ и $\omega'$; живая сила подвижных осей $T_2$ равна

$$\frac{1}{2}\omega'^2,$$

а момент инерции $I$ очень велик.

Тогда получается

$$p = \frac{dT_1}{d\omega'} + I\omega'$$

и

$$H' = H - p\omega' = (T_1 + T_2 + U) - \frac{dT_1}{d\omega'}\omega' - I\omega'^2$$

или

$$H' = T_1 + U - \frac{dT_1}{d\omega'}\omega' - \frac{I\omega'^2}{2}.$$

Но

$$I\omega' = p - \frac{dT_1}{d\omega'}.$$

Так как $I$ и $p$ очень велики по отношению к $dT_1/d\omega'$, то это уравнение приближенно дает

$$\omega' = \frac{p}{I}$$

и точнее

$$\omega' = \frac{p}{I} - \frac{1}{I}\frac{dT_1}{d\omega'}.$$

Кроме того,

$$\frac{I\omega'^2}{2} = \frac{p^2}{2I} - \frac{p\frac{dT_1}{d\omega'}}{I} + \frac{1}{2I}\left(\frac{dT_1}{d\omega'}\right)^2.$$

Мы находим таким образом

$$H' = T_1 + U - \frac{p^2}{2I} + \frac{1}{2I}\left(\frac{dT_1}{d\omega'}\right)^2.$$

Предпоследний член в правой части является постоянной; последним можно пренебречь, потому что $I$ очень велико.

Так как можно прибавить к $H'$, ничего не изменяя в принципе Гамильтона, какую угодно постоянную, то мы сможем положить

$$H'' = T_1 + U,$$

а мы знаем, что интеграл

$$J'' = \int H''dt$$

должен быть минимумом (даже тогда, когда начальное и конечное значения $\omega$ не заданы).

В выражении $H''$ следует считать $\omega'$ заданной постоянной; тогда $H''$ является квадратичной неоднородной функцией от $x'_i$ вида $H_0+H_1+H_2$.

Пусть, например, материальная точка массы 1 движется в плоскости, и ее координаты относительно подвижных осей суть $\xi$ и $\eta$.

Мы будем иметь

$$T_1 = \frac{(\xi' - \omega'\eta)^2 + (\eta' + \omega'\xi)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$H_2 = \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2}, \qquad H_1 = \omega'(\xi\eta' - \xi'\eta), \qquad H_0 = \frac{\omega'^2}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U.$$

Интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (H_2 + H_1 + H_0)\, dt$$

будет тогда минимумом, если считать заданными пределы $t_0$ и $t_1$, а также начальные и конечные значения $\xi$ и $\eta$.

Тогда интеграл живых сил запишется в виде

$$H_2 = H_0 + h,$$

и мы видели, что интеграл

$$J' = \int (H_2 + H_1 + H_0 + h)\, dt = J + h(t_1 - t_0)$$

есть минимум, если даже не считать заданными $t_0$ и $t_1$.

Тогда мы находим

$$J' = \int (2H_2 + H_1)\, dt = \int \left[ds\sqrt{2(H_0 + h)} + \omega'(\xi d\eta - \eta d\xi)\right],$$

полагая

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

Это обобщенный принцип Мопертюи.

В задачах, которые мы будем рассматривать, $U$ будет всегда положительной, и, следовательно, $J$ будет существенно положительным.

Это не всегда будет иметь место относительно $J'$. Действительно, если $h$ — отрицательно, то мы должны предположить, что точка $\xi$, $\eta$ не выходит за пределы области, определенной неравенством

$$H_0 + h > 0.$$

Первый член выражения под знаком интеграла, равный $ds\sqrt{H_0 + h}$, существенно положителен; это не выполнено для второго члена, который меняет знак при перемене направления, в котором предполагается обход траектории.

Если точка $\xi$, $\eta$ очень близка к границе области, в которой она заключена, если, следовательно, сумма $H_0+h$ очень мала, то первый член будет очень малым, и знак будет определяться вторым членом.

Итак, $J'$ не является существенно положительным. В этом мы убеждаемся также при помощи уравнения

$$J' = J + h(t_1 - t_0).$$

Если $h$ отрицательно, то первый член $J$ положителен, а второй — отрицателен.

### Кинетические фокусы

341. До сих пор, когда я говорил, что *такой-то интеграл есть минимум*, я пользовался сокращенным, но неправильным оборотом речи, который, впрочем, никого не мог ввести в заблуждение; я хотел сказать,

что *первая вариация этого интеграла есть нуль*; это условие необходимо для того, чтобы имел место минимум, но оно недостаточно.

Теперь мы исследуем, каково условие того, чтобы интегралы $J$ и $J'$, которые мы изучили в предыдущих параграфах, *действительно* были минимальны. Это исследование связано с трудным вопросом о вторых вариациях и с изящной теорией кинетических фокусов.

Напомним принципы этих теорий.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — функции от $t$; пусть $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — их производные; рассмотрим интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x_i, x'_i)\, dt,$$

первая вариация которого $\delta J$ равна нулю, если считать заданными начальные и конечные значения функций $x_i$.

Для того чтобы этот интеграл был минимумом, требуется сначала условие, необходимое, но не достаточное, которое я назову условием $(A)$. *Именно, чтобы разность*

$$f(x_i, x'_i + \varepsilon_i) - \sum \varepsilon_i \frac{df}{dx'_i},$$

*рассматриваемая как функция от* $\varepsilon_i$, *была минимумом* [17].

Условие $(A)$ не является достаточным, по крайней мере, если пределы интегрирования не близки. За исключением этого случая, к нему необходимо присоединить другое условие, которое я назову условием $(B)$. Чтобы сформулировать его, мне необходимо сначала напомнить определение кинетических фокусов.

Чтобы

$$\delta J = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы функции $x_i$ удовлетворяли $n$ дифференциальным уравнениям второго порядка, которые я назову уравнениями $(C)$.

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t)$$

— решение этих уравнений.

Положим в качестве бесконечно близкого решения

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

и составим уравнения в вариациях, линейные уравнения, которым удовлетворяют $\xi_i$ и которые я назову $(D)$.

Общее решение этих уравнений $(D)$ будет иметь вид

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{k=2n} A_k \xi_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Величины $A_k$ есть $2n$ постоянных интегрирования, $\xi_{i,k}$ есть $2n^2$ функций от $t$, полностью определенных и соответствующих $2n$ частным решениям линейных уравнений $(D)$.

В этих предположениях напишем, что все $\xi_{i,k}$ обращаются в нуль для двух заданных моментов $t=t'$ и $t=t''$; получим $2n$ линейных уравнений, из которых сможем исключить $2n$ неизвестных $A_k$.

Таким образом, мы получим уравнение

$$\Delta(t', t'')=0,$$

где $\Delta$ есть определитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \xi'_{1,1} & \xi'_{1,2} & \ldots & \xi'_{1,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi'_{n,1} & \xi'_{n,2} & \ldots & \xi'_{n,2n} \\ \xi''_{1,1} & \xi''_{1,2} & \ldots & \xi''_{1,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi''_{n,1} & \xi''_{n,2} & \ldots & \xi''_{n,2n} \end{vmatrix};$$

величины $\xi'_{i,k}$ и $\xi''_{i,k}$ означают результат замены $t$ в функции $\xi_{i,k}$ на $t'$ и на $t''$.

Если моменты $t'$ и $t''$ удовлетворяют уравнению $\Delta=0$, мы скажем, что это два *сопряженных момента* и что две точки $M'$ и $M''$ пространства $n$ измерений, имеющие координатами соответственно

$$\varphi_1(t'),\ \varphi_2(t'),\ \ldots,\ \varphi_n(t'),$$

$$\varphi_1(t''),\ \varphi_2(t''),\ \ldots,\ \varphi_n(t''),$$

суть две *сопряженные точки*.

Если, кроме того, $t''$ — тот из моментов, сопряженных с $t'$, который следует за $t'$ и является самым близким к $t'$, мы скажем, что $M''$ является *фокусом* точки $M'$.

Теперь мы можем сформулировать условие $(B)$: оно состоит в требовании, чтобы между $t_0$ и $t_1$ не лежало ни одного момента, сопряженного с $t_0$.

Чтобы $J$ было минимумом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $(A)$ и $(B)$.

Отсюда можно вывести одно непосредственное следствие.

Пусть $t_0$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ — четыре момента.

Пусть $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ — соответствующие точки кривой

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t).$$

Предположим, что $M_1$ — фокус $M_0$, а $M_3$ — фокус $M_2$.

Если условие $(A)$ выполнено, то может быть

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3,$$

или

$$t_0 < t_2 < t_1 < t_3,$$

или

$$t_2 < t_3 < t_0 < t_1.$$

Но неравенства

$$t_0 < t_2 < t_3 < t_1$$

невозможны, иначе интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t_1-\varepsilon}$$

должен был бы быть минимумом, поскольку выполнено условие $(B)$, а интеграл

$$\int\limits_{t_2}^{t_1-\varepsilon}$$

не был бы минимумом, поскольку условие $(B)$ не было бы для него выполнено.

Это невозможно, поскольку можно варьировать функции $x_i$ между $t_2$ и $t_1-\varepsilon$, не изменяя их в промежутке от $t_0$ до $t_2$.

Легко видеть геометрический смысл предыдущего.

Кривую в пространстве $n$ измерений

$$x_i = \varphi_i(t),$$

представляющую решение уравнений $(C)$, можно назвать траекторией, которую я обозначу через $(T)$.

Кривая

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

представит бесконечно близкую траекторию.

Пусть через точку $M'$ проведена одна из этих траекторий $(T')$, бесконечно близких к $(T)$, и эта траектория снова пересекает траекторию $(T)$ в точке $M''$ (точнее, расстояние $M''$ от этой траектории будет бесконечно малой высшего порядка); точки $M'$ и $M''$ будут сопряженными, если, кроме того, точка, которая описывает $T'$, проходит через $M'$ и бесконечно близко от $M''$ в моменты времени $t'$ и $t''$.

342. В случае принципа Гамильтона условие $(A)$ выполнено всегда; в самом деле, имеем

$$H = H_0 + H_1 + H_2$$

и $H_2$ — однородная квадратичная форма относительно $x_i'$.

Во всех задачах динамики эта квадратичная форма является положительно-определенной.

Если мы заменим $x_i'$ на $x_i'+\varepsilon_i$, $H_1$ перейдет в

$$H_1(x_1') + \sum \varepsilon_i \frac{dH_1}{dx_i'},$$

а $H_2$ заменится на

$$H_2(x_i') + H_2(\varepsilon_i) + \sum \varepsilon_i \frac{dH_2}{dx_i'},$$

причем

$$\sum \varepsilon_i \frac{dH_0}{dx_i'} = 0.$$

Следовательно,

$$H(x_i' + \varepsilon_i) = H_0 + H_1 + H_2 + \sum \varepsilon_i \frac{d(H_0 + H_1 + H_2)}{dx_i'} + H_2(\varepsilon_i),$$

откуда, наконец,

$$H(x_i' + \varepsilon_i) - \sum \varepsilon_i \frac{dH}{dx_i'} = H + H_2(\varepsilon_i).$$

Левая часть соответствует функции

$$f(x_i' + \varepsilon_i) - \sum \varepsilon_i \frac{df}{dx_i'};$$

так как квадратичная форма $H_2(\varepsilon_i)$ положительно-определенна, мы видим, что это выражение является минимумом при $\varepsilon_i=0$, т. е. условие ($A$) выполнено.

343. Перейдем к случаю принципа Мопертюи в абсолютном движении. Тогда изучаемый интеграл записывается в виде

$$\int d\tau,$$

где $d\tau^2$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно дифференциалов $dx_i$.

Примем на мгновение $x_1$ в качестве независимой переменной; интеграл примет вид

$$\int \frac{d\tau}{dx_1} dx_1,$$

где $(d\tau/dx_1)^2$ — полином второй степени $P$, неоднородный (но существенно положительный) относительно $dx_i/dx_1$. Итак, пусть

$$\frac{d\tau}{dx_1} = \sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1}\right)}.$$

Речь идет о том, чтобы узнать, является ли

$$\sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1} + \varepsilon_i\right)} - \sum \varepsilon_i \frac{d}{dx_i'} \sqrt{P(x_i')}$$

минимумом при $\varepsilon_i=0$; или, другими словами, положительна ли вторая производная по $t$ от корня

$$\sqrt{P\left(\frac{dx_i}{dx_1}+\varepsilon_i t\right)}.$$

Но каковы бы ни были $dx_i/dx_1$ и $\varepsilon_i$, мы будем иметь

$$P\left(\frac{dx_i}{dx_1}+\varepsilon_i t\right)=at^2+2bt+c,$$

где $a$, $b$, $c$ — независимы от $t$; вторая производная от корня тогда равна

$$\frac{ac-b^2}{(at^2+2bt+c)^{3/2}}.$$

Так как полином $P$ существенно положителен, то это выражение также всегда положительно, и условие $(A)$ выполнено всегда.

**344.** Перейдем к принципу Мопертюи в относительном движении. Тогда мы должны рассмотреть интеграл

$$\int\left[ds\sqrt{H_0+h}+\omega'(\xi d\eta-\eta d\xi)\right]$$

или, принимая $\xi$ за независимую переменную,

$$\int d\xi\left[\sqrt{(H_0+h)(1+\eta'^2)}+\omega'(\xi\eta'-\eta)\right].$$

Таким образом, необходимо исследовать вопрос о том, является ли положительной вторая производная по $\eta$ от

$$\sqrt{(H_0+h)(1+\eta'^2)}+\omega'(\xi\eta'-\eta);$$

но эта производная равна

$$\frac{\sqrt{H_0+h}}{(1+\eta'^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, условие $(A)$ выполнено всегда.

Итак, условие $(A)$ выполнено само собой во всех случаях, которые нам предстоит изучить.

## Фокусы по Мопертюи

**345.** Кинетические фокусы не являются совершенно одними и теми же в зависимости от того, рассматриваем ли мы гамильтоново действие или действие по Мопертюи. Чтобы лучше убедиться в этом, предположим, что имеются только две степени свободы, и пусть $x$ и $y$ — две переменные, которые определяют положение системы и которые мы можем считать координатами точки на плоскости.

Пусть

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

уравнения траектории $(T)$, которая будет плоской кривой. Положим

$$x = f_1(t) + \xi, \qquad y = f_2(t) + \eta$$

и, пренебрегая квадратами $\xi$ и $\eta$, составим уравнения в вариациях. Так как они линейны и четвертого порядка, то мы, следовательно, будем иметь

$$\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4,$$
$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3 + a_4\eta_4,$$

где $a_i$ — постоянные интегрирования, $\xi_i$ и $\eta_i$ — функции от $t$.

Тогда уравнение п. 341

$$\Delta(t', t'') = 0$$

запишется в виде

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \\ \eta_1' & \eta_2' & \eta_3' & \eta_4' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \\ \eta_1'' & \eta_2'' & \eta_3'' & \eta_4'' \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Именно это уравнение и определяет гамильтоновы фокусы.

Это означает, что точка $x$, $y$, описывающая траекторию $(T)$, и точка $x+\xi$, $y+\eta$, описывающая бесконечно близкую траекторию $(T')$, разделены в два различных момента времени, а именно, в моменты $t'$ и $t''$, бесконечно малым расстоянием высшего порядка.

Но это не те условия, которые должны выполняться для фокусов по Мопертюи. Две точки траектории $(T)$, а именно, две точки $M'$ и $M''$, соответствующие моментам $t'$ и $t''$, должны находиться на бесконечно малом расстоянии высшего порядка от траектории $(T')$.

Однако необязательно, чтобы подвижная точка, пробегающая $(T')$, проходила точно в момент $t''$, например, бесконечно близко от $M''$. Зато постоянная живых сил должна иметь одно и то же значение для $(T)$ и $(T')$; это последнее условие не налагается на гамильтоновы фокусы.

Одно из решений уравнений в вариациях есть

$$\xi = f_1'(t), \qquad \eta = f_2'(t).$$

Следовательно, мы можем предположить

$$\xi_1' = f_1'(t'), \qquad \eta_1' = f_2'(t'), \qquad \xi_1'' = f_1'(t''), \qquad \eta_1'' = f_2'(t'').$$

Таким образом, определены две функции $\xi_1$ и $\eta_1$.

С другой стороны, разность между постоянной живых сил для $(T)$ и постоянной живых сил для $(T')$ бесконечно мала; очевидно, она является линейной функцией четырех бесконечно малых постоянных $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$.

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что эта разность в точности равна $a_4$.

Тогда условием того, чтобы значение постоянной живых сил было одним и тем же для $(T)$ и $(T')$, будет $a_4=0$ или же

$$\xi = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3,$$

$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3.$$

Теперь при $t=t'$ функции $\xi$ и $\eta$ должны быть нулями, откуда вытекают уравнения

$$a_1\xi_1' + a_2\xi_2' + a_3\xi_3' = 0,$$

$$a_1\eta_1' + a_2\eta_2' + a_3\eta_3' = 0.$$

С другой стороны, значения $x+\xi$, $y+\eta$ при $t=t''+\varepsilon$ должны быть теми же (с точностью до бесконечно малых высшего порядка), что и значения $x$ и $y$ при $t=t''$, что записывается в виде

$$(\varepsilon + a_1)\,\xi_1'' + a_2\xi_2'' + a_3\xi_3'' = 0,$$

$$(\varepsilon + a_1)\,\eta_1'' + a_2\eta_2'' + a_3\eta_3'' = 0,$$

откуда исключением находим

$$\begin{vmatrix} \xi_2' & \xi_3' & \xi_1' & 0 \\ \eta_2' & \eta_3' & \eta_1' & 0 \\ \xi_2'' & \xi_3'' & 0 & \xi_1'' \\ \eta_2'' & \eta_3'' & 0 & \eta_1'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Раскрывая этот определитель, находим

$$\begin{vmatrix} \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' & \xi_1'\eta_3' - \xi_3'\eta_1' \\ \xi_1''\eta_2'' - \xi_2''\eta_2'' & \xi_1''\eta_3'' - \xi_3''\eta_1'' \end{vmatrix} = 0$$

и, полагая

$$\frac{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2}{\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3} = \zeta(t),$$

приводим уравнение (2) к виду

$$\zeta(t') = \zeta(t''). \tag{3}$$

## Приложение к периодическим решениям

346. Если мы имеем дело с периодическим решением с периодом $2\pi$, функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из предыдущего параграфа будут периодическими с периодом $2\pi$; то же будет и для

$$\xi_1 = f_1'(t), \qquad \eta_1 = f_2'(t).$$

Кроме того, уравнения в вариациях согласно главе IV будут допускать другие частные решения, имеющие вид

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\alpha t}\varphi_2(t), & \eta &= e^{\alpha t}\psi_2(t); \\ \xi &= e^{-\alpha t}\varphi_3(t), & \eta &= e^{-\alpha t}\psi_3(t); \\ \xi &= \varphi_4(t) + \beta t f_1'(t), & \eta &= \psi_4(t) + \beta t f_2'(t). \end{aligned}$$

В этих уравнениях $\beta$ — постоянная, $\alpha$ и $-\alpha$ — характеристические показатели, $\varphi$ и $\psi$ — периодические функции.

Пусть

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \text{const}$$

— уравнение живых сил; мы должны будем иметь

$$\frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{d\frac{dx}{dt}}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dF}{d\frac{dy}{dt}}\frac{d\eta}{dt} = A,$$

где $A$ — постоянная. Если в этом уравнении заменим $\xi$ и $\eta$ на $e^{\alpha t}\varphi_2$, $e^{\alpha t}\psi_2$, то левая часть станет периодической функцией от $t$, умноженной на $e^{\alpha t}$, а так как она должна быть постоянной, то необходимо, чтобы она была нулем.

Следовательно, получим

$$A = 0.$$

Это означает, что две бесконечно близкие траектории, уравнения которых суть

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

и

$$x = f_1(t) + e^{\alpha t}\varphi_2(t), \quad y = f_2(t) + e^{\alpha t}\psi_2(t),$$

соответствуют одному и тому же значению постоянной живых сил.

То же самое можно было бы показать для траектории, уравнение которой есть

$$x = f_1(t) + e^{-\alpha t}\varphi_3(t), \quad y = f_2(t) + e^{-\alpha t}\psi_3(t).$$

## Приложение к периодическим решениям

346. Если мы имеем дело с периодическим решением с периодом $2\pi$, функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из предыдущего параграфа будут периодическими с периодом $2\pi$; то же будет и для

$$\xi_1 = f_1'(t), \quad \eta_1 = f_2'(t).$$

Кроме того, уравнения в вариациях согласно главе IV будут допускать другие частные решения, имеющие вид

$$\begin{aligned} &\xi = e^{\alpha t}\varphi_2(t), && \eta = e^{\alpha t}\psi_2(t); \\ &\xi = e^{-\alpha t}\varphi_3(t), && \eta = e^{-\alpha t}\psi_3(t); \\ &\xi = \varphi_4(t) + \beta t f_1'(t), && \eta = \psi_4(t) + \beta t f_2'(t). \end{aligned}$$

В этих уравнениях $\beta$ — постоянная, $\alpha$ и $-\alpha$ — характеристические показатели, $\varphi$ и $\psi$ — периодические функции.

Пусть

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \text{const}$$

— уравнение живых сил; мы должны будем иметь

$$\frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{d\frac{dx}{dt}}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dF}{d\frac{dy}{dt}}\frac{d\eta}{dt} = A,$$

где $A$ — постоянная. Если в этом уравнении заменим $\xi$ и $\eta$ на $e^{\alpha t}\varphi_2$, $e^{\alpha t}\psi_2$, то левая часть станет периодической функцией от $t$, умноженной на $e^{\alpha t}$, а так как она должна быть постоянной, то необходимо, чтобы она была нулем.

Следовательно, получим

$$A = 0.$$

Это означает, что две бесконечно близкие траектории, уравнения которых суть

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

и

$$x = f_1(t) + e^{\alpha t}\varphi_2(t), \quad y = f_2(t) + e^{\alpha t}\psi_2(t),$$

соответствуют одному и тому же значению постоянной живых сил.

То же самое можно было бы показать для траектории, уравнение которой есть

$$x = f_1(t) + e^{-\alpha t}\varphi_3(t), \quad y = f_2(t) + e^{-\alpha t}\psi_3(t).$$

мы знаем—это то, что $G(t)$ — периодическая функция, а отсюда просто вытекает, что

$$\log G(t)$$

увеличивается на кратное $2i\pi$, например на $2ki\pi$, когда $t$ увеличивается на $2\pi$. Тогда разность

$$\log G(t) - ikt$$

является периодической функцией.

Положим в таком случае

$$G'(t) = G(t)\, e^{-ikt},$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{ik}{2};$$

получим

$$\zeta(t) = e^{2\alpha t} G(t) = e^{2\alpha' t} G'(t).$$

Мы положим тогда не

$$\tau = t + \frac{1}{2\alpha} \log G(t),$$

а

$$\tau = t + \frac{1}{2\alpha'} \log G'(t);$$

так как $\log G'(t)$ будет периодической функцией, предыдущие выводы сохраняются, уравнение (3) запишется в виде

$$\tau'' - \tau' = \frac{mi\pi}{\alpha'} \qquad (m \text{ — целое})$$

и, кроме того, $M''$ будет фокусом $M'$, если

$$\tau'' - \tau' = \frac{i\pi}{\alpha'}.$$

348. Таким образом, оказывается доказанным одно из наших трех предположений, что $\log G(t)$ должен быть периодическим. Теперь я говорю, что функция $\tau$ должна быть, как мы это предположили, монотонно возрастающей.

Предположим, в самом деле, что эта функция допускает максимум $\tau_0$ при $t = t_0$; тогда мы сможем найти два таких момента $t_1'$ и $t_1''$, что соответствующие значения $\tau_1'$ и $\tau_1''$ функции $\tau$ равны друг другу, и два других таких момента $t_2'$ и $t_2''$, что $\tau_2' = \tau_2''$; наконец, таких, что эти пять моментов, и притом очень близких друг к другу, удовлетворяют неравенствам

$$t_2' < t_1' < t_0 < t_1'' < t_2''.$$

Тогда $t_1''$ будет фокусом $t_1'$, $t_2''$ — фокусом $t_2'$; но мы видели выше, что подобные неравенства невозможны, когда выполнено условие ($B$).

Я говорю теперь, что $G(t)$ не может обратиться в нуль; действительно, мы имеем

$$\zeta(t) = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1}.$$

Числитель и знаменатель $\zeta(t)$ комплексные сопряженные; если один из них обращается в нуль, то другой также обращается в нуль, так что функция $\zeta(t)$ не может стать ни нулем, ни бесконечностью.

Таким образом, оказываются доказанными все наши предположения.

### Неустойчивые решения

349. Предположим теперь, что решение неустойчиво, а $\alpha^2$ — положительно; в этом случае $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_3$, $\eta_3$, $\zeta$, $\alpha$, $G$ — вещественны.

По той же причине, что и выше, функция $\tau$ будет монотонно возрастающей; однако возможны два предположения:

1. *Либо* $\zeta(t)$ *не может обратиться ни в нуль, ни в бесконечность* и монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, когда $t$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда *ни одна точка периодического решения не имеет фокуса по Мопертюи.*

2. *Либо* $\zeta(t)$ *может обратиться в нуль* при $t=t_0$; тогда она будет обращаться в нуль также при $t=t_0+2\pi$, а так как она не может иметь ни максимума, ни минимума, то необходимо, чтобы она обращалась в бесконечность в интервале. Аналогично, если $\zeta(t)$ может обратиться в бесконечность, необходимо также, чтобы она могла обратиться в нуль.

Итак, предположим, для определенности, что $\zeta(t)$ обращается в бесконечность при

$$t = t_0, \quad t_1, \quad t_0 + 2\pi$$

и при значениях $t$, которые отличаются от них на кратное $2\pi$, и обращается в нуль при

$$t = t_0', \quad t_1', \quad t_0' + 2\pi.$$

При этом я предполагаю

$$t_0 < t_0' < t_1 < t_1' < t_0 + 2\pi.$$

При этом, когда $t$ возрастает от $t_0$ до $t_1$, или от $t_1$ до $t_2$, или от $t_2$ до $t_0+2\pi$, функция $\zeta(t)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Замкнутая траектория ($T$), которая представляет периодическое решение, будет, следовательно, разделена на две дуги, концы которых будут соответствовать значениям $t$

$$t_0, \quad t_1, \quad t_0 + 2\pi.$$

Каждая точка одной из дуг будет иметь свой первый фокус на следующей дуге.

Я прибавляю, что точки, соответствующие значениям $t$

$$t_0,\ t'_0,\ t_1,\ t'_1,$$

совпадают со своими вторыми фокусами.

Пусть $t''$ — значение $t$, соответствующее любой точке $(T)$, а $t''_n$ — значение $t$, которое соответствует ее $n$-му фокусу; мы будем иметь

$$\lim \frac{t''_n - t''}{n} = \frac{2\pi}{2}.$$

Но это не все; мы получим

$$e^{2\alpha t''_n} G(t''_n) = e^{2\alpha t''} G(t'').$$

Если $n$ очень велико и если $G(t'')$ не есть бесконечность, то, так как разность $t''_n - t''$ очень велика и так как мы предполагаем $\alpha$ положительным, $G(t''_n)$ будет очень малым, так что если $t''$ заключено, например, между $t_0$ и $t_1$, то разность

$$t''_{2n} - 2n\pi$$

будет стремиться к $t'_0$, когда $n$ будет неограниченно возрастать.

Если $n$ стремится к $-\infty$, эта разность будет стремиться к $t_0$ или к $t_1$ в зависимости от того, будет ли $t''$ заключено между $t_0$ и $t'_0$ или между $t'_0$ и $t_1$. Я добавлю, что разность $t''_{2n} - 2n\pi$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает с $n$.

Значения $t'_0$, $t'_1$ соответствуют точкам, в которых

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0;$$

но разность $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ является периодической функцией, умноженной на $e^{\alpha t}$, а периодическая функция должна обращаться в нуль в течение периода четное число раз.

Следовательно, замкнутая траектория $(T)$ будет разделена точками $t_0$, $t_1$, $t_0+2\pi$ на определенное число дуг, и *это число всегда будет четным.*

**350.** С интересующей нас точки зрения неустойчивые периодические решения могут, следовательно, быть разделены на две категории. Однако можно было бы поставить вопрос о том, действительно ли существуют эти две категории. Таким образом, следует привести соответствующие примеры.

Пусть $\rho$ и $\omega$ — полярные координаты подвижной точки на плоскости; уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \rho + \frac{dU}{d\rho},\quad \rho^2\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\rho\frac{d\rho}{dt}\frac{d\omega}{dt} = \frac{dU}{d\omega}. \tag{1}$$

Предположим, что при $\rho=1$ имеем

$$U=0,\quad \frac{dU}{d\omega}=0,\quad \frac{dU}{d\rho}=-1,\quad \frac{d^2U}{d\rho^2}=\varphi(\omega);$$

уравнения (1) будут допускать решение

$$\rho=1,\quad \omega=t,$$

и это решение будет соответствовать замкнутой траектории, которая будет окружностью.

Положим

$$\rho=1+\zeta,\quad \omega=t+v$$

и составим уравнения в вариациях; они запишутся в виде

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\zeta+2\frac{dv}{dt}+\zeta\varphi(t),\quad \frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{d\zeta}{dt}=0.$$

Второе интегрируется немедленно:

$$\frac{dv}{dt}+2\zeta=\text{const},$$

но постоянная в правой части должна быть нулем, если мы хотим, чтобы постоянная живых сил имела одно и то же значение для траектории $(T)$ и для бесконечно близкой траектории.

Следовательно, если мы заменим $dv/dt$ на $-2\zeta$, то первое уравнение в вариациях примет вид

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\zeta[\varphi(t)-3]. \tag{2}$$

Уравнение (2), которое нам остается проинтегрировать, является линейным уравнением с периодическим коэффициентом.

Такие уравнения были рассмотрены в пунктах 29 и 189 (см., кроме того, главу IV, passim *).

Мы знаем, что они допускают два решения следующего вида:

$$\zeta=e^{\alpha t}G(t),\quad \zeta=e^{-\alpha t}G_1(t),$$

где $G$ и $G_1$ — периодические функции.

Мы сейчас найдем примеры всех случаев, которые различали выше. Предположим сначала, что $\varphi$ сводится к постоянной $A$ (случай центральных сил).

Если $A<3$, то будем иметь устойчивое периодическое решение.

Если $A>3$, то на $(T)$ не будет фокусов по Мопертюи и получим неустойчивое периодическое решение первой категории.

* В разных местах. (*Прим. ред.*).

Мне остается показать, что можно также получить неустойчивые периодические решения второй категории.

Решение будет неустойчивым второй категории, если $G$ обращается в нуль таким образом, что отношение

$$e^{2\alpha t}\frac{G}{G_1},$$

соответствующее функции $\zeta(t)$ предыдущих параграфов, может обращаться в нуль и, следовательно, в бесконечность.

Но, очевидно, можно построить периодическую функцию $G$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) она будет допускать два и только два простых нуля;

2) эти нули будут обращать в нуль также выражение

$$\frac{d^2G}{dt^2}+2\alpha\frac{dG}{dt}.$$

Отсюда вытекает, что всякий раз, когда

$$\zeta=e^{\alpha t}G$$

обращается в нуль, ее вторая производная будет также обращаться в нуль таким образом, что отношение

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\varphi-3$$

будет оставаться конечным.

Очевидно, можно построить функцию $G$, удовлетворяющую этим условиям; периодическая функция $\varphi$, построенная при помощи этой функции $G$, будет соответствовать неустойчивому периодическому решению второй категории.

В качестве примера функции $G$, удовлетворяющей этому условию, мы можем взять

$$G=\sin t-\frac{\alpha}{4}(\cos t-\cos 3t).$$

Эта функция обращается в нуль при $t=0$ и $t=\pi$; она не имеет других нулей, если

$$\alpha<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

При этом при $t=0$ и при $t=\pi$ мы имеем

$$\frac{d^2G}{dt^2}+2\alpha\frac{dG}{dt}=0.$$

Чтобы отношение $G/G_1$ обратилось в нуль, недостаточно, чтобы обратилось в нуль $G$, необходимо еще, чтобы $G_1$ в нуль не обращалось.

Но это как раз и имеет место, так как если бы $G$ и $G_1$ обратились в нуль одновременно, то два решения

$$\zeta = e^{\alpha t} G(t), \qquad \zeta = e^{-\alpha t} G_1(t)$$

могли бы отличаться друг от друга только постоянным множителем (поскольку они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка), а это нелепо.

351. Факт, на который я хотел бы обратить внимание, состоит в том, что неустойчивые решения первой и второй категории образуют два таких непересекающихся множества, что нельзя перейти от одного к другому непрерывным образом, не переходя через устойчивые решения.

Ограничимся сначала частным случаем предыдущего параграфа и снова возьмем уравнение (2)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \zeta\,[\varphi - 3].$$

Будем варьировать непрерывным образом функцию $\varphi$ и посмотрим, можно ли непосредственно перейти от неустойчивого решения первой категории к неустойчивому решению второй. Для этого необходимо, чтобы вещественная функция $G$ сначала не могла обращаться в нуль, а затем могла стать нулем. Таким образом, мы перешли бы от случая, когда все корни уравнения $G = 0$ мнимые, к случаю, когда его корни вещественны. В момент перехода оно имело бы один двойной корень или, вообще, корень кратности $2m$.

Этот нуль, который будет для $G$ порядка $2m$, будет порядка $2m-1$ для $dG/dt$, порядка $2m-2$ для $d^2G/dt^2$, так что выражение

$$\frac{\dfrac{d^2G}{dt^2} + 2\alpha \dfrac{dG}{dt} + \alpha^2 G}{G}$$

обратится в бесконечность, что невозможно, поскольку оно равно $\varphi - 3$.

Напротив, можно перейти от устойчивого решения к неустойчивому решению той или иной категории.

Действительно, для устойчивого решения функция $G$ мнимая. В момент, когда решение становится неустойчивым, мнимая часть $G$ становится тождественным нулем; если в этот момент вещественная часть $G$ имеет нули, мы перейдем к неустойчивому решению второй категории; если эта вещественная часть никогда не обращается в нуль, мы перейдем к неустойчивому решению первой категории.

При этом нет никаких затруднений для перехода от случая, когда все корни уравнения

$$\text{вещественная часть } G = 0$$

мнимы, к случаю, когда корни этого уравнения вещественны, лишь бы в момент перехода мнимая часть $G$ не была нулем.

352. Чтобы лучше пояснить предыдущее, я вернусь сейчас снова к примеру, который нам уже знаком.

Возвратимся к уравнению Гильдена, т. е. к уравнению (1) п. 178. Мы дадим этому уравнению номер (3) и запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(-q^2 + q_1 \cos 2t). \tag{3}$$

Мы видим, что оно имеет ту же форму, что и уравнение (2). Это уравнение имеет, как и уравнение (2), два интеграла вида

$$e^{\alpha t} G, \quad e^{-\alpha t} G_1,$$

которые мы писали в обозначениях п. 178 в виде

$$e^{iht} \varphi_1(t), \quad e^{-iht} \varphi_2(t).$$

Случай вещественного $h$ соответствует тогда случаю устойчивых решений, а случай комплексного $h$ — случаю неустойчивых решений.

Мы рассмотрели также два замечательных интеграла; первый — *четный* $F(t)$

$$[F(0) = 1, \quad F'(0) = 0];$$

второй — *нечетный* $f(t)$

$$[f(0) = 0, \quad f'(0) = 1]$$

и нашли условия

$$F(\pi) f'(\pi) - f(\pi) F'(\pi) = 1,$$

$$F(\pi) = f'(\pi) = \cos h\pi.$$

Я ссылаюсь теперь на рисунок на стр. 543 (том II *), на котором, считая $q$ и $q_1$ прямоугольными координатами точки, мы отделили области, соответствующие устойчивым решениям, от тех, которые соответствуют неустойчивым решениям. Эти последние заштрихованы.

Эти различные области отделены друг от друга четырьмя аналитическими кривыми, уравнения которых я дал на стр. 541 (том II).

Вот эти уравнения:

$$F(\pi) = 1, \qquad F'(\pi) = 0, \tag{$\alpha$}$$

$$F(\pi) = 1, \qquad f(\pi) = 0 \tag{$\beta$}$$

$$F(\pi) = -1, \qquad F'(\pi) = 0, \tag{$\gamma$}$$

$$F(\pi) = -1, \qquad f(\pi) = 0 \tag{$\delta$}$$

* См. т. I настоящего издания. (*Прим. ред.*).

Какой категории принадлежат неустойчивые решения, которые соответствуют нашим заштрихованным областям? Прежде всего, ясно, что все неустойчивые решения, которые соответствуют одной из этих областей, одной и той же категории. Это немедленно вытекает из предыдущего.

Но в точке одной из кривых ($\beta$) и ($\delta$) функция $G$ сводится к $f(t)$, а эта функция может обратиться в нуль, поскольку она нечетная. Таким образом, если область ограничена дугой одной из кривых ($\beta$) и ($\delta$), то соответствующие решения будут второй категории.

Но то же относится ко всем нашим областям. Следовательно, все наши неустойчивые решения второй категории.

Легко преобразовать пример таким образом, чтобы иметь решения двух категорий. Достаточно заменить $q^2$ на $q$, так чтобы этот коэффициент мог стать отрицательным.

Тогда уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(-q + q_1 \cos 2t). \tag{3bis}$$

Примем снова $q$ и $q_1$ за прямоугольные координаты и построим фигуру, аналогичную фигуре на стр. 543. Часть фигуры, расположенная справа от оси $q_1$ со стороны положительных $q$, будет аналогична фигуре на стр. 543. Но слева от оси $q_1$ со стороны отрицательных $q$ мы будем иметь заштрихованную область, ограниченную чем-то вроде параболы, касающейся оси $q_1$.

Заштрихованные области справа будут соответствовать — мы только что это видели — решениям второй категории; но этого не будет для заштрихованной области слева.

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $q_1 = 0$, откуда

$$x = e^{t\sqrt{-q}}; \quad \alpha = \sqrt{-q}; \qquad G = 1.$$

353. Я опять провел анализ только в частном случае. Чтобы распространить его на общий случай, я покажу сейчас, что мы всегда приходим к уравнению того же вида, что и уравнение (2) предыдущего параграфа.

Рассмотрим сначала случай абсолютного движения; если $U$ — силовая функция и если $x$ и $y$ — декартовы координаты точки на плоскости, то уравнения движения запишутся в виде

$$x'' = \frac{dU}{dx}, \qquad y'' = \frac{dU}{dy} \tag{1}$$

а уравнения в вариациях —

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{d^2U}{dx^2}\xi + \frac{d^2U}{dx\,dy}\eta, \\ \eta'' &= \frac{d^2U}{dx\,dy}\xi + \frac{d^2U}{dy^2}\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Для большей краткости я обозначаю штрихами дифференцирование по $t$. Так, $\xi''$ представляет здесь $d^2\xi/dt^2$, а не значение $\xi$ при $t=t''$, как в п. 341.

Интеграл живых сил запишется в виде

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}=U+h,$$

а соответствующий интеграл уравнений (2) —

$$x'\xi'+y'\eta'=\frac{dU}{dx}\xi+\frac{dU}{dy}\eta+\delta h \qquad (\text{где } \delta h \text{ — постоянная}).$$

Для приложения принципа Мопертюи необходимо предположить, что

$$\delta h=0,$$

так что будем иметь

$$x'\xi'+y'\eta'=\frac{dU}{dx}\xi+\frac{dU}{dy}\eta$$

или же

$$x'\xi'+y'\eta'=x''\xi+y''\eta. \tag{3}$$

Тогда уравнения (2) и (3) будут допускать три линейно независимых решения, которые мы обозначили в п. 345

$$\begin{aligned} &\xi_1=x', && \eta_1=y',\\ &\xi_2, && \eta_2,\\ &\xi_3, && \eta_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Положим

$$\theta=\xi y'-\eta x'. \tag{5}$$

Тогда, если обозначим через $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ три значения $\theta$, которые соответствуют трем решениям (4), будем иметь $\theta_1=0$, и функция, которую мы назвали в п. 345 $\zeta(t)$, будет не чем иным, как

$$\zeta(t)=\frac{\theta_2}{\theta_3}.$$

Из уравнения (5) находим

$$\theta'=\xi'y'-\eta'x'+\xi y''-\eta x'' \tag{6}$$

и

$$\theta''=\xi y'''-\eta x'''+\xi''y'-\eta''x'+2(\xi'y''-\eta'x'').$$

Но $x'$ и $y'$ удовлетворяют уравнениям (2), так что имеем

$$x''' = \frac{d^2U}{dx^2} x' + \frac{d^2U}{dxdy} y',$$

$$y''' = \frac{d^2U}{dxdy} x' + \frac{d^2U}{dy^2} y'.$$

Заменим в выражении для $\theta''$ производные $x'''$ и $y'''$ значениями, найденными таким образом, а производные $\xi''$ и $\eta''$ их значениями (2); получим

$$\theta'' - \theta \Delta U = 2(\xi' y'' - \eta' x''). \tag{7}$$

Я обозначаю через $\Delta U$ (или, короче, через $\Delta$) сумму двух вторых производных $\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2}$.

Легко проверить следующее тождество:

$$2(x'^2 + y'^2)(\xi' y'' - \eta' x'') - 2(x'x'' + y'y'')(\xi y'' - \eta x'' + \xi' y' - \eta' x') +$$
$$+ 2(x''^2 + y''^2)(\xi y' - \eta x') = 2(y'' x' - y' x'')(\xi' x' + \eta' y' - \xi x'' - \eta y'')$$

или, учитывая (5), (6), (7) и (3),

$$(x'^2 + y'^2)(\theta'' - \theta\Delta) - 2(x'x'' + y'y'')\theta' + 2(x''^2 + y''^2)\theta = 0. \tag{8}$$

Таково дифференциальное уравнение, которое определяет неизвестную функцию $\theta$.

Мы положим

$$\theta = \varphi \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

и наше уравнение примет вид

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \Delta - \frac{x'x''' + y'y''' + 3x''^2 + 3y''^2}{x'^2 + y'^2} + \frac{3(x'x'' + y'y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^2}. \tag{9}$$

Мы получили уравнение того же вида, что и уравнение (2) предыдущего пункта. Таким образом, заключения предыдущего пункта сохраняются; неустойчивое периодическое решение будет второй или первой категории в зависимости от того, может ли функция $\varphi$ обратиться в нуль или нет. Нельзя перейти прямо от неустойчивого решения первой категории к неустойчивому решению второй категории, не проходя через устойчивые решения.

354. Сохранятся ли опять те же результаты в случае относительного движения?

В этом случае уравнения движения имеют вид

$$x'' - 2\omega y' = \frac{dU}{dx}, \qquad y'' + 2\omega x' = \frac{dU}{dy}, \tag{1bis}$$

где $\omega$ означает скорость вращения подвижных осей. Уравнения в вариациях будут

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\omega\eta' &= \frac{d^2U}{dx^2}\xi + \frac{d^2U}{dxdy}\eta, \\ \eta'' + 2\omega\xi' &= \frac{d^2U}{dxdy}\xi + \frac{d^2U}{dy^2}\eta. \end{aligned} \tag{2bis}$$

Так как опять будет справедливо уравнение живых сил, то будет также иметь место

$$x'\xi' + y'\eta' = x''\xi + y''\eta - 2\omega\theta. \tag{3bis}$$

Положим снова

$$\theta = \xi y' - \eta x',$$

тогда сохранятся уравнения (5) и (6).

С другой стороны, так как $x'$ и $y'$ должны удовлетворять уравнениям (2bis), мы будем иметь

$$\begin{aligned} x''' - 2\omega y'' &= \frac{d^2U}{dx^2}x' + \frac{d^2U}{dxdy}y', \\ y''' + 2\omega x'' &= \frac{d^2U}{dxdy}x' + \frac{d^2U}{dy^2}y'. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти уравнения, а также уравнения (2bis), и учитывая также уравнение (3bis), можно упростить выражение $\theta''$ и снова найти уравнение

$$\theta'' - \theta\Delta U = 2(\xi' y'' - \eta' x'') - 4\omega^2\theta. \tag{7bis}$$

Так как тождество из предыдущего параграфа справедливо всегда, то мы снова найдем уравнения

$$\begin{aligned} (x'^2 + y'^2)(\theta'' - \theta\Delta) - 2(x'x'' + y'y'')\theta' + 2(x''^2 + y''^2)\theta = \\ = -4\omega^2(x'^2 + y'^2) - 4\omega(x'y'' - x''y') \end{aligned} \tag{8bis}$$

и

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \Delta - 4\omega^2 - \frac{x'x''' + y'y''' + 3x''^2 + 3y''^2}{x'^2 + y'^2} + \frac{3(x'x'' + y'y'')^2}{(x'^2 + y'^2)^2} - 4\omega\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \tag{9bis}$$

таким образом, ничего не нужно менять в выводах предыдущего параграфа.

355. Однако встает новый вопрос.

Траектория $(T)$ является замкнутой кривой; мы пытались до сих пор определить, соответствует ли дуга $AB$ этой кривой действию, меньшему чем действие вдоль всякой бесконечно близкой дуги, имеющей те же концы.

Но мы должны также спросить себя, соответствует ли вся эта замкнутая кривая целиком действию, меньшему чем действие вдоль бесконечно близкой замкнутой кривой.

Предположим сначала, что точка $A$ кривой $(T)$ имеет свой первый фокус $B$ на кривой $(T)$, так что дуга $AB$ меньше, чем вся замкнутая кривая.

Это имеет место для неустойчивых решений второй категории; мы видели, что для этих решений кривая $(T)$ разделяется на некоторое четное число дуг и что любая точка одной из этих дуг имеет свой первый фокус на следующей дуге; таким образом, исходя из какой-нибудь точки, мы встретим ее первый фокус, прежде чем совершим полный обход кривой $(T)$.

Это имеет место также и для некоторых устойчивых решений.

В случае устойчивых решений мы положили (п. 347)

$$t+\frac{1}{2\alpha}\log G(t)=\tau,$$

и мы видели, что значения $\tau$ для точки и ее первого фокуса отличаются на $i\pi/\alpha$. Если, следовательно, $\alpha/i$ больше $^1/_2$, мы встретим фокус точки до того, как совершим полный обход $(T)$.

Если это так, то действие не может быть меньшим для кривой $(T)$, чем для всякой близкой замкнутой кривой.

Пусть, в самом деле, $ABCDEA$ — кривая $(T)$, и предположим, что $D$ — фокус $C$. Так как $E$ лежит за фокусом точки $C$, то мы сможем соединить $C$ с $E$ дугой $CME$, очень близкой к $CDE$ и соответствующей меньшему действию.

Если я обозначу символом $(CME)$ действие, соответствующее дуге $CME$, то мы будем иметь

$$(CME)<(CDE),$$

и, следовательно,

$$(ABCMEA)<(ABCDEA).$$

Рассмотрим теперь такое устойчивое решение, что

$$\frac{\alpha}{i}<\frac{1}{2}.$$

Я говорю, что действие также не будет меньшим для $(T)$, чем для всякой бесконечно близкой замкнутой кривой.

На рисунке я предполагаю для определенности, что значение $\alpha/i$ заключено между $^1/_4$ и $^1/_6$, так что мы встречаем фокус точки, прежде чем совершим три обхода и после того, как совершим два обхода $(T)$ (рис. 10).

Пусть $ABCDA$ — кривая $(T)$; фокус $F$ будет находиться между $A$ и $B$, и мы попадем в него после двух обходов $(T)$.

Так как $B$ находится за этим фокусом, то мы можем соединить $A$ с $B$ такой дугой $AEHNKHMEB$, что $(AEHNKHMEB) < (ABCABCAB)$.

Так как мы не встретим фокуса точки $A$, описывая дугу $AB$, не обойдя $(T)$, то мы будем иметь, с другой стороны,

$$(AE+EB) > (AB),$$

откуда, вычитая, получим

$$(EHNKHME) < (ABCABCA)$$

или

$$(EHME)+(HNKH) < 2\,(ABCA).$$

Таким образом, мы должны иметь либо

$$(EHME) < (ABCA),$$

либо

$$(HNKH) < (ABCA).$$

Во всяком случае имеется замкнутая кривая, мало отличающаяся от $(T)$ и соответствующая меньшему действию.

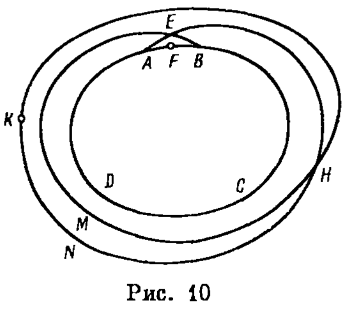

Рис. 10

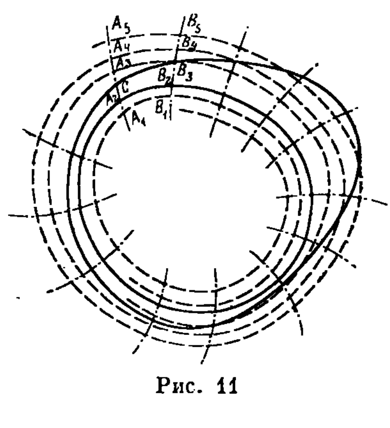
Рис. 11

Таким образом, *чтобы замкнутая кривая соответствовала действию меньшему, чем действие вдоль всякой бесконечно близкой замкнутой кривой, необходимо, чтобы эта замкнутая кривая соответствовала неустойчивому периодическому решению первой категории.*

356. Является ли это условие достаточным? Чтобы узнать это, изучим асимптотические решения, соответствующие подобному неустойчивому периодическому решению.

Пусть

$$x=\varphi_0(t), \quad y=\psi_0(t)$$

— уравнения периодического решения, а

$$x=\varphi_0(t)+Ae^{\alpha t}\varphi_1(t)+A^2e^{2\alpha t}\varphi_2(t)+\ldots,$$
$$y=\psi_0(t)+Ae^{\alpha t}\psi_1(t)+A^2e^{2\alpha t}\psi_2(t)+\ldots$$

— уравнения асимптотических решений. Функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ будут периодическими функциями $t$. Мы можем также написать, полагая $Ae^{\alpha t}=u$,

$$x=\varphi_0(t)+u\varphi_1(t)+\ldots=\Phi(t, u),$$
$$y=\psi_0(t)+u\psi_1(t)+\ldots=\Psi(t, u).$$

Если $u$ достаточно мало́, то $x$ и $y$ будут однозначными функциями от $t$ и $u$, периодическими по $t$ с периодом $2\pi$.

Кроме того, функциональный определитель

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)}=\frac{d\Phi}{dt}\frac{d\Psi}{du}-\frac{d\Psi}{dt}\frac{d\Phi}{du}$$

не будет обращаться в нуль. В самом деле, при $u=0$ этот определитель приводится к

$$\varphi_0'(t)\psi_1(t)-\psi_0'(t)\varphi_1(t).$$

Но это выражение есть не что иное, как выражение

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1$$

из п. 345, деленное на $e^{\alpha t}$. Значит, оно не обратится в нуль, если неустойчивое решение будет первой категории.

Следовательно, функциональный определитель, не обращаясь в нуль при $u=0$, также не обратится в нуль при достаточно малом $u$.

Итак, если $u$ достаточно мало, $u$, $\cos t$ и $\sin t$ будут однозначными функциями от $x$ и $y$.

Уравнения асимптотических решений записываются в виде

$$x=\Phi(t, Ae^{\alpha t}),$$
$$y=\Psi(t, Ae^{\alpha t}), \qquad (1)$$

и мы видим, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, A)}=\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(t, u)}e^{\alpha t}$$

не может обратиться в нуль, что означает, что кривые (1) не имеют двойной точки, не пересекаются между собой и не пересекают траекторию $(T)$ [все это, разумеется, имеет место, если предположить $u$ достаточно малым; это не будет справедливым, если кривые (1) бесконечно продолжить так, чтобы $u$ стало очень большим].

Кривые (1), соответствующие асимптотическим решениям, будут, таким образом, иметь вид спиралей, закручивающихся вокруг $(T)$. Этот вид представлен на рис. 11. Замкнутая траектория $(T)$ здесь представлена сплошной линией, но я должен предупредить, что на рисунке имеются две замкнутые кривые, представленные сплошной линией; из этих двух кривых та, которая лежит внутри другой, представляет $(T)$.

Спиральные кривые (1) представлены пунктирной линией.

Я замечаю, что имеются две системы асимптотических решений, соответствующие двум равным и противоположным по знаку характеристическим показателям.

Эти асимптотические решения второй системы будут спиральными кривыми, аналогичными кривым (1), но закручивающимися в противоположном направлении. Они не представлены на рисунке.

В случае неустойчивого решения второй категории кривые (1) имели бы совсем другой вид; они пересекали бы бесконечное число раз замкнутую траекторию $(T)$, а точки пересечения составили бы бесконечное множество, имеющее конечное и притом четное число предельных точек. Эти предельные точки соответствовали бы значениям $t_0$, $t_1$, рассмотренным в п. 349.

357. Вернемся к неустойчивым решениям первой категории и асимптотическим решениям первой системы, представленным на рис. 11. Я задаюсь целью установить, что действие является меньшим для $(T)$, чем для всякой бесконечно близкой замкнутой кривой.

Я рассматриваю произвольную замкнутую кривую, бесконечно мало отличающуюся от $(T)$. Эта кривая, которую я назову $(T')$, представлена на рис. 11 замкнутой сплошной кривой, лежащей вне $(T)$ и проходящей через точки $C$ и $B_3$.

Ограничимся сначала случаем абсолютного движения. В этом случае мы имеем следующую хорошо известную теорему.

Пусть $A_1B_1$, $A_2B_2$, . . ., $A_nB_n$ — непрерывный ряд дуг траекторий. Концы этих дуг лежат на двух кривых

$$A_1A_2 \ldots A_n, \quad B_1B_2 \ldots B_n.$$

Если эти две кривые пересекают под прямым углом траектории $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_nB_n$, то мы будем иметь

$$(A_1B_1) = (A_2B_2) = \ldots = (A_nB_n),$$

обозначая всегда символом $(A_1B_1)$ действие, соответствующее дуге $A_1B_1$.

Построим, таким образом, траектории, ортогональные к кривым (1). Дифференциальным уравнением этих траекторий, которые я назову кривыми (2), будет

$$\left(\frac{d\Phi^2}{dt^2}+\frac{d\Psi^2}{dt^2}\right)dt+\left(\frac{d\Phi}{dt}\frac{d\Phi}{du}+\frac{d\Psi}{dt}\frac{d\Psi}{du}\right)(du+\alpha u dt)+\left(\frac{d\Phi^2}{du^2}+\frac{d\Psi^2}{du^2}\right)\alpha u du=0. \quad (3)$$

Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна кривая (2), лишь бы $u$ было достаточно мало. Иначе могло бы быть только в том случае, если бы коэффициенты при $dt$ и $du$ обращались в нуль одновременно, что может иметь место, только если функциональный определитель от $\Phi$ и $\Psi$ по $t$ и $u$ обращается в нуль; мы же видели, что это не так.

Кривые (2) представлены на рис. 11 штрих-пунктиром.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_5$, $B_1B_2 \ldots B_5$ — две из этих бесконечно близких кривых; они вырезают на $(T)$ дугу $A_2B_2$, на кривых (1) — дуги $A_1B_1$, $A_3B_3$, $A_4B_4$, $A_5B_5$, на $(T')$ — дугу $CB_3$.

Для моей цели мне достаточно установить, что действие $(CB_3)$ больше, чем для соответствующей дуги $A_2B_2$ траектории $(T)$.

Мы имеем, в самом деле,

$$(A_2B_2)=(A_3B_3),$$

а в бесконечно малом криволинейном прямоугольном треугольнике $A_3CB_3$

$$(CB_3) > (A_3B_3).$$

Таким образом, имеем

$$(CB_3) > (A_2B_2),$$

и, следовательно,

$$\text{действие } (T') > \text{действия } (T),$$

что и требовалось доказать.

358. Остается посмотреть, сохраняется ли тот же результат для относительного движения.

Необратимость уравнений составляет, очевидно, значительную разницу по сравнению с предыдущим случаем. Действие для какой-нибудь дуги $AB$ не является более тем же самым, что для той же дуги при обходе ее в противоположном направлении. При этом если какая-нибудь кривая удовлетворяет дифференциальным уравнениям, то это не имеет места для той же кривой при обходе в противоположном направлении.

Наконец, траектории, ортогональные к кривым (1), не обнаруживают более того фундаментального свойства, которое я сформулировал в предыдущем пункте. Но есть другие кривые, которые я сейчас определю и которые обладают этим свойством. Этого достаточно, чтобы результат предыдущего пункта сохранил силу.

В п. 340 мы нашли выражение действия

$$J' = \int \left[ds\sqrt{H_0 + h} + \omega' (\xi d\eta - \eta d\xi)\right].$$

Для простоты я положу $\sqrt{H_0 + h} = F$; я обозначу координаты не через $\xi$ и $\eta$, а через $x$ и $y$, чтобы приблизиться к обозначениям, примененным в предыдущих пунктах, и угловую скорость не через $\omega'$, а через $\omega$, отбрасывая штрих, ставший ненужным. Тогда я получу

$$J' = \int \left[F\sqrt{dx^2 + dy^2} + \omega (x dy - y dx)\right],$$

откуда

$$\delta J' = \int \left[\delta F ds + F \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{ds} + \omega (\delta x dy - \delta y dx) + \omega (x\delta dy - y\delta dx)\right]$$

или, интегрируя по частям,

$$\delta J' = \int \left[\delta F ds + 2\omega (\delta x dy - \delta y dx) - \delta x d\left(\frac{F dx}{ds}\right) - \delta y d\left(\frac{F dy}{ds}\right)\right] + \\ + \left[F \frac{dx\delta x + dy\delta y}{ds} + \omega (x\delta y - y\delta x)\right]_0^1. \qquad (4)$$

Окончательное выражение $\delta J'$ состоит, таким образом, из двух частей: определенного интеграла, который должен быть взят в тех же пределах, что и интеграл $J'$, и внеинтегрального члена, который я, как принято, поместил в квадратные скобки с индексами 0 и 1, где выражение в квадратных скобках необходимо вычислить для двух пределов интегрирования, а затем составить разность.

Предположим теперь, что мы приравниваем нулю выражение, фигурирующее под знаком интеграла в правой части равенства (4). Мы получим дифференциальные уравнения, которые будут в точности уравнениями движения и которым будут удовлетворять все наши траектории и, в частности, кривые (1).

Эти уравнения можно получить бесконечным числом способов, потому что $\delta x$ и $\delta y$ — две совершенно произвольные функции.

Мы можем сначала предположить $\delta x = 0$, откуда $\delta F = \frac{dF}{dy}\delta y$, и наше уравнение запишется, если разделить на $\delta y ds$, в виде

$$\frac{dF}{dy} - 2\omega \frac{dx}{ds} = \frac{dF}{ds}\frac{dy}{ds} + F\frac{d^2y}{ds^2}. \qquad (6)$$

Если бы мы предположили, наоборот, что $\delta y = 0$, мы бы нашли

$$\frac{dF}{dx} + 2\omega \frac{dy}{ds} = \frac{dF}{ds}\frac{dx}{ds} + F\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Эти два уравнения эквивалентны, как легко было предвидеть, и, в самом деле, если их сложить после того, как они умножены соответственно на $dy/ds$ и $dx/ds$, и если учесть соотношения

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1, \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

то мы придем к тождеству.

Если мы, следовательно, рассмотрим кривые (1), они будут удовлетворять уравнению (6). Если принять во внимание это уравнение, то соотношение (4) примет вид

$$\delta J'=\left[F\frac{dx\delta x+dy\delta y}{ds}+\omega(x\delta y-y\delta x)\right]_0^1.$$

Пусть $A_1B_1$, $A_2B_2$, ..., $A_nB_n$ — непрерывная последовательность дуг, принадлежащих кривым (1), концы которых $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ образуют две непрерывные кривые $C$ и $C'$.

Пусть $A_iB_i$, $A_{i+1}B_{i+1}$ — две из этих дуг, бесконечно мало отличающиеся друг от друга. Пусть $x$, $y$ — координаты точки $A_i$, $x+\delta x$, $y+\delta y$ — координаты бесконечно близкой точки $A_{i+1}$.

Пусть $J'$ — действие относительно дуги $A_iB_i$, а $J'+\delta J'$ — действие относительно дуги $A_{i+1}B_{i+1}$.

Если $\alpha$ — угол, составленный с осью $x$ касательной к кривой $A_iB_i$, которая является кривой (1), и если две кривые $C$ и $C'$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$F(\cos\alpha\delta x+\sin\alpha\delta y)+\omega(x\delta y-y\delta x)=0, \tag{7}$$

то мы будем иметь

$$\delta J'=0$$

и, следовательно,

$$(A_1B_1)=(A_2B_2)=\ldots=(A_nB_n).$$

Кривые, определяемые уравнением (7), могут, следовательно, играть ту роль, которую играли в предыдущем пункте траектории, ортогональные к кривым (1).

Таким образом, мы можем опять взять рис. 11 и предположить, что кривые, проведенные штрих-пунктирной линией, представляют не эти ортогональные траектории, а кривые, определенные уравнением (7). Нам не понадобится тогда ничего изменять в доказательстве.

Однако один момент не является более очевидным. В прямоугольном бесконечно малом треугольнике $A_3CB_3$ я имел

$$(CB_3)>(A_3B_3).$$

Этот треугольник не является теперь прямоугольным, и, с другой стороны, я изменил определение действия. Сохраняется ли это неравенство опять?

Легко видеть, что это неравенство равносильно условиям ($A$) п. 341, а мы видели в п. 344, что они выполнены. Таким образом, неравенство имеет место, и наше доказательство сохраняется.

В итоге для того чтобы замкнутая кривая соответствовала действию, меньшему, чем действие вдоль всех замкнутых бесконечно близких кривых, необходимо и достаточно, чтобы эта замкнутая кривая соответствовала неустойчивому периодическому решению первой категории.

359. Сказанное нами по поводу классификации неустойчивых решений по двум категориям требует одного замечания.

С другой точки зрения неустойчивые периодические решения можно разделить на два класса. Решениями первого класса являются те, для которых характеристический показатель $\alpha$ вещественен, так что $e^{\alpha T}$ вещественно и положительно, где $T$ — период.

Решениями второго класса являются те, для которых этот показатель $\alpha$ имеет мнимую часть, равную $i\pi/T$, так что $e^{\alpha T}$ вещественно и отрицательно.

В предыдущих пунктах мы занимались исключительно неустойчивыми решениями первого класса. Посмотрим, можно ли разделить решения второго класса также на две категории.

Мы можем положить

$$\alpha = \alpha' + \frac{i\pi}{T},$$

где $\alpha'$ — вещественно; и затем мы положим, как в п. 346,

$$\begin{aligned} \xi_2 &= e^{\alpha' t}\varphi_2, & \eta_2 &= e^{\alpha' t}\psi_2, \\ \xi_3 &= e^{-\alpha' t}\varphi_3, & \eta_3 &= e^{-\alpha' t}\psi_3, \end{aligned}$$

где $\varphi_2$, $\psi_2$, $\varphi_3$ и $\psi_3$ — вещественные функции от $t$, меняющие знак, когда $t$ изменяется на $t+T$.

Тогда имеем

$$\zeta(t) = e^{2\alpha' t}\,\frac{\xi_1\psi_2 - \eta_1\varphi_2}{\xi_1\psi_3 - \eta_1\varphi_3} = e^{2\alpha' t} G(t).$$

Числитель и знаменатель $G$ — функции от $t$, которые меняют знак, когда $t$ меняется на $t+T$.

Таким образом, эти две функции определенно обращаются в нуль и, следовательно, то же имеет место и для

$$\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2, \qquad \xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3.$$

Эти две последние функции удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнению второго порядка, коэффициенты которого являются периодическими функциями от $t$, не обращающимися в бесконечность, причем коэффициент при второй производной сводится к постоянной.

Эти две функции не могут обратиться в нуль одновременно; ибо если бы два интеграла подобного линейного уравнения обратились одновременно в нуль, то они могли бы отличаться только постоянным множителем. Но $\zeta(t)$ не постоянная.

Таким образом, и числитель, и знаменатель $\zeta(t)$ обращаются в нуль, но не одновременно; итак, $\zeta(t)$ [и, следовательно, $G(t)$] могут обратиться в нуль и в бесконечность.

Все неустойчивые решения, о которых идет речь, таким образом, второй категории; за этим исключением в предыдущем ничего не нужно менять.

## Глава XXX

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

360. Мы сейчас увидим, как можно эффективно построить периодические решения второго рода.

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i} \tag{1}$$

— система канонических уравнений; предположим, что они допускают периодическое решение первого рода

$$x_i=\varphi_i(t),\qquad y_i=\psi_i(t). \tag{2}$$

Мы ставим себе целью изучить периодические решения второго рода, которые порождаются решением первого рода (2).

Анализ можно упростить, по крайней мере, при изложении, если привести уравнения (1) к надлежащему виду рядом замен переменных.

Мы предположим только две степени свободы. Когда $t$ увеличится на период, $y_1$ и $y_2$ возрастут соответственно на

$$2k_1\pi,\ 2k_2\pi,$$

где $k_1$ и $k_2$ — целые.

Я могу сначала предположить, что $k_1=0$; ибо если бы это было не так, то я обратил бы $k_1$ в нуль заменой переменных из п. 202.

Я могу затем предположить, что периодическое решение (2) приводится к

$$x_1=0,\qquad x_2=0,\qquad y_1=0,$$

ибо, если бы это было не так, то я совершил бы замену переменных из п. 208.

При этих условиях мы увидим сейчас, каким образом можно связать исследование периодических решений второго рода либо с анализом п. 274, либо с анализом п. 44.

361. Напомним результаты, полученные в пунктах 273—277. Пусть канонические уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\ \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

содержат параметр $\lambda$, и предположим, что они допускают периодическое решение

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t) \tag{2}$$

с периодом $T_0$, соответствующим значению $C_0$ постоянной живых сил и $\lambda=0$. Формально мы удовлетворим уравнениям (1) рядами следующего вида; эти ряды будут расположены по степеням количеств

$$\lambda, \ A_k e^{\alpha_k t}, \ A'_k e^{-\alpha_k t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Коэффициенты будут периодическими функциями от $t+h$, зависящими, кроме того, от постоянной живых сил $C$. Период $T$ будет также зависеть от $C$ и от произведений $A_k A'_k$; он приведется к $T_0$ при

$$C = C_0, \quad A_k A'_k = 0, \quad \lambda = 0.$$

Показатели $\alpha_k$ — постоянные, разложимые по степеням $\lambda$ и произведений $A_k A'_k$ и зависящие, кроме того, от $C$; они приводятся к характеристическим показателям решения (2) при

$$C = C_0, \quad A_k A'_k = 0, \quad \lambda = 0.$$

Величины $A_k$, $A'_k$ и $h$ — постоянные интегрирования.

При изучении асимптотических решений мы предположили, что $\alpha_k$ вещественны, и приравняли нулю одну из двух постоянных $A$.

Чтобы применить эти же результаты к изучению периодических решений второго рода, мы предположим, что, наоборот, показатели $\alpha_k$ чисто мнимые.

Я предположу только две степени свободы, что позволит отбросить индекс $k$, ставший ненужным.

Чтобы получить периодические решения, необходимо, чтобы показатель $\alpha$ был соизмерим с $2\pi/T$. Если бы наши ряды сходились, то это условие было бы достаточным; но они расходятся и удовлетворяют уравнениям (2) только с формальной точки зрения. Таким образом, необходим более глубокий анализ; можно было бы применить искусственный прием, аналогичный примененному в пунктах 211 и 218. Таким образом, мы получили бы ряды, которые были бы по отношению к рядам из пунктов 273 и 277 тем же, что и ряды Болина по отношению к рядам в пунктах 125 и 127. Таким образом, мы пришли бы косвенным путем к периодическим решениям второго рода. Но я предпочитаю действовать иначе.

### Прямое построение решений

**362.** Заменами переменных в пунктах 209, 210, 273, 274, применимыми всегда, когда имеется система канонических уравнений, допускающая периодическое решение, мы можем привести наши уравнения к виду уравнений п. 274. В этом пункте мы составили следующие уравнения:

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{dF'}{dy_i'},\quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{dF'}{dx_i},\tag{3}$$

$$F'=F_0'+\varepsilon F_1'+\varepsilon^2F_2'+\ldots,$$

где $F_p'$ — целый многочлен относительно $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, который будет однородным степени $p+2$, если считать $x_1'$ и $y_1'$ величинами первого порядка, а $x_2'$ — второго порядка. Коэффициенты этого полинома являются периодическими функциями от $y_2'$, период которых равен $2\pi$.

Как и в п. 274, мы сейчас отбросим ставшие ненужными штрихи и будем писать $F$, $F_p$, $x_i$, $y_i$ вместо $F'$, $F_p'$, $x_i'$, $y_i'$.

Тогда мы можем предположить (см. стр. 90—92), что

$$F_0=Hx_2+2Bx_1y_1,$$

где $H$ и $B$ — постоянные; я мог бы предположить также $H=1$, но я этого не буду делать.

Положим затем, как на стр. 92,

$$x_1=e^v\sqrt{u},\qquad y_1=e^{-v}\sqrt{u};$$

уравнения сохранят каноническую форму, и мы получим

$$F_0=Hx_2+2Bu;$$

остальные члены $F_1$, $F_2$, ... будут периодическими с периодом $2\pi$ как по $iv$, так и по $y_2$.

Тогда наши уравнения имеют форму, аналогичную той, которую мы изучали столько раз и, в частности, в пунктах 13, 42, 125 и т. д., где параметр $\varepsilon$ играет роль параметра $\mu$. Следовательно, мы можем применить к ним методику п. 44.

Однако возникает одно препятствие: гессиан от $F_0$ по $x_2$ и по $u$ равен нулю; а это как раз один из исключительных случаев п. 44.

Это обстоятельство заставляет меня предположить, что $F$ зависит от некоторого параметра $\lambda$, и мы будем разлагать одновременно по степеням $\lambda$ и по степеням $\varepsilon$. Впрочем, мы видели в главе XXVIII, что при изучении периодических решений второго рода всегда следует ввести подобный параметр, поскольку решения второго рода характеризуются как раз тем, что они сводятся к решению первого рода при $\lambda=0$ и отличаются от него при $\lambda\neq 0$.

Только вместо одного произвольного параметра я введу для большего удобства изложения два, которые я назову $\lambda$ и $\mu$.

Итак, мы предположим, что различные коэффициенты $F$ разложимы по степеням двух параметров $\lambda$ и $\mu$ и что при $\lambda=\mu=0$ постоянные $H$ и $2B$ сводятся к $-1$ и к $-in$, где $n$ — вещественное рациональное число.

Я предполагаю, что $\lambda$ и $\mu$ можно разложить по возрастающим степеням $\varepsilon$ в виде

$$\lambda = \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + \ldots; \qquad \mu = \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2 + \ldots,$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... — постоянные, которые я оставлю пока неопределенными, но я оставляю за собой их определение в последующих вычислениях.

При этих условиях последуем шаг за шагом вычислениям п. 44. Мы положим

$$\begin{aligned} x_2 &= \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \ldots, \\ y_2 &= \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ldots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти формулы аналогичны формулам (2) из п. 44.

Величины $\xi_k$, $\eta_k$, $u_k$, $v_k$ являются, следовательно, периодическими функциями от $t$; $\xi_0$ и $u_0$ — постоянные и

$$\eta_0 = t, \qquad v_0 = i(nt + \varpi),$$

где $\varpi$ — постоянная интегрирования, которую я определю более полно в дальнейшем.

Подставим затем в $F$ вместо $\lambda$, $\mu$, $x_2$, $y_2$, $u$ и $v$ их разложения по степеням $\varepsilon$; тогда $F$ также будет разложима по степеням $\varepsilon$, и мы получим

$$F = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots .$$

Я замечу сначала, что $\Phi_k$ — однородная функция степени $k+2$, если считать, что $\xi_p$ и $u_p$ степени $p+2$, $\eta_p$ и $v_p$ степени $p$, $\lambda_p$ и $\mu_p$ степени $p$.

При этом она представляет собой целый полином относительно

$$\xi_p,\ u_p,\ \eta_p,\ v_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \qquad (p > 0)$$

и относительно

$$\sqrt{u_0}e^{v_0}, \qquad \sqrt{u_0}e^{-v_0}.$$

Эти два последних количества мы считаем порядка 1. Наконец, коэффициенты этого полинома являются периодическими функциями от $\eta_0$, период которых равен $2\pi$.

С другой стороны, мы найдем

$$\Phi_k = \Theta_k - \xi_k - inu_k + \lambda_k H_0\xi_0 + 2B_0\mu_k u_0,$$

где $H_0$ и $B_0$ — значения $dH/d\lambda$ и $dB/d\mu$ при $\lambda=\mu=0$. (Мы можем предположить, что при $\lambda=\mu=0$ мы имеем $dH/d\mu=dB/d\lambda=0$.) С другой стороны, $\Theta_k$ зависит только от

$$\xi_p,\ \eta_p,\ u_p,\ v_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \qquad (p \leqslant k-1).$$

Тогда наши дифференциальные уравнения записываются в виде

$$\frac{d\xi_k}{dt}=\frac{d\Phi_k}{d\eta_0}, \qquad \frac{d\eta_k}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{d\xi_0}, \qquad \frac{du_k}{dt}=\frac{d\Phi_k}{dv_0}, \qquad \frac{dv_k}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{du_0}. \tag{5}$$

При $k=0$ они приводятся к

$$\frac{d\xi_0}{dt}=\frac{du_0}{dt}=0; \qquad \frac{d\eta_0}{dt}=1; \quad \frac{dv_0}{dt}=in.$$

Они показывают, что $\xi_0$ и $u_0$ — постоянные, и что

$$\eta_0=t, \qquad v_0=i(nt+\varpi),$$

где $\varpi$ — постоянная, подлежащая определению.

Мы можем с пользой присоединить к уравнениям (4) и (5) другие уравнения аналогичного вида, которые являются всего лишь их преобразованиями.

Разложим $x_1$ и $y_1$ по степеням $\varepsilon$, и пусть

$$\begin{aligned} x_1&=\xi_0'+\varepsilon\xi_1'+\varepsilon^2\xi_2'+\ldots, \\ y_1&=\eta_0'+\varepsilon\eta_1'+\varepsilon^2\eta_2'+\ldots. \end{aligned} \tag{4bis}$$

Разложения (4bis), впрочем, выводятся непосредственно из двух последних разложений (4).

Тогда мы видим, что $\Phi_k$ — целый полином относительно количеств

$$\xi_p,\ \eta_p,\ \xi_p',\ \eta_p',\ \lambda_p,\ \mu_p \ \text{(если не считать } \eta_0) \tag{6}$$

и что этот полином однородный степени $k+2$, если считать, что

$$\begin{aligned} &\xi_p \text{ — степени } p+2, \\ &\xi_p',\ \eta_p' \text{ — степени } p+1, \\ &\eta_p,\ \lambda_p,\ \mu_p \text{ — степени } p. \end{aligned}$$

Тогда мы получим уравнения

$$\frac{d\xi_k'}{dt}=\frac{d\Phi_k}{d\eta_0'}, \qquad \frac{d\eta_k'}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{d\xi_0'}, \tag{5bis}$$

эквивалентные двум последним уравнениям (5).

Мы замечаем, что $d\Phi_k/d\eta_0$, $d\Phi_k/d\xi_0$, $d\Phi_k/d\xi_0'$, $d\Phi_k/d\eta_0'$ — полиномы того же вида, что и $\Phi_k$, относительно количеств (6) и что при соглашениях, сделанных по поводу степеней, они однородны, первый — порядка $k+2$, второй — порядка $k$, а два последних — порядка $k+1$.

Кроме того, мы имеем

$$\xi_0'=\sqrt{u_0}\,e^{i(nt+\varpi)}, \qquad \eta_0'=\sqrt{u_0}\,e^{-i(nt+\varpi)}.$$

Заменим в уравнениях (5) и (5bis) $\xi_0'$, $\eta_0'$ этими значениями и одновременно $\eta_0$ на $t$, где необходимо предположить, что мы сделали $k=1$, и воспользуемся ими для определения $\xi_1$, $\eta_1$, $u_1$, $v_1$, $\xi_1'$, $\eta_1'$.

Мы имеем таким образом шесть следующих уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\eta_1}{dt}=-\frac{d\Phi_1}{d\xi_0}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0}-\lambda_1 H_0, \qquad \frac{d\xi_1}{dt}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0},\\
&\frac{du_1}{dt}=\frac{d\Theta_1}{dv_0}, \qquad \frac{dv_1}{dt}=-\frac{d\Theta_1}{du_0}-2\mu_1 B_0,\\
&\frac{d\xi_1'}{dt}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}-in\frac{du_1}{d\eta_0'}+2B_0\mu_1\frac{du_0}{d\eta_0'}=\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}-in\xi_1'+2B_0\mu_1\xi_0',\\
&\frac{d\eta_1'}{dt}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}+in\frac{du_1}{d\xi_0'}-2B_0\mu_1\frac{du_0}{d\xi_0'}=-\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}+in\eta_1'-2B_0\mu_1\eta_0'.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Рассмотрим сначала второе из этих уравнений; правая часть является целым однородным полиномом третьей степени относительно

$$\xi_0,\ \xi_0',\ \eta_0',$$

коэффициенты которого — периодические функции от $\eta_0=t$ с периодом $2\pi$. Так как $n$ — рационально, то наша правая часть также будет периодической функцией от $t$, от которого она зависит двояким образом — посредством $\eta_0$, которое равно $t$, и посредством $\xi_0'$ и $\eta_0'$, которые являются функциями от $nt+\varpi$.

Период будет кратным $2\pi$, т. е. равен такому числу $2\pi$, сколько единиц содержится в знаменателе $n$.

Правую часть можно, таким образом, разложить в ряд Фурье вида

$$\sum A e^{i[pt+q(nt+\varpi)]}, \tag{8}$$

где $p$ и $q$ — целые. Но $q$ не может превысить 3 по абсолютной величине, поскольку правая часть является полиномом третьей степени.

Отсюда вытекает, что, вообще говоря, среднее значение правой части равно нулю. В самом деле, мы получим это среднее значение, сохраняя в ряде (8) члены, не зависящие от $t$, т. е. такие, что

$$p+qn=0.$$

Я сказал, что $|q|$ не может превзойти 3; я мог бы добавить, что наша правая часть, будучи целым и однородным полиномом степени 3 относительно $\xi_0$, $\xi_0'$ и $\eta_0'$, если считать $\xi_0$ степени 2, может содержать $\xi_0'$ и $\eta_0'$ только в нечетной степени, т. е. что $q$ должно быть нечетным и может принимать только одно из значений $\pm 1$ или $\pm 3$.

Таким образом, можно получить

$$p+qn=0,$$

только если знаменатель $n$ равен 1 или 3.

Мы исключим первое предположение, при котором $n$ оказалось бы целым числом, однако нам остается рассмотреть два случая.

1. Знаменатель $n$ не равен 3. В этом случае, так как правая часть имеет нулевое среднее значение, уравнение даст немедленно $\xi_1$ простой квадратурой; тогда $\xi_1$ определится с точностью до постоянной, которую я назову $\gamma_1$, и эта постоянная остается неопределенной вплоть до определения членов высшего порядка; следует заметить, что то же относится и к $\varpi$.

2. Знаменатель $n$ равен 3. Тогда чтобы уравнение было интегрируемым *, необходимо сделать среднее значение правой части равным нулю; для этого мы распорядимся постоянной $\varpi$.

Пусть $[\Theta_1]$ — среднее значение $\Theta_1$; заметим, что

$$\left[\frac{d\Theta_1}{d\eta_0}\right] = -n\frac{d\,[\Theta_1]}{d\varpi};$$

таким образом, мы определим $\varpi$ уравнением

$$\frac{d\,[\Theta_1]}{d\varpi} = 0, \tag{9}$$

и одна квадратура даст нам затем $\xi_1$ с точностью до постоянной $\gamma_1$.

Возьмем теперь первое уравнение (7), рассуждая таким же образом. Так как $d\Theta_1/d\xi_0$ будет полиномом не третьего, а первого порядка, и $n$ не будет целым, мы будем уверены, что среднее значение $d\Theta_1/d\xi_0$ равно нулю.

Таким образом, нам достаточно взять $\lambda_1=0$, чтобы среднее значение правой части было равно нулю и чтобы $\eta_1$ было определено с точностью до постоянной $\delta_1$.

Перейдем теперь к двум последним уравнениям (7); их можно написать в виде

$$\frac{d\xi_1'}{dt} + in\xi_1' = \frac{d\Theta_1}{d\eta_0'} + 2B_0\mu_1\xi_0',$$
$$\frac{d\eta_1'}{dt} - in\eta_1' = -\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'} - 2B_0\mu_1\eta_0'.$$

Правые части являются известными периодическими функциями от $t$; для того чтобы интегрирование было возможным, достаточно, следовательно, чтобы правая часть первого уравнения не содержала членов с $e^{-int}$, а правая часть второго — членов с $e^{int}$.

Анализ этого двойного условия проводится легче, если рассмотреть третье и четвертое уравнения (7), которые эквивалентны двум последним и записываются в виде

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d\Theta_1}{dv_0}, \qquad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{d\Theta_1}{du_0} - 2\mu_1 B_0.$$

* Здесь и дальше это выражение означает, что решение является периодическим. (*Прим. ред.*).

Необходимо, чтобы средние значения правых частей были равны нулю.

Что касается первого из этих уравнений, то условие выполняется само собой; в самом деле,

$$\left[\frac{d\theta_1}{dv_0}\right]=\frac{d\,[\theta_1]}{d\varpi}.$$

Это последнее выражение равно нулю в силу уравнения (9), если знаменатель $n$ равен 3, а в противном случае — потому что $[\theta_1]$ есть тождественный нуль.

Второе условие записывается в виде

$$\frac{d\,[\theta_1]}{du_0}=-2\mu_1 B_0.$$

Если знаменатель $n$ равен 3, то оно даст нам $\mu_1$.

Если, наоборот, знаменатель не равен 3, то оно даст $\mu_1=0$, потому что $[\theta_1]$ — тождественный нуль.

Таким образом, мы видим, что $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_1'$, $\eta_1'$ — периодические функции от $t$ и $\varpi$. Следовательно, они будут разложимы в ряды Фурье вида

$$\sum A e^{i(pt+qnt+q\varpi)}.$$

Однако можно добавить кое-что сверх того; мы должны рассмотреть уравнения следующего вида:

$$\frac{d\xi}{dt}=X=\sum A e^{i(pt+qnt+q\varpi)},$$

$$\frac{d\eta}{dt}+in\eta=Y=\sum B e^{i(pt+qnt+q\varpi)},$$

из которых найдем

$$\xi=\sum\frac{A}{i\,(p+qn)}\,e^{i(pt+qnt+q\varpi)}+\gamma,$$

$$\eta=\sum\frac{B}{i\,(p+qn+n)}\,e^{i(pt+qnt+q\varpi)}+\gamma' e^{-int},$$

где $\gamma$ и $\gamma'$ — постоянные интегрирования.

Таким образом, если $X$ и $Y$ — целые и однородные полиномы относительно

$$\sqrt{\xi_0},\quad \sqrt{u_0}\,e^{i(nt+\varpi)},\quad \sqrt{u_0}\,e^{-i(nt+\varpi)},$$

то же будет для $\xi$ и для $\eta$, по крайней мере, если предположить, что постоянные $\gamma$ и $\gamma'$ равны нулю. Если не предполагать, что эти постоянные суть нули, то $\xi$ и $\eta$ опять будут целыми полиномами, но не однородными.

Применим эти принципы к величинам, которые мы только что вычислили; мы видим, что так как

$$\frac{d\Theta_1}{d\xi_0}, \quad \frac{d\Theta_1}{d\eta_0}, \quad \frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}, \quad \frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}$$

— полиномы, которые согласно соглашениям, сделанным нами о степенях, имеют соответственно степени

$$1, \ 3, \ 2, \ 2,$$

то же имеет место и для

$$\eta_1, \ \xi_1, \ \eta_1', \ \xi_1'.$$

Когда мы подставим в $\Theta_2$ вместо этих количеств их значения, степени которых суть соответственно 1, 3, 2, 2, то увидим, что $\Theta_2$ станет полиномом 4-й степени и что

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi_0}, \quad \frac{d\Theta_2}{d\eta_0}, \quad \frac{d\Theta_2}{d\xi_0'}, \quad \frac{d\Theta_2}{d\eta_0'}$$

будут полиномами соответственно степеней

$$2, \ 4, \ 3, \ 3.$$

Мы можем обобщить этот результат.

Уравнения (5) и (5bis) позволяют вычислить шаг за шагом неизвестные $\xi_k$, $\eta_k$, $\xi_k'$, $\eta_k'$; мы принуждены были бы остановиться только в том случае, если среднее значение правой части одного из уравнений (5) оказалось отличным от нуля.

Предположим, что это обстоятельство не имеет места; я говорю, что

$$\xi_k, \ \eta_k, \ \xi_k', \ \eta_k'$$

будут полиномами степеней

$$k+2, \ k, \ k+1, \ k+1$$

относительно

$$\sqrt{\xi_0}, \qquad \sqrt{u_0}e^{i(nt+\varpi)}, \qquad \sqrt{u_0}e^{-i(nt+\varpi)}, \tag{10}$$

а коэффициенты этих полиномов будут периодическими функциями от $t$ с периодом $2\pi$.

В самом деле, предположим, что это справедливо для всех значений индекса, меньших $k$.

Мы знаем, что $\Theta_k$ — целый полином степени $k+2$ относительно

$$\xi_q, \ \eta_q, \ \xi_q', \ \eta_q' \ (q<k) \tag{11}$$

в предположении, что эти количества имеют соответственно степени $q+2$, $q$, $q+1$, $q+1$. Если, следовательно, мы подставим вместо количеств (11) полиномы, степени которых относительно количеств (10) как раз равны $q+2$, $q$, $q+1$, $q+1$, то очевидно, результат подстановки будет полиномом степени $k+2$ относительно количеств (10).

Таким образом, $\Theta_k$ — полином степени $k+2$ относительно количеств (10), и по той же причине

$$\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\eta_0}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\xi'_0}, \quad \frac{d\Theta_k}{d\eta'_0}$$

будут полиномами степеней

$$k, \ k+2, \ k+1, \ k+1$$

относительно этих же количеств.

Таким образом, то же самое имеет место для правых частей первого, второго, пятого и шестого уравнений (7); следовательно, повторяя предыдущее рассуждение, мы легко увидели бы, что то же самое опять имеет место и для

$$\eta_k, \ \xi_k, \ \eta'_k, \ \xi'_k,$$

что и требовалось доказать.

Интегрирование уравнений (7) ввело четыре новых постоянных интегрирования. В самом деле, из них мы узнаем $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi'_1$, $\eta'_1$ с точностью до членов

$$\gamma_1, \ \delta_1, \ \gamma'_1 e^{-i(nt+\varpi)}, \ \delta'_1 e^{i(nt+\varpi)},$$

содержащих четыре произвольные постоянные

$$\gamma_1, \ \delta_1, \ \gamma'_1, \ \delta'_1.$$

Мы сохраним только одну из этих постоянных и положим

$$\gamma_1 = \delta_1 = 0, \quad \delta'_1 = -\gamma'_1.$$

После этого попытаемся определить

$$\xi_2, \ \eta_2, \ \xi'_2, \ \eta'_2$$

при помощи уравнений (5) и (5bis), полагая в них $k=2$.

Сначала необходимо, чтобы правая часть первого уравнения (5) имела нулевое среднее значение; это среднее значение равно

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right],$$

если, как всегда, применять квадратные скобки для обозначения среднего значения функции. Таким образом, мы получим

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right] = 0. \tag{9bis}$$

Предположим, что $\Theta_2$ разложено в ряд Фурье вида

$$\sum Ae^{i(pt+qnt+q\varpi)}.$$

Так как $\Theta_2$ — полином четвертой степени, $q$ не может превосходить по абсолютной величине 4, и, следовательно, если знаменатель $n$ больше 4, $[\Theta_2]$ будет тождественным нулем, а условие (9bis) будет выполнено само собой; постоянная $\varpi$ останется неопределенной.

Если знаменатель $n$ равен 2 или 4, условие (9bis) определит $\varpi$.

Если знаменатель $n$ равен 3, постоянная $\varpi$ уже определена условием (9), и условие (9bis) послужит для определения постоянной $\gamma_1'$.

Вычислим в $\Theta_2$ члены, которые зависят от этой постоянной $\gamma_1'$.

Очевидно, мы найдем

$$\gamma_1'\left(\frac{d\Theta_1}{d\xi_0'}e^{-i(nt+\varpi)}-\frac{d\Theta_1}{d\eta_0'}e^{i(nt+\varpi)}\right),$$

т. е.

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d\Theta_1}{d\varpi}.$$

Среднее значение этого выражения будет равно

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d[\Theta_1]}{d\varpi}.$$

Таким образом, условие (9bis) можно написать $\left(\text{если заметить, что } \left[\frac{d^2\Theta_1}{d\eta_0 d\varpi}\right]=-n\frac{d^2[\Theta_1]}{d\varpi^2}\right)$ в виде

$$\frac{\gamma_1'}{i\sqrt{u_0}}\frac{d^2[\Theta_1]}{d\varpi^2}+H=0,$$

где $H$ зависит от $\varpi$, но не от $\gamma_1'$.

Если знаменатель $n$ не равен 3, $[\Theta_1]$ равно 0, и условие (9bis) не зависит от $\gamma_1'$. Таким образом, если этот знаменатель равен 2 или 4, уравнение (9bis) будет зависеть от $\varpi$, а не от $\gamma_1'$, и определит $\varpi$.

Если знаменатель равен 3, условие (9bis) зависит от $\gamma_1'$ и определит $\gamma_1'$ (при этом оно даст $\gamma_1'=0$).

Во всяком случае, определив таким образом $\xi_2$, постараемся вычислить $\eta_2$ при помощи второго уравнения (5). Мы распорядимся $\lambda_2$ таким образом, чтобы среднее значение правой части было равно нулю.

Заметим, что $\lambda_2$, вообще говоря, не будет нулем; в самом деле,

$$\frac{d[\Theta_2]}{d\xi_0},$$

вообще говоря, не будет нулем. Ибо $\Theta_2$, будучи полиномом степени 4, будет содержать один член с $\xi_0^2$, не зависящий от величин $\xi_k'$ и $\eta_k'$. Коэффициент этого члена будет периодической функцией от $t$ периодом $2\pi$, и его среднее значение не будет, вообще говоря, нулем.

Перейдем к уравнениям (5bis) или, что то же самое, к двум последним уравнениям (5). Правые части этих двух последних уравнений должны иметь нулевые средние значения.

Следовательно, мы должны иметь

$$\left[\frac{d\Theta_2}{du_0}\right] = -2\mu_2 B_0,$$

что определяет $\mu_2$. Но

$$2u_0 \frac{d\Theta_2}{du_0} = \xi_0' \frac{d\Theta_2}{d\xi_0'} + \eta_0' \frac{d\Theta_2}{d\eta_0'}$$

— полином четвертого порядка. Таким образом, $F_2$ содержит члены с $x_1^2 y_1^2$ и, следовательно, $u_2 \dfrac{d\Theta_2}{du_0}$ содержит член с

$$u_0^2 = \left(\sqrt{u_0}\, e^{i(nt+\varpi)}\right)^2 \left(\sqrt{u_0}\, e^{-i(nt+\ )}\right)^2.$$

Коэффициент этого члена является периодической функцией от $t$, среднее значение которой, вообще говоря, не равно нулю. Таким образом, вообще говоря, $\left[\dfrac{d\Theta_2}{du_0}\right]$ и, следовательно, $\mu_2$ не равны нулю. Это то же самое рассуждение, что и для $\lambda_2$.

Затем мы должны иметь

$$\left[\frac{d\Theta_2}{dv_0}\right] = 0. \tag{12}$$

Но я говорю, что это условие выполняется само собой.

В самом деле, мы имеем интеграл живых сил, $F = \text{const}$, откуда выводим ряд уравнений:

$$\Phi_0 = \text{const}, \quad \Phi_1 = \text{const}, \quad \Phi_2 = \text{const}, \quad \ldots.$$

Рассмотрим третье из этих уравнений:

$$\Phi_2 = \Theta_2 - \xi_2 - inu_2 + \lambda_2 H_0 \xi_0 + 2B_0 \mu_2 u_0 = \text{const}.$$

Этим уравнением можно заменить четвертое уравнение (5), и когда мы определим $\lambda_2$, $\mu_2$, $\xi_2$, $\eta_2$ и $v_2$ при помощи трех первых уравнений (5), оно определит $u_2$ *без всякого интегрирования*. Таким образом, можно быть уверенным, что определение $u_2$ возможно, и, следовательно, что условие (12) выполнено.

Мы определим таким образом $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_2'$, $\eta_2'$ с точностью до членов

$$\gamma_2, \quad \delta_2, \quad \gamma_2' e^{-i(nt+\varpi)}, \quad \delta_2' e^{i(nt+\varpi)},$$

зависящих от четырех произвольных постоянных. Мы сохраним только одну из этих постоянных и положим

$$\gamma_2 = \delta_2 = 0, \quad \delta_2' = -\gamma_2'.$$

**363.** Вычисление продолжается таким же образом. Для интегрируемости уравнений (5) необходимо выполнение условий

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right] = 0, \quad \left[\frac{d\Theta_k}{dv_0}\right] = 0; \quad \left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right] + \lambda_k H_0 = 0, \quad \left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right] + 2\mu_k B_0 = 0.$$

Последние два из этих условий определят $\lambda_k$ и $\mu_k$; второе будет следствием первого в соответствии с тем, что мы видели относительно условия (12). Таким образом, нам остается изучить первое условие.

Выражение $d\Theta_k/d\eta_0$ является полиномом порядка $k+2$; если его разложить в ряд Фурье

$$\sum A e^{i\,(pt+qnt+q\varpi)},$$

то целое $q$ не может превзойти $k+2$ по абсолютной величине. Следовательно, если $k+2$ меньше знаменателя $n$, то нельзя получить

$$p + qn = 0,$$

и среднее значение нашего выражения будет равно нулю. Условие

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right] = 0 \tag{13}$$

будет, следовательно, выполнено само собой.

Мы ввели следующие произвольные постоянные:

$$\varpi, \ \gamma_1', \ \gamma_2', \ \ldots, \tag{14}$$

и $\Theta_k$ может зависеть от

$$\varpi, \ \gamma_1', \ \gamma_2', \ \ldots, \ \gamma_{k-1}'.$$

Посмотрим, каким образом. Предположим, что мы рассматриваем разложение

$$F = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots, \tag{15}$$

и что в этом разложении мы заменяем величины $\xi$, $\eta$, $\xi'$ и $\eta'$ их значениями; различные члены разложения будут зависеть тогда от постоянных (14). В этом разложении (15) обратим в нуль все постоянные $\gamma'$, сохраняя только $\varpi$; мы получим таким образом новое разложение

$$\Phi_0' + \varepsilon\Phi_1' + \varepsilon^2\Phi_2' + \ldots. \tag{16}$$

Заменим теперь в разложении (16) постоянную $\varpi$ разложением

$$\varpi+\varepsilon\varpi_1+\varepsilon^2\varpi_2+\ldots,$$

где $\varpi_1$, $\varpi_2$, ... — новые постоянные. Каждый из членов разложения (16) можно в свою очередь разложить по степеням $\varepsilon$; располагая снова по степеням $\varepsilon$, мы получаем новое разложение

$$\Phi_0''+\varepsilon\Phi_1''+\varepsilon^2\Phi_2''+\ldots. \tag{17}$$

Это разложение должно быть тождественным с разложением (15) при условии замены постоянных $\varpi_k$ надлежащим образом выбранными функциями постоянных $\gamma_k'$.

Легко видеть, что $\Phi_k''$ зависит только от

$$\varpi,\ \varpi_1,\ \ldots,\ \varpi_{k-1}$$

и что $\Phi_k$ зависит только от

$$\varpi,\ \gamma_1',\ \ldots,\ \gamma_{k-1}'.$$

Отсюда мы заключаем, что $\varpi_k$ зависит только от

$$\gamma_1',\ \gamma_2',\ \ldots,\ \gamma_k',$$

а $\gamma_k'$ — от

$$\varpi_1,\ \varpi_2,\ \ldots,\ \varpi_k.$$

Легко видеть, что

$$\Phi_k''=\sum AD\Phi_m'\varpi_1^{\alpha_1}\varpi_2^{\alpha_2}\ldots\varpi_k^{\alpha_k},$$

где $A$ — числовой коэффициент и $D\Phi_m'$ — производная от $\Phi_m'$ по $\varpi$; порядок этой производной равен

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k$$

и при этом мы имеем

$$k=m+\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+k\alpha_k.$$

Так как $m$ равно по крайней мере 1, поскольку $\Phi_0$ не зависит от $\varpi$, то мы видим сначала, что $\alpha_k$ равно нулю, что мы, впрочем, уже знали.

Рассмотрим любой член, в котором $\alpha_k$, $\alpha_{k-1}$, ..., $\alpha_{h+1}$ равны нулю, но $\alpha_h$ не нуль; мы должны будем иметь

$$m\leqslant k-h.$$

Если знаменатель $n$ больше, чем $k-h+2$, то среднее значение $D\Phi_m$ будет равно нулю; это означает, что те члены в $\Phi_k''$, которые зависят от $\varpi_h$, имеют нулевое среднее значение.

Мы можем отсюда получить один важный результат, касающийся среднего значения $\Phi_k''$, и, следовательно, среднего значения $\Theta_k$:

Если знаменатель $n$ равен $k+2$, $[\Theta_k]$ будет зависеть только от $\varpi$.

Если знаменатель $n$ равен $k+1$, $[\Theta_k]$ будет зависеть от $\varpi$ и $\varpi_1$.

Если знаменатель $n$ равен $k$, $[\Theta_k]$ будет зависеть от $\varpi$, $\varpi_1$ и $\varpi_2$.

Если знаменатель $n$ равен $k-1$, $[\Theta_k]$ будет зависеть от $\varpi$, $\varpi_1$, $\varpi_2$ и $\varpi_3$, ....

При этом то, что я сказал только что о величине $[\Theta_k]$, применимо к $[d\Theta_k/d\eta_0]$.

Итак, если знаменатель $n$ равен $k+2$, соотношение (13), в которое входит только $\varpi$, определит $\varpi$.

Если знаменатель равен $k+1$, соотношение (13) будет содержать $\varpi$ и $\varpi_1$; однако $\varpi$ уже предварительно было определено из соотношения

$$\left[\frac{d\Theta_{k-1}}{d\eta_0}\right]=0.$$

Соотношение (13) определит, таким образом, $\varpi_1$ и, следовательно, $\gamma_1'$.

Если знаменатель равен $k$, соотношение (13) будет содержать $\varpi$, $\varpi_1$, $\varpi_2$; но $\varpi$ и $\varpi_1$ были уже предварительно определены соотношениями того же вида, что и (13). Таким образом, (13) определит $\varpi_2$ и, следовательно, $\gamma_2'$, и т. д.

## Анализ

**364.** В решении, к которому мы пришли, фигурируют еще следующие произвольные постоянные:

$$\varepsilon,\ \xi_0,\ u_0.$$

Что касается параметров $\lambda$ и $\mu$, то они заданы своими разложениями по возрастающим степеням $\varepsilon$, разложениями, коэффициенты которых мы последовательно вычислили. Эти коэффициенты $\lambda_k$ и $\mu_k$ зависят от двух постоянных $\xi_0$ и $u_0$; эти коэффициенты были вычислены при помощи уравнений

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right]+\lambda_k H_0=\left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right]+2\mu_k B_0=0.$$

Величины $\Theta_k$, $d\Theta_k/d\xi_0$ и $u_0 d\Theta_k/du_0$ — целые полиномы относительно

$$\xi_0,\ \sqrt{u_0}\,e^{\pm i(nt+\varpi)}.$$

Пусть

$$\Theta_k=\sum P\xi_0'^{h_1}\eta_0'^{h_2}\xi_0^{h_3}=\sum Q,$$

где $P$ — целый полином относительно

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_1',\ \xi_2',\ \ldots,\ \eta_1',\ \eta_2',\ \ldots, \tag{18}$$

коэффициенты которого периодические функции $\eta_0$.

Тогда мы имеем

$$\xi_0 \frac{d\Theta_k}{d\xi_0} = \sum h_3 Q, \quad u_0 \frac{d\Theta_k}{du_0} = \sum \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) Q.$$

Заменим затем количества (18) их разложениями, и пусть

$$P = \sum B \xi_0'^{b_1} \eta_0'^{b_2} \xi_0^{b_3},$$

где $B$ — периодическая функция от $t$ с периодом $2\pi$, откуда

$$\Theta_k = \sum B \xi_0'^{b_1+h_1} \eta_0'^{b_2+h_2} \xi_0^{b_3+h_3} = \sum R,$$

$$\xi_0 \frac{d\Theta_k}{d\xi_0} = \sum h_3 R, \quad u_0 \frac{d\Theta_k}{du_0} = \sum \frac{h_1 + h_2}{2} R.$$

Мы получим

$$\xi_0 \left[\frac{d\Theta_k}{d\xi_0}\right], \quad u_0 \left[\frac{d\Theta_k}{du_0}\right],$$

сохраняя в этих разложениях члены, не зависящие от $t$. Но различные члены $R$ содержат множителями показательные функции

$$e^{ipt} \times e^{i(nt+\tilde{\omega})(b_1+h_1-b_2-h_2)}$$

Чтобы этот член не зависел от $t$, необходимо, чтобы было

$$p + n(b_1 + h_1 - b_2 - h_2) = 0,$$

что показывает, что $b_1 + h_1 - b_2 - h_2$ должно делиться на знаменатель $n$. Итак,

$$b_1 + h_1 + b_2 + h_2 > b_1 + h_1 - b_2 - h_2 > \text{знаменателя } n \geqslant 2,$$

что означает, что $R$ делится на $u_0$, поскольку $u_0$ фигурирует в $R$ с показателем $^1/_2(b_1 + h_1 + b_2 + h_2)$.

Исключение имело бы место, только если

$$b_1 + h_1 = b_2 + h_2,$$

но тогда мы имели бы либо

$$b_1 + h_1 \geqslant 1,$$
$$b_1 + h_1 + b_2 + h_2 \geqslant 2,$$

так что $R$ опять делилось бы на $u_0$; либо

$$b_1 = h_1 = b_2 = h_2 = 0,$$

откуда

$$\frac{h_1+h_2}{2}=0,$$

но тогда соответствующий член не входил бы в $u_0\left[\frac{d\theta_k}{du_0}\right]$.

Аналогично, $R$ всегда будет делиться на $\xi_0$, за исключением случая $h_3=0$, когда соответствующий член не вошел бы в $\xi_0\left[\frac{d\theta_k}{d\xi_0}\right]$.

Итак, в итоге

$$\left[\frac{d\theta_k}{du_0}\right],\quad \left[\frac{d\theta_k}{d\xi_0}\right]$$

и, следовательно, $\lambda_k$ и $\mu_k$ являются целыми полиномами относительно $\xi_0$ и $\sqrt{u_0}$. Таким образом, $\lambda$ и $\mu$ представляют собой ряды, расположенные по степеням

$$\varepsilon,\ \xi_0,\ \sqrt{u_0},$$

но эти три постоянные входят в них не произвольным образом.

Вспомним, каким искусственным приемом мы ввели вспомогательную постоянную $\varepsilon$, которая служила только упрощению изложения; а для этого примем снова на мгновение обозначения п. 274 и стр. 89; мы положили

$$x_1=\varepsilon x_1',\quad y_1=\varepsilon y_1',\quad x_2=\varepsilon^2 x_2',\quad y_2=\varepsilon^2 y_2'.$$

Таким образом, наши уравнения не перестают удовлетворяться, когда мы заменяем

$$\varepsilon,\ x_1',\ y_1',\ x_2'$$

на

$$\varepsilon k^{-1},\quad x_1'k,\quad y_1'k,\quad x_2'k^2,$$

а параметры $\lambda$ и $\mu$ сохраняют свои первоначальные значения.

Затем мы отбросили ставшие ненужными штрихи и разложили $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, $y_2'$, которые мы обозначали с тех пор буквами $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$, по степеням $\varepsilon$.

Так мы нашли разложения

$$\begin{aligned}&\xi_0+\varepsilon\xi_1+\varepsilon^2\xi_2+\ldots,\\&\eta_0+\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\ldots,\\&\xi_0'+\varepsilon\xi_1'+\varepsilon^2\xi_2'+\ldots,\\&\eta_0'+\varepsilon\eta_1'+\varepsilon^2\eta_2'+\ldots.\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнения будут также удовлетворены, если мы заменим $\varepsilon$ на $\varepsilon/k$ и умножим четыре разложения (19) соответственно на

$$k^2,\ 1,\ k,\ k$$

или, что то же, если мы заменим

$$\xi_p, \quad \eta_p, \quad \xi'_p, \quad \eta'_p$$

на

$$\xi_p k^{2-p}, \quad \eta_p k^{-p}, \quad \xi'_p k^{1-p}, \quad \eta'_p k^{1-p}.$$

После этой замены мы должны получить разложения, тождественные разложениям (19), но с отличающимися значениями постоянных $\xi_0$ и $u_0$. Но мы видим, что эта замена меняет $\xi_0$ и $u_0$ на $k^2\xi_0$ и $k^2 u_0$.

Итак,

$$\xi_p, \quad \eta_p, \quad \xi'_p, \quad \eta'_p$$

меняются на

$$\xi_p k^{2-p}, \quad \eta_p k^{-p}, \quad \xi'_p k^{1-p}, \quad \eta'_p k^{1-p},$$

когда $\xi_0$ и $u_0$ меняются на $k^2\xi_0$ и $k^2 u_0$.

Другими словами, если умножить четыре разложения (19) соответственно на $\varepsilon^2$, 1, $\varepsilon$, $\varepsilon$, то полученные таким образом четыре произведения будут разложимы по степеням

$$\varepsilon^2\xi_0, \quad \varepsilon\sqrt{u_0},$$

и то же самое должно быть для $\lambda$ и $\mu$, которые не должны были измениться при замене $\varepsilon$, $\xi_0$, $u_0$ на $\varepsilon/k$, $k^2\xi_0$, $k^2 u_0$.

Итак, предположим, что $\lambda$ и $\mu$ выражаются в функции $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$; ясно, что мы будем иметь таким образом соотношения, из которых сможем найти обратные функции $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ от $\lambda$ и $\mu$.

365. Пусть $k+2$ — знаменатель $n$; постоянная $\varpi$ определится тогда уравнением

$$\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right] = 0.$$

Исключение имеет место только в случае $k+2=2$, когда $\varpi$ определено уравнением

$$\left[\frac{d\Theta_2}{d\eta_0}\right] = 0.$$

Выражение $d\Theta_k/d\eta_0$ является целым полиномом степени $k+2$ относительно

$$e^{\pm i(nt+\varpi)}.$$

Каждый из этих членов содержит, таким образом, множители вида

$$e^{\pm iq(nt+\varpi)}.$$

В среднем значении $[d\Theta_k/d\eta_0]$ останутся только члены, не зависящие от $t$, и мы видели, что $q$ должно делиться на знаменатель $n$, т. е. на $k+2$.

Следовательно, наше выражение имеет следующий вид:

$$ae^{i\varpi(k+2)}+b+ce^{-i\varpi(k+2)}.$$

Теперь я покажу, что слагаемое $b$ равно нулю.

Для этого я воспользуюсь следующим искусственным приемом: вычислим

$$\begin{array}{llll}\xi_0, & \xi_1, & \ldots, & \xi_{k-1}, \\ \eta_0, & \eta_1, & \ldots, & \eta_{k-1}, \\ \xi'_0, & \xi'_1, & \ldots, & \xi'_{k-1}, \\ \eta'_0, & \eta'_1, & \ldots, & \eta'_{k-1}\end{array}$$

при помощи процесса, изложенного выше; однако при вычислении $\xi_k$, вместо того чтобы приписать $\varpi$ значение, обращающее в нуль $[d\Theta_k/d\eta_0]$, я сохраню произвольное значение $\varpi$. Тогда уравнение

$$\frac{d\xi_k}{dt}=\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}$$

позволит мне все же вычислить $\xi_k$; только вместо того чтобы быть периодической функцией $t$, величина $\xi_k$ будет периодической функцией $t$, к которой прибавлен непериодический член

$$t\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right].$$

Но у нас есть другое средство для вычисления

$$\begin{array}{llll}\xi_0, & \xi_1, & \ldots, & \xi_k, \\ \eta_0, & \eta_1, & \ldots, & \eta_{k-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\end{array}$$

и, следовательно, этого члена $t\,[d\Theta_k/d\eta_0]$; а именно, повторить вычисления п. 274.

Мы определим $S_0$, $S_1$, ... при помощи уравнений (2) на стр. 93.

Вычисление $S_0$, $S_1$, ..., $S_{k-1}$ выполняется без всяких затруднений; но у нас возникнут затруднения при вычислении $S_k$ из уравнения

$$\frac{dS_k}{dy_2}+2B\frac{dS_k}{dv}=\Phi+C_k.$$

В самом деле, правая часть представляет собой совокупность членов вида

$$Ae^{i\,m_1y_2+m_2v},$$

где $m_1$ и $m_2$ — целые; интегрирование выполняется беспрепятственно, лишь бы не было

$$im_1+2m_2B=0.$$

Но так как $2B$ равно $in$, где $n$ — рациональное число, знаменатель которого равен $k+2$, то правая часть нашего уравнения будет содержать члены, удовлетворяющие этому условию. Отсюда вытекает, что величина $S_k$ не будет периодической функцией от $y_2$ и $v$, а может быть приравнена

$$T_k+y_2U_k,$$

где $T_k$ и $U_k$ периодичны.

Определив таким образом функцию $S$ и продвинув приближения до количеств порядка $\varepsilon^{k+1}$, можно применить процедуру п. 275 и определить таким образом $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$.

Эти два способа вычислений должны привести к одному и тому же результату. Итак, пусть

$$\sum = S_0+\varepsilon S_1+\ldots+\varepsilon^k S_k.$$

Составим уравнения (см. стр. 94)

$$x_2=\frac{d\Sigma}{dy_2},\qquad u=\frac{d\Sigma}{dv},\quad n_1t+\varpi_1=\frac{d\Sigma}{d\alpha_0},$$

$$n_2t+\varpi_2=\frac{d\Sigma}{d\beta_0},\qquad n_1=-\frac{dC}{d\alpha_0},\qquad n_2=-\frac{dC}{d\beta_0}$$

и найдем из них $x_2$ в функции $t$; найденное таким образом значение $x_2$ должно быть равно

$$\xi_0+\varepsilon\xi_1+\ldots+\varepsilon^k\xi_k$$

с точностью до величин порядка $\varepsilon^{k+1}$.

Нас интересует вычисление $\xi_k$ и, в частности, вычисление векового члена

$$t\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right].$$

Этот вековой член может произойти только от векового члена $S_k$, который равен $y_2U_k$.

Таким образом, с точностью до количеств порядка $\varepsilon^{k+1}$ (приравнивая вековые члены в уравнении $x_2=d\Sigma/dy_2$) мы имеем

$$\varepsilon^k t\left[\frac{d\Theta_k}{d\eta_0}\right]=\varepsilon^k y_2\frac{dU_k}{dy_2}. \tag{20}$$

В первом приближении, т. е. с точностью до количеств порядка $\varepsilon$, мы имеем (см. стр. 95)

$$x_2 = \alpha_0 = \xi_0, \quad u = \beta_0 = u_0, \quad n_1 t + \varpi_1 = y_2 = \eta_0 = t,$$
$$n_1 = 1, \quad n_2 = in, \quad n_2 t + \varpi_2 = v = v_0 = t(nt + \varpi).$$

Таким образом, мы совершим ошибку порядка $\varepsilon^{k+1}$, если заменим в правой части (20)

$$\alpha_0, \ \beta_0, \ y_2, \ v$$

на

$$\xi_0, \ u_0, \ t, \ i(nt + \varpi).$$

Следовательно, мы получим $[d\Theta_k/d\eta_0]$, делая эту же самую подстановку в $dU_k/dy_2$. Но $U_k$ содержит только члены с

$$im_1 y_2 + m_2 v,$$

где

$$im_1 + 2m_2 B = 0.$$

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{dU_k}{dy_2} = -2B \frac{dU_k}{dv}.$$

Но $U_k$ — периодическая функция от $y_2$ и $iv$; следовательно, $\frac{dU_k}{dv}$ не содержит члена, не зависящего от $v$. Таким образом, $[d\Theta_k/d\eta_0]$ не содержит члена, не зависящего от $v$, что и требовалось доказать.

Чтобы облегчить понимание предыдущих вычислений, я сделаю еще одно замечание. Средние движения $n_1$ и $n_2$ заданы равенствами

$$n_1 = -\frac{dC}{d\alpha_0}, \quad n_2 = -\frac{dC}{d\beta_0}.$$

Вообще говоря, они зависят от $\varepsilon$ и приводятся к 1 и $in$ только при $\varepsilon = 0$.

Но здесь мы располагаем двумя параметрами $\lambda$ и $\mu$, которые могут быть заменены произвольными функциями от $\varepsilon$; или, если угодно, мы располагаем бесконечным числом постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots$. Мы можем тогда распорядиться этими постоянными таким образом, чтобы $n_1$ и $n_2$ оставались равными 1 и $in$, каково бы ни было $\varepsilon$.

**366.** Итак, для определения $\varpi$ мы имеем уравнение вида

$$ae^{(k+2)i\varpi} + ce^{-(k+2)i\varpi} = 0,$$

где $a$ и $c$ — комплексные сопряженные. Вообще говоря, $a$ и $c$ не равны нулю, иначе $\varpi$ можно было бы определить только в следующем приближении.

Таким образом, уравнение даст нам для $\varpi$ ряд вещественных значений

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{\pi}{k+2}, \quad \varpi_0+\frac{2\pi}{k+2}, \quad \varpi_0+\frac{3\pi}{k+2}, \quad \ldots .$$

Ясно, что на самом деле мы не получим различных значений, если заменим $\varpi$ на $\varpi+2\pi$; однако, более того, я говорю, что два значения

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{2\pi}{k+2}$$

не соответствуют двум действительно различным периодическим решениям.

В самом деле, так как $t$ не входит явно в наши уравнения, то, заменяя $t$ на $t+h$, мы преобразуем любое периодическое решение в другое решение, которое не является существенно отличным от него.

Итак, заменим $t$ на $t+2h\pi$, где $h$ — целое.

Тогда $\eta_0$ заменится на $\eta_0+2h\pi$, а $v_0=i(nt+\varpi)$ — на

$$i(nt+2nh\pi+\varpi).$$

Так как все наши функции периодичны, с периодом $2\pi$ по $\eta_0$ и $iv_0$, то мы ничего не изменим в решении, вычитая соответственно из $\eta_0$ и $v_0/i$ два кратных $2\pi$; например, $2h\pi$ и $2h'\pi$. Тогда $\eta_0$ снова станет $\eta_0$, а $v_0$ изменится на

$$i(nt+2nh\pi+\varpi-2h'\pi).$$

Другими словами, мы заменили $\varpi$ на

$$\varpi+2\pi(nh-h').$$

Но мы можем всегда выбрать целые $h$ и $h'$ таким образом, чтобы было

$$nh-h'=\frac{1}{k+2}.$$

Таким образом, мы не находим существенно нового решения, заменяя $\varpi$ на $\varpi+\frac{2\pi}{k+2}$, что и требовалось доказать.

Следовательно, мы имеем только два действительно различных решения, соответствующие двум значениям $\varpi$:

$$\varpi_0, \quad \varpi_0+\frac{\pi}{k+2}.$$

Нам остается определить постоянные $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon^2 u_0$; для этого воспользуемся уравнениями, которые связывают эти две постоянные с $\lambda$ и $\mu$. В вопросах, которые обычно приходится рассматривать, имеется только один-единственный параметр, и мы ввели здесь два только для удобства изложения. Таким образом, следует предположить, что $\lambda$ и $\mu$ связаны соотношением, например $\lambda = \mu$.

Разложения $\lambda$ и $\mu$ по степеням $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$, вообще говоря, начинаются с членов с $\varepsilon^2\xi_0$ и с $\varepsilon^2 u_0$ (если оставить в стороне случай, когда знаменатель $n$ равен 3).

Если мы, таким образом, предположим $\mu = \lambda$, то получим отсюда $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$, разложенные по степеням $\sqrt{\lambda}$; тогда одно из двух — либо коэффициенты разложения по степеням $\sqrt{\lambda}$ будут вещественными, либо, напротив, вещественными будут коэффициенты разложения по степеням $\sqrt{-\lambda}$.

В первом случае задача будет допускать два вещественных решения при $\lambda > 0$ и не допускать ни одного при $\lambda < 0$; во втором случае будет иметь место обратное.

Чтобы узнать, какой из этих двух случаев осуществляется, рассмотрим уравнение, связывающее $\mu$ с $u_0$, ограничиваясь членами с $\varepsilon^2$, получим

$$\lambda = \mu = -\frac{\varepsilon^2}{2B_0}\left[\frac{d\Theta_2}{du_0}\right]; \quad \lambda = -\frac{\varepsilon^2}{H_0}\left[\frac{d\Theta_2}{d\xi_0}\right]. \tag{21}$$

Я замечаю прежде всего, что $[d\Theta_2/du_0]$ и $[d\Theta_2/d\xi_0]$ не зависят не только от $t$, но и от $\varpi$; исключение имеет место только для

$$k + 2 = 2, \ 3 \text{ или } 4.$$

Ибо при $k + 2 > 4$ члены вида

$$e^{i(pt + qnt + q\varpi)},$$

которые могут войти в правую часть одного из уравнений (21), могут быть независимыми от $t$, только если

$$q = 0,$$

поскольку $|q|$ не может превзойти 4 и $qn$ должно быть целым.

Таким образом, правые части уравнений (21) являются линейными и однородными функциями от $\xi_0$ и $u_0$, а коэффициенты этих линейных функций являются абсолютными постоянными, не зависящими от $\varpi$.

Но $u_0$ должно быть положительным, иначе $\sqrt{u_0}$ был бы мнимым. Уравнения (21) вместе с неравенством $u_0 > 0$ определят знак $\lambda$.

Я замечу только, что этот знак не зависит от величины $\varpi$, поскольку уравнения (21) не зависят от него. Но мы видели, что уравнение, определяющее $\varpi$, допускает два действительно различных решения

$$\varpi = \varpi_0, \quad \varpi = \varpi_0 + \frac{\pi}{k+2}.$$

Каждому из них соответствует периодическое решение, которое будет вещественным, если знак $\lambda$ выбран надлежащим образом в соответствии с предыдущим. Выбор этого знака не зависит от $\varpi$; эти два решения будут оба вещественными при $\lambda > 0$ и оба мнимыми при $\lambda < 0$, или же будет иметь место обратное.

На первый взгляд кажется, что каждому решению уравнения относительно $\varpi$ соответствуют два периодических решения, поскольку из соотношений между $\lambda$, $\mu$, $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ получаются две системы значений для неизвестных $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$. Однако это отнюдь не так. В самом деле, мы можем, не ограничивая общности, предположить, что $\sqrt{u_0}$ положителен; ибо мы ничего не меняем в наших формулах, заменяя $\sqrt{u_0}$ на $-\sqrt{u_0}$ и $\varpi$ на $\varpi+\pi$.

Но из наших двух систем значений имеется только одна, для которой $\sqrt{u_0}$ будет положительным.

Таким образом:

имеются два вещественных периодических решения второго рода при $\lambda > 0$ (или при $\lambda < 0$);

нет ни одного решения второго рода при $\lambda > 0$ (или при $\lambda < 0$).

Примем снова обозначения главы XXVIII и, в частности, п. 331.

$U_1$ сводится к $\rho^2$ и соответствует члену с $x_1y_1$, который фигурирует в $F_0$.

$U_0$ сводится к постоянному множителю, умноженному на $\rho^4$, соответствуя членам, происшедшим от $[d\Theta_2/du_0]$ и $[d\Theta_2/d\xi_0]$.

Первый член $W$, который не приводится к степени $U_1$, имеет вид

$$\rho^{k+2}[A\cos(k+2)\varphi+B]$$

и происходит от $\Theta_{k+2}$.

Функция, максимумы и минимумы которой нам нужно изучить и которая должна играть роль функции

$$U_0+zU_1=\rho^3 f(\varphi)-z\rho^2,$$

изученной на стр. 219, эта функция, говорю я, будет вида

$$A\rho^{k+2}\cos(k+2)\varphi+P\rho^4-z\rho^2,$$

где $P$ — целый полином относительно $\rho^2$ с постоянными коэффициентами.

Мы оставили в стороне частные случаи, когда знаменатель $n$ равен 2, 3 или 4.

### Исследование частных случаев

**367.** Предположим, что этот знаменатель равен 4.

Тогда $[\Theta_2]$, $[d\Theta_2/d\xi_0]$, $[d\Theta_2/du_0]$ уже не будут независимыми от $\varpi$, они будут содержать члены с $e^{\pm 4i\varpi}$.

Уравнение относительно $\varpi$ опять даст два различных решения

$$\varpi = \varpi_0, \quad \varpi = \varpi_0 + \frac{\pi}{4},$$

которые дадут два периодических решения; так как знак $\lambda$ может зависеть от $\varpi$, то может случиться, что мы получим:

два вещественных решения второго рода при $\lambda > 0$; ни одного решения при $\lambda < 0$;

одно вещественное решение второго рода при $\lambda > 0$; одно решение при $\lambda < 0$;

ни одного вещественного решения второго рода при $\lambda > 0$; два решения при $\lambda < 0$.

Функция $U_0 + zU_1$ (см. стр. 219) принимает вид

$$\rho^4 (A \cos 4\varphi + B) - z\rho^2.$$

Предположим теперь, что знаменатель $n$ равен 3.

Тогда разложение $\mu$ по степеням $\varepsilon$ начинается с члена с $\varepsilon\sqrt{u_0}$, так что если мы предположим, что $\mu = \lambda$, то получим $\varepsilon^2\xi_0$ и $\varepsilon\sqrt{u_0}$ в виде рядов, расположенных по степеням $\lambda$, а не $\sqrt{\lambda}$.

Знак $\sqrt{u_0}$ будет зависеть от $\varpi$, и если он положителен при $\varpi = \varpi_0$, то он будет отрицательным при $\varpi = \varpi_0 + \pi/3$.

Если, следовательно, мы условимся всегда предполагать $\sqrt{u_0}$ существенно положительным, то мы увидим, что получим:

одно вещественное решение второго рода при $\lambda > 0$ и одно вещественное решение второго рода при $\lambda < 0$.

Функция $U_0 + zU_1$ (см. стр. 219) принимает вид

$$A\rho^3 \cos 3\varphi - z\rho^2.$$

Если, наконец, знаменатель $n$ равен 2, то $[\Theta_2]$, $[d\Theta_2/d\xi_0]$, $[d\Theta_2/du_0]$ содержат члены с $e^{\pm 4i\varpi}$, $e^{\pm 2i\varpi}$.

Уравнение относительно $\varpi$ принимает вид

$$A \cos (4\varpi + B) + A' \cos (2\varpi + B') = 0$$

и допускает восемь решений

$$\varpi_0, \quad \varpi_0 + \frac{\pi}{2}, \quad \varpi_0 + \pi, \quad \varpi_0 + \frac{3\pi}{2},$$

$$\varpi_1, \quad \varpi_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \varpi_1 + \pi, \quad \varpi_1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Из двух количеств $\varpi_0$ и $\varpi_1$ по крайней мере одно вещественное.

Остаются возможными следующие предположения:

$$(4, 0),\ (3, 1),\ (2, 2),\ (1, 3),\ (0, 4),\ (2, 0),\ (1, 1)\ (0, 2).$$

Первое число в круглых скобках означает число периодических решений при $\lambda > 0$, а второе — то же число при $\lambda < 0$.

Функция стр. 219 принимает вид

$$A\rho^4 \cos 4\varphi + B\rho^4 \cos 2\varphi + C\rho^4 \sin 2\varphi + D\rho^4 - z\rho^2.$$

## Приложение к уравнениям п. 13

**368.** Возвратимся к каноническим уравнениям динамики

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Как и в пунктах 13, 42, 125 и т. д., я предполагаю, что $F$ — периодическая функция $y$, разложимая по степеням параметра $\mu$ в виде

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

и что $F_0$ зависит только от $x$.

Тогда мы видели в п. 42, что эти уравнения допускают бесконечное число периодических решений первого рода

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t), \tag{2}$$

где функции $\varphi_i$ и $\psi_i$ разложимы по возрастающим степеням $\mu$.

Рассмотрим одно из этих решений (2).

Пусть $T$ — период, а $\alpha$ — один из характеристических показателей; их будет два, отличных от нуля, равных и противоположных по знаку, если мы предположим две степени свободы.

Мы видели в главе IV, что показатель $\alpha$ зависит от $\mu$ и разложим по степеням $\sqrt{\mu}$. Когда $\mu$ изменяется непрерывным образом, то же происходит и с $\alpha$; предположим, что при $\mu = \mu_0$ произведение $\alpha T$ соизмеримо с $2i\pi$ и равно $2ni\pi$.

Отсюда мы можем заключить, что при $\mu$, близком к $\mu_0$, существуют решения второго рода, порожденные решениями (2), период которых равен $(k+2)T$, где $k+2$ означает знаменатель $n$.

Если мы оставим в стороне случаи, когда $k+2$ равно 2, 3 или 4, то, как мы видели, два из этих решений существуют, когда $\lambda$ (здесь $\mu - \mu_0$) имеет определенный знак, и их нет, когда $\lambda$ (здесь $\mu - \mu_0$) имеет противоположный знак.

Я сказал, что оставил в стороне случаи, когда $k + 2 = 2,\ 3,\ 4$; я могу это сделать беспрепятственно. В самом деле,

$$\frac{\alpha T}{2i\pi} = n$$

разложимо по степеням $\sqrt{\mu}$ и обращается в нуль с $\sqrt{\mu}$. Следовательно, для малых значений $\mu$ величина $n$ очень мала, и ее знаменатель наверняка больше 4.

Таким образом, мы встречаемся с двумя предположениями.

Либо решения второго рода существуют только при $\mu > \mu_0$, либо они существуют только при $\mu < \mu_0$.

Какое же из этих двух предположений осуществляется?

Все зависит от знака некоторого количества $Q$, которое само зависит от коэффициентов при $u_0$ и $\xi_0$ в выражениях

$$\left[\frac{d\theta_2}{d\xi_0}\right], \quad \left[\frac{d\theta_2}{du_0}\right].$$

Чтобы определить этот знак, нам нет нужды явно образовывать эту величину, а достаточны следующие рассуждения.

**369.** Возьмем сначала простой случай п. 199; пусть

$$F = x_2 + x_1^2 + \mu \cos y_1$$

с каноническими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

что дает

$$\frac{dx_2}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -1, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\mu \sin y_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -2x_1. \tag{1}$$

Функция Якоби $S$ записывается в виде

$$S = x_2^0 y_2 + \int \sqrt{C - \mu \cos y_1}\, dy_1$$

с двумя постоянными $x_2^0$ и $C$; отсюда мы находим

$$\begin{aligned} &x_2 = x_2^0, \qquad y_2 = -t + y_2^0, \\ &x_1 = \sqrt{C - \mu \cos y_1}, \qquad A - t = \int \frac{dy_1}{2\sqrt{C - \mu \cos y_1}}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $A$ и $y_2{}^0$ — две новые постоянные интегрирования.

Мы видим, что появился эллиптический интеграл

$$\int \frac{dy_1}{2\sqrt{C - \mu \cos y_1}}; \tag{3}$$

этот интеграл обладает вещественным периодом, который равен интегралу, взятому между 0 и $2\pi$, если $|C| > |\mu|$, и удвоенному интегралу, взятому между

$$\pm \arc\cos\left|\frac{C}{\mu}\right|,$$

если $|C| < |\mu|$.

Обозначим этот вещественный период через $\omega$.

Каждому значению $\omega$, соизмеримому с $2\pi$, соответствует периодическое решение; однако нужно различать два случая.

Если $|C| > |\mu|$, то $y_1$ и $y_2$ в течение периода увеличиваются на кратное $2\pi$. Соответствующие периодические решения являются решениями первого рода.

Если $|C| < |\mu|$, то $y_2$ в течение периода возрастает на кратное $2\pi$, а $y_1$ сохраняет свое первоначальное значение. Соответствующие решения являются решениями второго рода.

К этому перечислению следует добавить два замечательных периодических решения, которые должны рассматриваться как решения первого рода. Пусть $\mu > 0$, эти решения будут

$$x_2 = x_2^0, \quad y_2 = -t + y_2^0, \quad C = \mu, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

$$x_2 = x_2^0, \quad y_2 = -t + y_0^2, \quad C = -\mu, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \pi.$$

Я сказал, что эти последние решения следует рассматривать как решения первого рода и что решения, соответствующие $|C| < |\mu|$, должны рассматриваться как решения второго рода.

В самом деле, дадим $C$ значение, очень мало превосходящее $-\mu$, пусть

$$C = (\varepsilon - 1)\mu,$$

где $\varepsilon$ — очень мало; $y_1$ не сможет сильно отклониться от $\pi$; мы будем иметь приближенно

$$C - \mu \cos y_1 = \mu\left[\varepsilon - \frac{(\pi - y_1)^2}{2}\right]$$

и период $\omega$ будет близок к

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}},$$

откуда вытекает такое заключение: пусть $\alpha$ — любое число, соизмеримое с $2\pi$; существует ряд таких периодических решений, что $|C| < |\mu|$ и что $\omega = \alpha$; если $\sqrt{\mu}$ очень близок к $\pi/\sqrt{2}\alpha$, то $C$ будет очень близко к $-\mu$, и при

$$\sqrt{\mu} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,\alpha}$$

эти периодические решения сольются со вторым решением (4), которое является решением первого рода. Здесь мы узнаем вновь характеристическое свойство решений второго рода.

Мы видим, что второе решение (4), т. е. то из двух решений (4), которое устойчиво, порождает решения второго рода тем способом, который был объяснен в главе XXVIII.

Если другие решения первого рода, такие, что $|C|>|\mu|$, не порождают решений второго рода, то это зависит от очень частного вида уравнений (1). (Для этих решений характеристические показатели всегда равны нулю.)

Рассмотрим сначала такие решения первого рода, что $|C|>|\mu|$.

Положим $C=C_0+\varepsilon$; период $\omega$, т. е. интеграл (3), взятый между 0 и $2\pi$, будет разложим по степеням $\varepsilon$ и $\mu$, а свободный член сведется к

$$\frac{\pi}{\sqrt{C_0}}.$$

Дадим $\sqrt{C_0}$ любое рациональное значение; мы будем получать периодическое решение всякий раз, когда будем иметь

$$\omega=\frac{\pi}{\sqrt{C_0}}.$$

Уравнение удовлетворяется при $\varepsilon=\mu=0$, и из этого уравнения можно будет найти $\varepsilon$ и, следовательно, $C$ в виде ряда, расположенного по степеням $\mu$. Уравнения (2) дадут нам тогда $x_1$ и $y_1$, разложимые по степеням $\mu$. Это — разложения главы III.

Перейдем к таким решениям второго рода, что $|C|<|\mu|$.

Положим $C=\varepsilon\mu$; мы получим

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{dy_1}{2\sqrt{\varepsilon-\cos y_1}}.$$

Мы видим, что $\omega\sqrt{\mu}$ является функцией только от $\varepsilon$; с другой стороны,

$$\frac{x_1}{\sqrt{\mu}}=\sqrt{\varepsilon-\cos y_1},\quad (A-t)\sqrt{\mu}=\int\frac{dy_1}{2\sqrt{\varepsilon-\cos y_1}},$$

что показывает нам, что $\sin y_1$, $\cos y_1$ и $x_1/\sqrt{\mu}$ являются функциями от $(A-t)\sqrt{\mu}$ и $\varepsilon$, двоякопериодическими относительно $(A-t)\sqrt{\mu}$. Значит, это также функции от $(A-t)\sqrt{\mu}$ и $\omega\sqrt{\mu}$, поскольку $\varepsilon$ — функция от $\omega\sqrt{\mu}$; если, следовательно, мы дадим $\omega$ постоянное значение, соизмеримое с $2\pi$, то получим ряд периодических решений; для этих решений

$$\cos y_1,\ \sin y_1\ \text{и}\ \frac{x_1}{\sqrt{\mu}}$$

могут быть разложены в ряды Фурье по синусам и косинусам кратных $2\pi t/T$, где $T$ — наименьшее общее кратное $\omega$ и $2\pi$. Любой коэффициент разложения является функцией $\mu$; эту функцию я и хочу изучить.

Для этого необходимо сначала рассмотреть соотношение между $\varepsilon$ и $\omega\sqrt{\mu}$.

Мы можем заставить $\varepsilon$ изменяться от $-1$ до $+1$. При $\varepsilon=-1$ мы имеем

$$\omega\sqrt{\mu}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

При $\varepsilon=+1$ мы имеем $\omega\sqrt{\mu}=\infty$; следовательно, когда $\varepsilon$ изменяется от $-1$ до $+1$, $\omega\sqrt{\mu}$ возрастает от $\pi/\sqrt{2}$ до $+\infty$.

Следовательно, периодическое решение, соответствующее заданному значению $\omega$, соизмеримому с $2\pi$, существует, только если

$$\sqrt{\mu}>\frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}.$$

Таким образом, коэффициенты разложения Фурье являются функциями от $\mu$, которые вещественны при

$$\sqrt{\mu}>\frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}$$

и комплексны при

$$\sqrt{\mu}<\frac{\pi}{\omega\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что это же рассуждение привело бы к тому же результату, если бы вместо

$$F=x_2+x_1^2+\mu\cos y_1$$

мы имели

$$F=F_0+\mu\,[F_1],$$

где $F_0$ зависит только от $x_1$ и $x_2$, $[F_1]$ — только от $x_1$, $x_2$ и $y_1$. Здесь решения второго рода опять были бы вещественными при $\mu>\mu_0$.

**370.** В общем случае величина $Q$, о которой шла речь в конце п. 368 и знак которой мы хотим определить, очевидно, зависит от $\mu$, и если $\mu$ достаточно мало, то первый член разложения и даст ее знак.

Определим функцию $S$ по методу Болина; пусть

$$S=S_0+\sqrt{\mu}\,S_1+\mu S_2+\ldots.$$

Если $\mu$ достаточно мало, то, очевидно, наиболее важными будут два первых члена

$$S_0+\sqrt{\mu}\,S_1.$$

Но если положить

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

то, как мы видели в главе XIX, $S_0$ и $S_1$ не зависят ни от $F_2$, ни от $F_1 - [F_1]$, а только от $F_0$ и от $[F_1]$, где через $[F_1]$ обозначено среднее значение $F_1$.

Возьмем снова величину $Q$ п. 368; первый член ее разложения будет зависеть только от $S_0$ и $S_1$, и, следовательно, от $F_0$ и $[F_1]$. Таким образом, будет иметь место то же самое, как если бы мы предположили, что

$$F = F_0 + \mu [F_1],$$

следовательно, то же, что и в предыдущем пункте.

Но в предыдущем пункте мы нашли, что решения второго рода существуют только при

$$\mu > \mu_0.$$

Это заключение сохраняется, таким образом, опять в общем случае, лишь бы $\mu_0$ было достаточно малым.

Каково же значение $\mu_0$, для которого этот вывод потеряет силу?

Примем снова обозначения п. 361, которые являются обозначениями п. 275; показатель $\alpha$, который там фигурирует, разложим по степеням произведения $AA'$.

Он приводится к характеристическому показателю при $AA'=0$.

Так как мы предположили, что решение первого рода устойчиво, а $\alpha$ — мнимое, то $A$ и $A'$ — комплексные сопряженные, и произведение $AA'$ положительно.

При малых значениях $\mu$ показатель $\alpha$ убывает, когда $AA'$ возрастает; в противном случае решения второго рода существовали бы только при $\mu < \mu_0$.

Таким образом, искомое значение $\mu_0$ является тем, для которого $\alpha$ перестает убывать, когда $AA'$ возрастает; следовательно, это то значение, которое обращает в нуль производную от $\alpha$ по $AA'$.

## Глава XXXI

# СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

### Решения второго рода и принцип наименьшего действия

**371.** Я не могу обойти молчанием связи между теорией решений второго рода и принципом наименьшего действия; и даже именно из-за этих связей я написал главу XXIX. Но для того чтобы лучше их пояснить, необходимы еще некоторые предварительные сведения.

Предположим две степени свободы; пусть $x_1$ и $x_2$ — две переменные первого ряда, которые можно рассматривать как координаты точки на плоскости; плоские кривые, удовлетворяющие нашим дифференциальным уравнениям, составят то, что мы назвали *траекториями*.

Пусть $M$ — произвольная точка плоскости. Рассмотрим множество траекторий, исходящих из точки $M$, и пусть $E$ — их огибающая. Пусть $F$—$n$-й кинетический фокус $M$ на траектории $(T)$; эта траектория коснется огибающей $E$ в точке $F$ согласно самому определению кинетических фокусов; я напоминаю, что $n$-м фокусом точки $M$, или ее фокусом порядка $n$, является $n$-я точка пересечения $(T)$ с бесконечно близкой траекторией, проходящей через $M$. Но условия этого касания могут меняться. Может случиться, что $F$ не есть особая точка кривой $E$ и что касание будет первого порядка; это самый общий случай.

Пусть

$$x_1 = \varphi(x_2),$$

$$x_1 = \varphi(x_2) + \psi(x_2)$$

— уравнения траектории $(T)$ и очень близкой траектории $(T')$, исходящей из точки $M$.

Пусть $z_1$ и $z_2$ — координаты точки $M$, $u_1$ и $u_2$ — координаты $F$. Так как $(T)$ проходит через $M$ и $F$, а $(T')$ — через $M$, то мы получим

$$z_1 = \varphi(z_2), \qquad u_1 = \varphi(u_2), \qquad \psi(z_2) = 0.$$

Так как траектория $(T')$ очень близка к $(T)$, то функция $\psi$ будет очень малой; я могу обозначить через $\alpha$ угол, под которым две траектории пересекаются в точке $M$; этот угол и определит траекторию $(T')$; тогда функция $\psi$ будет зависеть от угла $\alpha$; она будет очень малой, если, как мы предполагаем, этот угол $\alpha$ сам мал, и она будет обращаться в нуль вместе с $\alpha$.

Значение $\psi'(z_2)$ (если обозначить через $\psi'$ производную от $\psi$) будет того же знака, что и $\alpha$.

Что же касается значения $\psi'(u_2)$ [если мы предположим $\alpha$ очень малым и если система координат была определена таким образом, чтобы функция $\varphi(x_2)$ была однозначной, что всегда возможно], то оно того же знака, что и $\alpha$, если $F$ — фокус четного порядка, и противоположного знака, если $F$ — фокус нечетного порядка.

Случай, интересующий нас, характеризуется тем, что $\psi(u_2)$ того же порядка, что $\alpha^2$, и всегда одного и того же знака.

Предположим, например, что $\psi(u_2)$ положительно.

Тогда если знак $\alpha$ таков, что $\psi'(u_2)$ — положительно, то траектория $(T')$ пересечет $(T)$ в точке $F'$, близкой к точке $F$ и менее удаленной от $M$, чем точка $F$ (в предположении, что $u_2 > z_2$).

В этом случае $(T')$ касается $E$ до $F'$, тогда как $(T)$ касается $E$ после $F'$; согласно хорошо известному рассуждению, действие больше (по крайней мере, в абсолютном движении), когда мы идем из $M$ в $F'$, пробегая $(T')$, чем когда мы идем из $M$ в $F'$, следуя вдоль $(T)$.

Если знак $\alpha$ таков, что $\psi'(u_2)$ отрицательно, то $(T')$ пересекает $(T)$ в точке $F'$, более удаленной от $M$, чем $F$; тогда $(T')$ касается $E$ после $F'$, а $(T)$ касается $E$ до $F'$; когда мы идем из $M$ в $F'$, действие больше вдоль $(T)$, чем вдоль $(T')$.

Результаты были бы противоположными, если бы $\psi(u_2)$ было отрицательным; однако во всех случаях среди траекторий $(T')$, близких к $(T)$, имеются такие, которые пересекают $(T)$ вблизи $F$ по одну сторону от $F$, и такие, которые пересекают $(T)$ вблизи $F$ по другую сторону от $F$.

В этом случае мы будем говорить, что $F$ — *обыкновенный фокус.*

Не может случиться так, чтобы точка $F$ была обыкновенной точкой $E$, а касание имело порядок выше первого.

Разложим $\psi(x_2)$ по степеням $\alpha$; пусть

$$\psi(x_2) = \alpha\psi_1(x_2) + \alpha^2\psi_2(x_2) + \dots$$

Условие для касания высшего порядка имеет вид

$$\psi_1'(u_2) = 0.$$

Но мы имеем уже

$$\psi_1(u_2) = 0,$$

и функция $\psi_1(x_2)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, коэффициенты которого являются конечными и заданными функциями от $x_2$, причем коэффициент при второй производной сводится к единице.

Если бы при $x_2=u_2$ интеграл $\psi_1(x_2)$ обращался в нуль так же, как и его первая производная, то он был бы тождественным нулем, что абсурдно.

Таким образом, касания высшего порядка не будет никогда.

Но может случиться, что $F$ есть точка возврата кривой $E$, острие которой либо направлено в сторону $M$, так что подвижная точка, двигаясь из $M$ в $F$, встречает ее с острия, либо обращено в противоположную сторону, так что подвижная точка встречает ее сзади острия. В первом случае я буду говорить, что $F$ — противошерстный *фокус* (en pointe), а во втором случае — что это пошерстный *фокус* (en talon).

В одном и другом случаях значение $\psi(u_2)$ — порядка $\alpha^3$; в случае противошерстного фокуса оно имеет знак $\alpha$, если $F$ — фокус нечетного порядка, и знак, противоположный знаку $\alpha$, если $F$ — фокус четного порядка; в случае пошерстного фокуса будет иметь место обратное.

В случае противошерстного фокуса все траектории $(T')$ пересекают $(T)$ в точке $F'$, близкой к $F$ и лежащей за $F$; действие при переходе от $M$ к $F'$ больше вдоль $(T)$, чем вдоль $(T')$.

В случае пошерстного фокуса все траектории $(T')$ пересекают $(T)$ в точке $F'$, близкой к $F$ и расположенной перед $F$; действие при обходе от $M$ к $F'$ больше вдоль $(T')$, чем вдоль $(T)$.

Пусть теперь $F'$ — точка $(T)$, достаточно близкая к $F$. В случае противошерстного фокуса я могу соединить $M$ с $F'$ траекторией $(T')$, если $F'$ лежит за $F$; в случае пошерстного фокуса я могу соединить $M$ с $F'$, если $F'$ лежит перед $F$.

Наконец, могло бы случиться, что $F$ — особая точка $E$ более сложного характера, чем обыкновенная точка возврата; тогда я сказал бы, что это *особый фокус*.

Я замечу только, что от противошерстного фокуса к пошерстному фокусу можно перейти только через особый фокус, ибо в момент перехода значение $\psi(u_2)$ должно быть порядка $\alpha^4$.

**372.** Рассмотрим теперь какое-нибудь периодическое решение; оно будет соответствовать замкнутой траектории $(T)$. Пусть $\alpha$ — характеристический показатель, а $T$ — период. В главе XXIX мы видели, как мы подходим к определению последовательных кинетических фокусов (п. 347).

Предположим, что $\alpha$ равно $2in\pi/T$, где $n$ — рациональное число, числитель которого есть $p$. В этом случае применение правила п. 347 показывает, что каждая точка $(T)$ совпадает со своим $2p$-м фокусом.

В самом деле, если принять, как в п. 347, такую единицу времени, чтобы период $T$ был равен $2\pi$, то получится $\alpha=in$. Если обозначить через $\tau_0$ значение функции $\tau$ в точке $M$, через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2p}$ — значения этой функции в первом, втором, ..., $2p$-м фокусе $M$, то согласно правилу п. 347, мы будем иметь

$$\tau_1-\tau_0=\frac{i\pi}{\alpha}, \quad \tau_2-\tau_0=\frac{2i\pi}{\alpha}, \ \ldots, \quad \tau_{2p}-\tau_0=\frac{2pi\pi}{\alpha}=\frac{2p\pi}{n}.$$

Если $p$ — числитель $n$, то мы видим, что $\tau_{2p}-\tau_0$ является кратным $2\pi$, т. е. что точка $M$ и ее $2p$-й фокус совпадают.

Траектория, исходящая из точки $M$ и бесконечно близкая к $(T)$, пройдет, следовательно, снова через точку $M$ после того, как совершит $k+2$ обхода по замкнутой траектории $(T)$, если $k+2$ — знаменатель $n$.

Таким образом, точка $M$ является своим $2p$-м фокусом; но можно задать себе вопрос, к какой категории фокусов она принадлежит с точки зрения классификации предыдущего пункта.

Примем систему координат, аналогичную таким полярным координатам, что уравнение замкнутой траектории $(T)$ есть

$$\rho=1$$

и что $\omega$ меняется от 0 до $2\pi$, когда совершается обход этой замкнутой траектории. Тогда кривые $\rho=\text{const}$ являются замкнутыми кривыми, охватывающими друг друга подобно концентрическим окружностям, а кривые $\omega=\text{const}$ образуют пучок расходящихся кривых, которые пересекают все кривые $\rho=\text{const}$, причем таким образом, что кривая $\omega=a+2\pi$ совпадает с кривой $\omega=a$.

Пусть тогда $\omega_0$ — значение $\omega$, которое соответствует исходной точке $M$; значение $\omega$, которое будет соответствовать этой же самой точке $M$, рассматриваемой как $2p$-й фокус исходной точки, будет

$$\omega_0+2(k+2)\pi.$$

Пусть

$$\rho=1+\psi(\omega)$$

— уравнение траектории $(T')$, близкой к $(T)$ и проходящей через $M$. Функция $\psi(\omega)$ будет соответствовать функции $\psi(x_2)$ предыдущего пункта. Мы будем иметь $\psi(\omega_0)=0$, и речь идет о рассмотрении знака выражения

$$\psi[\omega_0+2(k+2)\pi].$$

Таким образом, речь идет о построении функции $\psi(\omega)$, а для этого мы должны только применить либо принципы главы VII, либо принципы п. 274. Если мы, например, применим эти последние, то вот что найдем. Функция $\psi(\omega)$ разложима по степеням двух количеств

$$Ae^{\alpha\omega},\ A'e^{-\alpha\omega}.$$

Коэффициенты разложения являются периодическими функциями с периодом $2\pi$; $A$ и $A'$ — две постоянные интегрирования; что же касается $\alpha$, то это постоянная, разложимая по степеням произведения $AA'$:

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1(AA')+\alpha_2(AA')^2+\ldots.$$

При этом $\alpha_0$ равно характеристическому показателю $(T)$, т. е. $in$.

Если $(T')$ мало отличается от $(T)$, то две постоянные $A$ и $A'$ очень малы; они имеют порядок угла, который я назвал $\alpha$ в предыдущем пункте и который не следует смешивать с показателем, который я обозначаю той же буквой в настоящем пункте.

Если мы продвинем приближения до третьего порядка включительно относительно $A$ и $A'$, то $\psi(\omega)$ сведется к полиному третьего порядка относительно этих двух постоянных, и я смогу написать

$$\psi(\omega) = Ae^{\alpha\omega}\sigma + A'e^{-\alpha\omega}\sigma' + f(Ae^{\alpha\omega},\ A'e^{-\alpha\omega}),$$

где $f$ — целый полином относительно $Ae^{\alpha\omega}$, $A'e^{-\alpha\omega}$, содержащий только члены второй и третьей степени. Коэффициенты полинома $f$, так же как $\sigma$ и $\sigma'$, являются периодическими функциями с периодом $2\pi$.

При этих условиях, так как $\alpha$ равно $\alpha_0$ с точностью до величин второго порядка и $\alpha_0 + \alpha_1(AA')$ с точностью до величин четвертого порядка, мы можем написать, пренебрегая везде величинами четвертого порядка относительно $A$ и $A'$:

$$\psi(\omega) = A\sigma e^{\omega(\alpha_0+\alpha_1 AA')} + A'\sigma' e^{-\omega(\alpha_0+\alpha_1 AA')} + f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega})$$

или же еще

$$\psi(\omega) = Ae^{\alpha_0\omega}\sigma + A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma' + \alpha_1\omega AA'(Ae^{\alpha_0\omega}\sigma - A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma') + f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega}).$$

Когда $\omega$ увеличивается на $(2k+4)\pi$, коэффициенты $f$, а также $\sigma$ и $\sigma'$ не изменяются. То же имеет место и для $e^{\alpha_0\omega}$, поскольку знаменатель $\alpha_0/i = n$ равен $k+2$; таким образом, то же самое относится и к

$$Ae^{\alpha_0\omega}\sigma, \qquad A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma', \qquad f(Ae^{\alpha_0\omega},\ A'e^{-\alpha_0\omega}).$$

Таким образом, наконец, получаем

$$\psi(\omega + 2k\pi + 4\pi) - \psi(\omega) = (2k+2)\pi\alpha_1 AA'(Ae^{\alpha_0\omega}\sigma - A'e^{-\alpha_0\omega}\sigma').$$

Но $\psi(\omega_0)$ есть нуль; таким образом, величина, знак которой мы должны определить, есть

$$(2k+2)\pi\alpha_1 AA'(Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0 - A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma'_0).$$

Я обозначаю через $\sigma_0$ и $\sigma'_0$ значения $\sigma$ и $\sigma'$ при $\omega = \omega_0$.

Я замечаю сначала, что эта величина третьего порядка, что согласно предыдущему пункту показывает нам, что фокусы, вообще говоря, будут фокусами противошерстными или пошерстными. Теперь я утверждаю, что эта величина всегда имеет один и тот же знак и что ее коэффициент не может обращаться в нуль.

В самом деле, две постоянные $A$ и $A'$ связаны соотношением

$$\psi(\omega_0) = 0,$$

которое можно написать, поскольку $A$ и $A'$ — бесконечно малые величины, в виде

$$Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0 + A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma'_0 = 0. \tag{1}$$

С другой стороны, $\alpha_0$ — чисто мнимое, $\sigma_0$ и $\sigma_0'$ — комплексные сопряженные; то же самое относится к $A$ и $A'$.

Таким образом, произведение $AA'$ существенно положительно и не может обращаться в нуль, ибо $A$ и $A'$ не могут быть нулями одновременно.

С другой стороны, мы не можем иметь

$$Ae^{\alpha_0\omega_0}\sigma_0 - A'e^{-\alpha_0\omega_0}\sigma_0' = 0, \tag{2}$$

ибо из уравнений (1) и (2) следовало бы, что

$$\sigma_0 = \sigma_0' = 0.$$

Но эти уравнения невозможны; они означали бы, что все траектории, очень близкие к $(T)$, будут проходить через точку $M$, что, очевидно, неверно.

Величина $\psi(\omega_0+2k\pi+4\pi)$ имеет, таким образом, всегда один и тот же знак; фокусы являются, следовательно, либо все противошерстными фокусами, либо все пошерстными фокусами; все зависит от знака $\alpha_1$.

373. Мы были вынуждены оставить в стороне случай, когда $\alpha_1$ есть нуль, исключительный случай, когда все фокусы будут особыми; также случай, когда $k+2$ равно 2, 3 или 4; вот почему.

Мы видели, что при вычислениях главы VII появляются малые делители

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i$$

(см. п. 104).

Если один из этих делителей обращается в нуль, вычисление прерывается, и появляются вековые члены.

Но мы легко устанавливаем, что если $k+2$ равно 2, 3 или 4, то вычисления будут приостановлены таким же образом при нахождении членов трех первых порядков, которые мы должны были принимать во внимание. Если же, напротив, $k+2 > 4$, то мы остановимся только при вычислении членов высшего порядка, которые не рассматривались в предшествующих рассуждениях.

374. Предположим, например, что все фокусы являются противошерстными фокусами; пусть $M$ — любая точка $(T)$; эта точка будет своим $2p$-м фокусом. Пусть $M'$ — точка, расположенная немного за точкой $M$ в направлении обхода $(T)$ и траекторий, близких к $(T)$. Я могу провести траекторию $(T')$, исходящую из точки $M$, которая будет очень мало отклоняться от $(T)$, совершит вокруг $(T)$ $k+2$ оборота и в конечном счете примкнет к точке $M'$ и будет иметь $2p+1$ точек пересечения с $(T)$, если считать точки пересечения $M$ и $M'$.

В самом деле, так как фокус является противошерстным фокусом, то все траектории $(T')$, близкие к $(T)$, пересекут $(T)$ *за* фокусом. Следовательно, мы сможем провести траекторию $(T')$, которая удовлетворяет условиям, которые я только что сформулировал, лишь бы расстояние $MM'$ было меньше $\delta$. Ясно, что верхний предел, который не должно превосходить расстояние $MM'$, зависит от положения $M$ на $(T)$; но оно никогда не обращается в нуль, поскольку нет особого фокуса.

Мне достаточно тогда приравнять $\delta$ наименьшему значению, которое может принять этот верхний предел, и я могу считать $\delta$ постоянной.

Итак, если расстояние $MM'$ меньше $\delta$, мы можем провести траекторию $(T')$, удовлетворяющую нашим условиям; мы можем даже провести их две — одну, пересекающую $(T)$ в $M$ под положительным углом, другую — под отрицательным углом.

При этих условиях предположим, что наши канонические дифференциальные уравнения зависят от параметра $\lambda$; при $\lambda=0$ замкнутая траектория $(T)$ имеет характеристический показатель $\alpha_0=in$.

Предположим, что при $\lambda>0$ характеристический показатель, деленный на $i$, больше $n$, и что при $\lambda<0$ он, наоборот, меньше $n$.

Тогда при $\lambda\neq 0$ точка $M$ уже не будет являться своим $2p$-м фокусом; ее $2p$-й фокус будет расположен перед $M$ при $\lambda>0$ и за $M$ при $\lambda<0$. Пусть $F$ — этот фокус. Расстояние $MF$, естественно, будет зависеть от положения $M$ на $(T)$; я называю $\varepsilon$ наибольшее значение этого расстояния; ясно, что $\varepsilon$ будет непрерывной функцией от $\lambda$, обращающейся в нуль вместе с $\lambda$; заметим, что при $\lambda\neq 0$, согласно принципам п. 347, фокус $F$ всегда лежит за точкой $M$ или всегда перед ней в зависимости от значения характеристического показателя, и расстояние $MF$ никогда не может обратиться в нуль.

Пусть $F'$ — точка, расположенная немного за $F$; мы сможем соединить $M$ с $F'$ траекторией $(T')$, лишь бы расстояние $FF'$ оставалось меньше некоторой величины $\delta'$. Ясно, что $\delta'$ является непрерывной функцией $\lambda$ и сводится к $\delta$ при $\lambda=0$.

Возьмем $\lambda>0$ так, что $M$ лежит за $F$; мы можем заставить $M$ играть роль $F'$ и соединить точку $M$ с самой собой траекторией $(T')$, лишь бы расстояние $MF$ было меньше $\delta'$ или лишь бы было

$$\varepsilon<\delta';$$

при $\lambda=0$ $\varepsilon$ есть нуль, и $\delta'=\delta>0$; следовательно, можно взять $\lambda$ достаточно малым, чтобы это неравенство было удовлетворено.

Тогда мы можем соединить точку $M$ с самой собой траекторией $(T')$, мало отклоняющейся от $(T)$, обходящей $(T)$ $k+2$ раза и пересекающей $(T)$ $2p+1$ раз.

На рисунке $BA$ представляет дугу $(T)$, на которой находится точка $M$. $MC$ — дуга $(T')$, исходящая из $M$, а $DM$ — другая дуга этой же самой траектории, оканчивающейся в $M$. Стрелки указывают направление, в котором описываются траектории (рис. 12).

Точка $M$ может быть таким образом соединена с самой собой не одной, а двумя траекториями $(T')$; для одной, как указывает рисунок, угол

$CMA$ положителен, так что $CM$ лежит над $MA$; для другой угол $CMA$ отрицателен.

Траекторию $(T')$ нельзя считать замкнутой траекторией; она исходит из точки $M$, чтобы вернуться в точку $M$, но направление касательной не одно и то же в исходной точке и в конечной точке, так что дуги $MC$ и $DM$ не сливаются.

Траектория $(T')$, идущая таким образом из $M$ в $M$ с угловой точкой в $M$, образует, следовательно, то, что можно назвать *завитком*. Делая то же самое построение для всех точек $M$ траектории $(T)$, мы получим *ряд завитков*; мы их получим даже два, первый соответствует случаю, когда угол $CMA$ положителен, а второй — случаю, когда этот угол отрицателен. Эти два ряда отделены друг от друга; в самом деле, переход от одного ряда к другому можно совершить, только если угол $CMA$ становится бесконечно малым.

Тогда траектория $(T')$, становясь бесконечно близкой к $(T)$, должна была бы пройти через фокус $F$, согласно самому определению фокусов; однако, так как она должна примыкать к точке $M$, то точки $M$ и $F$ слились бы; этого не может случиться, согласно принципам п. 347.

Таким образом, если все фокусы являются противошерстными, мы имеем два ряда завитков при $\lambda > 0$ и не имеем их при $\lambda < 0$.

Если бы все фокусы были пошерстными, то мы могли бы повторить те же рассуждения; мы нашли бы, что имеется два ряда завитков при $\lambda < 0$ и что их нет при $\lambda > 0$.

375. Рассмотрим один из рядов завитков, определенных в предыдущем пункте; *действие*, вычисленное вдоль одного из этих завитков, будет изменяться с положением точки $M$; оно будет иметь, по крайней мере, один максимум или один минимум.

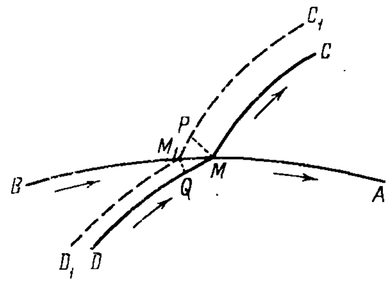

Рис. 12

Я говорю, что если действие есть максимум или минимум, две дуги $MC$ и $CD$ сливаются, так что траектория $(T')$ является замкнутой и соответствует периодическому решению второго рода.

В самом деле, предположим, что траектория $(T')$ соответствует минимуму действия и что угол $CMA$ больше угла $BMD$, как на рисунке; тогда возьмем точку $M_1$ слева от $M$ бесконечно близко к $M$, построим завиток $(T'_1)$, бесконечно мало отличающийся от завитка $(T')$ и имеющий свою угловую точку в $M_1$; пусть $M_1C_1$ и $M_1D_1$ — две дуги этого завитка.

Из точек $M$ и $M_1$ я опускаю два перпендикуляра $MP$ и $M_1Q$ на $M_1C_1$ и $MD$.

Согласно хорошо известной теореме, действие вдоль $(T')$ от точки $M$ до точки $Q$ будет равно действию вдоль $(T'_1)$ от точки $P$ до $M_1$. Таким образом, мы будем иметь:

действие $(T_1')$=действию $(T')$ + действие $(M_1P)$ — действие $(QM)$ или

действие $(T_1')$ = действию $(T')$ + действие $(MM_1)$ $(\cos CMA - \cos BMQ)$, или, наконец,

$$\text{действие } (T_1') < \text{действия } (T'),$$

что абсурдно, поскольку $(T')$ по предположению соответствует минимуму действия.

Если бы мы предположили, что

$$CMA < BMD,$$

то пришли бы к тому же абсурдному выводу, помещая точку $M_1$ справа от $M$.

Итак, следует предположить, что

$$CMA = BMD,$$

т. е. что две дуги сливаются.

То же рассуждение применимо к случаю максимума.

Таким образом, каждый ряд завитков содержит, по крайней мере, две замкнутые траектории.

Каждая из этих замкнутых траекторий делает $k+2$ оборота вокруг $(T)$ и пересекает $(T)$ в $2p$ точках. Для $p$ из них угол, аналогичный $CMA$, положителен, а для $p$ остальных он отрицателен; в самом деле, кривая $(T')$, будучи замкнутой, должна пересечь $(T)$ столько же раз в одном направлении, сколько в другом.

Таким образом, эту замкнутую траекторию можно рассматривать как завиток $2p$ различными способами; ибо мы можем считать любую из наших $2p$ точек пересечения угловой точкой; для $p$ из этих способов завиток, определенный таким образом, будет принадлежать первому ряду, а для $p$ остальных — второму.

Среди завитков каждого ряда имеется, таким образом, не два, а, по крайней мере, $2p$ таких, которые сводятся к замкнутым траекториям. Только мы получаем таким образом не $4p$, а лишь две различные замкнутые траектории.

То, что их не больше, не вытекает из предыдущего рассуждения, но может быть выведено из принципов предыдущей главы.

Траектория $(T')$, определенная таким образом, будет иметь $^1/_2(k+1)\,p$ двойных точек, если $k$ — нечетное, и $^1/_2(k+2)p$ двойных точек, если $k$ — четное. Это справедливо для малых значений $\lambda$; но я говорю, что это останется верным, как бы ни было велико $\lambda$, пока существует траектория $(T')$. В самом деле, число двойных точек может измениться, только если две ветви кривой $(T')$ становятся касательными друг к другу; но две траектории не могут касаться друг друга, не сливаясь.

По той же причине они будут пересекаться в $2p$ точках, сколь бы велико ни было $\lambda$, пока будут существовать две траектории $(T)$ и $(T')$.

**376.** *Во всех рассуждениях предыдущего пункта предполагается, что речь идет об абсолютном движении.*

Желая распространить их на случай относительного движения, мы столкнулись бы с затруднениями, которые без сомнения не являются непреодолимыми, но которые я не пытаюсь преодолеть.

Прежде всего, следовало бы видоизменить построение, употребленное в предыдущем пункте.

Вместо проведения перпендикуляров $MP$ и $M_1Q$ к $M_1C_1$ и $MD$ следовало бы сделать вот что. Например, для построения $MP$ мы построим бесконечно малый круг, удовлетворяющий следующим условиям: он пересекает $M_1C_1$ в $P$ и касается в этой точке прямой $MP$; прямая, которая соединяет $M$ с центром, должна иметь заданное направление и быть в заданном отношении к радиусу. Построенная таким образом прямая $MP$ обладает теми же свойствами, что и нормаль в абсолютном движении. К сожалению, это построение в некоторых случаях может привести к затруднению.

Кроме того, действие $(MM_1)$ не всегда положительно; если бы оно стало нулем, то рассуждение оказалось бы опять несостоятельным; максимум или минимум мог бы быть достигнут в такой точке $M$, что действие $(MM_1)$ было бы нулем, и при этом без необходимости слияния дуг $MC$ и $DM$.

Следовательно, наши рассуждения приложимы к случаю относительного движения, только если действие остается положительным вдоль всей траектории $(T)$.

Во всех случаях остается верным один из выводов: замкнутая траектория $(T')$ существует всегда, поскольку если рассуждение предыдущего пункта теряет силу, то этого не происходит с рассуждениями глав XXVIII и XXX; кроме того, $(T')$ пересекает $(T)$ в $2p$ точках и имеет $p(k+1)/2$ или $p(k+2)/2$ двойных точек.

Это верно для малых значений $\lambda$, но я не могу больше заключить, что это останется справедливым, каким бы ни было $\lambda$; ибо две траектории могут касаться, не сливаясь, лишь бы они пробегались в противоположных направлениях.

## Устойчивость и неустойчивость

**377.** Предположим, что имеется только две степени свободы; два характеристических показателя равны нулю, два других равны и противоположны по знаку.

Уравнение, имеющее корни

$$e^{\pm\alpha T},$$

является уравнением второго порядка, коэффициенты которого вещественны ($T$ представляет собой период, а $\alpha$ — один из характеристических показателей).

Следовательно, эти корни вещественные или комплексные сопряженные.

Если они вещественные и положительные, то $\alpha$ — вещественные, и периодическое решение неустойчиво.

Если они комплексные, то $\alpha$ — комплексные сопряженные; так как их произведение равно $+1$, то $\alpha$ — чисто мнимые, и периодическое решение устойчиво.

Если они вещественные и отрицательные, то $\alpha$ — *комплексные*, причем мнимая часть равна $i\pi/T$; периодическое решение опять неустойчиво.

При этом они не могут быть вещественными и иметь противоположные знаки, поскольку их произведение равно $+1$.

Следовательно, имеется два типа неустойчивых решений, соответствующих двум предположениям

$$e^{\alpha T} > 0, \qquad e^{\alpha T} < 0.$$

Переход от устойчивых решений к неустойчивым решениям первого типа совершается через значение

$$\alpha = 0.$$

Переход от устойчивых решений к неустойчивым решениям второго типа совершается через значение

$$\alpha = \frac{i\pi}{T}.$$

**378.** Изучим сначала переход к неустойчивым решениям первого типа В момент перехода мы имеем

$$e^{\alpha T} = 1.$$

Возьмем снова количества $\beta_k$ и $\psi_k$, определенные в главе III, и рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

это уравнение имеет корни

$$0,\ 0,\ e^{\alpha T} - 1,\ e^{-\alpha T} - 1.$$

В момент перехода эти четыре корня становятся нулями.

Однако прежде чем изучать этот простой случай, когда мы имеем дело с уравнениями динамики с двумя степенями свободы и когда мы предполагаем, что функция $F$ не зависит явно от времени и что, следовательно, уравнения допускают интеграл живых сил $F=\text{const}$, прежде чем изучать, говорю я, этот простой случай, нам следует, может быть, остановиться на мгновение на еще более простом случае.

Пусть $F$ — какая-нибудь функция от $x$, $y$ и $t$, периодическая с периодом $T$ относительно $t$; рассмотрим канонические уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{dF}{dx}; \tag{2}$$

это уравнения динамики с одной-единственной степенью свободы; но так как $F$ зависит от $t$, то они не допускают уравнения живых сил $F=\text{const}$.

Предположим, что уравнения (2) допускают периодическое решение с периодом $T$. Характеристические показатели будут нам заданы следующим уравнением, аналогичным (1)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\psi_1}{d\beta_1}-S & \dfrac{d\psi_1}{d\beta_2} \\ \dfrac{d\psi_2}{d\beta_1} & \dfrac{d\psi_2}{d\beta_2}-S \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

которое имеет корни

$$e^{\alpha T}-1, \qquad e^{-\alpha T}-1.$$

Оба эти корня становятся нулями в момент перехода.

Предположим, что $F$ зависит от некоторого параметра $\mu$ и что при $\mu=0$ два корня уравнения (3) будут нулями. Функции $\psi_1$ и $\psi_2$ будут зависеть не только от $\beta_1$ и $\beta_2$, но и от $\mu$. Мы будем предполагать, что $F$ разложима по степеням $\mu$ и что, следовательно, $\psi_1$ и $\psi_2$ разложимы по степеням $\beta_1$, $\beta_2$ и $\mu$.

Периодические решения будут заданы уравнениями

$$\psi_1=0, \quad \psi_2=0. \tag{4}$$

При $\mu=0$, $\beta_1=\beta_2=0$ функциональный определитель от $\psi$ по $\beta$ есть нуль; но, вообще говоря, четыре производных $d\psi_i/d\beta_k$ не обратятся в нуль одновременно. Предположим, например, что

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}\neq 0;$$

мы найдем из первого уравнения (4) $\beta_1$ в виде ряда, расположенного по степеням $\beta_2$ и $\mu$, и подставим во второе уравнение (1). Пусть

$$\Psi(\beta_2, \mu)=0 \tag{5}$$

— результат подстановки. Так как функциональный определитель равен нулю, то мы получим

$$\frac{d\Psi}{d\beta_2}=0;$$

однако необходимо различать два случая.

1. Производная $d\Psi/d\mu$ не равна нулю, или, другими словами, функциональный определитель от $\psi_1$ и $\psi_2$ по $\beta_1$ и $\mu$ не нуль.

В этом случае, если смотреть на $\beta_2$ и $\mu$ как на координаты точки на плоскости, кривая, представленная уравнением (5), будет иметь в начале координат обыкновенную точку, в которой касательной будет прямая $\mu=0$.

Вообще говоря, вторая производная

$$\frac{d^2\Psi}{d\beta_2^2}$$

не будет нулем, т. е. начало не будет точкой перегиба для кривой (5).

Если мы пересечем прямой $\mu=\mu_0$, где $\mu_0$ — достаточно малая постоянная, то в зависимости от знака $\mu_0$ мы сможем иметь две точки пересечения этой прямой с кривой (5) в окрестности начала или же ни одной.

Если, например, кривая лежит над своей касательной, мы будем иметь при $\mu_0>0$ два пересечения и, следовательно, два периодических решения, при $\mu_0<0$ мы не получим ни одного.

Таким образом, мы видим, что два периодических решения приближаются друг к другу, сливаются, затем исчезают.

Рассмотрим две точки пересечения прямой $\mu=\mu_0$ с кривой (5); они будут соответствовать двум последовательным корням уравнения (5) и, следовательно, двум значениям противоположных знаков производной $d\Psi/d\beta_2$, а значит, двум значениям противоположных знаков функционального определителя от $\psi_i$ по $\beta$, т. е. произведения

$$(e^{\alpha T}-1)(e^{-\alpha T}-1)=2-e^{\alpha T}-e^{-\alpha T},$$

т. е. $\alpha^2$.

Итак, *из двух периодических решений, которые сливаются и, таким образом, исчезают, одно всегда устойчиво, а другое — неустойчиво.*

2. Производная $d\Psi/d\mu=0$, или, другими словами, функциональный определитель от $\psi_1$ и $\psi_2$ по $\beta_1$ и $\mu$ есть нуль.

Тогда кривая (5) имеет в начале особую точку, которая, вообще говоря, будет обыкновенной двойной точкой.

Так как две ветви кривой пересекаются в начале, то прямая $\mu=\mu_0$ всегда встретит кривую в двух точках; следовательно, мы будем иметь два периодических решения, каков бы ни был знак $\mu_0$.

Две ветви кривой определяют в окрестности начала четыре области; в двух из этих областей, противоположных друг другу относительно вершины, $\Psi$ будет положительным; в двух других — отрицательным.

Пусть $OP_1$, $OP_2$, $OP_3$, $OP_4$ — четыре полуветви, которые сходятся в начале; $OP_1$ будет продолжением $OP_3$, а $OP_2$ — продолжением $OP_4$; $OP_1$ и $OP_2$ будут соответствовать $\mu_0 > 0$; $OP_3$ и $OP_4$ — $\mu_0 < 0$; функция $\Psi$ будет положительной внутри углов $P_1OP_2$, $P_3OP_4$ и отрицательной внутри углов $P_2OP_3$, $P_1OP_4$.

Мы только что видели, что устойчивость зависит от знака производной $d\Psi/d\beta_2$; в таком случае, когда мы пересекаем, например, $OP_1$, функция $\Psi$ переходит от отрицательных значений к положительным; производная будет положительной, и решение будет, например, устойчивым; оно будет также устойчивым, когда мы будем пересекать $OP_4$; неустойчивым, когда мы будем пересекать $OP_2$ или $OP_3$.

Периодические решения, соответствующие $OP_1$, устойчивы, и они являются аналитическим продолжением периодических решений, которые соответствуют $OP_3$ и являются неустойчивыми.

Обратно, периодические решения, соответствующие $OP_2$ и являющиеся неустойчивыми, представляют собой аналитическое продолжение периодических решений, которые соответствуют $OP_4$ и устойчивы.

Следовательно, мы имеем два аналитических ряда периодических решений, которые сливаются при $\mu=0$, и в этот момент *эти два ряда обмениваются своей устойчивостью.*

Мы только что изучили два наиболее простых случая, но может представиться масса других случаев, соответствующих различным особенностям, которые может иметь в начале кривая (5).

Но, каковы бы ни были эти особенности, мы увидим, что из начала во все стороны расходится *четное* число $p+q$ полуветвей кривых, а именно, $p$ со стороны $\mu > 0$ и $q$ — со стороны $\mu < 0$. Предположим, что малый круг, описанный около начала, встречает их в следующем порядке:

$$OP_1,\ OP_2,\ \ldots,\ OP_{p+q}.$$

Пусть

$$OP_1,\ OP_2,\ \ldots,\ OP_p \tag{6}$$

— полуветви, соответствующие $\mu > 0$, а

$$OP_{p+1},\ OP_{p+2},\ \ldots,\ OP_{p+q} \tag{7}$$

— полуветви, соответствующие $\mu < 0$.

Тогда полуветви (6) соответствуют, чередуясь, устойчивым периодическим решениям и неустойчивым решениям; я буду говорить для краткости, что эти полуветви поочередно устойчивы или неустойчивы.

То же относится и к полуветвям (7).

С другой стороны, $OP_p$ и $OP_{p+1}$ — обе устойчивы или обе неустойчивы.

То же относится, следовательно, и к $OP_{p+q}$ и $OP_1$.

Итак, пусть $p'$ и $p''$ — число устойчивых полуветвей и число неустойчивых полуветвей при $\mu > 0$, так что

$$p'+p''=p.$$

Пусть $q'$ и $q''$ — соответствующие числа при $\mu < 0$, так что

$$q'+q''=q.$$

Тогда имеются только три возможных предположения:

$$\begin{aligned} p' &= p'', & q' &= q'', \\ p' &= p''+1, & q' &= q''+1, \\ p' &= p''-1, & q' &= q''-1. \end{aligned}$$

Во всех случаях мы имеем

$$p'-p''=q'-q''.$$

Предположим, что $p$ не равно $q$, а, например, что $p > q$, так что некоторое число периодических решений исчезает, когда мы переходим от $\mu > 0$ к $\mu < 0$; прежде всего, мы видим, что это число всегда четное и, кроме того, согласно предыдущему уравнению, *всегда исчезает столько же устойчивых решений, сколько и неустойчивых.*

Предположим теперь, что мы имеем аналитический ряд периодических решений и что при $\mu=0$ мы переходим от устойчивости к неустойчивости или наоборот (и притом так, что показатель $\alpha$ обращается в нуль). Тогда $q'$ и $p''$ (например) не меньше 1. Следовательно, сумма $p'+q''$ не меньше 2, откуда следует, что мы будем иметь, по меньшей мере, один аналитический ряд вещественных периодических решений, отличный от первого и сливающийся с ним при $\mu=0$.

Следовательно, *если для некоторого значения $\mu$ периодическое решение теряет устойчивость или приобретает ее* (и притом так, что показатель $\alpha$ равен нулю), *то оно сольется с другим периодическим решением*, с которым оно обменяется своей устойчивостью.

**379.** Вернемся теперь к случаю, который я предложил рассмотреть с самого начала, случаю, когда время не входит явно в уравнения, когда, следовательно, мы имеем интеграл живых сил $F=C$, когда, наконец, имеется две степени свободы.

Тогда я буду рассуждать, как в п. 317; я предположу, что период периодического решения, равный $T$ для периодического решения, которое соответствует $\mu=0$, $\beta_i=0$, будет равен $T+\tau$ и мало отличаться от $T$ для соседних периодических решений; и я напишу уравнения

$$\psi_1=0, \quad \psi_2=0, \quad \psi_3=0, \quad F=C_0, \quad \beta_1=0, \tag{1}$$

в которые входят переменные

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \mu,\ \tau.$$

Согласно нашим предположениям, функциональный определитель от $\psi$ по $\beta$ должен обратиться в нуль вместе со всеми своими минорами первого порядка, но миноры второго порядка не будут, вообще говоря, все равны нулю одновременно.

Следовательно, положим $\beta_1=0$ в уравнениях (1) и рассмотрим функциональный определитель $\Delta$ от

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ F$$

по

$$\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \tau.$$

Этот определитель обращается в нуль, когда величины $\beta$, $\mu$ и $\tau$ обращаются в нуль; но, вообще говоря, миноры первого порядка не будут обращаться в нуль.

В самом деле, рассмотрим функциональный определитель от $F$ и двух из четырех функций $\psi$ по $\tau$ и двум из четырех переменных $\beta$. Могут ли они все быть нулями одновременно?

Согласно теории определителей, это могло бы случиться только

1) если бы все миноры двух первых порядков определителя от $\psi$ по $\beta$ были равны нулю одновременно, чего, вообще говоря, не бывает и чего мы не будем предполагать;

2) либо если бы все производные от $F$ были нулями одновременно; мы видели в п. 64, что они должны были бы обращаться в нуль вдоль всего периодического решения; мы также не будем предполагать и этого;

3) либо, наконец, если бы все производные от $\psi$ и $F$ по $\tau$ были нулями одновременно; тогда значения

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$$

соответствовали бы не периодическому решению в собственном смысле этого слова, а положению равновесия (см. п. 68).

Этого мы также не будем предполагать.

Следовательно, мы можем всегда предположить, что все миноры первого порядка определителя $\Delta$ не равны нулю.

Исключим теперь четыре из неизвестных $\beta$ и $\tau$ из уравнений (1).

Исключим, например, $\beta_1$, $\beta_3$, $\beta_4$, $\tau$; останется уравнение вида

$$\Psi(\beta_2,\ \mu)=0;$$

так как это уравнение совершенно того же вида, что и уравнение (5) предыдущего пункта, мы будем обращаться с ним таким же самым образом и придем к тем же результатам:

1. Когда периодические решения исчезают, после того как они сольются, то из них исчезает всегда четное число и притом столько же устойчивых, сколько неустойчивых.

2. Когда периодическое решение теряет или приобретает устойчивость при непрерывном изменении $\mu$ (и притом таким образом, что $\alpha$ обращается в нуль), то можно быть уверенным, что в момент перехода с ним сливается другое вещественное периодическое решение того же периода.

**380.** Перейдем ко второму случаю, когда

$$\alpha = \frac{i\pi}{T}.$$

Тогда, так как ни один из характеристических показателей не обращается в нуль при

$$\mu=0$$

за исключением двух, которые всегда равны нулю, не существует периодического решения с периодом $T$, сливающегося с первым при

$$\mu=0.$$

Но зато в силу принципов главы XXVIII существуют периодические решения второго рода с периодом $2T$, которые при $\mu=0$ сливаются с заданным решением, период которого равен $T$.

Что мы скажем об их устойчивости? При $\mu > 0$ мы будем иметь, например, устойчивое решение с периодом $T$, которое станет неустойчивым при $\mu < 0$.

Пусть при $\mu < 0$ $p'$ и $p''$ — числа устойчивых и неустойчивых решений, которые допускают период $2T$, не допуская периода $T$. Пусть $q'$ и $q''$ — соответствующие числа при $\mu < 0$.

Тогда, рассматривая все решения с периодом $2T$, которые допускают или не допускают период $T$, и применяя к ним принципы п. 378, я увижу, что могу сделать по поводу этих четырех чисел следующие три предположения:

$$p'+1=p'', \qquad q'=q''+1,$$
$$p'=p'', \qquad q'=q''+2,$$
$$2+p'=p'', \qquad q'=q''.$$

Но если мы обратимся к принципам главы XXVIII, то увидим, что эти четыре числа не могут принимать все значения, совместные с тремя предположениями. В п. 335 мы найдем разбор наиболее простых и наиболее часто встречающихся случаев.

## Приложение к орбитам Дарвина

381. В томе XXI «Acta mathematica» Дж. Г. Дарвин [18] подробно изучил некоторые периодические решения. Он принимает предположения п. 9 и рассматривает возмущающую планету, которую называет Юпитером и которой приписывает массу, в десять раз меньшую, чем масса Солнца. Эта фиктивная планета описывает около Солнца круговую орбиту, а возмущаемая малая планета нулевой массы движется в плоскости этой орбиты.

Так, он установил существование периодических решений, которые содержатся в периодических решениях, названных мною решениями первого сорта, и которые были подробно им изучены. Эти орбиты отнесены к подвижным осям, вращающимся вокруг Солнца с той же угловой скоростью, что и Юпитер; в относительном движении, отнесенном к этим подвижным осям, эти орбиты являются замкнутыми кривыми.

Первым классом периодических орбит является класс, названный Дарвином классом планет $A$. Орбита представляет собой замкнутую кривую, охватывающую Солнце, но не охватывающую Юпитер. Орбита устойчива, когда постоянная Якоби больше 39, и неустойчива в противном случае. Неустойчивость соответствует характеристическому показателю, имеющему мнимую часть $i\pi/T$.

Следовательно, для значений постоянной Якоби, близких к 39, существуют периодические решения второго рода с двойным периодом. Соответствующая орбита будет замкнутой кривой с двойной точкой, совершающей два оборота вокруг Солнца. Два завитка этой кривой очень мало отличаются друг от друга и оба мало отличаются от круга.

Далее мы более подробно изучим эти решения второго рода.

Дарвин нашел также осциллирующие спутники, которые он называет $a$ и $b$, о которых мы говорили в п. 52. Они всегда неустойчивы.

Наконец, он нашел спутников в собственном смысле, которые описывают относительно системы рассмотренных подвижных осей замкнутые кривые, охватывающие Юпитер, но не охватывающие Солнце.

При $C=40$ ($C$ — постоянная Якоби) мы имеем только одного спутника $A$, который устойчив. При $C=39{,}5$ спутник $A$ становится неустойчивым с вещественным показателем $\alpha$; но мы имеем два новых спутника $B$ и $C$, второй — устойчивый, первый — неустойчивый с вещественным показателем $\alpha$. При $C=39$ мы снова находим тот же результат; при $C=38{,}5$ спутник $C$ становится неустойчивым с комплексным показателем $\alpha$ (мнимая часть которого равна $i\pi/T$); наконец, при $C=38$ мы снова находим тот же результат.

Следовательно, мы должны рассмотреть три перехода:

1) переход спутника $A$ от устойчивости к неустойчивости;
2) появление спутников $B$ и $C$;
3) переход спутника $C$ от устойчивости к неустойчивости.

Два последних перехода не вызывают никаких затруднений.

Мы видим, что одновременно появляются два периодических решения $B$ и $C$, сначала мало отличающиеся друг от друга; одно — устойчиво, другое — неустойчиво; показатель $\alpha$ для неустойчивого решения веществен.

Все это согласуется с выводами п. 378.

Переход от устойчивости к неустойчивости спутника $C$ также не представляет затруднений, ибо показатель $\alpha$ в случае неустойчивости является комплексным; следовательно, мы находимся в условиях п. 380. Таким образом, существуют периодические решения второго рода, соответствующие замкнутым кривым, совершающим два оборота вокруг Юпитера.

**382.** Зато переход спутника $A$ от устойчивости к неустойчивости представляет бо́льшие трудности, поскольку в случае неустойчивости показатель $\alpha$ веществен. Следовательно, согласно п. 378, должен был бы иметь место *обмен устойчивостью* с другими периодическими решениями, соответствующими замкнутым кривым, совершающим только один оборот вокруг Юпитера. Кажется, что это не вытекает из вычислений Дарвина.

Естественно, мы приходим к мысли, что неустойчивые спутники $A$, открытые Дарвином, не являются аналитическим продолжением его устойчивых спутников $A$.

Другие рассуждения приводят к тому же результату.

Орбиты устойчивых спутников $A$ являются простыми замкнутыми кривыми; неустойчивые спутники $A$ имеют орбиты в форме восьмерки.

Каким образом можно было бы перейти от одного случая к другому? Это можно сделать только по кривой, имеющей точку возврата; но в точке возврата скорость должна быть равной нулю, и по соображениям симметрии эта точка возврата могла бы находиться только на оси $x$; она не может быть между Солнцем и Юпитером. В самом деле, на рис. 1 Дарвин дает кривые нулевой скорости; при $C > 40{,}18$ эти кривые пересекают ось $x$ между Солнцем и Юпитером; но это больше не имеет места при $C < 40{,}18$, и переход имеет место между $C=40$ и $C=39{,}5$.

Остается предположение, что точка возврата находится за Юпитером, но оно также неудовлетворительно. Сравним две орбиты, соответствующие $C=40$ и $C=39{,}5$; первая дважды пересекает ось $x$ под прямым углом, один раз за Юпитером, второй раз перед ним; пусть $P$ и $Q$ — две точки пересечения; аналогично, вторая орбита, если оставить в стороне двойную точку, дважды пересекает ось $x$ под прямым углом, один раз за и один раз перед Юпитером; пусть $P'$ и $Q'$ — две точки пересечения. Рассмотрим точку пересечения $P$ или $P'$, которая лежит за Юпитером, и посмотрим на знак $dy/dt$; мы увидим, что как для одной, так и для другой орбиты этот знак положителен. Но производная $dy/dt$ должна была изменить знак в момент перехода через точку возврата.

Точку $P$, предполагаемую точку возврата, и точку $P'$ нельзя, следовательно, рассматривать как аналитическое продолжение друг друга.

Тогда следовало бы предположить, что в какой-то момент произошел обмен между двумя точками пересечения орбиты спутника $A$ и оси $x$, точка, находившаяся справа, переходит налево и обратно. Ничто в ходе кривых, построенных Дарвином, не позволяет сделать подобного предположения.

Следовательно, я замечаю, что неустойчивые спутники $A$ не являются аналитическим продолжением устойчивых спутников $A$. Но тогда, чем стали устойчивые спутники $A$?

По этому поводу я могу только делать предположения, а чтобы можно было поступить иначе, следовало бы пересмотреть механические квадратуры Дарвина.

Но если изучить поведение кривых, то кажется, что в некоторый момент орбита спутника $A$ должна пройти через Юпитер и что затем она становится тем, что Дарвин называет *осциллирующим спутником*.

383. Изучим ближе планеты $A$ и переход этих планет от устойчивости к неустойчивости.

Орбиты этих планет соответствуют тому, что мы назвали *периодическими решениями первого сорта* (п. 40). В двойной точке орбита, которая делает два оборота вокруг Солнца и мало отличается от орбиты планеты $A$ в момент, когда орбита этой планеты только что стала неустойчивой, соответствует тому, что мы назвали *периодическими решениями второго сорта* (п. 47).

В самом деле, если применить к решениям первого сорта методику, посредством которой мы вывели периодические решения второго рода из решений первого рода, то придем как раз к решениям второго сорта.

В решениях второго сорта средние аномалистические движения, мало отличающиеся от средних движений в собственном смысле, находятся в соизмеримости. Следовательно, мы должны ожидать, что для решения второго сорта (и, следовательно, для планеты $A$ в момент перехода от устойчивости к неустойчивости) отношение средних движений будет близким к простому рациональному числу, а здесь оно будет даже близко к кратному $^1/_2$, поскольку орбита должна сделать два оборота вокруг Солнца.

Другими словами, в момент перехода величина, которую Дарвин называет $nT$, должна быть близкой к кратному $\pi$.

И это на самом деле имеет место; таблицы Дарвина нам дают:

| | | |
|---|---|---|
| $C=40$ | $A$ устойчива | $nT=154°$, |
| $C=39{,}5$ | $A$ устойчива | $nT=165°$, |
| $C=39$ | $A$ неустойчива | $nT=177°$, |
| $C=38{,}5$ | $A$ неустойчива | $nT=191°$. |

Мы видим, что переход должен совершиться приблизительно при $nT=170°$, и это число близко к $180°$.

Среднее движение планеты $A$ приблизительно равно, следовательно, утроенному среднему движению Юпитера.

Можно было бы подумать о приложении принципов главы XXX к изучению этих решений второго сорта, но мы встретились бы с трудностями, потому что мы находимся в исключительном случае. Лучше предпринять это изучение прямым путем.

384. Возьмем снова обозначения п. 313 и положим, как в этом пункте,

$$\begin{aligned} x_1 &= L - G, & x_2 &= L + G, \\ 2y_1 &= l - g + t, & 2y_2 &= l + g - t, \\ F' &= R + G = F_0 + \mu F_1 + \ldots, & & \\ F_0 &= \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2}. & & \end{aligned}$$

Величина $L$ должна иметь тот же знак, что и $G$ (см. стр. 179), а эксцентриситет должен быть очень малым; так как $x_1$ имеет порядок квадрата эксцентриситета, то эта переменная также будет очень малой.

Так как речь идет только об определении числа периодических решений и их устойчивости, то нам достаточно одного приближения.

Следовательно, мы пренебрежем $\mu^2 F_2$ и последующими членами. В члене $\mu F_1$ учтем только вековые члены и члены очень долгого периода и, кроме того, отбросим высшие степени $x_1$. Таким образом мы получим

$$F_1 = a + bx_1 + cx_1 \cos \omega,$$

где $a$, $b$, $c$ — функции только $x_2$ и где $cx_1 \cos \omega$ — сохраненный член очень долгого периода.

Членами очень долгого периода являются члены с $l + 3g - 3t$, т. е. члены с $2y_2 - y_1$; следовательно, мы имеем

$$\omega = 4y_2 - 2y_1.$$

Тогда

$$F' = \frac{2}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2} + \mu (a + bx_1 + cx_1 \cos \omega),$$

и мы можем применить метод Делоне.

Канонические уравнения допускают интеграл

$$x_2 + 2x_1 = k,$$

откуда

$$F' = \frac{2}{(k - x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu (a + bx_1 + cx_1 \cos \omega).$$

С принятой степенью приближения мы можем заменить $a$, $b$, $c$ величинами

$$a_0 - 2x_1 a_0', \qquad b_0, \qquad c_0,$$

обозначая через $a_0$, $a'_0$, $b_0$, $c_0$ результат замены в $a$, $da/dx_2$, $b$, $c$ переменной $x_2$ величиной $k$.

Таким образом,

$$\alpha = a_0, \quad \beta = b_0 - 2a'_0, \quad \gamma = c_0$$

обозначают постоянные, зависящие от $k$, и мы имеем

$$F' = \frac{2}{(k-x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu(\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1 \cos \omega).$$

Будем рассматривать $k$ как постоянную, $\sqrt{x_1}\cos\frac{\omega}{2}$, $\sqrt{x_1}\sin\frac{\omega}{2}$ как прямоугольные координаты точки на плоскости и построим кривую

$$F' = C,$$

где $C$ означает вторую постоянную.

Эта кривая зависит, таким образом, от двух постоянных $k$ и $C$. Если она имеет двойную точку, то двойная точка будет соответствовать периодическому решению, которое будет устойчивым, если две касательные в двойной точке мнимые, и неустойчивым, если две касательные вещественны.

Заметим, что кривая симметрична относительно двух осей координат и что две двойные точки, симметричные друг другу относительно начала, не соответствуют двум подлинно различным периодическим решениям.

Двойные точки могут находиться только на одной из осей координат, так что мы найдем все эти точки, полагая

$$\omega = 0, \quad \omega = \pi.$$

Если положить

$$C = \frac{2}{k^2} + \frac{k}{2} + \mu\alpha,$$

то кривая $F' = C$ проходит через начало и имеет в нем двойную точку. Касательные в двойной точке заданы уравнением

$$\frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta + \mu\gamma\cos\omega = 0.$$

Следовательно, если

$$\frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta > \mu\gamma, \tag{1}$$

то касательные мнимы. Если

$$\mu\gamma > \frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta > -\mu\gamma, \tag{2}$$

то касательные вещественны.

Если, наконец,

$$-\mu\gamma > \frac{4}{k^3} - \frac{3}{2} + \mu\beta, \tag{3}$$

то касательные снова мнимы.

Коэффициент $\beta$ положителен; я написал предыдущие неравенства в предположении, что $\gamma$ также положительно. Впрочем, если бы $\gamma$ было отрицательным, то мы должны были только изменить $\omega$ на $\omega+\pi$.

Двойная точка в начале соответствует решению первого сорта, т. е. планете $A$ по Дарвину. Мы видим, что это решение устойчиво, когда имеют место неравенства (1) или (3), и неустойчиво, когда имеют место неравенства (2).

Изучим теперь двойные точки, которые могут находиться на прямой $\omega=0$.

Если мы положим $\omega=0$, то функция $F'$ примет вид

$$F' = \frac{2}{(k-x_1)^2} + \frac{k}{2} - \frac{3x_1}{2} + \mu\alpha + \mu x_1(\beta+\gamma) = C. \tag{4}$$

Если, оставляя $k$ постоянным, варьировать $x_1$ от 0 до $k$, то мы видим, что максимумы и минимумы $F'$ заданы уравнением

$$\frac{4}{(k-x_1)^3} - \frac{3}{2} + \mu(\beta+\gamma) = 0, \tag{5}$$

которое допускает решение, если имеет место неравенство (3), и не допускает его в противном случае.

Следовательно, если неравенство (3) не имеет места, то функция $F'$ монотонно убывает; если оно имеет место, то функция $F'$ сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает.

Этот максимум соответствует двойной точке, расположенной на прямой $\omega=0$, или, скорее, двум двойным точкам, симметричным относительно начала.

Но нам необходимо узнать, сколько этих двойных точек мы находим для заданного значения постоянной $C$; уравнение (5) дает $x_1$ в функции $k$; нужно вывести из него $x_1$ в функции $C$.

Но уравнения (4) и (5) можно написать в виде

$$F' = C, \qquad \frac{dF'}{dx_1} = 0,$$

откуда

$$\frac{dC}{dx_1} = \frac{dF'}{dx_1} + \frac{dF'}{dk}\frac{dk}{dx_1} = \frac{dF'}{dk}\frac{dk}{dx_1},$$

$$\frac{d^2F'}{dx_1^2} + \frac{d^2F'}{dk\,dx_1}\frac{dk}{dx_1} = 0.$$

Но, пренебрегая членами с $\mu$, мы имеем

$$\frac{dF'}{dk}+\frac{dF'}{dx_1}=-1,$$

откуда

$$\frac{dF'}{dk}=-1,$$

$$\frac{d^2F'}{dkdx_1}+\frac{d^2F'}{dx_1^2}=0;\quad \frac{d^2F'}{dx_1^2}=\frac{12}{(k-x_1)^4}=12\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}},$$

откуда

$$\frac{dk}{dx_1}=1,\qquad \frac{dC}{dx_1}=-1,$$

откуда следует, что $x_1$ — монотонно убывающая функция от $C$.

Следовательно, для одного значения $C$ мы имеем только не более одного максимума, т. е. имеем не более двух двойных точек, симметричных друг другу относительно начала, на прямой $\omega=0$.

Итак, пусть $C_0$ — значение $C$, удовлетворяющее двум равенствам

$$C_0=\frac{2}{k^2}+\frac{k}{2}+\mu\alpha,$$

$$\frac{4}{k^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0.$$

Мы увидим, что при $C > C_0$ на прямой $\omega=0$ не будет двойных точек и что при $C < C_0$ их будет две.

Такое же рассуждение приложимо к случаю двойных точек, расположенных на прямой $\omega=\pi$. Значения $x_1$ будут заданы уравнением

$$\frac{4}{(k-x_1)^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0, \tag{5bis}$$

которое допускает решение, если имеют место неравенства (2) или (3).

Тогда, если $C_1$ — значение $C$, удовлетворяющее двум равенствам

$$C_1=\frac{2}{k^2}+\frac{k}{2}+\mu\alpha,$$

$$\frac{4}{k^3}-\frac{3}{2}+\mu(\beta+\gamma)=0,$$

то условием того, чтобы на прямой

$$\omega=\pi$$

существовали две двойные точки, будет неравенство $C < C_1$.

Заметим, что $C_1 > C_0$, что $C_0$ — значение $C$, при котором мы переходим от неравенства (2) к неравенству (3), а $C_1$ — такое значение $C$, при котором мы переходим от неравенства (1) к неравенству (2).

При этом, строя кривые, мы легко найдем, что для двойных точек, лежащих на $\omega=0$, касательные вещественны, и что для двойных точек, лежащих на $\omega=\pi$, они мнимы.

Следовательно, мы можем резюмировать наши результаты следующим образом.

*Первый случай*

$$C > C_1.$$

Имеет место неравенство (1).

Решение первого сорта (планета $A$) устойчиво.

Решений второго сорта нет (орбита с двойной точкой).

*Второй случай*

$$C_1 > C > C_0.$$

Имеют место неравенства (2).

Решение первого сорта стало неустойчивым.

Имеется одно решение второго сорта, которое устойчиво.

*Третий случай*

$$C < C_0.$$

Имеет место неравенство (3).

Решение первого сорта вновь стало устойчивым.

Имеются два решения второго сорта, одно — устойчивое, а другое — неустойчивое; первое соответствует двум двойным точкам, расположенным на прямой $\omega=\pi$, а второе — двум двойным точкам, расположенным на прямой $\omega=0$.

Эти заключения верны, лишь бы $\mu$ было достаточно малым; является ли значение $\mu={}^1/_{10}$, принятое Дарвином, достаточно малым?

Я этого не проверял, но это кажется весьма вероятным.

Таким образом, правдоподобно, что если бы Дарвин продолжил изучение планет $A$ для значений $C$, меньших чем 38, то он снова нашел бы устойчивые орбиты.

# Глава XXXII

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ВИДА

385. Возьмем снова уравнения п. 13

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}, \qquad F=F_0+\mu F_1+\ldots \tag{1}$$

с $p$ степенями свободы. Согласно тому, что мы видели в п. 42, эти уравнения будут допускать такие периодические решения, что когда $t$ увеличивается на период $T$, переменные $y_1, y_2, \ldots, y_p$ увеличиваются соответственно на

$$2k_1\pi,\ 2k_2\pi,\ \ldots,\ 2k_p\pi.$$

*Целые* $k_1, k_2, \ldots, k_p$ *могут быть любыми.*

Однако это справедливо, только если гессиан от $F_0$ по $x$ не равен нулю. Доказательство п. 42 теряет силу, когда этот гессиан есть нуль и, в частности, когда $F_0$ зависит не от всех переменных $x$.

Но это как раз имеет место в задаче трех тел. Я напоминаю, что $y_1$, $y_2$; $y_3$, $y_4$; $y_5$, $y_6$ представляют тогда соответственно средние долготы планет, средние долготы перигелиев и средние долготы узлов и что $F_0$ зависит только от двух первых переменных $x_1$ и $x_2$, которые пропорциональны корням квадратным из больших осей.

Рассмотрим тогда периодическое решение; согласно принятым соглашениям, решение будет рассматриваться как периодическое, лишь бы *разности* величин $y$ увеличивались на кратные $2\pi$, когда $t$ увеличивается на период; в самом деле, $F$ зависит только от этих разностей.

Итак, пусть

$$2k_1\pi,\ 2k_2\pi,\ 2k_3\pi,\ 2k_4\pi,\ 2k_5\pi$$

— количества, на которые увеличиваются

$$y_1-y_6, \quad y_2-y_6, \quad y_3-y_6, \quad y_4-y_6, \quad y_5-y_6,$$

когда $t$ увеличивается на период.

Все, что мы смогли установить в главе III — это что существуют периодические решения, соответствующие любым значениям $k_1$ и $k_2$, *но в предположении*, что $k_3$, $k_4$ и $k_5$ — *нули.*

Можно спросить себя, существуют ли также здесь, как и в общем случае, периодические решения, соответствующие *любым значениям пяти целых* $k$, решения, которые я могу назвать решениями *второго вида*.

386. Существуют ли *эти решения второго вида*? Сразу же возникает соблазн ответить утвердительно, опираясь на соображения непрерывности и учитывая, что достаточно очень мало изменить вид функции $F$, чтобы получить канонические уравнения, к которым приложимы рассуждения п. 42.

Но тогда возникает одна трудность: чем станут эти решения, когда мы обратим в нуль величину, названную нами $\mu$, которая пропорциональна возмущающим массам?

Если возмущающие массы равны нулю, две планеты подчиняются законам Кеплера; перигелии и узлы неподвижны, так что числа $k_3$, $k_4$ и $k_5$ не могут иметь, как кажется, иного значения, чем нуль.

Вот как можно преодолеть это затруднение. Если массы бесконечно малы, то две планеты будут подчиняться законам Кеплера, *если только расстояние между ними само не становится в некоторые моменты бесконечно малым.*

В самом деле, предположим, что две планеты, сначала очень удаленные друг от друга, как одна, так и другая, описывают кеплеров эллипс. Может случиться, что эти два эллипса пересекаются или проходят очень близко друг от друга, и притом таким образом, что в некоторый момент расстояние между двумя планетами становится очень малым; в этот момент их возмущающее взаимодействие может стать ощутимым, и две орбиты будут подвержены значительным возмущениям. Затем планеты, будучи снова удаленными друг от друга, опять будут описывать кеплеровы эллипсы. Только эти новые эллипсы будут сильно отличаться от старых; перигелии и узлы подверглись значительным изменениям.

Я назову это явление *соударением*, хотя речь не идет о соударении в собственном смысле этого слова, поскольку две планеты не приходят в соприкосновение, а достаточно, чтобы их расстояние стало достаточно малым для того, чтобы притяжение было ощутимым, несмотря на малость масс.

Как бы то ни было, если принять в расчет орбиты с соударениями, то будет неправильным говорить, что при $\mu=0$ перигелии и узлы неподвижны и что, следовательно, числа $k_3$, $k_4$ и $k_5$ должны быть нулями.

Таким образом, мы пришли к мысли, что решения второго вида существуют и что, если устремить $\mu$ к нулю, то они стремятся к орбитам с рядом соударений. Но этого краткого очерка недостаточно, и необходимо более глубокое исследование.

387. Отдадим себе сначала отчет в последствиях соударения; пусть $E$ и $E'$ — эллипсы, описанные первой планетой до и после соударения; пусть $E_1$ и $E_1'$ — эллипсы, описанные второй планетой. Ясно, что эти

четыре эллипса должны пересечься в одной и той же точке, и притом таким образом, чтобы две планеты, описывая эти четыре орбиты, проходили через точку пересечения в момент соударения.

В самом деле, пока их расстояние ощутимо, две планеты описывают кривые, мало отличающиеся от эллипса; в течение очень короткого времени, когда их расстояние очень мало, они, наоборот, описывают орбиты, очень отличающиеся от эллипса.

Эти орбиты сводятся к малым дугам кривой $C$ очень малого радиуса кривизны, очень мало отличающимся от дуг гиперболы. В пределе очень короткое время соударения сводится к мгновению; малые дуги кривой $C$ сводятся к точке, и орбита, сводящаяся к двум дугам эллипса, имеет угловую точку.

Чтобы окончательно определить орбиты $E$, $E'$, $E_1$, $E_1'$, необходимо знать по величине и по направлению скорости двух планет $P$ и $P_1$ до и после соударения. Какие соотношения имеются между этими скоростями? Я замечаю прежде всего, что скорость центра масс двух тел $P$ и $P_1$ должна быть одной и той же до и после соударения, и притом как по величине, так и по направлению.

Рассмотрим теперь скорость $P$ относительно $P_1$; эта скорость должна быть одной и той же по величине до и после соударения; но она может отличаться по направлению.

Вот правило для определения направления этой скорости после соударения.

Рассмотрим подвижные оси, начало которых лежит в $P_1$, и рассмотрим прямую $AB$, представляющую по величине и направлению относительную скорость $P$ относительно $P_1$ до соударения. Эта прямая $AB$ должна проходить через точку $P_1$, поскольку тело, которое имеет скорость, представляемую ею, должно столкнуться с точкой $P_1$, неподвижной относительно подвижных осей. Но это справедливо только в пределе, это справедливо только потому, что мы рассматриваем как бесконечно малые массы, с одной стороны, так и с другой — бесконечно малое расстояние, на котором взаимное притяжение $P$ и $P_1$ начинает ощущаться, т. е. то, что можно было бы назвать *радиусом действия*. Следовательно, было бы точнее сказать, что расстояние $\delta$ точки $P$ от прямой $AB$ является бесконечно малой того же порядка, что и радиус действия.

Пусть теперь $A'B'$ — прямая, представляющая относительную скорость $P$ относительно $P_1$ после соударения; $A'B'$ равно по величине $AB$, а расстояние $P_1$ от $A'B'$ равно $\delta$.

Вот, наконец, правило для определения направления $A'B'$. Точка $P_1$ и две прямые $AB$ и $A'B'$ лежат в одной и той же плоскости (с точностью до бесконечно малых высшего порядка); угол между $AB$ и $A'B'$ определяется следующим образом: тангенс половины этого угла пропорционален $\delta$ и квадрату длины $AB$.

Таким образом, мы видим, что направление $A'B'$ может быть любым.

Следовательно, единственные условия, которым подчинены наши четыре скорости, заключаются в следующем: постоянство скорости центра масс по величине и по направлению; постоянство относительной скорости только по величине. Эти условия можно также сформулировать так: живая сила и постоянные площадей не должны изменяться в результате соударения.

388. Попытаемся построить орбиты с соударениями, которые являются пределами, к которым стремятся решения второго вида, когда $\mu$ стремится к нулю.

Прежде всего я замечаю, что для того чтобы подобная орбита была периодической, необходимо предположить, по крайней мере, два соударения. Предположим сначала, что два последовательных соударения никогда не имеют места в одной и той же точке. Итак, пусть $E$ и $E_1$ — эллипсы, описанные планетами $P$ и $P_1$ в промежутке времени между двумя последовательными соударениями. Эти два эллипса должны будут пересечься в двух точках, а так как они имеют общий фокус, то они лежат в одной и той же плоскости, если только две точки пересечения и фокус не находятся на прямой линии.

Предположим, что мы находимся в условиях этого исключительного случая; пусть $Q$ и $Q'$ — две точки пересечения эллипсов $E$ и $E_1$, которые, как я предполагаю, не лежат в одной и той же плоскости; эти две точки лежат на прямой линии с фокусом $F$; пусть $E'$ и $E'_1$ — эллипсы, описанные двумя планетами после соударения. Они пройдут через точку $Q$, в которой происходит соударение, и, вообще говоря, не будут лежать в одной и той же плоскости; их плоскости пересекутся по прямой $FQ$, так что их вторая точка пересечения (которая должна существовать, если два последовательных соударения никогда не имеют места в одной и той же точке) будет находиться на этой прямой $FQ$. Я добавляю, что два эллипса $E$ и $E_1$ будут иметь один и тот же параметр. В самом деле, так как точки $F$, $Q$, и $Q'$ лежат на прямой линии, то обратная величина параметра эллипса $E$ или эллипса $E_1$ будет равна $\frac{1}{2FQ}+\frac{1}{2FQ'}$.

Вот каким образом следует поступить при этих условиях. Предположим для определенности четыре соударения; пусть $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ — точки, в которых имеют место эти четыре соударения.

Мы можем произвольным образом задать эти четыре точки, лишь бы они, разумеется, лежали на одной и той же прямой, проходящей через $F$.

Мы должны построить два эллипса $E$ и $E_1$, пересекающиеся в $Q_1$ и $Q_2$, два эллипса $E'$ и $E'_1$, пересекающиеся в $Q_2$ и $Q_3$, еще два эллипса $E''$ и $E''_1$, пересекающиеся в $Q_3$ и $Q_4$, и, наконец, еще два $E'''$ и $E'''_1$, пересекающиеся в $Q_4$ и $Q_1$.

Орбита $P$ состоит из дуг, принадлежащих четырем эллипсам $E$, $E'$, $E''$, $E'''$, а орбита $P_1$ — из дуг, принадлежащих четырем эллипсам $E_1$, $E'_1$, $E''_1$, $E'''_1$.

Мы зададим себе произвольным образом постоянную живых сил и постоянные площадей; эти постоянные должны быть одинаковыми для промежутка времени между двумя первыми соударениями (орбиты $E$ и $E_1$), для следующего промежутка времени и для всех других промежутков; согласно предыдущему пункту, — это единственное условие, которое мы должны выполнить.

Вот как мы поступим, чтобы построить $E$ и $E_1$: рассмотрим движение трех тел; так как мы предполагаем, что $\mu=0$, то это движение является кеплеровым, и центральное тело можно рассматривать как неподвижное в $F$. Мы знаем полную живую силу системы. Две планеты $P$ и $P_1$ должны одновременно выйти из точки $Q_1$, чтобы одновременно прийти в точку $Q_2$. Когда $P$ и $P_1$ идут из $Q_1$ в $Q_2$, истинная долгота $P$ увеличивается на $(2m+1)\ \pi$, а истинная долгота $P_1$ увеличивается на $(2m_1+1)\ \pi$. Мы можем еще задать себе произвольным образом два целых $m$ и $m_1$. Тогда задача определена полностью; важно заметить, что наклон орбит в нее не входит; чтобы решить ее, можно предположить движение плоским. Задачу всегда можно решить; достаточно, в самом деле, приложить принцип Мопертюи, и действие по Мопертюи, существенно положительное, всегда имеет минимум.

Остается определить плоскости двух эллипсов. Мы знаем постоянные площадей; следовательно, мы знаем неизменную плоскость, которая проходит через прямую $FQ_1Q_2$; секториальная скорость системы представляется вектором, перпендикулярным к неизменной плоскости и известным нам по величине и по направлению; он равен геометрической сумме секториальных скоростей двух планет, изображаемых двумя векторами, которые нам известны по величине, поскольку они равны соответственно $mp$ и $m_1p$, где $m$ и $m_1$ — массы двух планет, а $p$ — общий параметр двух эллипсов $E$ и $E_1$. Следовательно, мы можем построить направления этих двух составляющих векторов, которые перпендикулярны соответственно к плоскости $E$ и к плоскости $E_1$.

Аналогично мы определим $E'$ и $E_1'$, $E''$ и $E_1''$, . . .

389. Предположим теперь, что все последовательные соударения имеют место в одной и той же точке $Q$. Период будет разделен на столько интервалов, сколько будет соударений; рассмотрим один из этих интервалов, в течение которого две планеты описывают два эллипса $E$ и $E_1$. Как и в предыдущем пункте, мы зададим себе постоянные живых сил и площадей, которые должны быть одними и теми же для всех интервалов, и речь идет о построении $E$ и $E_1$.

Предположим, что в течение рассматриваемого интервала планета $P$ совершила $m$, а планета $P_1$ — $m_1$ полных обращений; мы сможем задать себе произвольным образом два целых $m$ и $m_1$. Зная эти два целых числа, мы будем знать отношение больших осей, а так как мы знаем постоянную живых сил, то узнаем и сами большие оси.

С другой стороны, мы знаем постоянные площадей и, следовательно, вектор, который представляет секториальную скорость системы. Этот вектор может быть разложен бесконечным числом способов на два составляющих вектора, представляющих секториальные скорости $P$ и $P_1$.

Зададим это разложение произвольным образом. Зная составляющие векторы, узнаем плоскости двух эллипсов и их параметры. Остается узнать ориентацию каждого из эллипсов в его плоскости; мы определим ее так, чтобы эллипс проходил через точку $Q$.

В итоге мы смогли выбрать произвольно:

1) точку $Q$ и число интервалов;

2) для всех интервалов постоянную живых сил и постоянную площадей;

3) для *каждого* интервала целые $m$ и $m_1$ и разложение секториального вектора.

Однако чтобы задача была возможной, эти произвольные параметры должны удовлетворять некоторым неравенствам, которые я не буду писать.

**390.** Оставим в стороне эти исключительные случаи, когда все соударения имеют место на одной и той же прямой или в одной и той же точке, и перейдем к случаю плоского движения. Пусть $Q_1$, $Q_2$, . . . — точки, в которых происходят последовательные соударения; мы зададим себе произвольно постоянную живых сил и постоянную площадей, которые должны быть одними и теми же для всех интервалов.

Рассмотрим один из интервалов, например, тот, в течение которого две планеты идут из $Q_1$ в $Q_2$. Мы зададим произвольно величины двух радиусов-векторов $FQ_1$ и $FQ_2$, но не зададим ни угол между этими двумя радиусами-векторами, ни продолжительность интервала.

Мы знаем, что в этом интервале разность долготы двух планет увеличилась на $2m\pi$. Зафиксируем произвольно целое $m$.

Зная это целое число, две длины $FQ_1$ и $FQ_2$, две постоянные живых сил и площадей, мы имеем все, что необходимо для определения орбит $E$ и $E_1$. Это сводится снова к приложению принципа Мопертюи, но с определением действия по Гамильтону, как в п. 339, и выводом из него действия по Мопертюи при помощи процедуры пунктов 336 и 337. Так как, к сожалению, это действие по Мопертюи не всегда положительно, то мы не уверены, имеет ли оно всегда минимум.

В итоге мы можем выбрать произвольно:

1) число интервалов и длины $FQ_1$, $FQ_2$ . . .;

2) постоянные площадей и живых сил;

3) для *каждого* интервала целое $m$.

Все полученные таким образом орбиты с соударениями плоские; среди периодических орбит второго вида, которые сводятся к этим орбитам с соударениями при $\mu=0$, наверняка имеются плоские; возможно также, что среди них имеются такие, которые не являются плоскими при $\mu > 0$ и становятся плоскими только в пределе.

391. Посмотрим теперь, как можно доказать существование периодических решений второго вида, которые в пределе сводятся к орбитам с соударениями, только что нами построенным.

Рассмотрим одну из орбит с соударениями, и пусть $t_0$ — момент, предшествующий первому соударению, и $t_1$ — момент, заключенный между первым и вторым соударениями. Аналогично, пусть $t_2$ — момент, заключенный между вторым и третьим соударениями. Для определенности я предполагаю, что имеется три соударения, и называю $T$ периодом, так что в момент $t_0+T$ три тела находятся в том же относительном положении, что и в момент $t_0$.

Я беру за переменные большие оси, наклоны и эксцентриситеты и *разности* средних долгот, долгот перигелиев и узлов; всего будет одиннадцать переменных, так что орбиту мы будем рассматривать как периодическую, если три тела будут снова находиться в том же самом *относительном* положении в конце периода.

Пусть $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{11}^0$ — значения этих переменных в момент $t_0$ для рассматриваемой орбиты с соударениями и, следовательно, при $\mu=0$; пусть $x_i^1$ — значения этих переменных в момент $t_1$ для этой же орбиты с соударениями, $x_i^2$ — их значения в момент $t_2$ и $x_i^3$ — их значения в момент $t_0+T$. Мы будем иметь

$$x_i^3 = x_i^0 + 2m_i\pi,$$

где $m_i$ — целое, которое должно быть нулем для больших осей, эксцентриситетов и наклонов.

Рассмотрим теперь орбиту, мало отличающуюся от орбиты с соударениями, и дадим $\mu$ очень малое значение, но отличное от нуля. На этой новой орбите наши переменные примут значения $x_i^0+\beta_i^0$ в момент $t_0$, $x_i^1+\beta_i^1$ — в момент $t_1$, $x_i^2+\beta_i^2$ — в момент $t_2$ и, наконец, $x_i^3+\beta_i^3$ — в момент $t_0+T+\tau$.

Условием того, чтобы решение было периодическим с периодом $T+\tau$, будет

$$\beta_i^3 = \beta_i^0.$$

Для того чтобы соударение происходило между моментом $t_0$ и моментом $t_1$ при $\mu=0$, переменные $\beta_i^0$ должны удовлетворять двум условиям. Пусть

$$f_1(\beta_i^0) = f_2(\beta_i^0) = 0$$

— эти два условия.

Положим

$$f_1(\beta_i^0) = \gamma_1^0\mu, \qquad f_2(\beta_i^0) = \gamma_2^0\mu; \qquad \beta_k^0 = \gamma_k^0 \qquad (k = 3, 4, \ldots, 11).$$

Мы видим, что величины $\beta_i^0$ являются голоморфными функциями от $\gamma_i^0$ и $\mu$; применяя принципы главы III, *мы докажем, что то же самое относится и к величинам* $\beta_i^1$ [19].

Для того чтобы соударение произошло между моментами $t_1$ и $t_2$ (в предположении $\mu = 0$), необходимы два условия, которые я записываю в виде

$$f_1'(\beta_i^1) = f_2'(\beta_i^1) = 0. \tag{1}$$

Заменяя в соотношениях (1) величины $\beta_i^1$ их значениями в функции $\gamma_i^0$ и $\mu$ и полагая затем $\mu = 0$, я нахожу

$$\theta_1(\gamma_i^0) = \theta_2(\gamma_i^0) = 0.$$

Положим тогда

$$\theta_1(\gamma_i^0) = \gamma_1^1\mu, \quad \theta_2(\gamma_i^0) = \gamma_2^1\mu, \quad \beta_k^1 = \gamma_k^1 \quad (k = 3, \ldots, 11);$$

я вижу, что $\beta_i^1$ и $\beta_i^2$ — голоморфные функции от $\gamma_i^1$ и $\mu$, а также от $\gamma_i^0$ и, следовательно, от $\beta_i^0$.

Наконец, чтобы соударение произошло между моментами $t_2$ и $t_0 + T + \tau$, необходимы два условия, которые я записываю в виде

$$f_1''(\beta_i^2) = f_2''(\beta_i^2) = 0.$$

Заменяя в них величины $\beta_i^2$ их значениями в функции $\gamma_i^1$ и $\mu$ и полагая затем $\mu = 0$, приведем их к виду

$$\eta_1(\gamma_i^1) = \eta_2(\gamma_i^1) = 0.$$

Я полагаю

$$\eta_1(\gamma_i^1) = \gamma_1^2\mu, \quad \eta_2(\gamma_i^1) = \gamma_2^2\mu, \quad \beta_k^2 = \gamma_k^2 \quad (k = 3, \ldots, 11)$$

и опять вижу, что величины $\beta_i^0$, $\beta_i^1$, $\beta_i^2$ — голоморфные функции от $\gamma_i^2$ и $\mu$; следовательно, $\beta_i^3$ являются голоморфными функциями от $\gamma_i^2$, $\mu$ и $\tau$.

Следовательно, соотношения $\beta_i^3 = \beta_i^0$ представляют собой равенства, обе части которых голоморфны относительно $\gamma_i^2$, $\mu$ и $\tau$. Анализ этих уравнений выполняется так же, как в главе III. Он докажет существование решений второго вида.

Я не считаю необходимым вдаваться в бо́льшие подробности, ибо эти решения слишком отклоняются от истинных орбит небесных тел.

# Глава XXXIII

# ДВОЯКО-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

## Различные способы геометрического представления

**392.** Для изучения двояко-асимптотических решений мы ограничимся сейчас весьма частным случаем п. 9, когда масса возмущаемой планеты равна нулю, орбита возмущающей планеты круговая, наклоны равны нулю. Тогда задача трех тел допускает интеграл, хорошо известный под названием *интеграла Якоби*. Возвратимся к изучению этой задачи п. 9 в п. 299; мы должны будем различать несколько случаев. На стр. 145 мы видели, что должно существовать неравенство

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)>-h. \tag{1}$$

Затем мы различали случай, когда $m_1$ намного меньше $m_2$ и когда $-h$ достаточно велико (стр. 146), и мы видели, что кривая

$$V+\frac{n^2}{2}(\xi^2+\eta^2)=-h \tag{2}$$

распадается на три замкнутые ветви, которые мы назвали $C_1$, $C_2$ и $C_3$; следовательно, в силу неравенства (1) точка $\xi$, $\eta$ должна всегда оставаться внутри $C_1$, или всегда внутри $C_2$, или всегда вне $C_3$ ($\xi$, $\eta$ — прямоугольные координаты возмущаемой планеты относительно подвижных осей).

В дальнейшем мы предположим, что значение постоянной $-h$ достаточно велико, чтобы кривая (2) также распадалась на три замкнутые ветви и чтобы точка $\xi$, $\eta$ всегда оставалась внутри $C_2$. Таким образом, расстояние $r_2$ возмущаемой планеты от центрального тела может обратиться в нуль, но этого не произойдет с расстоянием $r_1$ между двумя планетами.

Это предположение соответствует следующему, которое мы сделали на стр. 178, а именно, что кривая $F=C$ имеет вид, представленный на рис. 9, и что точка $x_1$, $x_2$ остается на дуге $AB$.

Мы примем сейчас обозначения п. 313; введем, следовательно, кеплеровы переменные $L$, $G$, $l$, $g$. Но имеется два способа определения этих кеплеровых переменных. Мы могли бы, как в п. 9, отнести возмущаемое тело к центру тяжести возмущающего и центрального тел и рассмотреть оскулирующий эллипс, описанный вокруг этого центра тяжести. Однако предпочтительнее отнести возмущаемое тело к самому центральному телу и рассмотреть оскулирующий эллипс, описанный вокруг этого центрального тела.

Эти два метода одинаково законны; в самом деле, мы видели в п. 11, что можно отнести тело $B$ к телу $A$, а тело $C$ — к центру тяжести $A$ и $B$. Ясно, что можно было бы также отнести $C$ к $A$, а $B$ — к центру тяжести $A$ и $C$. Если $A$ представляет центральное тело, $B$ — возмущающее тело и $C$ — возмущаемое тело, то мы видим, что первым решением является то, которое было принято в п. 9, и что во втором решении, которое мы примем с этих пор, оба тела $B$ и $C$ отнесены к центральному телу, поскольку центр тяжести $A$ и $C$ лежит в $A$, так как масса $C$ равна нулю.

Тогда имеем

$$F' = R + G = \frac{\sqrt{1-\mu}}{2L^2} + G + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}\, r_1} + \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}(r_1^2 - 1 - r_2^2),$$

где $\mu$ и $1-\mu$ означают массы возмущающего тела и центрального тела, $r_1$ — расстояние между двумя планетами, 1 — постоянное расстояние возмущающего тела от центрального тела, $r_2$ — расстояние возмущаемого тела от центрального тела.

Как в п. 313, положим

$$x_1 = L - G, \qquad x_2 = L + G,$$
$$2y_1 = l - g + t, \qquad 2y_2 = l + g - t,$$
$$F' = F_0 + \mu F_1, \qquad F_0 = \frac{1}{2L^2} + G = \frac{2}{(x_1+x_2)^2} + \frac{x_2 - x_1}{2},$$
$$\mu F_1 = \frac{\sqrt{1-\mu} - 1}{2L^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}\, r_1} + \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}}(r_1^2 - 1 - r_2^2).$$

Мы видим — и это важное обстоятельство, на которое я хотел бы обратить внимание, — что в области, из которой точка $\xi$, $\eta$ не может выйти, функция $F_1$ всегда остается конечной.

Мы примем способ представления, указанный на стр. 178, и изобразим положение системы точкой пространства, координаты которой суть

$$X = \frac{\sqrt{x_2}\cos y_2}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}},$$
$$Y = \frac{\sqrt{x_2}\sin y_2}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}}, \quad Z = \frac{2\sqrt{x_1}\sin y_1}{\sqrt{x_2 + 4x_1 - 2\sqrt{x_1}\cos y_1}}.$$

Мы видим, что когда отношение $x_1/x_2$ постоянно, точка $X$, $Y$, $Z$ описывает тор; что этот тор сводится к оси $Z$, когда это отношение бесконечно, и к окружности $Z=0$, $X^2+Y^2=1$, когда это отношение равно нулю.

Производные $dF_1/dx_1$ и $dF_1/dx_2$ остаются конечными в рассматриваемой области, так же как сама функция $F_1$, кроме случаев, когда $x_1$ или $x_2$ очень мало; этого не будет для производных $dF_1/dy_1$ и $dF_1/dy_2$, которые могут обратиться в бесконечность при $r_2=0$. Отсюда вытекает, что

$$-n_1=\frac{dF'}{dx_1}, \quad -n_2=\frac{dF'}{dx_2}$$

очень мало отличаются от $dF_0/dx_1$ и $dF_0/dx_2$. На стр. 179 мы видели, что при сделанном нами предположении $dF_0/dx_2$ и, следовательно, $n_2$ не могут обратиться в нуль, потому что постоянная $C$ живых сил (постоянная $C$ п. 313 легко приводится к постоянной $h$ п. 299) больше 3/2.

Следовательно, мы будем иметь, если $x_2$ не очень мало́,

$$n_2>0,$$

ибо производная $dF_0/dx_2$ может обратиться в бесконечность только при $x_2=0$, откуда следует, что $y_2$ всегда возрастает, за исключением случая очень малых значений $x_2$.

Пусть $M$ есть такая точка $X$, $Y$, $Z$, что $y_2=0$; она будет находиться на полуплоскости

$$Y=0, \ X>0.$$

Когда $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ будут изменяться в соответствии с дифференциальными уравнениями, точка $X$, $Y$, $Z$ опишет некоторую траекторию; когда переменная $y_2$, которая монотонно возрастает, достигнет значения $2\pi$, точка $X$, $Y$, $Z$, придя в $M_1$, будет снова находиться на полуплоскости $Y=0$, $X>0$.

Тогда точка $M_1$ является последующей точки $M$, согласно определению п. 305. Так как $y_2$ монотонно возрастает, то всякая точка полуплоскости имеет последующую и предшествующую; исключение существует только при очень малом $x_2$, т. е. для точек полуплоскости, которые очень удалены от начала или очень близки к оси $Z$.

Мы будем иметь интегральный инвариант в смысле п. 305; попытаемся построить этот инвариант.

Уравнения, будучи каноническими, допускают интегральный инвариант

$$\int dx_1dx_2dy_1dy_2.$$

Положим $z=x_2/x_1$ и примем за новые переменные $F'$, $z$, $y_1$, $y_2$; тогда инвариант примет вид

$$-\int\frac{x_1^2dF'dzdy_1dy_2}{x_1\frac{dF'}{dx_1}+x_2\frac{dF'}{dx_2}}=\int\frac{x_1^2dF'dzdy_1dy_2}{x_1n_1+x_2n_2}.$$

Из этого четырехкратного инварианта мы выведем (в силу существования интеграла $F'=C$) тройной инвариант

$$\int\frac{x_1^2dzdy_1dy_2}{x_1n_1+x_2n_2}.$$

В этом тройном инварианте $x_1$, $x_2$, $n_1=-dF'/dx_1$, $n_2=-dF'/dx_2$ предполагаются замененными функциями от $z$, $y_1$, $y_2$ при помощи уравнений

$$x_2=x_1z, \qquad F'=C.$$

Примем теперь за переменные $X$, $Y$, $Z$ и назовем $\Delta$ якобиан от $X$, $Y$, $Z$ относительно $z$, $y_1$, $y_2$; тогда инвариант примет вид

$$\int\frac{x_1^2 dX dY dZ}{(x_1n_1+x_2n_2)\,\Delta}.$$

Пусть

$$R=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+4}-2\cos y_1}, \quad Z=\frac{2\sin y_1}{\sqrt{z+4}-2\cos y_1},$$

откуда

$$X=R\cos y_2, \qquad Y=R\sin y_2.$$

Положим еще

$$D=[(R-1)^2+Z^2]\,[(R+1)^2+Z^2];$$

простые вычисления дают

$$\Delta=\frac{RD}{8\sqrt{z(z+4)}}.$$

Следовательно, наш инвариант запишется в виде

$$\int\frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}\,dX dY dZ}{(x_1n_1+x_2n_2)\,RD}.$$

Принципы п. 305 позволяют нам вывести из него следующий инвариант в смысле п. 305:

$$\int\frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}}{D}\,\frac{n_2}{x_1n_1+x_2n_2}\,dRdZ.$$

Здесь $n_2$ и $R$ играют ту же роль, которую играли $\Omega$ и $\rho$ в анализе, проведенном в п. 305.

Количество под знаком интеграла существенно положительно, кроме случая очень малого $x_2$, т. е. всюду, кроме точек полуплоскости, очень удаленных от начала или очень близких к оси $Z$.

**393.** Это обстоятельство (что точка не будет иметь последующей, если она слишком удалена от начала или слишком близка к оси $Z$) могло бы причинить некоторое затруднение, и может быть полезно преодолеть эту трудность каким-нибудь приемом.

Мы могли бы воспользоваться сначала замечанием п. 311 и заменить полуплоскость криволинейной односвязной областью $S$. Вот как мы выбрали бы эту криволинейную область.

Если $x_2$ очень мало́, эксцентриситет очень мал и две планеты обращаются в противоположных направлениях; принципы п. 40 применимы и позволяют утверждать существование периодического решения первого сорта, которое будет, очевидно, удовлетворять следующим условиям: количества

$$\sqrt{x_2}\cos y_2,\quad \sqrt{x_2}\sin y_2,\quad x_1,\quad \cos y_1,\quad \sin y_1$$

являются периодическими функциями времени $t$; кроме того, эти функции зависят от $\mu$ и постоянной живых сил $C$; они разложимы по степеням $\mu$; период $T$ также зависит от $\mu$ и от $C$; угол $y_1$ увеличивается на $2\pi$, когда $t$ увеличивается на период. Наконец, $\sqrt{x_2}\cos y_2$ и $\sqrt{x_2}\sin y_2$ делятся на $\mu$, так что при $\mu=0$ мы имеем $x_2=0$.

При нашем способе изображения это периодическое решение, которое я называю $\sigma$, изображается замкнутой кривой $K$; так как $x_2$ очень мало́, когда $\mu$ очень мало́, то эта кривая очень мало отклоняется от оси $Z$; я хочу сказать, что она отклоняется от нее столь же мало, как окружность очень большого радиуса мало отклоняется от прямой. Всякая точка кривой $K$ либо очень удалена от начала, либо очень близка к оси $Z$.

При этих условиях криволинейная область $S$ имела бы периметром кривую $K$, она мало отклонялась бы от полуплоскости $Y=0$, $X>0$, за исключением непосредственной окрестности кривой $K$. Было бы легко при этом доопределить ее таким образом, чтобы всякая точка этой области имела последующую в ней самой. Для этого было бы достаточно, чтобы, если я назову $(T)$ какую-нибудь траекторию, т. е. одну из кривых, определенных при нашем способе изображения дифференциальными уравнениями, было бы достаточно, говорю я, чтобы поверхность $S$ не касалась ни в одной точке ни одной из траекторий $(T)$.

Однако имеется другое средство, которое в сущности не отличается от первого. Легко сообразить, что аналогичная трудность уже встречалась в главе XII; следовательно, мы приходим к необходимости сделать замену переменных, аналогичную замене п. 145.

Положим сначала

$$\xi_2=\sqrt{2x_2}\cos y_2,\qquad \eta_2=\sqrt{2x_2}\sin y_2,$$

затем

$$S=\xi_2'\eta_2+x_1'y_1+\mu S_1,$$

где $S_1$ — функция от $\xi_2'$, $\eta_2$, $x_1'$, $y_1$. Пусть далее

$$\left.\begin{aligned} \xi_2&=\frac{dS}{d\eta_2}=\xi_2'+\mu\frac{dS_1}{d\eta_2}; &\qquad \eta_2'&=\frac{dS}{d\xi_2'}=\eta_2+\mu\frac{dS_1}{d\xi_2'},\\ x_1&=\frac{dS}{dy_1}=x_1'+\mu\frac{dS_1}{dy_1}; &\qquad y_1'&=\frac{dS}{dx_1'}=y_1+\mu\frac{dS_1}{dx_1'} \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

и, наконец,

$$\xi_2' = \sqrt{2x_2'}\cos y_2', \qquad \eta_2' = \sqrt{2x_2'}\sin y_2'.$$

Сначала я замечаю, что каноническая форма уравнений не изменится, когда я перейду от переменных $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ к $x_1$, $y_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, затем к $x_1'$, $y_1'$, $\xi_2'$, $\eta_2'$, затем, наконец, к $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, $y_2'$.

Мне остается выбрать функцию $S_1$.

Я знаю, что функция $F'$ в рассматриваемой области является голоморфной функцией от $\sqrt{2x_1}\cos y_1$, $\sqrt{2x_1}\sin y_1$, $\sqrt{2x_2}\cos y_2$, $\sqrt{2x_2}\sin y_2$. Я хочу, чтобы она осталась голоморфной функцией от новых переменных

$$\sqrt{2x_i'}\cos y_i', \quad \sqrt{2x_i'}\sin y_i'.$$

Для этого нужно потребовать, чтобы старые переменные $\sqrt{2x_i}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y_i$ были голоморфными функциями от новых переменных $\sqrt{2x_i'}\,{}^{\cos}_{\sin}\,y_i'$ и от $\mu$.

В свою очередь для этого достаточно предположить, что $S_1$ — голоморфная функция от

$$\sqrt{2x_1'}\cos y_1, \qquad \sqrt{2x_1'}\sin y_1, \qquad \xi_2', \ \eta_2, \ \mu$$

и делится на $x_1'$.

Затем потребуем, чтобы для нашего периодического решения $\sigma$ было

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \qquad x_1' = x_1^0 = \text{const}.$$

Итак, пусть

$$\xi_2 = A, \qquad \eta_2 = B, \qquad x_1 = C$$

— уравнения для периодического решения; $A$, $B$, $C$ — функции от $y_1$, периодические с периодом $2\pi$ и разложимые по степеням $\mu$.

Тогда $C - \frac{dA}{dy_1}B$ также будет периодической функцией от $y_1$; пусть $x_1^0$ — ее среднее значение; мы можем найти другую такую периодическую функцию $\alpha$, что

$$C - \frac{dA}{dy_1}B = x_1^0 + \frac{d\alpha}{dy_1}.$$

В таком случае мы должны будем только предположить, что при $x_1' = x_1^0$ функция $\mu S_1$ сводится к

$$\alpha - B\xi_2' + A\eta^2. \tag{2}$$

Этого будет достаточно, чтобы уравнения для периодического решения сводились в новых переменных к

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \quad x_1' = x_1^0.$$

Очевидно, можно найти функцию $\mu S_1$, которая будет разложимой по степеням $\sqrt{2x_1'}{}^{\cos}_{\sin} y_1$ и делиться на $x_1'$ и которая в то же время сводится к выражению (2) при $x_1' = x_1^0$.

Примем новые переменные $x_1'$, $y_1'$, $x_2'$, $y_2'$.

Функция $F'$, которая была голоморфной относительно $\sqrt{2x_1}{}^{\cos}_{\sin} y_1$, $\sqrt{2x_2}{}^{\cos}_{\sin} y_2$, будет также голоморфной относительно $\sqrt{2x_1'}{}^{\cos}_{\sin} y_1'$, $\sqrt{2x_2'}{}^{\cos}_{\sin} y_2'$. С другой стороны, так как одним из решений дифференциальных уравнений является

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \quad x_1' = x_1^0,$$

то мы должны иметь при $\xi_2' = \eta_2' = 0$, $x_1' = x_1^0$ следующие соотношения:

$$\frac{dF'}{d\xi_2'} = \frac{dF'}{d\eta_2'} = \frac{dF'}{dy_1'} = 0. \tag{3}$$

При малых значениях $\xi_2'$ и $\eta_2'$ функция $F'$ разложима по степеням $\xi_2'$ и $\eta_2'$. В силу соотношений (3), при $x_1' = x_1^0$ члены первой степени этого разложения исчезают, а члены нулевой степени сводятся к постоянной, не зависящей от $\mu$.

Эта постоянная не может, кроме того, быть не чем иным, как постоянной живых сил $C$, так что условия $\xi_2' = \eta_2' = 0$, $x_1' = x_1^0$ можно заменить следующими:

$$\xi_2' = \eta_2' = 0, \quad F' = C.$$

Таким образом, при $F' = C$ члены первой степени относительно $\xi_2'$ и $\eta_2'$ в разложении $F'$ исчезают. Трудность проистекала от того, что $F'$ и $F_1$ содержали члены первой степени относительно

$$\xi_2 = \sqrt{2x_2} \cos y_2, \quad \eta_2 = \sqrt{2x_2} \sin y_2,$$

что, следовательно, производная $dF_1/dx_2$, имея члены с $1/\sqrt{x_2}$, обращалась в бесконечность при $x_2 = 0$.

Здесь эта трудность более не существует; мы не имеем более членов первой степени относительно $\xi_2'$, $\eta_2'$; следовательно, производная $dF_1/dx_2'$ остается конечной даже при $x_2' = 0$, и производная $dF'/dx_2'$, которая очень мало отличается от $dF_0/dx_2'$, всегда сохраняет один и тот же знак. Следовательно, с нашими новыми переменными, которые, кроме того, отличаются от старых только на очень малые величины порядка $\mu$, мы всегда будем иметь

$$\frac{dx_2'}{dt} > 0.$$

Примем с нашими новыми переменными условие, аналогичное условию предыдущего параграфа, и представим положение системы точкой пространства, координаты которой есть

$$X=\frac{\sqrt{x_2'}\cos y_2'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}},\quad Y=\frac{\sqrt{x_2'}\sin y_2'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}},$$

$$Z=\frac{2\sqrt{x_1'}\sin y_1'}{\sqrt{x_2'+4x_1'-2\sqrt{x_1'}\cos y_1'}}.$$

Все, что мы говорили, сохранит силу; только, так как $dx_2'/dt$ никогда не может обратиться в нуль, *всякая точка полуплоскости*, без исключения, будет иметь последующую.

Теперь я говорю, что интегральный инвариант всегда положителен. Можно было бы сомневаться здесь только относительно знаменателя, который с теми же переменными был $x_1n_1+x_2n_2$ и теперь равен

$$-\left(x_1'\frac{dF'}{dx_1'}+x_2'\frac{dF'}{dx_2'}\right),$$

что, рассматривая $F'$ как функцию четырех переменных

$$\xi_i'=\sqrt{2x_i'}\cos y_i',\qquad \eta_i'=\sqrt{2x_i'}\sin y_i',$$

можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}\left(\xi_1'\frac{dF'}{d\xi_1'}+\eta_1'\frac{dF'}{d\eta_1'}+\xi_2'\frac{dF'}{d\xi_2'}+\eta_2'\frac{dF'}{d\eta_2'}\right).$$

В этой форме легко видеть, что знаменатель является голоморфным относительно величин $\xi'$, $\eta'$ и $\mu$. Но при $\mu=0$ функция $F'$ сводится к

$$\frac{2}{(x_1'+x_2')^2}+\frac{x_2'-x_1'}{2},$$

и легко проверить, что знаменатель всегда положителен. Следовательно, он положителен также и для малых значений $\mu$.

**394.** Итак, в последующем мы примем переменные, определенные в предыдущем пункте. При этом отбросим штрихи, ставшие ненужными, и будем писать $F$, $x_i$ и $y_i$ вместо $F'$, $x_i'$ и $y_i'$.

Тогда мы имеем интегральный инвариант (в смысле п. 305)

$$J=\int\frac{8x_1^2\sqrt{z(z+4)}}{D}\,\frac{\dfrac{dF}{dx_2}}{x_1\dfrac{dF}{dx_1}+x_2\dfrac{dF}{dx_2}}\,dXdZ,$$

где

$$D=[(X-1)^2+Z^2]\,[(X+1)^2+Z^2].$$

Сначала я замечу, что этот интегральный инвариант, который всегда положителен, остается конечным, когда он распространяется на всю полуплоскость.

В самом деле, если $\sqrt{(X-1)^2+Z^2}$ является бесконечно малой величиной первого порядка, числитель $x_1^2\sqrt{z(z+4)}$ является бесконечно малой второго порядка, и то же самое будет верно относительно $D$. Если $\sqrt{(X-1)^2+Z^2}$ является бесконечно большой величиной первого порядка, числитель остается конечным, тогда как $D$ является бесконечно большой величиной четвертого порядка. Все остальные величины остаются конечными.

Я назову $J_0$ значение инварианта $J$, распространенного на всю полуплоскость.

Периодические решения и криволинейные траектории, которые их представляют, характеризуются тем, что эти кривые пересекают полуплоскость в точках, число последовательных последующих которых конечно; сошлемся, например, на п. 312 и, в частности, на рис. 7 (стр. 175).

На этом рисунке замкнутая траектория, которая представляет периодическое решение, пересекает полуплоскость в пяти точках: $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, являющихся последующими друг друга. Для краткости я назову подобную систему *системой периодических точек*, или *периодической системой*.

Каждому неустойчивому периодическому решению соответствуют две системы асимптотических решений; эти решения представлены траекториями (в смысле п. 312), и множество этих траекторий образует то, что мы назвали асимптотическими поверхностями. Пересечение асимптотической поверхности с полуплоскостью назовем *асимптотической кривой*. Так же, как мы видели на рис. 7, в каждой точке $M_i$ неустойчивой периодической системы сходятся четыре ветви асимптотических кривых ($MA$, $MB$, $MP$, $MQ$), которые попарно лежат на продолжении друг друга.

Имеется бесконечное множество асимптотических кривых, ибо имеется бесконечное множество неустойчивых периодических решений и, следовательно, систем неустойчивых периодических точек, даже если мы ограничимся решениями первого рода, определенными в пунктах 42 и 44.

Будем различать асимптотические кривые первого и второго семейства в зависимости от того, будет ли соответствующий характеристический показатель положительным или отрицательным; асимптотические кривые первого семейства характеризуются следующим свойством: $n$-я предшествующая какой-либо из их точек очень близка к периодической точке, если $n$ очень велико; для кривых второго семейства очень близкой к периодической точке будет $n$-я последующая, а не $n$-я предшествующая.

На рис. 7 кривые $MA$ и $MP$ принадлежат к первому семейству, а кривые $MB$ и $MQ$ — ко второму.

Можно рассматривать эти асимптотические кривые как инвариантные кривые в смысле главы XXVII, если принять одно из двух следующих условий. Вернемся к рис. 7; мы видим кривую $M_0A_0$, имеющую последовательные последующие $M_1A_1$, $M_2A_2$, $M_3A_3$, $M_4A_4$, $M_0A_5$. Тогда, если мы условимся рассматривать пять кривых $M_0A_0$, $M_1A_1$, $M_2A_2$, $M_3A_3$, $M_4A_4$, то это *множество*, очевидно, составит инвариантную кривую. Или же еще, если мы условимся рассматривать последующие только кратные пяти и назвать $p$-й последующей ту, которую до сих пор называли $5p$-й последующей, то ясно, что кривая $M_0A_0A_5$, рассматриваемая сама по себе, будет инвариантной кривой.

*Две кривые одного и того же семейства не могут пересечься.* В самом деле, либо эти две кривые будут сходиться в одной и той же периодической точке, например в точке $M_0$; тогда эти две кривые совпадут (поскольку через $M_0$ проходит в качестве кривой первого семейства только $M_0A_0$ вместе с ее продолжением $M_0P_0$), тогда задача сводится к тому, чтобы узнать, может ли асимптотическая кривая иметь двойную точку; этот вопрос был решен отрицательным образом (п. 309, стр. 168).

Либо эти две кривые будут сходиться в двух периодических точках одной и той же периодической системы, например в двух точках $M_0$ и $M_1$. Если бы две кривые, которыми будут тогда $M_0A_0$ и $M_1A_1$, имели общую точку $Q$, то $5p$-я предшествующая точки $Q$ должна была бы при очень большом $p$ одновременно быть очень близкой к $M_0$, потому что $Q$ принадлежит $M_0A_0$, и очень близкой к $M_1$, потому что $Q$ принадлежит $M_1A_1$. Это опять абсурдно.

Либо, наконец, две кривые сходятся в двух точках, принадлежащих двум различным периодическим системам. Предположим, например, что две кривые принадлежат первому семейству и что $Q$ — их точка пересечения. $n$-я предшествующая точки $Q$ при очень большом $n$ должна одновременно быть очень близкой к одной из точек первой периодической системы и к одной из точек второй системы; это опять невозможно.

Напротив, *нет оснований, чтобы две асимптотические кривые различных семейств не пересекались.*

Пусть $S$ и $S'$ — два неустойчивых периодических решения; $T$ и $T'$ — соответствующие замкнутые траектории, $P$ и $P'$ — соответствующие периодические системы.

Пусть $\Sigma$ и $\Sigma'$ — две асимптотические поверхности, проходящие соответственно через $T$ и $T'$ и пересекающие полуплоскость по двум асимптотическим кривым $C$ и $C'$, одна из которых первого, а другая — второго семейства.

Что произойдет, если $C$ и $C'$ имеют общую точку $Q$? Две поверхности $\Sigma$ и $\Sigma'$ пересекутся по траектории $\tau$, которая будет соответствовать некоторому достопримечательному решению $\sigma$. Траектория $\tau$ будет принадлежать двум асимптотическим поверхностям, так что при $t=-\infty$ она приблизится к $T$, а при $t=+\infty$ она приблизится к $T'$. При очень большом $n$ $n$-я предшествующая точки $Q$ будет очень близкой к одной из точек системы $P$, а ее $n$-я последующая будет очень близкой к одной из точек системы $P'$.

Следовательно, решение $\sigma$ является *двояко-асимптотическим.*

Все эти следствия не имеют ничего абсурдного.

Но необходимо различать два случая. Либо два решения $S$ и $S'$ совпадают, так что траектория $\tau$, сначала очень близкая к траектории $T=T'$, значительно удаляется от нее, а затем снова приближается к *этой же самой* траектории $T=T'$. Тогда я смогу сказать, что решение $\sigma$ является *гомоклинным.* Либо $S$ отличается от $S'$, а $T$ — от $T'$; тогда я буду говорить, что $\sigma$ является *гетероклинным.*

Существование гомоклинных решений скоро будет доказано; существование гетероклинных решений остается сомнительным, по крайней мере, в случае задачи трех тел.

## Гомоклинные решения

395. В конце п. 312 мы видели, что дуги $A_0A_5$ и $B_0B_5$ пересекаются. Но дуга $A_0A_5$ принадлежит кривой $M_0A_0A_5$, которая является асимптотической кривой первого семейства, а дуга $B_0B_5$ составляет часть кривой $M_3B_0$, принадлежащей второму семейству.

Рассуждение является общим, и мы должны заключить, что две асимптотические поверхности, которые проходят через одну и ту же замкнутую траекторию, всегда должны пересекаться вне этой траектории. Асимптотические кривые первого семейства, которые сходятся в точках периодической системы, всегда пересекают кривые второго семейства, которые сходятся в этих же самых точках.

Другими словами, на каждой асимптотической поверхности имеется, по крайней мере, одно гомоклинное двояко-асимптотическое решение; мы скоро увидим, что их имеется бесконечное множество; но мы сейчас же увидим, что их имеется, по меньшей мере, два.

Для этого вернемся к рисунку на стр. 175. Согласно рассуждениям пунктов 308 и 312, интегральный инвариант $J$, распространенный на четырехугольник $A_0B_0A_5B_5$, должен быть нулем; именно по этой причине этот криволинейный четырехугольник не может быть выпуклым, и противоположные стороны $A_0A_5$ и $B_0B_5$ должны пересечься. Пусть $Q$ — одна из точек пересечения этих двух дуг. Заметим, что точка $A_0$ была выбрана произвольно на асимптотической кривой $MA_0$; если мы возьмем точку $A_0$ в самой точке $Q$, то точка $A_0$ будет находиться также на кривой $M_3B_0$ и совпадет с точкой $B_0$. Если две точки $A_0$ и $B_0$ совпадут, то это же произойдет и с их пятыми последующими $A_5$ и $B_5$.

Следовательно, четырехугольник $A_0B_0A_5B_5$ сведется к фигуре, образованной двумя дугами кривой, имеющими одни и те же концы. Эта фигура не может быть выпуклой, поскольку интегральный инвариант, распространенный на четырехугольник, должен быть нулем. Следовательно, необходимо, чтобы две дуги $A_0A_5$ и $B_0B_5$ имели еще другие общие точки, кроме их концов.

Таким образом, будут, по крайней мере, две различные точки пересечения (если не считать различными точку и какую-нибудь из ее последующих).

Следовательно, всегда будет, по меньшей мере, два двояко-асимптотических решения.

Итак, предположим, что точки $A_0$ и $B_0$ совпадают, и продолжим дуги $A_0A_5$ и $B_0B_5$ до их первой точки встречи в $C_0$. Мы определили таким образом область, которая на этот раз будет выпуклой (с точки зрения Analysis situs) и будет ограниченной двумя дугами, составляющими часть соответственно двух дуг $A_0A_5$ и $B_0B_5$ и имеющими одни и те же концы, а именно: $A_0=B_0$ и $C_0$.

Пусть $\alpha_0$ — эта область, а $\alpha_n$ — ее $n$-я последующая; очевидно, область $\alpha_n$, как и $\alpha_0$, будет выпуклой и ограниченной двумя дугами кривой, одна из которых первого, а другая — второго семейства.

Интеграл $J$ будет иметь одно и то же значение для $\alpha_0$ и $\alpha_n$. Пусть $j$ — это значение. Так как значение $J_0$ интегрального инварианта для всей полуплоскости конечно, то мы увидим, рассуждая, как в п. 291, что если

$$n > p\frac{J_0}{j},$$

то область $\alpha_0$ будет иметь общую часть, по крайней мере, с $p$ из областей

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

а так как $n$ можно взять сколь угодно большим, то я могу сформулировать следующий результат:

*Среди областей $\alpha_n$ имеется бесконечное множество таких, которые имеют общую часть с $\alpha_0$.*

Как может случиться, что $\alpha_0$ имеет общую часть с $\alpha_n$?

Область $\alpha_0$ не может быть целиком внутри $\alpha_n$, поскольку интегральный инвариант имеет одно и то же значение для этих двух областей. По той же причине область $\alpha_n$ не может быть целиком внутри $\alpha_0$. Эти две области не могут также совпасть; если бы, в самом деле, часть асимптотической кривой (например, первого семейства) совпала со своей $n$-й последующей, то это же произошло бы также с ее $p$-й предшествующей, сколь бы велико ни было $p$; но если $p$ велико, то эта $p$-я предшествующая очень близка к периодическим точкам, и достаточно принципов главы VII, чтобы показать, что такое совпадение не имеет места.

Следовательно, необходимо предположить, что периметр области $\alpha_0$ пересекает периметр $\alpha_n$; но периметр $\alpha_0$ состоит из дуги $A_0H_0C_0$, принадлежащей кривой $M_0A_0A_5$ первого семейства, и дуги

$$B_0K_0C_0 = A_0K_0C_0,$$

принадлежащей кривой $M_3B_5B_0$ второго семейства.

Аналогично, периметр $\alpha_n$ будет состоять из дуги $A_nH_nC_n$ — $n$-й последующей дуги $A_0H_0C_0$, которая будет принадлежать той же асимптотической кривой, что и $A_0H_0C_0$, т. е. кривой первого семейства, и дуги $A_nK_nC_n$ — $n$-й последующей $A_0K_0C_0$, которая будет принадлежать той же асимптотической кривой, что и $A_0K_0C_0$, т. е. кривой второго семейства.

Так как две кривые одного и того же семейства не могут пересекаться, то необходимо, чтобы дуга $A_0H_0C_0$ пересекала $A_nK_nC_n$, либо чтобы $A_0K_0C_0$ пересекала $A_nH_nC_n$. Но если две дуги $A_0K_0C_0$ и $A_nH_nC_n$ пересекаются, то их $n$-е предшествующие $A_{-n}K_{-n}C_{-n}$ и $A_0H_0C_0$ также будут пересекаться. Следовательно, необходимо, чтобы дуга $A_0H_0C_0$ пересекала $n$-ю последующую или $n$-ю предшествующую дуги $A_0K_0C_0$.

Но дуга $A_0K_0C_0$, все ее предшествующие и все ее последующие принадлежат одной и той же инвариантной кривой второго семейства, представленной на рисунке на стр. 175 совокупностью кривых $M_3B_0$, $M_1B_3$, $M_4B_1$, $M_2B_4$, $M_0B_2$.

*Следовательно, дуга $A_0H_0C_0$ пересекается бесконечно много раз этой совокупностью кривых.*

Две поверхности $\Sigma$ и $\Sigma'$, которые проходят через замкнутую траекторию $T$, имеют, следовательно, бесконечное множество других кривых пересечения.

*Итак, на поверхности $\Sigma$ имеется бесконечное множество гомоклинных двояко-асимптотических решений*, что и требовалось доказать.

**396.** Пусть $A_0H_0C_0$ — какая-нибудь дуга асимптотической кривой первого семейства, и предположим, что эта дуга пересекает асимптотическую кривую второго семейства в двух крайних точках $A_0$ и $C_0$. Я говорю, что между точками $A_0$ и $C_0$ всегда будут другие точки пересечения с кривой второго семейства.

В самом деле, пусть $A_0K_0C_0$ — дуга кривой второго семейства, соединяющая точки $A_0$ и $C_0$.

Тогда либо две дуги $A_0H_0C_0$ и $A_0K_0C_0$ имеют общие точки, отличные от их концов, и теорема окажется доказанной.

Либо же эти две дуги не имеют другой общей точки, кроме их концов $A_0$ и $C_0$; тогда две дуги ограничивают область $\alpha_0$, аналогичную той, которую мы рассмотрели в конце предыдущего параграфа; приложимы те же самые рассуждения, и мы можем заключить, что дуга $A_0H_0C_0$ пересекает бесконечно много раз кривую второго семейства.

Следовательно, на асимптотической кривой первого семейства между какими-нибудь двумя точками пересечения с кривой второго семейства имеется бесконечное множество других точек пересечения.

*На любой асимптотической поверхности между двумя любыми двояко-асимптотическими решениями имеется бесконечное множество других двояко-асимптотических решений.*

Мы не имеем еще права заключить, что двояко-асимптотические решения всюду плотны (überalldicht) на асимптотической поверхности, но это кажется вероятным.

Точки пересечения двух асимптотических кривых можно разделить на две категории. В самом деле, асимптотическую кривую можно пробегать в двух противоположных направлениях; мы будем рассматривать направление как положительное, если идем от точки к ее последующей. Пусть тогда $A$ — точка пересечения двух кривых, $BAB'$, $CAC'$ — две дуги асимптотических кривых, пересекающиеся в $A$. Предположим, что $BAB'$ принадлежит первому, а $CAC'$ — второму семейству и что, обходя кривые в положительном направлении, мы идем из $A$ в $B'$ и из $A$ в $C'$. В зависимости от того, будет ли направление $AB'$ справа или слева от $AC'$, точка пересечения $A$ будет первой или второй категории.

Пусть при этих условиях $A_0H_0C_0$ — дуга первого семейства, пересекаемая в $A_0$ и $C_0$ дугой $A_0K_0C_0$ второго семейства. Какой бы категории ни принадлежали $A_0$ и $C_0$, совокупность двух дуг $A_0H_0C_0K_0A_0$ образует замкнутую кривую. Если две дуги не имеют другой общей точки, кроме их концов, то эта замкнутая кривая не имеет двойной точки и ограничивает область $\alpha_0$. Если бы две дуги имели другие общие точки, кроме их концов, и если бы, например, две дуги $A_0H_0D_0H'_0C_0$ и $A_0K_0D_0K'_0C_0$ пересекались в $D_0$, то мы заменили бы точки $A_0$ и $C_0$ точками $A_0$ и $D_0$, расположенными между $A_0$ и $C_0$, а дуги $A_0H_0C_0$, $A_0K_0C_0$ двумя дугами $A_0H_0D_0$ и $A_0K_0D_0$, и таким образом продолжали бы до тех пор, пока не пришли бы к двум дугам, не имеющим другой общей точки, кроме их концов.

Итак, предположим, что две дуги ограничивают область $\alpha_0$. Согласно тому, что мы только что видели, дуга $A_0H_0C_0$ должна пересечь бесконечно много раз асимптотическую кривую второго семейства; следовательно, необходимо, чтобы кривая второго семейства проникала бесконечно много раз внутрь области $\alpha_0$, и она должна выйти из нее бесконечно много раз. Она может войти в нее или выйти из нее, только пересекая $A_0H_0C_0$, ибо она не может пересечь дугу $A_0K_0C_0$. составляющую часть кривой также второго семейства. Но ясно, что точки, в которых она проникает внутрь области, и точки, через которые она выходит из нее, не будут принадлежать одной и той же категории.

*Итак, между любыми двумя точками пересечения двух кривых имеется бесконечное множество других точек, принадлежащих первой категории, и бесконечное множество других точек, принадлежащих второй категории.*

Обозначим через (1), (2), (3), . . . последовательные точки встречи кривой второго семейства и дуги $A_0H_0C_0$, отсчитанные в порядке, в котором мы встречаем их, следуя по кривой второго семейства в положительном направлении. Они будут попеременно принадлежать двум категориям. Изучим порядок, в котором мы встречаем их, следуя по дуге $A_0H_0C_0$.

Этот порядок не может быть совершенно произвольным, и некоторые последовательности исключаются, например следующие:

$$\begin{array}{cccc} (2m), & (2p), & (2m+1), & (2p+1), \\ (2m+1), & (2p), & (2m), & (2p+1), \\ (2m) & (2p+1), & (2m+1), & (2p), \\ (2m), & (2p), & (2m-1), & (2p-1), \end{array}$$

так же, как те же последовательности, взятые в обратном порядке, и аналогичные последовательности, в которых $2m+1$ и $2p+1$ заменены на $2m-1$ и $2p-1$.

**397**. Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся.

Остаются возможными различные предположения.

1. Можно предположить, что множество точек двух асимптотических кривых $E_0$, или, скорее, множество точек, в окрестности которых находится бесконечное число точек, принадлежащих $E_0$, т. е. множество $E_0'$ — «производное от $E_0$», можно предположить, говорю я, что множество $E_0'$ занимает всю полуплоскость. Тогда следовало бы заключить о неустойчивости солнечной системы.

2. Можно предположить, что множество $E_0'$ имеет конечную площадь и занимает конечную область полуплоскости, но не занимает ее целиком; либо, что часть этой полуплоскости остается вне петель нашей сети, либо, что внутри одной из этих петель остается «пробел». Пусть, например, $U_0$ — одна из этих петель, ограниченная двумя или несколькими дугами асимптотических кривых двух семейств. Построим их последовательные последующие и применим к ним методику п. 291. Образуем, как на стр. 132,

$$U_\alpha,\ U_0',\ U_\beta',\ U_0'',\ U_\gamma'',\ \ldots,\ E.$$

Область $E$, если она конечна, будет представлять один из пробелов, о которых мы только что говорили. Кажется, что можно было бы применить к ней рассуждение п. 294 и заключить, что эта область должна совпасть с одной из ее последующих. Но множество $E$ может состоять из области конечной площади и множества, расположенного вне этой области, общая площадь которого равна нулю. Все, что мы можем заключить согласно изложенному на стр. 138, состоит в том, что $E_\lambda$ ($\lambda$-я последующая $E$) содержит $E$ и что множество $E_\lambda - E$ обладает нулевой площадью. Аналогично, множества $E - E_{-\lambda}$, $E_{-\lambda} - E_{-2\lambda}$, ..., $E_{-n\lambda} - E_{-(n+1)\lambda}$ будут иметь нулевые площади (мы понимаем под площадью множества значение интеграла $J$, распространенного на это множество). А с другой стороны, $E_{-(n+1)\lambda}$ является частью $E_{-n\lambda}$. Когда $n$ неограниченно возрастает, $E_{-n\lambda}$ стремится к множеству $\varepsilon$, которое содержит все точки, составляющие одновременно часть всех множеств $E_{-n\lambda}$. Площадь этого множества $\varepsilon$ конечна и равна площади $E$. Наконец, $\varepsilon$ совпадает со своей $\lambda$-й последующей.

3. Наконец, можно предположить, что множество $E'_0$ имеет нулевую площадь. Тогда это множество будет аналогичным «совершенным множествам, которые не плотны ни в одном интервале» [20].

**398.** Мы могли бы представить различные точки пересечения двух кривых следующим образом. Пусть $x$ — переменная, которая изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, когда мы следуем по асимптотической кривой первого семейства $M_0A_0$ от точки $M_0$ до бесконечности, и увеличивается на единицу, когда мы переходим от точки к ее пятой последующей, например от $A_0$ к $A_5$ (предполагая для определенности, что мы находимся в условиях рисунка на стр. 175). Пусть $y$ — другая переменная, которая изменяется от $+\infty$ до $-\infty$, когда мы следуем по кривой второго семейства $M_3B_5$ от точки $M_3$ до бесконечности, и которая увеличивается на единицу, когда мы переходим от точки к ее пятой последующей.

Различные точки пересечения двух кривых характеризуются парой значений $x$ и $y$ и каждая из них может быть представлена точкой на плоскости, прямоугольные координаты которой суть $x$ и $y$.

Таким образом, мы будем иметь на плоскости бесконечное число точек, представляющих двояко-асимптотические решения; из каждой из этих точек можно получить бесконечное число других; в самом деле, если точка $x$, $y$ соответствует пересечению двух кривых, то это же будет справедливо для точек

$$x+1,\ y+1;\ x+2,\ y+2;\ \ldots;\ x+n,\ y+n,$$

где $n$ — целое, положительное или отрицательное; для того чтобы найти все изображающие точки, достаточно будет найти все те, которые заключены в полосе $0 < x < 1$ или в полосе $0 < y < 1$.

Другое замечание состоит в том, что порядок, в котором будут следовать проекции этих изображающих точек на оси $x$, не будет иметь никакого отношения к порядку, в котором будут следовать их проекции на оси $y$; и вот какое отсюда следствие.

Рассмотрим несколько двояко-асимптотических решений; при отрицательных и очень больших $t$ все они будут очень близки к периодическому решению и представятся в определенном порядке, причем некоторые из них будут более близкими, а другие менее близкими к периодическому решению.

Затем все они сильно удалятся от периодического решения, потом при положительных и очень больших $t$ они снова будут очень близки к нему; *но тогда они представятся в совершенно ином порядке*. Если из двух решений первое ближе при $t=-\infty$ к периодическому решению, чем второе, то может случиться, что при $t=+\infty$ первое будет более удалено от периодического решения, чем второе, но может также случиться обратное.

Это замечание снова заставляет нас понять всю сложность задачи трех тел и то, насколько трансцендентные функции, которые необходимо придумать для ее решения, отличаются от всех тех, которые мы знаем.

## Гетероклинные решения

**399.** Существуют ли гетероклинные решения?

Мы можем видеть, что если имеется одно, то их имеется бесконечное множество.

В самом деле, пусть $M_0$ — точка, принадлежащая периодической системе; пусть $M_0A_0$ и $M_0B_0$ — две асимптотические кривые, сходящиеся в этой точке $M_0$, причем одна первого, а другая второго семейства. Мы видели только что, каким образом эти кривые пересекаются, определяя гомоклинные двояко-асимптотические решения.

Пусть теперь $M'_0$ — точка, принадлежащая *другой* периодической системе; пусть $M'_0A'_0$, $M'_0B'_0$ — две асимптотические кривые, причем $M'_0A'_0$ первого, $M'_0B'_0$ — второго семейства.

Предположим, что $M'_0A'_0$ пересекает $M_0B_0$ в $Q_0$; это пересечение будет соответствовать гетероклинному двояко-асимптотическому решению.

Но если эти две кривые пересекаются в $Q_0$, то они будут также пересекаться в бесконечно многих точках $Q_n$ — последующих точки $Q_0$.

Я уточняю; я предполагаю, например, что периодическая система, частью которой является $M_0$, состоит из пяти точек $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$; тогда пятая последующая любой точки кривой $M_0B_0$ также будет находиться на этой кривой и, вообще, если $Q_0$ лежит на этой кривой, то это же будет и с ее $n$-й последующей $Q_n$, лишь бы $n$ было кратным пяти.

Предположим также, что периодическая система, частью которой является $M'_0$, состоит из семи точек; тогда, если $Q_0$ лежит на кривой $M'_0A'_0$, то это же будет и с ее $n$-й последующей $Q_n$, лишь бы $n$ было кратным семи.

Итак, если две кривые имеют пересечение в $Q_0$, то они будут пересекаться также в $Q_n$, лишь бы $n$ было кратным тридцати пяти.

Итак, пусть $Q_0H_0Q_n$ — дуга кривой $M_0B_0$, а $Q_0K_0Q_n$ — дуга $M'_0A'_0$; совокупность этих двух дуг, имеющих одни и те же концы, образует замкнутую кривую. Относительно этой замкнутой кривой мы можем рассуждать, как в п. 396; мы видим, следовательно, что если две дуги не имеют других общих точек, кроме их концов, то эта замкнутая кривая не имеет двойной точки и ограничивает область, аналогичную области $\alpha_0$ пунктов 395 и 396.

Если две дуги имеют другие общие точки, кроме их концов, то можно найти две другие дуги, составляющие часть двух дуг $Q_0H_0Q_n$, $Q_0K_0Q_n$, не имеющие других общих точек, кроме их концов, и ограничивающие область, аналогичную $\alpha_0$. Относительно этой области $\alpha_0$ мы будем рассуждать, как в пунктах 395 и 396, и увидим, что на каждой из этих кривых между двумя любыми точками пересечения с другой кривой можно найти бесконечно много других точек пересечения.

Это рассуждение показывает, что если имеется одно гетероклинное решение, то их имеется бесконечное множество.

400. Если имеется гетероклинное решение, то сеть, о которой мы говорили в п. 397, становится еще более сложной; вместо одной-единственной кривой $M_0A_0$, навивающейся на самое себя, никогда себя не пересекая, и пересекающей бесконечно много раз другую кривую $M_0B_0$, мы будем иметь две кривые $M_0A_0$, $M_0'A_0'$, которые, никогда взаимно не пересекаясь, должны пересекать бесконечно много раз $M_0B_0$.

В п. 397 мы определили множество $E_0'$, относительно точки $M_0$ и асимптотических кривых $M_0A_0$, $M_0B_0$; мы могли бы определить аналогичное множество относительно точки $M_0'$ и двух асимптотических кривых $M_0'A_0'$, $M_0'B_0'$.

Если гетероклинного решения нет, то эти два множества должны лежать вне друг друга; следовательно, они не могут заполнять полуплоскость.

Если, напротив, гетероклинное решение существует, то эти два множества совпадут. Мы видим, что существование подобного решения, если бы нам удалось его установить, было бы аргументом против устойчивости.

В главе XIII мы изучили ряды Ньюкома и Линдштедта, в п. 149 мы доказали, что эти ряды не могут сходиться для всех значений постоянных, которые в них входят. Но один вопрос оставался сомнительным; не могут ли сходиться эти ряды для некоторых значений этих постоянных и, например, не может ли случиться, что сходимость имеет место, когда отношение $n_1/n_2$ равно корню квадратному из рационального числа, не являющегося точным квадратом (см. т. II, стр. 420)?

Но если гетероклинное решение существует, то ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. В самом деле, предположим, что для некоторых значений отношения $n_1/n_2$ ряды Ньюкома и Линдштедта сходятся, и вернемся к нашему способу представления. Решения дифференциальных уравнений, которые соответствовали бы этому значению $n_1/n_2$, представились бы определенными криволинейными траекториями. Множество этих кривых образовало бы поверхность, допускающую те же связности, что и тор, и эта поверхность пересекла бы нашу полуплоскость по определенной замкнутой кривой $C$.

Множество $E_0'$, о котором мы только что говорили, должно было бы лежать целиком вне этой кривой или целиком внутри нее.

Пусть тогда $M_0$ и $M'_0$ — две точки, принадлежащие двум различным системам. Если $M_0$ лежит внутри кривой $C$, а $M'_0$ — вне этой кривой, то множество $E'_0$ относительно $M_0$ должно быть целиком внутри нее, тогда как множество $E'_0$ относительно $M'_0$ будет целиком вне ее.

Таким образом, эти два множества не могли бы иметь ни одной общей точки, и гетероклинного асимптотического решения, идущего из $M_0$ в $M'_0$, существовать не могло бы.

Но если мы допустим предположение, высказанное в томе II на стр. 420, которое я только что напомнил, т. е. если бы сходимость имела место для бесконечного числа значений отношения $n_1/n_2$, например, для которых квадрат есть рациональное число, то существовало бы бесконечное множество кривых $C$, которые отделяли бы друг от друга точки, принадлежащие различным периодическим системам. Это предположение, следовательно, несовместно с существованием гетероклинных решений (по крайней мере, если две точки $M_0$ и $M'_0$, которые мы рассматриваем, или, точнее, соответствующие периодические решения, отвечают двум различным значениям числа $n_1/n_2$) [21].

## Сравнение с п. 225

401. Прежде чем пытаться строить примеры гетероклинных решений, вернемся сейчас к примеру п. 225, в котором может быть обнаружено существование гомоклинных двояко-асимптотических решений.

Мы положим

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu\varepsilon\varphi(y) \cos x,$$

где $(p,\ x;\ q,\ y)$ — две пары сопряженных переменных.

Затем построим функцию Якоби $S$ и разложим ее по степеням $\varepsilon$

$$S = S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

Остановимся на втором члене, пренебрегая $\varepsilon^2$, и напишем

$$S = S_0 + S_1\varepsilon.$$

Затем мы нашли

$$S_0 = A_0 x + \sqrt{2\mu} \int \sqrt{h + \sin^2 \frac{y}{2}}\, dy$$

или, приписывая постоянным $A_0$ и $h$ нулевое значение,

$$S_0 = \pm 2\sqrt{2\mu} \cos \frac{y}{2};$$

далее мы нашли

$$S_1 = \text{вещественной части } \psi e^{ix},$$

где $\psi$ — функция от $y$, определяемая уравнением

$$i\psi + 2\sqrt{2\mu}\sqrt{h+\sin^2\frac{y}{2}}\frac{d\psi}{dy} = \mu\varphi(y).$$

Мы положили

$$\operatorname{tg}\frac{y}{4} = t$$

и, предполагая, что

$$h = 0, \qquad \varphi(y) = \sin y, \qquad \alpha = \frac{i}{2\sqrt{2\mu}},$$

мы нашли (стр. 734, т. II) два значения $\psi$, соответствующие двум асимптотическим кривым двух семейств. Одно из этих значений

$$\psi = \sqrt{2\mu}\frac{t}{1+t^2} + it^{-2\alpha}\int\limits_t^\infty \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2},$$

а другое —

$$\psi' = \sqrt{2\mu}\frac{t}{1+t^2} - it^{-2\alpha}\int\limits_0^t \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2}.$$

Тогда уравнениями двух асимптотических поверхностей будут следующие:

$$p = \varepsilon\frac{d}{dx}\ (\text{вещественная часть } [\psi e^{ix}]),$$

$$q = \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2} + \varepsilon\frac{d}{dy}\ (\text{вещественная часть } [\psi e^{ix}]),$$

и

$$p = \varepsilon\frac{d}{dx}\ (\text{вещественная часть } [\psi' e^{ix}]),$$

$$q = \sqrt{2\mu}\sin\frac{y}{2} + \varepsilon\frac{d}{dy}\ (\text{вещественная часть } [\psi' e^{ix}]).$$

Чтобы найти двояко-асимптотические решения, необходимо искать пересечение этих двух асимптотических поверхностей; нам достаточно, следовательно, приравнять два значения $p$ и два значения $q$.

Пусть

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{t^{2\alpha}dt}{1+t^2},$$

$$u = 2\log t.$$

Мы найдем

$$\frac{d}{dx}\,(\text{вещественная часть } [Jie^{-au+ix}]) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\,(\text{вещественная часть } [Jie^{-au+ix}]) = 0$$

или, полагая $J = \rho e^{i\omega}$,

$$x - \frac{u}{2\sqrt{2\mu}} + \omega = K\pi + \frac{\pi}{2},$$

где $K$ — целое.

Таково уравнение двояко-асимптотических решений.

Это уравнение дает нам в действительности два различных решения; одно, соответствующее четным значениям, второе — нечетным значениям $K$.

402. Можно удивиться тому, что мы нашли таким образом только два двояко-асимптотических решения, тогда как мы знаем, что их бесконечно много.

Следующие приближения также дали бы нам лишь конечное число двояко-асимптотических решений. Каково же объяснение этого парадокса?

В предыдущих пунктах мы видели, что различные двояко-асимптотические решения в бесконечном числе соответствуют различным пересечениям определенной дуги $A_0H_0C_0$ с различными последующими другой дуги $A_0K_0C_0$.

Предположим, что первая из этих последующих, встречающая $A_0H_0C_0$, имеет порядок $N$. Число $N$ будет, очевидно, зависеть от постоянной $\varepsilon$ и будет тем больше, чем меньше эта постоянная. *Оно станет бесконечным, когда* $\varepsilon$ *будет нулем.*

Но разлагая по степеням $\varepsilon$ и останавливаясь на произвольном члене разложения, мы как бы считаем $\varepsilon$ бесконечно малым.

Дуга $A_0H_0C_0$ встречает тогда последующие другой дуги $A_0K_0C_0$ только бесконечно большого порядка, и как раз благодаря этому большая часть двояко-асимптотических решений ускользает от нашего анализа [22].

## Примеры гетероклинных решений

403. Попытаемся перейти к обобщению и положим

$$F = F_0 + \varepsilon F_1.$$

$F_0$ — функция $p$, $q$ и $y$, а $F_1$ — функция $p$, $q$, $x$ и $y$; кроме того, эти две функции периодичны как по $x$, так и по $y$.

Рассмотрим кривые

$$F_0 = \text{const}, \tag{1}$$

где мы будем считать $p$ параметром, $q$ и $y$ — координатами точки.

Среди этих кривых наше внимание должны привлечь именно те, которые имеют двойные точки. Эти двойные точки действительно соответствуют периодическим решениям канонических уравнений, когда мы предполагаем, что $\varepsilon$ равно нулю, а $F$ сводится к $F_0$.

Мы имеем $\infty^2$ кривых (1), общее уравнение которых есть

$$F_0 = h$$

и которые зависят от двух параметров $p$ и $h$.

Я только что сказал, что наиболее интересными являются те, которые имеют двойную точку, особенно в случае, когда какие-нибудь из этих кривых имеют две или несколько двойных точек. Тогда мы действительно встретим гетероклинные решения.

Как в п. 225, попытаемся построить функцию Якоби $S$ и положим

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots .$$

Функция $S_0$ получается немедленно; мы будем иметь

$$\frac{dS_0}{dx} = p, \qquad \frac{dS_0}{dy} = q, \qquad S_0 = px + \int q\,dy,$$

где $q$ — функция от $y$, определенная уравнением (1) и зависящая от двух параметров $p$ и $h$.

Затем мы находим

$$\frac{dF_0}{dp}\frac{dS_1}{dx} + \frac{dF_0}{dq}\frac{dS_1}{dy} + F_1 = 0. \tag{2}$$

В $dF_0/dp$, $dF_0/dq$ и $F_1$ мы считаем $p$ постоянной и заменяем в них $q$ его значением, полученным из уравнения (1). Следовательно, уравнение (2) — линейное уравнение относительно производных от $S_1$, коэффициенты которого являются заданными функциями от $x$ и $y$, зависящими, кроме того, от параметров $h$ и $p$.

Так как функция $F_1$ периодична по $x$, то я положу

$$F_1 = \sum \Phi_m e^{imx},$$

где $\Phi_m$ так же, как и производные от $F_0$, зависит только от $y$.

Я полагаю также

$$S_1 = \sum \psi_m e^{imx},$$

и функция $\psi_m$ будет задана уравнением

$$im\frac{dF_0}{dp}\psi_m + \frac{dF_0}{dq}\frac{d\psi_m}{dy} + \Phi_m = 0, \tag{3}$$

коэффициенты которого являются заданными функциями от $y$.

Очевидно, можно проинтегрировать это уравнение в квадратурах. Попытаемся определить этим путем наши асимптотические поверхности. Сначала мы должны выбрать постоянные $h$ и $p$ так, чтобы кривая (1) имела двойную точку; я предположу, кроме того, что эти постоянные та ковы, что каждому значению $y$ соответствуют два вещественных значения $q$ (что имеет место в примере п. 225).

Эти два значения $q$ являются периодическими функциями $y$, которые становятся равными друг другу в двойной точке, например при $y=y_0$.

Мы можем так же, как это делали в п. 225, считать эти два значения $q$ аналитическим продолжением друг друга.

Тогда функция $q$ оказывается *однозначной* по $y$ и периодической с периодом $4\pi$, подобно $\sin\frac{y}{2}$.

Эта однозначная функция будет принимать одно и то же значение при $y=y_0$ и $y=y_0+2\pi$.

Если бы вместо одной двойной точки мы имели несколько, то мы снова смогли бы считать $q$ однозначной функцией $y$ с периодом $4\pi$, если бы число двойных точек было нечетным. Если бы, наоборот, это число было четным, то мы имели бы для $q$ два значения, которые не менялись бы ролями, когда $y$ увеличивается на $2\pi$, и которые, следовательно, можно было бы рассматривать как две *различные* однозначные функции от $y$, имеющие период $2\pi$.

Для определенности будем предполагать, что мы имеем две двойные точки, соответствующие значениям $y_0$ и $y_1$ переменной $y$.

Отсюда вытекает, что при $y=y_0$ и при $y=y_1$ уравнение (1) должно иметь двойной корень, поскольку два значения $q$ совпадают, и, следовательно, производная $dF_0/dq$ должна обратиться в нуль.

Уравнение (3) является линейным уравнением с правой частью, интегрирование которого сводится к интегрированию уравнения без правой части и, следовательно, к интегрированию уравнения

$$\frac{dF_0}{dp}\theta+\frac{dF_0}{dq}\frac{d\theta}{dy}=0, \tag{4}$$

откуда

$$\theta=e^{-\int \frac{dy\frac{dF_0}{dp}}{\frac{dF_0}{dq}}}.$$

Функция $\theta$, определенная таким образом, является голоморфной функцией $y$ для всех вещественных значений этой переменной, за исключением значений $y=y_0$, $y=y_1$, которые соответствуют двойным точкам. Для этих значений функция $\theta$, играющая роль, аналогичную роли $t=\operatorname{tg}\frac{y}{4}$ в п. 226, обращается в нуль или бесконечность.

Затем мы находим

$$\psi_m = \theta^{im} \int \frac{\theta^{-im} \Phi_m dy}{\frac{dF_0}{dq}} + C_m \theta^{im},$$

где $C_m$ — постоянная интегрирования, откуда

$$S_1 = \sum \theta^{im} e^{imx} \int \frac{\theta^{-im} \Phi_m dy}{\frac{dF_0}{dq}} + \sum C_m \theta^{im} e^{imx}.$$

Чтобы найти уравнения асимптотических поверхностей, мы напишем

$$p = \frac{dS}{dx}, \qquad q = \frac{dS}{dy},$$

приписывая постоянным интегрирования надлежащие значения.

Сначала пренебрежем $\varepsilon$; мы примем, следовательно, $S = S_0$, и дадим постоянным $h$ и $p = p_0$ значения, соответствующие кривой, имеющей две двойные точки.

С этим приближением дифференциальные уравнения допускают в качестве периодических решений

$$p = p_0, \qquad q = q_0, \qquad y = y_0, \tag{5}$$

$$p = p_0, \qquad q = q_1, \qquad y = y_1, \tag{6}$$

где $y_0$, $q_0$; $y_1$, $q_1$ — координаты двух двойных точек.

Для представления наших асимптотических поверхностей мы можем взять точку четырехмерного пространства, координаты которой $(p+a) \cos x$, $(p+a) \sin x$, $(q+b) \cos y$, $(q+b) \sin y$, где $a$ и $b$ — две положительные постоянные, достаточно большие, чтобы можно было рассматривать только положительные значения $p+a$ и $q+b$.

Тогда уравнения (5) и (6) представляют две замкнутые кривые этого четырехмерного пространства, соответствующие двум периодическим решениям.

Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности одна первого, другая — второго семейства.

Но с принятой степенью приближения, т. е. если мы пренебрегаем $\varepsilon$, эти четыре асимптотические поверхности попарно совпадают.

В самом деле, уравнениями асимптотических поверхностей будут

$$p = p_0, \quad F_0 = h.$$

Как мы видели, уравнение $F_0 = h$ допускает два корня, которые сливаются при $y = y_0$ и при $y = y_1$, которые не меняются ролями, когда $y$ увеличивается на $2\pi$, и которые периодичны по $y$ с периодом $2\pi$. Пусть $q'$ и $q''$ —

эти два корня; таким образом, уравнения наших асимптотических поверхностей принимают вид

$$\begin{aligned} p=p_0, \quad & q=q', \\ p=p_0, \quad & q=q''. \end{aligned} \tag{7}$$

Но для того чтобы уточнить значение этих уравнений, мы будем различать несколько ветвей наших поверхностей. Мы имеем четыре асимптотические поверхности; каждая из них проходит через одну из кривых (5) или (6) и делится этой кривой на две ветви, которые я обозначу следующим образом:

Поверхность первого семейства, проходящая через кривую (5), будет разделена на две ветви $N_1$ и $N_1'$.

Поверхность второго семейства, проходящая через кривую (5), будет разделена на две ветви $N_2$ и $N_2'$.

Поверхность первого семейства, проходящая через кривую (6), будет разделена на две ветви $N_3$ и $N_3'$.

Поверхность второго семейства, проходящая через кривую (6), будет разделена на две ветви $N_4$ и $N_4'$.

Тогда, с принятой степенью приближения, уравнения этих ветвей будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&N_1; \quad p=p_0, \ q=q', \ y>y_0; \quad N_1'; \ p=p_0, \ q=q', \ y<y_0;\\
&N_2; \quad p=p_0, \ q=q'', \ y>y_0; \quad N_2'; \ p=p_0, \ q=q'', \ y<y_0;\\
&N_3; \quad p=p_0, \ q=q'', \ y>y_1; \quad N_3'; \ p=p_0. \ q=q'', \ y<y_1;\\
&N_4; \quad p=p_0, \ q=q', \ y>y_1; \quad N_4'; \ p=p_0, \ q=q', \ y<y_1.
\end{aligned}$$

Мы видим, что с этой степенью приближения две поверхности $N_1+N_1'$ и $N_4+N_4'$ сливаются, как и две поверхности $N_2+N_2'$ и $N_3+N_3'$.

Итак, перейдем к следующему приближению и возьмем:

$$S=S_0+\varepsilon S_1.$$

Чтобы завершить определение $S_1$, надо выбрать постоянные $C_m$.

Для ветвей $N_1$ и $N_1'$ мы должны выбрать эти постоянные таким образом, чтобы функции $\psi_m$ были регулярны при $q=q'$, $y=y_0$; достаточно сослаться на анализ на стр. 735 II тома, чтобы понять, что это условие достаточно, чтобы полностью определить эти постоянные. Я назову $S_{1,1}$ функцию $S_1$, определенную таким образом.

Для ветвей $N_2$ и $N_2'$ мы выберем $C_m$ таким образом, чтобы функции $\psi_m$ были регулярны при $q=q''$, $y=y_0$, и назовем $S_{1,2}$ функцию $S_1$, определенную таким образом.

Для ветвей $N_3$ и $N_3'$ мы выберем $C_m$ так, чтобы $\psi_m$ были регулярны при $q=q''$, $y=y_1$; для ветвей $N_4$ и $N_4'$ функции $\psi_m$ должны быть регулярны при $q=q'$, $y=y_1$. Мы обозначим через $S_{1,3}$ и $S_{1,4}$ две функции $S_1$, определенные таким образом.

Итак, уравнения четырех поверхностей принимают вид

$$
\begin{aligned}
&N_1+N_1'; \qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dx}; \qquad q=q'+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dy};\\
&N_2+N_2'; \qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,2}}{dx}; \qquad q=q''+\varepsilon\frac{dS_{1,2}}{dy};\\
&N_3+N_3'; \qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,3}}{dx}; \qquad q=q''+\varepsilon\frac{dS_{1,3}}{dy};\\
&N_4+N_4'; \qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dx}; \qquad q=q'+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dy}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Но важно отметить, что функция $S_{1,1}$, например, регулярная при $y=y_0$, перестает быть регулярной при $y=y_1$; отсюда вытекает, что наши уравнения становятся непригодными даже в качестве первого приближения, как только мы пройдем значение $y_1$.

Для большей доходчивости я ограничусь следующим замечанием: Пусть $y'$ и $y''$ — два таких значения $y$, что

$$y_0<y'<y_1<y''.$$

Пусть $M_0$ — точка асимптотической кривой, соответствующая значению $y'$; пусть $M_n$ — ее $n$-я последующая; я предполагаю, что мы берем $n$ достаточно большим, чтобы соответствующее значение $y$ было больше $y''$.

Значение, которое следует приписать $n$, очевидно, зависит от $\varepsilon$ и неограниченно возрастает, когда $\varepsilon$ стремится к нулю.

Вот, вообще говоря, значения $y$, при которых наши уравнения могут служить первым приближением:

$$
\begin{aligned}
&N_1 \text{ и } N_2; \quad y_1>y>y_0; \qquad N_1' \text{ и } N_2'; \quad y_0>y>y_1-2\pi;\\
&N_3 \text{ и } N_4; \quad y_0+2\pi>y>y_1; \qquad N_3' \text{ и } N_4'; \quad y_1>y>y_0.
\end{aligned}
$$

Если поверхности $N_1$ и $N_4'$, например, пересекаются, то пересечение будет соответствовать гетероклинному двояко-асимптотическому решению, которое при $t=-\infty$ будет очень близким к периодическому решению (5), а при $t=+\infty$ — очень близким к периодическому решению (6).

Для исследования этого пересечения сопоставим уравнения $N_1$ и $N_4'$

$$p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,1}}{dx}, \qquad p=p_0+\varepsilon\frac{dS_{1,4}}{dx};$$

очевидно, пересечение будет задано уравнением

$$\frac{d(S_{1,1}-S_{1,4})}{dx}=0. \tag{9}$$

Разность $S_{1,1}-S_{1,4}$ является функцией от $x$ и $y$, разложимой по целым положительным и отрицательным степеням

$$\theta^i e^{ix}.$$

Нам важно, что это периодическая функция от $x$; следовательно, она допускает по меньшей мере один максимум и один минимум; таким образом, уравнение (9) допускает, по меньшей мере, два решения, что сводится к утверждению, что имеется, по меньшей мере, два гетероклинных решения.

Мы доказали бы также, что имеется два решения, соответствующих пересечениям поверхностей $N_4$ и $N_1'$, два решения, соответствующих поверхностям $N_2$ и $N_3'$, и два — поверхностям $N_3$ и $N_2'$.

Предыдущий анализ не дает гомоклинных решений.

404. Возьмем, например,

$$F_0 = -p - q^2 + 2\mu \sin^2 \frac{y-y_0}{2} \sin^2 \frac{y-y_1}{2},$$

$$F_1 = \mu \cos x \sin (y-y_0) \sin (y-y_1).$$

Периодические решения (5) и (6), к которым стремятся гетероклинные решения при $t=-\infty$ и $t=+\infty$, тогда суть

$$x=t, \quad p=q=0, \quad y=y_0,$$

$$x=t, \quad p=q=0, \quad y=y_1.$$

Мы заметим, что при $\mu=0$ функция $F$ сводится к $-p-q^2$. Следовательно, при $\mu=0$ функция $F$ зависит только от переменных первого ряда $p$ и $q$ и не зависит от переменных второго ряда $x$ и $y$. Таким образом, функция $F$ имеет форму, рассмотренную в пунктах 13, 125 и т. д.

Однако мы не ограничимся этим примером, который доказывает, что канонические уравнения вида, рассмотренного в п. 13, могут допускать гетероклинные решения.

В самом деле, оба решения (5) и (6) соответствуют одному и тому же значению количеств $dx/dt$ и $dy/dt$, а именно:

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=0.$$

Но эти величины $dx/dt$ и $dy/dt$ являются не чем иным, как числами, названными выше $n_1$ и $n_2$.

Следовательно, мы видим, что существуют двояко-асимптотические решения, которые при $t=-\infty$ и при $t=+\infty$ неограниченно приближаются к двум различным периодическим решениям; но эти два периодических решения соответствуют одним и тем же значениям чисел $n_1$ и $n_2$.

Итак, я сейчас построю другой пример, в котором мы увидим уравнения той же формы, что и до п. 13, которые обладают двояко-асимптотическими решениями, неограниченно приближающимися к двум периодическим решениям, которые не только различны, но и соответствуют различным значениям отношения $n_1/n_2$.

Я смогу показать, что эти решения существуют для значений $\mu$, близких к единице, но, к сожалению, я еще не в состоянии установить, что они существуют также при малых значениях $\mu$.

**405.** Мы возьмем две пары сопряженных переменных

$$\xi_1,\ \eta_1;\ \xi_2,\ \eta_2$$

или же

$$x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2,$$

полагая

$$\xi_i = \sqrt{2x_i}\cos y_i; \qquad \eta_i = \sqrt{2x_i}\sin y_i.$$

Эта замена переменных не меняет канонической формы уравнений. Мы возьмем

$$F = F_0(1-\mu) + \mu F_1.$$

Предположим, что $F_0$ — функция, голоморфная по $x_1$ и $x_2$, не зависящая от $y_1$ и $y_2$; что при $x = \alpha^2/2$, $x_2 = {}^1/_2$ мы имеем

$$\frac{dF_0}{dx_2} = 0, \qquad \frac{dF_0}{dx_1} = -1$$

и что при $x_1 = {}^1/_2$, $x_2 = \alpha^2/2$ мы имеем

$$\frac{dF_0}{dx_2} = -1, \qquad \frac{dF_0}{dx_1} = 0;$$

я предполагаю, что величина $\alpha < 1$.

Из этих предположений вытекает, что если положить $\mu = 0$, откуда $F = F_0$, то наши уравнения будут допускать два замечательных периодических решения.

Первое решение, которое я назову $\sigma$, запишется в виде:

$$x_1 = \frac{\alpha^2}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad y_1 = t, \qquad y_2 = 0,$$
$$\xi_1 = \alpha\cos t, \qquad \eta_1 = \alpha\sin t, \qquad \xi_2 = 1, \qquad \eta_2 = 0.$$

Второе, которое я назову $\sigma'$, запишется:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{\alpha^2}{2}, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = t,$$
$$\xi_1 = 1, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \xi_2 = \alpha\cos t, \qquad \eta_2 = \alpha\sin t.$$

Первое решение соответствует $n_1=1$, $n_2=0$, второе — $n_1=0$, $n_2=1$; эти два периодических решения не соответствуют, следовательно, одному и тому же значению отношения $n_1/n_2$.

Для определения $F_1$ я полагаю

$$\xi_1 = 1 - r\cos\omega, \qquad \xi_2 = 1 - r\sin\omega,$$

приписывая переменной $r$ существенно положительное значение.

Затем я предполагаю, что (если $\rho$ — очень малое положительное количество) мы имеем при $r > \rho$

$$F_1 = -\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2} - \frac{(r-1)^2}{2} + \varepsilon\frac{\psi(\omega)}{r^2}, \tag{1}$$

где $\psi(\omega)$ — функция от $\omega$, регулярная для всех вещественных значений $\omega$, периодическая с периодом $2\pi$ и, наконец, обращающаяся в нуль вместе со своей производной при $\omega=0$ и при $\omega=\pi/2$.

Так как функция (1) была бы бесконечной при $r=0$, т. е. при $\xi_1=\xi_2=1$, то я предположу, что при $r \leqslant \rho$ функция $F_1$ принимает произвольные значения, однако так, что она остается конечной и непрерывной, как и ее производные первых двух порядков.

Легко проверить, что при $\mu=1$, т. е. при $F=F_1$, наши уравнения также допускают два периодических решения $\sigma$ и $\sigma'$; для первого из этих решений мы имеем $\omega=0$, для второго — $\omega=\pi/2$.

Отсюда мы сразу же заключаем, что *для всех значений* $\mu$ наши уравнения будут допускать эти два периодических решения.

406. Сейчас мы проинтегрируем наши уравнения в случае $\mu=1$ (по крайней мере в предположении, что $r$ всегда остается $>\rho$).

Если бы мы предположили сначала, что $\varepsilon=0$, то встретились бы с задачей центральных сил, и интегрирование выполнялось бы без труда. Оно будет ничуть не труднее и в общем случае.

В самом деле, метод Якоби приводит к уравнению в частных производных

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{(r-1)^2}{2} - \varepsilon\frac{\psi(\omega)}{r^2} = h,$$

где $h$ — постоянная. Положим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 - \varepsilon\psi(\omega) = k,$$

где $k$ — вторая постоянная, и мы получим

$$S = \sqrt{2}\int\sqrt{h - \frac{k}{r^2} - \frac{(r-1)^2}{2}}\,dr + \sqrt{2}\int\sqrt{k+\varepsilon\psi}\,d\omega.$$

Таким образом, общее решение наших уравнений имеет вид

$$(\xi_1-1)\eta_1+(\xi_2-1)\eta_2=\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2},$$

$$(\xi_1-1)\eta_2-(\xi_2-1)\eta_1=\sqrt{2}\sqrt{k+\varepsilon\psi}.$$

$$\int\frac{rdr}{\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2}}=h'+t,$$

$$\int\limits_0^\omega\frac{d\omega}{\sqrt{2k+2\varepsilon\psi}}-\int\frac{2dr}{r\sqrt{2hr^2-2k-r^2(r-1)^2}}=k',$$

где $h'$ и $k'$ — две новые постоянные.

Мы найдем наши два периодических решения $\sigma$ и $\sigma'$, давая постоянным частные значения

$$k=0,\qquad h=\frac{\alpha^2}{2},\qquad k'\sqrt{2k}=0,$$

$$k=0,\qquad h=\frac{\alpha^2}{2},\qquad k'\sqrt{2k}=\frac{\pi}{2}.$$

Предположим, что мы хотим воспользоваться уравнением (2), чтобы определить $r$ в функции $h'+t$; если мы дадим постоянным $k$ и $h$ значения, близкие к нулю и $\alpha^2/2$, то $r$ будет периодической функцией $t+h'$. Мы положим

$$u=n\,(t+h'),$$

где число $n$ выбрано так, чтобы $r$ было периодической функцией от $u$ с периодом $2\pi$. Это число $n$, которое является чем-то вроде среднего движения, будет, естественно, зависеть от постоянных $h$ и $k$.

Аналогично, $dr/dt$ будет периодической функцией от $u$.

При $k=0$ мы имеем просто

$$r=1\pm\sqrt{2h}\cos u.$$

**407.** Итак, мы имеем два периодических решения $\sigma$ и $\sigma'$, которые представлены двумя замкнутыми кривыми, если мы условимся рассматривать величины $\xi$ и $\eta$ как координаты точки в четырехмерном пространстве. Через каждую из этих кривых проходят две асимптотические поверхности, одна — первого, другая — второго семейства; мы увидим сейчас, что эти четыре поверхности попарно сливаются, как это имело место в п. 403 [уравнение (7)] при пренебрежении $\varepsilon$.

В самом деле, чтобы найти уравнения этих поверхностей, достаточно дать постоянным $k$ и $h$ значения 0 и $\alpha^2/2$; таким образом, мы получим

$$(\xi_1-1)\eta_1+(\xi_2-1)\eta_2=r\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2},$$

$$(\xi_1-1)\eta_2-(\xi_2-1)\eta_1=\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}.$$

Таковы уравнения асимптотических поверхностей при $\mu = 1$; мы видим, что нашли только две из этих поверхностей, соответствующие двойному знаку у второго радикала.

*Предположим, что функция* $\varepsilon\psi$, *обращающаяся в нуль при* $\omega = 0$ *и* $\omega = \pi/2$, *положительна для всех остальных значений* $\omega$.

Теперь мы попытаемся составить уравнения асимптотических поверхностей для значений $\mu$, близких к 1.

Мы имеем

$$F = F_1 + (1 - \mu)(F_0 - F_1);$$

$F_0$ и $F_1$ — голоморфные функции от $\xi$ и $\eta$ и, следовательно, от $r$, $\omega$, $dr/dt$ и $d\omega/dt$.

Уравнения наших поверхностей запишутся в виде

$$(\xi_1 - 1)\eta_1 + (\xi_2 - 1)\eta_2 = r\frac{dS}{dr},$$

$$(\xi_1 - 1)\eta_2 - (\xi_2 - 1)\eta_1 = \frac{dS}{d\omega},$$

где $S$ — функция от $r$ и $\omega$, удовлетворяющая уравнению в частных производных

$$F = \text{const},$$

в котором производные $\dfrac{dr}{dt}$ и $\dfrac{d\omega}{dt}$ заменены на $\dfrac{dS}{dr}$ и $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dS}{d\omega}$.

Разложим $S$ по степеням $1 - \mu$:

$$S = S_0 + (1 - \mu) S_1 + (1 - \mu)^2 S_2 + \ldots,$$

мы получим в первом приближении уравнения асимптотических поверхностей в виде

$$(\xi_1 - 1)\eta_1 + (\xi_2 - 1)\eta_2 = r\frac{dS_0}{dr} + (1 - \mu) r\frac{dS_1}{dr},$$

$$(\xi_1 - 1)\eta_2 - (\xi_2 - 1)\eta_1 = \frac{dS_0}{d\omega} + (1 - \mu)\frac{dS_1}{d\omega}.$$

Мы уже нашли

$$\frac{dS_0}{dr} = \sqrt{\alpha^2 - (r - 1)^2}, \qquad \frac{dS_0}{d\omega} = \pm\sqrt{2\varepsilon\psi}.$$

Остается определить $S_1$; для этого мы имеем уравнение

$$\frac{dS_0}{dr}\frac{dS_1}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{dS_0}{d\omega}\frac{dS_1}{d\omega} = F_1 - F_0.$$

Производные $dr/dt$ и $d\omega/dt$ в правой части должны быть заменены на $dS_0/dr = \sqrt{\alpha^2 - (r - 1)^2}$ и на $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dS_0}{d\omega} = \dfrac{\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}}{r^2}$. Таким образом, эта правая часть является известной функцией от $r$ и $\omega$.

Уравнение принимает вид

$$r^2\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}\,\frac{dS_1}{dr}\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}\,\frac{dS_1}{d\omega}=r^2(F_1-F_0).$$

Положим

$$v=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}}.$$

Мы видим, что $r$ и $\sqrt{\alpha^2-(r-1)^2}$ — периодические функции от $v$, и мы должны считать $S$ функцией $v$ и $\omega$.

Тогда наше уравнение примет вид

$$\frac{dS_1}{dv}\pm\sqrt{2\varepsilon\psi}\,\frac{dS_1}{d\omega}=r^2(F_1-F_0).$$

Правая часть — известная функция от $v$ и $\omega$, периодическая относительно $v$.

Это уравнение — совершенно того же вида, что и уравнение (2) п. 403, причем $v$ играет роль $x$, а $\omega$ — $y$.

Мы поступим с ним таким же образом; мы определим методами п. 403 четыре функции $S_{1,\,1}$, $S_{1,\,2}$, $S_{1,\,3}$, $S_{1,\,4}$, соответствующие четырем асимптотическим поверхностям.

Как и в п. 403, мы найдем, что эти асимптотические поверхности пересекаются и что, следовательно, существуют гетероклинные решения.

Но это установлено только для значений $\mu$, близких к 1; я не знаю, справедливо ли это также для малых значений $\mu$.

Таким образом, результат является довольно неполным; однако я надеюсь, что мне простят длинноту этого отступления, ибо вопрос, который я скорее поставил, чем решил, оказывается непосредственно связанным с вопросом об устойчивости, как я показал в п. 400.

# СОДЕРЖАНИЕ