

С. А. БАЗИЛЕВСКИЙ

ТЕОРИЯ ОШИБОК,  
ВОЗНИКАЮЩИХ  
ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СУДОВ

У 2638 | 8

БИБЛИОТЕКА  
Департамента Морского  
Ведомства



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СУДОСТРОЕНИЕ»

Ленинград  
1964

Книга содержит краткое изложение современной теории ошибок, основанной на общей математической теории вероятностей. Приведены свои теории и описание различных расчетов, выполняемых при проектировании судов всех типов и категорий, делается вывод о трудности расчетов работ, а в некоторых случаях и рационализировать конструкцию новых судов. Рекомендуются новые и усовершенствованные методы проектирования.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов и научных сотрудников проектных и исследовательских организаций, преподавателей и студентов вузов и техникумов, а также для инженеров-технологов судостроительной промышленности, широкого круга судостроительной промышленности, широкого круга инженеров-технологов других специализаций при разработке аналогичных теоретических работ.

**АЛЕКСАНДР СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ  
ТЕОРИЯ ОШИБОК, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СУДОВ**

Текст план 1964 г. № 89

Редакционн: проф. д. т. н. В. В. Азак, доц. А. М. Вакс

Научный редактор М. Н. Рабинов

Редактор А. А. Осипович

Художник В. У. Фомин

Технический редактор Д. М. Крылова

Корректоры Э. В. Крылова и Н. А. Ежикова

Сдана в набор 21/УИИ 1963 г.	М. Дубов	Подготовлено к печати 10/ХІ 1963 г.
Формат бумаги 60x90/16	Печать листов 16,5 (1 + 1 кат. 1), 2,5	Уч. изд. л. 16,5
Изд. № 1274-62	Тираж 100 экз.	Цена 8 коп. Заста 1970

Издательство «Судостроение», Ленинград, ул. Гоголя, 5

Депозитация телефакса № 6 Телеинформационное  
Государственного комитета Совета Министров СССР по делам  
Ленинград, ул. Мясницкая, 30

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Еще в 1901 г. в журнале «Морской сборник» № 11 и 12 была опубликована статья И. Г. Бубикова «Основы статистики судостроения», анализирующая возможные ошибки в некоторых судостроительных расчетах. В 1911 г. А. Н. Крылов писал во введении к своим «Лекциям о приближенных вычислениях»: «... для прикладных вопросов нет надобности проводить вычисления по абсолютно точным формулам и с совершенной точностью; напротив, можно пользоваться заведомо неточными формулами или приемами, лишь бы была уверенность, что происходящая от этого погрешность не превышает тех пределов, которые в данном вопросе допускаются» [9—9]<sup>1</sup>.

Отдельные авторы возвращались к этой теме и позднее. Их указания могли бы иметь существенные практические последствия, так как во многих случаях правильная оценка точности расчета позволяет упростить вычислительную работу, сэкономить время и материальные средства, а иногда и облегчить и улучшить проектируемую конструкцию, уменьшить водоизмещение судна без ущерба для его эксплуатационных показателей. К сожалению, за многие годы, прошедшие со времени опубликования указанных работ, на них не было обращено должного внимания: способы всех расчетов непрерывно уточнялись и усложнялись, но ни в одном

<sup>1</sup> В квадратных скобках указывается номер источника по списку, помещенному в конце книги, и номер страниц по этому источнику. В некоторых случаях, для многолетних изданий в журналы, после номера источника указывается номер тома, а затем страница.

проекте корабля нельзя было найти хотя бы приближенной оценки погрешности исходных данных, методов расчета или результатов вычислений. Это ведет к существенному расхождению между их точностью и потребностями практики, усложняет работу, но не содействует улучшению технических и эксплуатационных качеств строящихся судов.

Причиной недооценки учета погрешностей со стороны инженеров-кораблестроителей, как и инженеров многих других специальностей, является отсутствие методики применения теории ошибок к техническим расчетам, некоторая необычность математического аппарата этой теории и недостаточная убедительность тех норм точности, которые до сих пор предлагались.

Довольно обширная литература по теории ошибок в основном касается лишь погрешностей физических измерений или статистических обработок. Упомянутые выше работы А. Н. Крылова и И. Г. Бубнова или книга В. В. Давыдова [6] и статья Г. П. Злобина [7] являются редкими исключениями и затрагивают лишь общие принципы или частные случаи. Курсы теории вероятностей, на которой основана современная теория ошибок, написаны, как правило, языком, трудно понимаемым инженерами, и злоупотребляют терминами, замаскированными на практике азартных игр, юридических и банковских операций, этнографической статистики и т. д.

Удачным исключением является книга-учебник Е. С. Вентцель [4], но она предназначена главным образом для артиллеристов и по объему во много раз превышает то, что необходимо знать каждому инженеру, не занимающемуся специально применением этой теории в тех областях техники, куда она уже проникла (например, качка на вертуляхром волнения).

Особо следует остановиться на нормах точности.

И. Г. Бубнов предлагает оценивать точность результата по некоторой средней, так называемой вероятной ошибке, по отношению к которой появление как больших, так и меньших ошибок одинаково возможно.

А. Н. Крылов в своих работах приближенных вычислений, получивших широкую известность, исходил изоборот на учета наибольших (предельных) ошибок, вероятность появления которых очень быстро падает с увеличением числа компонентов расчета. Так, например, уже при сложении только двух прибли-

женных величины вероятность появления любой ошибки суммы, отличающейся от предельной не более, чем на 2%, не превышает 0,01%, а вероятность появления такой же ошибки в расчете общего веса судна по нагрузке, состоящей хотя бы только из 60 статей, имеет примерно такой же порядок ( $10^{-120}$ ), как и отношение объема протона ( $10^{-29}$  см<sup>3</sup>) к объему асей вселенной, доступному сильнейшим из наших телескопов ( $10^{66}$  см<sup>3</sup>). Поэтому являла приближенных вычислений А. Н. Крылова, сыгравшие в свое время большую роль в деле рационализации расчетов, делание и в настоящее время для простейших арифметических действий, нуждаются в усовершенствовании для более сложных инженерных расчетов, с большим числом приближенных компонентов и сложными математическими операциями.

В предлагаемой вниманию читателя книге автор поставил себе целью по возможности устранить указанные недостатки. Для этого в первых десяти параграфах даются только основные положения, законы и выводы теории вероятностей, которые необходимы для ее применения к учету ошибок в технических расчетах. Их изложение по возможности освобождено от терминологии, чуждой техническому языку. В качестве критерия точности любой величины предложено сочетание из двух показателей. Один из них — возможная ошибка (доверительная граница), т. е. та наибольшая ошибка, появление которой еще достаточно реально в данных условиях. Второй — степень достоверности (доверительная вероятность), т. е. вероятность того, что случайная ошибка в каждом конкретном случае не будет больше возможной. Сочетание этих двух показателей придает одинакую точности расчетов необходимую гибкость, утерянную в упомянутых выше работах, позволяя установить для каждого этапа проектирования свою степень достоверности результата и допустимую погрешность вычислений. После этого выбор соответствующих методов расчета, исходных данных и коэффициентов запаса (прочности, водонепроницаемости и т. п.) становится логически обоснованным, а не зависящим от произвольных определений и условных соглашений.

В § 11—16 приводятся несколько новых теорем теории ошибок, предложенных автором для упрощения практического решения некоторых задач. Остальное содержание книги отводится методу применения теории ошибок к оценке ряда известных расчет-

ных приемов, которые обычно используются при проектировании и постройке судов.

Следует заметить, что при изложении материала автор не имел в виду предлагать какие-либо твердые нормы точности или достоверности (они могут быть выработаны лишь на основе специальных исследований), поэтому все приводимые численные показатели должны рассматриваться только как примеры, позволяющие более ясно оценить практическое значение иллюстрируемых ими вопросов.

## ГЛАВА I

### ОШИБКИ И ПОГРЕШНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

#### § 1. Понятие о достоверных и случайных величинах

В каждом техническом расчете участвуют величины двух категорий: одни известны с абсолютной точностью, как например, коэффициент  $2$  в формуле длины окружности круга  $s = 2\pi r$ , другие могут быть измерены только приближенно, как величина радиуса  $r$  в той же формуле.

Величины первой категории будем называть достоверными, и к их числу будем относить, помимо численных коэффициентов теоретических формул, также и все величины, заданные техническими условиями, нормами или другими видами условных соглашений. К их же числу должны быть отнесены и такие величины, которые являются по существу приближенными, но известны нам с точностью значительно большей, чем другие компоненты того же расчета. Сюда относятся, например, число  $\pi$ , которое всегда может быть введено в расчет с любой необходимой точностью, и потому его погрешность практически не отразится на результатах.

Величины второй категории будем называть приближенными или случайными, так как их истинное значение нам неизвестно, и мы вынуждены вводить в расчет те их численные выражения, которые случайно получены в результате одного или нескольких замеров или измерений. Они могут отличаться от истинного значения на величину случайной ошибки<sup>1</sup>.

Следует заметить, что одна и та же величина в разных случаях может иметь различный характер. Так, например, длина

<sup>1</sup> Во избежание недоразумений отметим, что термин ошибки изучает только те неизбежные погрешности, которые возникают в результате неточности измерительных инструментов, исходных данных, внешних условий или методов расчета, но не может предостеречь от возможности случайных арифметических промахов или ошибок при заданной аппаратуре, которые вызваны или невнимательностью или недостатком внимания со стороны исполнителя. Устранение такого рода ошибок должно быть объектом организационных мероприятий.

корабли, измеренная в натуре или полученная в расчете главных размерностей, будет случайной величиной, так как может содержать ошибки замера или расчета. Но та же длина, фиксированная численно на теоретическом чертеже, становится достоверной для всех расчетов по этому чертежу, а случайными будут лишь отклонения от нее, получающиеся при рублении на плазе, изготовлении шаблонов и постройке корабля, вследствие наличия технологических ошибок и допусков. Точно так же водоизмещение, которое может быть вычислено по тем или иным чертежам как измерено в натуре на одном или нескольких кораблях данной серии, не может быть достоверным. При использовании этой серии кораблей в качестве прототипа для нового проектирования или для технико-экономических расчетов и вычисления следует вводить среднюю или наиболее достоверную величину из всех известных водоизмещений, полученных при всех измерениях и определениях, по сравнению с которой отдельные частные значения будут содержать случайные ошибки.

Присутствие в расчете хотя бы одного случайного множителя, слагаемого или иного компонента придает к тому, что и результат вычисления не может считаться достоверным, но будет носить случайный или приближенный характер.

Каждая приближенная величина  $A$  может быть представлена в виде суммы двух, вообще говоря, неизвестных слагаемых — истинного ее значения  $X$  и случайной ошибки  $\Delta$ :

$$A = X + \Delta, \quad (1, 1)$$

Если в каких-либо конкретных условиях окажется возможным определить значение  $\Delta$ , такая ошибка перестанет быть случайной и может быть учтена в расчетах в качестве поправки, позволяющей от приближенного значения  $A$  перейти к достоверной величине  $X$ . В большинстве же встречающихся на практике случаев можно составить лишь общее представление о возможном порядке случайных ошибок, которые содержатся в исходных данных и в результатах вычислений, и о вероятности появления больших или меньших из них.

Поэтому само представление о приближенности или случайной величине тесно связано с понятиями о возможности или вероятности тех или иных ее ошибок и не может быть полным без количественной и вероятностной их оценки. Отсюда же следует, что наиболее полная форма записи случайной величины должна содержать не одно число, как для достоверных величин, а по крайней мере три

$$A \pm \Delta_v, \quad (1, 2)$$

где  $A$  — фактически измеренное или вычисленное ее значение;  
 $\Delta_v$  — возможная ошибка этого значения;  
 $v$  — степень достоверности, с которой эта ошибка определена.

Более полно эти понятия будут раскрыты ниже.

**Предельные ошибки.** При непосредственном измерении какой-либо величины можно с уверенностью утверждать, что действительная ошибка измерения не превосходит известного предела. Так, например, при тщательном взвешивании на обычных весах исправных весов истинный вес груза не может отличаться от измеренного более, чем на вес наименьшей из разновесов, которыми пользовались при взвешивании. При измерении длины тонкой масштабной линейкой ошибка измерения не может превышать цены наименьшего из делений этой линейки и т. д. На анализе таких предельных ошибок и основаны элементарные правила приближенных вычислений, рекомендованные А. Н. Крыловым в 1911 г. [9—17] и достаточно хорошо известные кораблестроителям. Однако практическое применение этих правил, как уже отмечалось, ограничено; принятие этого выводится в следующем.

При любом измерении весьма мало вероятно, что фактическая (случайная) ошибка будет в точности равна предельной. Наоборот, совершенно очевидно, что любая меньшая по абсолютной величине ошибка во всяком случае не менее вероятна, чем предельная, и следовательно, появление именно последней значительно менее вероятно, чем какой-либо иной, меньшей ошибки. Уже поэтому величина предельной ошибки не может считаться достаточной характеристикой точности измерения или вычисления.

Еще менее вероятно появление предельных ошибок в результатах более сложных вычислений. Подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже, здесь же только поясним сказанное на примере.

Допустим, что некоторая случайная величина  $A$  получена как сумма  $n$  случайных слагаемых  $A = \sum_{i=1}^n a_i$ . При сложении приближенных величин очевидно и их случайные ошибки складываются  $\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i$ . Для того чтобы эта сумма достигла своего предельного значения  $\Delta_{\text{пр}}$ , которое характеризует ее точность по элементарным правилам приближенных вычислений, необходимо:

- 1) чтобы случайные ошибки всех без исключения слагаемых одновременно достигли своих пределов по абсолютной величине;
- 2) чтобы знаки всех случайных ошибок слагаемых были также одинаковыми.

Совершенно очевидно, что при большом числе слагаемых вероятность удовлетворения обоих указанных условий граничит с полной невозможностью.

Приведенные соображения показывают, что для правильного суждения о точности расчета следует руководствоваться не столько величиной предельной ошибки его результата, сколько оценкой вероятности появления тех или иных случайных ошибок, меньших по абсолютной величине предельной.

**Возможность, вероятность, достоверность.** Все эти понятия относятся к тем основным логическим категориям, оценкам будущего, которые не нуждаются в определении. Понятия возможности и вероятности в настоящее время почти слились как синонимы, хотя первоначально слово вероятность (веру ють, т. е. брать) носило более субъективный характер. Водные достоверным мы называем то, по отношению к чему исключены всякие сомнения, чего же может не быть; вероятным — то, что уже случилось и нет серьезных оснований предполагать, что при соответствующих условиях не случится снова; мало вероятным, хотя и возможным, — то, что случилось крайне редко или никогда не случилось, но возможность чего не исключена.

Часто говорят также о различных степенях достоверности (не совсем, почти и т. п.), если рассматриваются события или явления, имеющие высокую вероятность появления, но не вполне достоверные. Именно такие явления, сравнимые с достоверными, привлекают наибольшее внимание инженера.

Переходя к численному выражению степени вероятности, естественно принять в качестве единицы вероятности вполне достоверное событие и считать вероятность невозможного равной нулю [4—22]. При этом, например, вероятность появления любой ошибки, не большей чем предельная, будет равна единице; вероятность того, что случайная ошибка будет иметь знак +, при всех равных условиях, равна 0,5; вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет именно заранее заданное число очков равна  $\frac{1}{6}$  и т. д. Во всех случаях вероятность одного из  $n$  равновероятных событий равна  $\frac{1}{n}$ .

**Закон сложения вероятностей.** Вероятность того, что из  $n$  возможных, но несовместных событий произойдет одно из тех  $m$  событий, любое из которых мы ожидаем, равна сумме вероятностей каждого из этих событий в отдельности. Допустим, например, что через данную остановку проходят автобусы пяти различных маршрутов и число машин каждого маршрута, проходящих через эту остановку в течение часа, одинаково. При этих условиях вероятность того, что первый же автобус будет идти по единственному нужному нам маршруту № 1, будет равна  $\frac{1}{5}$ . Но если как в одинаковой мере устроит и маршрут № 2 (какой-либо еще один), то вероятность того, что мы уедем с первой же подошедшей машиной, будет равна сумме  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ . Во всех случаях вероятность появления любого из  $m$  ожидаемых событий при общем числе возможных событий, равном  $n$ , определяется отношением  $m/n$ .

Численное определение вероятности появления той или иной ошибки при любом измерении или вычислении и является основной задачей теории ошибок.

## § 2. Законы распределения случайных ошибок

Для получения более точного результата часто прибегают к многократному повторению измерения одной и той же величины. Отметим при этом, как правило, не совпадают между собой, так как не нуль имеет множество различных факторов, не поддающихся учету. Сюда относятся ошибки, вызываемые качеством или состоянием измерительного прибора, изменениями температуры, атмосферными и другими внешними влияниями, а также особенностями зрения, слуха и рефлексов самого наблюдателя. В результате суммарного действия всех этих факторов каждое новое измерение, если оно выполнено достаточно точно, дает и новое случайное значение измеряемой величины, редко повторяю-



Рис. 1. Графиконное изображение результатов измерений.

щее какое-либо из полученных ранее. Однако при правильной организации опытов, достаточном их количестве и исключении влияния всех постоянно действующих искажающих факторов можно утверждать, что истинное значение измеряемой величины не выходит за пределы измеренных ее значений.

На рис. 1 по оси абсцисс отложены результаты ряда измерений  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_i; \dots; a_n$  и нанесено пунктиром неизвестное нам истинное значение измеряемой величины  $X$ . Разность  $\Delta_1 = a_1 - X$  и является случайной ошибкой данного измерения.

Если бы все случайные ошибки могли иметь только ряд дискретных значений, то при достаточно большом числе опытов один и те же ошибки неизбежно стали бы повторяться и можно было бы установить частоту их появления, т. е. отношение числа полученных одинаковых результатов  $i$  к общему числу произведенных измерений  $n$ . Предположим, что и при продолжении опытов эта частота не изменяется, можно приравнять ее вероятности появления данной ошибки в будущем.

Статистическая зависимость частоты или вероятности появления тех или иных случайных ошибок от их величины носит название закона распределения этих ошибок

$$\frac{m_i}{n} = P(\Delta_i) \quad (2.1)$$

Для дискретных величин этот закон может быть выражен лишь в табличной форме или в виде линейной гистограммы (рис. 2).

Частоты или вероятности здесь изображены длиной вертикальных отрезков. Сумма их равна единице в соответствующем масштабе.

При бесконечно большом количестве наблюдений и достаточной точности приборов случайные ошибки могут получать любые

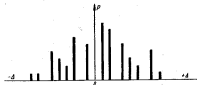


Рис. 2. Закон распределения дискретных ошибок.

несоизмеримые значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга. В этих условиях частота появления той или иной конкретной ошибки теряет свое практическое значение, и рассматривать следует лишь частоту и вероятность появления ошибок в том или ином интервале их возможных значений, например

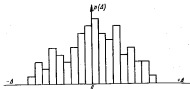


Рис. 3. Гистограмма распределения ошибок.

в интервале от  $\Delta_1$  до  $\Delta_1 + \epsilon \Delta$ . При этом закон распределения может быть представлен в виде таблицы или в виде гистограммы (рис. 3), на которой в отличие от первого случая частота или вероятность изображаются площадью прямоугольника, построенного на интервале  $\epsilon \Delta$ , как на основании. Общая площадь всей гистограммы соответствует вероятности, равной единице.

**Плотность вероятности.** Отношение вероятности появления ошибок в данном интервале к длине самого интервала получило название средней плотности вероятности ошибок на данном участке. На рис. 3 ей соответствует высота отдельных прямоугольных участков. Так как вероятность и частота являются величинами безразмерными, а ошибки имеют ту же размерность, что и измеряемая величина, очевидно, плотность вероятности должна иметь размерность, обратную размерности ошибок.

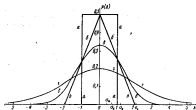


Рис. 4. Законы распределения ошибок: а — равномерный; б — линейный; в — параболический; г — нормальный.

При беспредельном возрастании числа измерений можно также беспредельно уменьшать величину рассматриваемого интервала  $\epsilon \Delta$ , и при этом плотность вероятности будет оставаться конечной величиной и стремиться к некоторому пределу

$$p(\Delta) = \lim_{\epsilon \Delta \rightarrow 0} \left| \frac{\epsilon P}{\epsilon \Delta} \right|_{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{dP}{d\Delta} \quad (2.2)$$

Здесь обозначено:

$p(\Delta)$  — плотность вероятности;

$\epsilon P$  — вероятность появления ошибок в пределах от  $\Delta$  до  $\Delta + \epsilon \Delta$ ;

$\epsilon \Delta$  — величина рассматриваемого интервала;

$d$  — знак дифференциала.

Таким путем возникает представление о плотности вероятности, как о непрерывной функции величины ошибок. Это функция во многих случаях может быть выражена аналитически и поддается математическому исследованию.

Некоторые из наиболее часто встречающихся законов распределения ошибок изображены графически на рис. 4.

**Равновероятное распределение.** Как уже отмечалось в § 1, при одиночном измерении относительно легко установить пределы возможных ошибок, но чтобы указать, какие из этих ошибок более вероятны, какие менее, нет достаточных оснований. Тогда так же, если вес какой-либо контрагентской поставки обусловлен техническими условиями с предельными допусками  $\pm \Delta_{\text{доп}}$ , невозможно заранее предсказать к какой границе будет ближе фактический вес заказанного изделия. Во всех подобных случаях мы вынуждены считать, что любая ошибка в установленных пределах одинаково вероятна, а любая ошибка, выходящая за эти пределы, невозможна. Такое распределение ошибок носит название *равновероятного* и графически изображается ломаной линией  $\delta$  на рис. 4. Аналитическое выражение этого закона может быть легко найдено, если вспомнить, что полная площадь прямоугольника  $\alpha$ , выражающая полную достоверность появления тех или иных ошибок, должна равняться единице, а длина его основания —  $2|\Delta_{\text{доп}}|$ , где  $|\Delta_{\text{доп}}|$  — абсолютное значение предельной ошибки. Отсюда непосредственно следует, что постоянная плотность вероятности равновероятного распределения должна быть

$$p(\Delta) = \frac{1}{2|\Delta_{\text{доп}}|} \quad (2.3)$$

Эта формула, как и все аналитические выражения закона распределения ошибок, справедлива только в пределах

$$-|\Delta_{\text{доп}}| < \Delta < +|\Delta_{\text{доп}}|.$$

**Линейное распределение.** К равновероятному распределению по своей простоте близко примыкает линейное распределение ошибок, изображенное на рис. 4 ломаной линией  $\epsilon$ . Его аналитическое выражение

$$p(\Delta) = \frac{1}{|\Delta_{\text{доп}}|} \left( 1 \mp \frac{\Delta}{|\Delta_{\text{доп}}|} \right), \quad (2.4)$$

где знак минус соответствует значениям  $\Delta > 0$ , а знак плюс — значениям  $\Delta < 0$ . При таком распределении наибольшей вероятностью обладают ошибки, близкие к нулю, а вероятность больших и меньших ошибок линейно убывает, достигая нуля при  $\Delta = \pm \Delta_{\text{доп}}$ .

**Нормальное распределение.** Из других, более сложных законов распределения ошибок наибольший интерес представляет собой так называемый *нормальный закон*, часто называемый также законом Гаусса, хотя честь его открытия принадлежит Мозеру [4—17], а чрезвычайно широкое его распространение обусловлено сначала Лапласом [8—148], а затем более строго Ляпуновым [4—108]. При нормальном законе, как и при линейном, наибольшей вероятностью обладают ошибки, близкие к нулю (кривая  $\epsilon$  на рис. 4), но наряду с этим возможны и очень большие по абсолютной величине положительные и отрицательные ошибки,

хотя вероятность их по мере удаления от нуля быстро становится исчезающе малой. Характерным примером такого распределения могут служить ошибки суммы большого числа слагаемых, о которых уже говорилось выше.

Аналитически нормальный закон выражается следующей зависимостью:

$$p(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\sigma^2}} \quad (2.5)$$

Постоянная  $\sigma^2$ , входящая в это выражение, носит название *дисперсии*, т. е. рассеяния, так как именно ею и только ею опре-

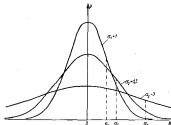


Рис. 5. Нормальный закон распределения.

делается относительная вероятность появления больших и малых ошибок при нормальном законе их распределения. Уменьшение  $\sigma^2$  увеличивает вероятность ошибок, близких к нулю, и уменьшает вероятность больших по абсолютной величине ошибок; увеличение  $\sigma^2$  — наоборот. Эта зависимость наглядно показана на рис. 5, где приведены графические изображения нормального распределения для трех различных значений дисперсий  $\sigma_1^2 = 1$ ;  $\sigma_2^2 = 1,5^2 = -2,25$  и  $\sigma_3^2 = 3^2 = 9$ .

Кривая  $\epsilon$  на рис. 4 относится к одному из многих параболических законов распределения, связывающих среднее, переходное место между линейным и нормальными законами.

Встречаются и многие другие, более сложные законы распределения, которых здесь касаться не будем ввиду их малого практического значения для теории ошибок.



Все описанные выше законы распределения ошибок симметричны относительно нуля. На практике возможен и случай несимметричного распределения, когда ошибки одного знака оказываются более вероятными, чем другого. Однако такие случаи займемся позднее, в § 8, пока же будем предполагать, что симметричность свойственна всем рассматриваемым нами законам.

### § 3. Численные характеристики законов распределения

Для численного сравнения различных законов распределения и более четкого определения точности любой приближенной

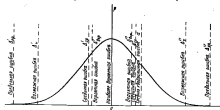


Рис. 6. Численные характеристики закона распределения ошибок.

величинами в теории ошибок вводится ряд характеристик, отчасти заимствованных из общей теории вероятностей, отчасти специфических для этой теории. Без таких характеристик непосредственное сравнение многообразных законов распределения было бы невозможно. Ниже приводятся определения этих характеристик и краткое описание их основных свойств и особенностей, которые будут выявляться более подробно в дальнейшем изложении (рис. 6).

Одной из характеристик, наиболее часто применяемых для сравнения аналогичных кривых или функций, является их среднее значение или ордината (среднее давление, средний уровень и т. д.). Однако для рассматриваемых нами случайных ошибок такая характеристика не может считаться удовлетворительной: в силу симметрии распределения среднее арифметическое из всех ошибок должно всегда равняться нулю, а отклонение его от нуля свидетельствует лишь о недостаточности опыта или наличии неверных предположек. Более четким показателем точности приближенной величины может служить уже упомянутая выше диспер-

сия — понятие, которое может быть распространено и на другие законы распределения, помимо нормального.

Дисперсия. Назовем дисперсией среднее арифметическое из квадратов всех случайных ошибок и докажем, что это определение не противоречит данному в § 2, где дисперсия была названа постоянной  $\sigma^2$  в аналитическом выражении нормального закона.

Для дискретного ряда, состоящего из  $n$  наблюдений,

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum \Delta_i^2. \quad (3, 1)$$

Для большого числа наблюдений, результаты которых изображены гистограммой вида рис. 3,

$$\sigma^2 = \sum \left( \Delta_i + \frac{1}{2} \epsilon \Delta \right)^2 p(\Delta) \epsilon \Delta,$$

где  $\Delta_i$  — значение ошибки, соответствующей границе данного интервала (от  $\Delta_i$  до  $\Delta_i + \epsilon \Delta$ );

$p(\Delta) \epsilon \Delta$  — вероятность появления ошибок в этом интервале. Наконец, для бесконечно большого числа наблюдений, результаты которых изображаются непрерывной функцией вероятностей,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta. \quad (3, 2)$$

Подставляя сюда вместо плотности вероятности  $p(\Delta)$  ее выражение для нормального закона от равенства (2, 3), получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma_x^2}} d\Delta,$$

где  $\sigma_x$  — пока лишь некоторая постоянная нормального закона.

Сделаем подстановку

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma_x^2}$$

и заметим, что в силу симметричности ошибок относительно нуля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma_x^2}} d\Delta = 2 \int_0^{+\infty} \Delta^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma_x^2}} d\Delta,$$

поэтому

$$\sigma^2 = \frac{4\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Но так как

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi},$$

то после подстановки получим  $\sigma^2 = \sigma_{\text{н.}}^2$ , т. е. постоянная нормального закона действительно является дисперсией и установившем нами определении этого термина.

Понятие дисперсии в теории ошибок, как и в общей теории вероятностей, играет первостепенную роль. Оно позволяет не только охарактеризовать точность рассматриваемой приближенной величины, но и наиболее просто оценить точность результатов вычислений, включающих в себя случайные величины с различными законами распределения ошибок. Этому способствует свойство аддитивности дисперсий, которое мы докажем несколько ниже (§ 9).

Нахождение дисперсий для других законов распределения также не вызывает существенных затруднений. Так, например, для равновероятного закона согласно формулам (2, 3) и (3, 2)

$$\sigma^2 = \int_{-|\Delta_{\text{ог}}|}^{+|\Delta_{\text{ог}}|} \Delta^2 \frac{1}{2|\Delta_{\text{ог}}|} d\Delta = \frac{1}{3} \Delta_{\text{ог}}^2. \quad (3, 3)$$

Для логического закона, описываемого формулой (2, 4), аналогично получаем

$$\sigma^2 = \int_{-|\Delta_{\text{ог}}|}^{+|\Delta_{\text{ог}}|} \frac{\Delta^2}{|\Delta_{\text{ог}}|} \left(1 \mp \frac{\Delta}{|\Delta_{\text{ог}}|}\right) d\Delta = \frac{1}{6} \Delta_{\text{ог}}^2. \quad (3, 4)$$

Несмотря на указанные выше преимущества понятие дисперсии имеет и один существенный недостаток: она измеряется квадратом тех единиц, в которых измеряются ошибки. Вследствие этого терпится наглядность и затрудняется физическое познание той оценки точности, которая ею дается. Поэтому в практических приложениях теории ошибок вместо дисперсии чаще применяется понятие о средней квадратичной ошибке, как величине, имеющей ту же размерность, что и предельная и любая случайная ошибка.

**Средняя квадратичная ошибка.** Средней квадратичной ошибкой  $\sigma$  называется квадратный корень из дисперсии, т. е. среднего арифметического из квадратов всех случайных ошибок. В теории вероятностей подобная величина часто называется стандартом или средним квадратичным отклонением, но для теории ошибок указанные выше название более естественно. Значения средних квадратичных ошибок могут быть нанесены на диаграммы законов распределения, что и выполнено на рис. 4 и 5. Графическое изображение дисперсия на этих диаграммах невозможно.

В частности, для равновероятного закона распределения

$$\sigma = \frac{\Delta_{\text{ог}}}{\sqrt{3}} = 0,5773\Delta_{\text{ог}}. \quad (3, 5)$$

Это выражение найдет себе в дальнейшем нахождении широкие приложения.

**Нормированная ошибка.** Нормированной ошибкой  $z$  называется отношение любой случайной ошибки к средней квадратичной

$$z = \frac{\Delta}{\sigma}. \quad (3, 6)$$

В теории вероятностей этому понятию соответствует термин нормированное отклонение.

Введение этого понятия способствует значительному упрощению многих расчетов, так как позволяет привести законы распределения к безразмерному виду, вычислить заранее значения определенных их функций и представить их в табличной форме. Пользование такими таблицами столь же просто, как, например, таблицами логарифмов, между тем как вычисление вероятностей по размерным формулам подчас представляет собой довольно сложную и трудоемкую работу. Кроме того, переход от размерных ошибок к нормированным позволяет установить ряд общих закономерностей, применимых к величинам любых масштабов и порядков.

В качестве примера рассмотрим безразмерную форму нормального закона распределения (2, 5). Для этого вспомни, что плотность вероятности  $p(\Delta)$  может быть выражена как отношение  $\frac{dP}{d\Delta}$ , где  $dP$  — вероятность появления ошибок в пределах от  $\Delta$  до  $\Delta + d\Delta$ , а  $d\Delta$  — малый интервал. Замена здесь в соответствии с (3, 6)  $\Delta = z\sigma$ , найдем

$$p(\Delta) = \frac{dP}{d\Delta} = \frac{1}{\sigma} \frac{dP}{dz} = \frac{1}{\sigma} p(z). \quad (3, 7)$$

Сравнивая это выражение с (2, 5), получим

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}. \quad (3, 8)$$

Таблицы значений этой функции широко распространены [8—35] в др.<sup>1</sup> При использовании ими достаточно разделить интересующую нас случайную ошибку на среднюю квадратичную, после чего соответствующая плотность вероятности находится непосредственно по таблице. Так же легко решается и обратная задача отыскания случайной ошибки по заданной плотности вероятности.

Аналогично на основании (2, 3) и (2, 4) может быть найдена безразмерная форма закона равновероятного распределения

$$p(z) = \frac{1}{2\sigma_{\text{ог}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0,2887 \quad (3, 9)$$

<sup>1</sup> Здесь мы не приводим, так как для решения практических задач нужен не сам закон (3,8), а интеграл от нее, к чему мы далее и перейдем.

и левейного закона

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(1 \pm \frac{x}{\sqrt{6}}\right) = 0,408 (1 \pm 0,408x). \quad (3, 10)$$

Следовательно, для исчерпывающего описания закона распределения ошибок достаточно знать только среднюю квадратичную ошибку  $\sigma$  и безразмерную функцию  $\rho(x)$ .

**Средняя ошибка.** Средней ошибкой  $\Delta_{cp}$  называется среднее арифметическое из абсолютных значений всех случайных ошибок.

Для дискретного ряда наблюдений

$$\Delta_{cp} = \frac{1}{n} \sum |\Delta_i|. \quad (3, 11)$$

Для непрерывного закона распределения

$$\Delta_{cp} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| \rho(\Delta) d\Delta. \quad (3, 12)$$

Нетрудно убедиться в том, что средняя ошибка всегда меньше средней квадратичной. В случае нормального закона распределения  $\Delta_{cp} = 0,7978\sigma$ . Для равновероятного закона  $\Delta_{cp} = 0,5\Delta_{cp} = -0,8675\sigma$ . При графическом изображении закона распределения средней ошибки соответствует абсцисса центра тяжести полновинной площади диаграммы, лежащей в любую сторону от нуля.

Понятие средней ошибки может быть использовано в тех случаях, когда все входящие в расчет приближенные величины имеют одинаковые законы распределения ошибок. Только в этом случае оправдываются те упрощения, которые дает замена средней квадратичной ошибки на среднюю арифметическую, так как только при этом условии средние ошибки, как будет показано ниже (§ 9), приобретают свойство аддитивности. Для кораблестроительных расчетов, содержащих много величин, подчиняющихся различным законам распределения, применение понятия средней ошибки не может быть рекомендовано.

**Допустимая ошибка.** Допустимой ошибкой  $\Delta_d$  будем называть ту наибольшую по абсолютной величине случайную ошибку, которая может быть допущена по условиям данной задачи, т. е. появление которой не вызовет необходимости вносить какие-либо изменения в конструкцию, размеры или другие исходные данные рассматриваемого расчета или проекта и не представляет опасности при практическом его использовании.

**Возможная ошибка.** Возможной ошибкой  $\Delta_v$  назовем ту наибольшую по абсолютной величине случайную ошибку, вероятность появления которой еще достаточно реальна в данных условиях.

Во всех случаях, кроме равновероятного закона, вероятность появления тех же или иных случайных ошибок падает с увеличением

их абсолютного значения. Поэтому всегда можно провести некоторую границу между областью малых ошибок, появление которых достаточно вероятно, и областью больших ошибок, вероятность появления которых настолько мала, что практически с нулем можно не считаться. Любая случайная ошибка от нуля до указанной границы должна считаться возможной, а эта граница может быть названа пределом возможных ошибок. Но для краткости обозначения под термином *возможная ошибка* условимся, как правило, понимать именно предел возможных ошибок, а любую ошибку, меньшую этого предела, будем считать необходимой, будем называть одной из возможных или просто случайной ошибкой.

Указанное рассуждение может быть условно распространено и на равновероятное распределение, если принять в качестве критерия ее вероятность появления самой возможной ошибки, а общую вероятность появления всех ошибок в пределах от нуля до возможной. Разница будет лишь в том, что в этом случае возможная ошибка окажется при той же достоверности более близкой к предельной, чем при любой другом законе распределения.

Очевидным признаком применимости результатов расчета или измерения следует считать неравенство  $|\Delta_v| < |\Delta_d|$ , и так как допускаемые ошибки различных знаков, вообще говоря, могут различаться между собой и по абсолютной величине, то также же различия могут существовать, даже при симметричных законах распределения, и между вероятностями появления возможных ошибок различных знаков.

#### § 4. Степень достоверности случайной величины

Для практических целей нет необходимости определять вероятность появления каждой отдельной случайной ошибки, но необходимо знать лишь вероятность того, что возможная ошибка не выйдет за допустимые пределы. Так как эта вероятность должна быть достаточно высокой (иначе такой случайная величина не могла бы вводиться в расчет), будем называть ее для краткости *степенью достоверности* или просто *достоверностью* данного приближенного значения рассматриваемой величины. Обозначать ее будем буквой  $v$ , которая уже нами применялась в виде индекса при символе возможной ошибки. В качестве численного примера приведем данные результатов взвешивания одной серии идентичных насосов

$$P_v = (253 \pm 1_{v,99}) \text{ кг},$$

что означает: средний вес одного насоса равен 253 кг с возможной ошибкой  $\Delta_v = \pm 1$  кг при достоверности последней  $v = 0,99$  или 99%.

На самого определения степени достоверности следует, что численно она должна быть равна сумме вероятностей всех случайных ошибок, величина которых лежит в пределах

$$-|\Delta_v| < \Delta < +|\Delta_v|.$$

Следовательно, она может быть найдена интегрированием закона распределения в этих пределах

$$v = \int_{-|\Delta_v|}^{+|\Delta_v|} p(\Delta) d\Delta \quad (4.1)$$

или планиметрированием той части площади под кривой вероятности (рис. 6), которая лежит между соответствующими ординатами.

В наиболее рациональном случае возможные ошибки должны совпадать с допустимыми, а если при этом предельные ошибки будут по абсолютной величине равны допустимым или меньше их ( $|\Delta_{до}| < |\Delta_p|$ ), то на основании (4.1) можно утверждать, что данная случайная величина имеет достоверность  $v = 1$  и, следовательно, в частных условиях рассматриваемой задачи может считаться достоверной. Этим разъясняется приведенное выше утверждение о возможности включения в число достоверных величин тех-же постоянных, как  $\pi$ ,  $e$  и т. д., значения которых всегда может быть введено в расчет с предельной ошибкой, меньшей, чем допустимая.

В практике проектирования судов случай неравенства абсолютных значений допустимых ошибок разных знаков наиболее обычны: недостаток остойчивости опаснее ее избытка; перенапряжение деталей корпуса опаснее, чем избыток их прочности; перегрузка судна менее желательна, чем недозвес и т. д. Поэтому для удобства определения степени достоверности целесообразно представить правую часть равенства (4.1) в виде дробля

$$v = \int_{-\Delta_v}^0 p(\Delta) d\Delta + \int_0^{+\Delta_v} p(\Delta) d\Delta \quad (4.2)$$

В частности, если одна из допустимых ошибок равна или больше предельной, соответствующий член правой части этого равенства в силу симметрии законов распределения становится равным 0,5, и все выражение (4.2) приобретает один из следующих видов:

$$v_1 = \int_{-\Delta_v}^0 p(\Delta) d\Delta + 0,5 \quad (4.3)$$

или

$$v_2 = 0,5 + \int_0^{+\Delta_v} p(\Delta) d\Delta \quad (4.4)$$

Этим выражениям присвоено наименование частных достоверностей, так как каждое из них связано только с возможной ошибкой одного знака, с другой же стороны ограничивается лишь предельной ошибкой, абсолютное значение которой в большинстве случаев весьма велико. Первое из них показывает вероятность

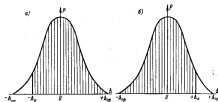


Рис. 7. Частные достоверности.

того, что любая случайная ошибка не будет меньше  $\Delta_v < 0$  (рис. 7, а), второе — что любая случайная ошибка не будет больше  $\Delta_v > 0$  (рис. 7, б).

Складывая выражения (4.3) и (4.4) и сравнивая их сумму с равенством (4.2), найдем общую достоверность

$$v_3 = v_1 + v_2 - 1 \quad (4.5)$$

Так как случай неравенства частных достоверностей является наиболее общим и встречается более часто, то именно к нему и будут относиться все дальнейшие рассуждения, графики и таблицы. Это позволяет нам опускать соответствующие выкладки в слово частным, за исключением особых случаев, которые будут специально оговариваться.

Если при некоторых условиях допустимые ошибки обоих знаков окажутся равными по абсолютной величине, то переход от частной достоверности к общей может быть сделан по следующей более удобной для вычислений формуле

$$v_4 = 1 - 2(1 - v_1) \quad (4.6)$$

На практике оба предела допустимых ошибок могут оказаться и одинакового знака, хотя и разными по абсолютной величине. Примерами таких пределов могут служить допуски к размерам сопрягаемых деталей (ходовая посадка) или в весе некоторых узлов судового корпуса и т. п. В таких случаях необходимо лишь указать, что вероятность превышения какой-либо границы равна дополнению до единицы вероятности ее невыполнения и наоборот. Следовательно,

$$v(+|\Delta_v) = 1 - v(-|\Delta_v). \quad (4, 7)$$

Это выражение позволяет рассчитывать частную достоверность ошибок одного знака по таблицам или графикам частных достоверностей ошибок другого знака.

**Пример.** Допустим, что вероятность отступления в размере какого-либо узла от номинала не более, чем на  $+0,1$  мм, равна  $v(+0,1) = 0,8$ , а отступления не более, чем на  $-0,2$  мм,  $v(-0,2) = 0,95$ . Считая закон распределения ошибок симметричным<sup>1</sup>, мы можем утверждать, что номинальный размер узла будет выдержан в пределах допуска от  $-0,2$  до  $+0,1$  мм с общей достоверностью

$$v_0 = v(+0,1) + v(-0,2) - 1 = 0,8 + 0,95 - 1 = 0,75.$$

Если же оба указанных допуска будут иметь один знак, например минус, то

$$v(-0,1) = 1 - v(+0,1) = 1 - 0,8 = 0,2,$$

и общая достоверность того, что размер узла будет выдержан в пределах от  $-0,2$  до  $-0,1$  мм,

$$v_0 = 0,2 + 0,95 - 1 = 0,15.$$

С понятием достоверности непосредственно связано и понятие о вероятной ошибке, которое широко используется в теории стрельбы [4—116], а иногда встречается и в другой специальной литературе.

**Вероятная ошибка.** Вероятной ошибкой  $\Delta_v$  называют ту границу абсолютных значений случайных ошибок, по отношению к которой вероятность появления больших и меньших ошибок одинакова. Аналитически величина вероятной ошибки определяется общей достоверностью  $v_0 = 0,5$ , т. е.

$$v_0 = \int_{-\Delta_v}^{+\Delta_v} p(\Delta) d\Delta = 0,5. \quad (4, 8)$$

Частная достоверность вероятной ошибки одного знака согласно формуле (4, 4), очевидно, будет равна

$$v_0 = 0,5 + \frac{1}{2} v_0 = 0,75. \quad (4, 9)$$

<sup>1</sup> Это может иметь место в том случае, если наличие асимметричных допусков не учитывалось при изготовлении. Другим условием будет рассмотрен в § 8.

Применение вероятной ошибки для оценки результатов судостроительных расчетов было рекомендовано в 1901 г. И. Г. Бубновым [2—12—127]. Однако эта рекомендация не получила признания ввиду малой достоверности рассматриваемой величины.

Если на графике закона распределения (рис. 6) провести прямые  $\Delta = \pm |\Delta_v|$ , то площадь каждой половинки диаграммы окажется разделенной на две равные части. Подобные же прямые для средней ошибки  $\Delta = \pm |\Delta_{cp}|$ , как мы отметили выше, проходят через центры тяжести тех же половинок диаграммы. Следовательно, вероятная ошибка для равновероятного закона распределения совпадает со средней, для всех же других законов оказывается меньше средней. В частности, при нормальном законе  $\Delta_v = 0,8454 \Delta_{cp} = 0,6745 \sigma$ .

**Вычисление частной достоверности.** Вычисление частной достоверности для любого закона распределения ошибок может быть выполнено по формуле (4, 4). Например, для равновероятного закона имеем

$$p(\Delta) = \frac{1}{2|\Delta_{cp}|},$$

и, следовательно, достоверность

$$v = 0,5 - \int_0^{\Delta_v} \frac{d\Delta}{2|\Delta_{cp}|} = 0,5 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_v}{|\Delta_{cp}|}$$

или после перехода к нормированным ошибкам

$$v = 0,5 + \frac{1}{2} \frac{z_v}{\sqrt{3}} = 0,5 + 0,2886 z_v. \quad (4, 10)$$

Достоверность становится полной ( $v = 1$ ) при  $z_v = z_{cp} = -\sqrt{3}$ .

Аналогично может быть найдено выражение для достоверности линейного закона

$$v = 0,5 + \frac{z_v}{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{z_v}{2\sqrt{6}}\right). \quad (4, 11)$$

Ее максимум, равный единице, достигается при  $z_v = z_{cp} = -\sqrt{6}$ .

Значительно сложнее вычисление достоверности ошибок, имеющих нормальный закон распределения. В этом случае выражение (4, 4) приобретает следующий вид:

$$v = 0,5 + \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta_v} e^{-\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\sigma^2}} d\Delta. \quad (4, 12)$$

Нормированные возможные ошибки ( $\nu$ ) в функции от заданной достоверности ( $\nu$ ) при нормальном распределении

$\nu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,5	0,26	0,28	0,31	0,33	0,36	0,39	0,41	0,44	0,47	0,50
0,7	0,52	0,55	0,58	0,61	0,64	0,67	0,71	0,74	0,77	0,81
0,8	0,64	0,68	0,72	0,75	0,79	0,84	0,88	0,93	0,97	1,01
0,9	1,28	1,34	1,41	1,48	1,56	1,64	1,73	1,82	1,91	2,00
0,96	1,64	1,68	1,73	1,78	1,83	1,89	1,94	2,00	2,06	2,12
0,98	1,76	1,79	1,83	1,87	1,92	1,96	2,01	2,06	2,11	2,16
0,99	1,88	1,91	1,94	1,98	2,02	2,06	2,11	2,16	2,21	2,26
0,99	2,06	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,35	2,37	2,41	2,44	2,47	2,51	2,54	2,57	2,60	2,63
0,995	2,58	2,58	2,59	2,60	2,61	2,61	2,62	2,63	2,64	2,65
0,996	2,65	2,65	2,67	2,68	2,69	2,70	2,71	2,72	2,73	2,74
0,997	2,73	2,76	2,78	2,79	2,80	2,81	2,83	2,84	2,85	2,87
0,998	2,89	2,91	2,92	2,93	2,95	2,97	2,99	3,00	3,04	3,07
0,999	3,10	3,13	3,16	3,20	3,24	3,28	3,32	3,37	3,41	3,47
0,9995	3,20	3,20	3,21	3,21	3,21	3,22	3,23	3,24	3,25	3,25
0,9996	3,25	3,26	3,27	3,27	3,28	3,29	3,29	3,30	3,31	3,32
0,9997	3,43	3,44	3,45	3,46	3,47	3,48	3,49	3,50	3,51	3,53
0,9998	3,54	3,55	3,57	3,58	3,60	3,62	3,63	3,65	3,67	3,69
0,9999	3,72	3,75	3,77	3,81	3,85	3,89	3,94	4,01	4,11	4,27

Входящий сюда интеграл не может быть взят в конечном виде, нахождение же его значений численным методом для каждой частной задачи представляет собой чрезмерно трудоемкую работу. Вычисление значительно упрощается при переходе к системе нормированных ошибок

$$\nu = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\nu} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (4.13)$$

Выражение

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}z'^2} dz' \quad (4.14)$$

исот название функции Лапласа. Значения этой функции табулированы. Поэтому нахождение по готовым таблицам искомой достоверности по заданной нормированной возможной ошибке так же, как и решение обратной задачи, не представляет никаких затруднений [14—400]. Сокращенный список значений нормированной возможной ошибки в зависимости от заданной частной достоверности приведен в табл. 1.

### § 5. Ошибки неограниченного ряда измерений

**Математическое ожидание.** Допустим, что в результате  $n$  независимых и равноотличных измерений некоторой объективной величины  $X$  получены ряд ее случайных значений

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Как бы ни было велико число измерений, вся их совокупность еще не дает возможности установить истинное значение величины  $X$ , но позволяет лишь строить о ней те или иные предположения. Наиболее обоснованное на этих предположений называется математическим ожиданием величины  $X$ . Обозначим его буквой  $A$  и придадим ему основное свойство неограниченно приближаться к истинному значению величины  $X$  при увеличении числа измерений до бесконечности. Основными признаками этого свойства являются:

1) равная вероятность появления положительных и отрицательных ошибок или, иначе, равенство нулю их алгебраической суммы;

2) стремление к минимуму их дисперсия при увеличении числа измерений.

Математически эти признаки запишутся так:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n (a_i - A) = 0; \quad (5.1)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - A)^2 \rightarrow \min. \quad (5.2)$$

Дифференцируя второе из этих выражений, найдем

$$\frac{d}{dA} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = -2 \sum_{i=1}^n (a_i - A) = 0.$$

что равносильно выражению (5, 1). Таким образом, оба рассмотренные признака сводятся к одному

$$\sum_{\alpha} (a_i - A) \cdot \sum_{\alpha} a_i - nA = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\sum_{\alpha} a_i}{n}, \quad (5, 3)$$

т. е. величину математического ожидания следует считать равной среднему арифметическому из всех случайных значений измеряемой величины.

При неограниченном увеличении числа измерений математическое ожидание приближается к истинному значению  $X$ , но может совпасть с ним лишь случайно или асимптотически, при  $n \rightarrow \infty$ . Во всех реальных случаях необходимо считаться с возможностью его отклонения от величины  $X$ , которое и является случайной ошибкой приближенного определения последней

$$\Delta_A = A - X. \quad (5, 4)$$

Введем следующие обозначения:

$\Delta_i = a_i - X$  — истинная ошибка отдельного измерения;

$\epsilon_i = a_i - A$  — отклонение отдельного измерения от среднего  $A$ .

Отсюда находим

$$\epsilon_i = \Delta_i + X - A = \Delta_i - \Delta_A.$$

т. е. случайное отклонение отдельного измерения от среднего, вообще говоря, должно быть меньше действительной случайной ошибки этого измерения.

С другой стороны, очевидно, что действительная ошибка среднего должна равняться среднему из действительных ошибок отдельных наблюдений

$$\Delta_A = \frac{\sum_{\alpha} \Delta_i}{n}. \quad (5, 5)$$

Следовательно,

$$\epsilon_i = \Delta_i - \frac{\sum_{\alpha} \Delta_i}{n}, \quad (5, 6)$$

где  $\sum_{\alpha} \Delta_i$  согласно определению не равна нулю.

Для нахождения среднего квадратичного отклонения результатов всех измерений от среднего  $A$  возведем это выражение в квадрат

$$\epsilon_i^2 = \Delta_i^2 - 2\Delta_i \frac{\sum_{\alpha} \Delta_i}{n} + \frac{(\sum_{\alpha} \Delta_i)^2}{n^2}$$

и затем сложим его значения для всех индексов  $i$

$$\sum_{\alpha} \epsilon_i^2 = \sum_{\alpha} \Delta_i^2 - 2 \sum_{\alpha} \Delta_i \frac{\sum_{\alpha} \Delta_i}{n} + n \frac{(\sum_{\alpha} \Delta_i)^2}{n^2}. \quad (5, 7)$$

Естественно предположить, что при весьма большом числе измерений и отсутствии каких-либо приходящих обстоятельств (см. § 8) истинные ошибки измерений будут располагаться симметрично относительно нуля так, что каждому значению  $\Delta_i$  будет соответствовать равное ему по абсолютной величине, но противоположное по знаку значение  $-\Delta_i$ . Поэтому, раскрывая выражение

$$2 \sum_{\alpha} \Delta_i \frac{\sum_{\alpha} \Delta_i}{n} = \frac{2}{n} \left[ \sum_{\alpha} \Delta_i^2 + \sum_{\alpha} \Delta_i \Delta_j \right],$$

где  $i \neq j$ , можно считать

$$\sum_{\alpha} \Delta_i \Delta_j = 0.$$

Аналогично преобразуется последний член равенства (5, 7) и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} \epsilon_i^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{\alpha} \Delta_i^2. \quad (5, 8)$$

Замена здесь сумму квадратов случайных ошибок их дисперсий, в соответствии с равенством (3, 1) получим

$$\sum_{\alpha} \epsilon_i^2 = (n-1) [\sigma(a_i)]^2.$$

Отсюда может быть найдено значение средней квадратичной ошибки отдельных измерений

$$\sigma(a_i) = \sqrt{\frac{\sum_{\alpha} \epsilon_i^2}{n-1}}. \quad (5, 9)$$

Для определения дисперсии математического ожидания представим себе, что произведено  $m$  серий независимых измерений

и для каждой серии найдена случайная ошибка среднего  $\Delta_A$ , значение которой дается равенством (5, 8). Тогда средняя квадратичная ошибка математического ожидания будет

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{\sum \Delta_A^2}{n}}$$

Но в нашем случае  $n = 1$  и, следовательно,

$$\sigma(A) = \sqrt{\Delta_A^2} = \sqrt{\frac{(\sum \Delta_i)^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{[\sigma(\Delta)]^2}{n}}$$

Поэтому с учетом (5, 9) окончательно получаем

$$\sigma(A) = \sqrt{\frac{\sum \sigma_i^2}{n(n-1)}} \quad (5, 10)$$

Более подробное обоснование этой формулы можно найти в специальной литературе [19—165, 4—308 и др.]

Рассматривая равенство (5, 9), легко заметить, что с увеличением числа измерений и числитель его подкоренного выражения при сохранении точности измерений должен увеличиваться примерно пропорционально  $n$ . Следовательно, средняя квадратичная ошибка отдельных измерений при этом будет уменьшаться, приближаясь к постоянной величине  $\sigma_p$ . При тех же условиях средняя квадратичная ошибка математического ожидания согласно (5, 10) стремится к нулю, что и подтверждает правильность выбранного его определения.

### § 6. Ошибки конечного ряда измерений

При выводе выражения (5, 8) мы сделали допущение о симметричности распределения действительных ошибок случайного ряда измерений относительно нуля. Однако такое предположение может считаться достаточно вероятным только при весьма большом числе наблюдений, при котором среднее из всех случайных измерений мало отличается от истинного значения измеряемой величины, а вероятности появления одинаковых по абсолютной величине ошибок с полярно противоположными знаками близка к полной достоверности.

При меньшем числе наблюдений это условие не выполняется и среднее из фактически произведенных измерений может более существенно отклониться от истинного значения измеряемой величины. В связи с этим и предпосылка о симметричности распределения фактических ошибок ограниченного ряда наблюдений относительно нуля становится неправомерной. Однако и выска-

зывать какие-либо суждения о величине и направлении этого нарушения симметрии у нас нет оснований. Мы можем лишь утверждать, что вероятность совпадения среднего из ряда наблюдений с истинным значением измеряемой величины (ошибка  $\Delta_A = 0$ ) закономерно уменьшается с уменьшением числа наблюдений, а вероятность появления больших ошибок и, следовательно, средняя квадратичная ошибка малого числа наблюдений должны быть больше, чем при большем количестве наблюдений.

Распределение Стьюдента. Практически установлено, что указанные выше закономерности изменения вероятности больших

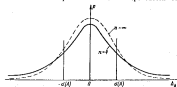


Рис. 8. Распределение ошибок ограниченного ряда наблюдений.

и малых ошибок в зависимости от числа наблюдений и наиболее близко описываются формулой, предложенной Стьюдентом [12—10],

$$p(\delta) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{\delta^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (6, 1)$$

где  $p(\delta)$  — плотность вероятности в распределении Стьюдента;  
 $\delta = \frac{\Delta_A}{\sigma(A)}$  — нормированная ошибка среднего из ограниченного ряда измерений;

$\Gamma$  — символ гамма-функции

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{x-1} \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Пример графического изображения закона распределения Стьюдента ( $n = 4$ ) для сравнения его с нормальным законом ( $n = \infty$ ) при той же  $\sigma(A)$  показан на рис. 8. Таблицы для построения подобных кривых можно найти в литературе [8—355]<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Кривая Стьюдента представляет собой частный случай кривых Лапласа [8—341].



К закону Стьюдента могут быть применены те же операции, которые применяются и к другим законам распределения. В частности согласно формулам (4.3) и (4.4) степень достоверности той или иной возможной ошибки находится путем численного интегрирования выражения (6.1) в соответствующих пределах. Например,

$$v_2 = 0,5 + \int_0^v p(s) ds. \quad (6.2)$$

Так как на практике чаще приходится решать обратную задачу, т. е. определить возможную ошибку по заданной степени достоверности, в табл. II приводятся значения  $s_v$  в функции от  $v$  и числа измерений  $n$ , а не наоборот, как обычно дается в литературе. Пользование этой таблицей покажем на примере.

Пример 1. Допустим, что в результате трех измерений исследуемой скорости грузо-автомобильного транспорта найдены следующие статистические значения:  $v_1 = 16,1$ ;  $16,3$  и  $15,9$  узла. Требуется найти ту максимальную среднюю скорость, которая может быть гарантирована с достоверностью 0,99 для вероятностного планирования грузовой перевозки, когда отклонения от средней скорости на отдельных рейсах не имеют существенного значения.

Для решения поставленной задачи и указания имеющегося крайнего ограничения опыта мы вынуждены принять в качестве математического ожидания скорости среднее из полученных замеров

$$v = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} = \frac{48,3}{3} = 16,1 \text{ узла.}$$

Его средняя квадратичная ошибка

$$\sigma(v) = \sqrt{\frac{\sum (v_i - v)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,98}{3 \cdot 2}} = 0,12 \text{ узла.}$$

В соответствии с требуемой степенью достоверности  $v = 0,99$  и значением опыта  $n = 3$  таблицаю находим  $s_v$  в табл. II. Значение нормализованной возможной ошибки  $s_v = 6,96$ . Следовательно, возможная ошибка возможной средней скорости составит

$$\Delta_v(v) = 6,96 \cdot 0,12 = 0,8 \text{ узла.}$$

Исходя из этого предель средней скорости, который и может быть гарантирован, осуществляется при этом

$$\text{или } (s_v) = 16,1 + 0,8 = 16,9 \text{ узла,}$$

а не 15,9 узла, как можно было бы предполагать непосредственно по данным трех измерений, а по 16,8 узла, как получилось бы в тех же условиях при расчете по нормальному закону.

Иные результаты могут быть получены при увеличении числа пробных рейсов, например до 16. Допустим, что в этом случае получены  $v_1 = 16,1$ ;  $16,3$ ;  $15,9$ ;  $16,0$ ;  $16,4$ ;  $16,0$ ;  $16,3$ ;  $16,1$ ;  $15,8$ ;  $16,3$ ;  $16,0$ ;  $15,9$ ;  $16,3$ ;  $16,1$ ;  $16,0$ ;  $16,2$  узла.

Математическое ожидание скорости в этом случае равно  $v = 16,1$  узла, но средняя квадратичная ошибка его уменьшается до  $\sigma(v)_{16} = 0,082$  узла, а нормализованная возможная — до  $s_v = 7,60$ . Пользование этого возможной ошибки уло-

женного математического ожидания составит всего  $\Delta_v(v)_{16} = 0,1$  узла, а предель предель скорости может быть установлен с заданной достоверностью в 16,0 узла. Это значение уже практически совпадает с результатом расчета по нормальному закону ( $s_v = 7,33$ ).

Средняя квадратичная ошибка математического ожидания. Рассмотрим табл. II, и старательно убедимся, что при увеличении числа наблюдений и плотности вероятности в распределении Стьюдента постепенно приближается к плотности распределения нормального закона и совпадает с ней при  $n \rightarrow \infty$ . При меньших  $n$  вероятность больших ошибок повышается за счет уменьшения вероятности малых, и, следовательно, средняя квадратичная ошибка математического ожидания существенно возрастает. Интегрирование равенства (6.1) для нахождения этой ошибки в общем виде затруднительно. Однако необходимость ее определения возникает каждый раз, когда результат наблюдений не является конечной целью исследования, но должен войти в качестве компонента в дальнейшие расчеты.

Поэтому для чисто практических целей воспользуемся близким сходством кривых Стьюдента и нормального закона и подберем такие условные значения средних квадратичных ошибок, которые после подстановки в нормальный закон давали бы те же возможные ошибки, что и распределение Стьюдента при подстановке в него непосредственно значения  $\sigma(A)$  из равенства (5.10). Для этого достаточно разделить все числа, указанные в табл. II, на соответствующие им значения, приведенные в последней ее строке. В результате получается система поправочных коэффициентов, на которые следует умножать среднюю квадратичную ошибку  $\sigma(A)$  среднего из случайного ряда наблюдений, чтобы найти наиболее вероятную среднюю квадратичную ошибку полученного с их помощью математического ожидания измеренной величины<sup>1</sup>.

$$\sigma = k_v \sigma(A). \quad (6.3)$$

Указанный расчет и выполнен в табл. III.

Для иллюстрации приведенного Verfahrens к примеру I, а вместо непосредственного определения нормализованной возможной ошибки Стьюдента  $s_v$  по табл. II найдем соответствующий поправочный коэффициент к средней квадратичной ошибке  $\sigma(v)$  по табл. III. Для  $n = 1 - 2$  и  $v = 0,99$  он равен  $k_v = 2,99$  и, следовательно, средняя квадратичная ошибка математического ожидания скорости должна считаться равной

$$\sigma = 2,99 \cdot 0,12 = 0,36 \text{ узла.}$$

Если подставим это значение в формулу нормального закона при  $v = 0,99$ , получим для возможной ошибки скорости то же

<sup>1</sup> Напомним, что понятие математического ожидания и среднего из ряда наблюдений по существу различны и могут совпадать только численно (5.16).

Таблица 1

Марксовские возможные ошибки ( $\sigma_n$ ) в функции от заданной достоверности ( $\nu$ ) в числе измерений ( $n$ ) при распределении Стьюдента

$n-1$	$\nu$	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
1	0,73	1,58	3,08	6,31	31,80	63,70	—	—
2	0,62	1,06	1,80	2,92	6,96	9,92	35,20	—
3	0,58	0,98	1,64	2,35	4,54	5,84	10,92	—
4	0,57	0,94	1,53	2,13	3,75	4,60	7,29	—
5	0,56	0,92	1,48	2,02	3,36	4,03	5,96	—
6	0,55	0,91	1,44	1,94	3,14	3,71	5,25	—
7	0,55	0,90	1,42	1,90	3,00	3,53	4,97	—
8	0,55	0,90	1,40	1,86	2,90	3,36	4,50	—
9	0,54	0,88	1,38	1,83	2,82	3,25	4,31	—
10	0,54	0,88	1,37	1,81	2,76	3,17	4,15	—
12	0,54	0,87	1,35	1,78	2,68	3,06	3,94	—
14	0,54	0,87	1,35	1,76	2,62	2,98	3,83	—
16	0,54	0,87	1,34	1,75	2,58	2,92	3,74	—
18	0,53	0,86	1,33	1,74	2,55	2,88	3,66	—
20	0,53	0,86	1,33	1,73	2,53	2,84	3,62	—
25	0,53	0,85	1,32	1,71	2,48	2,79	3,50	—
30	0,53	0,85	1,31	1,70	2,46	2,75	3,43	—
35	0,53	0,85	1,31	1,69	2,44	2,73	3,38	—
40	0,53	0,85	1,30	1,68	2,42	2,70	3,34	—
$\infty$	0,52	0,84	1,28	1,64	2,33	2,58	3,10	—

значение, которое более просто было бы известно иначе. Преимуществом нового пути является лишь получение условной средней квадратичной ошибки  $\sigma$ , которая может быть непосредственно введена в дальнейшие расчеты.

Величина этой средней квадратичной ошибки, очевидно, зависит от той степени достоверности, с которой она определена.

**Задача В. И. Романовского.** Значительно сложнее оценка средней квадратичной ошибки отдельных наблюдений. Однако и такую задачу иногда приходится решать на практике, хотя она еще пока и не имеет однозначного ответа. Лишь способ определения возможных границ интересующей нас ошибки был предложен В. И. Романовским в 1947 г. [12—32]. Он сводится к следующему.

Доказано, что вероятность неравенства

$$\sigma(\alpha_1)(1 - \varphi_n) < \sigma_i < \sigma(\alpha_1)(1 + \varphi_n), \quad (6, 4)$$

Таблица 111

Исправленные коэффициенты ( $k_n$ ) для перевода от средней квадратичной ошибки среднего из известного рода измерений в среднюю квадратичную ошибку миллиметровой оценки

$n-1$	$\nu$	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
1	1,40	1,64	2,40	2,85	13,05	24,70	—	—
2	1,12	1,26	1,48	1,78	2,99	3,25	8,42	—
3	1,12	1,17	1,28	1,43	1,85	2,12	3,52	—
4	1,10	1,12	1,20	1,30	1,61	1,78	2,58	—
5	1,08	1,10	1,16	1,23	1,44	1,66	1,92	—
6	1,06	1,08	1,13	1,18	1,35	1,44	1,73	—
7	1,05	1,07	1,11	1,16	1,29	1,36	1,68	—
8	1,05	1,06	1,09	1,13	1,25	1,30	1,65	—
9	1,04	1,05	1,08	1,12	1,21	1,26	1,67	—
10	1,04	1,05	1,07	1,10	1,19	1,23	1,61	—
12	1,04	1,04	1,06	1,08	1,15	1,19	1,57	—
14	1,03	1,03	1,05	1,07	1,12	1,16	1,54	—
16	1,03	1,03	1,05	1,07	1,11	1,15	1,51	—
18	1,03	1,03	1,04	1,06	1,09	1,12	1,48	—
20	1,02	1,02	1,04	1,05	1,08	1,10	1,47	—
25	1,02	1,02	1,03	1,04	1,07	1,08	1,43	—
30	1,02	1,02	1,03	1,04	1,06	1,07	1,41	—
35	1,01	1,01	1,02	1,03	1,05	1,06	1,39	—
40	1,01	1,01	1,01	1,02	1,04	1,05	1,38	—
$\infty$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,30	—

где  $\varphi_n$  — некоторая положительная величина, определяется выражением

$$L = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_0^{\varphi_n} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad (6, 5)$$

где в свою очередь

$$\alpha = \frac{1}{(1 - \varphi_n)^2} \sqrt{\frac{n-1}{2}} \quad (6, 6)$$

$$\beta = \frac{n-3}{2}$$

Численные значения функции  $L$  табулированы В. И. Романовским в широком пределах для значений  $2 < n < 1001$  и для  $0,001 < q_v < 10,0$  [12—110]. Пользуясь этими таблицами и замечая, что в принятых нами обозначениях

$$L = 2v - 1, \quad (6, 7)$$

легко найти величину поправки  $q_v$  для каждой степени достоверности  $v$ . Этой поправкой будет определена верхняя граница возможных значений средних квадратичных ошибок отдельных наблюдений из ограниченного их ряда

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma(\alpha_v)(1 + q_v), \quad (6, 8)$$

Умножив это выражение на соответствующую нормированную ошибку, можем получить величину возможной ошибки отдельного наблюдения. Однако вероятность совпадения максимумов  $\sigma_1$  и  $z_v$  мало вероятна. Поэтому для практических целей можно рекомендовать вместо формулы (6, 8) пользоваться несколько меньшей величиной

$$\sigma_1 = \sigma(\alpha_v)(1 - q), \quad (6, 9)$$

где наибольшая поправка  $q_v$  заменена средней квадратичной  $q$ . Значения ее, приведенные в табл. IV, вычислены на основании расчетов В. И. Романовского путем их интерполирования в предположении нормального закона распределения.

Пример 2. При типичных условиях примера 1 найти ту максимальную возбудительскую скорость, которая может быть поставлена в основу при составлении обоснованного расписания движения морского и железнодорожного транспорта с учетом того, что даже отдельные случаи опоздания теплохода будут вызывать серьезные неудобства для пассажиров.

Для решения задачи в новой постановке необходимо найти среднюю квадратичную ошибку отдельных измерений. По данным трех пробных рейсов она составляет

$$\sigma(\alpha)_3 = \sqrt{\frac{\sum (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,06}{2}} = 0,2.$$

В поправке ее при  $n-1 = 2$  и  $v = 0,99$  согласно табл. IV равен  $q = 2,92$ . Следовательно, в расчет должно быть внесено среднее квадратичное значение скорости

$$\sigma(\alpha)_9 = 0,2(1 + 2,92) = 0,76.$$

При заданной степени достоверности  $v = 0,99$  согласно табл. I имеем  $\alpha_v = 2,33$ , и, следовательно, возможная ошибка скорости составит

$$\Delta v(\alpha)_9 = 2,33 \cdot 0,76 = 1,8 \text{ узла.}$$

а скорость, которая может быть поставлена в основу при составлении графика,

$$v(\alpha)_9 = 16,1 - 1,8 = 14,5 \text{ узла.}$$

Что отбрасывается от средней скорости из числа пробных рейсов в меньшую сторону на 0,8 узла.

В случае увеличения числа пробных рейсов до 16 средняя квадратичная ошибка отдельных наблюдений уменьшится до 0,16 узла, а поправка ее — до 0,25. В результате расчетное среднее квадратичное значение ошибки будет

$$\sigma(\alpha)_9 = 0,16(1 + 0,25) = 0,2 \text{ узла.}$$

Средние квадратичные поправки ( $q$ ) к средней квадратичной ошибке отдельных наблюдений из конечного их ряда

$v$ $n-1$	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
1	0,81	1,08	1,20	1,23	—	—	—
2	0,54	0,56	0,54	1,27	2,52	3,29	—
3	0,43	0,44	0,57	0,78	1,29	1,83	2,58
4	0,37	0,37	0,45	0,57	0,90	1,03	1,45
5	0,33	0,33	0,38	0,47	0,68	0,78	0,97
6	0,30	0,30	0,33	0,40	0,56	0,67	0,81
7	0,27	0,27	0,30	0,35	0,49	0,59	0,65
8	0,25	0,25	0,27	0,30	0,43	0,52	0,56
9	0,24	0,24	0,25	0,29	0,38	0,45	0,48
10	0,23	0,23	0,23	0,27	0,35	0,39	0,45
12	0,21	0,21	0,22	0,24	0,30	0,34	0,38
14	0,19	0,19	0,20	0,22	0,27	0,30	0,32
16	0,18	0,18	0,19	0,20	0,24	0,27	0,29
18	0,16	0,16	0,17	0,18	0,21	0,24	0,26
20	0,15	0,15	0,16	0,17	0,20	0,21	0,24
25	0,14	0,14	0,15	0,15	0,18	0,19	0,21
30	0,13	0,13	0,13	0,14	0,16	0,17	0,18
35	0,12	0,12	0,13	0,13	0,15	0,15	0,17
40	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,16
∞	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

а возможная ошибка скорости

$$\Delta v(\alpha)_9 = 2,33 \cdot 0,2 = 0,5 \text{ узла.}$$

Следовательно, график движения транспорта следует составлять исходя из расчетной скорости теплохода

$$v(\alpha)_9 = 16,1 - 0,5 = 15,6 \text{ узла.}$$

Таким образом, увеличение шкелетного объема позволяет повысить расчетную плановую скорость более, чем на 1 узла.

**Выпадающие измерения.** Конечный ряд измерений одной и той же величины можно представить как случайную выборку из результатов бесконечно большого числа возможных наблюдений. В связи с этим среди полученных значений измеряемой величины случайно могут оказаться и такие, возможность повторения которых при более длительных наблюдениях хотя и не

## § 7. Погрешности случайных величин

В практике приближенных вычислений слова *ошибка* и *погрешность* часто рассматриваются как синонимы. Поэтому для уточнения понятия к ним приходится добавлять определения *абсолютных* или *относительных*. Это особенно неудобно, когда те же прилагательные необходимо одновременно применять и в другом их смысле: *абсолютная величина ошибки* (без учета знака) или *относительная величина погрешности* (по отношению к другим) и т. п. Поэтому для краткости речи и более четкого определения условимся называть ошибкой  $\Delta$  только абсолютную (размерную) разность между случайным (приближенным) значением измеряемой величины  $A$  и ее истинным (точным) значением  $X$

$$\Delta = A - X, \quad (7.1)$$

а погрешностью  $\delta$  — безразмерное отклонение этой разности к истинному значению той же величины

$$\delta = \frac{\Delta}{X} = \frac{A - X}{X} = \frac{A}{X} - 1. \quad (7.2)$$

Величина ошибок не дает ясного представления о трудности и необходимой тщательности измерений или вычислений: измерить длину стола с точностью до  $\pm 1$  см не представляет никакой трудности, это может быть выполнено простой линейкой, но для измерения с той же абсолютной точностью длины большого корабля потребуются специальные оборудование и работа целой бригады проверяющих. Погрешность в этом отклонении является более характерным и удобным показателем, так как связывает величину допустимых ошибок с величиной объекта измерения, а при вычислениях дает непосредственные указания на возможность применения простой логарифмической линейки или необходимость использования таблиц логарифмов с тем или иным числом знаков или, быть может, даже вычислительных машин.

Численные характеристики погрешностей. К понятию погрешности могут быть отнесены все те категории, которые рассматривались выше в применении к ошибкам. В частности, погрешность может быть случайной

$$\delta_0 = \frac{\delta_1}{X}, \quad (7.3)$$

средней квадратичной

$$\delta = \frac{\sigma}{X}, \quad (7.4)$$

возможной

$$\delta_{\max} = \frac{A_{\max}}{X} \quad (7.5)$$

исключена, но пренебрежимо мала. Характерным их признаком является резкое отличие по величине от остальных совокупности полученных результатов и от среднего из них. Учет подобных маловероятных значений, содержащих, очевидно, большие случайные ошибки, при определении математического ожидания и дисперсии приводит только к искажению результатов, во ни в какой мере не содействует повышению их точности. Поэтому такие «выпадающие» измерения должны быть своевременно исключены из рассмотрения.

Часто это может быть сделано за глаз. В сомнительных же случаях для решения вопроса, является ли данный результат измерения выпадающим или нет, может быть применен следующий простой способ.

Допустим, что сомнительное измерение действительно содержит маловероятную ошибку, и исключим его из расчета математического ожидания и дисперсии. Определив последние только по результатам оставшихся измерений и приняв во внимание необходимую в данной задаче степень достоверности, находим возможную ошибку отдельных измерений и сравним ее с отклонением результата отброшенного измерения от среднего из всех прочих измерений. Если это отклонение окажется близким к возможной ошибке или больше ее, данное измерение действительно будет выпадающим, и отбрасывание его вполне законно<sup>1</sup>. В противном случае расчет математического ожидания и его средней квадратичной ошибки следует дополнить отброшенной равной величиной. Возможная ошибка среднего при этом несколько возрастет и, если она выйдет за допустимые пределы, это послужит указанием на необходимость продолжения измерений или повышения их точности.

**Пример 3.** Допустим, что в примере 1, помимо указанных там трех измерений скорости 16,1; 16,3 и 15,9 узл., во время четвертого опытного рейса была скорость 15,4 узла. Считая последнюю величину выпавшей, мы найдем среднее из прочих измерений, равное 16,1 узла, и в примере 2 возмещая ошибку отдельных измерений 1,6 узл. Сравняя ее с отклонением результата последнего измерения от среднего (16,1 — 15,4 = 0,7 узла), видим, что проблема режет еще не дает достаточных оснований для исключения этой скорости четкие минимальные скорости как средние, так и во остальных периодах будут. Иной результат получим, если скорость 15,4 узла будет получена во время одного из 10 рейсов, рассмотренных и тех же примеров в качестве скорости измерения: продолжение анализа подтвердит, что скорость 15,4 узла действительно должна быть исключена.

<sup>1</sup> Ближе может оказаться другое значение, отклоняющееся от возможной ошибки не более, чем на  $\pm 10\%$ , так как определять ошибки с большей точностью нет необходимости.

и т. д. Величина  $\delta^2$  по аналогии с дисперсией ошибок может быть названа дисперсией погрешностей.

Так как  $X$  во всех этих выражениях является конкретной, постоянной, хотя и неизвестной величиной, то законы распределения погрешностей совпадают с законами распределения ошибок (при соответствующем изменении аргумента) и любая формула, выведенная выше для ошибок, может быть преобразована для погрешностей простой подстановкой  $\Delta_x = \delta_x X$ . Так, например, плотность вероятности ошибок  $p(\delta)$  может быть представлена в виде производной  $\frac{dP}{d\delta}$ , где  $dP$  — вероятность появления всех ошибок, имеющих любую величину в пределах от  $\delta$  до  $\delta + d\delta$ . Произведя указанную выше замену, получим

$$p(\Delta) = \frac{dP}{d\Delta} = \frac{dP}{X d\delta} = \frac{1}{X} p(\delta). \quad (7, 6)$$

Следовательно, например, закон равновероятного распределения ошибок (2,3) может быть представлен также в виде закона равновероятного распределения погрешностей

$$p(\delta) = \frac{1}{2|\delta_{\text{ог}}|}. \quad (7, 7)$$

где  $|\delta_{\text{ог}}|$  — абсолютная величина предельной погрешности.

Нетрудно убедиться в том, что величина нормированной погрешности тождественно совпадает с величиной нормированной ошибки, и поэтому все безразмерные законы распределения и их численные характеристики в одинаковой мере справедливы как в применении к ошибкам, так и к погрешностям.

Средняя квадратичная погрешность среднего из многочисленных наблюдений и соответствия в формулах (5, 10) и (5, 3) может быть записана так:

$$\delta(A) = \frac{\sigma(A)}{A} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum \sigma_i^2}{\sum a_i^2}}. \quad (7, 8)$$

а средняя квадратичная погрешность математического ожидания, выведенного из конечного ряда наблюдений, по формуле (6, 3)

$$\delta = k_0 \delta(A), \quad (7, 9)$$

где множитель  $k_0$  находится по той же табл. III, которой мы пользовались для определения средней квадратичной ошибки.

Легко преобразуются для применения к погрешностям и формулы (5, 9) и (6, 9), относящиеся к ошибкам отдельных измерений,

$$\delta(a_i) = \frac{1}{a_i} \sqrt{\frac{\sum \sigma_i^2}{n-1}}; \quad (7, 10)$$

$$\delta = \delta(a_i) (1 + q), \quad (7, 11)$$

где  $q$  выбирается по табл. IV.

Различие между операциями с ошибками и погрешностями складывается только с того момента, когда в расчет вводится не одна, а несколько случайных величин как требуется определить ошибки и погрешности их функций. Оценка погрешности результата сложного вычисления в большинстве случаев оказывается проще, чем оценка его ошибки. Эти вопросы будут рассмотрены в следующей главе.

**Точность.** Это понятие широко распространено как в науке и технике, так и в искусстве и в быту. Обычно оно не нуждается в определении; хотя численное его выражение и не всегда однозначно, но вполне раскрывается теми размерностями, в которых производится его оценка ( $\pm x$  см или  $\pm y$  % и т. п.). В наиболее общем виде можно сказать, что понятие точности является значительнее к одному, а к другим рассмотренным выше понятиям: ошибкам и погрешностям. Поэтому для большей четкости определений там, где необходимо, следует различать точность абсолютную, соответствующую понятию абсолютных, или размерных ошибок, и точность относительную, соответствующую относительным, или безразмерным погрешностям.

Во всех случаях для численной оценки точности расчета или измерения должны быть указаны границы возможных ошибок ( $\pm \delta_{\text{ог}}$ ) или погрешностей ( $\pm \delta_{\text{ог}}$ ) их результата. Часто вместо этих границ указываются величины предельных ошибок или погрешностей. Это, как мы видели выше, достаточно приемлемо только для одиночных измерений и совершенно недопустимо для более сложных расчетов, ошибки которых распределяются заведомо не по равновероятному закону. Поэтому оценка точности всегда должна сопровождаться и оценкой достоверности указываемых величин.

## § 8. Систематические ошибки

До сих пор мы рассматривали только такие условия, при которых случайные отклонения результатов измерений или вычислений распределялись симметрично относительно среднего значения данной величины или ее математического ожидания. При этом среднее из достаточно большого числа наблюдений естественно оказывалось и наиболее вероятным.

На практике встречается случай, когда подобное симметричное распределение явно нарушается. Одним из примеров такой асимметрии может служить, например, закон, изображенный на рис. 9. Как нетрудно убедиться, математическое ожидание величины  $v_{\text{ог}}$  здесь не совпадает с наиболее вероятным ее значением  $v_0$ . В связи с этим несколько усложняется вычислительная

<sup>1</sup> В математической статистике наиболее вероятное значение измеряемой величины называется модой.

работы при определении численных характеристик закона распределения, но методика их расчета остается прежней. Лишь частные достоверности одинаковых по абсолютной величине возможных отклонений от среднего оказываются зависящими от знака этого отклонения и поэтому должны рассчитываться отдельно друг от друга. Никаких принципиальных затруднений и при этом не возникает.

В технике случаев подобной распределенной встречаются лишь в виде редких исключений и, как правило, свидетельствуют о серьезной неисправности измерительных приборов, которая и должна быть устранена. Поэтому дальше на них останавливаться не будем.

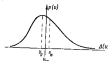


Рис. 9. Несимметричный закон распределения.

более распространенным видом асимметрии является систематическое смещение результатов всех наблюдений или вычислений в ту или другую сторону от истинного значения определяемой величины. Причиной такого смещения может являться, например, общий налет в расчет не математическое ожидание исходных данных, а несколько большую или меньшую их величину, более гарантирующую безопасность конструкции или сооружения в случае возможных просчетов при проектировании (запас по внешним силам, допускаемым напряжениям и т. п.). К этой же категории относятся применение несимметричных допусков на прямую готовых изделий или полуфабрикатов, что может привести к существенному несопадению среднего из фактических весов изделий с их теоретическим весом, определяемым по чертежу. Такого же рода ошибки в результате измерений вносят некоторые неисправности измерительного инструмента (сдвиг шкалы, трение в подшипниках и т. п.) или нарушение режима измерений, являющееся из получаемые отсчеты, но не учитываемое при их обработке (воздушная температура, давление и т. д.).

Разность между величиной, произвольно выбранной в расчет или отпущиваемой в качестве его результата, и математической ожиданием той же величины может называться систематической ошибкой. Аналогично систематической ошибкой может быть названа и разность между средним из весьма большого ряда измерений и истинным значением измеряемой величины, если такую разность удается обнаружить.

В отличие от случайных ошибок, которые рассматривались выше, систематическая ошибка не имеет дисперсии, и величина ее не зависит от результатов отдельных измерений, но определяется

тем или иным приходящим обстоятельством или соотножением. В некоторых случаях (расчетные запасы) она может быть более или менее точно определена или задана, в других (инструментальные ошибки) для ее определения требуется специальные исследования или тарировка, т. е. сравнение ряда измерений, полученных с помощью приборов разной точности.

Если истинное значение измеряемой величины известно, то систематическая ошибка измерений может быть найдена по формуле

$$\epsilon A = \int_{\delta_{\text{нп}}}^{\delta_{\text{сп}}} \Delta \cdot p(\Delta) \cdot d\Delta, \quad (8.1)$$

где  $\Delta$  — истинная ошибка измерений.

Для симметричного распределения, свободного от систематических ошибок, эта формула, очевидно, даст значение  $\epsilon A = 0$ , так же, как и для распределений типа рис. 9 и для других подобных распределений. Если же начало отсчета ошибок будет сдвинуто в ту или иную сторону от истинного значения измеряемой величины, формула (8.1) покажет, насколько оно сдвинуто и в какую именно сторону, иначе говоря, даст величину систематической ошибки  $\epsilon X$ .

Таким же способом может быть найдена систематическая ошибка расчета с той разницей, что в этом случае искомым является ошибка случайной величины, условно введенной в расчет вместо ее математического ожидания. Вследствие этого знак перед интегралом в правой части равенства (8.1) должен быть заменен обратным

$$\epsilon X = - \int_{\delta_{\text{сп}}}^{\delta_{\text{нп}}} \Delta \cdot p(\Delta) \cdot d\Delta. \quad (8.2)$$

Разделив обе части этой формулы на истинное значение измеряемой величины  $X$ , получим систематическую погрешность

$$\epsilon(X) = - \int_{\delta_{\text{сп}}}^{\delta_{\text{нп}}} \delta \cdot p(\delta) \cdot d\delta. \quad (8.3)$$

В частности, для равновероятного распределения (рис. 10 с асимметричными пределами  $|\Delta_{\text{нп}}| \neq |\Delta_{\text{сп}}|$ ) найдем

$$\epsilon X = - \frac{1}{2} (\Delta_{\text{нп}}^2 + \Delta_{\text{сп}}^2), \quad (8.4)$$

а также

$$\epsilon(X) = - \frac{1}{2} (\delta_{\text{нп}}^2 + \delta_{\text{сп}}^2). \quad (8.5)$$

При наличии систематической погрешности истинное значение случайной ошибки  $\Delta$  каждой приближенной величины (рис. 11) получается как разность между ее случайной ошибкой  $\Delta'$ , отнимаемой от ее математического ожидания  $A$ , и систематической ошибкой  $\varepsilon X$ , определенной, как указано выше, т. е.

$$\Delta_i = \Delta'_i - \varepsilon X, \quad (8, 6)$$

а возможная ее ошибка по тем же соображениям

$$\Delta_v = z_v \sigma - \varepsilon X, \quad (8, 7)$$

где  $z_v$  — нормированная возможная ошибка, соответствующая требуемой степени достоверности;

$\sigma$  — средняя квадратичная ошибка симметричного распределения результатов наблюдения.



Рис. 10. Систематическая ошибка равновероятного распределения.

Пр и м е р 1. Некогда деталь длиной 120 мм будет изготовлена по техническим допускам, разрешающим возможные отклонения в сторону увеличения размеров ( $\Delta'_v = +0,2$  мм), чем в сторону их уменьшения ( $\Delta'_v = -0,5$  мм). Подобные размеры на чертежах обычно обозначаются так:  $120^{+0,2}_{-0,5}$ .

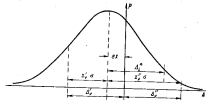


Рис. 11. К расчету достоверности при наличии систематической ошибки.

Требуется найти систематическую и возможную ошибки, которые будут иметь  $n$  разов, если принять в том же самый размер равное номинальному, т. е. 120 мм. Степень достоверности  $\nu = 0,9$ .

Так как истинное распределение ошибок в заданных пределах неизвестно, то, как это указывалось в § 2, такое распределение принимается равновероятным, по оси его симметрии оказывается смещенной в сторону отрицательных ошибок.

Выяснив систематическую ошибку, известной этой величиной, находим по формуле (8, 4)

$$\varepsilon X = -\frac{1}{2} (0,2 - 0,5) = 0,15 \text{ мм.}$$

Предельные ошибки, если не отступать от математического ожидания данного размера, при этом окажутся равными

$$\Delta'_{v, \text{пр}} = 0,2 + 0,15 = 0,35 \text{ мм;}$$

$$\Delta'_{v, \text{пр}} = -0,5 + 0,15 = -0,35 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка по формуле (8, 5) будет

$$\sigma = \frac{0,35}{\sqrt{2}} = 0,2$$

а возможные ошибки согласно (8, 7)

$$\Delta'_v = 1,39 \cdot 0,2 - 0,15 = +0,13 \text{ мм;}$$

$$\Delta'_v = -1,39 \cdot 0,2 - 0,15 = -0,43 \text{ мм.}$$

Значения  $z_v = 1,39$  здесь взяты согласно табл. VII, производящие которой будут объяснены ниже.

Действия над случайными величинами, имеющими систематические ошибки. Как видно из изложенного, систематическая ошибка может быть изображена в виде постоянного слагаемого при основной истинной величине  $X$ , например:

$$A_v = X + \varepsilon X \pm z_v \sigma, \quad (8, 8)$$

а систематическая погрешность — в виде соответствующего сомножителя

$$A_v = X [1 + \varepsilon(X)] \pm z_v \sigma, \quad (8, 9)$$

где  $\varepsilon(X) = \varepsilon \frac{X}{X}$ .

Отсюда вытекают следующие правила.

При алгебраической сложении ряда величин, имеющих систематические ошибки, эти ошибки также алгебраически складываются.

При умножении ряда величин, имеющих систематические ошибки, получим

$$W = XYZ \dots [1 + \varepsilon(X) + \varepsilon(Y) + \varepsilon(Z) + \dots + \varepsilon(X)\varepsilon(Y) + \varepsilon(X)\varepsilon(Z) + \varepsilon(Y)\varepsilon(Z) + \dots].$$

Однако, учитывая, что систематические погрешности во всех случаях, имеющих практическое значение, выражаются числами много меньшими единицы, всеми их произведениями можно пренебречь и, следовательно, при умножении ряда величин, имеющих систематические погрешности, эти погрешности алгебраически складываются.

Определение величины случайных ошибок и законов их распределения для сумм и произведений не столь просто. Этим вопросом займемся в следующей главе.

Достоверность величин, имеющих систематическую ошибку. Как видно из предыдущего примера, при одинаковой степени достоверности положительных и отрицательных ошибок  $\Delta_0$  их абсолютная величина может оказаться существенно различной. И, наоборот, при одинаковой абсолютной величине допустимых ошибок  $\Delta_0$  обеих знаков может оказаться существенно различной достоверность обеспечения равенства  $|\Delta_1| < |\Delta_2|$ , которым определяется приемлемость результатов расчета. Подставляя в это неравенство значение возможной ошибки из выражения (8, 7), найдем условие, которому должны быть подчинены нормированные возможные ошибки,

$$z_v < \frac{\pm X + \Delta_0}{\sigma} \quad (8, 10)$$

После деления числителя и знаменателя правой части этого неравенства на  $X$  получим то же условие, выраженное через погрешности

$$z_v < \frac{\pm \delta_0}{\delta} \quad (8, 11)$$

Так как  $\Delta_0$  имеет два значения: верхний и нижний предел допустимых ошибок, то и  $z_v$ , а следовательно, и частная достоверность результата получит два значения, отличающиеся друг от друга по абсолютной величине.

Этой способностью систематических ошибок повысить частную достоверность возможных отклонений одного знака за счет снижения достоверности отклонений другого а также часто пользуются для повышения гарантий безопасности проектируемых сооружений, о чем говорилось выше. Однако этим приемом не следует злоупотреблять, так как иначе, обезопасив себя от появления недопустимых ошибок одного знака, можно увеличить возможность недопустимых ошибок другого знака в виде бесполезного увеличения веса и габаритов отдельных конструкций, возмощающих и размеров проектируемого судна в целом и т. д.

**Пример 2.** При проектировании танкера средняя квадратичная ошибка его возмещения без груза определена в 15 м, а при постройке желательна максимальная возможная допустимая на прямую угол вертута к желательному положению систематическая ошибка  $\pm X = 12$  м. Между тем, по технико-экономическим соображениям его без груза должно быть гарантировано в пределах  $\Delta_0 = \pm 15$  м. Определить достоверность отсутствия перегрузки и недогрузки.

Если бы не было систематической перегрузки, то нормированной ошибкой

$$z_v = \frac{\Delta_0}{\sigma} = \pm \frac{15}{15} = \pm 1,0$$

соответствовали бы частные достоверности

$$v_1 = v_2 = 0,9980,$$

а следовательно, полная достоверность гарантии была бы согласно формуле (1, 6)

$$v = 1 - 2(1 - v_0) = 1 - 2(1 - 0,9980) = 0,9960.$$

т. е. в среднем только три танкера из тысячи могут бы иметь недопустимые отклонения от технико-экономических условий по недогрузке.

Наличие систематической ошибки дает новые значения для вероятности возможных ошибок, характеризующих собой возможность перегрузки корабля, получаем

$$z_v^* = \frac{12 + 15}{15} = 1,4,$$

чему соответствует  $v_1 = 1,0$ . Иными словами, вероятность того, что возмещение сумм без груза будет больше допустимого и танкер не сможет принять всего предельно возможного для него груза, практически отсутствует ( $1 - v = 0$ ).

С другой стороны, для отрицательных ошибок, соответствующих недогрузке сумм, найдем

$$z_v^* = \frac{12 - 15}{15} = -0,2$$

и частную достоверность  $v_2 = 0,73$ . Таким образом, вероятность недопустимой загрузки судна достигает  $1 - 0,73 = 0,27$ , т. е. в среднем больше четверти от общего числа построенных танкеров будут иметь недопустимое отступление от технико-экономических условий. Практически это приводит к тому, что на указанных судах обмен трюмов окажется недостаточным для их загрузки до грузовой марки.



## КОМПОЗИЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## § 8. Ошибки и погрешности вычислений

Композицией, или составлением законов распределения, называется процесс, с помощью которого по известным законам распределения ошибок отдельных компонентов расчета (случайных, систематических и т. д.) находится закон распределения ошибок конечного результата. В порядке обобщения в это же понятие может быть включен процесс объяснения закона распределения ошибок функций одной и многих переменных даже в том случае, если в выражение данной функции входит лишь одна случайная величина. Это возможно потому, что любой достоверный параметр может рассматриваться как частный случай приближенной величины, имеющей закон распределения ошибок.

$$p(0) = 1,$$

а любое математическое преобразование случайной величины распространяется и на ее случайные ошибки, соответственно изменая закон их распределения. Иначе говоря, закон распределения ошибок функции получается путем сочетания закона распределения ошибок аргумента с законом его функционального преобразования.

Как было показано в § 3 [формула (3, 7)], закон распределения ошибок может считаться полностью определенным, если известны средние квадратичная ошибка и безразмерная формула, показывающая плотность вероятности появления тех или иных нормированных ошибок. Особенно просто решается задача в том случае, если все случайные компоненты расчета имеют ошибки, распределенные только по нормальному закону, так как при этом, как это доказывается в теории вероятностей, и ошибки результата должны подчиняться нормальному закону (§ 12). К такому же эффекту приводит увеличение числа компонентов расчета, какими бы законные распределения ошибок они ни обладали [4—291]. Отчасти на это указывает уже рассмотренный нами выше закон распределения ошибок конечного ряда независимых, каждое из которых является одним из компонентов в расчете

среднего или математического ожидания. Более строгое доказательство этого положения и применения к любым арифметическим действиям будет приведено в § 13.

Необходимость в объяснении безразмерной формулы вероятности при этом опадает и вся задача сводится к определению только средней квадратичной ошибки. С решения этой задачи мы и начнем.

Дистрибуция ошибок суммы ряда независимых случайных величин, имеющих симметричные законы распределения, равна сумме дистрибуций ошибок отдельных слагаемых. Основанием для этого утверждения служат следующие соображения.

Каждая случайная величина  $A_i$  может быть представлена в виде суммы

$$A_i = X_i + \Delta_i, \quad (9,1)$$

где  $X_i$  — истинное значение данной величины;

$\Delta_i$  — случайная ошибка ее измерения.

При наличии  $n$  слагаемых их общая сумма будет

$$\sum A_i = \sum X_i + \sum \Delta_i,$$

и, следовательно, случайная ошибка этой суммы

$$\Delta_2 = \sum A_i - \sum X_i = \sum \Delta_i. \quad (9,2)$$

Допустим, что случайная ошибка каждого из слагаемых может иметь  $m$  различных значений. Тогда, возведя равенство (9, 2) в квадрат и складывая все возможные его значения, получим

$$\sum \Delta_2^2 = \sum \left( \sum \Delta_i^2 + \sum \Delta_i \Delta_j \right), \quad (9,3)$$

где  $i \neq j$ .

В силу независимости и симметрии законов распределения каждому положительному значению ошибки  $\Delta_i$  при данной  $A_i$  должно соответствовать равное ему по абсолютной величине, но противоположное по знаку значение  $-\Delta_i$ . Вследствие этого любая сумма верных степеней всех случайных ошибок должна равняться нулю<sup>1</sup>

$$\sum \sum \Delta_i \Delta_j = 0.$$

<sup>1</sup> Как здесь, так и ниже мы рассматриваем только системы независимых случайных ошибок. В иных условиях это равенство может и не иметь места, однако такое случается в исключительной степени редко и поэтому оставляем здесь на их же судьи; обратимся лишь к литературе [2—166], [18—99].

Разделив остаток равенства (9, 3) на  $m$ , получим дисперсию ошибок суммы

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} \Delta_{\Sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \Delta_{\Sigma}^2$$

а так как  $\frac{1}{m} \sum_{\alpha} \Delta_{\Sigma}^2 = \sigma_{\Sigma}^2$  равно дисперсии ошибок отдельного слагаемого, то дисперсия их суммы будет

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 \quad (9, 4)$$

что и требовалось доказать.

В соответствии с этим дисперсия погрешностей суммы получается делением равенства (9, 4) на квадрат истинного значения этой суммы

$$\delta_{\Sigma}^2 = \frac{\sum \sigma_{\alpha}^2}{(\sum A_{\alpha})^2} \quad (9, 5)$$

или приближенно

$$\delta_{\Sigma}^2 \approx \frac{\sum \sigma_{\alpha}^2}{(\sum A_{\alpha})^2} \quad (9, 6)$$

где  $\sum A_{\alpha}$  — сумма математических ожиданий отдельных слагаемых.

Дисперсия погрешностей произведения ряда случайных величин, имеющих симметричные законы распределения ошибок, равно сумме дисперсий погрешностей отдельных сомножителей. Для доказательства этого положим рассматривать сначала произведение только двух случайных величин

$$P_1 = A_{11} \cdot A_{21} \quad (9, 7)$$

или по аналогии с (9, 1)

$$P + \Delta_{P1} = (X_1 + \Delta_{11})(X_2 + \Delta_{21}) \quad (9, 8)$$

где  $P$ ,  $X_1$  и  $X_2$  — истинные значения произведения и его сомножителей;

$\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{21}$  и  $\Delta_{P1}$  — их случайные ошибки.

Имея в виду, что истинное значение рассматриваемого произведения равно  $P = X_1 \cdot X_2$ , из выражения (9, 8) после раскрытия скобок получаем

$$\Delta_{P1} = X_1 \cdot \Delta_{21} + X_2 \cdot \Delta_{11} + \Delta_{11} \cdot \Delta_{21}$$

Разделив это равенство на истинное значение произведения, найдем случайную погрешность произведения

$$\delta_{P1} = \frac{\Delta_{P1}}{P} = \frac{\Delta_{21}}{X_1} + \frac{\Delta_{11}}{X_2} + \frac{\Delta_{11}}{X_1} \cdot \frac{\Delta_{21}}{X_2},$$

или иначе

$$\delta_{P1} = \delta_{21} + \delta_{11} + \delta_{11} \cdot \delta_{21} \quad (9, 9)$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и сложим его выражения для  $m$  возможных значений случайных погрешностей аргументов

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \delta_{P1}^2 &= \sum_{\alpha} \delta_{21}^2 + \sum_{\alpha} \delta_{11}^2 + \sum_{\alpha} \delta_{11} \cdot \delta_{21}^2 + \\ &+ 2 \sum_{\alpha} \delta_{11} \cdot \delta_{21} + 2 \sum_{\alpha} \delta_{11}^2 \cdot \delta_{21} + 2 \sum_{\alpha} \delta_{11} \cdot \delta_{21}^2 \end{aligned} \quad (9, 10)$$

На основании тех же соображений, которые были высказаны при доказательстве предыдущей теоремы, последние три члена правой части этого равенства должны считаться равными нулю. Кроме того, при  $\delta_{11} < 0,2$  и  $\delta_{21} < 0,2$  сумма квадратов их возможных значений, поэтому пренебрежение ею также вполне допустимо. При больших погрешностях компонентов ошибка, возникающая вследствие этого, несколько возрастает, но в среднем столько больших погрешностей не требует высокой точности. Следовательно, и в этом случае представляется упрощение формулы (9, 10) также вполне допустимо. Переходя от суммы квадратов погрешностей к их дисперсии, получим

$$\sigma_{P1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} \delta_{P1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\alpha} \delta_{21}^2 + \frac{1}{m} \sum_{\alpha} \delta_{11}^2$$

т. е.

$$\sigma_{P1}^2 = \sigma_{21}^2 + \sigma_{11}^2$$

Без всяких затруднений эта формула может быть распространена и на любое большее число сомножителей

$$\sigma_{Pm}^2 = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2 \quad (9, 11)$$

Для перехода к дисперсии ошибок произведения ряда сомножителей достаточно умножить равенство (9, 11) на величину квадрата этого произведения

$$\sigma_{Pm}^2 = P^2 \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^2 \quad (9, 12)$$

Раскрывать это выражение в общем виде не будем, так как сложность результата этой операции приводит к ее практической бесполезности. Численное же решение задачи по формуле (9, 12) для каждого конкретного случая не встречает затруднений.

**Другие вычисления.** Нетрудно убедиться в том, что выведенные формулы могут быть распространены и на обратные арифметические действия. Так, например, разность двух случайных величин может быть заменена суммой

$$A - B = A + (-B),$$

и, следовательно, дисперсия ошибок разности будет равна сумме дисперсий ошибок слагаемых, а дисперсия ее погрешности согласно (9, 5)

$$[\delta(A - B)]^2 = \frac{[\delta(A)]^2 + [\delta(B)]^2}{(A - B)^2}. \quad (9, 13)$$

Из этого выражения видно, что если уменьшаемое и вычитаемое близки друг к другу по абсолютной величине, то погрешность их разности может быть весьма большой. Отсюда вытекает известное требование избегать в вычислениях необходимости определения малых разностей больших величин.

Точно так же дисперсия погрешности частного от деления двух случайных величин может быть найдена по формуле (9, 11), если делитель выразить через обратную величину

$$\frac{A}{B} = A \left( \frac{1}{B} \right),$$

и, следовательно,

$$\left[ \delta \left( \frac{A}{B} \right) \right]^2 = [\delta(A)]^2 + \left[ \delta \left( \frac{1}{B} \right) \right]^2.$$

Для нахождения дисперсии погрешностей величин  $\frac{1}{B}$  заметим, что случайная ошибка этого отношения

$$\Delta_i \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{1}{x_2 + \Delta_{2i}} - \frac{1}{x_2} = -\frac{\Delta_{2i}}{x_2^2} - \frac{\Delta_{2i}^2}{x_2^3} - \dots$$

Пренебрегая малыми высших порядков и разделив это выражение на истинное значение  $\frac{1}{x_2}$  случайной величины  $\frac{1}{B}$ , найдем случайную погрешность последней

$$\delta_i \left( \frac{1}{B} \right) = -\frac{\Delta_{2i}}{x_2} = -\delta_i(B),$$

т. е. все случайные погрешности отношения  $\frac{1}{B}$  равны случайным погрешностям делителя  $B$  с обратным знаком.

При возведении в квадрат для нахождения дисперсии и это различие исчезает и

$$\left[ \delta \left( \frac{1}{B} \right) \right]^2 = [\delta(B)]^2,$$

следовательно,

$$\left[ \delta \left( \frac{A}{B} \right) \right]^2 = [\delta(A)]^2 + [\delta(B)]^2. \quad (9, 14)$$

как и для произведения.

**Средние и вероятные ошибки суммы.** В § 3 уже было указано, что применение понятия средней ошибки целесообразно только в том случае, если все входящие в расчет прибавляемые величины имеют одинаковые законы распределения. Теперь можем дать обоснование этого утверждения. Воспользуемся для этого формулой (9, 4) и выразим в ней средние квадратичные ошибки суммы и ее компонент через их нормированные средние ошибки ( $\Delta_{cp} = z_{cp} \sigma$ )

$$\left( \frac{\Delta_{cp \Sigma}}{z_{cp \Sigma}} \right)^2 = \sum_i \left( \frac{\Delta_{cp i}}{z_{cp i}} \right)^2.$$

Полученное выражение явно сложнее равенства (9, 4) и может быть упрощено только в том случае, если  $z_{cp 1} = z_{cp 2} = z_{cp 3} = \dots = z_{cp n}$ , т. е. если законы распределения всех слагаемых, так и их суммы одинаковы. Последнее же условие выполняется, как мы увидим в § 12, только в том случае, если все указанные законы распределения являются нормальными. В этих условиях переход от средних квадратичных ошибок к средним не только значительно упрощает вычисления, но и требует знания конкретных законов распределения ошибок каждого из слагаемых, что практически далеко не всегда возможно.

Аналогичные рассуждения могут быть применены и к понятию вероятной ошибки, а также и к понятиям средних и вероятных погрешностей. Это затруднение наряду с малой вероятностью средних и вероятных ошибок и послужило причиной того, что рекомбинанты И. Г. Бубнова в свое время не нашли применения (§ 4). Эти же причины заставляют нас отказаться от широкого применения понятий средней и вероятной ошибок в практике судостроительных расчетов, где большинство исходных данных имеет законы распределения ошибок, весьма далекие от нормальных.

### § 10. Дисперсия ошибок функций случайных величин

Приемы, изложенными в предыдущем параграфе, можно было бы найти выражения для ошибок и погрешностей результатов любых математических преобразований. Однако ту же задачу можно решить более просто в общем виде, после чего получим частные решения не будет представлять собой никаких затруднений. Для этого заметим, что ошибка любой случайной величины может рассматриваться как некоторое конечное приращение ее истинного значения, а случайная ошибка ее функции — как конечное приращение последней при конечном же приращении аргумента. Это дает нам право разложить ошибку функции в ряд Тейлора и заменить довольно громоздкие алгебраические преобразования простым дифференцированием.

**Дисперсия ошибок функций одной случайной величины.** Допустим, что некоторая истинная величина  $Z$  связана с другой истинной величиной  $X$  функциональной зависимостью

$$Z = f(X). \quad (10, 1)$$

Вид этой зависимости нам достоверно известен, но как величина  $X$ , так и величина  $Z$  не могут быть точно измерены. Поэтому в расчетах можем использовать лишь приближенное равенство

$$E_i = f(A_i), \quad (10, 2)$$

где  $E_i$  и  $A_i$  — случайные значения величин  $Z$  и  $X$ .

Так как  $E_i = Z + \Delta_i$  и  $A_i = X + \Delta_{\omega}$ , то случайная ошибка величина  $E_i$  будет равна разности

$$\Delta_i = f(X + \Delta_{\omega}) - f(X), \quad (10, 3)$$

где  $\Delta_i$  — случайная ошибка функции;

$\Delta_{\omega}$  — случайная ошибка аргумента.

Разложим выражение (10, 3) в ряд Тейлора

$$\Delta_i = f'(x) \Delta_{\omega} + \frac{1}{2} f''(x) \Delta_{\omega}^2 + \frac{1}{6} f'''(x) \Delta_{\omega}^3 + \dots,$$

где символами  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  и т. д. обозначены производные соответствующих порядков от рассматриваемой функции (10, 1).

Возведи это выражение в квадрат и складывая его значения для всех возможных случайных ошибок аргумента  $\Delta_{\omega}$ , после простых преобразований находим дисперсию ошибок рассматриваемой функции

$$\sigma^2 = \left\{ [f'(X)]^2 + \left[ \frac{1}{3} f''(X) \right]^2 + \frac{1}{5} f''(X) f'''(X) \right\} \sigma_{\omega}^2 + \dots \sigma_{\omega}^2. \quad (10, 4)$$

В большинстве случаев, имеющих практическое значение, всеми членами, содержащими высшие степени дисперсии, можно пренебречь, сохраняя в больших фигурных скобках только пер-

вый из указанных членов. Поэтому для практического использования вполне пригодна линейная форма

$$\sigma^2 = [f'(X)]^2 \sigma_{\omega}^2. \quad (10, 5)$$

и только при весьма малых значениях первой производной необходимо учитывать второй и третий члены равенства (10, 4).

Дисперсия погрешностей функции находится, как обычно, делением дисперсии ошибок на квадрат самой функции с заменой  $\sigma_{\omega} = X \delta_{\omega}$

$$\delta^2 = \frac{[f'(X)]^2}{[f(X)]^2} X^2 \delta_{\omega}^2$$

или приближенно после замены неизвестного истинного значения аргумента его математическим ожиданием

$$\delta^2 = \frac{[f'(A)]^2}{[f(A)]^2} A^2 \delta_{\omega}^2. \quad (10, 6)$$

Формулы для нахождения ошибок и погрешностей ряда конкретных функций, полученных на основании равенств (10, 5) и (10, 6), приведены в табл. V.

**Пример 1.** Найти среднюю квадратичную погрешность функции  $y = x^{\alpha}$ , где  $\alpha$  — постоянная величина.

Пользуясь формулой (10, 6), находим

$$\begin{aligned} \sigma(\delta)^2 &= \left\{ \alpha^2 x^{2\alpha-2} + \left[ \frac{1}{3} \alpha^2 (\alpha-1)^2 x^{2\alpha-2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{5} \alpha^2 \alpha-1 (\alpha-1) (\alpha-2) x^{2\alpha-2} \right\} \sigma(x)^2 \dots \sigma(x)^2 \end{aligned}$$

или после ряда простых преобразований и деления на основную функцию

$$\delta(\delta) = \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{12} (\alpha-1) (\alpha-1) (\alpha-1) \delta(x)^2}. \quad (10, 7)$$

где  $\delta(x)$  — средняя квадратичная погрешность аргумента.

Нетрудно убедиться в том, что второй член подкоренного выражения может получить существенное значение только в том случае, если одновременно и  $\delta(x)$  и  $\alpha$  имеют достаточно большую величину. Но при этом и погрешность результата окажется столь большой, что и сам результат будет непригоден для практического использования, а следовательно, и уточнение его погрешности не будет необходимости.

Так, например, если  $\alpha = 4$  и  $\delta(x) = 30\% = 0,3$ , то по формуле (10, 7) получим  $\delta(\delta) = 1,40 = 140\%$ , между тем как по формуле (10, 6) мы имели бы

$$\delta(\delta) = \alpha \delta(x) \quad (10, 8)$$

или численно

$$\delta(\delta) = 4 \cdot 0,3 = 1,2 = 120\%.$$

Поскольку в обоих случаях средняя квадратичная погрешность результата превышает 100%, а основные погрешности будут еще значительно больше,

Функция	Среднее квадратичное	
	ошибки	погрешности
$\alpha x$	$\alpha \sigma(x)$	$\delta(x)$
$\Pi x$	—	$\sqrt{\Sigma [\delta(x)]^2}$
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{y^2} \sqrt{y^2 [\sigma(x)]^2 + x^2 [\sigma(y)]^2}$	$\sqrt{16(x)^2 + 16(y)^2}$
$x^n$	$n x^{n-1} \sigma(x)$	$n \delta(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \sigma(x)$	$\frac{1}{n} \cdot \delta(x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2} \cdot \sigma(x)$	$\delta(x)$
$a^x$	$a^x \ln a \sigma(x)$	$x \ln a \delta(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x} \sigma(x)$	$\frac{1}{\ln x} \delta(x)$
$\lg x$	$0,434 \frac{1}{x} \sigma(x)$	$0,434 \frac{1}{\lg x} \delta(x)$
$\sin x$	$\cos x \sigma(x)$	$x \operatorname{ctg} x \delta(x)$
$\cos x$	$-\sin x \sigma(x)$	$x \operatorname{tg} x \delta(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} \sigma(x)$	$\frac{2x}{\sin 2x} \delta(x)$
$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sigma(x)$	—
$\operatorname{arc} \cos x$		—
$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$		—

Примечание. Ошибки и погрешности дифференциала функций вычисляются по тем же формулам, что и при интегрировании, если подставить вместо  $\sigma(x)$  или  $\sigma(y)$  или  $\delta(x)$  или  $\delta(y)$  или  $\delta(x)$  или  $\delta(y)$ .

ошибкой, более простой способ вычисления может считаться вычисление достаточным.

Значительно меньшие различия между результатами вычисления по обычной рассмотренной формуле получаются в том случае, если погрешность результата не будет превышать 30—40%, что возможно уже на границе практических реальных условий. Если, например, положить  $\delta(x) = 0,1 = 10\%$  и принять по-прежнему  $x = 4$ , то по формуле (10, 7) получим  $\delta(y) = 0,41 = 41\%$ , а по формуле (10, 8)  $\delta(y) = 0,40 = 40\%$ , что практически одно и то же.

Пример 2. Найти среднее квадратичное значение момента  $M$ , измеренного гидрообработкой буя лесом  $D$  на угле  $\varphi = 30^\circ$ , если метантройная высота лесов  $A$  и его вес определены с погрешностью  $\delta(D) = \delta(A) = 1\%$ , а угол известен со средней квадратичной ошибкой  $\sigma(\varphi) = 1'$ .

Очевидно, величину гидрообработки формы буя можно считать его моментом и тогда по метантройной формуле

$$M = DA \sin \varphi,$$

и среднее квадратичное погрешности результата будет

$$\delta(M) = \sqrt{[\delta(D)]^2 + [\delta(A)]^2 + 16(\sin \varphi)^2}.$$

Дискретно ошибки формулы  $y = \sin \varphi$  находят по формуле (10, 4), из которой следует

$$[\sigma(\sin \varphi)]^2 = \left( \cos^2 \varphi + \left( \frac{1}{4} \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^2 \varphi \right) [\sigma(\varphi)]^2 \right) [\sigma(\varphi)]^2.$$

Для значения  $\varphi = 30^\circ$  находим

$$[\sigma(\sin \varphi)]^2 = [0,866^2 + \left( \frac{1}{4} \cdot 0,5^2 - \frac{1}{3} \cdot 0,866^2 \right) \left( \frac{1}{57,3} \right)^2] [\sigma(\varphi)]^2,$$

так  $\frac{1}{57,3} = 1'$  — среднее квадратичное ошибки измеренного угла в градусах.

Принимая вычисления, получим

$$[\sigma(\sin \varphi)]^2 = [0,75 - 0,00002] [\sigma(\varphi)]^2 = 0,75 [\sigma(\varphi)]^2.$$

Как видно было в результате, второй член в скобках правой части оказался несущественно малым по сравнению с первым и, следовательно, не можно было пренебречь. Только такой же результат дали бы в сокращенной формуле (10, 5).

Из последнего равенства следует, что дискретная погрешность момента угла в градусах

$$\delta(\sin \varphi) = 0,75 \frac{[\sigma(\varphi)]^2}{(\sin 30^\circ)^2} = \frac{0,75}{27,3^2 \cdot 0,25} = 0,0099,$$

т. е.

$$\delta(\sin \varphi) = \sqrt{0,0099} = 0,03 = 3\%.$$

Следовательно, среднее квадратичное погрешности крайнего момента будет

$$\delta(M) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = 3,5\%.$$

В формировании этой погрешности решающую роль сыграла дискретная погрешностей в определении угла в градусах ( $\delta^2 = 9$ ), оказавшаяся в 4,5 раза больше суммы дискретных погрешностей веса и метантройной высоты ( $1^2 + 1^2 = 2$ ). Такой результат был бы получен, если бы угол известен достигал 30—50°: при этом первый член равенства (10, 4) получился бы 4000000 и тогда, так же, как

1 Если бы форма буя не была гидрообработанной, применяли метантройной формуле вместо бы действительные ошибки — ошибки метода расчета.

и третий, а дисперсия ошибки снова определяется бы только величиной этого члена, то было бы примерно 10 000 раз меньше, чем в первом случае. Поэтому в том случае бы преобразование малой, а результат, полученный по формуле (10, 9), и в этом случае мог бы считаться удовлетворительным.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — 3. Найти возможную погрешность в расчете собственного периода качки  $T$ , если погрешности в измерениях  $D$  определены со средней квадратичной погрешностью в 0,5%, момент инерции его массы  $K$  — со средней квадратичной погрешностью в 2%, а математическая высота  $h$  — в 5%. Достоверность —  $\nu = 0,99$ .

Расчет периода качки производится по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Dh}}$$

Величина  $T$  здесь может считаться достоверной; следовательно, дисперсия погрешностей периода качки будет

$$\begin{aligned} \delta(T)^2 &= \left[ \frac{1}{2} \delta(h) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \delta(D) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \delta(K) \right]^2 = \\ &= 1^2 + 0,25^2 + 2^2 = 7,3 (\%)^2, \end{aligned}$$

и его средняя квадратичная погрешность получается равной

$$\delta(T) = \sqrt{7,3} = 2,7\%.$$

При заданной степени достоверности нормированная возможная ошибка  $\Delta_p = 2,33$  (табл. П и, следовательно, можно утверждать, что истинный период качки не будет отличаться от расчетного более, чем на

$$\Delta_p(T) = \pm 2,33 \cdot 2,7 = \pm 6\%.$$

Пример 4. Найти среднюю квадратичную погрешность заданные у определенных выражениях

$$y = a + \frac{b}{c} x^2 + cx^3,$$

если известны средние квадратичные погрешности всех компонентов:  $\delta(a) = 2\%$ ;  $\delta(b) = 1\%$ ;  $\delta(c) = 1,5\%$ ;  $\delta(x) = 3\%$ , а также их математические ожидания:  $a = 10$ ;  $b = 50$ ;  $c = 5$  и  $x = 1$  (при этом  $\nu = 0,95$ ).

Так как заданное выражение представляет собой многочлен, то удобнее сначала определить погрешности каждого из его членов, по ним найти их ошибки, затем среднюю квадратичную ошибку каждой функции и только после этого — ее среднюю квадратичную погрешность. Найдем погрешности

$$\delta(a) = \sqrt{[0,10]^2 + [0,10]^2} = \sqrt{2} = 1,41\%;$$

$$\delta\left(\frac{b}{c} x^2\right) = \sqrt{[0,10]^2 + [0,10]^2 + [2 \cdot 0,10]^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (2 \cdot 3)^2} = 6,3\%;$$

$$\delta(cx^3) = \sqrt{[0,10]^2 + [0,10]^2} = \sqrt{2} = 1,41\% = 0,04\%.$$

Следовательно, их средние квадратичные ошибки будут

$$\sigma(a) = \sigma \delta(a) = 10 \cdot 0,036 = 0,36;$$

$$\sigma\left(\frac{b}{c} x^2\right) = \frac{b}{c} x^2 \delta\left(\frac{b}{c} x^2\right) = 10 \cdot 0,63 = 0,63;$$

$$\sigma(cx^3) = cx^3 \delta(cx^3) = 5 \cdot 0,004 = 0,02;$$

и средняя квадратичная ошибка их суммы

$$\sigma(y) = \sqrt{0,36^2 + 0,63^2 + 0,02^2} = 0,85,$$

а ее средняя квадратичная погрешность

$$\delta(y) = \frac{\sigma(y)}{y} = \frac{0,85}{25} = 0,034 = 3,4\%.$$

Функции многих случайных величин. Рассматривая ошибку как некоторое конечное приращение данной функции при конечном изменении ее аргументов, можно и для многих независимых переменных воспользоваться разложением этой функции в ряд Тейлора. Однако, учитывая опыт предыдущего изложения, сохраним в этом ряду только члены, содержащие производные первого порядка.

Тогда, если

$$z = f(x_1, x_2, \dots),$$

то ее первая производная будет

$$z' = \sum \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad (10, 9)$$

а следовательно, случайная ошибка этой функции получится равной

$$\Delta_i(z) = \sum \left[ \frac{\partial z}{\partial x_i} \Delta(x_i) \right], \quad (10, 10)$$

где  $\Delta(x_i)$  — случайная ошибка аргумента  $x_i$ .

Правая часть этого выражения состоит из суммы независимых случайных ошибок, к которым может быть применен закон сложения дисперсий (9, 4). Вследствие этого средняя квадратичная ошибка функции  $z$  может быть выражена так:

$$\sigma(z) = \sqrt{\sum \left[ \frac{\partial z}{\partial x_i} \sigma(x_i) \right]^2}. \quad (10, 11)$$

Пример 5. Найти среднюю квадратичную погрешность функции  $z = x^y$  если  $x$  и  $y$  — случайные переменные.

Найдем производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Следовательно, средняя квадратичная ошибка этой функции определяется так:

$$\sigma(z) = \sqrt{[yx^{y-1} \sigma(x)]^2 + [x^y \ln x \sigma(y)]^2},$$

и ее средняя квадратичная погрешность

$$\delta(z) = \frac{\sigma(z)}{z} = yV \left[ \frac{\sigma(x)}{x} \right]^2 + [0, \ln x \delta(y)]^2.$$

## § 11. Законы распределения ошибок суммы двух слагаемых

Нормальный закон был введен Лапласом как предельное распределение случайных значений какой-либо величины при очень большом количестве ее измерений [9—148]. И. Г. Бубнов показал, что он применим для оценки вероятности ошибок суммы случайных величин, имеющих равновероятные законы распределения ошибок, если число слагаемых равно или более ста [2—12—99]. В. В. Давыдов применяет аналитическую формулу для суммы пяти и более слагаемых [6—21]. Ниже этот вопрос будет исследован более подробно.

Если нормальный закон является пределом, к которому стремится распределение ошибок суммы при неограниченном увеличении числа слагаемых, то другим пределом, к которому стремится распределение ошибок одной случайной величины при уменьшении числа ее измерений до одной случайной величины при уменьшении числа ее измерений до одного случайной величины при уменьшении числа ее измерений до одного случайной величины при уменьшении числа слагаемых или измерений, должен быть наиболее сложным и длительным по сравнению с любыми другими законами распределения ошибок отдельных компонентов расчета. Поэтому в дальнейшем изложении будем рассматривать именно его, но полученные выводы будем распространять и на другие переходы с полной уверенностью, что для линейных и параболических законов распределения ошибок отдельных компонентов эти выводы будут еще более справедливыми.

Ниже будем рассматривать только ошибки суммы, но по отмеченной вышке аналогичны и эти выводы будут справедливы и для погрешностей произведений.

**Сумма равнооточных слагаемых.** Под величинами, известными нам с равной точностью, мы поймем также случайные величины, предельные ошибки которых между собой равны. При сложении случайных величин их случайные ошибки также складываются, а следовательно, предельные ошибки суммы двух равнооточных величин равны удвоенной предельной ошибке каждой из них. Обозначим

$\Delta^*$  — случайная ошибка одного из двух слагаемых;

$\lambda$  — случайная ошибка их суммы.

Тогда случайная ошибка второго слагаемого будет

$$\Delta^* = |\lambda| - \Delta^* \quad (11, 1)$$

а вероятность появления случайной ошибки суммы, равной именно  $\lambda$ , определяется вероятностью одновременного появления ошибок  $\Delta^*$  у первого слагаемого и  $\lambda - \Delta^*$  у второго. Для нахождения этой вероятности докажем сначала следующую теорему.

**Закон умножения вероятностей.** Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей появления каждого из этих событий в отдельности.

Наиболее наглядное доказательство этого положения в применении к теории ошибок может дать графическое построение, изображенное на рис. 12. Здесь по оси  $\overline{AO}$  слева направо отложены все возможные значения ошибок первого слагаемого, а по

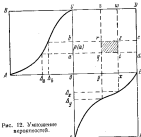


Рис. 12. Умножение вероятностей.

оси  $\overline{OC}$  сверху вниз — значения интеграла их вероятностей или частной достоверности, определенной по формуле

$$v = \frac{\Delta_y}{|\Delta_{до}|} \int_{|\Delta_{до}|} P(\Delta) d\Delta \quad (11, 2)$$

Кривая AC изображает вероятность появления любых случайных ошибок в пределах от  $-|\Delta_{до}|$  до  $\Delta_{до} + |\Delta_{до}|$ , а отрезок  $ab = P(a)$  — вероятность появления случайных ошибок, ограниченных пределами  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . В прямоугольнике OEFQ сделано такое же построение для ошибок второго слагаемого:  $\overline{OO}$  — ось ошибок,  $\overline{OE}$  — ось достоверностей.

Прямоугольник OCDE при этих условиях будет квадратом со стороной, равной единице. Вероятность появления ошибок первого слагаемого  $P(a)$  в пределах  $\Delta_1 - \Delta_2$  будет изображаться на нем площадью прямоугольника abed, а вероятность появления ошибок второго слагаемого  $P(x)$  в пределах  $\Delta_1 - \Delta_2$  — площадью прямоугольника dgh. Вероятность же одновременного появления ошибок обоих слагаемых в указанных пределах  $P(ax)$

определяется площадью заштрихованного прямоугольника  $q_{\lambda}$  одновременно принадлежащей обоим рассмотренным ранее крайним угольникам,

$$P(ax) = P(a)P(x). \quad (11, 3)$$

Теорема доказана. Таким же способом она может быть доказана и для любых других независимых случайных величин как для дискретных событий, с той лишь особенностью, что в последнем случае крайние  $AC$  и  $GE$  приобретут ступенчатый характер.

**Закон распределения ошибок суммы.** В соответствии с наложенным этот закон должен быть написан в таком виде:

$$p(\lambda) = \int_{\Delta_{\min}}^{\Delta_{\max}} p(\Delta) p(\lambda - \Delta) d\Delta, \quad (11, 4)$$

где  $p(\lambda)$  — плотность вероятности появления случайной ошибки, равной  $\lambda$ , у суммы двух слагаемых;  
 $p(\Delta)$  — плотность вероятности появления случайной ошибки  $\Delta$  у первого слагаемого;  
 $p(\lambda - \Delta)$  — плотность вероятности появления случайной ошибки  $\lambda - \Delta$  у второго слагаемого.

Знак интеграла здесь необходим потому, что одной и той же сумме ошибок  $\lambda$  может соответствовать бесчисленное множество ошибок каждого из слагаемых, удовлетворяющих равенству (11, 4).

Так как мы условились считать законы распределения ошибок слагаемых равновероятными, а предельные их ошибки — одинаковыми, то согласно (2, 3)

$$p(\Delta) = p(\lambda - \Delta) = \frac{1}{2|\Delta_{sp}|} \quad (11, 5)$$

и  $2|\Delta_{sp}| = |\lambda_{sp}|$  — предельная ошибка суммы. Следовательно,

$$p(\lambda) = \frac{1}{|\lambda_{sp}|} \int_{\Delta_{\min}}^{\Delta_{\max}} d\Delta. \quad (11, 6)$$

Для нахождения пределов интегрирования обратимся к вспомогательной номограмме рис. 13. Здесь по оси абсцисс отложены случайные ошибки первого слагаемого, по оси ординат — второго. Наклонные прямые соединят точки равных сумм  $\lambda = \Delta' + \Delta'' = \text{const}$ , а пересечение их с границами номограммы покажут те пределы значений  $\Delta'$  и  $\Delta''$ , внутри которых соответствующее сочетание ошибок слагаемых может дать в сумме значение  $\lambda$ . Если положить  $\lambda \geq 0$ , то ошибка первого слагаемого может лежать в пределах от  $\lambda - |\Delta_{sp}|$  до  $|\Delta_{sp}|$ . При  $\lambda = 0$  эти пределы будут наиболее широкими: от  $-\Delta_{sp}$  до  $+\Delta_{sp}$ . При  $\lambda < 0$  знак при абсолютном значении предельной ошибки должен быть изменен на обратный и, следовательно, пределы интегрирования меняются

на следующие:  $\Delta_{\min} = -|\Delta_{sp}|$  и  $\Delta_{\max} = \lambda + |\Delta_{sp}|$ . Значение  $\lambda = 0$  определяет собой, таким образом, особую точку.

После интегрирования выражения (11, 6) в указанных пределах получим

$$p(\lambda) = \frac{1}{|\lambda_{sp}|} \left( 1 \mp \frac{\lambda}{|\lambda_{sp}|} \right), \quad (11, 7)$$

где знак минус соответствует положительным значениям  $\lambda$ , а знак плюс отрицательным его значениям.

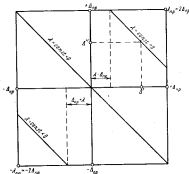


Рис. 13. Ошибка суммы двух равноотных слагаемых (вспомогательная номограмма).

Полученное равенство показывает, что закон распределения ошибок суммы двух случайных величин с равновероятными законами распределения и разными предельными ошибками представляет собой уже знакомую нам линейную функцию (2, 4), характеризующуюся точкой перелома и максимумом при  $\lambda = 0$  и обращаяющаяся в нуль при  $\lambda = \pm |\lambda_{sp}|$ . Графическое изображение этого закона показано на рис. 4 кривой б.

Выражение (11, 7) легко может быть представлено в безразмерной форме, более удобной для практического применения. Для этого достаточно в нем положить  $\lambda_{sp} = \sigma_1$  и  $\lambda = z\sigma_1$



где  $\sigma_2$  — средняя квадратичная ошибка суммы двух слагаемых, определяемая по формуле (3, 4), а  $z$  — нормированная ошибка суммы. При этом получим

$$\rho(z) = \frac{1}{\sigma_2} \left( 1 \mp \frac{z}{\sqrt{6}} \right). \quad (11, 8)$$

Кроме того, учтем, что  $\sigma_2 = \sqrt{2\sigma_1^2} = \sigma_1 \sqrt{2}$ , где  $\sigma_1$  — средняя квадратичная ошибка каждого из слагаемых. Поэтому и в соответствии с (3, 5)

$$z_{\text{гп}} = \frac{\lambda_{\text{гп}}}{\sigma_1} = \frac{2 \Delta_{\text{гп}}}{\sigma_1 \sqrt{2}} = \frac{2 \sigma_1 \sqrt{3}}{\sigma_1 \sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Окончательно получаем

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( 1 \mp \frac{z}{\sqrt{6}} \right). \quad (11, 9)$$

**Закон распределения ошибок суммы неравнооточных слагаемых.** Этот закон может быть найден по тому же выражению (11, 4), но с учетом равенства между собой предельных ошибок обоих слагаемых. Для сокращения письма обозначим их так:

$a = |\Delta_{\text{гп}}^-|$  — абсолютное значение предельной ошибки первого слагаемого;

$b = |\Delta_{\text{гп}}^+|$  — абсолютное значение предельной ошибки второго слагаемого,

и положим  $a > b$ . Закон распределения ошибок обоих слагаемых будем считать по-прежнему равновероятными и симметричными относительно  $\Delta = 0$ . В этом случае равенство (11, 6) переписывается в следующем виде:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{4ab} \int_{\lambda_{\text{гп}}}^{\lambda_{\text{гп}}} d\Delta. \quad (11, 10)$$

Основная задача, таким образом, сводится и здесь к установлению пределов интегрирования. Для этой цели, как и в предыдущем случае, воспользуемся вспомогательной номограммой (рис. 14). Легко заметить, что площадь этой номограммы делится прямой  $\lambda = 0$  на две геометрически подобные части. Поэтому можем ограничиться рассмотрением только одной из них, например, правой (верхней), а затем полученные выводы распространять и на вторую часть (нижнюю) с соответствующим учетом знаков предельных ошибок. Правая часть номограммы в свою очередь делится на две существенно различные зоны, границей между которыми служит вертикаль  $\lambda_{\text{гп}} = a - b$ , т. е. прямая, проходящая через точку  $(+a, -b)$ . Аналогичной границей в левой части будет вертикаль  $\lambda_{\text{гп}} = b - a$  или прямая, проходящая через точку  $(-a, +b)$ .

В I зоне правой части, ограниченной пределами  $0 < \lambda < \lambda_{\text{гп}}$ , ошибки первого слагаемого могут принимать значения от  $\lambda - b$  до  $\lambda + b$ . Следовательно, равенство (11, 10) для этой зоны дает

$$\rho(\lambda)_I = \frac{1}{4ab} \int_{\lambda-b}^{\lambda+b} d\Delta = \frac{1}{2a}. \quad (11, 11)$$

Во II зоне правой части располагаются точки, соответствующие значениям суммы ошибок в границах  $\lambda_{\text{гп}} < \lambda < \lambda_{\text{гп}}$ . Соответ-

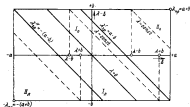


Рис. 14. Ошибки суммы двух неравнооточных слагаемых (вспомогательная номограмма).

ствующие пределами интегрирования будут значения  $\Delta$  от  $\lambda - b$  до  $|\Delta_{\text{гп}}^-| = a$ . Следовательно, в этой зоне

$$\rho(\lambda)_{II} = \frac{1}{4ab} \int_{\lambda-b}^a d\Delta = \frac{|\lambda_{\text{гп}}^-|}{4ab} \left( 1 - \frac{\lambda}{|\lambda_{\text{гп}}^-|} \right), \quad (11, 12)$$

где  $|\lambda_{\text{гп}}^-| = a + b$ .

Полученные выражения, очевидно, могут быть распространены и на левую часть номограммы рис. 14. При этом равенство (11, 11) не претерпит никаких изменений, а в равенстве (11, 12) знак в скобках должен быть заменен на обратный.

Графическое изображение полученного закона распределения для различных значений  $x = \frac{b}{a}$  показано на рис. 15.

Нетрудно убедиться в том, что найденный закон распределения является более общим по сравнению с полученными ранее законами (2, 3) для равновероятного и (11, 7) для линейного распределений. Действительно, если уменьшать ошибки второго слагаемого до  $b = 0$ , т. е. перейти к случаю, когда второе из слагаемых является достоверным, а ошибка суммы определяется только ошибками первого слагаемого, то границы II зоны сближаются

до совпадения и, следовательно, выражение (11, 12) теряет практический смысл. Выражение же (11, 11) при этом распространяется на все значения случайных ошибок от  $\Delta_{\text{сп}}' = -a$  до  $\Delta_{\text{сп}}' = +a$ .

В случае равенства предельных ошибок обоих слагаемых ( $a = b$ ) аналогично теряет практический значение выражение (11, 11). В равенстве же (11, 12) должна быть выполнена подстановка  $4ab = 4a^2 = \lambda_{\text{сп}}^2$ , после чего оно совпадает с выражением (11, 7) закона распределения ошибок суммы двух равных по величине слагаемых.

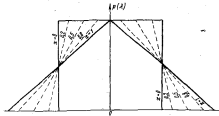


Рис. 15. Закон распределения ошибок суммы двух неравных слагаемых.

**Общий безразмерный закон распределения ошибок суммы двух слагаемых.** Полученные выше равенства могут быть приведены к безразмерной форме путем соответствующих подстановок (см. § 3):

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} p'(z);$$

$$\lambda = z\sigma;$$

$$\lambda_{\text{сп}} = z_{\text{сп}} \cdot \sigma,$$

где  $\sigma$  — средняя квадратичная ошибка суммы;  
 $z$  — нормированная ошибка суммы.

С другой стороны, имеем

$$\lambda_{\text{сп}} = a + b = a(1 + x); \quad (11, 13)$$

$$z_{\text{сп}} = \frac{\lambda_{\text{сп}}}{\sigma} = \frac{a}{\sigma}(1 + x). \quad (11, 14)$$

Здесь, как и выше, для сокращения письма введено обозначение  $x = \frac{b}{a}$ , причем величина  $x$  по упомянутому выше условию  $b < a$  лежит в пределах  $0 < x < 1$ . Отсюда следует, что

$$a = \frac{z_{\text{сп}} \cdot \sigma}{1 + x},$$

и потому плотность вероятности нормированных ошибок в средней зоне рис. 14 будет

$$P_1(z) = \frac{\sigma}{2\lambda} = \frac{1+x}{2z_{\text{сп}}}. \quad (11, 15)$$

Аналогично для II зоны как правой, так и левой частей графика вероятности, имея в виду, что  $ab = a^2x$ , получим

$$P_2(z) = \sigma \frac{a(1+x)}{4a^2x} \left(1 \mp \frac{\lambda}{\lambda_{\text{сп}}}\right) = \frac{1+x}{4x} \frac{\sigma}{a} \left(1 \mp \frac{z}{z_{\text{сп}}}\right)$$

или, учитывая (11, 14), окончательно

$$P_2(z) = \frac{(1+x)^2}{4x} \cdot \frac{1}{z_{\text{сп}}} \left(1 \mp \frac{z}{z_{\text{сп}}}\right). \quad (11, 16)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения (11, 15) и (11, 16) связывают плотность вероятности нормированных ошибок суммы с ее предельной нормированной ошибкой однозначно. Для этого достаточно выразить ее среднюю квадратичную ошибку через величину предельных ошибок слагаемых

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2)} = a \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{3}}$$

и подставить это выражение в равенство (11, 14). При этом получим

$$z_{\text{сп}} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{3}. \quad (11, 17)$$

Отсюда видно, что абсолютная величина нормированной предельной ошибки зависит только от отношения  $x = \frac{b}{a}$  и наоборот, что и доказывает высказанное ранее утверждение.

Этим важным выводом воспользуемся в § 13 для составления таблиц возможных ошибок сумм нескольких неравных по величине слагаемых по их нормированным предельным ошибкам.

В заключение настоящего параграфа определим границы средней зоны закона распределения нормированных ошибок:

$$z_{\text{сп}} \pm \frac{\sigma - b}{\sigma} = \pm \frac{\sigma(1-x)}{\sigma}$$

дан в соответствии с формулой (11, 14)

$$\tau_{\text{гр}} = \pm \frac{1-x}{1+x} z_{\text{гр}} \quad (11, 18)$$

При  $x = 0$  эти границы совпадают с  $\pm z_{\text{гр}}$  и формула (11, 15) дает закон равномерного распределения нормированных ошибок одной случайной величины. При  $x = 1$  обе границы средней аном сливаются в точке  $z_{\text{гр}} = 0$  и равенство (11, 16) сводится к формуле (11, 8), изображающей закон распределения нормированных ошибок суммы двух равнозначных слагаемых. В интервале между этими крайними случаями закон распределения нормированных ошибок является непрерывной однозначной функцией параметра  $x$ , или, что то же самое, предельной нормированной ошибки суммы  $z_{\text{гр}}$ .

## § 12. Законы распределения ошибок суммы многих слагаемых

Равенство (11, 4) является общим выражением для композиции двух любых законов распределения. С его помощью можно найти и композицию равновероятных законов распределения ошибок любого числа слагаемых, если сначала определить законы распределения ошибок их сумм попарно, затем, рассматривая каждую такую сумму как самостоятельное слагаемое с линейным распределением ошибок, находить законы распределения их сумм и так далее. В частности, может оказаться необходимым и сочетание равновероятного закона с линейным, при нечетном числе слагаемых, в более сложные сочетания при числе слагаемых, не кратных четырем, восьми и т. д. Однако, как мы покажем ниже, в таких сложных операциях на практике нет необходимости. Для этого достаточно будет рассмотреть лишь комбинации равновероятного закона с линейным и сочетание двух линейных законов. Этому соответствуют процессы суммирования трех и четырех слагаемых, имеющих каждое равновероятный закон распределения.

Ошибки суммы трех равнозначных слагаемых. Рассматривая сумму любых двух из этих слагаемых как одну величину с линейным законом распределения, можем переписать равенство (11, 4) в таком виде:

$$\rho(\Lambda) = \int_{\Lambda_{\text{мин}}}^{\Lambda_{\text{макс}}} \rho(\Delta) \rho(\Lambda - \Delta) d\Delta, \quad (12, 1)$$

где  $\Lambda$  — ошибка суммы трех слагаемых;

$\Delta$  — ошибка одного (любого) из них.

В таком случае, пользуясь выведенными ранее зависимостями, можно положить

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{2b}, \quad (12, 2)$$

где  $b = |\Delta_{\text{гр}}|$  — абсолютное значение предельной ошибки одного слагаемого,

$$\rho(\Lambda - \Delta) = \frac{1}{a} \left( 1 \mp \frac{\Lambda - \Delta}{a} \right), \quad (12, 3)$$

где  $a = 2|\Delta_{\text{гр}}|$  — абсолютное значение предельной ошибки суммы двух других слагаемых.

Подставляя эти значения в равенство (12, 1), получим

$$\rho(\Lambda) = \frac{1}{2ab} \int_{\Lambda_{\text{мин}}}^{\Lambda_{\text{макс}}} \left( 1 \mp \frac{\Lambda - \Delta}{a} \right) d\Delta, \quad (12, 4)$$

после интегрирования которого находим

$$\rho(\Lambda) = \left| \frac{\Lambda}{2ab} \left( 1 \mp \frac{\Lambda}{a} \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\text{макс}}}{\Lambda_{\text{мин}}} \right) \right| \quad (12, 5)$$

Для наложения пределов интегрирования воспользуемся номограммой рис. 14, где в этом случае по оси ординат следует откладывать ошибки  $\Delta$  одного слагаемого, а по оси абсцисс — ошибки  $\Lambda - \Delta$  суммы двух других слагаемых. При этом

$$\Lambda_{\text{гр}} = \pm (a + b) = \pm 3|\Delta_{\text{гр}}|$$

а границы зон

$$\Lambda_{\text{гр}} = \pm (a - b) = \pm |\Delta_{\text{гр}}|$$

Кроме того, надо учесть, что при  $\Lambda - \Delta = 0$  или  $\Delta = \Lambda$  выражение (12, 3) имеет особую точку, в которой знак в скобках меняется на обратный. При этих условиях для 1 зоны номограммы получим два интервала. Первый в пределах  $-b < \Delta < \Lambda$ , где  $\Lambda - \Delta > 0$ ; в формуле (12, 5) должны быть сохранены верхние знаки. Второй интервал  $\Lambda < \Delta < b$ , где  $\Lambda - \Delta < 0$ ; в формуле (12, 5) будут действовать нижние знаки. Таким образом, для 1 зоны получим

$$\rho_1(\Lambda) = \left| \frac{\Lambda}{2ab} \left( 1 - \frac{\Lambda}{a} + \frac{1}{2} \frac{\Delta}{b} \right) \right|_b^{\Lambda} + \left| \frac{\Lambda}{2ab} \left( 1 + \frac{\Lambda}{a} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{b} \right) \right|_{\Lambda}^b \quad (12, 6)$$

После подстановки пределов и простых преобразований находим

$$p_1(\lambda) = \frac{9}{8\lambda_{cp}} \left( 1 - 3 \frac{\lambda^2}{\lambda_{cp}^2} \right). \quad (12, 7)$$

Границами этой зоны будут

$$-\frac{1}{3} \lambda_{cp} < \lambda < +\frac{1}{3} \lambda_{cp}$$

а предельными значениями при  $\lambda = -\frac{1}{3} \lambda_{cp}$  и  $\lambda = +\frac{1}{3} \lambda_{cp}$

$$p_1(\lambda) = \frac{3}{4\lambda_{cp}}$$

Средняя точка, соответствующая  $\lambda = 0$  и наибольшей плотности вероятности, будет

$$p_1(0) = \frac{9}{8\lambda_{cp}}$$

Для II зоны правой части номограммы в равенстве (12, 4) должен быть сохранен знак минус, а для II зоны левой части той же номограммы — знак плюс. Особая точка в этих зонах отсутствует, и пределами интегрирования для правой части будут

$$\lambda - a < \Delta < b,$$

а для левой части

$$-b < \Delta < \lambda + a.$$

После подстановки этих пределов в равенство (12, 5) получим общее выражение для обеих частей II зоны

$$p_2(\lambda) = \frac{27}{16\lambda_{cp}} \left( 1 \mp 2 \frac{\lambda}{\lambda_{cp}} + \frac{\lambda^2}{\lambda_{cp}^2} \right), \quad (12, 8)$$

где знак минус относится к правой части зоны, а знак плюс — к левой ее части.

На границах I и II зон при  $\lambda = \pm \frac{1}{3} \lambda_{cp}$  получим то же значение, что и по формуле (12, 7), а при  $\lambda = \pm \lambda_{cp}$ , как и следовало ожидать,  $p_1(\lambda) = 0$ .

Равенства (12, 7) и (12, 8) легко приводятся к безразмерной форме путем подстановки  $p(z) = p(\lambda)$  и  $\lambda : \lambda_{cp} = z : z_{cp}$ .

Для средней зоны, где  $-\frac{1}{3} z_{cp} < z < +\frac{1}{3} z_{cp}$

$$p_1(z) = \frac{9}{8z_{cp}} \left( 1 - 3 \frac{z^2}{z_{cp}^2} \right). \quad (12, 9)$$

Для крайних зон, где  $-z_{cp} < z < -\frac{1}{3} z_{cp}$  и  $+\frac{1}{3} z_{cp} < z < +z_{cp}$

$$p_2(z) = \frac{27}{16z_{cp}} \left( 1 \mp 2 \frac{z}{z_{cp}} + \frac{z^2}{z_{cp}^2} \right). \quad (12, 10)$$

Как видно, безразмерный закон распределения нормированных ошибок и в этом случае однозначно определяется величиной нормированной предельной ошибки  $z_{cp}$ .

Графическое изображение найденного закона показано на рис. 17 дуэктарной кривой  $Z$ . Существенные отклонения от нормального закона распределения здесь наблюдаются только в областях малых ошибок до  $z = \pm 0,5$  и больших ошибок от  $z = \pm 2,0$  до  $z = \pm z_{cp} = \pm 3$ .

**Сумма четырех равнозначных слагаемых.** Сумму четырех слагаемых, на которых каждое имеет равновероятный закон распределения ошибок, можно рассматривать как сумму двух слагаемых, ошибки которых подчиняются лембейскому закону (11, 7). Обозначив случайную ошибку их суммы через  $\lambda$ , можно написать закон ее распределения, используя формулу (11, 4), в таком виде:

$$p(\lambda) = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} p(\lambda) p(\lambda - \lambda) d\lambda, \quad (12, 11)$$

где  $\lambda$  обозначает случайную ошибку суммы любой пары из рассматриваемых четырех слагаемых, а  $\lambda - \lambda$  — случайную ошибку суммы второй их пары.

Для нахождения пределов интегрирования обратимся к вспомогательной номограмме рис. 16, построенной так же, как строились подобные номограммы в предыдущем параграфе, и прежде всего отметим, что вся ее площадь делится на две симметричные половины диагональю  $\lambda = 2\lambda$ , проведенной через углы, соответствующие предельным значениям ошибок суммы  $-\lambda_{cp}$  и  $+\lambda_{cp}$ . Поэтому выражение (12, 11) может быть заменено следующим

$$p(\lambda) = 2 \int_{\frac{1}{2}\lambda}^{\lambda_{cp}} p(\lambda) p(\lambda - \lambda) d\lambda. \quad (12, 12)$$

Затем, так как лембейский закон (11, 7) имеет особую точку при  $\lambda = 0$ , то и на номограмме рис. 16 каждое пересечение прямой  $\lambda = const$  с осями координат должно рассматриваться как особая точка:  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \lambda$  или иначе  $\lambda = \lambda - \lambda$ . Однако наличие указанных особых точек характерно только для средней зоны номограммы рис. 16, лежащей в пределах  $-\lambda_{cp} < \lambda < +\lambda_{cp}$ . Вне этих границ обе особые точки выходят за пределы интегрирования. Поэтому выражение (12, 12), как и в случае трех

слагаемых, должно решаться отдельно для средней зоны и для краевых. Кроме того, в средней зоне интересующий нас участок интегрирования распадется на два интервала с границей, соответствующей  $\lambda = \Lambda$ .

Учитывая все эти замечания и подставляя в равенство (12, 12) развернутые выражения для плотностей вероятности согласно (11, 7), получим:

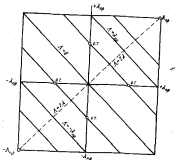


Рис. 16. Область суммирования четырех равнозначных слагаемых (векторная диаграмма).

для I (средней) зоны, где  $-\lambda_{0p} < \Lambda < +\lambda_{0p}$ ,

$$P_I(\Lambda) = \frac{2}{\lambda_{0p}^2} \left\{ \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{0p}}\right) \left(1 - \frac{\Lambda - \lambda}{\lambda_{0p}}\right) d\lambda + \int_{\Lambda}^{\lambda_{0p}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{0p}}\right) \left(1 + \frac{\Lambda - \lambda}{\lambda_{0p}}\right) d\lambda \right\}, \quad (12, 13)$$

а для II (крайних) зон, где  $-\lambda_{0p} < \Lambda < -\lambda_{0p}$  и  $\lambda_{0p} < \Lambda < +\lambda_{0p}$ ,

$$P_{II}(\Lambda) = \frac{2}{\lambda_{0p}^2} \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\lambda_{0p}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{0p}}\right) \left(1 - \frac{\Lambda - \lambda}{\lambda_{0p}}\right) d\lambda. \quad (12, 14)$$

Интегрируя эти выражения, получим:

для I зоны

$$P_I(\Lambda) = \frac{2}{\lambda_{0p}^2} \left( \frac{2}{3} - \vartheta^2 + \frac{1}{2} \vartheta^3 \right); \quad (12, 15)$$

для II зоны

$$P_{II}(\Lambda) = \frac{2}{\lambda_{0p}^2} \left( \frac{4}{3} - 2\vartheta + \vartheta^2 - \frac{1}{6} \vartheta^3 \right), \quad (12, 16)$$

где для сокращения письма обозначено

$$\vartheta = 2 - \frac{\Lambda}{\lambda_{0p}} = 2 - \frac{z}{z_{0p}}. \quad (12, 17)$$

Точкам сопряжения (границам средней зоны) соответствует значение  $\vartheta = \pm 1$ .

Переход к безразмерной форме закона распределения выполняется без затруднений с учетом известных зависимостей  $\rho(z) = \sigma \rho(\Lambda)$  и  $\Lambda = z\sigma$ .

В результате этих подстановок, учитывая наименьшие знаки величин  $\Lambda$  при переходе через нуль, получаем:

$$\left( -\frac{1}{2} z_{0p} < z < +\frac{1}{2} z_{0p} \right)$$

$$P_I(z) = \frac{4}{3z_{0p}^2} \left( 1 - 6 \frac{z^2}{z_{0p}^2} \pm 6 \frac{z^3}{z_{0p}^3} \right); \quad (12, 18)$$

для крайних зон

$$P_{II}(z) = \frac{8}{3z_{0p}^2} \left( 1 \mp 3 \frac{z}{z_{0p}} + 3 \frac{z^2}{z_{0p}^2} \mp \frac{z^3}{z_{0p}^3} \right), \quad (12, 19)$$

где верхние знаки справедливы для  $z \geq 0$ , а нижние — для  $z < 0$ .

Графическое изображение закона распределения абсолютных ошибок суммы четырех равнозначных слагаемых с равновероятными законами распределения показано на рис. 4 кривой б. Оно носит параболический характер, но по внешнему виду уже приближается к нормальному закону. Особенно наглядно это видно по рис. 17, где показаны законы распределения коррелированных ошибок, а не абсолютных, как на рис. 4. Очевидно, для суммы еще большего числа слагаемых закона точная законораспределения нормальным не может существенно отличаться на результаты расчета, а поэтому в выводе этих точных законов нет необходимости. Ниже к этому вопросу мы еще вернемся (§ 13).

Композиция нормальных законов распределения. Если обе складываемые величины имеют нормальные законы распределения

ошибок, то закон распределения ошибок их суммы на основании (11, 4) будет

$$p(\lambda) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{2} \frac{(\lambda - x)^2}{\sigma_2^2}} d\lambda. \quad (12, 20)$$

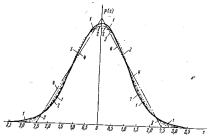


Рис. 17. Закон распределения нормированных ошибок.

1 - нормальная, 2 - четыре составляющие, 3 - три составляющие, 4 - две составляющие.

Показатель степени в функции, стоящей под знаком интеграла, легко может быть преобразован в трехчлен вида

$$-\lambda \Delta^2 + 2B\lambda - C, \quad (12, 21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ B &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sigma_1^2} \\ C &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (12, 22)$$

Для возможности интегрирования выражения (12, 20) умножим и разделим подинтегральную функцию на  $e^{-x}$ , где  $x$  подберем так, чтобы трехчлен (12, 21) обратился в полный квадрат

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C + x = (A\sqrt{A} - \sqrt{C} + x)^2 - \sigma.$$

Для этого необходимо, чтобы  $A(C + x) = B^2$ , откуда

$$x = \frac{AC - B^2}{A} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Тогда равенство (12, 20) получит следующий вид:

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\pi},$$

или после замены  $x$  и  $A$  их значениями

$$p(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\sigma^2}}, \quad (12, 23)$$

где  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$  — дисперсия ошибок суммы.

Равенство (12, 23) представляет собой не что иное, как выражение нормального закона, имеющего в качестве дисперсии сумму дисперсий отдельных слагаемых (в соответствии с § 9). Таким же образом можно доказать, что композиция любого числа нормальных законов распределения приводит к нормальному же закону — положению, которое мы уже неоднократно высказывали выше, хотя и не приводили для этого соответствующих обоснований.

**Выводы.** На основании изложенного в двух последних параграфах можно утверждать, что при достаточно большом числе слагаемых закон распределения ошибок их суммы зависит только от ее дисперсии, но не от их количества и относительной точности: формула (12, 23) одинаково справедлива как для равнозначных слагаемых, так и для слагаемых, предельные ошибки которых существенно различны, а также для суммы слагаемых, имеющих как равновероятные, так и, тем более, любые другие законы распределения ошибок.

При меньшем числе слагаемых форма закона распределения ошибок суммы, кроме дисперсии, зависит также от их числа  $n$  и нормированной предельной ошибки  $x_{гр}$ , которая в свою очередь является функцией относительной точности отдельных слагаемых и законов распределения их ошибок. Это последнее положение мы доказали со всей необходимой полнотой только для суммы двух неравнозначных слагаемых, но аналогичное доказательство легко может быть распространено и на суммы трех и четырех слагаемых.

### § 13. Достоверность суммы случайных величин

Как уже отмечалось в § 4, законы распределения ошибок любых случайных величин нас могут интересовать не сами по себе, а лишь как средство для определения степени достоверности и возможных погрешностей результатов расчета или измерения.

Поэтому и для ошибок суммы ряда случайных слагаемых необходимо найти выражения их частных достоверностей в функции от величины возможной ошибки. Воспользуемся для этой цели формулой (4, 4), приведем ее к безразмерному виду

$$v = 0,5 + \int_0^x p(z) dz. \quad (13, 1)$$

При использовании этой формулы для любого из рассмотренных случаев не встречается никаких принципиальных затруднений. Для одной случайной величины согласно (3, 9) имеем

$$p(z) = \frac{1}{2z_{\text{оп}}}.$$

Следовательно,

$$v = 0,5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_x}{z_{\text{оп}}}. \quad (13, 2)$$

т. е. степень достоверности линейно зависит от отношения нормированных ошибок — возможной и предельной.

Для двух слагаемых согласно (11, 15) имеем в наиболее общем случае для средней зоны

$$p_1(z) = \frac{1+x}{2z_{\text{оп}}}.$$

Следовательно,

$$v_1 = 0,5 + \frac{1+x}{2} \cdot \frac{z_x}{z_{\text{оп}}}. \quad (13, 3)$$

По этой формуле, сходной с предыдущей, степень достоверности суммы двух неравнозначных слагаемых может находиться только до значений  $z_{\text{оп}}$  определяемых выражением (11, 18), т. е. до

$$z_{\text{оп}} = \frac{1-x}{1+x} z_{\text{оп}}. \quad (13, 4)$$

На этой границе получим

$$v_{\text{max}} = 0,5 + \frac{1-x}{2}. \quad (13, 5)$$

Для II зоны, где  $x \geq z_{\text{оп}}$ , справедлива формула (11, 16)

$$p_2(z) = \frac{1+x^2}{2x} \cdot \frac{1}{z_{\text{оп}}} \left(1 - \frac{z_x}{z_{\text{оп}}}\right).$$

Это выражение должно быть проинтегрировано в пределах от  $z_{\text{оп}}$  до  $z_x$  и затем добавлено к равенству (13, 5). После этого получим

$$v_2 = 0,5 + \frac{1-x}{2} - \frac{1-x^2}{4x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x}\right) + \\ + \frac{1+x^2}{4x} \frac{z_x}{z_{\text{оп}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z_x}{z_{\text{оп}}}\right). \quad (13, 6)$$

В частности, для двух равнозначных слагаемых в этом выражении следует положить  $x = 1$ . Следовательно,

$$v_2 = 0,5 + \frac{z_x}{2z_{\text{оп}}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z_x}{z_{\text{оп}}}\right). \quad (13, 7)$$

В данном случае степень достоверности также зависит только от отношения нормированных ошибок  $z_x : z_{\text{оп}}$ , но эта зависимость носит параболический характер.

Для трех равнозначных слагаемых в средней зоне согласно (12, 9) имеем

$$p_1(z) = \frac{9}{2z_{\text{оп}}} \left(1 - 3 \frac{z^2}{z_{\text{оп}}^2}\right).$$

Следовательно,

$$v_1 = 0,5 + \frac{9}{8} \cdot \frac{z_x}{z_{\text{оп}}} \left(1 - \frac{z_x^2}{z_{\text{оп}}^2}\right).$$

Границей этой зоны служит значение  $z_x = \frac{1}{3} z_{\text{оп}}$ . При этом

$$v_{\text{max}} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Для III зоны согласно (12, 10) должно быть

$$p_2(z) = \frac{27}{16z_{\text{оп}}} \left(1 - 2 \frac{z}{z_{\text{оп}}} + \frac{z^2}{z_{\text{оп}}^2}\right),$$

и, следовательно,

$$v_{12} = v_{\text{max}} + \int_{\frac{1}{3} z_{\text{оп}}}^{z_{\text{оп}}} p_2(z) dz = \\ = \frac{5}{8} + \frac{27}{16} \frac{z_x}{z_{\text{оп}}} \left(1 - \frac{z_x}{z_{\text{оп}}} + \frac{1}{3} \frac{z_x^2}{z_{\text{оп}}^2}\right) - \frac{91}{48}$$

$$v_{II} = \frac{7}{16} + \frac{27}{16} \cdot \frac{z_v}{z_{cp}} \left( 1 - \frac{z_v}{z_{cp}} + \frac{1}{3} \frac{z_v^2}{z_{cp}^2} \right). \quad (13, 8)$$

Для четырех равнооточных слагаемых в средней зоне на основании формулы (12, 18) получим

$$v_1 = 0,5 + \frac{4}{3} \frac{z_v}{z_{cp}} \left( 1 - 2 \frac{z_v^2}{z_{cp}^2} + \frac{3}{2} \frac{z_v^3}{z_{cp}^3} \right). \quad (13, 9)$$

Средняя зона ограничена значением  $z = \frac{1}{2} z_{cp}$ . Поэтому максимальное значение  $v_1$  будет

$$v_{1max} = \frac{23}{24} = 0,95833.$$

Для II зоны в соответствии с формулой (12, 19) будем иметь

$$v_{II} = \frac{23}{24} + \frac{8}{3} \frac{z_v}{z_{cp}} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{z_v}{z_{cp}} + \frac{z_v^2}{z_{cp}^2} - \frac{1}{4} \frac{z_v^3}{z_{cp}^3} \right) - \frac{13}{24}$$

или окончательно

$$v_{II} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \frac{z_v}{z_{cp}} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{z_v}{z_{cp}} + \frac{z_v^2}{z_{cp}^2} - \frac{1}{4} \frac{z_v^3}{z_{cp}^3} \right). \quad (13, 10)$$

Сумма многих равнооточных слагаемых. Как мы уже отмечали в § 12, законы распределения ошибок суммы нескольких слагаемых с увеличением числа последних постепенно приближаются по форме и своим характеристикам к нормальному закону. Еще более убедительно это может быть показано с помощью рис. 18, где занесены кривые степеней достоверности сумм различного числа слагаемых в зависимости от заданной возможной их ошибки. Изображенные здесь прямая  $\lambda = 1$  относится к достоверности значений одной случайной величины,  $\lambda = 2$  — к двум равнооточным слагаемым,  $\lambda = 3$  — к трем и  $\lambda = 4$  — к четырем таким же слагаемым, имеющим каждое равновероятные законы распределения ошибок. Промежуточные кривые  $x = 0,2$ ,  $x = 0,5$  и  $x = 0,8$  изображают значения степеней достоверности для двух неравнооточных слагаемых с соответствующими отношениями их предельных ошибок (§ 11).

Сравнивая эти кривые, можно заметить, что прямая  $\lambda = 1$  ( $x = 0$ ) наиболее резко отличается от всех прочих, но по мере

увеличении  $x$  от нуля до единицы наблюдается постепенный переход от степеней достоверности равновероятного распределения ошибок одной случайной величины к степеням достоверности линейного распределения ошибок суммы двух равнооточных слагаемых ( $\lambda = 2$ ). Формулы (13, 3), (13, 4) и (13, 6) подтверждают, что этот переход действительно должен быть плавным и непрерывным, так как все указанные функции регуляри и рассматриваемых пределов.

Кривая  $\lambda = 2$  уже значительно меньше отличается от кривой  $\lambda = 3$ , а эта последняя еще меньше от кривой  $\lambda = 4$ . Столь же малой получается разница между достоверностями сумм четырех и бесконечного числа равнооточных слагаемых, т. е. достоверности величин с нормальным законом распределения ( $\lambda = \infty$ ). Сравнение этих двух последних кривых показывает, что при всех нормированных ошибках, больших, чем  $z_v = 0,7$  ( $v = 0,75$ ), замена точного закона распределения ошибок четырех слагаемых нормальным дает расхождение в степени достоверности не более, чем на 0,5%. С увеличением нормированной возможной ошибки до  $z_v = 1,77$ , что соответствует степени достоверности  $v = 0,96$ , это расхождение постепенно уменьшается до нуля, а при еще больших  $z_v$  оно не превышает 0,15% и направлено в безопасную сторону, т. е. в сторону преуменьшения достоверности. Отсюда можно вновь сделать вывод, что для практических целей нет необходимости уточнять законы распределения ошибок сумм более четырех равнооточных слагаемых, так как во всех подобных случаях замена точного закона нормальным не может существенно искажать результаты расчета. Оперировать же с нормальным законом несравненно проще, чем применять в каждом частном случае другие более сложные и нестабулизированные законы, хотя они и более точны. Только для достоверностей, превышающих 0,99, такое уточнение может оказаться желательным.

Суммы неравнооточных слагаемых. Все выведенные формулы позволяют определять степень достоверности  $v$  сумм нескольких слагаемых по их количеству  $\lambda$ , нормированной предельной ошибке  $z_{cp}$  и заданной возможной ошибке  $z_v$ . В практике же чаще приходится решать обратную задачу: находить нормированную возможную ошибку по заданной степени достоверности, нормированной предельной ошибке и известному числу слагаемых. Ввиду сложности найденных уравнений решение подобной задачи алгебраическим путем оказывается возможным только для простейшего случая двух равнооточных слагаемых с равновероятными законами распределения. Для большего числа слагаемых решение может быть найдено, как и для нормального закона, только методом последовательных приближений или путем предварительного табулирования всех значений  $v$  в нужных пределах. Однако, если учесть, что на практике далеко не всегда точность всех слагаемых одинакова и что возможно



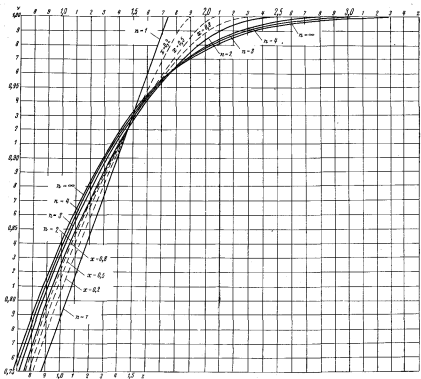


Рис. 18. Достоверности сумм различного числа слагаемых.

неограниченное число различных вариантов их количества, законов распределения и относительной точности, станет очевидной невыполнимость задачи составления таких таблиц, которые могли бы обеспечить все практически возможные случаи. Поэтому ниже предлагается другой способ, хотя и менее точный, но дающий вполне приемлемые результаты.

Наша задача сводится к описанию некоторой функции

$$z_v = f(n, z_{\text{доп}}, v). \quad (13, 11)$$

Не все аргументы этой функции являются независимыми. Действительно, нормированная предельная ошибка  $z_{\text{доп}}$  может быть представлена в виде отношения абсолютной предельной ошибки суммы  $k_{\text{доп}}$  к ее средней квадратичной ошибке  $\sigma$ . Для любого числа равнооточных слагаемых

$$z_{\text{доп}} = \frac{k_{\text{доп}}}{\sigma} = \frac{\Delta z_{\text{доп}}}{\sqrt{n} \sigma_1},$$

где  $\Delta z_{\text{доп}}$  — предельная ошибка одного (каждого) слагаемого;  $\sigma_1$  — его средняя квадратичная ошибка.

Подставив это последнее значение в предыдущую формулу, получим

$$z_{\text{доп}} = \sqrt{3n}. \quad (13, 12)$$

Следовательно, нормированная предельная ошибка суммы равнооточных слагаемых однозначно определяется их количеством, и, наоборот, по известной нормированной предельной ошибке суммы равнооточных слагаемых может быть установлено их количество

$$n = \frac{1}{3} z_{\text{доп}}^2. \quad (13, 13)$$

Таким образом, на-под знака функции  $f$  в выражении (13, 11) для всех сумм равнооточных слагаемых число  $n$  может быть исключено, как однозначно связанное с величиной  $z_{\text{доп}}$ .

Равенство (13, 13) условно может быть распространено и на суммы неравнооточных величин, если допустить представление о дробном числе слагаемых как о некотором эквиваленте целого их числа, дающем ту же нормированную предельную ошибку. При таком условии равенство (13, 11) может быть переписано в виде непрерывной функции

$$z_v = f(z_{\text{доп}}, v). \quad (13, 14)$$

Эта функция, вообще говоря, не является регулярной, так как при каждом значении  $z_{\text{доп}} = \sqrt{3n}$ , соответствующем целому числу  $n$ , возможно появление особых точек (переломов), в которых

отсутствуют обычные производные. Но имея в виду, что перед нами стоит задача не создания анализе точного, строго обоснованного метода расчета достоверностей, но лишь объяснения практически допустимых приближенных способов определения возможных ошибок, прибегнем к следующему постулату.

Нормированные возможные ошибки суммы любого числа неравнооточных слагаемых могут приближенно считаться регулярной функцией нормированной предельной ошибки этой суммы и требуемой степени ее достоверности.

Основанием для такого предположения служат следующие соображения.

При увеличении числа слагаемых закон распределения ошибок суммы, как известно, стремится к нормальному (§ 12), при котором нормированная возможная ошибка зависит не от предельной, а лишь от требуемой степени достоверности. Это правило справедливо для любого соотношения предельных ошибок отдельных слагаемых и для любых законов их распределения. Поэтому, очевидно, наибольшие отклонения от регулярности должны иметь место при наименьшем числе слагаемых, а именно при  $n = 2$  или иначе при  $z_{\text{доп}} < \sqrt{6} = 2,44948$ . С увеличением числа слагаемых и нормированной предельной ошибки погрешность от замены действительной функции (13, 14) регулярной может только уменьшаться.

Для оценки этой погрешности обратимся к рис. 19, на котором точки, соответствующие разным значениям  $n$  и равным степеням достоверности, соединены плавными кривыми  $z_v = \varphi(z_{\text{доп}})$ . На этой же диаграмме пунктиром указаны нормированные возможные ошибки сумм двух неравнооточных слагаемых. Силами отсюда разности ординат сплошных и пунктирных линий, получим наибольшие погрешности определения нормированных возможных ошибок для каждой степени достоверности, приведенные в табл. VI

Таблица VI

Наибольшие погрешности приближенного определения возможных ошибок

$v$	0,8	0,9	0,95	0,98	0,999
$\Delta(z_v)$	-0,06	+0,04	+0,07	+0,03	-0,02
$z_v$	1,02	1,24	1,50	1,90	2,90
$\delta(z_v)$	-0,06	+0,03	+0,04	+0,02	-0,04

Согласно этой таблице наибольшая погрешность в определении возможной ошибки не превосходит 6% и то лишь при степенях достоверности 0,8. Так как практически нет никакой необходимости определять ошибки при этой достоверности с большей

точностью, такой результат может считаться вполне удовлетворительным. В более ответственных расчетах, где требуется и более высокая степень достоверности, погрешность от замены истинной зависимости (13, 14) регулярной значительно уменьшается. Уменьшается она также и с увеличением числа компонентов расчета.

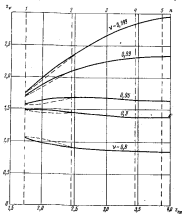


Рис. 13. Нормированные вероятные ошибки суммы отклоненного числа слагаемых.

Все наши выводы основаны на анализе ошибок суммы слагаемых с равновероятными законами распределения. Но они применимы и для других законов. Действительно, верными являются расчеты, являющиеся непосредственным измерением. Погрешности одиночного измерения могут быть распределены только равномерно, внутри некоторых пределов, или вероятность их может уменьшаться по мере приближения к этим пределам. В первом случае

при одинаковых предельных ошибках дисперсия погрешностей будет больше, чем во втором, а нормированная предельная ошибка будет наименьшей. Следовательно, погрешность определения ошибок суммы таких слагаемых будет наибольшей, но, как мы видели, все же допустимой. Тем более она будет допустима при любом неравновероятном законе распределения отдельных слагаемых.

При повторных измерениях так же, как при увеличении числа слагаемых, дисперсия ошибок среднего уменьшается. Закон их распределения при этом стремится к нормальному, для которого предположение о регулярности функции (13, 14) совпадает с действительностью.

При сложении двух величин с равновероятными законами распределения ошибки их суммы распределяются по линейному закону; ошибки суммы двух величин с линейными законами распределения подчиняются параболосообразному закону и т. д. Следовательно, каждое слагаемое с линейным или параболосообразным законом распределения ошибок может рассматриваться соответственно как сумма двух или четырех слагаемых с равновероятными законами распределения и т. д.

Все эти соображения приводят к одному выводу, что высказанный выше постулат тем более применим, чем больше число компонентов содержится в расчете и чем значительнее законы распределения их ошибок отличаются от равновероятного. Для практического использования этого вывода приводится табл. VII значений нормированной возможной ошибки в зависимости от нормированной предельной ошибки для пяти наиболее часто применяемых степеней достоверности. В последнем столбце дано число слагаемых, которому соответствует указанное в первом столбце значение нормированной предельной ошибки. Показано, что дробные числа в этом столбце носят условный характер.

Табл. VII допускает линейное интерполирование как по предельным ошибкам, так и по степеням достоверности. Получающиеся при этом дополнительные погрешности не превышают 0,01%, и во всяк при  $\nu > 0,99$ , что также не существенно.

Некоторые формальные затруднения при использовании этой таблицы могут встретиться лишь в том случае, если хотя бы одно из слагаемых имеет нормальный закон распределения ошибок. В этом случае казалось бы следует считать  $x_{гр} = \infty$  независимо от того, как бы мала ни была действительная ошибка, внесенная этим слагаемым. Практически, однако, достаточно вспомнить, что и при нормальном законе вероятность появления ошибок, больших 4 $\sigma$ , составляет всего  $1 - \nu = 0,00003$ , и, следовательно, в расчет такая ошибка может быть условно введена как предельная

$$\Delta_{гр, \nu} = 4\sigma_{гр} \quad (13, 15)$$

Таблица VII

Нормированные возможные ошибки суммы аргументов числа гауссова

$\nu$ ггг	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	$\infty$
1,75	1,94	1,39	1,58	1,70	1,73	1,0
1,8	1,01	1,29	1,28	1,75	1,80	1,1
1,9	0,98	1,30	1,60	1,81	1,90	1,2
2,0	0,96	1,38	1,62	1,87	1,98	1,3
2,1	0,95	1,38	1,64	1,90	2,07	1,4
2,2	0,93	1,37	1,65	1,98	2,15	1,6
2,3	0,92	1,36	1,66	2,03	2,23	1,8
2,4	0,91	1,35	1,67	2,07	2,30	1,9
2,45	0,91	1,35	1,68	2,09	2,34	2,0
2,5	0,90	1,35	1,68	2,11	2,37	2,1
2,6	0,89	1,34	1,68	2,14	2,43	2,2
2,7	0,89	1,33	1,69	2,17	2,49	2,4
2,8	0,88	1,32	1,69	2,20	2,55	2,6
3,0	0,88	1,31	1,68	2,24	2,65	3,0
3,2	0,87	1,29	1,68	2,27	2,73	3,4
3,4	0,86	1,29	1,67	2,29	2,81	3,9
3,45	0,85	1,29	1,67	2,30	2,83	4,0
3,6	0,85	1,29	1,66	2,31	2,86	4,3
3,67	0,85	1,28	1,65	2,32	2,93	5,0
4,0	0,83	1,28	1,65	2,32	3,06	6,3
4,9	0,81	1,28	1,64	2,33	3,04	8,0
6,0	0,81	1,26	1,64	2,33	3,06	8,3
6,0	0,81	1,26	1,64	2,33	3,09	12,0
$\infty$	0,81	1,26	1,64	2,33	3,10	$\infty$

Полезно отметить, что замена в этой формуле достаточно произвольного коэффициента  $k$ , например, коэффициентом 3,5 или 5 также не окажет существенного влияния на результат. Только вероятность появления ошибок, больших 5 $\sigma$ , возрастает до  $1 - \nu = 0,0002$ , а ошибок, больших 5 $\sigma$ , уменьшается до  $1 - \nu = 0,000003$  [14—40]. Поэтому, избегая как излишнего риска, так и чрезмерной осторожности, мы и рекомендуем коэффициент  $k$ , как наиболее рациональный.

Таким способом оценки затруднения в применении табл. VII устраняются. Порядком ее использования покажем на нескольких примерах.

**Пример 1.** Найти возможную ошибку веса сложного агрегата (завеса — динамо — компрессор), если предельные ошибки измерений отдельных его составляющих были  $\delta_{\text{дин}} = \pm 10$  кг;  $\delta_{\text{ком}} = 8,5$  кг и  $\delta_{\text{зав}} = \pm 7$  кг.

Сначала вычисляем нормированные ошибки отдельных измерений, по формулам:

среднюю квадратичную ошибку суммарного веса

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}(10^2 + 7^2 + 7^2)} = 7,6 \text{ кг}$$

предельную ошибку суммарного веса

$$k_{\text{сум}} = 10 + 7 + 7 = 24 \text{ кг}$$

нормированную предельную ошибку суммарного веса

$$z_{\text{сум}} = \frac{k_{\text{сум}}}{\sigma} = \frac{24}{7,6} = 2,9$$

Задаваясь степенью достоверности  $\nu = 0,95$  и обращаясь к табл. VII, найдем для  $z_{\text{сум}} = 2,9$  значение  $\nu = 1,68$ . Следовательно, возможная ошибка суммарного веса будет

$$k_{\text{сум}} = \pm 1,68 \cdot 7,6 = \pm 13 \text{ кг}$$

**Пример 2.** Найти возможную погрешность определения диаматрейского коэффициента по данным натурных испытаний, если при измерениях отдельных элементов допускаем следующие неточности (предельные и средние квадратичные):

увеличение  $\delta_{\text{уд}}(D) = \pm 1\%$ ;  $\delta(D) = 0,3\%$ ;

скорость течения  $\delta_{\text{уд}}(v) = \pm 2\%$ ;  $\delta(v) = 0,8\%$ ;

вязкость металла  $\delta_{\text{уд}}(N) = \pm 4\%$ ;  $\delta(N) = 2\%$ .

Степень достоверности  $\nu = 0,9$ .

Найдем предельную погрешность диаматрейского коэффициента, вычисленного по формуле

$$C = \frac{v^2 D^2}{N}$$

откуда

$$\delta_C(C) = 3\delta_{\text{уд}}(v) + \frac{2}{3}\delta_{\text{уд}}(D) + \delta_{\text{уд}}(N) = 3 \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 + 4 = 10,7\%$$

Средняя квадратичная погрешность того же коэффициента

$$\delta(C) = \sqrt{(3 \cdot 0,8)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0,3\right)^2 + 2^2} = 3,1\%$$

Нормированная предельная погрешность

$$\lambda_{\text{гр}} = \frac{10,7}{3,1} = 3,5.$$

Нормированная возможная погрешность согласно табл. VII

$$\lambda_{\text{в}} = 1,29.$$

Новая возможная погрешность измерительного коэффициента

$$\Delta_{\text{в}}(\text{К}) = \pm 1,29 \cdot 3,1 = \pm 4\%.$$

Пример 3. К весу готовой конструкции, определенному путем измерения с предельной ошибкой  $\pm 15$  кг, добавлена стандартная деталь, которая со складом готовых изделий без специальной маркировки. Известно, что такая деталь изготавливается массовым порядком и средней ее вес установлен на основании статистических данных со средней квадратичной ошибкой 0,5 кг при нормальном законе распределения. Найти возможную ошибку суммарного веса с достоверностью  $\nu = 0,95$ .

Основной весовой вес конструкции считаем распределенным по равномерному закону со средней квадратичной ошибкой

$$\sigma_1 = \frac{15}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ кг.}$$

Тогда средняя квадратичная ошибка суммарного веса будет

$$\sigma = \sqrt{8,66^2 + 0,5^2} = 8,68 \text{ кг.}$$

Условную предельную ошибку веса добавочной детали находим по формуле (13, 15)

$$\Delta_{\text{гр}} = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кг,}$$

следовательно, предельная ошибка общего веса будет

$$15 + 2 = 17 \text{ кг,}$$

и нормированная предельная ошибка

$$\lambda_{\text{гр}} = \frac{17}{8,68} = 1,96.$$

Из табл. VII находим  $\lambda_{\text{в}} = 1,61$  и по ней возможную ошибку суммарного веса

$$\Delta_{\text{в}} = \pm 1,61 \cdot 8,68 = \pm 14 \text{ кг,}$$

что практически совпадает с возможной ошибкой веса основной конструкции без добавочной к ней стандартной детали. Уменьшить возможную ошибку в весе последней было бы необходимо только в расчетах с более высокими степенями достоверности (0,99 и выше).

#### § 14. Оптимальное распределение ошибок в группе слагаемых

Расчет или измерение каждой величины тем сложнее, тем меньше его допустимая погрешность или ошибка. Но возможная ошибка при заданной степени достоверности прямо пропорциональна средней квадратичной ошибке. Следовательно, общая трудоемкость работы по вычислению или измерению исходных данных или компонентов каждого расчета может считаться возможной обратной сумме их средних квадратичных ошибок или погрешностей.

С другой стороны, возможная ошибка суммы (или погрешность произведения) пропорциональна их средней квадратичной ошибке (или погрешности), которая в свою очередь равна квадратному корню из суммы квадратов средних квадратичных ошибок или погрешностей отдельных компонентов. Поэтому условием наилучшего распределения ошибок и погрешностей между отдельными компонентами расчета следует принять требование минимума дисперсии его результатов

$$\sum \sigma_i^2 \rightarrow \min, \quad \sum \delta_i^2 \rightarrow \min, \quad (14, 1)$$

при постоянной сумме средних квадратичных ошибок или погрешностей отдельных компонентов

$$\sum \sigma_i = \text{const}, \quad \sum \delta_i = \text{const}. \quad (14, 2)$$

Рассмотрим сначала сумму двух случайных величин, имеющих средние квадратичные ошибки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Положим  $\sigma_1 + \sigma_2 = a$ . При этом дисперсия ошибок суммы будет

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma_1^2 + (a - \sigma_1)^2 = 2\sigma_1^2 - 2a\sigma_1 + a^2.$$

Обозначим

$$x = \frac{\sigma_1}{a},$$

тогда

$$\sigma^2 = a^2(2x^2 - 2x + 1),$$

и условием минимума дисперсии будет

$$\frac{d}{dx}(2x^2 - 2x + 1) = 0,$$

откуда  $4x - 2 = 0$ , следовательно,  $x = \frac{1}{2}$ , а  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Таким образом, минимальная ошибка суммы двух величин получается при равенстве ошибок слагаемых. Подобное рассуждение можно повторить последовательно для сумм двух групп, каждая из которых состоит из двух, четырех, восьми и т. д. слагаемых, и распространить его на промежуточные числа слагаемых 3, 5, 6 и т. д. В результате получим общее правило: минимальная ошибка суммы при данной сумме ошибок слагаемых получается в случае равенства ошибок всех слагаемых.

Аналогично может быть доказано и следующее правило: минимальная погрешность произведения при данной сумме погрешностей сомножителей получается в случае равенства погрешностей всех сомножителей.

Соблюдение этих правил не всегда возможно, но сначала рассмотрим случаи, им удовлетворяющие.

Допустимые ошибки равноточных слагаемых. Все величины, характеризующие точность и достоверность суммы или произведения, обозначим принятыми выше греческими буквами  $\Delta$ ,  $\delta$

и с индексами  $\Sigma$  и  $P$ , а величины, относящиеся к каждому из  $n$  отдельных слагаемых или сомножителей — этими же буквами с индексами 1, 2, 3, ...,  $i$ , ...,  $j$ , ...,  $n$ . Тогда при равенстве ошибок всех слагаемых получим

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_n \sigma_i^2} = \sigma_i \sqrt{n}. \quad (14, 3)$$

Следовательно, средняя квадратичная ошибка каждого из  $n$  равноотличных слагаемых должна быть в  $\sqrt{n}$  раз меньше, чем допустимая средняя квадратичная ошибка их суммы.

При одинаковых законах распределения и средних квадратичных ошибках отдельных слагаемых средняя квадратичная ошибка их суммы с увеличением их числа растет пропорционально  $\sqrt{n}$ , а то время как предельная ошибка — пропорциональна  $n$ , т. е. значительно быстрее. Если распределение ошибок всех слагаемых подчиняется нормальному закону, то нормированные возможные ошибки как суммы, так и отдельных слагаемых будут одинаковы, а следовательно, возможная ошибка суммы будет также пропорциональна  $\sqrt{n}$ . Если законы распределения ошибок слагаемых отступают от нормального, то согласно табл. VII при малых степенях достоверности возможные ошибки суммы возрастают относительно медленнее, чем средние квадратичные ( $\frac{\delta_x}{\sigma_x}$  убывает), а при больших степенях достоверности — быстрее ( $z_x$  возрастает).

Аналогично выносятся погрешности произведения и его сомножителей

$$\delta_x = \delta_i \sqrt{n}. \quad (14, 4)$$

Иное соотношение получается между погрешностями суммы и слагаемых. Введем inoltre понятие обозначим  $P = \Sigma P_i$  и выложим для упрощения задачи, что не только ошибки, но и действительные значения всех слагаемых  $P_i$  равны между собой. Это предположение, хотя оно и мало реально, позволяет сделать выводы более наглядными. В таком случае  $P = nP_i$  и, следовательно,

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{P} = \frac{\sigma_i \sqrt{n}}{nP_i} = \frac{\delta_i}{\sqrt{n}}. \quad (14, 5)$$

Отсюда может быть сделано два полезных заключения.

1. Средняя квадратичная погрешность каждого из равноотличных слагаемых может быть в  $\sqrt{n}$  раз больше, чем допустимая по условиям расчета средняя квадратичная погрешность их суммы.

2. Чем на большее число равноотличных слагаемых разбивается данная сумма, тем относительно менее точно может определяться каждое из этих слагаемых.

Эти выводы в качестве ориентировочных могут быть распространены и на суммы, состоящие из неравных и неравноотличных

слагаемых, если разница в их величине не слишком велика. Поэтому можно, например, утверждать, что для получения веса судна с точностью до  $\pm 1\%$  по нагрузке, состоящий из 100 примерно равноотличных статей, достаточно определить вес каждой статьи с точностью до  $\pm 10\%$ .

**Погрешности неравных слагаемых, имеющих равные ошибки.** Из формулы (14, 3) следует, что при равной точности всех слагаемых средняя квадратичная ошибка каждого из них должна равняться.

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (14, 6)$$

Разделив обе части этого равенства на величину рассматриваемого слагаемого  $P_i$  и заменив в нем среднюю квадратичную ошибку суммы равным ей произведением  $\sigma_x = P \cdot \delta_x$ , найдем допустимую среднюю квадратичную погрешность слагаемого

$$\delta_i = \frac{1}{P_i} \cdot \frac{\delta_x}{\sqrt{n}}, \quad (14, 7)$$

где  $P_i = \frac{P}{P_i}$  — отношение величины данного слагаемого к общей сумме всех слагаемых.

Это выражение легко преобразуется в равенство (14, 5) при равенстве всех слагаемых, когда  $P_i = \frac{1}{n}$ . Поэтому оно не противоречит тем заключениям, к которым мы пришли выше, и позволяет сделать еще несколько полезных выводов.

Из формулы (14, 7) видно, что средняя квадратичная погрешность каждого слагаемого должна быть тем меньше, чем больше его абсолютная величина и чем больше общее число слагаемых, составляющих сумму. Поэтому для упрощения расчета наиболее крупных слагаемых, требующих наибольшей точности определения ( $P_i$  фиксировано), число прочих, более мелких, слагаемых следует по возможности сокращать, объединять их в укрупненные группы с таким расчетом, чтобы величина каждой группы могла быть вычислена непосредственно, без вычисления отдельных ее составляющих, и по возможности приближалась к величине наиболее крупных слагаемых, то не превосходила ее.

Отсюда вытекает, например, целесообразность составления подробных весовых нагрузок на ранних стадиях проектирования, когда и наиболее крупные составляющие веса определяются крайне приблизительно.

**Погрешности неравноотличных слагаемых.** Выше мы рассматривали суммы слагаемых, имеющих равные ошибки, как случай, дающий наибольшую точность результата. На практике все же чаще приходится складывать величины, существенно различные и по абсолютной точности их определения. Такая необходимость,

например, неизбежно возникает при каждом проектировании судна, особенно на первых его этапах, когда вес полезного груза задается достоверно, вес наружной обшивки может быть сравнительно легко найден по главным размерам и коэффициентам полноты, а определение с той же точностью веса механического оборудования, систем и устройств потребовало бы чрезмерно трудоемкой работы. Во всех подобных случаях возникает вопрос, с какой же минимальной точностью необходимо знать величину тех слагаемых, определение которых затруднительно, чтобы избежать ошибки суммы не вышла за допустимые пределы?

Допустим, что из всей совокупности слагаемых, сумма которых равна  $P$ , для части  $x = P_x$ ;  $P$  частная сумма  $P_x$  найден с средней квадратичной погрешностью  $\delta_x$ , а для остальных слагаемых частная сумма  $P_y = P - x$  с погрешностью  $\delta_y > \delta_x$ . Тогда по закону сложения дисперсий погрешностей суммы

$$\delta_x^2 = x^2 \delta_x^2 + (1-x)^2 \delta_y^2 \quad (14, 8)$$

Непосредственно из этой формулы находим ответ на поставленный вопрос:

$$\delta_y = \frac{1}{1-x} \sqrt{\delta_x^2 - x^2 \delta_x^2} \quad (14, 9)$$

По этой же формуле можно найти и ту часть общей суммы, которая требует более точного определения, если точность вычисления остальных слагаемых ограничена техническими или технологическими соображениями.

$$x = \frac{\delta_y^2 - \sqrt{\delta_y^4 - (\delta_x^2 + \delta_y^2)(\delta_x^2 - \delta_y^2)}}{\delta_x^2 + \delta_y^2} \quad (14, 10)$$

Равенство (14, 9) может применяться и в том случае, если среди слагаемых имеются величины, достоверные или известные с такой большой точностью, что их погрешностью можно пренебречь. Полагая в этой формуле  $\delta_x = 0$ , найдем погрешность, которая может быть допущена для суммы всех прочих членов,

$$\delta_y = \frac{\delta_x}{1-x} \quad (14, 11)$$

**Пример 1.** Наибольшие из слагаемых, составляющие 50% всей суммы ( $x = 0,5$ ), определены со средней квадратичной погрешностью  $\delta_x = 10\%$ . Какую погрешность можно допустить при определении сумм прочих слагаемых, чтобы средняя квадратичная погрешность всей суммы не превысила  $\delta_y = 15\%$ ?

Ответ:  $\delta_y \approx 30\%$ .

**Пример 2.** Какую часть общей суммы необходимо определить со средней квадратичной погрешностью  $\delta_x = 5\%$ , чтобы средняя квадратичная погрешность суммы была не более 20%, если сумма прочих слагаемых не может быть найдена точнее, чем с погрешностью  $\delta_y = 30\%$ ?

Ответ:  $x = 34\%$ .

**Группировка слагаемых.** Слагаемые, выделяющиеся из числа прочих своей величиной и потому требующие наиболее точного расчета, а также слагаемые, точный расчет или определение которых не встретит существенных затруднений, будем называть определяющим, в отличие от дополнительных слагаемых, вычисленных более приближенно. Приведенные выше примеры показывают, что разделение слагаемых на указанные группы и правильный выбор точности расчета каждой группы могут значительно упростить многие вычисления, но границу между обеими группами можно провести только в каждом конкретном случае в зависимости от требуемой точности результата и возможной точности вычисления отдельных его компонентов.

**Ошибки, которыми можно пренебречь.** Допустим, что в рассматриваемой сумме имеются две группы слагаемых, различающихся точностью определения их компонентов. Пусть первая группа имеет общую среднюю квадратичную ошибку  $\sigma_x$ , а вторая  $\sigma_y > \sigma_x$ . Тогда средняя квадратичная ошибка всей суммы будет

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sigma_y \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 + 1} \quad (14, 12)$$

Если ошибки обеих групп слагаемых достаточно близки друг к другу, то первый член подкоренного выражения будет соизмерим с единицей, и пренебречь им нельзя. Но если  $\sigma_x$  много меньше  $\sigma_y$ , квадрат их отношения окажется весьма малым по сравнению с единицей, и ошибки первой группы можно не учитывать, т. е. считать соответствующие слагаемые достоверными. Граница между этими условиями может быть проведена на том основании, что ошибку конечного результата обычно надо знать с точностью не более одной или двух значащих цифр, причем вторая цифра при этом округляется до нуля как до пяти. Поэтому погрешности до 5% в величине ошибки результата никакого практического значения не имеют, и следовательно, критерием малости ошибок первой группы можно считать неравенство

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 + 1} < 1,05,$$

откуда находим

$$\sigma_x < \sqrt{0,1} \sigma_y \approx \frac{1}{3} \sigma_y \quad (14, 13)$$

Если первая группа состоит из  $n$  слагаемых, средние квадратичные ошибки которых примерно одинаковы, то учитывать эти ошибки следует только в том случае, когда средняя квадратичная ошибка каждого из них превосходит

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} < \frac{1}{3\sqrt{n}} \sigma_y \quad (14, 14)$$

При большом числе слагаемых решение задачи несколько усложняется, но все же не встречает серьезных затруднений. Покажем это на примере.

**Пример 3.** Даны 10 слагаемых, имеющих следующие средние квадратичные отклонения (в порядке возрастания): 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0. Подобрать те слагаемые, отклонения которых преобразованы малы.

В ходе первого приближения найдем среднюю квадратичную отклонение суммы нескольких пяти слагаемых

$$\sigma_5 = \sqrt{5\bar{\rho}^2 + 0,3^2 + 0,4^2 + 0,5^2 + 1,0^2} = 1,82.$$

Следовательно, из оставшихся пяти слагаемых можно преобразить отклонения только тех, для которых

$$\sigma_i < \frac{1}{3\sqrt{5}} 1,82 = 0,27.$$

Во втором приближении вводим в группу учитываемых все отклонения, большие 0,3.

$$\sigma_6 = \sqrt{1,82^2 + 0,4^2 + 0,5^2} = 1,93.$$

При этом преобразимся отклонения все отклонения, не большие

$$\sigma_i < \frac{1}{3\sqrt{3}} 1,93 = 0,37.$$

Таким образом, первые три слагаемых можно считать достоверными. В этом легко убедиться и непосредственной проверкой: добавление отклонения этих трех слагаемых увеличивает среднюю квадратичную отклонение всей суммы только на 0,03, что соответствует неурядице (1,3% от  $\sigma_2$ ).

### § 15. Пропорциональное преобразование

Допустим, что некоторая случайная величина  $P$  получается на суммы первичного ряда достоверных величин

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n \quad (15, 1)$$

путем умножения всех его членов на случайные, некоррелированные множители преобразованные  $K_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), так что

$$\bar{P} = K_0 \bar{P}_0 + K_1 \bar{P}_1 + K_2 \bar{P}_2 + \dots + K_n \bar{P}_n. \quad (15, 2)$$

Примерно так составляется несовая нагрузка проектируемого корабля по нагрузке его прототипа.

Найдем среднюю квадратичную погрешность  $\delta(\bar{P})$ , которую будет иметь случайная сумма  $\bar{P}$ , если для упрощения расчета предположительно заменить все множители  $K_i$  тем множителем, который имеет определяющий член ряда  $\bar{P}_0$ , ниже говоря, если считать все члены ряда изменяющимися пропорционально определяющему члену.

Для решения этой задачи разделим обе части равенства (15, 2) на некоторую сумму  $\bar{P}$  и обозначим:

$K = \frac{P}{\bar{P}}$  — общий множитель преобразования;

$\bar{\rho}_i = \frac{P_i}{\bar{P}}$  — относительная величина слагаемого первичного ряда.

Тогда равенство (15, 2) перепишется так:

$$K = K_0 \left[ \bar{\rho}_0 + K_1 \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \right], \quad (15, 3)$$

или

$$K_x = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{K_0} \bar{\rho}_i}{\sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i}. \quad (15, 4)$$

Предположим о пропорциональности преобразования всех членов ряда соответствует значению  $K_x = 1$ , так как при этом

$$K = K_0 \left[ \bar{\rho}_0 + \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \right] = K_0.$$

Всякое же отклонение  $K_x$  от единицы в ту или другую сторону характеризует степень непропорциональности преобразования дополнительных и определяющих членов.

Принимая среднее значение  $K_x = 1$  и в качестве математического ожидания этого коэффициента, можем рассматривать величину

$$\delta(K_x) = \frac{K_x - 1}{1} = K_x - 1$$

как случайную погрешность в его определении и свести задачу к нахождению средней квадратичной погрешности общего множителя преобразования  $K$  в зависимости от погрешностей множителей преобразования определяющего члена  $K_0$  и дополнительных членов  $K_x$ .

$$\begin{aligned} \delta(K) &= \sqrt{[\delta(K_0)]^2 + \left[ \delta \left( \bar{\rho}_0 + K_x \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \right) \right]^2} - \\ &= \sqrt{[\delta(K_0)]^2 + \left[ \frac{\sigma \left( \bar{\rho}_0 + K_x \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \right)}{\bar{\rho}_0 + K_x \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i} \right]^2} - \\ &= \sqrt{[\delta(K_0)]^2 + \left( \frac{1}{4} \delta K_x \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \right)^2} \end{aligned}$$



Здесь обозначено

$$\eta = \frac{\bar{P}_0 + K_x \sum_{i=1}^n \bar{P}_i}{K_x} = \frac{\bar{P}_0}{K_x} + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

При  $K_x \approx 1$  получаем

$$\eta = \bar{P}_0 + \sum \bar{P}_i = 1.$$

С другой стороны, согласно принятым обозначениям произведения

$$\delta K_x \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \sigma \left( \sum_{i=1}^n P_i \right)$$

это не что иное, как средняя квадратичная ошибка относительной суммы дополнительных членов  $\sum P_i$  преобразованного ряда, возникающая в результате предположения об их пропорциональности определяемому члену и выраженная в долях от общей суммы всего ряда.

Таким образом, окончательно получаем

$$\delta(K) = \sqrt{[\delta(K_0)]^2 + \left[ \sigma \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \right]^2} \quad (15.5)$$

Особые преимущества наложенный метод приближенной пропорциональности имеет в тех случаях, когда средняя квадратичная ошибка  $\sigma \left( \sum_{i=1}^n P_i \right)$  может быть установлена по статистическим данным, без применения трудоемких расчетов. Для этого достаточно найти среднее значение  $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$  для ряда выполняемых

ранее проектов для расчетов и вычислить  $\sigma \left( \sum_{i=1}^n P_i \right)$  по общим правилам обработки наблюдений (§ 6).

Иллюстрированный метод освобождает проектианта от необходимости на первых же стадиях проектирования выполнять детальные расчеты нагрузки, плаваемости, запасах и других подобных величин.

Пример. Вес наружной обшивки судна-прототипа, вычисленный по его рабочим чертежам, равен  $P_0 = 200$  т, а вес всего его корпуса с набором и внутренними переборками  $\bar{P} = 250$  т. Для нового судна на стадии эскизного проектирования найден вес наружной обшивки  $P_0 = 260$  т со средней квадратичной погрешностью  $\delta(P) = 3\%$ . Требуется найти с достоверностью  $\gamma = 0.95$  создаваемый вес корпуса нового судна без детальных расчетов его нагрузки, если известно, что на построенных ранее судах подобного типа вес обшивки лежит в пределах 65—75% веса всего корпуса.

По условиям задачи находим множитель преобразования веса наружной обшивки

$$K_x = \frac{P_0}{\bar{P}} = \frac{260}{200} = 1.4,$$

а, пользуясь методом приближенной пропорциональности, вес всего корпуса

$$P = K_x \bar{P} = 1.4 \cdot 250 = 406 \text{ т.}$$

Так как вес корпуса прототипа определен по рабочим чертежам, то его погрешность можно считать весьма малой по сравнению с погрешностью преобразования  $K_x$  и упомянутой выше средней квадратичной погрешностью  $\delta(P_0)$  остатка полностью за счет неточности множителя преобразования

$$\delta(K_x) = \delta(P_0) = 3\%.$$

Допустим далее, что при обработке статистических данных условно, что среднее значение веса обшивки в весе корпуса  $\bar{P}_0 = 65\% = 0.65$  со средней квадратичной погрешностью  $\sigma(\bar{P}_0) = 1.7\%$ . На основании этих сведений, используя формулу (15.5) и замечая, что  $\sigma \left( \sum_{i=1}^n P_i \right)$ , находим среднюю квадратичную погрешность веса корпуса

$$\gamma(P) = \delta(K) = \sqrt{3^2 + 1.7^2} = 3.5\%.$$

Предельная ошибка относительного веса дополнительных статей в нагрузке корпуса легко находится по статистическим таблицам из таблицы

$$\Delta_{\text{пр}} \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) = \frac{72 - 65}{2} = 3.5\%.$$

Приблизную же погрешность множителя преобразования веса наружной обшивки найдем в предположении нормального закона распределения согласно формуле (13.16)

$$\delta_{\text{пр}}(K_x) = 4\delta(K_x) = 4 \cdot 3 = 12\%.$$

Таким образом, предельная погрешность веса всего корпуса будет

$$\delta_{\text{пр}}(P) = \frac{0.12 \cdot 0.65 + 0.035}{1} = 0.12 = 12\%.$$

а ее нормированное значение

$$\delta_{\text{нр}} = \frac{\delta_{\text{пр}}(P)}{\delta(P)} = \frac{12}{3.5} = 3.4$$

Обращаясь к табл. VII, находим

$$x_{\gamma} = 1.64,$$

и, следовательно, возможная погрешность в весе корпуса составит

$$\delta_{\gamma}(P) = \pm x_{\gamma} \delta(P) = \pm 1.64 \cdot 3.5 = 6\%.$$

<sup>1</sup> Если этих данных в распоряжении проектианта не имеется, то более грубо они могут быть получены по графическому выводу сведений (65—72%) в предположении равномерного закона распределения. При этом получим  $\delta(P) = \frac{3.5}{\sqrt{3}} = 2\%$  вместо 1.7%.

Почему окончательно основной вес кортеж следует записать в таком виде:  
 $P = (400 \pm 25) \text{ т}$   
 с достоверностью  $v = 0,95$ .

### § 16. Правила приближенных вычислений

**Вероятность предельных ошибок.** Изложенная выше общая теория ошибок, основанная на принципах теории вероятностей, позволяет пересмотреть те правила приближенных вычислений, которые применяются в судостроительных расчетах и настоящее время. Эти правила, как известно, основаны на оценке предельных ошибок и погрешностей, малая вероятность появления которых была отмечена еще в § 1, хотя и без достаточных доказательств. Содержание § 13 позволяет также доказательства найти для любого конкретного случая.

**Пример 1.** Рассчитать вероятность появления положительных ошибок, отличающихся от предельной не более, чем на 1%, для суммы четырех слагаемых с равновероятными знаками распределения в рамках предельных ошибок  $\Lambda_{\text{ср}} = 1$ .

Согласно методике, изложенной в § 12, можно предположить ошибку суммы  $\Lambda_{\text{ср}} = 4\sigma_{\text{ср}} = 4$  и ее среднюю квадратичную ошибку  $\sigma_{\text{ср}} = 2: \sqrt{3}$ . Следовательно, нормированная предельная ошибка суммы будет

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{\Lambda_{\text{ср}}}{\sigma_{\text{ср}}} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 3,45.$$

Вероятность появления положительных ошибок, отличающихся от предельной не более, чем на 1%, равна

$$P(\delta_{\text{ср}} - \Delta \leq 1\%) = 1 - v,$$

где  $v$  — вероятность (достоверность) появления любых ошибок, не превышающих 39% предельной.

Соответствующая граница нормированных положительных ошибок будет

$$\lambda_v = 0,99\lambda_{\text{ср}}$$

Подставляя это значение в формулу (13, 14), получим  $v = 0,999999$ , а, следовательно, вероятность появления ошибок в пределах  $0,99\Lambda_{\text{ср}} \leq \Delta \leq \Lambda_{\text{ср}}$  составляет всего 0,000001, или 0,00001%.

Совершенно очевидно, что учитывать возможность ошибок, вероятность появления которых столь мала, нет никакой необходимости. Даже вероятность появления ошибок, отличающихся от предельной не более, чем на 10%, оказывается для суммы четырех слагаемых меньше 0,01%. Еще меньше вероятность появления ошибок, близких к предельным, для сумм большего числа слагаемых и для слагаемых с иными неравновероятными законами распределения. Такие же выводы могут быть получены и для более сложных расчетов, содержащих произведения нескольких сомножителей, их степенные и тригонометрические функции и т. д. Во всех случаях точность расчета должна быть согласована с вероятностью появления реально возможных, а не предельных ошибок и погрешностей. Этой цели и служит современная теория ошибок, изложенная выше.

**Период расчета ошибок и погрешностей.** Использование формул, приведенных в табл. V, и других подобных должно быть согласовано со способом, фактически применяемым для определения искомого значения, ошибка которой вычисляется.

Так, например, если по адмиралтейской формуле

$$N = \frac{\sigma^2 D^{1/3}}{C} \quad (16, 1)$$

определяется мощность главных механизмов  $N$  для вновь проектируемого судна при заданной скорости  $\sigma$ , то средняя квадратичная погрешность этой мощности будет

$$\delta(N) = \sqrt{\left[\frac{2}{3}\delta(D)\right]^2 + [\delta(C)]^2}. \quad (16, 2)$$

Отсюда можно найти допустимую среднюю квадратичную погрешность адмиралтейского коэффициента  $C$ , которая позволит получить  $N$  с требуемой точностью

$$\delta(C) = \sqrt{[\delta(N)]^2 - \left[\frac{2}{3}\delta(D)\right]^2}. \quad (16, 3)$$

Но если та же формула (16, 1) используется для определения опытным путем адмиралтейского коэффициента построенного судна после его ходовых испытаний

$$C = \frac{\sigma^2 D^{1/3}}{N}, \quad (16, 4)$$

то средняя квадратичная погрешность найденного коэффициента должна вычисляться не по формуле (16, 3), а по следующей:

$$\delta(C) = \sqrt{[\delta(\sigma)]^2 + \left[\frac{2}{3}\delta(D)\right]^2 + [\delta(N)]^2}. \quad (16, 5)$$

Эта формула отличается от предыдущей не только учетом дисперсии скорости, которая в первом случае считалась достоверной (заданной), но и знаком перед дисперсией подомещения, характеризующим последовательность расчета искомого значения.

Точно так же средняя квадратичная погрешность произведения любой случайной величины на достоверный множитель только тогда равна средней квадратичной погрешности самой случайной величины, когда это произведение характеризует явление на рассматриваемый процесс или параметр только одной физической величины. Если же произведением является сумма нескольких величин, имеющих одинаковые математические ожидания, но определяемые раздельно, — погрешность результата должна находиться как погрешность суммы, а не произведения.

Если, например,  $r$  — радиус некоторой окружности, измеренной в натуре, то средняя квадратичная погрешность диаметра

$d = 2r$  той же окружности будет  $\delta(d) = \delta(r)$ . Но если буквой  $d$  в выражении  $d = 2r$  обозначено расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых при независимых измерениях оказались равными, то погрешность этого расстояния будет

$$\delta(d) = \frac{\delta(r)}{\sqrt{2}}.$$

Такой случай может, например, встретиться при определении допуска в расстоянии между осями двух шестерней в зубчатой передаче, имеющей передаточное число  $i = 1$ .

С указанным правилом следует считаться и при составлении нагрузок проектируемого судна, где часто приходится суммировать вес многих одинаковых деталей: балов, стоек, клапанов и т. д., номинальный вес которых одинаков, но случайные веса могут отличаться друг от друга на величину допусков. Во всех подобных случаях средняя квадратичная погрешность суммарного веса  $n$  деталей будет в  $\sqrt{n}$  раз меньше, чем средняя квадратичная погрешность номинального веса или веса каждой из этих деталей в отдельности.

Очень важно отметить, что изложенные указания не относятся к систематическим ошибкам, всегда имеющим конкретную величину и знак. Хотя они и вносятся в расчет, как и случайные ошибки, вместе с исходными данными, именно вследствие своей однозначной определенности они подвергаются всем математическим преобразованиям совместно с основными расчетными величинами. Поэтому при любых вариантах вычислительного процесса, приводящих к одному и тому же конечному результату, и систематическая погрешность результата получится одинаковой. Только варианты вычислений, не одинаково строгие с математической точки зрения, способны внести в расчет и различные систематические ошибки.

Сложение чисел. В правилах приближенных вычислений, рекомендованных А. Н. Крыловым, указывается, что при сложении ряда чисел, имеющих разные предельные ошибки, следует прежде всего выписать наибольшее из слагаемых (точнее, имеющее наибольшую предельную ошибку), а затем удерживать в остальных слагаемых лишь те цифры, разряд которых не ниже разряда последней значащей цифры первого числа; остальные округляются до нуля или десяти и отбрасываются или записываются нулями.

С точки зрения теории предельных ошибок такое указание вполне логично. При написании любого числа, найденного расчетом или измерением, в нем всегда сохраняются только достоверные цифры и самая первая из тех, которые могут содержать ошибки. Поэтому отбрасывая дополнительно во втором и последующих слагаемых одну или несколько значащих цифр справа, мы тем самым отбрасываем и их случайные ошибки, заключающиеся

в цифрах иных порядков. Следовательно, казалось бы, при этом предельная ошибка суммы должна равняться только предельной ошибке первого слагаемого, а ошибки других слагаемых за точность результата никакого влияния не окажут (5—54).

При этом, однако, не учитывается, что, отбрасывая часть значащих цифр, мы не только не повышаем точность данного числа, но, наоборот, увеличиваем его возможную ошибку на одну или несколько разрядов. В результате и ошибка суммы должна неизбежно увеличиваться и при большом числе слагаемых весьма существенно.

Этого можно избежать, используя способ, указанный еще в 1916 г. Ю. В. Шиманским и М. Ф. Гордениным [18—1—9]. Он отличается тем, что во втором и последующих слагаемых отбрасываются справа лишь те цифры, разряд которых ниже разряда последней значащей цифры первого слагаемого на два и более.

Пример 2. Требуется сложить четыре числа:

12,374
2,8232
0,52143
0,014253

Первое из них имеет предельную ошибку  $\pm 0,0005$ , а каждое следующее — в десять раз меньше, чем предыдущее.

Если перед сложением отбросим в последних трех числах все цифры, начиная с четвертой после запятой, как это рекомендовал А. Н. Крылов, то получим в сумме  $\Sigma = 55,732$  и будем считать предельной ошибкой не более  $A_{\Sigma} = \pm 0,0005$ . Между тем, если сложить все числа в том виде, как они даны, получим в сумме  $\Sigma = 55,735863$ .

Таким образом, именно вследствие случайных ошибок первого слагаемого, при укорочении слагаемых мы допускаем еще большую систематическую ошибку, равную  $\epsilon \Sigma = 0,000663$ , предельная ошибка полученной суммы при этом достигает

$$A_{\Sigma} = \epsilon \Sigma + A_{\Sigma}^* = 0,0014.$$

т. е. почти в три раза больше ожидаемой.

Аналогично можно показать, что при сложении по способу, рекомендованному Ю. В. Шиманским, получим сумму  $\Sigma = 55,7329$  с предельной ошибкой

$$A_{\Sigma} = \pm 0,0006,$$

что действительно мало отличается от предельной ошибки первого слагаемого.

При вычислении случайных ошибок суммы мы сравнивали в данном примере результат приближенного вычисления с более точной суммой, полученной без отбрасывания каких-либо цифр в заданных слагаемых. Поэтому и дальнейшие нами предельные ошибки носят частный характер: их величина действительна только для данного конкретного примера, в котором более точная сумма была известна. Применяя же эти способы практически и отбрасывая те или иные цифры перед сложением, мы лишаем себя возможности учитывать их фактическую величину и должны считать предельную ошибку укороченного числа равной  $\pm 0,5$  от единицы последнего оставшегося разряда как бы мала ни была первая отбрасываемая цифра. Вследствие этого предельные ошибки

суммы, с которыми необходимо считаться, остаются неизвестными и могут еще больше возрасти.

Однако общий вывод, что второй из рассмотренных способов упрощенного сложения дает существенно более точный результат по сравнению с первым, при относительно малой затрате дополнительного труда, останется в силе.

К такому же выводу мы можем прийти, анализируя рассматриваемые способы с позиций современной теории ошибок. Покажем это на том же примере.

При сложении данных числа в натуральном виде средняя квадратичная ошибка суммы

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{3}(9^2 + 0,9^2 + 0,09^2 + 0,009^2) 10^4} = 2,90 \cdot 10^{-4}$$

При сложении по способу, рекомендованному Ю. В. Шамиском,

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{3}(9^2 + 3 \cdot 0,9^2) 10^4} = 2,90 \cdot 10^{-4}$$

а при сложении по способу А. Н. Крылова

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\frac{1}{3} 4 \cdot 9^2 \cdot 10^4} = 5,78 \cdot 10^{-4}$$

Таким образом, средняя квадратичная ошибка результата, найденного по способу Ю. В. Шамиского, практически совпадает с наименьшей возможной, тогда как способ А. Н. Крылова дает ошибку, почти вдвое большую.

Примерно в таких же соотношениях будут находиться и возможные ошибки (при любых степенях достоверности).

Этот вывод не противоречит содержанию § 14: там мы установили, что для получения минимальной ошибки суммы целесообразно вычислять все ее слагаемые с одинаковой средней квадратичной ошибкой; здесь же нашли, что если слагаемые уже вычислены или измерены с разными средними квадратичными ошибками, то целесообразно выделить из них наименее точные, а для остальных допустить ошибки, равные между собой, но меньшие, чем для первого, но одинаковые. Это правило, очевидно, должно быть распространено и на вычитание.

С увеличением числа слагаемых расхождение между средними квадратичными ошибками  $\sigma_{\Sigma}$  и  $\sigma_{\Sigma}$  увеличивается, но не беспречно. Для всех случаев, в которых все слагаемые, кроме первого, имеют ошибки, меньшие в 10 и более раз, чем первое, можно написать

$$\sigma_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma} \sqrt{\frac{1}{3} [1 + 0,1^2(n-1)]};$$

$$\sigma_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma} \sqrt{\frac{1}{3} n}$$

Следовательно, отношение между ними будет

$$\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}} = \sqrt{\frac{n}{0,99 + 0,01n}} \quad (16,5)$$

где  $n$  — число слагаемых. Как нетрудно убедиться, при  $n = 400$   $\frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}} = 9,0$ , а с дальнейшим увеличением  $n \rightarrow \infty$  подкоренное выражение формулы (16, 6) стремится к 100, потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sigma_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}} \right| = \sqrt{100} = 10.$$

Следовательно, при любом числе слагаемых, большем 400, возможные ошибки суммы, сочиненной по формуле А. Н. Крылова, будут в десять раз больше, чем ошибки суммы, вычисленной по способу Ю. В. Шамиского.

**Умножение чисел.** Все полученные выше выводы и заключения могут быть перенесены и на процессы умножения и деления, если заменить в них понятия и символы ошибок на понятия и символы погрешностей. Еще проще воспользоваться для этой цели формулой (14, 14), которая применительно к погрешностям произведения может быть написана в таком виде:

$$\delta_1 = \frac{1}{3\sqrt{n}} \delta_2 \quad (16,7)$$

Здесь  $\delta_1$  — средняя квадратичная погрешность первого, наименее точного сомножителя (или группы сомножителей);

$\delta_2$  — допустимая средняя квадратичная погрешность каждого из прочих более точных сомножителей;

$n = n - 1$  — число сомножителей второй группы.

При  $n = 3$ . Определив базовую погрешность диаметра, диаметр  $\delta$  высоты конуса, измеренные с предельной ошибкой  $\pm 0,05$  см, равны соответственно  $d = 1,2$  см и  $l = 1534,4$  см [5—51].

Средние квадратичные ошибки обеих измерений составят равные

$$\sigma = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,0288 \text{ см.}$$

Соответствующая погрешность диаметра

$$\delta_1 = \frac{0,03}{1,3} = 2,3\%.$$

В формулу для определения базовой погрешности диаметра

$$\sigma = \Delta d \quad (16,8)$$

кроме диаметра, измеренного с наибольшей погрешностью, имеет еще два сомножителя ( $n = 2$ ). Подстановка известных значений в формулу (16, 7), получим

$$\delta h = \frac{1}{3\sqrt{2}} = 2,5 = 0,6\%.$$

Средняя квадратичная погрешность результата при этом будет

$$\delta(h) = \sqrt{\delta^2 + 2\delta^2} = \sqrt{2\delta^2} = 2\delta = 2,6\%.$$

Для получения результата с такой погрешностью достаточно иметь в расчет величину  $n$  со средней квадратичной ошибкой

$$\sigma(h) = n \cdot \delta(h) = 3,1 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} = 0,02$$

в длину цилиндра

$$\sigma(l) = l \cdot \delta(l) = 1000 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} = 6 \text{ см.}$$

Потому значения  $n = 3,1$  и  $l = 1000$ . Это позволяет все вычисление легко выполнить на логарифмической линейке. Задавая степень достоверности  $\gamma = 0,9$ , получим

$$n = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 1000 = (3800 \pm 200) \text{ см}^2.$$

Если бы мы сохранили в расчете длину цилиндра с той точностью, с которой она была измерена, и значение более точно  $n = 3,1416$ , то получили бы не считая исправления более трудоемкой работы значение

$$n = 5784,502348 \text{ см}^2.$$

Но средняя квадратичная погрешность и возможная ошибка этой величины были бы лишь на 0,1% меньше, чем при указанном усиленном виде округлений, а относительный результат мы должны были бы записать точно так же, как и в упрощенном расчете.

Так как  $n$  в формуле (16, 7) обычно не превышает десяти, то все вышесказанное позволяет сформулировать следующие общие правила: при умножении и делении надо в каждом сомножителе додерживать такое количество знаков, чтобы его погрешность была на один порядок ниже, чем погрешность наименее точного из них. При  $n > 10$  формула (16, 7) дает более точное указание.

**Возвышение в степень.** Оно отличается от умножения тем, что при этом все сомножители равны и имеют равные погрешности. Поэтому согласно формуле (10, 8) при возвышении в степень  $n$  или извлечении корня степени  $\frac{1}{n}$  исходное число должно иметь погрешность в  $n$  раз меньшую, чем требуется от результата. Иначе говоря, для получения величины  $x^n$  надо брать  $x$  с погрешностью в  $n$  раз меньшей, а при извлечении корня  $\sqrt[n]{x}$  ( $\frac{1}{n} = n$  или  $n = \frac{1}{n}$ ) — в  $n$  раз большей, чем допустимая погрешность результата.

**Логарифмирование.** Согласно табл. V средняя квадратичная ошибка натурального логарифма случайной величины  $x$  численно равна погрешности самой величины<sup>2</sup>

$$\sigma(\ln x) = \frac{1}{x} \sigma(x) = \delta(x).$$

Следовательно, мантисса натурального логарифма может содержать столько же знаков, сколько знаки после запятой имеет число, выражающее переписываемый аргумент (до первой значащей цифры включительно).

Согласно той же таблице средняя квадратичная ошибка десятичного логарифма случайной величины  $x$  численно составляет 0,434 от погрешности самой величины

$$\delta(\lg x) = \frac{0,434}{x} \sigma(x) = 0,434 \cdot \delta(x).$$

Следовательно, мантисса десятичного логарифма должна содержать на один знак больше, чем имеет после запятой число, выражающее погрешность аргумента.

Поэтому, если погрешность логарифмируемого числа выражается сотыми процентами, в его логарифме достаточно удержать три цифры после запятой (трехзначные логарифмы); если погрешность числа выражается сотнями долями процента, необходимо пользоваться пятизначными таблицами логарифмов и т. д.

Например,

$$\lg 129 = 2,8021703,$$

но если исходное число имеет погрешность в 1% ( $\delta = 0,01$ ), то для любых расчетов достаточно сохранять после запятой лишь три знака

$$\lg 129 = 2,803.$$

В этом легко убедиться, если найти, например, пятизначные логарифмы предельных значений исходного числа

$$\lg(129 + \gamma) = \lg 136 = 2,80383;$$

$$\lg(129 - \gamma) = \lg 122 = 2,80854.$$

В среднем получим

$$\lg 129 = 2,80271 \pm 0,00117,$$

или, сократив, как обычно, только одну незначащую цифру,

$$\lg 129 = 2,803 \pm 0,001.$$

<sup>2</sup> Это и подтверждает высказанное выше правило.

Аналогично могут быть найдены правила приближенных вычислений и для других функций одной или многих случайных

<sup>1</sup> Погрешность здесь выражается десятичной дробью, а не в процентах.

переходах. Но мы на них не будем останавливаться, так как методы решения подобных задач достаточно ясны из предыдущего.

**Методические ошибки.** При выполнении любого расчета может возникнуть два источника ошибок: погрешности исходных данных, которые мы до сих пор рассматривали, и погрешности метода расчета, связанные со всей суммой допущений и условных предположений, используемых при выводе расчетных формул. Только вполне корректные математические преобразования не вносят в расчет никаких ошибок. Всякое же пренебрежение малыми высших порядков, разложение функций в бесконечные ряды с удержанием только части их членов, численное интегрирование, линеаризация и другие подобные приемы вносят в результаты расчета соответствующие ошибки, допустимость которых и определяет собой допустимость применяемого метода.

С подобным приемом мы уже встречались в § 15, а более подробно будем рассматривать с этой точки зрения различные судостроительные расчеты в третьей и последующих главах. Здесь же только отметим, что методическая погрешность легко может быть включена в общую систему погрешностей расчета в том случае, если и любую не являясь строгой математической формулой будет добавлен некоторый случайный коэффициент  $\varphi$ . Во многих случаях математическое ожидание этого коэффициента будет равно единице, но присутствие его в формуле позволит учитывать методическую погрешность расчета наравне с погрешностями исходных данных, входить общие законы их распределения и сравнивать точность метода с точностью численных комплексов расчетов. Значение  $\varphi = 1$  будет свидетельствовать лишь об отсутствии в данном методе расчета систематических ошибок, но не исключает возможности методических ошибок случайного характера. Присутствие этого коэффициента позволит и повысить точность расчета; если средняя величина его окажется отличной от единицы, то он может быть превращен в эмпирический поправочный множитель, компенсирующий систематическую погрешность приближенной формулы. В других случаях, если результат расчета получается в виде суммы, вместо коэффициента удобно будет вводить дополнительное слагаемое — поправку, которая также будет обладать всеми описанными свойствами. В обоих случаях поправочный множитель или поправка могут иметь и свои случайные ошибки.

## ГЛАВА III

### РАСЧЕТЫ ПЛАВУЧЕСТИ И ОСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ

#### § 17. Правило трапеций

Ошибка отдельных компонентов мы будем здесь касаться лишь в той мере, в которой это необходимо для общей оценки возможных погрешностей результата. Поэтому и приводимые ниже конкретные цифры, определяющие величину ошибок и погрешностей исходных данных, имеют ориентировочный характер и не могут быть рекомендованы в качестве норм для всех исполнителей.

Для численной оценки точности правила трапеций введем в него случайный коэффициент  $\varphi \approx 1$  и запишем его в таком виде:

$$S = \varphi \frac{l}{n} \sum_{k=1}^n h_k, \quad (17.1)$$

где  $S$  — площадь рассматриваемой фигуры;  
 $l$  — ее длина вдоль оси абсцисс;  
 $n$  — число промежутков между ординатами;  
 $\sum_{k=1}^n h_k$  — исправленная сумма ординат.

Так как дана основная  $\Gamma$  и число ординат  $n$  обычно являются величинами достоверными, то средняя квадратичная погрешность площади, определенной по формуле (17. 1), равна

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad (17.2)$$

где  $\delta_1 = \delta_1(\varphi)$  — средняя квадратичная погрешность метода интегрирования (правила трапеций);

$\delta_2 = \delta_2(\sum h_k)$  — средняя квадратичная погрешность исправленной суммы ординат, снятых с чертежа.

**Методические ошибки интегрирования.** Коэффициент  $\varphi$ , как и всякая случайная величина, может иметь как случайные, так и систематические ошибки. Для каждой кривой, имеющей аналитическое выражение, может быть найдено истинное его значение.

Систематические погрешности приближенного интегрирования  $\epsilon$ , %

Правило	$n$	№ кривых по табл. VIII						
		1	2	3	4	5	6	7
Трапеций	10	0	-0,2	-0,2	-0,3	-1,2	-0,9	-4,1
	8	0	-0,3	-0,4	-0,5	-1,7	-1,8	-5,6
	6	0	-0,5	-0,5	-0,6	-2,5	-2,2	-7,4
	5	0	-0,9	-0,8	-1,2	-3,3	-2,9	—
	4	0	-1,4	-1,2	-1,9	-4,7	-3,8	—
	3	0	-2,2	-2,0	-3,3	-7,1	-5,7	—
	2	0	-5,2	-4,8	-7,4	-12,6	-7,4	—
Симпсона	10	0	0	0	0	-0,6	-0,1	-2,5
	8	0	0	0	0	-0,7	-0,2	-3,3
	6	0	0	0	0	-1,0	-0,4	-4,6
	4	0	-0,1	-0,3	0	-1,8	-1,0	—
Чebyшевa	3	0	-0,3	-2,1	+0,3	-5,3	-6,0	—
	4,5	0	0	-0,3	-0,1	+0,3	+0,3	—
	3,5	-0,1	0	+0,5	+0,3	-0,5	-0,7	—

Важно отметить, что величина  $\epsilon$  не зависит от тех частных масштабов, в которых могут быть измерены абсциссы  $x_i$  и ординаты  $y_i$ . Поэтому данные табл. IX одинаково применимы для всех кривых любого семейства, отличающихся лишь постоянными параметрами (длина волны, эксцентриситетом и т. д.).

Из табл. IX видно, что рассматриваемые погрешности для некоторых кривых могут достигать существенных величин, особенно при малом числе ординат. Однако эти погрешности носят систематический характер, и поэтому устранение их, если бы они были известны, не представляло бы никаких затруднений.

Действительно, допустим, что площадь под некоторой кривой определена по правилу трапеций с семью ординатами, включая конечные ( $n = 6$ ), но известно, что эта кривая является дугой некоторого эллипса в пределах  $0 < x < 1$ . Обращаясь к табл. IX, находим, что любому эллипсу в этих условиях соответствует систематическая погрешность правила трапеций  $\epsilon = -2,5\%$ , т. е. истинная площадь эллипса больше найденной на 2,5%. Внося соответствующую поправку ( $\varphi = 1,025$ ), получим более

<sup>1</sup> В. Г. Власов представляет особым образом те, которые нами приведены в § 2.

Для этого достаточно вычислить площадь, лежащую под этой кривой, аналитически, путем интегрирования ее математического выражения, и разделить полученную величину на приближенное значение той же площади, полученное по правилу трапеций. Результат может быть определен с любой желаемой точностью, если ординаты кривой для подстановки в формулу (17, 1) будут вычислены также аналитически, а не будут сниматься с чертежа. Для семи кривых, наиболее близких по форме к корабельным обводам, аналитическое выражение которых приведено в табл. VIII, такая работа была выполнена В. Г. Власовым

Таблица VIII

Аналитические функции, аппроксимирующие обводы судна

№ функции	Название	Формула	Коэффициент точности
1	Синусоида	$y = \frac{1}{2} (1 + \sin \pi x)$	0,5000
2	"	$y = \sin \frac{\pi x}{2}$	0,6366
3	Прогрессивная	$y = \frac{1-x^2}{1+1,20x^2}$	0,6536
4	Парабола	$y = 1 - x^{2,5}$	0,7143
5	Зайтце	$y = \sqrt{1-x^2}$	0,7654
6	Прогрессивная	$y = \frac{1-x^2}{1-0,67x^2}$	0,8536
7	"	$y = \frac{1-x^2}{1-0,16x^2}$	0,9850

Пределы применения:  $0 < x < 1,0$ ;  $1,0 > y > 0$ .

[15—350] и несколько дополнена вторым. В табл. IX приведены те отклонения коэффициента  $\varphi$  от единицы, которые были при этом обнаружены, иначе говоря, те погрешности, которые дает формула трапеций при обычном ее использовании без этого коэффициента

$$\epsilon = 1 - \varphi, \quad (17, 3)$$

Указанное в таблице число промежутков между ординатами  $n$  относится к интервалу  $0 < x < 1$ . Такие же относительные отклонения имеют место и в интервале  $-1 < x < 0$ , следовательно, они же останутся и для всей кривой от  $-1 < x < +1$  при удвоенном числе ординат  $2n$ . Для промежуточных интервалов интегрирования содержание табл. IX неприменимо (см. § 23).

точное значение площади, отличающееся от истинного только на случайную ошибку суммы снятых ordinat.

Для действительных обводов корабля, не имеющих аналитического выражения, также могут быть введены поправки, повышающие точность расчета, если положить  $q \neq 1$ , но определение таких поправок несколько сложнее и не свободное от случайных ошибок.

Отберем из числа кривых, имеющих аналитическое выражение, такую возможно большую группу, которая наиболее близко подходит по внешнему виду к данному обводу судна, чтобы действительные ordinaty этого обвода нигде не выходили за пределы, очерченные кривыми этой группы. Можно предположить, что при таких условиях и поправочный множитель  $q$  для действительного обвода также не выйдет за пределы поправочных множителей для этих аппроксимирующих кривых и с наибольшей вероятностью может считаться равным среднему арифметическому из них<sup>1</sup>.

Если для этой цели будет отобрано  $n$  кривых (включая уславливающие дубликаты), то средний поправочный множитель в соответствии с равенством (17, 3) будет

$$q = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i. \quad (17, 4)$$

Введение этого множителя в формулу трапеций будет устраняет значительная часть ошибок интегрирования, а именно, та, которая для всех кривых данной группы носит систематический характер.

**Случайные ошибки интегрирования.** Разность между средним поправочным множителем  $q$  для данной группы кривых и действительным значением такого же множителя для каждой конкретной кривой группы  $\epsilon_i$  будем считать случайной погрешностью формулы трапеций для данной кривой

$$\delta_i = q - q_i = q - 1 + \epsilon_i. \quad (17, 5)$$

Пределный закон распределения этих погрешностей при возрастании  $n$  до бесконечности может быть установлен только на основании длительных статистических исследований, для которых в настоящее время нет достаточных оснований. Поэтому мы пока вынуждены ограничиться предположением, что по основным характеристикам этот закон не будет существенно отличаться от закона распределения погрешностей той группы аппроксимирующих функций, которая была нами отобрана. Очевидно, на основании выводов § 13, такое предположение будет достаточно правдоподобным только в том случае, если число аппроксимиру-

ющих кривых будет не менее четырех, когда характерные особенности различных законов распределения в значительной мере сглаживаются.

На основании изложенного вводим следующие допущения:

1) дисперсия погрешностей формулы трапеций не превышает дисперсии отклонений  $\delta_i$  для отобранной группы аппроксимирующих кривых;

2) предельная погрешность формулы трапеций не может быть меньше предельной погрешности равномерного распределения, а если она ее превышает, то не может быть больше того наибольшего отклонения  $\delta_i$ , которое получается для отобранной группы аппроксимирующих кривых.

Первая из указанных предпосылок позволяет определить верхнюю границу средней квадратичной погрешности

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - q - \epsilon_i)^2}, \quad (17, 6)$$

которую и надо вводить в дальнейшие расчеты.

Из второй предпосылки следует, что нормированная предельная ошибка, значение которой необходимо для нахождения возможной погрешности (§ 13), должна вычисляться как отношение наибольшего из отклонений  $\delta_i$  к средней квадратичной погрешности

$$z_{op} = \frac{\delta_1}{\delta_0},$$

но не должна быть меньше  $\sqrt{3} = 1,7321$ .

**Ошибки суммы ordinat.** Ordinaty теоретических обводов судна могут сниматься с масштабного чертежа или с плаза. В первом случае при тщательном выполнении чертежа на специальной бумаге или в случае ошибки каждой ordinaty может не превышать  $\pm 0,1$  мм, но может достигнуть  $\pm 0,5$  мм при более низком качестве работы. При переходе к натуральным размерам эта ошибка умножится на масштаб чертежа и может увеличиться до  $\pm (1 - 15)$  мм. Еще большие ошибки могут возникнуть вследствие усадки чертежной бумаги или калкан, на которой изображен теоретический чертеж, а снятие ordinat со светового копий по этой же причине вообще не следует допускать. Ошибки плановых ordinat обычно не превышают  $\pm 0,5$  мм. Таким образом, диапазон возможной точности снятия ordinat довольно обширен.

Так как ordinaty теоретических обводов снимаются непосредственным замером, то закон распределения их ошибок следует считать равномерным, а поэтому их средняя квадратичная ошибка чаще всего лежит в пределах 0,3—3 мм и только при особо низком качестве конструкторских работ в малом масштабе чертежа может достигнуть 6—9 мм.

<sup>1</sup> Напомним, что для вычисления среднего квадратического отклонения вносимые поправки учитываются на некоторые коэффициенты, уславливающие их влияние (см.) на образование среднего.



Средняя квадратичная ошибка суммы ординат находится по правилу сложения дисперсий

$$\sigma = \sqrt{\sum \sigma_i^2} = \sigma_1 \sqrt{n},$$

где  $\sigma_i$  — средние квадратичные ошибки отдельных ординат (равны между собой);

$n$  — число ординат или, точнее, промежутков между ними, так как в их сумму по правилу трапеций входят лишь половины крайних ординат, а следовательно, и их случайных ошибок.

Средняя квадратичная погрешность той же суммы

$$\delta_2 = \frac{\sigma}{\sum y_i} = \frac{\sigma_1}{\sum y_i} \sqrt{n}, \quad (17,7)$$

где  $\sum y_i$  — исправленная сумма ординат.

Для удобства дальнейшего анализа входящую сюда сумму ординат выразим через среднюю ординату, которая легко находится делением найденной площади рассматриваемой фигуры  $S$  на ее длину по оси абсцисс  $l$  или же через коэффициент ее площади  $\pi$  и наибольшую ординату  $y_{max}$

$$\sum y_i = \pi y_{cp} = \pi \frac{S}{l} = \pi \cdot \pi \cdot y_{max}. \quad (17,8)$$

После такой замены получим

$$\delta_2 = \frac{\sigma_1}{\pi y_{cp}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (17,9)$$

Аналогично находится предельная погрешность суммы ординат

$$\delta_{пр} = \pi \frac{\sigma_1}{y_{cp}} \sqrt{3}. \quad (17,10)$$

Дальнейший ход расчета по методу, изложенному в § 13, и пояснениях не нуждается.

**Пример 1.** Определить величину погрешности площади носовой части шпорок, изображенной на рис. 20 жирной линией. Расчет проводим по абсциссным ординатам с разбивкой полуэллипса сумми на 10 частей. Степень достоверности  $\nu = 0,999$ .

Из кривых, указанных в табл. VIII, наиболее подходящей в данном случае является кривая 2. Несколько ниже подлинной прогрессия 2. Возможно также приближение к формуле  $l$  и параболе  $4$ . Эти кривые показаны на рис. 20 пунктирными линиями за тем же номером.

Соответствующие им соответствующие погрешности границ трапеций с 10 промежутками между ординатами вычисляем так:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0\%; & \sigma_2 &= -0,2\%; \\ \sigma_3 &= -0,3\%; & \sigma_4 &= -0,3\%. \end{aligned}$$

Оценивая достоверность приближенных параметров рассматриваемой кривой к формуле 2 и 3 соответственно увеличиваем знаменатели 2 и 3, выдвигая поправочный множитель

$$\varphi_1 = 1 - \frac{0 - 3 \cdot 0,2 - 2 \cdot 0,3 - 0,3}{100 \cdot 7} = 1,002$$

и его среднюю квадратичную погрешность

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{0,2^2 + 3 \cdot 0,2^2 + 2 \cdot 0,3^2 + 0,3^2}{7}} = 0,08\%.$$

Предельная погрешность множителя  $\varphi$  соответствует кривой 1 и равна

$$\delta_{пр} = 1,002 - 1 + 0 = 0,002 = 0,2\%.$$

Следовательно, нормированная предельная ошибка  $\varphi$  в данном случае

$$\varepsilon_{пр}(\varphi) = \frac{0,2}{0,08} = 2,5 > \sqrt{3}.$$

Это подтверждает приемлемость отобразившей группы аппроксимирующей кривой.

Для определения средней квадратичной погрешности суммы ординат, считая с плана, положим

$$\left. \begin{aligned} \delta_{пр} &= \pm 0,5 \text{ мм}; \\ \sigma_1 &= 0,3 \text{ мм}; \\ \pi &= 0,64 \\ y_{max} &= 1000 \text{ мм} \end{aligned} \right\} y_{cp} = 640 \text{ мм}.$$

Тогда при  $n = 10$  по формуле (17,9) получим

$$\delta_2 = \frac{0,3}{640} \cdot \frac{100}{\sqrt{10}} = 0,014\%.$$

Найденная выше средняя квадратичная погрешность метода интегрирования  $\delta_2 = 0,08\%$  более чем в три раза превышает среднюю квадратичную погрешность суммы ординат. Поэтому последней можно пренебречь (см. § 14). Очевидно, в применении плановых ординат в этом случае не было необходимости, и увеличение их предельной ошибки при пользовании чертежом с  $\pm 0,5$  мм до  $\pm (1 + 2)$  мм никак не отразилось бы на точности конечного результата.

Предельная погрешность суммы ординат

$$\delta_{пр} = \frac{\pi \cdot \delta_{пр}}{y_{cp}} = \frac{10 \cdot 0,5}{640} = 0,8\%.$$

А предельная погрешность носовой части шпорок

$$\delta_{пр} = \delta_{пр} + \delta_{пр} = 0,2 + 0,8 = 1,0\%.$$

Следовательно, нормированная предельная погрешность площади

$$\varepsilon_{пр} = \frac{\delta_{пр}}{\delta} = \frac{1,0}{0,08} = 12,5 > 3,1,$$

и затем распрямив ее по касательной допустим считать нормальной. Допускаем погрешность площади при этом будет

$$\delta_0 = \pm 3,1 \cdot 0,08 = \pm 0,25\%$$

Такая погрешность может быть получена только при условии введения поправочного множителя  $\varphi \neq 1$ . В противном случае к случайным ошибкам добавится систематическая, равная  $\lambda = 1 - \varphi = -0,002 = -0,2\%$ , и пределы возможных ошибок сдвигаются

$$\delta_0 = -0,2 \pm 0,25 = \begin{cases} +0,05\% \\ -0,45\% \end{cases}$$

Наибольшая возможная ошибка при этом почти удваивается.

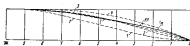


Рис. 20. Аппроксимация обвода выверенка.

Пример 2. Определить допустимую ошибку снятия ординат с чертежа для расчета площади погрязшей части медной канальюга, изображенной на рис. 21, по правилу трапеций при шести измерениях, не считая оснований ( $n = 6$ ).

В качестве аппроксимированных кривых выберем из числа указанных в табл. VIII следующие: параболу  $\Phi$ , эллипс  $\Sigma$  и прогрессору  $\delta$ . Соответствующая им систематическая погрешность интегрирована указанным в табл. IX:

$$\delta_1 = -0,8\%; \quad \delta_2 = -2,5\%; \quad \delta_3 = -2,2\%.$$

Так как кривая  $\delta$  ближе других подходит к рассматриваемому виду обвода, соответствующую ей ошибку  $\delta_0$  введем в формулу (17, 4) с увеличением масштаба 2

$$\delta_{01} = 1 - \frac{-0,8 - 2,25 - 2,2}{100 \cdot 2} = 1,02$$

Средняя квадратическая погрешность аппроксимации множителя в этом случае будет

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{1}{3} (0,2^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 0,2^2)} = 0,27\%$$

Иногда из этой величины и пользуются формулой (14, 17), вводя в нее большую среднюю квадратическую погрешность суммарной ошибки, значение которой не зависит влияния на точность расчета площади канальюга.

$$\delta_0 < \frac{1}{3} \delta_1 = 0,33\%$$

и затем по формуле (17, 9) — допустимую среднюю квадратическую ошибку снятия ординат

$$\delta_2 = \mu_{\text{ор}} \sqrt{n} \cdot \delta_0 \quad (17, 11)$$

где  $\mu_{\text{ор}} = \frac{\delta y_{\text{ор}}}{\delta y}$  — средняя ордината;  
 $\mu$  — коэффициент поправки канальюга;  
 $\delta y$  — его наибольшая ордината.

Положим  $\mu = 0,8$  и  $y_{\text{max}} = 1000$  мм. Тогда при  $n = 6$  найдем  $\mu_{\text{ор}} = 800$  мм и

$$\delta_2 = 800 \cdot \sqrt{6} \cdot 0,23 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ мм.}$$

Этому соответствует предельная ошибка равновероятного распределения до  $\pm 9$  мм. С такой точностью ординаты могут быть сняты даже с чертежа в масштабе 1 : 100. Более точные измерения не уменьшают возможной погрешности конечного результата, и средняя квадратическая погрешность определенной площади данного шпильюга по правилу трапеций, с семью ординатами, не при каких условиях не может быть меньше 0,7%. Только увеличение числа ординат может ее понизить.

Однако и такая погрешность достижима только при условии введения в обычную формулу трапеций поправочного множителя  $\varphi$ . Без этого, помимо случайных ошибок, оцененных выше, конечный результат содержал бы еще систематическую погрешность мизера, равную  $1 - \varphi = -0,02 = -2\%$ . В результате сложения обоих видов погрешностей мы получили бы возможную ошибку площади шпильюга, доходящую до  $-3\%$ .

В заключение настоящего параграфа отметим, что формула, аналогичная (17, 1), была предложена еще в 1933 г. Девисом [15—412], но в основу ее вывода была положена замена истинных обводов корабля одной концевой кривой — параболой второй степени. В связи с этим поправочный коэффициент в формуле Девиса зависит только от числа ординат и не учитывает особенностей тех или иных обводов, влияние которых ясно показалось В. Г. Власовым. Изложенный выше метод в этом отношении имеет очевидные преимущества.

## § 18. Правило Симпсона (первое)

Задача определения ошибок площадей, вычисленных по правилу Симпсона, решается так же, как предыдущая. Разница заключается лишь в том, что при суммировании ординат по этому

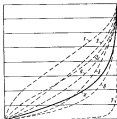


Рис. 21. Аппроксимация обвода канальюга.

правилу все ординаты с соседними значениями, а вместо с ними и их случайные ошибки, удаляются, а затем сумма ординат и их ошибок) вновь исправляется умножением на коэффициент  $\frac{1}{2}$ . Таким образом, после введения поправочного множителя  $\varphi$  правило Симпсона может быть записано в следующем виде:

$$S = \frac{2}{3} \varphi \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{i=1}^{n-1} 2h_{i+1} \right], \quad (18, 1)$$

где индекс  $i$  может принимать только четные значения, включая нуль, а  $\sum_{i=0}^n$  исправляется на полусумму крайних ординат, как обычно.

Считая по-прежнему все ординаты равноотстоящими, найдем среднюю квадратичную ошибку их суммы

$$\sigma = \frac{2}{3} \sqrt{\sum_{i=0}^n \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (2\sigma_i)^2} = 1,0541 \sigma_i \sqrt{n}. \quad (18, 2)$$

Разделив эту величину на среднюю ординату  $\bar{y}_c = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{n}$  и на общее их число  $n$ , получим среднюю квадратичную погрешность суммы

$$\delta_s = 1,0541 \frac{\sigma_i}{\bar{y}_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (18, 3)$$

Сравнивая это выражение с равенством (17, 9), видно, что погрешность суммы ординат, вычисленной по правилу Симпсона, больше, чем по правилу трапеций, примерно на 5%.

С другой стороны, погрешность интегрирования по правилу Симпсона, как видно из табл. IX, существенно меньше, чем по правилу трапеций. Поэтому общая точность вычисления площадей по этому правилу во многих случаях оказывается более высокой. Покажем это на тех же примерах, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Пример 1. Для расчета площади затененной по правилу Симпсона табл. IX дает следующие погрешности интегрирования:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0; & \delta_2 &= 0; \\ \delta_3 &= 0; & \delta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, поправочный коэффициент  $\varphi = 1$  и погрешность интегрирования  $\delta_1 = 0$ .

Средняя квадратичная погрешность суммы плановых ординат, определяемая по формуле (18, 3), равна

$$\delta_s = 1,0541 \frac{0,3}{440} \cdot \frac{100}{\sqrt{12}} = 0,016\%.$$

Такой же будет и средняя квадратичная погрешность всего расчета.

Следовательно, правило Симпсона дает в данном случае в пять раз меньшую погрешность, чем при определении площади той же

затенянии по правилу трапеций; единственным источником ошибок при этом оказалось снятие ординат. Поэтому применение для расчета более точных плановых ординат в данном случае оправдано.

Пример 2. Для расчета площади затененной по правилу Симпсона изображен на табл. IX следующие погрешности интегрирования:

$$\delta_1 = 0\%; \quad \delta_2 = -1,0\%; \quad \delta_3 = -0,4\%.$$

Следовательно, поправочный множитель в этом случае будет

$$\varphi = 1 - \frac{0 - 2 \cdot 1,0 - 0,4}{100 \cdot 4} = 1,006$$

вместо 1,02, полученного выше для правила трапеций. Но различие между средними квадратичными погрешностями этих методов оказывается значительно меньше

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{0,03^2 + 2 \cdot 0,4^2 + 0,3^2}{4}} = 0,4\%$$

вместо 0,7% по правилу трапеций.

При такой средней квадратичной погрешности интегрирования для того, чтобы ошибка снятия ординат не оказала влияния на точность определения площади затененной, средняя квадратичная погрешность их суммы не должна превышать

$$\delta_s < \frac{1}{3} \delta_1 = 0,13\%,$$

а, следовательно, по формуле (18,3) допустима средняя квадратичная ошибка снятия ординат достигнет

$$\sigma_i = \frac{1}{1,0541} \delta_s \sqrt{n} \cdot \delta_1, \quad (18, 4)$$

т. е.

$$\sigma_i = \frac{1}{1,0541} \cdot 800 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,13 \cdot 10^{-2} = 2,5 \text{ мм.}$$

Этому соответствует предельная ошибка равномерного распределения  $\pm 4$  мм вместо  $\pm 3$  мм при правиле трапеций.

Таким образом, для определения площади затененной по правилу Симпсона нет необходимости в использовании плановых ординат, но теоретический чертеж в этом случае целесообразно выполнять в более крупном масштабе, чем для правила трапеций.

Обратим также внимание на то, что уменьшение средней квадратичной ошибки при расчете площади затененной всего на 0,3% редко может оправдать трудозатраты для этой цели правила Симпсона, вычисления по которому все же сложнее, чем по правилу трапеций.

Второе правило Симпсона в настоящее время вышло из употребления, а поэтому касаться его не будем.

## § 19. Правило Чебышева

Расчет площадей по правилу Чебышева сходен с их расчетом по правилу трапеций. Основное различие между ними заключается лишь в том, что число ординат, размещаемых с черточка по правилу Чебышева, при прочих равных условиях обычно бывает вдвое меньше, чем по правилу трапеций. Отсюда следует, что погрешность сумм ординат в этом случае будет на 40—50% больше, чем в формуле трапеций.

Существенным для расчета является также и различие в постановке ординат — неравномерной для правила Чебышева; это может заметно повлиять на точность их снятия. Остановимся на этом вопросе более подробно.

При построении теоретического чертежа с равноотстоящими шпангоутами (или ватерлиниями) основное внимание обращается на сохранение равенства расстояний между ними (разметка циркулем). Отступая от заданной длины или высоты борта всего корабля в этом случае не играют никакой роли, так как расстояния между ординатами не снимаются с чертежа, а вычисляются по заданной длине или высоте борта. Влияние ошибок в их графическом изображении, таким образом, отпадает.

При разметке ординат по способу Чебышева примененные циркули исключаются, и ошибки разметки (по масштабной линейке) могут существенно возрасти. Во всех случаях они не будут мейнше ошибок снятия ординат с черточка, а могут и заметно их превзойти:

$$\Delta_v(x) \geq \Delta_v(y), \quad (19, 1)$$

где  $\Delta_v(x)$  — возможная ошибка абсциссы;

$\Delta_v(y)$  — возможная ошибка ординаты.

Смещение ординат с тех мест, которые они должны занимать по правилу Чебышева, приводит к поведению дополнительной ошибки в величине снимаемой ординаты, зависящей от угла между касательной к ватерлинии или шпангоуту и диаметральной плоскостью судна (рис. 22)

$$\Delta_v(y) = \text{tg } \psi \cdot \Delta_v(x), \quad (19, 2)$$

При суммировании ординат дополнительные случайные ошибки складываются и, следовательно, среднее квадратичное значение их сумм

$$\sigma^2(\sigma_2) = \sqrt{\sum \sigma_i^2 \text{tg}^2 \psi} = \sigma_1 \sqrt{\sum \text{tg}^2 \psi},$$

где  $\sigma_i^2$  — дисперсия ошибок в расположении ординат.

Полная средняя квадратичная ошибка суммы ординат, таким образом, составит

$$\sigma_2 = \sqrt{\sum \sigma_i^2 + \sigma_1^2 \sum \text{tg}^2 \psi} = \sigma_1 \sqrt{n + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right)^2 \sum \text{tg}^2 \psi}, \quad (19, 3)$$

а ее средняя квадратичная погрешность

$$\delta_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{max}}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right)^2 \sum \text{tg}^2 \psi}, \quad (19, 4)$$

где  $\sigma$  — коэффициент полноты рассматриваемой фигуры;  
 $\sigma_{\text{max}}$  — ее наибольшая ордината.

Практически можно считать  $\frac{\sigma_1}{\sigma_i} = 2 + 3$ .

В остальном метод расчета погрешностей площадей, вычисленных по правилу Чебышева, не отличается от описанного в § 17 для правила трапеций, и формула (17, 1) одинаково применима для обоих правил.

Пр и м е р. Воспользуемся введенными данными примера 1 из § 17, но предположим, что определяем площадь всей ватерлинии по правилу Чебышева с девятью ординатами. При этом ординаты на малом будут распределять как пополам, так и в корытке ее части, а крайние ватерлинии ординаты не связаны с соседним ватерлинией.

Для такого случая можно считать условие  $n = 4,5$  [5—350], и табл. IX для следующих погрешностей интегрирования:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 0; & \epsilon_2 &= -0,2\%; \\ \epsilon_3 &= 0; & \epsilon_4 &= -0,1\%. \end{aligned}$$

Среднеквадратичный поправочный коэффициент к формуле Чебышева должен считаться равным

$$\varphi = 1 - \frac{0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0,2 - 0,1}{100,7} = 1,001,$$

а ее средняя квадратичная погрешность

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{1}{17} (0,1^2 + 3 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 0^2)} = 0,13\%.$$

Среднюю квадратичную погрешность суммы ординат определим исходя из предположения, что ошибки расположения ординат превышают ошибки измерения площади не более, чем в три раза

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_i} = 3,$$

а сумму квадратов тангенсов углов наклона обода ватерлинии к диаметральной плоскости определим по чертежу

$$\sum \text{tg}^2 \psi = 0,082.$$

Подставляя эти значения в формулу (19, 4), получим

$$\delta_2 = \frac{0,5 \cdot 100}{0,64 \cdot 100} \sqrt{\frac{1}{4,5} + \frac{1}{4,5^2} \cdot 3^2 \cdot 0,082} = 0,024\%.$$

Сравнивая эти результаты с теми, которые были получены для аналогичного примера в § 17, видим, что в данном случае погрешность суммы ординат для правила Чебышева, хотя и превышает вдвое такую же погрешность правила трапеций, но по-прежнему пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью интегрирования. Последняя же для правила Чебышева оказалась в полтора раза больше, чем для правила трапеций, хотя и остается еще допустимой.

Правило Чебышева сохраняет явное преимущество в том, что работа по снятию и суммированию ординат существенно сокращается. Но это может оправдать применение способа Чебышева только в том случае, когда вычерчивание чебышевского корнуса, достаточно трудоемкое, производится не только для элементарных расчетов ясности и начальной остойчивости, но и для более сложных построений кривых статической остойчивости на конечных углах крена.

Примерно равную точность правила трапеций и Чебышева дают лишь при равных числах ординат.

## § 20. Планиметрирование

Если для определения площади криволинейной фигуры используется планиметр, то и в этом случае можно различать два вида случайных погрешностей:

- $\delta_1$  — инструментальные погрешности прибора, аналогичные погрешностям интегрирования по правилу трапеций, и
- $\delta_2$  — погрешности обкатки, следующие по своему происхождению с погрешностями определения ординат.

Оценка возможной инструментальной ошибки планиметра могла бы быть отчасти сделана и аналитически, путем учета возможности скольжения его колеса по бумаге, существующих зазоров и неточности разбоя икелл счетного механизма. Однако такая трудоемкая работа не могла бы себя оправдать, тем более, что ее пришлось бы неоднократно повторять для разных сортов бумаги и разных степеней износа деталей планиметра. Поэтому представляется более целесообразным устанавливать эту погрешность экспериментально, периодически повторяя обкатку простых геометрических фигур, как это обычно и практикуется. Особенно целесообразно для этой цели пользоваться специально тарировочными линейками, прилагаемыми к каждому планиметру. При этом всякие колебания его икелл практически исключаются и оказывается возможным выдать инструментальную ошибку в четком виде.

Не менее точные результаты может дать обкатка сетки теоретического чертежа корнуса корабля по ее наружному периметру для многоугольника — эталона — достаточно больших и точно известных размеров. Но при этом икелл планиметра сле-

дует вести по линейке, прикладываемой возможно тщательнее к каждой из сторон прямоугольника последовательно. Следует иметь также в виду, что переводный множитель, как и инструментальная ошибка планиметра, могут несколько меняться в зависимости от расположения его неподвижной точки относительно планиметрируемой фигуры. Поэтому центр тяжести эталона должен приблизительно совпадать с центром тяжести фигуры.

Однократная обкатка эталона дает лишь переводный множитель от показаний планиметра к истинному значению измеряемой площади и при том, как и всякое измерение, только одну, случайную величину этого множителя. Для его уточнения и для оценки его возможной погрешности обкатка эталона должна быть повторена несколько раз. Количество таких повторений должно выбираться в зависимости от требуемой достоверности и допустимой погрешности результата с помощью табл. III. По этой же таблице окончательно устанавливается и инструментальная погрешность прибора  $\delta_1$ .

Процесс планиметрирования можно представить себе как сложение бесконечно большого числа ординат, расположенных на равных и бесконечно малых расстояниях друг от друга. При таких условиях и достаточно тщательной работе закон распределения случайных отклонений икелл планиметра от действительного обвода судна можно считать нормальным, и средняя квадратичная ошибка обкатки получится делением наибольшего возможного отклонения на нормированную возможную ошибку, соответствующую степени достоверности не менее  $\nu = 0,999$ .

Колебания икелл планиметра практически не зависят от формы и размеров планиметрируемой фигуры, но относительная погрешность результата, очевидно, будет тем больше, чем меньше измеряемая площадь и чем относительно больше ее периметр. Поэтому среднюю квадратичную погрешность обкатки можно оценить как отношение длины периметра, умноженного на среднее квадратичное отклонение икелл, к площади фигуры

$$\delta_2 = \frac{P \cdot \sigma_0}{S}, \quad (20, 1)$$

где  $P$  — длина периметра;

$\sigma_0$  — среднее квадратичное отклонение икелл планиметра;

$S$  — площадь фигуры.

В частности, для круга радиуса  $r$ , например, получим

$$\delta_2 = \frac{2\pi r \cdot \sigma_0}{\pi r^2} = 2 \frac{\sigma_0}{r}.$$

Для описанного квадрата со стороной  $a = 2r$

$$\delta_2 = \frac{4a \cdot \sigma_0}{a^2} = 4 \frac{\sigma_0}{a} = 2 \frac{\sigma_0}{r}.$$

Для равнобедренного ему прямоугольника со сторонами  $a = 1,4$  и  $b = 2,5r$ , т. е. с отношением сторон  $b : a = 1,56$ ,

$$\delta_2 = \frac{(2b + 2a) \alpha_2}{ab} = 2,05 \frac{\alpha_2}{r}.$$

Наконец, для еще более удлиненного прямоугольника со сторонами  $a = 1,33r$  и  $b = 3,0r$ , т. е.  $b : a = 2,25$ ,

$$\delta_2 = \frac{8,66}{4} \cdot \frac{\alpha_2}{r} = 2,16 \frac{\alpha_2}{r}.$$

Так как обводы по шпангоутам большинства морских судов не выходят за пределы, очерченные указанными выше фигурами, а величина погрешности не нуждается в более точном определении, то для практических расчетов можно принимать

$$\delta_2 = 2 \frac{\alpha_2}{r} \quad (20, 2)$$

или, заменяя  $r$  наибольшей ординатой шпангоута  $r \approx y_{max}$ ,

$$\delta_2 = 2 \frac{\alpha_2}{y_{max}} \quad (20, 3)$$

Только для речных судов с отношением ширины к осадке большим трех и шпангоутов морских судов в оконечностях постоянный коэффициент в этой формуле может существенно увеличиться.

Значительно большие погрешности могли бы получиться в случае применения планметра для нахождения полных площадей ватерлиний. Вследствие их вытянутой формы, ведущей к увеличению относительного периметра, постоянный коэффициент в формуле (20, 3) может увеличиться в 1,5—2 раза. Уточнить его всегда возможно по способу, изложенному выше. Однако для этой цели планметр никогда не применяется.

Точность обкатки может быть заметно повышена в тех часто встречающихся случаях, когда рассматриваемая фигура хотя бы с одной стороны ограничена прямой линией или дугами, вычерченной точно по существующему лекалу. Прикладывая линейку или соответствующее лекало и слегка прижимая к нему угол планметра, можно почти полностью исключить ее колебания, вызываемые физиологическими причинами. Однако прикладывать лекало или линейку нужно при этом весьма точно, так как иначе, избежав случайных колебаний, легко внести систематическую ошибку, еще большую по величине, чем возможная ошибка свободной обкатки.

Пример. Допустим, что при ассимметричной обкатке эллипса получена средняя квадратичная погрешность инструмента  $\delta(A) = 0,02\%$ . Задавая степень достоверности  $\gamma = 0,999$ , найдем по табл. III поправочный коэффициент

для  $k = 1 - \gamma = 7$  равным 1,56, следовательно, инструментальная погрешность данного планметра должна считаться равной

$$\delta_2 = 1,56 \cdot 0,02 = 0,14\%.$$

Если допустить, что на заданном выделенном чертеже толщина карандашной линии составляет примерно 0,1 мм, а случайные отклонения угла планметра от ее края не превышают 0,2 мм. В таком случае за наибольшую амплитуду угла обкатки можно принять величину 0,25 мм, а среднюю квадратичную ошибку обкатки считать равной

$$\alpha_2 = \frac{0,25}{\sqrt{1}} = 0,25 \text{ мм}.$$

Если теоретический чертёж корпуса выложен в масштабе 1 : 10, то при переходе к натуре получим

$$\alpha_2 = 10 \cdot 0,25 = 0,5 \text{ мм},$$

и подставив эту величину в формулу (20, 3) при  $y_{max} = 1000$  мм, получим среднюю квадратичную погрешность обкатки

$$\delta_2 = 2 \cdot \frac{0,5}{1000} \cdot 100 = 0,10\%.$$

Таким образом, в данном случае погрешность обкатки и инструментальная погрешность планметра оказались сопоставимыми, а средняя квадратичная погрешность найденной площади эллипса составит

$$\delta = \sqrt{0,14^2 + 0,10^2} = 0,2\%.$$

Напомним, что при определении той же площади по правилу трапеций при  $n = 6$  мы получили в § 17 среднюю квадратичную погрешность 0,7%. Даже при  $n = 10$  правило трапеций дает погрешность вдвое большую, чем планиметрирование.

Однако столь высокая точность планиметрирования возможна только при весьма тщательной обкатке. При небрежной работе колебания углы планметра легко могут увеличиться в 4—5 раз, что приведет к увеличению погрешности площади в 3—4 раза. Все преимущества планиметрирования даже перед расчетом по правилу трапеций при этом будут потеряны.

## § 21. Расчеты площадей по размерам, указанным на чертеже

Если рассматриваемая фигура ограничена кривыми, имеющими аналитическое выражение, интегрирующиеся в квадратурах, то площадь ее может быть найдена также аналитически, и погрешность этой площади будет зависеть только от погрешности тех параметров, которыми определяются очерточная фигура. Эта погрешность находится по общим приемам расчета погрешностей вычислений.

Так, например, площадь, ограниченная осью ординат и параболой

$$y = \pm \sqrt{a(b-x)},$$

аналитически выражается так:

$$S = \frac{4}{3} a^{3/2} b^{3/2},$$

и, следовательно, погрешность ее вычисления будет

$$\delta(S) = \sqrt{\left[\frac{1}{3} \delta(a)\right]^2 + \left[\frac{3}{2} \delta(b)\right]^2}.$$

Частными случаями подобного рода задач являются и определение площадей простейших геометрических фигур: прямоугольников, трапеций, круговых сегментов и т. п.

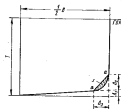


Рис. 23. Модель-аналогит грузовой судна.

Если часть или все параметры, определяющие очертания фигуры, заданы достоверно, то и площадь ее может быть определена с большой точностью и даже достоверно.

Если кривые, ограничивающие данную фигуру, хотя и имеют аналитическое выражение, но это выражение не поддается интегрированию в квадратурах, то возникает необходимость применения того или иного метода численного интегрирования; это вносит в результат свои неизбежные ошибки, способы расчета которых были нами рассмотрены выше. Но и в этом случае возможность аналитического определения ordinат позволит, если в этом есть необходимость, существенно повысить их точность, а следовательно, и точность конечного результата.

Те преимущества, которые дает использование достоверных габаритных размеров или параметров, могут быть отмечены и в том случае, когда рассматриваемая фигура частично ограничена кривыми, не имеющими аналитического выражения. Для этого достаточно выделить из всей фигуры участки, непосредственно прилегающие к указанным кривым, с таким расчетом, чтобы возможно большую часть площади можно было определить аналитически, а выделенные участки имели возможно меньший периметр для планиметрирования или расчета по одному из существующих правил (например, трапеций).

Пример. На рис. 23 показана модель погруженной части киля-аналогиты грузовой баркасы, имеющей ширину  $l = 14$  м и осадку  $T = 6$  м. При определении площади этого киля-аналогита по теоретическому выра-

жению, выведенному в масштабе 1 : 25, может быть получена погрешность порядка  $\delta_1 = 0,08\%$ , которая после сложения с инструментальной погрешностью диаметра  $\delta_2 = 0,14\%$  дает общую погрешность площади

$$\delta = \sqrt{0,14^2 + 0,08^2} = 0,16\%.$$

То же значение может быть определено аналитически по формуле

$$S = B \left( T - \frac{1}{2} \Delta_1 \right) - \Delta_2 \Delta_3 + 3s,$$

так как — площадь, прилегающая к кривой и заштрихованная на рисунке.

В этой формуле значения  $B$ ,  $T$  и  $\Delta_1$  заданы численно по чертежу и могут считаться достоверными. Тогда линия  $a-b$  проводится достаточно произвольно, после чего размеры  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  снимаются с чертежа с обычной точностью, а площадь  $s$  определяется планиметрированием. Следовательно, средняя квадратичная ошибка указанной величины киля-аналогита будет

$$\sigma(S) = \sqrt{(\Delta_2 \Delta_3)^2 + [\delta(\Delta_1)]^2 + [\delta(\Delta_2 \Delta_3)]^2 + [3s \delta(a)]^2}.$$

Положим для конкретности  $\Delta_2 = \Delta_3 = 1,2$  м;

$$\delta(\Delta_1) = \delta(\Delta_2) = \frac{0,065}{1,3} 100 = 0,4\%, \text{ и } s = 0,5 \text{ м}^2.$$

Погрешность области площади  $s$  измерением по сравнению с обычной всего киля-аналогита возрастает примерно в 10 раз, а инструментальная погрешность диаметра останется прежней  $\delta_1 = 0,14\%$ . При этом окажется

$$\delta(s) = \sqrt{0,14^2 + 0,6^2} = 0,6\%.$$

и, следовательно, средняя квадратичная ошибка площади всего киля-аналогита

$$\sigma(S) = \sqrt{[0,2 \cdot 1,2^2 \cdot 0,4^2 + 0,6^2] + [3 \cdot 0,5 \cdot 0,6^2] 10^{-2}} = 0,011 \text{ м}^2.$$

Общая площадь рассматриваемого киля-аналогита  $S = 78,0 \text{ м}^2$ , а поэтому средняя квадратичная погрешность составит  $(0,011 : 78) 100 = 0,014\%$ , т. е. будет в 10 раз меньше, чем при планиметрировании всей площади в целом.

## § 22. Расчет водозмещения

Расчет водозмещения судна по теоретическому чертежу, как и определение других объемов, ограниченных поверхностями двойки кривыми, сводится к снятию ordinат и их интегрированию. Отличие от расчета площадей заключается лишь в том, что интегрирование в этом случае производится по двум направлениям, обычно по длине и высоте. Поэтому все основные выводы предыдущих параграфов этой главы могут быть распространены и на расчеты водозмещения. В частности, по правилам трапеций и Чебышева водозмещение может быть найдено по следующей формуле:

$$V = 2\varphi \psi \frac{l}{2n} \cdot \frac{T}{m} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (22, 1)$$

где  $\varphi$  — поправочный коэффициент, уточняющий метод интегрирования по длине;

$\psi$  — то же, по высоте;

$L$  — длина судна;  
 $T$  — его осадка;  
 $y_i$  — ординаты, снятые с чертежа для одного борта;  
 $\sum$  — исправленная сумма;

$2n$  — число промежуток между шпангоутами;  
 $m$  — число промежуток между ватерлиниями.

Если для интегрирования по длине применяется правило Симпсона, формула (22, 1) должна быть дополнена соответствующим множителем  $\frac{2}{3}$ .

Так как в этой формуле случайными являются лишь поправочные коэффициенты и сумма ординат, то средняя квадратическая погрешность водоизмещения складывается из трех погрешностей

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} \quad (22, 2)$$

где  $\delta_1 = \delta_1(\varphi)$  — средняя квадратическая погрешность метода интегрирования по длине;  $\varphi$   
 $\delta_2 = \delta_2(\varphi)$  — то же, по высоте;  $\varphi$   
 $\delta_3 = \delta_3\left(\sum y_i\right)$  — средняя квадратическая погрешность суммы ординат.

**Определение поправочных коэффициентов.** При расчетах водоизмещения определены поправочные коэффициенты  $\varphi$  и  $\varphi'$  зачем же отличается от их определения при расчетах площадей. Так же входят и их средние квадратические погрешности. Затруднения здесь могут встретиться только в тех случаях, когда шпангоуты в оконечностях на довольно большом протяжении существенно отличаются по своей форме от модели-шпангоута. Однако и это затруднение может быть устранено, если в число крайних, имеющих аналитическое выражение, для которых поправочные множители известны, добавить и те же, которые по форме ближе подходят к оконечностям рассматриваемого судна. Относительная ограниченность зоны распространения таких шпангоутов может быть учтена введенем в формулу (17, 4) соответствующих коэффициентов, понижающих влияние этих шпангоутов на образование среднего.

Другая возможность уточнения искомого водоизмещения заключается в методе предварительного расчета строевой по шпангоутам, все ординаты которой могут быть определены самостоятельно, независимо от других и с наиболее подходящими для каждого из шпангоутов поправочными коэффициентами. Однако уточнение, даваемое этим способом, обычно оказывается совершенно излишним и рекомендовать его для постоянного пользования нецелесообразно.

В процессе интегрирования дисперсия погрешностей обоих поправочных множителей складывается. Поэтому средняя ква-

дратичная погрешность метода интегрирования в расчетах водоизмещения оказывается больше, чем в расчетах площадей.

**Погрешность суммы ординат.** Общее число ординат, снимаемых с чертежа для расчета водоизмещения, значительно больше, чем для расчетов площадей ватерлиний и шпангоутов. Вследствие этого погрешность суммы ординат в этом расчете всегда оказывается меньше, чем в расчетах площадей.

Действительно, средняя квадратическая погрешность суммы ординат в этом случае

$$\delta_3 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{2\pi m}, \quad (22, 3)$$

$$\sum \delta_i = 2\pi m \sigma_{cp} \quad (22, 4)$$

где  $\sigma_{cp}$  — средняя ордината, которая может быть выражена через коэффициент полноты водоизмещения  $\delta_2$  и максимальную ординату, равную полуширине судна  $y_{max} = \frac{1}{2} B$ , т. е.

$$\sigma_{cp} = \delta_2 y_{max}$$

Следовательно, погрешность суммы ординат

$$\delta_3 = \frac{\sigma_1}{\delta_2 y_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}. \quad (22, 5)$$

Так как погрешность суммы ординат при расчете водоизмещения меньше, а погрешность метода интегрирования больше, чем в расчетах площадей, то общая погрешность водоизмещения может быть как больше, так и меньше погрешности площадей ватерлиний и шпангоутов. Все зависит от относительной величины каждой из рассматриваемых частей погрешностей.

Пример 1. Найти минимальную погрешность водоизмещения судна, грузовой палубой и мидель-планом ватерлинии изображены на рис. 20 и 21, а основные элементы указаны в примерах § 17, если весь расчет выкален по правилу Трапеций.

На основании расчетов § 17 можно приблизительно написать

$$\delta_1 = 0,68\%, \quad \delta_2 = 0,7\%.$$

Далее знаем из того же § 17

$$2n = 20, \quad m = 6, \quad y_{max} = 1000 \text{ мм}, \quad \sigma_1 = 0,3 \text{ мм};$$

положим  $\delta_2 = \alpha \cdot \beta = 0,66 \cdot 0,8 = 0,51$ , т. е.

$$\delta_2 = 0,51 \cdot 1000 = 510 \text{ мм}.$$

Тогда

$$\delta_3 = \frac{0,3 \cdot 100}{510} \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 6}} = 0,006\%.$$



Получаемые цифры показывают, что погрешности интегрирования по длине и ширине одинаковы (различия малы по сравнению с погрешностью измерения ширины по высоте, т. е. следовательно, погрешность водонемлемости определяется только этой последней).

$$\delta = 0,7\%.$$

Пределная погрешность водонемлемости зависит от пределных погрешностей интегрирования по длине  $\delta_{\text{дл}} = 0,2\%$ , высоте  $\delta_{\text{выс}} = 1,2\%$  (обе эти цифры были найдены ранее) и пределной погрешности суммы ординат, вычисленной по формуле (17, 15).

$$\delta_{\text{дл}} = 20 \cdot 0,2 \frac{0,3 \cdot 100}{310} \sqrt{3} = 1,2\%.$$

Складывая эти погрешности, получим

$$\Delta_{\text{дл}} = 0,2 + 1,2 + 1,2 = 2,6\%.$$

Следовательно, нормированная пределная ошибка водонемлемости

$$\delta_{\text{нп}} = \frac{2,6}{\sqrt{3}} = 3,7,$$

и его возможная погрешность (по табл. VII) определяется нормальным законом:

$$\delta_{\text{н}} = 3,1 \cdot 0,7 = 2,2\%.$$

Примечание. Найден погрешности водонемлемости тоже же судна, если площадь его шпангоутов будет определена планиметрированием, а прочие условия те же, будут сохранены.

В этом случае согласно § 17 ширина погрешности интегрирования по площади трапеций

$$\delta_1 = 0,08\%$$

и согласно § 20 инструментальная погрешность планиметра

$$\delta_2 = 0,14\%.$$

Для определения погрешности объема участка, что при расчете водонемлемости рассматриваемым способом каждый элемент планметрируется отдельно, а затем из площади складывается и возмещается по правилу трапеций. Поэтому средняя квадратичная погрешность суммы площадей вычисляется по формуле (14, 6)

$$\delta_3 = \frac{\delta_1}{\sqrt{2n}} \quad (22, 6)$$

где  $\delta_1$  — погрешность объема одного шпангоута, определяемая формулой (20, 3).

В условиях данной задачи  $\delta_1 = 0,08\%$  (см.  $\delta_1$  в примере § 20) и, следовательно,

$$\delta_3 = \frac{0,08}{\sqrt{20}} = 0,04\%.$$

Таким образом, средняя квадратичная погрешность водонемлемости в этом случае оказывается равной

$$\delta = \sqrt{0,08^2 + 0,14^2 + 0,04^2} = 0,17\%,$$

т. е. получается в четыре раза меньше, чем без применения планиметра. Во столько же раз уменьшается и возможная погрешность (с 0,5% вместо 2,2%).

## § 23. Построение интегральных кривых

Расчеты, необходимые для построения масштаба Бонжана, грузовой размер и траектории центра тяжести, сводятся к преобразованию вычислению интегралов с переменным верхним пределом. Процесс этот принципиально не отличается от последовательного нахождения ряда площадей или объемов, отсечаемых соответствующими интегрирующими, а потому все сказанное в предыдущих параграфах может быть полностью отнесено и к построению интегральных кривых. Различие заключается лишь в величине отдельных компонентов, составляющих дисперсию ошибок при всех отсчетах, отличных от нормальной (по грузовой траектории), а также в том, что при построении интегральных кривых никогда не применяются правила Симпсона и Чебышева (в силу не известности их особенностей). Поэтому в данном параграфе рассмотрим только погрешности правила трапеций и планиметрирования. Кроме того, пока не будем касаться построения траектории центра тяжести, определяющей координаты которого специально посвящен следующий параграф. Начнем с построения масштаба Бонжана, анализ ошибок которого наиболее прост.

**Правило трапеций.** Как уже отмечалось в § 17, погрешности метода интегрирования, даваемые правилом трапеций, существенно зависят от числа ординат, до которых производится интегрирование, а также от формы интегрируемого участка кривой, возрастающей с увеличением его кривизны. Оба эти фактора приводят к тому, что интегральные кривые для всех шпангоутов обладают различной точностью в нижней своей части, откуда начинается интегрирование, особенно в тех случаях, когда этот участок совпадает со скуловым образованием наружных обводов (кривая 7 на рис. 21) или с сильно вогнутой килеватостью шпангоутов V-образной формы (кривая 1 на том же рисунке).

Меньшие погрешности дает применение правила трапеций к шпангоутам, имеющим мало меняющуюся с высотой кривизну (кривые 5 и 6) или высоко поднятую скулу (кривые 4, 3 и 2), так как величине кривизны отдельных участков на погрешности результата уменьшается с увеличением площади, к которой они относятся. Во всем этом легко убедиться по табл. X, где приведены систематические погрешности интегрирования, получаемые при применении правила трапеций и построении интегральных кривых для тех функций, которые уже были указаны ранее в табл. VIII. Вычисление приведенных в этой таблице значений выполнено аналогично подобным же вычислениям, на которых основана табл. IX, но отсюда судно при этом считалось для всех кривых разбитой на восемь промежутков между интегрирующими. Нумерация последних и интегрирование ведется снизу, от основной, как обычно.

Погрешности краевых трапеций при построении интегральных кривых, %

№ трапеций	№ кривых по табл. VIII						
	1	2	3	4	5	6	7
8	0,0	-0,3	-0,4	-0,5	-1,7	-1,3	-5,6
7	+0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-2,0	-1,3	-6,8
6	+0,5	-0,3	-0,3	-0,6	-2,4	-1,9	-7,7
5	+1,1	-0,3	-0,2	-0,7	-3,1	-2,5	-9,4
4	+2,2	-0,3	0,0	-0,9	-4,1	-3,1	-12,1
3	+4,5	-0,3	+0,3	-1,2	-6,2	-4,5	-17,0
2	+10,4	-0,3	+0,9	-1,7	-11,3	-7,8	-38,4
1	+33,0	-0,3	+2,5	-3,8	-35,1	-21,2	-85,3
0	—	—	—	—	—	—	—

Способ применения этой таблицы такой же, как предыдущих; она дает возможность повысить точность построения интегральных кривых введением в формулу трапеций коэффициента  $\varphi + 1$  и найти среднюю квадратичную погрешность интегрирования  $\delta_i$  при вычислении любой из их ординат.

Второй причиной снижения точности расчета начальных участков интегральных кривых по правилу трапеций является увеличение погрешности суммы при малом числе учитываемых ординат одинаковой точности.

В большинстве случаев этот фактор не сказывается заметно на результатах вычисления, так как ошибки снятия ординат обычно малы по сравнению с ошибками интегрирования. Но все же возможны и такие условия, когда эти ошибки приобретут решающее значение. Поэтому рассмотрим их особенности все же следует.

Для нахождения суммы ординат при построении интегральных кривых по правилу трапеций применяются два способа. По первому способу все ординаты сначала суммируют попарно, а затем их суммы складывают последовательно, начиная с основной. При этом избегается необходимость введения обычных поправок на полусумму крайних ординат и умножения на два исправленных сумм для перехода от половины к целому шаговому. По второму способу все ординаты складывают последовательно, затем к поправке на полусумму крайних и результат умножают на два.

Нетрудно показать, что точность обоих способов совершенно одинакова. Действительно, в первом случае сумма ординат по правилу  $n$  получается в таком виде:

$$\sum_{i=1}^n y_i = y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n \quad (23, 1)$$

и, следовательно, средняя квадратичная ошибка этой суммы будет

$$\sigma = \sigma_i \sqrt{1^2 + (n-1)2^2 + 1^2} = 2\sigma_i \sqrt{n-0,5} \quad (23, 2)$$

Во втором случае исправленная сумма ординат по ту же определенно равна

$$\sum_{i=1}^n y_i = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{2}(y_0 + y_n) \quad (23, 3)$$

но так как при суммировании ординат и введении поправки на полусумму крайних вместо  $y_0$  и  $y_n$  подставляются одни и те же случайные значения, то и случайные ошибки оказываются тождественными и не складываются по закону дисперсий для каждой ординаты, а вычитаются непосредственно в их случайных значениях

$$\Delta \left( y_0 - \frac{1}{2} y_n \right) = \Delta(y_0) - \frac{1}{2} \Delta(y_n) = \frac{1}{2} \Delta(y_0)$$

Поэтому средняя квадратичная ошибка суммы (23, 3) должна считаться равной

$$\sigma = \sigma_i \sqrt{(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sigma_i \sqrt{n-0,5} \quad (23, 4)$$

После удвоения суммы ординат для учета наличия второго борта получим и удвоение средней квадратичной ошибки, что приведет к выражению (23, 2).

Таким образом, оба применяемых в настоящее время способа построения интегральных кривых по правилу трапеций обладают одинаковой точностью и выбор того или иного из них может быть полностью предоставлен на усмотрение вычислителя<sup>1</sup>.

Для нахождения погрешности суммы выражение (23, 2) должно быть разделено на произведение  $2n_{\text{стр}}$ , где  $n_{\text{стр}}$  — средняя ордината рассматриваемой части шаговому, получаемая делением ее площади на высоту. При этом получим

$$\delta_k = \frac{\sigma_i}{n_{\text{стр}}} \sqrt{n-0,5} = \frac{\sigma_i}{n_{\text{стр}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 - \frac{0,5}{n}} \quad (23, 5)$$

<sup>1</sup> Первый способ менее трудоемок и представляет больше возможностей для случайных графических погрешностей. С этой точки зрения он все же предпочтительнее.

Сравнивая эту формулу с выведенной выше (17, 9), замечаем, что она содержит поправочный множитель

$$\sqrt{1 - \frac{0,5}{n}} \quad (23)$$

которым мы ранее пренебрегали. Этот множитель появился здесь вследствие более тщательного учета ошибок, вносимых поправками крайних ordinат.

Нетрудно убедиться в том, что при  $n \geq 5$  величина этого множителя отличается от единицы не более, чем на 0,05. Поэтому пренебрежение им в расчетах полных площадей погруженных частей шпангоута, как и материал, когда число промежуточных между ordinатами достигнет  $n \approx 20$ , вполне допустимо. Однако при  $n = 2-3$  величина рассматриваемого множителя понижается до 0,86—0,91, что уже более существенно. Поэтому учет этого множителя, несколько повышающего оценку точности начальных участков интегральных кривых, хотя и не обязателен, но для более ответственных расчетов может быть рекомендован.

В остальном порядок расчета погрешностей масштаба Волжанки по правку трапеций не отличается от такого же расчета для площади всего шпангоута и не требует дополнительных пояснений или иллюстраций.

**Планиметрирование.** Если для построения интегральных кривых применяется планиметр, то часто возникает вопрос, как выгоднее проводить работу: обходить ли последовательно каждый участок между соседними ordinатами, а затем складывать результаты, или при обкатке по каждому материалю — начинать от основной, чтобы избежать накопления ошибок? Для ответа на этот вопрос следует рассмотреть каждую из погрешностей планиметрирования отдельно.

Как мы уже отмечали в § 20, инструментальная ошибка планиметра возникает по трем причинам: вследствие наличия зазоров в подшипниках светного барабана, возможности скольжения колеса по бумаге и неточности разбивки шкалы на его барабане. Первая причина приводит к тому, что в начале движения отсчет по шкале прибора может отстать от угла поворота колеса на некоторую величину, но при каждой перемене вращения эта ошибка исчезает и снова возникает и может быть сведена к нулю, если перед началом и в конце обкатки наравлении движения колеса относительно шкалы будут совпадать. Об этом и следует позаботиться при выборе относительного расположения «нулевой» точки и центра вращения прибора. Впрочем, при исправном малоинерционном планиметре возникающая по этой причине ошибка, даже если она не будет устранена, не прерывает одного деления попуска и обычно оказывается несущественной.

Вторая причина — скольжение по бумаге — носит более постоянный характер и вызывает накопление ошибок по все время

вращения колеса в любом направлении. Величина этой ошибки при прочих равных условиях пропорциональна сумме углов поворота светного барабана, а поэтому вызывается ею (относительная) погрешность отсчета не зависит от величины этих углов, а следовательно, и от площади планиметрируемой фигуры.

Наконец, последние на причин появления инструментальной ошибки планиметра — неточность шкалы — носит периодический характер. Так как число оборотов измерительного барабана отсчитывается абсолютно точно, то одна и та же последовательность ошибок этого рода повторяется при каждом его обороте, и поведенческие той или иной ошибки при каждом отсчете не зависят от площади и формы обкатываемой фигуры, но носит случайный характер.

Таким образом, для рассматриваемого вопроса решающее значение имеет только вторая из рассмотренных причин, которая и приводит нас к выводу о взаимосвязности инструментальной погрешности планиметра от выбранного порядка определения ordinат интегральной кривой.

Погрешности обкатки, как мы отмечали выше, при прочих равных условиях зависят от относительной длины периметра планиметрируемой фигуры  $m$ , следовательно, уменьшаются с увеличением ее площади. С этой точки зрения целесообразнее обкатывать заново всю площадь шпангоута по каждому материалю, а не суммировать площади отдельных ее участков. С другой стороны, при обкатке каждого участка в отдельности получаются независимые случайные ошибки, при суммировании которых по правку сложения дисперсий погрешность результата, наоборот, уменьшается. Поэтому для относительной оценки влияния обоих факторов обратимся к рис. 24 и введем следующие обозначения:

$$P_1 = s_1 + b - \text{внутренняя часть периметра нижнего участка шпангоута между точками } I - 0 - P;$$

$$P_2 = s_2 + y_2 + k - \text{то же, верхнего участка между точками } I - 2 - P - P;$$

$$\sigma_0 - \text{среднее квадратичное отклонение иглы планиметра.}$$

При обкатке каждого из участков в отдельности получим средние квадратичные ошибки их площадей

$$\sigma_1 = \sigma_0 (P_1 + y_1);$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 (P_2 + y_2),$$

а средняя квадратичная ошибка суммарной площади обоих участков будет

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{(P_1 + y_1)^2 + (P_2 + y_2)^2}. \quad (23, 7)$$

Если планиметрировать сразу всю площадь обоих участков, то средняя квадратичная ошибка этой площади окажется равной

$$\sigma' = \sigma_0 (P_1 + P_2). \quad (23, 8)$$

Для того чтобы первый способ оказался более точным, чем второй, необходимо неравенство

$$(p_1 + y_1)^2 + (p_2 + y_2)^2 < (p_1 + p_2)^2,$$

откуда может быть найдено условие

$$y_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 + p_1 p_2}. \quad (23, 9)$$

Знак минус перед вторым членом здесь опущен, так как он ведет к явно нереальным результатам.



Рис. 24. Порядок планирования обшивки.

В практике судостроительных расчетов это условие обычно не выполняется, и поэтому для повышения точности построения интегральных кривых рекомендуется планиметрировать всю площадь шпангоута по данной ватерлинии, начиная каждый раз от основной.

Сам по себе оценка погрешностей интегральных кривых, построенных с помощью планиметра, ничем не отличается от приведенной в § 20 и останавливаться на ней дальше нет необходимости.

**Грузовой размер.** Все сказанное выше о построении масштаба Бошняка может быть отнесено и к

вычислению, связанному с построением грузовой размер по ординатам строевой по ватерлинии. При пользовании правилом трапеций единственная особенность вычисления заключается лишь в том, что вследствие различия в формах отдельных ватерлиний оптимальный поправочный множитель  $\varphi$ , в формуле (17, 1), может оказаться не для всех ватерлиний одинаковым, как и его средняя квадратичная ошибка. Однако, как мы уже имели возможность убедиться, отличие этого множителя от единицы при интегрировании по длине судья обычно невелико, а его погрешность, если по сравнению с погрешностью интегрирования по высоте. Поэтому различие между ошибками ординат строевой по ватерлинии, как правило, оказывается возможным пренебречь.

Более заметную погрешность в результат расчета это допущение может внести лишь в том случае, когда все или многие ватерлинии вследствие большого различия подзора оконечностей существенно отличаются по длине. Это свойственно, например, обводам спортивных яхт, глиссирующих катеров и некоторых быстроходных кораблей. При таких условиях количество ординат, снимаемых по каждой ватерлинии, различно; следовательно, различными окажутся и поправочные множители, их погрешности и средние

квадратичные ошибки их сумм. В таком случае оценку точности построения грузовой размер необходимо искать по общим правилам сложения дисперсий неравоточных слагаемых и полученную среднюю квадратичную ошибку суммы отнести к средней ординате по данной ватерлинии, которая, в свою очередь, может быть найдена путем деления текущего водонизменения на отстояние данной ватерлинии от основной. Вся работа, таким образом, усложняется, но выполнение ее не встречает принципиальных затруднений.

Процесс планиметрирования строевой по ватерлинии ничем не отличается от процесса планиметрирования шпангоута, но если при построении масштаба Бошняка теоретические обводы шпангоута считаются достоверными, а ошибки обшивки возникают только вследствие случайных отклонений иглы планиметра от оси карандашной линии на чертеже, то сама строевая по ватерлинии уже строится по случайным ординатам, вычисленным с некоторыми неизбежными ошибками. Поэтому средняя квадратичная погрешность любой ординаты грузовой размер должна включать средние квадратичные погрешности трех видов:

- $\delta_1$  — инструментальная погрешность планиметра;
- $\delta_2$  — погрешность обшивки строевой по ватерлинии;
- $\delta_3$  — погрешность самих ординат строевой по ватерлинии или, как бы говоря, средняя квадратичная погрешность площадей тех ватерлиний, по которым построен данный участок строевой.

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{\sum \alpha_i^2}}{\sum s_i}, \quad (23, 10)$$

где  $\alpha_i$  — средняя квадратичная ошибка площади ватерлинии  $i$ ;  
 $S_i$  — ее площадь.

Для получения средней квадратичной погрешности грузовой размер дисперсии всех указанных погрешностей должны складываться

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}.$$

Как и при применении правила трапеций, эта погрешность уменьшается с увеличением погруженной части корпуса, т. е. с увеличением осадки.

## § 24. Расчет координат центра ватерлинии

Положение центра ватерлинии судна при любой осадке находится как положение центров тяжести соответствующих плоских фигур: строевых по ватерлинии и по шпангоутам. Точно так же

находится и абсцисса центра тяжести любой ватерлинии, с которой мы и начнем.

**Абсцисса центра тяжести ватерлинии.** Для определения абсциссы  $x_c$  по правилу трапеций, по аналогии с наложенным в § 17, можно воспользоваться следующей формулой:

$$x_c = 2\varphi \frac{l}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i (n-i)}{\sum_{i=0}^n \beta_i}, \quad (24, 1)$$

где  $\varphi$  — поправочный множитель к обычному правилу трапеций;  
 $l$  — полуширина судна;  
 $n$  — число промежутков между теоретическими шпангоутами, приходящееся на полуширину судна;  
 $i$  — номер теоретического шпангоута, считан от носового перпендикуляра ( $0 < i < 2n$ );  
 $\Sigma$  — знак исправленной суммы.

Так как величины  $l$ ,  $n$  и  $i$  достоверны, то погрешность абсциссы центра тяжести  $x_c$  может возникнуть только вследствие неточности метода интегрирования и наличия случайных ошибок в определенных ординат  $\beta_i$

$$\delta(x_c) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad (24, 2)$$

где  $\delta_1 = \delta_1(\varphi)$  — средняя квадратичная погрешность правила трапеций;

$\delta_2 = \delta_2 \left[ \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i (n-i)}{\sum_{i=0}^n \beta_i} \right]$  — средняя квадратичная погрешность функции ординат, стоящей здесь в квадратных скобках<sup>1</sup>.

Поскольку в формуле (24, 1) правило трапеций применяется дважды, при интегрировании ординат и их факторов моментов, то и систематические погрешности интегрирования  $1 - \varphi$  могли бы вычисляться отдельно для каждой из этих сумм. Но так как обе эти погрешности зависят только от формы кривой и числа ординат, но не от величины последних, то представляется более целесообразным, следуя примеру В. Г. Власова (5—350), вычислять заранее и указать в таблице непосредственно готовый результат их сложения. Содержание табл. XI и XII полностью заимствовано из указанной работы В. Г. Власова. Пользователи ими в свете наложенного в § 17 не требуют особых пояснений.

<sup>1</sup> Рассмотреть эту функцию как отклонение двух случайных величин, дисперсия погрешностей которых равна сумме дисперсий числителя и знаменателя, в данном случае нельзя. Так как числитель и знаменатель не независимы.

Таблица XI

Погрешности правила трапеций при определении координат центра тяжести и моментов ватерлинии, %

n	№ кривых по табл. VIII						
	1	2	3	4	5	6	7
Абсцисса центра тяжести							
10	-0,6	-0,7	-0,6	-0,8	-1,8	-1,3	-0,4
8	-0,9	-1,1	-1,0	-1,2	-2,6	-2,0	-0,8
6	-1,6	-2,0	-1,8	-2,1	-4,1	-3,4	-1,2
Ординаты центра тяжести							
10	0	+0,2	+0,1	+0,3	-1,0	+0,7	+0,6
8	0	+0,3	+0,2	+0,4	+1,3	+1,1	+0,7
6	0	+0,6	+0,4	+0,8	+1,9	+1,8	+0,7
Момент ватерлинии относительно продольной оси							
10	0	0	0	0	0	0	—
8	0	0	0	0	-0,1	0	—
6	0	0	0	0	-0,1	0	—
Момент ватерлинии относительно поперечной оси							
10	0	-1,1	-0,9	-1,4	-4,6	-3,1	—
8	0	-1,7	-1,4	-2,1	-6,4	-4,8	—
6	-0,1	-3,0	-2,5	-3,8	-9,7	-8,1	—

Несколько сложное определение погрешности функции ординат

$$f = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i (n-i)}{\sum_{i=0}^n \beta_i}. \quad (24, 3)$$

Здесь имеем функцию многих независимых переменных  $\beta_i$ . Для определения средней квадратичной ошибки таких функций выше была выведена формула (10, 11), которой мы теперь и воспользуемся. Так как средняя квадратичная ошибка  $\sigma_i$  для всех ординат одинакова, то выражение (10, 11) может быть переписано в таком виде:

$$\sigma(f) = \sigma_i \sqrt{\sum_{i=0}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \beta_i} \right)^2}. \quad (24, 4)$$

Таблица  
Погрешности правила Чебышева при определении  
координат центра тяжести и моментов инерции, %

2n	M точек по табл. VIII						
	1	2	3	4	5	6	7
Абсциссы центра тяжести							
9	-7,2	-4,2	-3,6	-3,3	-2,3	-1,9	—
7	-0,7	-1,3	-1,1	-1,2	-0,3	+0,2	—
Ординаты центра тяжести							
9	+0,4	0	-0,9	-0,1	-0,3	-0,7	—
7	-1,8	-0,1	+0,7	+0,1	-0,5	-1,1	—
Моменты инерции относительно параллельной оси							
9	+2,7	+0,1	-2,4	-0,5	0	-0,8	—
7	-3,2	-0,6	+1,0	+0,9	-0,1	-1,0	—
Моменты инерции относительно вертикальной оси							
9	-0,2	0	+0,6	+0,1	+1,4	-1,6	—
7	+1,9	+0,1	-0,1	-0,2	+2,3	+3,6	—

Дифференцируя функцию (24, 3) по любой из ординат  $y_i$ , получим

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{(n-i) \sum_{j=0}^{2n} y_j - \sum_{j=0}^{2n} y_j (n-i)}{\left[ \sum_{j=0}^{2n} y_j \right]^2}$$

Выразим входящую сюда сумму ординат через среднюю ординату  $y_{cp}$ , как мы это уже неоднократно практиковали,

$$\sum_{j=0}^{2n} y_j = 2ny_{cp}$$

а сумму факторов моментов заменим равном ей выражением из основной формулы (24, 1)

$$\sum_{j=0}^{2n} y_j (n-i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \sum_{j=0}^{2n} y_j$$

После этих подстановок получим

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \left[ (n-i) - \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \right] \frac{1}{2ny_{cp}}$$

Возводя это равенство в квадрат и складывая его значения при всех возможных  $i$ , найдем

$$\sum_{i=0}^{2n} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 = \left[ \sum_{i=0}^{2n} (n-i)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \sum_{i=0}^{2n} (n-i) + \right. \\ \left. + 2n \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \right)^2 \right] \frac{1}{4n^2 y_{cp}^2}$$

Первый член правой части этого равенства представляет собой сумму ряда квадратов натуральных чисел в пределах от  $-n$  до  $+n$  и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{2n} (n-i)^2 = 2 \sum_{i=0}^n (n-i)^2 = 2 \frac{\pi(\pi+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Второй член правой части включает сумму первых степеней натуральных чисел в тех же пределах и, следовательно, равен нулю

$$\frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \sum_{i=0}^{2n} (n-i) = 0$$

Таким образом, равенство (24, 4) приобретает следующее выражение:

$$\sigma(f) = \frac{\sigma_i}{2ny_{cp}} \sqrt{\frac{\pi(\pi+1)(\pi+1)}{3} + 2n \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi} \right)^2}$$

или после простых преобразований

$$\sigma(f) = \frac{\sigma_i}{2ny_{cp}} \cdot \frac{1}{\varphi} \sqrt{\varphi^2 \frac{\pi(\pi+1)(2n+1)}{3n} + \frac{1}{2} \pi \left( \frac{y_i}{l} \right)^2}$$

Для перехода к средней квадратичной погрешности это выражение должно быть разделено на основную функцию (24, 3), которая согласно (24, 1) может быть записана в таком виде:

$$\frac{\sum_{j=0}^{2n} y_j (n-i)}{\sum_{j=0}^{2n} y_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i}{l} \cdot \frac{\pi}{\varphi}$$

Следовательно:

$$\delta_x = \frac{\sigma_1}{k_{\text{пр}}} \cdot \frac{l}{x_1} \sqrt{\psi^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^3} + \frac{1}{2n} \left(\frac{\delta_1}{l}\right)^2}. \quad (24, 5)$$

Таким образом, возможность пользования формулой (24, 2) вполне обоснована. Практическое значение, однако, имеет не столько погрешность абсциссы центра тяжести материи, как ее средняя квадратичная ошибка, выраженная в линейных мерах, значение которой необходимо для определения погрешности плет дифференцирующих моментов при измерениях осадки судна. Особенно удобно непосредственное определение средней квадратичной ошибки в тех случаях, когда абсцисса центра тяжести материи близка к нулю, а ее погрешность согласно (24, 5) стремится к бесконечности.

Для преодоления средней квадратичной ошибки достаточно умножить обе части равенства (24, 2) на  $x_1$ , после чего получим

$$\sigma(x_1) = x_1 \cdot \delta(x_1) = \sqrt{x_1^2 \delta^2 + \left(\frac{\sigma_1}{k_{\text{пр}}} \cdot l\right)^2 \left[ \psi^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^3} + \frac{1}{2n} \frac{x_1^2}{l^2} \right]}. \quad (24, 6)$$

При  $x_1$ , близком к нулю, очевидно, первым и последним членами под знаком корня можно пренебречь и перенести эту формулу в свернутом виде

$$\sigma(x_1) = \psi \frac{\sigma_1}{k_{\text{пр}}} \cdot \frac{l}{n} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{3n}}. \quad (24, 7)$$

Последние два равенства дают всегда конечные результаты. Абсцисса центра величины. Абсцисса центра величины определяется по строеной по шпангоутам совершенно так же, как абсцисса центра тяжести материи по ее обводу. Поэтому все приведенные выше рассуждения могут быть перенесены и на решение этой новой задачи. Необходимо лишь учесть, что строеной по шпангоутам измеряется по результатам расчета их площадей, и ее ординаты содержат все те ошибки, которые возникают при этом расчете. Следовательно, если для вычисления абсциссы центра величины применяется непосредственно численные результаты расчета строеной по шпангоутам, то в формулах (24, 5) и (24, 6) под величиной  $\sigma$ , следует понимать именно среднюю квадратичную ошибку площадей шпангоутов; если же строеной сначала вычерчена, а затем с нее снимаются ординаты для расчета аб-

сциссы центра величины, то средние квадратичные ошибки последних должны находиться по правилу сложения дисперсий

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad (24, 8)$$

где  $\sigma_{11}$  — средняя квадратичная ошибка вычисленных площадей шпангоутов;

$\sigma_{12}$  — средняя квадратичная ошибка снятия ординат с чертежа строеной по шпангоутам.

Такие случаи неизбежно встречаются во всех расчетах непотопляемости, постановки на волю и посадки судна с дифферентом. Возможно также применение способа, указанного в конце § 23, по которому величина чертежа умножается на величину специального члена в сумму дисперсий погрешностей результата. Однако этот способ в применении к расчетам координат центра величины усложнит вычисления. Поэтому он не может быть рекомендован.

Апликата центра величины. Аликата центра величины может быть определена по формуле, аналогичной (24, 1) после замены в ней соответствующих обозначений

$$z_c = \psi \frac{T}{n} \frac{\sum_{i=0}^n S_i y_i}{\sum_{i=0}^n S_i}. \quad (24, 9)$$

где  $z_c$  — аликата центра величины;

$\psi$  — поправочный множитель правила трапеций;

$T$  — осадка судна;

$i$  — номер материи, считая от основной ( $0 < i < n$ );

$S_i$  — площадь этой материи;

$\Sigma$  — знак исправленной суммы.

По аналогии с предыдущим могут быть написаны и выражения для средних квадратичных погрешностей аликаты центра величины

$$\delta(z_c) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad (24, 10)$$

где  $\delta_1 = \delta_1(\psi)$  — погрешность интегрирования по правилу трапеций;

$$\delta_2 = \delta_2 \left[ \frac{\sum_{i=0}^n S_i y_i}{\sum_{i=0}^n S_i} \right] \text{ — погрешность функций площадей и их моментов.}$$

Расчет первой из этих погрешностей с помощью табл. XI не встречает затруднений. Вычисление же второй погрешности

может быть выполнено по тому же методу, который был приведен выше, с учетом лишь уменьшившихся пределов суммирования координат. При этих условиях

$$\sum_{m=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\sum_{m=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

и, следовательно,

$$\delta_2 = \frac{\sigma_z}{\sigma_{\text{ср}}} \cdot \frac{T}{z_c} \times \\ \times \sqrt{\psi^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{z_c}{T} \psi \frac{n+1}{n^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{z_c}{T}\right)^2}. \quad (24, 11)$$

Как и при определении абсциссы, большее практическое значение имеет средняя квадратичная ошибка, а не погрешность алискаты центра величины. Но в данном случае  $z_c$  всегда связано с осадкой  $T$ , и поэтому формулы (24, 10) и (24, 11) вполне удобны для расчетов и не требуют преобразований. Следует, однако, заметить, что вычисления алискаты центра величины, как и всякий расчет, связанный с интегрированием по высоте, при пользовании правилом трапеций дает существенные ошибки, особенно при малом числе ordinat (при малых осадках). Предпочтительнее для этой цели пользоваться планиметром или интегратором. Рассмотрим первый из этих способов как наиболее доступный для любого конструкторского бюро, но несомненно забытый многими специалистами.

**Планиметрирование грузовой высоты.** В результате интегрирования грузовой высоты в пределах от основной до любой ватерлинии, соответствующей осадке  $T$ , получается численное значение величины

$$\int_0^T V dz, \quad (24, 12)$$

где  $V_z = \int_0^z S dz$  — водоизмещение при переменной осадке  $z$ .

Интегрируя это выражение по частям [15—25], получим

$$\int_0^T V dz = [zV_z]_0^T - \int_0^T S z dz,$$

или, так как

$$\int_0^T S z dz = Vz_c,$$

где  $z_c$  — абсцисса центра величины,

$$\int_0^T V dz = T \cdot V - z_c V,$$

откуда

$$z_c = T - \frac{1}{V} \int_0^T V dz. \quad (24, 13)$$

Таким образом, для нахождения алискаты центра величины достаточно найти площадь, заключенную между кривой грузовой высоты по данной ватерлинии и осью  $oz$ , разделить эту площадь на ее крайнюю ординату и вычесть результат из действующей осадки.

Так как при этих вычислениях осадка судна задана (достоверно), то средняя квадратичная ошибка алискаты центра величины получается равной средней квадратичной ошибке второго члена выражения (24, 13), которая в свою очередь может быть найдена по ее погрешности

$$\delta(T - z_c) = \sqrt{2\delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \delta_3^2}, \quad (24, 14)$$

где  $\delta_1$  — средняя квадратичная погрешность планиметра (инструментальная);

$\delta_2$  — средняя квадратичная погрешность обкатки;

$\delta_3$  — средняя квадратичная погрешность графического изображения строевой по ватерлинии.

Первые две погрешности подробно рассмотрены в § 20. Их дисперсии здесь удаляются, так как в процессе нахождения алискаты центра величины планиметр применяется дважды: для обкатки исходной кривой — строевой по ватерлинии — и для обкатки грузовой высоты. Получающиеся при каждом планиметрировании ошибки взаимозависимы, поэтому их дисперсии складываются.

Влияние погрешности графического изображения строевой по ватерлинии может быть учтено следующим способом.

Так как  $V_z = \int_0^z S dz$ , где  $S$  — площадь ватерлинии при осадке  $z$ , то равенство (24, 13) может быть переписано в таком виде:

$$T - z_c = \frac{\int_0^T \int_0^z S dz dz}{\int_0^T S dz}. \quad (24, 15)$$



Имея функцию одной случайной переменной  $S$ , средняя квадратичная ошибка которой согласно (10, 5) может быть вычислена так:

$$\sigma(T - z_c) = \frac{d(T - z_c)}{dS} \sigma_s$$

где  $\sigma_s$  — средняя квадратичная ошибка площадей ватерлиний. Произведя дифференцирование выражения (24,15) по  $S$  получим

$$\sigma(T - z_c) = \frac{\int_b^T S dz \int_b^T dz dz - \int_b^T \int_b^T S dz dz \int_b^T dz}{\left[ \int_b^T S dz \right]^2} \sigma_s$$

или после простых преобразований с использованием равенств (24, 15)

$$\sigma(T - z_c) \sim T \left( z_c - \frac{1}{2} T \right) \frac{\sigma_s}{V} - \left( z_c - \frac{1}{2} T \right) \frac{\sigma_s}{S_{cp}}, \quad (24, 16)$$

где  $S_{cp} = \frac{V}{T}$  — площадь средней ватерлинии.

Следовательно,

$$\delta_2 = \frac{z_c - \frac{1}{2} T}{T - z_c} \cdot \frac{\sigma_s}{S_{cp}}, \quad (24, 17)$$

а средняя квадратичная погрешность  $T - z_c$  с учетом метода интегрирования

$$\delta(T - z_c) = \sqrt{2\delta_1^2 + 2\delta_2^2 + \left( \frac{z_c - \frac{1}{2} T}{T - z_c} \cdot \frac{\sigma_s}{S_{cp}} \right)^2}. \quad (24, 18)$$

Для перехода к средней квадратичной погрешности аппликаты центра величины выражение (24, 18) должно быть умножено на отношение

$$\frac{T - z_c}{z_c}$$

которое вытекает непосредственно из равенства средних квадратичных ошибок. Поэтому окончательно

$$\delta(z_c) = \sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left( \frac{T - z_c}{z_c} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{T}{z_c} \right)^2 \left( \frac{\sigma_s}{S_{cp}} \right)^2}. \quad (24, 19)$$

Преимущество последнего способа покажем на примерах.

Пример 1. Найти возможную погрешность аппликаты центра величины пассажирского теплохода, имеющего коэффициент полноты водозаполнения

$\delta_0 = 0,72$ , осадку  $T = 5$  м и  $z_c = 2,9$  м, если все расчеты выполнены только по правилу трапеций, при весьма неточных (по счетам основной).

Формы стрелок по ватерлиниям здесь судна больше всего сходны с кривой § 21, но мест осадки не в сторону кривой  $T$  и  $S$ . Поэтому гидроаэриальный коэффициент в правую трапецию будем считать равным (по табл. XI)

$$\phi = 1 - \frac{1,0 - 2 \cdot 1,2 - 2,0}{100 \cdot 4} = 1,015$$

и его среднюю квадратичную погрешность

$$\delta_\phi = \sqrt{\frac{0,01^2 + 2 \cdot 0,01^2 + 0,01^2}{4}} = 0,015.$$

Среднюю квадратичную погрешность расчета площадей ватерлиний греем согласно § 17

$$\frac{\sigma_s}{S_{cp}} = 0,08\%.$$

а погрешность функции площадей найдем по формуле (24, 17)

$$\delta_1 = 0,08 \frac{5}{2,9} \sqrt{1,015^2 \frac{0,17}{0,64} - \frac{2,0}{5} \cdot 1,015 \frac{0}{24} + \frac{1}{8} \left( \frac{2,9}{5} \right)^2} = 0,014\%.$$

Погрешность метода интегрирования  $\delta_2$  оказывается среднелинейной, а средняя квадратичная погрешность аппликаты центра величины  $\delta(z_c) = \delta_2 = 0,05\%$ . Возможная ее погрешность (при  $\gamma = 0,999$ ) достигает  $\Delta z_c = \pm 0,05\%$ , чему соответствует возможная ошибка  $\pm 0,05$  мм.

Если при расчете на брант введем указанный выше поправочный множитель, то возможная погрешность аппликаты уменьшится до  $-1,5 \pm 1,9 = -3,4 \pm 0,4\%$ , а ее возможная ошибка будет лежать в пределах от  $-100$  до  $+14$  мм, что совершенно недопустимо.

Пример 2. Решить ту же задачу в предположении, что элементы центра величины определены методом клинметривания грузного размера, который был заранее построен методом клинметривания стрелок по ватерлиниям.

Погрешности интегрирования сохраняем те же, которые были выше найдены в § 21 (пример 1).

$$\delta_1 = 0,14\%; \quad \delta_2 = 0,38\%.$$

а погрешность орднат стрелок по ватерлиниям греем, как и в предыдущем примере,

$$\frac{\sigma_s}{S_{cp}} = 0,08\%.$$

Подставляя все указанные значения в формулу (24, 18), получим

$$\delta(z_c) = \sqrt{2(0,14^2 + 0,38^2) \left( \frac{5 - 2,9}{2,9} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{5}{2,9} \right)^2 0,08^2} = 0,16\%.$$

Таким образом, средняя квадратичная погрешность аппликаты центра величины, определенной методом клинметривания, получилась в 2,5 раза меньше, чем по правилу трапеций. Систематические ошибки здесь также отсутствуют, поэтому возможная погрешность не превышает  $\pm 0,5\%$ , чему соответствует возможная ошибка не более  $\pm 15$  мм, в 6 раз меньше, чем в примере 1.

Не всегда преимущества метода планиметрирования грузового размера могут сказаться так резко, но во всех случаях этот метод дает большую точность по сравнению с правилом трапеций и поэтому может быть настоятельно рекомендован.

### § 25. Расчет метacentрических радиусов

Водонмещение и момент инерции действующей ватерлинии, которыми определяется величина метacentрического радиуса, строго говоря, связаны между собой ординатами действующей ватерлинии. Но если момент инерции зависит только от этих ординат, то величина водонмещения и большая степень определяется осадкой и ординатами многих ватерлиний, лежащих ниже действующей. Поэтому с очень небольшим запасом можно считать эти два компонента расчета независимыми и определять дисперсию погрешностей метacentрического радиуса как сумму дисперсий погрешностей момента инерции и водонмещения

$$[\delta(R)]^2 = \delta(I)^2 + \delta(V)^2. \quad (25, 1)$$

**Малый метacentрический радиус.** Момент инерции ватерлинии относительно продольной оси обычно находится по правилу трапеций или Чебышева. Но, как мы видели выше, по способам вычисления ошибок эти методы практически не отличаются друг от друга, а некоторые замечания, сделанные в § 19 относительно расчета площади по правилу Чебышева, легко могут быть перенесены и на расчеты моментов инерции. С другой стороны, как показал В. Г. Власов [5—351], методические погрешности, возникающие при пользовании правилом Чебышева с обычным числом ординат  $2n = 7+9$  для рассматриваемой цели, существенно больше, чем при правиле трапеций (см. таб. XI и XII). Увеличение же числа ординат до  $18+20$ , когда точность обоих правил сравнима, лишает правило Чебышева основного его преимущества — пониженной трудоемкости. Поэтому здесь будем рассматривать только погрешности расчета момента инерции действующей ватерлинии по правилу трапеций.

Отдельно важно отметить, что, по данным В. Г. Власова, при вычислении момента инерции ватерлинии относительно ее продольной оси правило трапеций в подавляющем большинстве случаев не дает заметных систематических ошибок (см. таб. XI), и только для кривой 5, и то лишь при числе ординат  $2n < 16$ , была обнаружена погрешность, не превышавшая  $-0,1\%$ . Поэтому формула правила трапеций для этого вычисления может применяться без поправочного коэффициента  $\phi$

$$I_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{n} \cdot \sum_{i=0}^{2n} \delta_i^2. \quad (25, 2)$$

Средняя квадратичная ошибка момента инерции в этом случае определяется только точностью снятия ординат с теоретического чертежа

$$\sigma(I_x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{n} \sqrt{\sum_{i=0}^{2n} [\sigma(\delta_i)]^2}$$

или, так как  $\sigma(\delta_i^2) = 3\sigma_i^2\sigma_i$  и средняя квадратичная ошибка  $\sigma_i$  одинакова для всех ординат,

$$\sigma(I_x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{n} \cdot 3\sigma_i \sqrt{\sum_{i=0}^{2n} \delta_i^2}. \quad (25, 3)$$

Разделив это выражение на равенство (25, 2), получим среднюю квадратичную погрешность рассматриваемого момента инерции

$$\delta(I_x) = 3\sigma_i \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{2n} \delta_i^2}}{\sum_{i=0}^{2n} \delta_i^2}. \quad (25, 4)$$

Эта формула, вполне корректная с математической точки зрения, слишком громоздка для практического применения. Поэтому попытаемся ее упростить, и прежде всего приведем числитель и знаменатель к безразмерному виду, чтобы исключить их зависимость от величины судна и масштаба чертежа. Для этого достаточно разделить числитель и знаменатель на квадрат максимального значения ординаты  $y_{max}$ , после чего получим

$$\delta(I_x) = 3 \frac{\sigma_i}{y_{max}} \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{\delta_i}{y_{max}}\right)^2}}{\sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{\delta_i}{y_{max}}\right)^2}. \quad (25, 5)$$

Далее рассмотрим возможные пределы изменения величин входящего сюда отношения

$$K = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{\delta_i}{y_{max}}\right)^2}}{\sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{\delta_i}{y_{max}}\right)^2}. \quad (25, 6)$$

Одним из пределов возможных обводов ватерлинии судна является прямоугольник, соответствующий обводу простейшего

полюса. При этом  $y_i: y_{\max} \rightarrow 1 \rightarrow \cos \alpha$  и, следовательно,  $K$  зависит только от числа ординат  $2n$

$$K_n = \frac{\sqrt{2n-1}}{2n-1^2} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

В качестве другого предела, даже выходящего за границы возможного, рассмотрим ватерлинию, образованную двумя треугольниками, сложенными основаниями. В этом случае при равных промежутках между шпангоутами безразмерные ординаты  $y_i: y_{\max}$  могут быть представлены в виде двух рядов натуральных чисел от 0 до  $n$  и обратно, деленных на наибольшее из них, и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{y_i}{y_{\max}} \right)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{2n+1} \right)^2 = \frac{2}{n^2} \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

и

$$\sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{y_i}{y_{\max}} \right)^4 = \frac{2}{n^4} \cdot \frac{n}{30} (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

После подстановки и простых преобразований получим

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{4}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{(2n+1)(3n^2+3n-1)}{(n+1)^3}}$$

Так как выражения для  $K_n$  и  $K$  имеют общий множитель  $\sqrt{2n}$ , то равенство (25, 6) удобно переписать в таком общем виде:

$$\delta(I_x) = 3 \frac{\alpha_1}{y_{\max}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2n}}, \quad (25, 7)$$

где коэффициент  $k = K \sqrt{2n}$  может меняться главным образом в зависимости от формы ватерлинии и, в сравнительно более узких пределах, от числа снимаемых ординат. Для наиболее характерных кривых, имеющих аналитическое выражение, значения этого коэффициента приведены в табл. XIII. Для прямоугольника

Постоянные коэффициенты  $k$  для расчета погрешностей момента инерции

Таблица XIII

n	№ кривых по табл. VIII					
	1	2	3	4	5	6
10	1,27	1,37	1,34	1,27	1,21	1,12
8	1,33	1,36	1,32	1,25	1,19	1,10
6	1,39	1,32	1,38	1,21	1,15	1,07

$k = 1,0$ , для двух треугольников  $k = 1,6$  при  $n = 6$  и  $k = 1,7$  при  $n = 10$ .

На определении погрешностей водонемещения здесь останавливаться не будем, так как они уже были рассмотрены в § 22. Отметим только, что погрешность момента инерции ватерлинии по правилу трапеций обычно оказывается соизмеримыми только с погрешностями водонемещения, определенного планиметром. Поэтому, если и момент инерции и водонемещение определялись по правилу трапеций, то погрешность малого метacentрического радиуса может считаться равной погрешности водонемещения, а лишь при более точном определении водонемещения за вычисление метacentрического радиуса зависит в точности расчета момента инерции ватерлинии.

Большой метacentрический радиус. Ошибки в определении большого метacentрического радиуса, наоборот, возникают главным образом вследствие неточности расчета момента инерции ватерлинии относительно поперечной оси. Его погрешности могут иметь как случайный, так и систематический характер.

По данным В. Г. Валцова (табл. XI) систематические ошибки интегрирования по правилу трапеций при расчете момента инерции ватерлинии относительно поперечной оси могут значительно превышать такие же ошибки в расчетах площадей и центров тяжести. Поэтому учет их по методу, изложенному в § 17, совершенно необходим, как и введение в формулу трапеций соответствующего поправочного множителя,

$$I_y = 2\varphi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \kappa_i, \quad (25, 8)$$

где  $\kappa_i$  — остатоке данной ординаты от нуля

$$\kappa_i = (n-i) \frac{1}{n};$$

$n$  — число промежутков между ординатами на полушире судна  $B$ ;

$i$  — номер ординаты, считая с носа ( $0 < i < 2n$ ).

После подстановки получаем

$$I_y = 2\varphi \left( \frac{1}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^{2n} (n-i)^2 y_i, \quad (25, 9)$$

Дисперсия погрешностей этого выражения равна сумме дисперсий погрешностей интегрирования  $\delta_1 = \delta_1$  (4) и суммы ординат, умноженных на соответствующие множители  $(n-i)^2$ :

$$\delta_y = \delta_y \left[ \sum_{i=1}^{2n} (n-i)^2 y_i \right], \quad (25, 10)$$

Средняя квадратичная ошибка этой суммы находится очень просто

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n} (\pi - i)^2 \sigma_i^2} = \sigma_i \sqrt{2 \sum_{i=1}^{2n} (\pi - i)^2} = \\ = \sigma_i \sqrt{2 \frac{n}{35} (\pi + 1)(2 + 1)(3\pi^2 + 3\pi - 1)}, \quad (25, 11)$$

а ее средняя квадратичная погрешность — путем деления (25, 11) на значение той же суммы, которое проще определить из равенства (25, 9). После простых преобразований получаем

$$\delta_s = 2\pi \frac{\sigma_i^2}{I_p} \cdot \frac{1}{n^3} \sqrt{\frac{(\pi + 1)(2\pi + 1)(3\pi^2 + 3\pi - 1)}{15}}, \quad (25, 12)$$

и средняя квадратичная погрешность момента инерции находится, как обычно,

$$\delta(I_p) = \sqrt{\delta_s^2 + \delta_p^2} \quad (25, 13)$$

Дальнейший расчет пояснений не требует.

Следует заметить, что погрешности метода интегрирования при расчете  $I_p$  могут быть уменьшены примерно вдвое заменой правила трапеций правилом Чебышева, даже в том случае, если и в то и в другое правило будут вводиться поправочные множители  $\varphi$ . Однако при этом погрешности интегрирования оказываются существенно меньшими, чем погрешности суммы ординат, а так как применение правила Чебышева по общей трудоемкости чертежной и вычислительной работы оправдывается только при числе ординат, значительно меньшем, чем при расчете по правилу трапеций, то конечный результат обычно оказывается не в пользу правила Чебышева. Только в тех случаях, когда числа ординат примерно одинаковы или когда рекомендуемые нами поправочные множители не вводятся, правило Чебышева может дать такую же и даже несколько большую точность, чем правило трапеций. Выделение же поправочного множителя неравномерно погреш, чем вычерчивание специального теоретического корпуса, необходимое для применения правила Чебышева.

### § 26. Остойчивость на конечных углах крена

Расчет статической устойчивости на конечных углах крена состоит из ряда последовательно повторяющихся операций, сходных с теми, ошибки которых уже были нами рассмотрены выше. Некоторые их особенности, которые все же существуют, и должны быть вынесены в настоящем параграфе.

Центр тяжести действующей интерлинии. В отличие от прямого положения судна, т. е. действующей интерлинии при закло-

нении может сместиться не только по ее длине, но и поперечном направлении. Определение величины этого смещения положено в основу расчета посадки судна с креном как по оригинальному способу А. И. Крылова, так и по более распространенному его варианту — методу Дарнье. Ошибки этого определения отражаются на всех последующих расчетах особенностей на конечных креновых.

Для вычисления по правилам трапеций или Чебышева ординат центра тяжести  $y$ , замкнутой фигуры, осязательной кривой дельта кривой и осью абсцисс, может служить следующая формула:

$$y_c = \frac{1}{2} \varphi \frac{\sum_{i=1}^{2n} y_i^2}{\sum_{i=1}^{2n} y_i}, \quad (26, 1)$$

где  $2n$  — число промежуточных между ординатами;

$\varphi$  — поправочный коэффициент способа интегрирования.

Этот коэффициент и его средняя квадратичная погрешность  $\delta_y$  определяются так же, как было описано в § 17 для других шлей. Необходимые для этого значения отклонений  $\epsilon$  указаны в табл. XI и XII.

Средняя квадратичная погрешность дроби, входящей в выражение (26, 1),

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{2n} y_i^2}{\sum_{i=1}^{2n} y_i} \quad (26, 2)$$

находится по формуле (10, 11) с учетом того, что при любом частном значении  $y_i$  производная

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{2y_i}{\sum_{i=1}^{2n} y_i} - \frac{\sum_{i=1}^{2n} y_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{2n} y_i\right)^2} = \frac{1}{y_{cp}} \left(y_i - \frac{1}{2} f\right),$$

где  $y_{cp} = \frac{S}{l}$  — средняя ордината рассматриваемой фигуры, имеющей площадь  $S$  и длину  $l$ .

Возведя это равенство в квадрат и складывая полученные выражения для всех  $2n$  возможных значений  $y_i$ , получим

$$\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{df}{dy_i}\right)^2 = \left(\frac{1}{y_{cp}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{2n} y_i^2 - f \cdot \sum_{i=1}^{2n} y_i + \frac{1}{2} n f^2\right)$$

Но согласно (26, 2) произведение  $f \cdot \sum_{i=0}^{2n} y_i = \sum_{i=0}^{2n} y_i^2$ , и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{2n} \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{f}{\sin \varphi} \right)^2.$$

После подстановки этого выражения в формулу (10, 11), заменив  $f$  его значением из равенства (26, 2), получим среднюю квадратичную ошибку функции  $f$

$$\sigma(f) = \frac{2}{\varphi} \cdot \frac{\sigma_y}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sigma_f}{\sqrt{2\pi}}, \quad (26, 3)$$

где  $\sigma_f$  — средняя квадратичная ошибка снятия ординат.

Разделив последнее равенство на функцию  $f$ , найдем среднюю квадратичную погрешность

$$\delta_2 = \delta(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_f}{\sin \varphi}. \quad (26, 4)$$

Средняя квадратичная погрешность ординаты центра тяжести находится как обычно

$$\delta(y_c) = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}. \quad (26, 5)$$

Реальная ватерлиния наклоненного судна отличается от рассмотренной нами фигуры тем, что ее площадь расположена не по одну, а по обе стороны оси абсцисс; и притом она несимметрична относительно последней. Вследствие этого все ординаты снимаются с чертежа отдельно на правый и на левый борт, а частота их удваивается. При таких условиях, как известно, погрешности среднего уменьшаются в  $\sqrt{2}$  раз (§ 5). Поэтому для расчетов устойчивости на конечных углах крена формула (26, 4) должна быть преобразована в следующую:

$$\delta_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma_f}{\sin \varphi}. \quad (26, 6)$$

На погрешность интегрирования  $\delta_1$  рассматриваемое обстоятельство влияния не оказывает.

**Момент инерции ватерлинии.** Аналогично должна быть исправлена формула (25, 13) для расчета погрешностей, момент инерции ватерлинии наклоненного судна, где составляющая  $\delta_4$  должна определяться по следующей формуле:

$$\delta_4(f_2) = \varphi \frac{\sigma_{\delta^2}}{f_2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15n}}. \quad (26, 7)$$

Следует заметить, что средняя квадратичная ошибка ординат  $\sigma_y$ , входящая в оба последних равенства, для наклонных ватерлиний должна считаться несколько большей (в 1,5—2 раза),

чем для ватерлиний прямого положения. Это увеличение ошибок связано с большей трудностью измерения отрезков, ограниченных пересечением с наклонными и ним наружными обводами, а также меньшей четкостью отметки нуля, от которого отсчитываются на чертеже ординаты по способу Дарвина.

**Метацентрический радиус.** Погрешности метацентрического радиуса в расчетах устойчивости на конечных углах крена определяются по обычной формуле

$$\delta(\rho) = \sqrt{[\delta(f_2)]^2 + [\delta(V)]^2}, \quad (26, 8)$$

но нужно иметь в виду, что погрешность водоизмещения  $\delta(V)$  здесь также несколько увеличена по сравнению с расчетами для прямого положения. Это увеличение ошибок происходит вследствие неточности определения высоты погруженного слоя при проведении равнообъемных ватерлиний.

Толщина  $l$  этого слоя обычно считается равной

$$l = \frac{1}{2} g_1 \cdot \Delta \delta, \quad (26, 9)$$

где  $\Delta \delta$  — угол между двумя последовательно проводимыми ватерлиниями.

Но вывод этой формулы основан на предположении о прямолинейности судна на участке между обводами рассматриваемых ватерлиний и о малости угла  $\Delta \delta$  между ними.

Учесть первую из этих ошибок в общем виде нет никакой возможности. Только в каждом конкретном случае можно установить численно, насколько фактический объем погруженного слоя оказался отличным от предполагаемого  $\Delta V = S^* l$ , где  $S^*$  — площадь вспомогательной ватерлинии, проведенной через центр тяжести ватерлинии предыдущего наклонения. Для этого необходимо, зная ординаты новой ватерлинии, сравнить ее площадь  $S^*$  с площадью  $S'$ . Полуразность этих площадей, умноженная на высоту слоя  $l$ , даст величину, весьма близкую к систематической ошибке его объема, а следовательно, и всего водоизмещения судна в данном положении

$$\epsilon(\Delta V) = \frac{S^* - S'}{2} l. \quad (26, 10)$$

Разделив это выражение на водоизмещение, получим его систематическую погрешность, возникающую по этой причине,

$$\epsilon_8(V) = -\frac{S^* - S'}{2V} l. \quad (26, 11)$$

Только для примостенных понтонов эта погрешность равна нулю. Для скругленных обводов спортивных яхт и бакин она может достигать 0,1—0,2% на каждый процент водоизмещения, который составляет объем погруженного слоя. Для судов

с обычными обводами она может иметь значения 0,01—0,03 водозмещения на каждые 10° наклонения.

Примерно такого же порядка погрешности вносятся пренебрежением отливки между склусом угла  $\Delta\theta$  и его дугой. Замена  $\sin \Delta\theta$  на  $\Delta\theta$  при  $\Delta\theta = 10^\circ$  вносит систематическую погрешность +0,5% к объему поправочного слоя, но так как объем по следующему обводу не превышает 1—2% водозмещения, то соответствующая погрешность водозмещения получается не более 0,01%.

Так как рассматриваемые погрешности имеют систематический характер, они складываются алгебраически и в некоторых случаях могут взаимно компенсироваться. Но и в наиболее неблагоприятных условиях их сумма для единичного наклонения настолько невелика, что оказывается пренебрежимой по сравнению с основными погрешностями водозмещения, рассматриваемыми выше. Только на наклонениях свыше  $40$ — $60^\circ$  эти погрешности, наоборот, могут оказаться соизмеримыми с основными и их учет может оказаться желательным.

Существенного и даже недопустимого возрастания общей погрешности, как указывал и сам А. Н. Крылов, можно ожидать только в случае применения его простейшего метода к судам с левой непрямоугольностью обвода. Так как по этому методу все водоизмещающие ватерлинии проводятся только через центр тяжести ватерлинии прямого положения [5—423], то объем поправочного слоя для больших наклонений таких судов иногда может достигать 15—20% водозмещения и даже более. Систематические ошибки его определения могут при этом заметно преобладать над возможными ошибками исходного водозмещения, с которыми они складываются.

Учет систематических ошибок, если они определены, не встречает затруднений: для этого достаточно в формулу метациентрического радиуса вводить для каждого наклонения не начальное водозмещение  $V$ , а исправленное на величину его систематической ошибки

$$v = \frac{f_x}{V - f_x(V)}. \quad (26, 12)$$

Так как обычно  $f_x(V) < 0$ , то эта поправка приведет к уменьшению расчетной величины метациентрического радиуса, а следовательно, и плеч статической устойчивости.

Если систематические погрешности водозмещения таким образом будут учтены, то в формулу (26, 8) останется ввести только среднюю квадратичную погрешность водозмещения, исправленную на случайные ошибки объема поправочного слоя, зависящие только от ошибок определения ординаты центра тяжести ватерлинии,

$$\delta(V) = \frac{1}{V} \sqrt{[\delta_0(V)]^2 + [\Delta V \delta(\Delta V)]^2}$$

или

$$\delta(V) = \sqrt{[\delta_0(V)]^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 [\delta(y)]^2}, \quad (26, 13)$$

где  $\delta_0(V)$  — погрешность основного водозмещения;  
 $\delta(\Delta V)$  — погрешность объема поправочного слоя;  
 $\delta(y)$  — погрешность ординаты центра тяжести ватерлинии.<sup>1</sup>  
 Координаты центра величины. Для аналитического определения координат центра величины служат следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} y_c - \Delta\theta \varphi_0 \sum_{i=1}^n q_i \cos \theta_i \\ z_c - z_0 - \Delta\theta \varphi_0 \sum_{i=1}^n q_i \sin \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (26, 14)$$

где  $y_c$  и  $z_c$  — текущие координаты центра величины;  
 $z_0$  — абсцисса центра величины в прямом положении;  
 $\Delta\theta$  — интервал интегрирования по углу крена  $\theta$ ;  
 $q_i$  — значение метациентрического радиуса при угле крена  $\theta_i$ .

Интегрирование обычно производится по правилу трапеций с относительно малым числом ординат, однако существенные ошибки интегрирования могут иметь место только в районе резкого перегиба кривой метациентрического радиуса, вызванного началом входа в воду верхней палубы. Для уменьшения этой ошибки достаточно ввести в расчет средние значения метациентрического радиуса, соответствующий этому наклонению [5—408], после чего, как показывает опыт, можно принимать  $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$ , а средние квадратичные погрешности интегрирования считать равными

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1a} = (0,05\Delta\theta - 0,3)\% \\ \delta_{1b} = (0,06\Delta\theta + 0,3)\% \end{aligned} \right\} \quad (26, 15)$$

где  $\Delta\theta$  — интервал интегрирования, выраженный в градусах.

Более точные и достоверные координаты центра величины можно получить планиметрированием кривых  $q_i \cos \theta_i$  и  $q_i \sin \theta_i$ , построенных в достаточно большом масштабе.

Как по правилу трапеций, так и при планиметрировании, помимо погрешностей интегрирования, необходимо учитывать неточ-

<sup>1</sup> Для прямоугольного сечения.

ность определения входных данных — метacentрических радиусов

$$\delta_{\text{вп}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\cos \theta_i \sigma(\theta_i)|^2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i \cos \theta_i} \quad (25, 16)$$

$$\delta_{\text{вн}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\sin \theta_i \sigma(\theta_i)|^2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i \sin \theta_i}$$

Входящие сюда тригонометрические функции считаем достоверными, так как их аргументы заданы, а существующие таблицы позволяют ввести в расчет их значения с любой необходимой точностью.

Таблица XIV

Коэффициенты погрешностей  
координат центра осколочных  
при взрыве

$\theta_i$	$k_y$	$k_z$
5	3,38	5,90
10	2,29	2,77
20	1,63	1,95
30	1,38	1,59
45	1,31	1,37
50	1,08	1,22
60	0,99	1,11
70	0,94	1,03
80	0,90	0,95
90	0,89	0,87

$\Delta\theta$  — шаг изменения углов наклона, принятый в расчете.  
Коэффициенты в формуле (26, 17):

$$k_y = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\theta_1 + \sin 2\theta_1}}{\sin \theta_1};$$

$$k_z = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\theta_1 - \sin 2\theta_1}}{1 - \cos \theta_1} \quad (26, 18)$$

Численные значения этих коэффициентов приведены в табл. XIV.

Пятой особенностью формы. Она определяется как сумма проекций найденных ранее координат центра величина на плоскость действующей материалки

$$l_{cp} = y_c \cos \theta + (z_c - z_{c0}) \sin \theta \quad (26, 19)$$

и, следовательно, его средняя квадратичная ошибка

$$\sigma(l_{cp}) = \sqrt{\cos^2 \theta \cdot \sigma(y_c)^2 + \sin^2 \theta \cdot [\sigma(z_c - z_{c0})]^2} \quad (26, 20)$$

По этой формуле во избежание усложнения расчетов и следует производить все вычисления в лишь после этого переходить к определению погрешности, если это необходимо.

Пример. Расчет диаметров сферической оболочки, арктической в учебнике В. В. Семенова-Тян-Шанского (115—140), выполнен по методу Дарвина. Интерпретацию по длине проделывалась по таблице Чибрика с длиной арктики ( $\Delta\alpha = 3$ ) при четырех материалах ( $n = 4$ ). Точность сбития орбиты с меридианом  $\delta_{\alpha} = \pm 5$  м, следовательно,  $\sigma_{\alpha} = 3$  м.

Водоизмещение судна	$V = 2310 \text{ м}^3$
Длина	$L = 110 \text{ м}$
Шаров	$B = 15,0 \text{ м}$
Осадка	$T = 3,22 \text{ м}$
Коэффициент вытесны	$\delta_{\alpha} = 0,426$

Средняя ордината по водоизмещению  $y_{cp} = \frac{1}{2} \cdot 0,426 \cdot 15,0 = 3,12 \text{ м}$ .

Средняя ордината по материалке  $z_{c, cp} = 4,35 \text{ м}$ .

Так как расчет водоизмещения производился без учета погрешностей измерений  $\theta$  и  $\Phi$ , то средняя квадратичная ошибка интерпретации арктики согласно табл. IX:

по длине для арктик 1, 2, 3 и 4 (в равных частях)

$$\delta_{\alpha} \approx 0,16\%$$

по высоте для арктик 3, 4 и 6 (в равных частях)

$$\delta_{\alpha} \approx 2,5\%$$

Погрешность суммы ординат по формуле (22,5)

$$\delta_{\alpha} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 42} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} \cdot 100 = 0,03\%$$

Погрешность излодного водоизмещения

$$\delta = \sqrt{0,16^2 + 2,5^2 + 0,03^2} = 2,5\%$$

Погрешность интерпретации по таблице Чибрика при определении ординаты центра тяжести материалки при арктике  $10^\circ$  по табл. XII для арктик 1, 2, 3 и 4

$$\delta_{\alpha} \approx 0,5\%$$

Погрешность функции ординат по формуле (26, 4)

$$\delta_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-2}}{4,25} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 100 = 0,03\%$$

Погрешность объема погрешного слоя

$$\delta = \sqrt{0,16^2 + 0,03^2} = 0,5\%$$

Так как объем погруженного слоя не при каком положении не превышает 0,5% водоизмещения, то этой погрешностью по сравнению с ошибкой округления истинного водоизмещения можно пренебречь.

Погрешность интегрирования при определении момента инерции относительно продольной оси согласно табл. XII

$$\delta_3 = 1,8\%.$$

Погрешность функции эрдинга при том же определении согласно формуле (26, 7)

$$\delta_4 = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 28^3}{15 \cdot 125} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 3 \cdot 10}{15 \cdot 4}} = 2,1\%.$$

Погрешность момента инерции

$$\delta(I_x) = \sqrt{1,8^2 + 2,1^2} = 2,6\%.$$

Погрешность метакентрического радиуса по формуле (26, 8)

$$\delta(r_0) = \sqrt{2,8^2 + 2,3^2} = 3,7\%.$$

Погрешности интегрирования при определении координат центра тяжести согласно (26, 15) равны

$$\delta_{1x} = 0,2\%; \quad \delta_{1z} = 0,5\%.$$

Эти погрешности малы по сравнению с кажущейся величиной погрешности метакентрического радиуса и ими можно пренебречь. Поэтому при крене в  $10^\circ$  погрешность координат центра тяжести согласно (26, 17) и табл. XIV будет

$$\delta_y = 2,39 \cdot 3,7 \sqrt{0,174} = 3,7\%;$$

$$\delta_z = 2,77 \cdot 3,7 \sqrt{0,174} = 4,3\%.$$

Указывая эти данные на вольном сдвиге координат, получим средние квадратичные ошибки последних

$$\sigma(\rho_x) = 0,637 \cdot 1,02 = 0,64 \text{ м};$$

$$\sigma(z_c - z_{1c}) = 0,043 \cdot 0,09 = 0,004 \text{ м},$$

и по формуле (26, 20) — среднюю квадратичную ошибку плеча остойчивости формулы

$$\sigma(\rho_{cp}) = \sqrt{\cos^2 30^\circ \cdot 0,64^2 + \sin^2 10^\circ \cdot 0,004^2} = 0,64 \text{ м},$$

что составляет 4% величины своего плеча (1,02 м).

Существенное повышение точности расчета может быть достигнуто комплексацией систематических ошибок при расчете водоизмещения и момента инерции ватерлинии введением соответствующих поправок. Еще лучший результат может дать замена правила Чебышева правилом трапеций.

## ГЛАВА IV

### РАСЧЕТЫ ХОДКОСТИ

#### § 27. Определение смоченной поверхности по теоретическому чертежу

При наличии теоретического чертежа величина смоченной поверхности определяется измерением длины обводов шанпоутов с последующим их интегрированием по длине корпуса. Обычно для измерения обводов применяется курвиметр или, реже, измерительный циркуль. Последний способ, дающий лишь длину окружности вписанного многоугольника, а не истинного обвода, не может быть рекомендован: при малых расстояниях циркули и большом масштабе чертежа, когда ошибка получается достаточно умеренными, значительно возрастает его трудоемкость, в противном случае легко могут возникнуть недопустимые погрешности. Поэтому на практике измерительного циркуля оставаться не будем.

**Курвиметрирование.** Погрешности курвиметрирования так же, как и планиметрирования, имеют два источника: инструментальные ошибки прибора и погрешности колесика около теоретической линии шанпоута во время обкатки.

Длина каждой кривой, выраженной аналитически в ортогональной системе координат, определяется интегралом

$$l_c = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (27, 1)$$

Так как все отклонения курвиметра от теоретической линии неизбежны по сравнению с ее длиной, то эта формула может быть применена и в криволинейной системе координат, ось  $Ox$  которой совмещена с теоретической линией шанпоута, а отклонения  $y$  измеряются по нормали к этой линии в любой ее точке. При этих условиях  $l$  будет обозначать истинную длину шанпоута по чертежу, а  $l_c$  — его случайную длину, измеренную курвиметром.



Рассмотрим случай сложных гармонических колебаний, т. е. положим

$$\varphi = \sum_{i=1}^n e_i \sin km_i \xi, \quad (27)$$

где  $e_i$  — частная амплитуда гармоники  $i$ ;  
 $m_i$  — количество волн этой гармонки, укладываемых в измеряемой длине кривой  $l$ ;

$$k = \frac{2\pi}{l};$$

$n$  — общее число учитываемых гармоник.

Длина шагагоута всегда во много раз превышает длину волны всех колебаний колеса. Поэтому можем для упрощения считать число  $m_i$  большим, так как возмущение вследствие этого погрешности, очевидно, будут второго порядка и ими можно пренебречь.

Дифференцируя выражение (27, 2) по абсциссе  $\xi$  и возведя в квадрат его производную, получим

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = k^2 \left[ \sum_{i=1}^n e_i^2 m_i^2 \cos^2 km_i \xi + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i e_j m_i m_j \cos km_i \xi \cos km_j \xi \right], \quad (27, 3)$$

где  $i \neq j$ .

При удовлетворительном качестве работы вычислителя отклонения плоскости колеса курвиметра от касательной к обкатываемой кривой не может превышать 5—6°. При этом аркоинвариант  $\frac{d\varphi}{d\xi}$  не будет больше 0,1, а его квадрат — больше 0,01. Поэтому подынтегральное выражение в равенстве (27, 1) может быть разложено в биномиальный ряд с сохранением только двух первых членов

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2. \quad (27, 4)$$

Следовательно, после использования (27, 3) и интегрирования получим

$$I_c = l + \frac{1}{4} k^2 \sum_{i=1}^n e_i^2 m_i^2 l$$

или, заменяя  $k$  его значением и делив на  $l$ ,

$$\frac{I_c}{l} = 1 + \pi^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i m_i}{l}\right)^2. \quad (27, 5)$$

В общем случае амплитуды отдельных гармоник нам неизвестны, но можно сделать достаточно вероятные предположения

о том, что они убывают с уменьшением периода в геометрической прогрессии

$$e_i = e_1 q^{i-1} \quad (27, 6)$$

и что  $m_i = m_1 + (i-1)$ , где  $e_1$  и  $m_1$  — соответственно амплитуда и число волн основного тона, а  $q < 1$  — знаменатель прогрессии. При этом получим

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i m_i}{l}\right)^2 = \left(\frac{e_1}{l}\right)^2 \sum_{i=1}^n q^{2(i-1)} (m_1 + i - 1)^2.$$

Для определения относительной погрешности курвиметрирования можно выбрать любой участок рассматриваемой кривой, лишь бы его длина была кратной длине волны колебаний основного тона. Для упрощения расчета удобно принять  $m_1 = 1$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i m_i}{l}\right)^2 = \left(\frac{e_1}{l}\right)^2 \sum_{i=1}^n i^2 q^{2(i-1)}. \quad (27, 7)$$

Предельное отклонение колеса курвиметра от теоретической линии шагагоута соответствует случайному моменту сложения амплитуд всех гармоник, т. е. сумме всех  $n$  членов прогрессии (27, 6)

$$\Delta_{\text{эф}} = \sum_{i=1}^n e_i = \frac{1-q^n}{1-q} e_1$$

откуда

$$e_1 = \frac{1-q}{1-q^n} \Delta_{\text{эф}} \quad (27, 8)$$

Подставляя все найденные значения в выражение (27, 5), получим

$$\frac{I_c}{l} = 1 + \left(\frac{1-q}{1-q^n}\right)^2 \frac{\pi^2 \Delta_{\text{эф}}^2}{e_1^2} \sum_{i=1}^n i^2 q^{2(i-1)}.$$

Так как  $q < 1$  и при всех условиях не превышает  $q = 0,5$ , то максимум этого выражения соответствует  $n = 1$ , при котором  $i$  может иметь только одно значение  $i = 1$ , а колебания курвиметра носят практически синусоидальный характер. При этом предельная погрешность обкатки получается равной

$$\delta_{\text{эф}}(l) = \frac{I_c}{l} - 1 = \frac{\pi^2 \delta_{\text{эф}}^2}{\mu} \quad (27, 9)$$

и только при очень небрежной работе ( $q = 0,8$ ) может превзойти эту величину на 50–60%. При всех меньших значениях  $q$  и  $\lambda$  при  $\lambda < \infty$  погрешность обкатки же может превзойти указанную в выражении (27, 9), и, считая любые ее значения в этих пределах равновероятными, можем принять среднюю квадратичную погрешность обкатки

$$\delta_4(l) = \frac{\pi^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta l^2}{l^2} = 5,7 \frac{\Delta l^2}{l^2}. \quad (27, 10)$$

Так как выше мы положили  $n_1 = 1$ , то входящая в это выражение длина  $l$  представляет собой длину волны наибольшего колебания колеса курвиметра, измеренную по ободу шпандюга. Обычно эта длина не бывает меньше 10–15 мм при отклонении колеса от теоретической длины не более, чем на 0,2–0,3 мм. При этом средняя квадратичная погрешность обкатки имеет порядок

$$\delta_4(l) = 0,2 \pm 0,5\%,$$

что несколько превышает погрешность планиметрирования.

Для определения инструментальной погрешности курвиметра может быть использован столь же простой и надежный способ как при планиметрировании; для этого достаточно измерить курвиметром точно отмеренный прямой отрезок, используя в качестве направляющей чертёжную линейку. Как показывает опыт, инструментальная ошибка курвиметра не остается постоянной, а не сколько меняется в зависимости от сорта бумаги и состояния ее поверхности, от величины нажима и других случайных факторов. Поэтому подобное измерение лишь после многократных повторений может дать основания для выявления систематической части погрешности и для введения соответствующих поправок. Практически же результаты таких проверок следует рассматривать как случайные и соответственно их использовать.

Подобными испытаниями установлено, что инструментальная средняя квадратичная погрешность вполне исправных курвиметров в рабочем состоянии может лежать в пределах

$$\delta_5(l) = 0,3 \pm 0,4\%.$$

Курвиметром определяется длина каждого отдельного шпандюга. Поэтому к изданной погрешности следует добавить еще ошибки от неточности установки курвиметра в начале и конце каждого измерения, которые могут быть оценены примерно в  $\pm 0,5$  мм каждая и, следовательно, при средней длине обода шпандюга на чертёжке, например, в 20 см составляет  $\delta_6(l) \approx 0,15\%$ .

Складывая дисперсии всех указанных погрешностей, получим общую среднюю квадратичную погрешность длины каждого шпандюга

$$\delta(l) = 0,4 \pm 0,6\%.$$

При достоверности  $v = 0,999$  соответствующая возможная погрешность получится равной  $1,2 \pm 1,8\%$ , что довольно близко к 2%, указанным в литературе [16–11–738] для более сложных измерений расстояний по извилистым дорогам или рекам на географических картах.

**Интегрирование по длине судна.** Такое интегрирование обычно производится по правому трапеций. При этом средняя квадратичная погрешность суммы  $\lambda$  ordinат будет в  $\sqrt{\lambda}$  раз меньше найденных выше цифр, т. е. составит при 20 знакоугтах в среднем около  $0,5 : \sqrt{20} = 0,11\%$ . Погрешность самого правка трапеций в данных условиях не превосходит 0,1% (§ 17). Поэтому средняя квадратичная погрешность смоченной поверхности, определяемой курвиметрированием, может считаться в среднем равной 0,15%, а ее возможная погрешность — 0,4–0,5%.

Следует, однако, заметить, что столь высокая точность определения смоченной поверхности возможна только при особенно тщательной работе: увеличение колебаний колеса курвиметра и неточность его установки и отрыва в конце обкатки может легко уменьшить найденную погрешность в 4–5 раз и более.

**Развернутая смоченная поверхность.** Вышеизложенным используется задача определения ошибок при расчете приведенной смоченной поверхности, необходимой для расчетов ходкости [3–38]. Однако вполне полезно будет найти и способ пересчета приведенной поверхности на развернутую, знание которой необходимо для приближенного расчета веса наружной обшивки, расхода красок, изоляционных материалов и т. д.

Истинная длина ватерлинии отличается от длины судна на величину

$$\Delta L = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx - L. \quad (27, 11)$$

Так как для большинства самоходных судов производная  $\frac{dy}{dx}$ , равная тангенсу угла наклона ватерлинии к диаметральной плоскости, обычно невелика и только в оконечностях может достигнуть значений порядка 0,2–0,3 (угол 12–16°), то можно с достаточной для наших целей точностью разложить подынтегральное выражение в биномиальный ряд, сохранив в нем лишь два первых члена,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

При этом первый из обрешеченных элементов не превышает

$$\frac{1}{8} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,001.$$

Большие ошибки получаются только у более покатых обводов оконечностей, но и в этом случае они распространяются на сравнительно небольшой участок смоченной поверхности, и на ошибку точности последней принятое упрощение практически не сказывается.

Таким образом, погрешность, возникающая от замены длины ватерлинии длиной судна,

$$\epsilon_l = \frac{\epsilon L}{L} = \frac{1}{2L} \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (27, 12)$$

Для оценки порядка этой погрешности воспользуемся снова аналитическими кривыми 1, 2 и 3 В. Г. Власова, выражения которых перенесем в следующем виде<sup>1</sup>:

кривая 1

$$y = \frac{1}{4} B \left( 1 + \cos 2\pi \frac{x}{L} \right);$$

кривая 2

$$y = \frac{1}{2} B \sin \pi \frac{x}{L};$$

кривая 3

$$y = \frac{1}{2} B \left[ 1 - \left( 2 \frac{x}{L} \right)^{0,5} \right].$$

После подстановки этих выражений в равенство (27, 12) и интегрирования получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{для кривой 1} \\ \text{для кривой 2} \end{array} \right\} \epsilon_l = \frac{\pi^2}{16} \left( \frac{B}{L} \right)^2 = 0,62 \left( \frac{B}{L} \right)^2;$$

для кривой 3

$$\epsilon_l = 0,78 \left( \frac{B}{L} \right)^2.$$

Так как ватерлинии всех самоходных судов достаточно близки к рассмотренным кривым, то систематическую погрешность опре-

деления из смоченной поверхности, возникающую по рассматриваемой причине, в среднем можно, по-видимому, принять

$$\epsilon(\delta) = 0,7 \left( \frac{B}{L} \right)^2, \quad (27, 13)$$

а случайные ее ошибки дополнительно учитывать средней квадратичной погрешностью

$$\delta_s(\delta) = 0,65 \left( \frac{B}{L} \right)^2, \quad (27, 14)$$

где  $0,65 = 0,68 : \sqrt{3}$ .

Так как на реальных судах каждая ватерлиния может иметь свое отношение  $B : L$ , отличное от других, то для пересчета смоченной поверхности следует принять следующую формулу:

$$S_{\text{расч}} = S_{\text{теор}} \left[ 1 + \frac{0,7}{\pi} \sum_{i=1}^n \left( \frac{B_i}{L_i} \right)^2 \right], \quad (27, 15)$$

где  $S_{\text{теор}}$  — развернутая смоченная поверхность;  
 $S_{\text{расч}}$  — приведенная смоченная поверхность;  
 $\pi$  — число ватерлиний;

$L_i$  и  $B_i$  — длина и наибольшая ширина ватерлинии  $i$ .

Аналогично найдется средняя квадратичная погрешность этой поправки

$$\delta(\Delta S) = \frac{0,65}{\pi} \sum_{i=1}^n \left( \frac{B_i}{L_i} \right)^2, \quad (27, 16)$$

и средняя квадратичная погрешность развернутой поверхности

$$\delta(S_{\text{теор}}) = \frac{S_{\text{теор}}}{S_{\text{расч}}} \sqrt{[\delta(S_{\text{теор}})]^2 + \left[ \frac{\delta S}{S_{\text{расч}}} \cdot \delta(\Delta S) \right]^2}. \quad (27, 17)$$

Нетрудно убедиться в том, что точность такого определения будет для практики вполне достаточной.

## § 28. Приближенные формулы для расчета смоченной поверхности

Значительная трудоемкость определения смоченной поверхности судна по теоретическому чертежу способствовала появлению многих приближенных формул, позволяющих решать эту задачу на первых стадиях проектирования с достаточной для практики точностью при несравненно меньшей затрате труда. Примеры таких формул приведены в табл. XV.

Выразить точно смоченную поверхность в виде функции некоторого числа параметров принципиально невозможно: ее величина зависит от всех особенностей всех шпангоутов и ватерлиний в значительной степени, чем, например, водоизмещение.

<sup>1</sup> Оригиналы кривых В. Г. Власова не поддаются интегрированию и формулы (27, 13).

Таблица 2

Приближенные формулы для определения смоченной поверхности

Автор	Формула
Тейлор	$S = 2,75\pi L \sqrt{\delta_p B T}$
Девре	$S = 2\pi L \sqrt{K}$
Мунфорд	$S = \pi L (1,77 + \delta_p B)$
Бурсуа	$S = 0,72\pi L (2T + B)$
С. П. Мурати	$S = \pi L (1,26T + 1,43\delta_p B)$
Норрис	$S = \pi L [1,82T + (0,374 + 0,86\delta_p) B]$
В. А. Савко	$S = \pi L [2T + 1,37(\delta_p - 0,27\delta_p) B]$
Г. Н. Погов	$S = \pi \delta_p \left[ L \left( \frac{2}{\sin \epsilon} T + \frac{1}{\sin \epsilon_2} B \right) + \right. \\ \left. + 2T \left( \frac{1}{\sin \epsilon_2} + \frac{1}{\sin \epsilon_2 \sin \epsilon} \right) \right]$
С. А. Бондаревский	$S = 2\pi B \sqrt{S_{\text{пл}}^2 + \frac{1}{4} S_{\text{кл}}^2 + S_{\text{к}}^2}$
Обозначения	
$S$ — смоченная поверхность; $S_{\text{пл}}$ — площадь диаметрального сечения; $S_{\text{кл}}$ — площадь горизонтальной проекции; $S_{\text{к}}$ — площадь погруженной части миделя;	$L, B, T$ — главные размеры; $\delta_p$ — коэффициент кривизны водозащитной; $\epsilon$ — угол наклона мидель-линии к горизонту у круговой ватерлинии; $\epsilon_2$ — угол наклона дельты к осям кривизны; $\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ — углы двусторонней оаз-зности

Однако, пользуясь теорией ошибок, можно выделить из общего числа параметров, влияющих на величину смоченной поверхности, сравнительно небольшое число определяющих, а влияние остальных заменить эмпирическими коэффициентами, изменяющимися в зависимости от типа и особенностей обводов рассматриваемого судна. От количества, правильного подбора и сочетания таких определяющих параметров и в основном зависит точность той или иной эмпирической формулы.

Для определения погрешности приближенных формул смоченной поверхности воспользуемся тем же способом, который применен в § 17—19 для определения погрешностей методов интегри-

рования. Аппроксимируем обводы судна некоторыми поверхностями-эталоном, имеющими аналитическое выражение, по возможности сходными по общим признакам с поверхностью судна, и введем во все формулы поправочные коэффициенты  $\varphi$ , к которым и будем относить погрешность метода расчета, независимо от точности входных величин. Этими коэффициентами и отличаются формулы табл. XV от обычного их вида, указываемого в литературе.

При выборе эталонов встречаются большие затруднения. Для большинства поверхностей двойной кривизны, даже имеющих аналитическое выражение, точное определение эквивалентной площади оказывается невозможным, численное же ее выхождение курвиметром или циркулем, как мы видели выше, само легко может дать довольно крупные погрешности, которые в некоторых случаях могут оказаться соизмеримыми с погрешностью приближенных формул, и поэтому результаты таких проверок не всегда убедительны. На практике за отсутствием лучшего этим методом приходится пользоваться. Однако для более строгой сравнительной оценки различных формул следует все же предпочесть способ сравнения с результатом аналитического расчета, хотя по абсолютной величине получившиеся таким образом средние квадратичные погрешности могут оказаться заведомо преувеличенными вследствие большего различия между рассматриваемыми формами.

Эталонные модели. Для сравнения точности приближенных формул используем следующие четыре геометрических тела, поверхности которых в той или иной мере напоминают судовые обводы, но имеют сравнительно простое аналитическое выражение (см. рис. 25):

а) параллелепипед

$$S = L(2T + B) + 2BT; \quad (28, 1)$$

б) горизонтальный полуцилиндр с круговыми поперечными сечениями

$$S = \pi T(L + T); \quad (28, 2)$$

в) вертикальный цилиндр, основание которого образовано двумя круговыми сегментами,

$$S = 2T \sqrt{L^2 + \frac{4}{3} B^2} + \pi \left[ \frac{L^3 + B^3}{4T} \right]^{1/2}; \quad (28, 3)$$

где коэффициент площади основания  $\omega$  находится по таблицам в зависимости от отношения хорды сегмента основания к его стрелке, равного  $2L : B$ ;

в) эллипсоид вращения

$$S = \frac{\pi}{2} L T \left[ \sqrt{1 - e^2} + \frac{e^2 \sin \kappa}{\kappa} \right], \quad (28)$$

где  $e^2 = 1 - \left(\frac{B}{L}\right)^2$  — эксцентриситет продольного сечения.

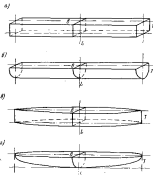


Рис. 25. Эталоны для расчета средней погрешности.

Результаты всех вычислений для некоторых из наиболее рекомендуемых в нас формул приведены в табл. XVI, где обозначено:

- $\delta_s$  — коэффициент погрешности водонизмещения;
- $\alpha$  — коэффициент полноты ватерлинии;
- $\beta$  — коэффициент полноты модель-шпангоута;
- $\gamma$  — коэффициент полноты диаметральной плоскости.

$\sigma(\varphi)$  — среднее квадратичное отклонение поправочного коэффициента  $\varphi$  для каждой данной формулы от его среднего для всех формул значения  $\varphi_{cp}$ .

$\delta(\varphi)$  — то же, отклонение, выраженное в процентах от  $\varphi_{cp}$ .  
Во всех случаях сохранены настоящие отношения  $L : B = 10$  и  $B : T = 2$ , а в качестве линейной единицы измерения приняты осадка  $T = 1$ .

Сравнение полусекных результатов показывает, что из рассмотренных формул наименьшей гибкостью обладают формулы Т (Тэйлора) и М (С. П. Мурашкина), различие между которыми в этом отношении несущественно. Немного точнее формулы С (В. А. Семья) и еще точнее формула П (Г. И. Попова). Наименьшую погрешность дает формула Б (С. А. Базилевского), как способная учесть наиболее полно специфические особенности обводов каждого эталона.

Среднее значение коэффициента  $\varphi_{cp}$ , как и его отклонений, здесь определялось в предположении, что истинные обводы реального судна ближе всего подходят по форме к модели а, несколько уклонившись в сторону модели г, и значительно больше отличаются от моделей в и б. Поэтому при определении средних вводятся усилительные коэффициенты

$$\varphi_{cp} = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b + 4\varphi_c + 2\varphi_d) \quad (28, 5)$$

и аналогично для  $\sigma(\varphi)$ .

Важно, однако, отметить, что применение других усилительных коэффициентов несколько меняет величину поправочных множителей  $\varphi_{cp}$  и абсолютные значения средних отклонений, но не отражается на порядке распределения формул по их точности.

**Повышение точности формул.** Более детальное изучение табл. XVI показывает, что между поправочными коэффициентами различных формул и коэффициентами полноты моделей существует асимметричная зависимость. Так, например, поправочный коэффициент формул Т, М и С явно уменьшается с уменьшением коэффициента полноты модель-шпангоута, слабее зависит от коэффициента полноты диаметральной плоскости и практически не зависит от общего коэффициента полноты и коэффициента полноты ватерлинии. Поправочный коэффициент в формулах П и Б увеличивается с уменьшением коэффициента полноты ватерлинии и в меньшей степени с уменьшением коэффициента полноты диаметральной плоскости.

Это наблюдение позволяет для каждого частного случая выбрать наиболее подходящий эталон и формулу, которая даст наибольшую точность результата расчета. Для грузовых судов, имеющих форму модель-шпангоута, близкую к прямоугольнику ( $\beta \rightarrow 1$ ), наилучшие результаты должна давать формула М, средняя квадратичная погрешность которой, видимо, вряд ли не превысит 1% (эталона: параллелепипед и сегментный цилиндр). Между тем, формулы П и Б для тех же судов могут дать среднюю квадратичную погрешность, доходящую соответственно до 5,5 и до 3%.

Для судов более острых, с меньшими коэффициентами полноты модели, лучшие результаты дают формулы П и Б (эталон: цилиндр сегментный и эллипсоид вращения), средняя квадратичная погрешность которых будет иметь порядок 1% и меньше.

Сравнительная оценка точности некоторых проб

Модель	Коэффициенты погрешности				A	
	$\delta_c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$		
а) Параллельный	1,000	1,000	1,000	1,000	84,0	
б) Полуцилиндр круговой	0,785	1,000	0,785	1,000	66,0	
в) Цилиндр сег- ментный	0,668	0,668	1,000	1,000	67,0	
г) Цилиндр пра- ильный	0,523	0,785	0,785	0,785	49,5	
Обозначения: А — аналитическая Г — Тейлора М — Муралина С — Свеса П — Пелора В — Визельского						

Средние же погрешности других формул при этом достигают 8,5—9,4%.

Таким образом, при удачном сочетании принятых эталонов и приближенных формул погрешность определения до или сзади поверхности может приближаться к той, которая получается при непосредственном определении ее по теоретическому чертежу курвиметром, если только обвод проектируемого судна не имеет каких-либо особенностей, резко отличающих их от принятых эталонов. Такими особенностями могут оказаться точки перегиба шпангоутов и ватерлиний при образовании V-образных, бубликовых или S-образных форм. В этих случаях в качестве эталонов могут служить только близкие прототипы, для которых смещенная поверхность дугами быть определена со всей возможной тщательностью с помощью курвиметра. Установленный по этим прототипам поправочный коэффициент  $\psi$  позволяет исследовать новые варианты теоретического чертежа в широких пределах и с большой точностью.

Влияние отношений главных размеров. Приведенный численный анализ был выполнен для фиксированных отношений  $L : B = 10$  и  $B : T = 2$ . Между тем, вполне естественно предположить, что поправочный коэффициент  $\psi$ , как и смещенная погрешность, могут несколько меняться в зависимости от изменения этих отношений. Влияние последних может быть различным для различных формул, но так как методика анализа этого влияния во всех случаях одинакова, то приведем ее только применительно

анал формул для определения смещенной поверхности

модель поверхности S				Поправочные коэффициенты $\psi$					
M	C	P	B	T	M	C	P	B	
72,4	79,8	84,0	88,0	1,08	1,10	1,05	1,00	0,99	
62,8	68,0	66,0	66,8	0,95	1,05	0,97	1,00	0,98	
57,5	61,5	60,2	72,4	1,05	1,17	1,09	1,11	0,93	
50,8	53,5	44,9	52,5	0,88	0,97	0,90	1,12	0,94	
				$\psi_{\text{теор}}$ $\sigma(\%)$ 10° 0(%) %	1,00 7,7 7,7	1,10 8,1 7,4	1,02 6,7 6,5	1,09 4,9 4,5	0,95 2,3 2,4

к последней из рассматриваемых формул, как наиболее точной.

Итак,

$$S = 3\alpha\beta \sqrt{S_{\text{теор}}^2 + \frac{1}{4} S_{\text{ка}}^2 + S_{\text{д}}^2} \quad (28, 6)$$

В качестве варьируемых параметров примем

$$\lambda = \frac{L}{V \cdot B^2} \quad \text{и} \quad h = \frac{T}{B} \quad (28, 7)$$

Формула первого из этих параметров удобнее, чем обычное отношение  $L : B$ , так как обеспечивает ему независимость от второго параметра при всех вариациях главных размерений с сохранением постоянства водоизмещения и коэффициента полноты.

Соответственно преобразуя формулу (28, 1), после подстановки указанных параметров получим

$$S = \frac{L^3}{L^2 V \lambda} [(2h + 1)\lambda + 2\sqrt{h}] \quad (28, 8)$$

и аналогично вместо формулы (28, 6)

$$S = 3\alpha\beta \frac{L^3}{L^2 V \lambda} \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 + h} \quad (28, 9)$$

Приравняв два последних выражения и учитывая, что для параллелепипеда  $\beta = 1$ , находим поправочный коэффициент

$$\varphi = \frac{(2\beta + 1)\lambda + 2\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \beta}} \quad (28, 10)$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для других типовых моделей, а именно: для горизонтального полуцилиндра с эллиптическим сечением

$$\varphi = \frac{2}{3} \frac{\frac{1+2\beta}{2} + \sqrt{\frac{1+4\beta^2}{2}} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda}}{\sqrt{4\beta^2 + 1 + \frac{\beta^2}{4} \frac{\delta}{\lambda^2}}} \quad (28, 11)$$

для вертикального сегментного цилиндра

$$\varphi = \frac{2\sqrt{\lambda^2 + \frac{4}{3}\delta + \alpha} \frac{(\lambda^2 + \beta^2)}{8\sqrt{\lambda}}}{3\sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda} \left[ \alpha \frac{(\lambda^2 + \beta^2)}{8\sqrt{\lambda}} \right]^2 + \delta} \quad (28, 12)$$

Для трехосного эллипсоида вывести подобную формулу представляется возможным, поэтому строгое определение коэффициента  $\varphi$  может быть выполнено только для случая  $\lambda = 0,5$ , когда трехосный эллипсоид превращается в тело вращения,

$$\varphi = \frac{4\lambda \left[ \sqrt{1-\beta^2} + \frac{\arcsin \beta}{\beta} \right]}{2\lambda \sqrt{0,5(\lambda^2 + 1)}} \quad (28, 13)$$

где

$$\beta^2 = 1 - 2\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$$

Для других отношений  $\lambda$  будем исходить из следующих соображений.

В трехосном эллипсоиде все поперечные сечения геометрически подобны среднему, наибольшему сечению у мидала. Следовательно, при изменении  $\lambda < 1$  периметры всех сечений должны меняться пропорционально периметру среднего сечения, углы же наклона касательных к продольным сечениям (по ватерлиниям и рыбаниям) должны увеличиваться вблизи расширяющейся ватерлинии и уменьшаться вблизи сужающегося диаметрального сечения. Полагая, что эти два последних явления взаимно компенсируются, можно предположить, что и смоченная поверхность трехосного эллипсоида должна меняться пропорционально ободу среднего сечения, мидала, или, что то же самое, пропорционально измене-

нию поправочного множителя  $\varphi$ , вычисленному для горизонтального эллиптического полуцилиндра бесконечной длины.

Пользуясь формулой (28, 11), подставим в нее  $\lambda = \infty$  и затем найдем отношение поправочного коэффициента  $\varphi$  для любого значения  $\lambda$  к значению того же коэффициента при  $\lambda = 0,5$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{1 - 4\lambda^2}}{2\sqrt{2\lambda^2 + 1}}$$

Умножим на это выражение правую часть формулы (28, 13). После этого для трехосного эллипсоида окончательно получим

$$\varphi = \frac{4\lambda}{3\sqrt{2-\pi}} \frac{\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\arcsin \beta}{\beta}}{\sqrt{0,5(\lambda^2 + 1)}} \frac{1 - \frac{1}{2}\lambda + \sqrt{1 - 4\lambda^2}}{\sqrt{2\lambda^2 + 1}} \quad (28, 14)$$

Результаты вычислений по выведенным формулам сведены в табл. XVIII. Рассмотрев эту таблицу, нетрудно заметить, что

Таблица XVIII

Поправочные коэффициенты к формуле (28,6)

Элемент	$\delta/\Gamma$			
	1	2	3	4
а) Параллелепипед	6	1,04	1,02	0,96
	10	1,01	0,98	0,95
	14	0,99	0,97	0,94
	20	0,98	0,96	0,93
б) Полуэллипсоид горизонтальный эллиптический	6	1,02	1,00	0,98
	10	1,00	0,98	0,96
	14	0,98	0,96	0,95
	20	0,96	0,94	0,93
в) Цилиндр вертикальный сегментный	6	0,94	0,90	0,87
	10	0,93	0,90	0,86
	14	0,93	0,90	0,86
	20	0,92	0,89	0,85
г) Эллипсоид трехосный	6	0,96	0,95	0,94
	10	0,95	0,94	0,93
	14	0,94	0,93	0,92
	20	0,94	0,93	0,92

для моделей, наиболее близких к судному обводу (в ж относительное удлинение  $\lambda$  мало влияет на поправочный коэффициент смоченной поверхности; даже если полностью игнорировать это влияние и пользоваться лишь средними значениями поправочного коэффициента, то средняя квадратичная погрешность, возникающая по этой причине, не превышает 0,7—0,8%.

Несколько большее влияние в некоторых случаях оказывает относительная ширина  $B:Y$ , особенно для обводов с большим коэффициентом полноты модели (модели «а» и «в»). Пренебрежение этим влиянием может иногда привести к средним квадратичным погрешностям, достигающим 2—2,5%. Поэтому пренебрежение этим влиянием отношения  $B:Y$  следует считать недопустимым и пользование табл. XVII может быть рекомендовано.

**О точности входных данных.** Помимо погрешностей, связанных с методом расчета смоченной поверхности, точность результата этого расчета зависит и от погрешностей входных величин в формулу исходных величин: главных размерёнок, коэффициентов полноты и т. д. Однако возникающие по этой причине погрешности смоченной поверхности находятся по способам, описанным подробно в предыдущих параграфах. Поэтому рассматривать здесь их не будем.

## § 29. Испытание модели в опытовом бассейне<sup>1</sup>

При буксировочном испытании модели судна в опытовом бассейне непосредственно измеряется ее сопротивление, длина пробега и его продолжительность. Средняя скорость буксировки получается как частное от деления пути на время. Погрешность результатов зависит только от точности производства замеров, так как никаких методических ошибок процесс испытаний не содержит. Ниже будем рассматривать наиболее типичное оборудование опытового бассейна, состоящее из динамометра рычажного типа хронометра с контактным датчиком для записи времени на ленту и контактного устройства для записи арифметических расстояний. Анализ погрешностей более сложных систем может быть выведен по такой же схеме и поэтому останавливаться на нем не будем.

**Динамометр.** Динамометр рычажного типа имеет два самостоятельных нагрузочных устройства — весовое и пружинное. Первое работает по принципу обычных весов с гирями и принимает за себя основную часть нагрузки от буксировочного сопротивления модели; второе, дополнительное, позволяет уточнить действующую нагрузку, не прибегая к сложному и кропотливому подбору мелких разновесок. Сопротивление модели равно сумме веса всех гирь, помещаемых на чашу динамометра, и напряжения измерительной пружины, измеряемого через ее деформацию. Поэтому

средняя квадратичная ошибка в определении буксировочного сопротивления  $\sigma(r)$  должна считаться равной

$$\sigma(r) = \sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + \sigma_{\text{пр}}^2} \quad (29, 1)$$

где  $\sigma_{\Sigma}$  — средняя квадратичная ошибка общего веса всех гирь, помещаемых на чашу динамометра;

$\sigma_{\text{пр}}$  — средняя квадратичная ошибка измерения нагрузки на его пружину.

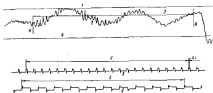


Рис. 26. Образец записи на ленте динамометра.

1 — тарировочная лентка термометра; 2 — лентка от дифференциала; 3 — термометр; 4 — рычажный динамометр; 5 — отсчет подвижного указателя; 6 — отсчет статической архимедовой весовой гирей; К — лента электрометра.

Первая из этих ошибок определяется техническими условиями на изготовление гирь и их тарировку, а также зависит от количества гирь, помещаемых на чашу. Так, например, если помещена одна гиря 20 кг и допуск к ее весу не превышает  $\pm 10$  г (стандарт для обычных «торговых» гирь), то получим  $\sigma_{\Sigma} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 6$  г. Если тот же вес будет взвешан на четырех гирях по 5 кг с допуском  $\pm 2,5$  г, то средняя квадратичная ошибка суммарного веса уменьшится до  $\sigma_{\Sigma} = \frac{25}{\sqrt{3}} \sqrt{4} = 3$  г.

Средняя квадратичная ошибка измерения нагрузки на пружину может быть найдена непосредственно по записям ее растяжения на ленте динамометра (рис. 26, кривая 2). Для этого достаточно измерить ряд максимальных и минимальных отклонений  $\epsilon_i$  пара динамометра от линии среднего натяжения пружины  $\bar{\epsilon}$ , сложив их квадраты, подставить в формулу (5, 10)

$$\sigma_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\sum \epsilon_i^2}{n(n-1)}} \quad (29, 2)$$

где  $n$  — число измеренных отклонений.

<sup>1</sup> § 29—31, написаны с участием канд. Ю. С. Вильковской.



Так как и обычно бывает весьма велико, больше 50, поправки, предусмотренные § 6, не необходимы.

К величине, определенной формулой (29, 2), следовало бы добавить среднюю квадратичную ошибку тарировки пружины, всегда производящейся до и после испытаний. Однако величина этой поправки при достаточно тщательном выполнении работ обычно оказывается настолько незначительной, что согласно формуле (14, 13) ее вполне можно пренебречь.

Практически же играет некую роль и так называемая нулевая стабильность динамометра, т. е. величина того минимального груза, который способен стронуть его рычаг с нуля; так как во время испытаний вся система динамометра находится в состоянии непрерывных колебаний около положения равновесия, то вследствие выходящего трением и шарнирах, неизбежно возникающего, и их влияние на результаты замеров не может идти ни в какое сравнение с ошибками, рассмотренными выше.

**Пример.** На числу динамометра прилагаем следующие грузы:  $1 \times (5 \pm 0,005) \text{ кг} + 2 \times (2 \pm 0,005) \text{ кг} + 1 \times (1 \pm 0,005) \text{ кг}$ . Легко можно вычислить действительную нагрузку в 0,180 кг со средней квадратичной ошибкой  $\sigma_{\Sigma} = 0,005 \text{ кг}$  (3%). Определить буксировочное сопротивление и его относительную ошибку с достоверностью  $\nu = 0,999$ .

Находим среднюю величину

$$r = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0,18 \text{ кг.}$$

Средняя квадратичная ошибка в весе груза

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{3} (0,005^2 + 2 \cdot 0,015^2 + 0,005^2)} = 0,002 \text{ кг.}$$

Общая средняя квадратичная ошибка сопротивления

$$\sigma(r) = \sqrt{0,002^2 + 0,005^2} = 0,005 \text{ кг} \text{ (} \pm 2,8\% \text{)}.$$

Возможная ошибка буксировочного сопротивления

$$\Delta_r = r_p \sigma = 3,10 \cdot 0,005 = 0,016 \text{ кг.}$$

**Погрешности скорости.** Для определения скорости движения тележки на испытательном участке с диаграммы отметок времени снимаются отрезки между двумя импульсами, отстоящими достаточно далеко друг от друга (например, на 10 сек.). С помощью циркуля или булавочной иглы этот отрезок переносится на диаграмму отметок пути. Величина пройденного расстояния накладывается по числу импульсов датчика пути на этом отрезке с добавлением (как вычитанием) участка «S» между концом перенесенного отрезка и ближайшим всплеском кривой пути (рис. 26).

При таком порядке выполнения работы погрешность измерения времени не превышает погрешности применяемого хронометра, который при исправном приборе может быть пренебрежимо малой по сравнению с другими погрешностями измерения. Возможная же ошибка пути складывается из неточностей совмещения обоих концов снимаемого отрезка с отметками импульсов времени и левого

его конца — с отметкой импульса пути, а также из неточности измерения участка «S», найденного как указано выше. Первые три возможные ошибки могут быть оценены как максимум  $\pm 0,2 \text{ мм}$  каждый, последняя  $\pm 0,3 \text{ мм}$ . Следовательно, общая возможная ошибка измерения пройденного пути в масштабе диаграммы будет равна  $\pm 0,9 \text{ мм}$ . При общей длине отрезка, например, 20 см это дает предельную погрешность измерения пути и скорости  $\delta_{\Sigma} = \pm 0,45\%$  и их среднюю квадратичную погрешность (по табл. VII для  $\nu = 4$ ).

$$\delta(\nu) = \frac{\delta_{\Sigma}}{r_p} = \frac{0,45}{3,46} = 0,13\%.$$

По сравнению с этой погрешностью возможные ошибки датчика пути, имеющие порядок сотых долей процента, пренебрежимо малы.

**Систематические ошибки.** Они возникают вследствие деформации отдельных элементов конструкции динамометра и неточности определения длины плеча его рычажной системы. Очевидно, обе эти причины сводимы к систематическим ошибкам давления и давления с нагрузкой динамометра, и поэтому они легко могут быть устранены его тарировкой перед испытаниями (величина этих погрешностей обычно не превышает  $\pm 0,3\%$ ).

**Коэффициент полного сопротивления.** Коэффициент  $\zeta_{\text{пол}}$  модели находится из известной формулы прикладной гидродинамики

$$r = \frac{1}{2} \rho v^2 \zeta_{\text{пол}} \quad (29, 3)$$

где в данном случае  $\zeta = \zeta_{\text{пол}}$ :

- $r$  — полное сопротивление модели, кг;
- $\rho$  — массовая плотность воды в бассейне, кг см<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;
- $v$  — скорость буксировки, м/сек;
- $S = S_{\text{пл}}$  — смоченная поверхность модели, м<sup>2</sup>.

Отсюда находим среднюю квадратичную погрешность этого коэффициента

$$\delta(\zeta_{\text{пол}}) = \sqrt{[\delta(r)]^2 + [\delta(\rho)]^2 + [2\delta(v)]^2 + [\delta(S_{\text{пл}})]^2}. \quad (29, 4)$$

Температура воды в бассейне обычно находится в пределах 13–20° С и измеряется с точностью до  $\pm 0,5^\circ$  С. При этих условиях средняя квадратичная погрешность ее плотности не может быть больше  $\delta(\rho) = 0,006\%$ , что пренебрежимо мало по сравнению с найденными выше погрешностями сопротивления  $\delta(r) = 0,05\%$ , скорости  $\delta(v) = 0,13\%$  и смоченной поверхности  $\delta(S) = 0,15\%$ . Определителями здесь могут быть две последние, по сравнению с которыми даже погрешность сопротивления незначительна.

В итоге, по формуле (29, 4) получаем среднюю квадратичную погрешность коэффициента полного сопротивления модели

$$\delta(\zeta_{\text{пол}}) = \sqrt{0,06^2 + (2 \cdot 0,13)^2 + 0,15^2} = 0,3\%$$

Главную роль в формировании этой погрешности, очевидно играет погрешность измерения скорости, входящей в формулу (29, 3) в квадрате. Но не малое значение может иметь и наличие более грубых ошибок в расчете смоченной поверхности о чем говорилось в § 27.

### § 30. Сопротивление трения

Из многих выражений, предложенных для вычисления коэффициента сопротивления трения, рассмотрим только формулу Праудля — Шляхтинга, как наиболее распространенную

$$\zeta_r = \frac{0,466}{(\text{Re})^{0,38}} \quad (30, 1)$$

Общий вид этой формулы получен аналитическим путем и поэтому может считаться достоверным. Коэффициент же  $\alpha = 0,466$  и показатель степени  $\beta = 2,58$  уточнялись на основании опытов. Следовательно, они могут иметь случайные ошибки. Приближенным является также и входное в формулу число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu} \quad (30, 2)$$

включающее случайные величины скорости  $v$ , длины  $L$  и коэффициент кинематической вязкости  $\nu$ .

Первые опыты по определению сопротивления трения производились Фрудом путем буксировки тонких пластин в опытовом бассейне. Праудль, Шляхтинг и другие исследователи намеряли сопротивление жидкости или воздуха при их течении по трубе и затем пересчитывали его на условия обтекания тонких пластин (35—44). Методика и экспериментальное оборудование в различных испытаниях могли существенно различаться, но результаты получились довольно близкими. Поэтому нет необходимости в узких рамках настоящей книги анализировать точность все работ в этом направлении, тем более, что сведений о возможных погрешностях измерений, выполненных в иностранных лабораториях, у нас нет. Остановимся только на методе буксировки предварительные оценки отдельных компонентов которого у нас уже есть. Надо отметить, что этот способ является и наиболее точным, так как измерение средних скоростей течения жидкости всегда связано с большими погрешностями, чем измерение времени и расстояний, пройденных тележкой по неподвижным рельсам. Сравнение полученных результатов с опубликованными

иностранными материалами позволит судить о точности подобных измерений и за границей.

**Буксировочное сопротивление пластины.** В отличие от буксировочного сопротивления модели судна сопротивление пластины имеет еще один, очень существенный источник погрешностей измерения. Так как во избежание ошибок в определении смоченной поверхности пластины длиной буксироваться в полностью погруженном состоянии, то подвеска ее выполняется в виде легкой обтекаемой формы, пересекающей свободную поверхность воды и создающая дополнительное сопротивление своей погруженной частью. Специальные испытания показывают, что это сопротивление составляет в среднем около  $r_{\text{в}} = 10\%$  сопротивления самой пластины и вследствие малости чисел Рейнольдса может быть определено не точнее, чем со средней квадратичной погрешностью 3—4%.

По сравнению с найденными ранее ошибками измерения сопротивления динамометром эта погрешность оказывается определяющей, и поэтому для дальнейшей оценки точности формулы Праудля — Шляхтинга будем принимать

$$\delta(r_{\text{в}}) = \sqrt{[0,95(r_{\text{в}})]^2 + [0,16(r_{\text{в}})]^2} = 0,4\%$$

и среднюю квадратичную погрешность опытного коэффициента трения

$$\delta(\zeta_r) = \sqrt{[\delta(r_{\text{в}})]^2 + [2\delta(\alpha)]^2 + [\delta(\beta)]^2} = \sqrt{0,4^2 + (2 \cdot 0,13)^2 + 0,15^2} = 0,5\%$$

Эта величина может еще возрасти, если смоченная поверхность пластины будет определяться с меньшей точностью, чем модель.

**Число Рейнольдса.** Число Рейнольдса имеет следующую среднюю квадратичную погрешность:

$$\delta(\text{Re}) = \sqrt{[\delta(v)]^2 + [\delta(L)]^2 + [\delta(\nu)]^2} \quad (30, 3)$$

Как уже отмечалось, температура воды в бассейне прогревается с точностью до  $\pm 0,5^\circ \text{C}$ . Этому при средней температуре  $15^\circ \text{C}$  соответствуют возможные колебания коэффициента кинематической вязкости до  $\pm 1,5\%$  или средняя квадратичная погрешность примерно  $\delta(\nu) = 0,9\%$ .

Допустим, что длина испытуемой пластины равна 6 м и может быть измерена с точностью  $\pm 3$  мм. Соответствующая средняя квадратичная погрешность  $\delta(L) = 0,05\%$ . Наконец, средняя квадратичная погрешность измерения скорости была найдена в § 29:  $\delta(v) = 0,13\%$ .

Таким образом, средняя квадратичная погрешность числа Рейнольдса для данной пластины

$$\delta(\text{Re}) = \sqrt{0,13^2 + 0,06^2 + 0,9^2} = 0,9\%$$

и зависит только от точности измерения температуры воды в бассейне. Погрешность логарифма числа Рейнольдса при среднем значении  $Re = 5 \cdot 10^4$  составляет по формуле табл. V

$$\delta(\lg Re) = 0,434 \frac{0,5}{0,599} = 0,06\%$$

и несколько меняется при иных числах Рейнольдса.

Показатель степени. Показатель степени  $b$  в формуле Прандтля — Шлихтинга может быть вычислен на основании результатов двух серий испытаний (1 и 2), выполненных при разных достаточно отличных друг от друга числах Рейнольдса. После логарифмирования равенств (30, 1) и нахождения средних значений для  $\lg \zeta$  и  $\lg \lg Re$  получаем

$$b = \frac{(\lg \zeta_{cp1} - \lg \zeta_{cp2})}{(\lg \lg Re_{cp1} - \lg \lg Re_{cp2})} \quad (30, 4)$$

где  $(\lg \zeta)_{cp}$  и  $(\lg \lg Re)_{cp}$  вычисляются для каждой серии испытаний 1 и 2 отдельно.

Средняя квадратичная погрешность этого расчета будет

$$\delta(b) = \sqrt{\delta^2[(\lg \zeta)_{cp1} - (\lg \zeta)_{cp2}]^2 + \delta^2[(\lg \lg Re)_{cp1} - (\lg \lg Re)_{cp2}]^2}$$

или после необходимых преобразований

$$\delta(b) = 0,434 \sqrt{\frac{2 \left\{ \frac{[\delta(\zeta)]^2}{[(\lg \zeta)_{cp1} - (\lg \zeta)_{cp2}]^2} + \frac{[\delta(\lg Re)]^2}{[(\lg \lg Re)_{cp1} - (\lg \lg Re)_{cp2}]^2} \right\}}{1}} \quad (30, 5)$$

Здесь  $\delta(\zeta)$  и  $\delta(\lg Re)$  — средние квадратичные погрешности среднего из каждой серии испытаний (см. § 6).

Следует обратить внимание на то, что в знаменателях обеих членов подкоренного выражения стоит разность средних результатов двух серий испытаний. Поэтому необходимо позаботиться о том, чтобы эти разности имели достаточно большую величину. Основное значение здесь имеет первый член, по сравнению с которым влияние погрешности в определении числа Рейнольдса невелико.

Так, например, если с указанной выше погрешностью проведено только два испытания при числах Рейнольдса  $Re_1 = 1 \cdot 10^4$  и  $Re_2 = 1 \cdot 10^7$  и соответственно получены  $\zeta_1 = 4,54 \cdot 10^{-2}$  и  $\zeta_2 = 3,00 \cdot 10^{-2}$ , то после подстановки в формулу (30, 4) получим  $b = 2,58$ , а по формуле (30, 5) для  $\delta\zeta = 0,5\%$  и  $\delta(\lg Re) = 0,06\%$

$$\delta(b) = 0,434 \sqrt{2(7,7 + 0,8)} = 1,8\%.$$

Если же довести число испытаний в каждой серии до  $n = 15$ , то эта погрешность уменьшится до

$$\delta(b) = 0,434 \sqrt{\frac{2}{14}(7,7 + 0,8)} = 0,5\%.$$

В обоих случаях величина второго члена составит около 10% их суммы. При уменьшении диапазона чисел Рейнольдса погрешность показателя степени увеличивается примерно пропорционально отношению их логарифмов.

Возможная погрешность, соответствующая полученной средней квадратичной, с достоверностью  $\nu = 0,999$  составляет согласно табл. II для  $n = 15$

$$\delta_\nu(b) = 3,83 \cdot 0,5 = 1,9\%.$$

и, следовательно, можно считать  $b = 2,58 \pm 0,05$ .

Постоянный коэффициент. Постоянный коэффициент  $a$  в формуле Прандтля — Шлихтинга после определения показателя степени легко находится непосредственно из формулы (30, 1) для каждого отдельного испытания или, лучше, сразу по обеим сериям испытаний путем предварительного усреднения логарифмов, уже частично выполненного при определении показателя:

$$\lg(a) = (\lg \zeta)_{cp} + b(\lg \lg Re)_{cp} \quad (30, 6)$$

Средняя квадратичная погрешность этого определения составит

$$\delta(a) = \sqrt{\delta^2(\zeta)_{cp}^2 + \delta^2 b(\lg Re)_{cp}^2 + [2,303 \cdot b(\lg \lg Re)_{cp} \delta(b)]^2} \quad (30, 7)$$

Здесь наибольшую величину имеет последний член, зависящий от погрешности показателя степени  $b$ , и, следовательно, все меры, способствующие понижению погрешности этого показателя, ведут и к уточнению постоянного коэффициента.

Подставляя в эти равенства величины, уже известные для нашего примера, получим  $a = 0,455$  и его погрешность для единичного опыта ( $n = 1$ )

$$\delta(a) = \sqrt{0,25 + 0,02 + 6,02} = 2,4\%.$$

а для двух серий по 15 испытаний в каждой

$$\delta(a) = \frac{2,4}{\sqrt{25}} = 0,45\%.$$

Следовательно,  $\delta_\nu(a) = 3,44 \cdot 0,45 = 1,5\%$  и коэффициент  $a = 0,455 \pm 0,007$ .

Погрешность коэффициента сопротивления трения. Обращаясь снова к формуле (30, 1), найдем

$$\delta(\zeta) = \sqrt{\delta^2(a)^2 + \delta^2 \cdot b(\lg Re)^2 + [2,303 \cdot b \lg \lg Re \delta(b)]^2} \quad (30, 8)$$

\* Вывод как этой формулы, так и последующих дан в общем виде в § 4\*

При среднем значении числа Рейнольдса  $Re = 5 \cdot 10^6$  получим  $\delta(\zeta_0) = \sqrt{0,45^2 + (2,58 \cdot 0,06)^2 + (2,303 - 2,58 \sqrt{6,699 \cdot 0,5})^2} = 2,5\%$ .

Статистический анализ разброса опытных токов на оублаивающих диаграммах коэффициента сопротивления трения [13—46] дает почти такую же цифру (3%).

**Сопротивление трения модели.** Сопротивление  $r_f$  вычисляется по известной формуле (29, 3), дающей в данном случае следующую среднюю квадратичную погрешность:

$$\delta(r_f) = \sqrt{16(\delta(q))^2 + [2\delta(v)]^2 + [6\delta(S)]^2 + [\delta(\zeta_0)]^2} \quad (30, 9)$$

При выполнении этой формулы будем считать согласно § 2  $\delta(q) = 0,005\%$  и  $\delta(v) = 0,13\%$ , а допустимую погрешность определения смоченной поверхности найдем из условия, чтобы эта погрешность не оказывала существенного влияния на результат расчета даже при минимальной погрешности коэффициента сопротивления  $\delta(\zeta_0) = 2,5\%$ . Для этого согласно § 14 необходимо, чтобы

$$\delta(S) < \frac{1}{3} \sqrt{16(\delta(q))^2 + [2\delta(v)]^2 + [6\delta(\zeta_0)]^2} \quad (30, 10)$$

откуда получаем допустимую среднюю квадратичную погрешность

$$\delta(S) < \frac{1}{3} \sqrt{0,005^2 + (2 \cdot 0,13)^2 + 2,5^2} = 0,8\%.$$

С этими требованиями и следует считаться при выборе метода расчета смоченной поверхности. Если оно будет выполнено, то средняя квадратичная погрешность сопротивления трения модели будет не более 2,7%.

**Систематические ошибки.** Источниками систематических погрешностей в определении сопротивления трения модели, помимо тех, которые связаны с расчетом ее смоченной поверхности по теоретическому чертежу (§ 27), могут быть:

- 1) неточность изготовления модели;
- 2) наличие некоторой шероховатости ее поверхности;
- 3) наличие участка ламинарного обтекания в носовой части.

**Неточность модели.** Для моделей судов, изготовляемых в большом бассейне, можно считать нормальными следующие допуски в наружных обводах:

- а) отклонение в расстояниях между лекалами шпангоутов во время проверки при общем их числе 20 — не более  $\pm 0,5$  мм;
- б) местные зазоры между поперечными лекалами и поверхностью модели — не более  $\pm 0,5$  мм;
- в) неточность изготовления лекал —  $\pm 0,2$  мм.

Закон распределения этих отклонений можно считать по меньшей мере линейным (2, 4), и поэтому общая средняя квадратичная

ошибка обводов не может превышать  $\frac{0,7}{\sqrt{N}} \sqrt{2} = 0,1$  мм. Погрешности в определении смоченной поверхности, возникающие по этой причине, могут быть вычислены по тем же методам, которые были указаны в § 27 для расчета по теоретическому чертежу. Однако обычно они оказываются несущественными и ими можно пренебречь.

**Шероховатость.** Многократные проверки показали, что при достаточной тщательности изготовления парафиновой модели средняя высота бугорков шероховатости на ее поверхности не превышает 5—10 мк, а у дефицитных моделей — 20—40 мк. Даже наибольшее из этих цифр не выходит за пределы толщины пограничного слоя на тех скоростях буксировки, которые практически применяются в бассейнах. Поэтому все нормально изготовленные модели можно рассматривать как гидродинамически гладкие и соответствующими систематическими ошибками пренебрегать.

**Ламинарный участок.** Ламинарный участок в носовой части модели, не учитываемый формулой Прандтля — Шлихтинга, может существенно понизить истинное сопротивление трения модели по сравнению с расчетным. Уменьшить это явление можно введением в коэффициент трения модели следующей поправки:

$$\zeta_{tr} = -(\zeta_{tr} - \zeta_{tr}) \frac{S_0}{S} \quad (30, 11)$$

где  $\zeta_{tr}$  — коэффициент турбулентного сопротивления по Шлихтингу;

- $\zeta_{tr}$  — коэффициент ламинарного сопротивления;
- $S_0$  — поверхность участка ламинарного обтекания;
- $S$  — смоченная поверхность модели.

Выходящие сюда коэффициенты сопротивления вводятся по местному числу Рейнольдса, соответствующему длине ламинарного участка  $x_L$ .

Определение указанной поправки не встречало бы затруднений, если бы величина и форма ламинарного участка могли быть точно рассчитаны. К сожалению, это возможно лишь в том случае, если его длина будет искусственно ограничена установкой тех или иных турбуляторов. Однако последние вносят свое дополнительное сопротивление, оценка которого еще пока не может быть сделана с достаточной полнотой.

Исследование этого вопроса продолжается. Пока же можно лишь отметить, что при удачном выборе размеров, конструкции и расположения турбуляторов на моделях достаточно больших размеров (4—6 м) можно добиться почти полной компенсации поправки (30, 11) дополнительным сопротивлением турбуляторов. При этом соответствующая систематическая погрешность практически сводится к нулю. Однако на малых моделях и при менее удачной компенсации эта ошибка может достигать  $\delta \zeta_{tr} = (0,3 -$

$-0,5) 10^{-3}$  и может оказаться существенно больше возможной случайных ошибок. Задача уточнения влияния турбулентности должна считаться весьма актуальной.

**Сопротивление судна.** Сопротивление трения проектируемого судна рассчитывается так же, как сопротивление трения модели, но при этом скорость судна и кинематическую вязкость воды следует считать достоверными, как величинами, заданные техническими условиями. В выражении (30, 2) только длина судна может иметь технологические отклонения от проектной. Но в сравнении с ошибками постоянного коэффициента и показателем степени в формуле Праудла — Шайхтинга эти отклонения настолько незначительны, что в их учете нет никакой необходимости. Поэтому, применяя формулу (30, 8) для судна, второй член ее подкоренного выражения можно опустить. А так как в первый член этого выражения весьма мал по сравнению с последним, то для практического пользования может быть рекомендована следующая упрощенная формула:

$$\delta(\zeta_f) = 6 \lg \lg \text{Re} \delta(\delta). \quad (30, 12)$$

Если принять, например, по прежнему определению  $\delta(\delta) = 0,5\%$  и положить для проектируемого судна  $\text{Re} = 1 \cdot 10^8$ , то средняя квадратичная погрешность коэффициента сопротивления трения как по точной формуле (30, 7), так и по приближенной (30, 12) получится равной 2,9%.

В выражениях (29, 3) для судна случайными являются только смоченная поверхность  $S$  и коэффициент сопротивления  $\zeta_f$ . Поэтому допустимая средняя квадратичная погрешность расчета смоченной поверхности, практически не зависящая на точность вычисления сопротивления, для судна определяется просто

$$\delta(S) < \frac{1}{3} \delta(\zeta_f).$$

В условиях предыдущего примера это составит около 1,0%. Если такая точность будет обеспечена, то средняя квадратичная погрешность сопротивления трения не превысит 3,1%.

При расчетах сопротивления проектируемого судна по сравнению с моделью значительно большее влияние имеет учет систематических ошибок от шероховатости наружной поверхности, которые всегда по мере возможности устраняются. Однако вопреки этому еще не поддается аналитическому исследованию и в определении величины поправки (коэффициента сопротивления шероховатости) существуют крупные разногласия. Поэтому статистическую оценку возможной погрешности этого определения мы вынуждены пока отложить.

## § 31. Остаточное сопротивление

**Сопротивление модели.** Коэффициент остаточного сопротивления модели  $\zeta_{res}$  получается после вычитания из коэффициента ее полного сопротивления  $\zeta_{tot}$ , найденного по результатам испытаний (§ 29), коэффициента сопротивления трения  $\zeta_{tr}$ , определенного расчетом (§ 30).

$$\zeta_{res} = \zeta_{tot} - \zeta_{tr}. \quad (31, 1)$$

Поэтому средняя квадратичная погрешность коэффициента остаточного сопротивления модели

$$\delta(\zeta_{res}) = \zeta_{res} \sqrt{[\delta(\zeta_{tot})]^2 + \left[\frac{\zeta_{tr}}{\zeta_{tot}} \delta(\zeta_{tr})\right]^2}. \quad (31, 2)$$

Полезно заметить, что величина этой погрешности быстро растет с увеличением относительной величины сопротивления трения. Так, например, при отношении  $\zeta_{tr} : \zeta_{tot} = 0,5$  и при тех значениях  $\delta(\zeta_{tot})$  и  $\delta(\zeta_{tr})$ , которые были найдены выше, средняя квадратичная погрешность коэффициента остаточного сопротивления модели практически совпадает с такой же погрешностью сопротивления трения  $\delta(\zeta_{tr}) = 2,6\%$ . При  $\zeta_{tr} : \zeta_{tot} = 0,7$  она превышает последнюю более, чем вдвое (6%), а при  $\zeta_{tr} : \zeta_{tot} = 0,9$  достигает 23%. Отсюда можно сделать вывод о нецелесообразности испытания моделей тихоходных судов, у которых остаточное сопротивление не превышает 10% полного; для таких судов оно может быть определено с большей точностью и с меньшей затратой труда по тремьям серийных испытаний.

Коэффициент остаточного сопротивления модели, определенный, как указано выше, переносится без изменений в расчет сопротивления проектируемого судна. При этом возможно наличие некоторых дополнительных погрешностей, наиболее существенными причинами которых могут оказаться следующие:

- ограниченность размеров канала бассейна;
- влияние в нем остаточных течений;
- отсутствие полного геометрического подобия между обводами судна и его модели.

Первые две причины достаточно хорошо известны, и методы уточнения и уменьшения вызываемых ими систематических ошибок продолжают служить темой многочисленных исследований. Поэтому здесь остановимся только на третьей из указанных причин.

**Негомоность модели.** Как и при расчетах сопротивления трения, те небольшие отступления от теоретических обводов, которые допускаются при изготовлении модели, сами по себе не могут оказать заметного влияния на ее остаточное сопротивление. Более существенным может оказаться влияние шероховатости наружной поверхности модели, возникающее как следствие этих отступлений.

В результате такой волнистости может усложниться система водосодержащая моделью. Вследствие этого ее остаточное сопротивление не может как увеличиться, так и, при удачном сочетании элементов, уменьшиться в зависимости от характера интерференции дополнительных волновых систем. Не случайно делается попытка использовать это явление для повышения ходкости судов на высоких скоростях, а отдельные типы волнистости, как, например, бульбовая форма носа, для известных условий уже записаны в обшем приложении.

Однако в данный момент нас интересует не волнистость, указанная теоретическим чертёжком, которая затем будет воспроизведена и на построенном судне, а случайная волнистость модели, возникшая вследствие технологических ошибок и не передаваемая затем на судно. Ее влияние может быть приближенно оценено по следующей эмпирической зависимости [10—13] полученной на основе испытаний волнистых пластин:

$$\epsilon_{\Sigma}^2 = 0,2 \left( \frac{2a}{\lambda} \right)^2, \quad (31, 3)$$

где  $\epsilon_{\Sigma}^2$  — коэффициент добавочного сопротивления;  
 $2a$  — высота волны;  
 $\lambda$  — ее длина.

Для того чтобы добавочное сопротивление не превышало предельно малой величины, соответствующей  $\epsilon_{\Sigma}^2 = 0,01 \cdot 10^{-4}$  средняя крутизна волны  $2a/\lambda$  не должна превышать 1/150. Обычно это требование выдерживается: длина волны не бывает меньше 150 мм, а высота — больше  $2a = 0,5$  мм. Если же где-либо она не будет соблюдена, формула (31, 3) позволяет приближенно оценить порядок возникающей вследствие этого систематической ошибки.

**Прочие погрешности.** Общая теория сопротивления воды движению судов в настоящее время находится в периоде быстрого развития. Но многое в этой области еще остается не вполне ясно финансово, а еще больше вопросов не получило своего количественного выражения. Встречаются большие затруднения в оценке влияния на сопротивление движению судна масштабного эффекта и всякого рода выступов, отступов и шероховатостей на поверхности его наружной обшивки, которые не могут быть воспроизведены на модели. Не поддается пока точному учету влияние морского волнения, конвективных течений, присутствия планктона и т. д. Все указанные факторы повышают остаточное сопротивление, но соответствующие поправки пока могут вводиться только в основе главным образом статистических данных, отчасти подтвержденных экспериментом. Погрешности, которые вносятся с эмпирическими данными, не могут быть оценены аналитически, и единственная возможность углубить наши знания заключается в систематическом расширении опыта и в его тщательной статистической обработке [2]. Для этой цели могут быть использованы приемы, аналогичные описанным в § 17—19.

## § 32. Мощность главных механизмов

Полное сопротивление судна находится как сумма сопротивлений трения, получаемого расчетом, остаточного сопротивления, определяемого по результатам испытания модели, и добавочных сопротивлений (шероховатости, отступов и т. д.), поддающихся лишь весьма приближенному учету. Все виды сопротивлений условно считаются пропорциональными скоростному напору и стесненной поверхности. При этом коэффициент полного сопротивления выражается суммой

$$\zeta_{\Sigma} = \zeta_0 + \zeta_{\Sigma} + \zeta_{\Sigma}, \quad (32, 1)$$

где  $\zeta_{\Sigma}$  — сумма коэффициентов добавочных сопротивлений.

Остальные обозначения уже известны.

Средняя квадратичная погрешность этого коэффициента будет

$$\delta(\zeta_{\Sigma}) = \sqrt{\left[ \frac{\zeta_0}{\zeta_{\Sigma}} \delta(\zeta_0) \right]^2 + \left[ \frac{\zeta_{\Sigma}}{\zeta_{\Sigma}} \delta(\zeta_{\Sigma}) \right]^2 + \left[ \frac{\zeta_{\Sigma}}{\zeta_{\Sigma}} \delta(\zeta_{\Sigma}) \right]^2}. \quad (32, 2)$$

Хотя добавочные сопротивления обычно составляют не более 10—15% полного, погрешность их определения настолько велика (20% и более), что пренебрегать последним членом подкоренного выражения никак нельзя.

Так, например, если сумма добавочных сопротивлений составляет 10% полного, а сопротивление трения и остаточное одинаковы, то, принимая  $\delta(\zeta_0) = 3\%$ ;  $\delta(\zeta_{\Sigma}) = 2,6$  и  $\delta(\zeta_{\Sigma}) = 20\%$ , получим

$$\delta(\zeta_{\Sigma}) = \sqrt{(0,45 \cdot 3,0)^2 + (0,45 \cdot 2,6)^2 + (10,1 \cdot 20)^2} = 2,7\%.$$

Здесь присутствие третьего члена увеличало общую погрешность почти вдвое.

С увеличением доли, приходящейся на сопротивление трения, погрешность общего сопротивления растет, достигая при сохранении прочих условий  $\delta(\zeta_{\Sigma}) = 3,1\%$  при  $\zeta_0/\zeta_{\Sigma} = 0,8$  и до  $\delta(\zeta_{\Sigma}) = 3,4\%$  при  $\zeta_0/\zeta_{\Sigma} = 0,9$  (остальное — добавочные сопротивления).

При больших ошибках в определении суммы коэффициентов добавочных сопротивлений средняя квадратичная погрешность коэффициента полного сопротивления может достигнуть 5—6%.

В формуле полного сопротивления

$$R = \frac{1}{2} \rho v^3 S \zeta_{\Sigma} \quad (32, 3)$$

по соображениям, изложенным выше, множители  $\eta$  и  $\omega$  должны считаться достоверными, а потому средняя квадратичная погрешность полного сопротивления будет

$$\delta(R) = \sqrt{[\delta(S)]^2 + [\delta(L_0)]^2} \quad (32)$$

Для того чтобы эта погрешность не отличалась от погрешности коэффициента сопротивления более чем на 0,2%, необходимо вычислять смоченную поверхность со средней квадратичной погрешностью не более  $\delta(S) = 1\%$ .

**Буксировочная мощность.** Мощность, необходимая для буксировки судна, рассчитывается умножением величины сопротивления на скорость хода. А так как в расчетах мощности мы должны считать скорость хода заданной, т. е. достоверной, то погрешности в определении буксировочной мощности будут равны погрешностям в определении полного сопротивления.

**Прональсовый коэффициент  $\eta_p$ .** Отношение мощности, необходимой для буксировки судна, к мощности, отдаваемой главным двигателем, получается как произведение из коэффициента влияния корпуса  $\frac{1-\epsilon}{1-\omega}$ , полезного действия гребного вилта  $\eta$  и полезного действия валопровода  $\eta_v$

$$\eta_p = \frac{1-\epsilon}{1-\omega} \cdot \eta \cdot \eta_v \quad (32, 6)$$

где  $\epsilon$  — коэффициент засасывания;

$\omega$  — коэффициент попутного потока.

Дисперсия погрешностей этого выражения, очевидно, равна сумме дисперсий погрешностей отдельных сомножителей.

**Коэффициент влияния корпуса.** Все элементы, составляющие коэффициент влияния корпуса, определяются при испытании модели в опытовом бассейне и являются чисто эмпирическими. Поэтому и погрешности их могут быть найдены только статистической обработкой результатов ограниченного ряда испытаний (§ 6). Ориентировочно можно считать  $\delta(\epsilon) = \delta(\omega) = 20\%$ , но возможны и заметные отклонения от этой величины.

Средняя квадратичная погрешность коэффициента влияния корпуса определяется по общим правилам теории ошибок

$$\delta\left(\frac{1-\epsilon}{1-\omega}\right) = \sqrt{\left[\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \delta(\epsilon)\right]^2 + \left[\frac{\omega}{1-\omega} \delta(\omega)\right]^2} \quad (32, 6)$$

Для быстроходных судов с острыми кормовыми обводами эта погрешность не может быть большой. Так, например, если  $\epsilon = 0,05$  и  $\omega = 0,035$ , то при  $\delta(\epsilon) = \delta(\omega) = 20\%$  получим

$$\delta\left(\frac{1-\epsilon}{1-\omega}\right) = \sqrt{\left(\frac{0,05}{0,95} 20\right)^2 + \left(\frac{0,035}{0,965} 20\right)^2} = 1,3\%$$

Но по мере увеличения полноты кормовых обводов или по другим причинам, вызывающим рост коэффициента засасывания в попутного потока, средняя квадратичная погрешность коэффициента влияния корпуса довольно резко увеличивается. При  $\epsilon = \omega = 0,1$  она уже превышает 3%, а при  $\epsilon = \omega = 0,2$  достигает 7%. Следовательно, для судов с полными обводами коэффициенты засасывания и попутного потока должны определяться с большей точностью, чем для острых быстроходных судов.

**Гребной вилт.** Коэффициент полезного действия гребного вилта выражается следующей зависимостью:

$$\eta = \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{\lambda_p}{2\pi} \quad (32, 7)$$

где  $K_1$  — коэффициент упора;

$K_2$  — коэффициент момента;

$\lambda_p$  — относительная поступь.

Коэффициенты упора и момента определяются на испытаниях модели вилта в бассейне или канальцовой трубе. Они связаны с числом оборотов  $n$  и диаметром вилта  $D$  и являются функциями относительной поступи

$$\left. \begin{aligned} K_1(\lambda_p) &= \frac{P}{\omega n^2 D^4} \\ K_2(\lambda_p) &= \frac{M}{\omega n^2 D^4} \end{aligned} \right\} \quad (32, 8)$$

Следовательно, их погрешности могут быть определены, если будет известна точность измерения всех входящих сюда величин. Они могут быть определены и статистическим методом, путем многократного повторения испытаний. Последний метод предпочтительнее, так как он позволяет учесть и влияние ряда второстепенных факторов, не принимаемых во внимание теорией. Учитывает он также и влияние случайной неточности определения поступи вилта во время испытаний, связанной с погрешностями измерения скорости его аксиального перемещения, числа оборотов и коэффициента попутного потока, если испытания проводятся за моделью судна, когда

$$\lambda_p = \frac{v}{\omega D} (1 - \omega) \quad (32, 9)$$

При проектировании нового гребного вилта для судна скорость хода  $v$  и число его оборотов задается (или варьируется) и поступь должны считаться достоверными. Диаметр вилта при изготовлении всегда может быть выдержан с достаточной точностью, и поэтому его погрешности можно пренебречь. Следовательно, погрешность относительной поступи может считаться равной

$$\delta(\lambda_p) = \delta(1 - \omega) = \frac{\omega}{1 - \omega} \delta(\omega) \quad (32, 10)$$

Тогда средняя квадратичная погрешность коэффициента полезного действия гребного винта

$$\delta(\eta_0) = \sqrt{[\delta(K_1)]^2 + [\delta(K_2)]^2 + \left[\frac{\omega}{1-\omega} \delta(\omega)\right]^2}. \quad (32, 1)$$

Обычно коэффициенты упора определяются со средней квадратичной погрешностью 1—2%, а коэффициенты момента — 2—3%. Если при этом положить, например,  $\omega = 0,05$  и  $\delta(\omega) = 20\%$ , то средняя квадратичная ошибка коэффициента полезного действия гребного винта окажется в среднем равной 0,03%. Вряд ли такую высокую точность можно признать удовлетворительной ( $\delta_0 \approx 10\%$ ), но, по-видимому, именно ею объясняется тот известный факт, что оптимальный гребной винт редко удается найти расчетом. Опытным же подбором винта из ряда изготовленных вариантов часто удается заметно повысить скорость хода уже построенного судна. Следует признать крайне желательным увеличить точность определения коэффициентов упора и момента так, чтобы их средние квадратичные погрешности во винском случае не превышали 0,5—1,0%. Тогда средняя квадратичная ошибка коэффициента полезного действия будет уменьшена при тех же условиях до (0,01—0,015) %.

**Валопровод.** Коэффициент полезного действия валопровода обычно же рассчитывается, а принимается по протопину. Так как этот коэффициент на полном ходу весьма близок к единице (0,98—0,99), то и средняя квадратичная погрешность его определения не может быть больше  $\delta(\eta_0) = 1\%$ .

**Мощность главных механизмов.** Все выложенное позволяет оценить среднюю квадратичную погрешность пропущенного коэффициента и всего расчета необходимой мощности на выходном фланце главного двигателя или турбоузлового агрегата

$$\delta(\eta_0) = \sqrt{\left[\delta\left(\frac{1-t}{1-\omega}\right)\right]^2 + [\delta(\eta_0)]^2 + [\delta(\eta_0)]^2}. \quad (32, 2)$$

$$\delta(N) = \sqrt{[\delta(N_0)]^2 + [\delta(\eta_0)]^2}. \quad (32, 3)$$

Подставляя сюда найденные выше примерные величины, в среднем получим

$$\delta(\eta_0) = 3,4\% \text{ и } \delta(N) = 4,6\%.$$

Если погрешности определения коэффициентов упора и момента винта будут снижены до 0,5—1,0%, то средняя квадратичная погрешность мощности главных механизмов уменьшится примерно до 3,5%. Дальнейшее уточнение расчета потребует уменьшения погрешностей в определении коэффициента сопротивления трения и коэффициента попутного потока.

РАСЧЕТЫ ВЕСОВОЙ НАГРУЗКИ

§ 33. Определение веса по рабочим чертежам

Расчет весовой нагрузки, особенно в стадии рабочего проектирования, относится к числу наиболее трудоемких вычислительных работ. Одной из причин его большого объема является высокая точность, которая обусловлена принятой методикой расчета веса отдельных деталей по рабочим чертежам. Эта точность, не контролируемая оценкой получающихся ошибок, с одной стороны, не всегда соответствует необходимой точности результата [6], с другой, значительно превосходит и возможную точность изготовления деталей на заводе. Поэтому более подробное научное исследование характера и возможной величины ошибок в расчетах весовых нагрузок настоятельно необходимо.

**Корпусные конструкции.** Определение веса корпусных конструкций по их рабочим чертежам сводится к измерению площади составляющих их листов и длины профильных балок и ребер с последующим умножением на удельный вес, т. е. на вес одного квадратного или погонного метра. Следовательно, дисперсия погрешности веса каждой такой детали в простейшем случае складывается из дисперсий погрешностей одного или двух линейных измерений и погрешности удельного веса, указанного в составе.

Так как конструктивные чертежи корпуса вычерчиваются не так точно, как теоретические, предельная ошибка при синтезе с них размеров, если они не указаны цифрами, может достигнуть  $\pm (1+2)$  мм. При средней длине поперечной связи на чертеже порядка 100—200 мм предельная ее погрешность будет иметь порядок не более  $\pm 2\%$ . Примерно такую же погрешность дает определение длины относительно коротких криволинейных контуров курвиметром (§ 27). Меньшие погрешности, порядка  $\pm 1,0\%$ , получаются при измерении длинных продольных связей.

С другой стороны, вес одного метра проката дается в сортаменте с точностью, не меньшей  $\pm 0,005$  кг, что даже для наиболее толстых листов и наименьших профилей на применяемых в конструкциях корпуса соответствует погрешности не более  $\pm 0,1\%$ .



Для более тяжелых листов и профилей эта цифра уменьшается до сотых долей процента. По сравнению с погрешностями мерных размеров согласно формуле (14, 13) этой величины можно пренебречь и считать предельную погрешность веса каждой детали зависящей только от погрешности ее чертёжных размеров.

Если предположить, что все конструктивные размеры могут быть сняты с чертежа с точностью до  $\pm 1\%$ , то их средняя квадратичная погрешность будет  $1 : \sqrt{3} = 0,6\%$ , и такой же будет средняя квадратичная погрешность теоретического веса деталей, образованных из прокатных профилей. Для листов настилки и обшивки, имеющих произвольные контуры, площадь которых определяется двумя линейными размерами, снятыми с чертежа средняя квадратичная погрешность веса будет  $0,6\sqrt{2} = 0,85\%$ , а для простейших отливок и поковок —  $0,6\sqrt{3} = 1,0\%$ .

Для более сложных деталей из листового стали с криволинейными контурами, требующими планиметрирования, для деталей трапециевидных или в форме многоугольников, а также для сложных отливок и поковок возможные погрешности могут несколько возрасти (до 20%). Но количество и относительный вес таких деталей в составе корпуса обычно не столь велик, чтобы их ошибки могли существенно сказаться на точности определения суммарного веса корпуса.

Если, например, в нагрузке судна вес профальной стали составляет 20%, вес листов простых очертаний — 78%, а вес отливок, поковок и других более сложных деталей — 2%, то, принимая для предельной погрешности веса последних заведомо большую величину цифру в 5% ( $\delta = 5 : \sqrt{3} = 3\%$ ), получим среднюю квадратичную погрешность веса каждой из корпусных деталей в среднем

$$\delta_k = 0,78 \cdot 0,85 + 0,20 \cdot 0,6 + 0,02 \cdot 3,0 = 0,85\%.$$

Практически эта величина может возрасти до 1—1,5% прином распределения весов между указанными группами деталей или при меньшей точности планиметрирования или снятия с чертежа размеров с чертежа.

**Механизмы и оборудование.** Аналогично может быть определена средняя квадратичная погрешность веса отдельных деталей механизмов и другого оборудования судна. Следует отметить, что все определяющие размеры механических деталей задаются на чертежах численно и поэтому при расчетах должны считаться достоверными. Погрешности веса таких деталей могут возникнуть только вследствие некоторой неопределенности всякого реального перехода, сопряжений, галтелей, фасок и других особенностей, не вполне точно фиксированных чертежом. На деталях, подвергающихся всесторонней обработке, эти источники

не могут быть существенными, и связанная с ними погрешность веса обычно не превосходит  $\pm 0,1\%$ .

Значительно большие ошибки возникают при расчетах веса деталей, подвергающихся лишь частичной обработке, как, например, станины, блоки и фундаментные рамы двигателей, кронштейны, корпуса аппаратуры и т. п. Сама сложность их форм не позволяет уточнить координаты каждой точки их поверхности, а это может послужить источником ошибок при определении объема металла и веса всей детали. Во всяком случае можно утверждать, что предельная погрешность веса таких конструкций в среднем не может быть больше погрешности веса аналогичных деталей корпуса, т. е. не превосходит  $\pm 5\%$ .

Так как вес подобных деталей может составлять до 70—80% общего веса соответствующего механизма или устройства, а по сравнению с указанной их погрешностью вес деталей, обработанных кругом, может считаться достоверным, то среднюю квадратичную погрешность всех деталей механического оборудования судна можно принять

$$\delta_m = 0,8 \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,3\%.$$

Примерно такие же погрешности могут появиться в расчетах веса запасов топлива, масла, провизии и других расходных материалов. Больше погрешности неизбежно связаны с расчетом веса команды и пассажиров, но самый вес этих статей нагрузки настолько мал, что ошибки в его определении не могут оказаться существенными.

**Общий вес судна.** Количество деталей, входящих в состав современного судна, достигает сотен тысяч. Из них менее 10% относятся к основным конструкциям корпуса, почти столько же — к наиболее крупным деталям механического оборудования, веса которых должны быть отнесены к числу определяющих, остальные — мелкие детали, погрешности веса которых практически не отражаются на точности расчета несущего водонемешения. Исходя из изложенного, можно оценить порядок средней квадратичной погрешности общего веса судна, определенного по рабочим чертежам, считая ошибки веса, как и сами веса определяющих грузов, одинаковыми, а их погрешности равными среднему из найденных выше цифр

$$\delta_s = \frac{1}{2} (\delta_k + \delta_m) = \frac{1}{2} (0,85 + 2,3) = 1,6\%.$$

Допустим, что в исполнительную нагрузку судна вошло  $n = 10000$  определяющих деталей. В таком случае средняя

Расчет веса водонепроницаемой переборки (тонны)

квадратичная погрешность весового водозамещения согласно формуле (14, 5) будет

$$\delta = \frac{\delta_1}{\sqrt{n}} = \frac{1,0}{\sqrt{1000}} = 0,016 \%,$$

т. е. возможная погрешность веса судна, определенного по его расчетным чертежам, будет иметь порядок сотых долей процента. Приведенные выше вычисления весьма ориентировочны, и они приводят к несомненному выводу о том, что практически в настоящее время методы расчета веса по рабочим чертежам обладают чрезмерной, ненужной точностью. Этот вывод будет еще раз и более четко подтвержден в следующем параграфе.

Более полное определение погрешностей весовой нагрузки не может быть сделано в общем виде, но для каждого конкретного проекта в свете изложенного выполнение такого расчета в случае надобности не встретит принципиальных затруднений. Однако большая трудоемкость этой работы вряд ли была бы оправдана полученными результатами.

С меньшей затратой труда погрешность весового водозамещения может быть найдена по сводной таблице нагрузки, если заранее условиться, что вес каждой статьи в ней будет указан с коэффициентом не более одной недостоверной цифры (см. § 16). Если, например, вес всех статей нагрузки вычислен с точностью до  $\pm 0,05$  т при достоверности  $\gamma = 0,999$  и нормальном распределении, а всего в ней содержится  $n = 100$  статей, то возможная ошибка водозамещения

$$\Delta_{\text{в}} = \Delta_{\text{в}} \sqrt{n} = \pm 0,05 \sqrt{100} = \pm 0,5 \text{ т.}$$

При водозамещении 1000 т этому будет соответствовать все возможная погрешность  $\delta_{\text{в}} = \pm 0,05 \%$ , что практически совпадает с найденной выше.

Сокращение трудоемкости, и притом многократное, может быть достигнуто, если в расчетах веса по рабочим чертежам будут выполняться правила, изложенные в § 15 и 16.

В табл. XVIII показаны в качестве примера результаты расчета веса водонепроницаемой переборки по той разбивке, по которой он выполняется в настоящее время конструкторским бюро. В ее следствии трех столбцах той же таблицы указаны возможные ошибки, определенные для каждой детали на основании приведенных выше соображений, и их квадраты. Извлекая квадратный корень из суммы квадратов ошибок, найдем возможную ошибку веса переборки<sup>1</sup>

$$\Delta_{\text{в}} = \pm \sqrt{\sum \Delta_{\text{в}}^2} = \pm \sqrt{58,56} = \pm 7,7 \text{ т,}$$

<sup>1</sup> Здесь предполагаем, что все ошибки случайны имеют нормальное распределение.

№ ст.	Наименование деталей	К-во шт.	Вес, кг		Возможные ошибки, кг		
			1 шт.	общая	1 шт.	общая	$\Delta_{\text{в}}^2$
1	Доски обшивки	1	365	365	5	5	25
2		1	438	438	4	4	16
3		1	435	435	4	4	16
4	Стойки	2	51	102	0,3	0,4	0,16
5		1	30,6	30,6	0,2	0,2	0,04
6		2	40,0	80,0	0,3	0,4	0,16
7		1	31,5	31,5	0,2	0,2	0,04
8		1	31,5	31,5	0,2	0,2	0,04
9		2	30,6	61,2	0,2	0,2	0,04
10		1	15,8	15,8	0,1	0,1	0,01
11	1	15,8	15,8	0,1	0,1	0,01	
12	Рёбра	2	8,75	17,5	0,06	0,08	0,006
13		1	6,6	6,6	0,04	0,04	0,002
14		1	6,6	6,6	0,04	0,04	0,002
15		4	1,75	7,0	0,01	0,02	0,000
16		10	1,7	17,0	0,01	0,03	0,001
17		2	1,6	3,2	0,01	0,01	0,000
18		2	1,0	2,0	0,01	0,01	0,000
19	Качки	4	0,70	2,8	0,01	0,02	0,000
20		4	0,40	1,6	0,01	0,02	0,000
21		17	0,30	5,1	0,01	0,04	0,002
22	Сварные швы	—	—	28,5	—	1,0	1,00
	Итого.	61		1916			58,56

чему соответствует возможная погрешность

$$\delta_4 = \pm \frac{7,7}{193} = \pm 0,4\%$$

Расчетный вес переборки, таким образом, получается

$$P = 1,916 \pm 0,008 \text{ т.}$$

Как мы увидим ниже (§ 35), такая высокая точность определения столь малого веса практически совершенно не нужна и увеличение его погрешности даже в 10 раз никак не повлияет на точность расчета весового водоизмещения всего судна в целом. Поэтому оказывается вполне возможным выдвинуть из всего списка деталей, указанных в табл. XVIII, в качестве определяющих только первые три (листы обшивки), общий вес которых достигает 75% веса всей переборки.

Возможная погрешность суммы этих деталей

$$\delta_{30} = \pm \sqrt{\frac{1^2 \cdot 25 + 16 + 16}{566 + 438 + 435}} 100 = \pm 0,5\%$$

Статистика показывает, что вес набора и всех подкрепленя на подобных переборках колеблется в пределах  $\sum p_i = 25 \pm 3\%$  общего веса переборки. Поэтому согласно теореме о приближенной пропорциональности (§ 15) возможная погрешность общего веса переборки, найденного по его определяющим элементам, будет не более

$$\delta_{30} = \pm \sqrt{0,5^2 + 3^2} = \pm 3\%,$$

что может считаться вполне удовлетворительным.

Весь расчет веса переборки при этом значительно упрощается и сводится к табл. XIX, где вес набора и крепленя выделенным делением веса обшивки на отношение  $\frac{p_i}{\sum p_i} = \frac{0,25}{0,25} = 1$ .

Таблица XIX

Расчет веса водонепроницаемой переборки (упрощенный)

Наименование деталей	К-во	Вес, кг		Возможные отклонения, кг		$\Delta_{\text{ит}}$
		1 шт.	общий	1 шт.	общий	
Листы обшивки	1	565	565	5	5	25
	1	438	438	4	4	16
	1	435	435	4	4	16
Набор и крепленя	58	—	480	—	58	1300
Итого:	61	—	1908	—	—	1400

Расчетный вес переборки при этом

$$P = 1,92 \pm 0,06 \text{ т.}$$

Для использования этого способа необходимо лишь иметь указанные выше статистические данные, которые должны быть получены от времени выполнения более подробными расчетами для каждого из отдельных конструкций, изготавливаемых по новым проектам.

### § 34. Технологические ошибки

Технологическими ошибками мы называем те случайные отклонения от размеров, объема и веса, указанных на чертежах, которые связаны с реальными условиями производства: ограниченной точностью измерительных приборов, рабочего инструмента и оборудования цехов. Именно неизбежностью технологических ошибок объясняется тот известный факт, что каждое судно одной и той же серии, построенной по тем же чертежам, имеет водоизмещение, несколько отличающееся от других.

Границы возможных значений технологических ошибок устанавливаются перед началом постройки нормами предельных допусков. Следует заметить, что средние погрешности веса деталей, имеющих всепронизную механическую обработку по предельным калибрам, весьма малы и, как правило, ими можно пренебречь. Так, например, валки диаметром 30 мм и длиной 500 мм, обработанный по 3-му классу точности ( $x_3$ ), может иметь среднюю квадратичную погрешность веса не более 0,3%. Даже гребной вал диаметром 400 мм, длиной 10 м и весом более 10 т, обработанный, кроме шек, по допускам свободных размеров, может дать среднее квадратичное отклонение веса от теоретического не более, чем на 30—35 кг.

Вес прокатного материала. Характерной особенностью многих весовых допусков, применяемых в судостроении, является их предельная несимметричность, позволяющая выбирать для постройки судна наиболее легкие изделия из партий массового изготовления. Так, например, при приеме прокатной стали для судостроения часто допускается только недозвес (до 3%). Листы и профили с перевесом бракуются. При таких условиях вес любой конструкции, определенный по чертежу, неизбежно содержит два вида ошибок: систематическую, вызванную односторонним отклонением любого фактического веса от расчетного, и случайную, связанную с возможными колебаниями фактического веса в пределах допусков.

Установить истинный закон распределения случайных отклонений можно было бы только изучив особенности производства на прокатном заводе или статистику десятилетия его продукции. Однако для наших целей пока вполне достаточно предположить,

что интересующие нас отклонения распределяются равномерно от 0 до 3%, и, следовательно, систематическая погрешность спецификационного веса проката составляла +1,5%, а его средняя квадратичная погрешность равна  $(3-1,5) : \sqrt{3} = 0,9\%$ .

Следует заметить, что указанные цифры не являются постоянными даже при постоянстве предельных допусков. Если бы каждая деталь корпуса прокатывалась отдельно, после новой и самостоятельной регулировки прокатного стана, можно было бы предположить, что средняя квадратичная погрешность веса корпуса состоящего из  $n$  деталей, будет в  $\sqrt{n}$  раз меньше такой же погрешности каждой отдельной детали, а систематическая погрешность в +1,5% распространится и на вес всего корпуса.

В действительности прокатный материал изготавливается металлургическим заводом большими партиями так, что случайные ошибки, связанные с регулировкой стана, для каждого типа размера проката, каущегося на постройку данной серии кораблей добавляются в качестве систематических, а переменными остаются лишь отклонения, зависящие от неустойчивости состава и температуры металла, скорости проката и других подобных случайных причин.

Для уточнения этого обстоятельства было бы интересно при анализе каждой партии металла от прокатного завода устанавливать его истинное значение отклонений и в весе отдельных типов размеров от теоретической нормы (по ГОСТ) и по ним определять закон распределения ошибок, которые получаются при пользования действующими сортаментами. Однако особой необходимости в этом нет, так как допуски в весе материала в настоящее время вполне соизмеримы и оказываются даже несколько меньшими, чем допуски при изготовлении из этого материала отдельных узлов и деталей корпуса. А при композиции нескольких законов распределения, как мы видели выше (§ 12), многие их особенности сглаживаются, и некоторая неточность их определения становится несущественной.

**Корпусные конструкции.** Вес корпусных конструкций может быть проверен при постройке с большой степенью точности непосредственным взвешиванием отдельных деталей или их комплектов, технологических узлов и готовых секций. Современное заводское оборудование позволяет без особых затруднений взвешивать детали весом 10 кг с возможной ошибкой не больше  $\pm 1\%$ , весом 100 кг — не больше  $\pm 0,5\%$ , а весом свыше 10 т — не больше  $\pm 0,2\%$ .

Если учесть, что, например, 100 деталей весом по 100 кг (или 10 т) при взвешивании порознь дадут с достоверностью  $\gamma = 0,999$  возможную погрешность

$$\Delta_{\gamma} = z_{\gamma} \frac{\Delta_{\text{ог}}}{\sqrt{3n}} = \pm 3,10 \frac{0,5}{\sqrt{3 \cdot 100}} = \pm 0,1\%,$$

а взвешивание одновременно целого состоящего из них узла может производиться с точностью до  $\pm 0,2\%$ , то окажется, что подетальное взвешивание даст точность большую, чем взвешивание готовых узлов или комплектов. Но, с другой стороны, и взвешивание целых секций может дать достаточно высокую точность. Так, например, для судна среднего водоизмещения, корпус которого будет состоять всего из 36 секций весом по 20—30 т каждая, возможен погрешность веса корпуса по данным взвешивания не превышающей

$$\Delta_{\gamma} = \pm 3,10 \frac{0,2}{\sqrt{3 \cdot 36}} = \pm 0,06\%.$$

Эта погрешность имеет тот же порядок, что и погрешность определения веса корпуса по рабочим чертежам.

Между тем допуски в весе готовых деталей, узлов и секций существенно превышают те ошибки, которые могут быть получены при взвешивании<sup>1</sup>. Даже для крупных скоростных судов, требующих наибольшей точности изготовления, обычно считаются допустимыми отклонения в весе от определенного по чертежу и предельных от нуля до  $-5\%$ . При том же 36 секциях это может привести к систематической погрешности в весе всего корпуса  $-2,5\%$  и сверх того к случайной погрешности, достигающей до

$$\Delta_{\gamma} = \pm 3,10 \frac{2,5}{\sqrt{3 \cdot 36}} = \pm 0,7\%.$$

т. е. примерно в 10 раз большей, чем может быть обеспечено взвешиванием или расчетами по рабочим чертежам. Отсюда может быть сделан следующий важный вывод.

Как мы уже отмечали, истинное значение любой величины может быть найдено только как предел, к которому стремится ее математическое ожидание при бесконечном увеличении точности или количества ее независимых определений. С этой точки зрения водоизмещение всех фактически построенных судов, как и веса всех их деталей, являются случайными, отличающимися от истинных на величину случайных технологических ошибок. При новых постройках они могут не повториться, и в прошлом нового проектирования с использованием данного судна в качестве прототипа они не могут рассматриваться как достоверные.

Поэтому при новом проектировании для определения точности веса корпуса прототипа по его отстойной нагрузке следует руководствоваться не точностью взвешивания деталей на заводском строителе, а нормами допусков, по которым эти детали принимались весовым контролем. Точность же взвешивания должна

<sup>1</sup> Все приведенные в настоящем параграфе цифры даны условно из предположения идеального судостроения.

учитываться только при расчетах, не выходящих за пределы изучения свойств данного конкретного судна.

По этой же причине для любого проектирования следует по возможности использовать не отчетные (по данным конструкторов) и исполнительные нагрузки прототипов, составленные по рабочим чертежам, как содержащие меньше возможные ошибки. Только при крупносерийной постройке, свыше 40 судов по одному проекту (§ 6), среднее из взвешивания их однородных деталей можно приближаться по точности к весу, определяемому исполнительными нагрузками.

**Механическое оборудование.** К такому же выводу можно прийти и относительно веса главных и вспомогательных механизмов и других предметов оборудования, как изготавливаемых судостроительным заводом, так и получаемых им от контрагентов. Возьмем для примера дизель, весящий 25 т. При взвешивании на крановых весах его вес может быть определен с точностью до  $\pm 0,2\%$ , или  $\pm 50$  кг. Между тем, допуск в его весу установкой действующими нормами в пределах от  $+3$  до  $-5\%$  т. е. может достигать  $+750$  кг или  $-1250$  кг. Такие отклонения от номинала, указанного в чертежах, не могли служить основанием для его отбраковки при постройке прототипа; они будут считаться допустимыми также и при новой постройке.

Еще более широкие допуски устанавливаются для вспомогательных механизмов, арматуры, деталей калотропроводов и т. п. (от  $+4$  до  $-5\%$ ), а большая часть электроборудования, включая кабели, навигационные приборы и т. д., принимается на допусках в пределах  $\pm 5\%$ .

**Закон распределения.** Законы распределения технологических ошибок при механической обработке деталей могут быть установлены только на основе систематического их учета непосредственно на производстве. Априори можно лишь предполагать, что большая часть изделий должна группироваться ближе к середине интервала допусков, так как во избежание брака к этому должны стремиться исполнители. Поэтому есть некоторые основания признать в расчетах, например, линейный закон распределения (1), 8), при котором средняя квадратичная погрешность

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{\delta_{\text{гр}}}{\sqrt{2}} = 0,41\delta_{\text{гр}}$$

Однако не исключена возможность и равновероятного распределения, при котором

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{\delta_{\text{гр}}}{\sqrt{3}} = 0,58\delta_{\text{гр}}$$

Так как оба эти предположения представляются одинаково вероятными, то, по-видимому, наиболее рационально принимать среднее значение

$$\delta = 0,5\delta_{\text{гр}}$$

тем более, что любая погрешность, если она определяется не в следовательских целях, как мы уже отмечали, должна вычисляться с точностью до одной, наименьшим двух значащих цифр.

**Запасы.** Основным источником погрешностей при определении возможных запасов топлива, масла, пресной воды и других жидких веществ служат технологические ошибки в объеме цистерн, предназначенных для их размещения. Эти ошибки складываются из отклонений в габаритных размерах цистерн ( $l \times b \times h$ ) от указанных на чертеже и случайных искривлений их набора и ошибки по сравнению с заданным чертежом.

Первые являются как бы ошибками масштаба, и внесенная ими погрешность объема легко определяется по общей формуле

$$\delta_1 = \delta(l\delta l) = \sqrt{[\delta(l)]^2 + [l(\delta(b))]^2 + [l\delta(h)]^2}, \quad (34, 1)$$

так как коэффициент полезности объема от этих ошибок практически не зависит.

Для определения вторых можно воспользоваться аналогией в их структуре с ошибками расчета водометрической по теоретической чертежу с применением планшета; отклонения фактической поверхности обшивки борта и переборок, выдолбленных цистерм, от их теоретической формы носят такой же характер случайных искривлений, как и путь, проходимый иглой планшета по чертежу. Поэтому и в данном случае, повторив рассуждения § 20, мы должны получить выражение средней квадратичной погрешности площади поперечного сечения цистерны, сходное с равенством (20, 3),

$$\delta_2 = 4 \frac{\sigma_2}{\sqrt{ab}}, \quad (34, 2)$$

где  $\sigma_2$  — среднее квадратичное отклонение поверхности обшивки цистерны от теоретической;

$a$  и  $b$  — габаритные размеры ее поперечного сечения.

Средняя квадратичная погрешность длины  $l$  цистермы по той же причине может считаться равной  $2 \frac{\sigma_2}{l}$ , и, следовательно, средняя квадратичная погрешность ее объема только вследствие рассмотряемых искривлений будет

$$\delta_2 = 4 \frac{\sigma_2}{\sqrt{ab}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{ab}{l^2}}, \quad (34, 3)$$

и общая погрешность объема определится по сумме дисперсий

$$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \quad (34, 4)$$

Эта величина обычно имеет такой же порядок, как и определенная емкость той же цистерны по ее рабочему чертежу. Меньшая погрешность в определении объема может быть достигнута при измерении фактической емкости на построенном корабле или вальме.

Однако к этому случаю применимо все то, что было сказано выше о весе корпусных конструкций, и поэтому результаты такого измерения вполне применимы только к тому судну, на котором они производились.

При расчете веса жидкостей, размещаемых в той или иной цистерне, часто учитывают температуру жидкости, но пренебрегают температурными изменениями объема цистерны. Эта практика не всегда может быть оправдана: если сравнить коэффициент теплового расширения воды, например, при  $10^{\circ}\text{C}$

$$\frac{dV}{V} = -0,88 \cdot 10^4$$

с таким же коэффициентом расширения стали (объемным)

$$\frac{dV}{V} = -0,70 \cdot 10^4,$$

можно увидеть, что последний вполне сопоставим с первым, и поэтому пренебрегать им можно лишь в том случае, если одновременно пренебрегается и тепловым расширением воды. Только при температурах выше  $20^{\circ}\text{C}$  коэффициент расширения стали окажется втрое меньше, чем у воды ( $-2,06 \times 10^{-4}$ ), и пренебрегать им может оказаться оправданным.

Аналогично могут быть определены ошибки, возникающие вследствие пренебрежения тепловым расширением цистерн, для других жидкостей.

**Экипаж.** Вес экипажа всегда определяется с наименьшей точностью: ни люди, ни их личные вещи никогда не взвешиваются, но включаются в нагрузку условно. Погрешность в весе каждого человека с его вещами может при этом достигать  $\pm 25\%$ , однако при личном составе в 25—100 чел. соответствующая погрешность всей статьи при этом не превосходит 3—5%, что для статьи столь малого веса оказывается вполне приемлемым.

**Общий вес судна.** Пренежение односторонних и несимметричных допусков приводит к появлению весьма существенных систематических ошибок в расчетах нагрузки проектируемых судов. Так, например, если 70% веса судна нетто приходится на долю корпусных конструкций, 20% — на главные и вспомогательные механизмы и другое крупное оборудование и 10% — на электротрубопроводы, каюты, мебель и тому подобное малое оборудование, то систематическая погрешность полного веса нетто окажется

$$0,7 \cdot 2,5 + 0,2 \cdot 1,0 + 2\%.$$

В других условиях эта цифра может уменьшаться до 1—1,5%, но во всех случаях она во много раз превышает как возможные случайные погрешности теоретического веса, определенного по

рабочим чертежам, так и случайные отклонения от него, возникающие в производстве.

Допустим, например, что корпус судна собран из 36 секций, состоящих каждая из 15 узлов (весовых комплексов). При среднем квадратичном отклонении в весе каждого комплекта на 1,5% получим среднюю квадратичную погрешность веса корпуса

$$\delta_k = \frac{1,5}{\sqrt{36 \cdot 15}} = 0,07\%.$$

Допустим далее, что в состав механического оборудования входит 150 комплексов, имеющих каждый среднее квадратичное отклонение веса в 2,3%. Тогда среднюю квадратичную погрешность веса всей этой группы можно считать

$$\delta_m = \frac{2,3}{\sqrt{150}} = 0,19\%.$$

Наконец, на прочего, более мелкого оборудования можно составить 120 весовых комплектов со средними квадратичными отклонениями каждого около 3%. Следовательно, для них

$$\delta_n = \frac{3}{\sqrt{120}} = 0,27\%.$$

В целом же среднюю квадратичную погрешность веса рассматриваемого судна, полученную в результате технологических ошибок, найдем так:

$$\delta = \sqrt{(0,7 \cdot 0,07)^2 + (0,2 \cdot 0,19)^2 + (0,1 \cdot 0,27)^2} = 0,07\%.$$

Практически эти величины могут меняться в пределах примерно от 0,05 до 0,15%, но всегда оказываются в 15—20 раз меньше систематической ошибки, указанной выше. В таких условиях устранение систематических ошибок следует считать немаловажной задачей.

### § 35. Сводные таблицы нагрузки

Все расчеты плавучести, остойчивости, ходкости и грузоподъемности связываются с математическим ожиданием веса проектируемого судна и должны учитывать те реальные отклонения от него, которые могут возникнуть в результате погрешностей как расчетов, так и изготовления. Для рабочего проектирования, как мы видели выше, решающее значение приобретают технологические ошибки, но на более ранних стадиях погрешности предварительного расчета веса отдельных как дано асех статей нагрузки могут оказаться сопоставимыми и даже большими, чем ожидаемые технологические ошибки. В таких условиях погрешность каждой статьи нагрузки может быть найдена только по про-

ану сложения дисперсий, а средняя квадратичная погрешность весового водозамещения, получаемого в результате сложения всех статей, окажется равной

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum_i (\delta_{0i}^2 + \delta_{1i}^2) P_i^2}}{\sum_i P_i} \quad (35)$$

где  $\delta_{0i}$  и  $\delta_{1i}$  — средние квадратичные погрешности определения веса по статье  $i$ , рассчитанная в технологическом соответствии;

$P_i$  — вес данной статьи.

Введя обозначение  $P_i = P_1 : \sum P_i$ , перепишем это равенство в следующем виде:

$$\delta = \sqrt{\sum (\delta_{0i} P_i)^2 + \sum (\delta_{1i} P_i)^2} \quad (35)$$

Допустимая погрешность водозамещения должна соответствовать стадии проектирования, к которой относится данный расчет нагрузки; возможные погрешности технологического характера состоят из оборудования и технического уровня производства на тех заводах, где предполагается застройка проектируемого судна. Следовательно, формула (35, 2) позволяет определить допустимую среднюю квадратичную погрешность расчета нагрузки по чертежам

$$\delta_p = \sqrt{\sum (\delta_{0i} P_i)^2} = \sqrt{\delta^2 - \sum (\delta_{1i} P_i)^2} \quad (35)$$

На любом конкретном примере легко убедиться в том, что в начальных стадиях проектирования второй член подкоренной выражения удовлетворяет требованиям (14, 13) и, следовательно, им можно пренебречь, ограничиваясь условием

$$\sqrt{\sum (\delta_{0i} P_i)^2} < \delta, \quad (35)$$

которому и должны быть подчинены проектные расчеты нагрузки.

**Номенклатура статей нагрузки.** Детальный расчет нагрузки выполняемый на рабочих чертежах, имеет целью не только проверку весового водозамещения и положения центра тяжести проектируемого корабля, но и установление тех норм, отклонения которых проверятся вес изготовляемых узлов и деталей. Результаты этого расчета используются также при разработке технической постройки, планировании и нормировании производства. Поэтому форма таблиц детальной нагрузки не всегда соответствует потребностям проектирования, а результаты ее расчета нуждаются в обобщении и систематизации. Для этой цели составляются сводные таблицы исполнительской нагрузки, из которых при необходимости проектирования по данному прототипу методом преобразования могут быть получены сводные же таблицы веса нового корабля.

Совершенно очевидно, что для простоты использования разбивка всех весов на статьи и группы должна быть произведена в сводной таблице прежде всего по признаку сходства методов преобразования, так как это дает возможность применить гипотезу приближенной пропорциональности (§ 15) и тем самым существенно сократить объем вычислительной работы. Наиболее крупные статьи детальной нагрузки, такие, как металлический корпус, главные механизмы и т. п., принимаются в качестве определяющих. Остальные, дополнительные статьи группируются в соответствии с § 14 так, чтобы общее их число было по возможности наименьшим и вес примерно одинаковым, но по отдельности не превышала веса каждой из определяющих статей. К числу определяющих должны быть отнесены и все постоянные грузы, вес которых не зависит от водозамещения и может быть вычислен на первых же стадиях проектирования с высокой точностью. Сюда относятся, например, полезный груз, все навигационное оборудование, средства связи и т. д.

В ходе проектирования номенклатура статей нагрузки должна меняться в соответствии с необходимой точностью расчета весового водозамещения. В начале проектирования при определении необходимого водозамещения в первом приближении обычно оказывается достаточной разбивка нагрузки всего на три группы с выделением в каждой группе не более двух определяющих статей. Например,

**Группа А** — корпус:

статья А-1 — обшивка и набор корпуса;

статья А-2 — прочее в составе корпуса.

**Группа В** — механизмы:

статья В-1 — главные двигатели (котлы, турбины);

статья В-2 — топливо, масло, вода для котлов;

статья В-3 — валы, венты и прочее оборудование.

**Группа С** — постоянные грузы:

статья С-1 — полезный груз (перевозимый);

статья С-2 — навигационные приборы и пр.

В дальнейшем каждая из дополнительных статей А-2 и В-3 постепенно детализируется так, что на стадии технического проекта общее число статей может достигнуть 25—30. Для нового проектируемого залога вполне достаточно, и лишь в исполнительской нагрузке по рабочим чертежам, по указанным выше соображениям, число статей может быть увеличено. Но и при этом ни одна статья не должна превышать из одной статьи в другую, чтобы при использовании данного судна в качестве прототипа для нового проектирования укрупнение статей могло быть произведено простыми объединениями, без более сложных пересчетов.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> В некоторых случаях (§ 40) может меняться шафр статьи, но не ее содержание.

Нормы допустимой погрешности отдельных статей нагрузки могут быть установлены в соответствии с изложенным в § 14 и с учетом формулы (35, 4) для каждого конкретного проекта и каждой стадии проектирования. Для этого необходимо, выделив наиболее несовершенные статьи, вычисленные веса которых с достаточной высокой точностью не встречает существенных затруднений, найти их средние квадратичные погрешности и затем среднюю квадратичную погрешность их суммы

$$\delta(\rho_s) = \delta\left(\sum_i \rho_i\right) = \frac{1}{\sum_i \rho_i} \sqrt{\sum_i [\rho_i \delta(\rho_i)]^2}, \quad (35, 5)$$

где индекс  $i$  может иметь все значения, соответствующие отобранным статьям нагрузки, а через  $\rho_i$  обозначена относительная сумма их весов, выраженная в долях водоизмещения.

Допустимую среднюю квадратичную погрешность суммы всех прочих статей нагрузки  $\delta(\rho_p)$  находим по формуле (14, 9)

$$\delta(\rho_p) = \frac{1}{1 - \rho_s} \sqrt{D^2 - [\rho_s \delta(\rho_s)]^2}, \quad (35, 6)$$

где  $\delta$  — средняя квадратичная погрешность весового водоизмещения, допустимая для данной стадии проектирования.

Эта погрешность может быть распределена между остальными статьями нагрузки, например, по принципу равенства дисперсий их ошибок (14, 7)

$$\delta(\rho_i) = \frac{1 - \rho_s}{\rho_i} \frac{\delta(\rho_p)}{\sqrt{\rho_s}}, \quad (35, 7)$$

где  $\rho_p$  — общее число оставшихся статей нагрузки.

Применение этой методики показано на примере.

Пример. В табл. XX приведена нагрузка грузо-пассажирского теплохода водоизмещением 6500 т. В качестве наиболее несовершенных статей при проектировании приняты:

A-1 — продольные связи корпуса;

A-2 — бортовая обшивка, палубы и платформы;

B-1 — главные механизмы;

B-3 — топливо, масло, пресная вода

в всей группе С.

Общий вес отобранных статей составил согласно таблице  $\sum \rho_i = 16,2 + 7,8 + 8,5 + 10,0 + 44,8 = 87,3\%$  водоизмещения. Найти допустимую среднюю квадратичную погрешность оставшихся статей нагрузки, если весовое водоизмещение судна в окончательном проекте должно быть определено со средней квадратичной погрешностью  $\delta = 2,5\%$ .

По формуле (35,5) находим среднюю квадратичную погрешность суммарного веса отобранных статей нагрузки

$$\delta(\rho_s) = \frac{1}{87,3} \sqrt{16,2 \cdot 3,9^2 + (7,8 \cdot 7,8)^2 + (8,5 \cdot 8,9)^2 + (10,0 \cdot 4,1)^2 + (44,8 \cdot 0,2)^2} = 1,2\%.$$

Средняя таблица нагрузки

Наименование групп и статей		Вес $\rho_i$ от водоизмещения	Средняя квадратичная погрешность в %, от веса статьи		
			исходный проект	текущий проект	рабочий проект
Группа А					
A-1	Продольные связи корпуса	16,2	3,9	0,7	0,4
A-2	Бортовая обшивка, палубы, платформы	7,8	7,8	1,4	0,8
A-3	Переборки и перегородки	1,8	33,0	6,7	3,6
A-4	Деревянные части корпуса	0,8	75,0	15,0	8,0
A-5	Дольные связи	0,2	200,0	40,0	21,0
A-6	Рулевое устройство	0,6	100,0	20,0	11,0
A-7	Шлюпочное устройство	0,5	120,0	24,0	13,0
A-8	Устройство для яхты	0,6	100,0	20,0	11,0
A-9	Мачты и грузоповышное устройство	0,3	200,0	40,0	20,0
A-10	Водоотливные средства	0,2	200,0	40,0	20,0
A-11	Прочие системы и устройства, кроме приведенных в группу В	0,8	75,0	15,0	8,0
Итого по группе А		29,9	6,7	1,3	0,7
Группа В					
B-1	Главные механизмы	8,5	3,9	1,0	0,8
B-2	Электроснабжение	1,0	60,0	12,0	6,4
B-3	Топливо, масло, пресная вода	10,0	4,1	0,8	0,6
B-4	Звенья с буксами, проушины, якорный якорь и оборудование механизмов	3,0	20,0	4,0	2,1
B-5	Осушительная система и отопление	0,6	100,0	20,0	11,0
B-6	Дизель, буксирное и шлюпочное устройства	0,7	97,0	19,0	9,3
B-7	Опорки и калитки	1,5	40,0	8,0	4,3
Итого по группе В		25,3	5,8	1,2	0,8



Продолжение табл. X

Наименование групп и статей		Вес в % от водоизмещения	Средние квадратичные погрешности в % от веса статьи		
			исполнит. проект	технологический проект	рабочий проект
Группа С					
С-1	Генеральный груз	40,0	0,0	0,0	0,0
С-2	Пассажиры с багажом, экипажем и оборудованием пассажирской	3,3	3,0	3,0	3,0
С-3	Навигационное оборудование	0,5	3,3	3,3	3,3
С-4	Средства связи	1,0	1,7	1,7	1,7
Итого по группе С		44,8	0,2	0,2	0,2
Итого по судну		100	2,5	0,5	0,2

Следовательно, по формуле (35, 6) средняя квадратичная погрешность суммарного веса остальных статей нагрузки может достигать

$$\delta(\rho_2) = \frac{1}{1 - 0,873} \sqrt{3,3^2 - (0,873 \cdot 1,7)^2} \approx 18\%.$$

Если таких статей имеется  $n_2 = 14$ . Подставляя известные значения в формулу (35, 7), получим

$$\delta(\rho_2) = \frac{1 - 0,873}{\rho_1} \frac{18}{\sqrt{14}} = \frac{0,60}{\rho_1} \%, \quad (35, 8)$$

где  $\rho_1$  — должно быть выражено десятичной дробью.

Пользуясь этой формулой, находим, например, что средняя квадратичная погрешность в весе переборок и выгородок может достигать до

$$\delta(\rho_{A-2}) = \frac{0,60}{0,316} = 33\%.$$

а погрешность в весе вспомогательных средств — даже до

$$\delta(\rho_{A-3}) = \frac{0,60}{0,002} = 300\%.$$

Ясно, что для получения такой точности во многих случаях может оказаться достаточным даже приблизительное определение. Так же вычисляются допустимые средние квадратичные погрешности других статей.

Общая погрешность веса всей группы А находится, как обычно, по формуле

$$\delta(A) = \frac{1}{\sum \rho_i} \sqrt{\sum \rho_i^2 \delta(\rho_i)^2} = 4,7\%.$$

для  $\rho_i \delta(\rho_i)^2$  для отдельных статей нагрузки уже были выписаны при применении формул (35, 6), а их сумма для остальных статей нагрузки оказалась простым умножением на число этих статей квадрата числителя правой части выражения (35, 8).

Аналогично вычисляются допустимые погрешности статей группы В.

Вес воздуха во внутренних помещениях судна не должен включаться в нагрузку, как это до сих пор практикуется некоторыми проектными организациями [17—320]. Если же в нагрузку протопла, используемого при новом проектировании, этот вес все же включен, он должен рассматриваться как систематическая ошибка, величина которой, впрочем, совершенно несущественна, так как обычно не превышает 0,1% водоизмещения.

**Систематические ошибки.** Систематические ошибки техногенного происхождения обычно не учитываются ни при составлении исполнительных нагрузок по рабочим чертежам, ни при их использовании для нового проектирования. Между тем, как было показано в § 8, наличие этих ошибок существенно снижает достоверность проекта, приводит к необоснованному завышению водоизмещения, а в некоторых случаях может оказаться причиной и более серьезных последствий.

Можно предложить несколько способов устранения указанных недостатков. Например:

- изменять действующие нормы допусков, заменить их симметричными относительно нуля;
- учитывать существующие нормы допусков на прокат, готовые узлы и конструктивные поставки при расчете веса изделий по каждому рабочему чертежу;
- вводить в судовую таблицу нагрузки специальные поправки, устраняющие систематические ошибки на разных стадиях ее составления или перед ее использованием для нового проектирования.

Отказ от несимметричных допусков, с точки зрения теории ошибок, наиболее логичен и радикален. Некоторое увеличение веса корпусных конструкций, которое при этом неизбежно должно произойти, может быть компенсировано повышением норм прочности на такую же величину за счет более достоверных гарантий расчетных толщин листов и профилей. Для деталей механического оборудования могут быть соответственно понижены номинальные веса, так что отбор наиболее легких изделий массового или крупносерийного производства по-прежнему будет иметь место.

Преимуществом второго из указанных выше способов является отсутствие необходимости в каких-либо междоветовых согласованиях. Но введение его в практику связано с условием и без того хронической расчетной работы, что может явиться новым источником трудновонтролируемых случайных просчетов.

Поэтому в настоящее время скорее всего можно рекомендовать введение соответствующих поправок непосредственно в исполнительную нагрузку при ее составлении (для новых судов) или при использовании судов более ранних проектов в качестве прототипов для нового проектирования. Величина этих поправок найдется простым умножением веса каждой отдельной статьи нагрузки на среднее из соответствующих ей предельных допусков, а исправленный вес — вычитанием полученной поправки из веса, определенного по рабочим чертежам. Так, например, если вес всех переборок на судне, указанный в исполнительной нагрузке, равен 123 т и при их приеме в цехах были приняты допуски в вес в пределах от -5 до 0%, то систематическая ошибка их суммарного веса составит  $123 \cdot 0,025 = 3$  т, следовательно, математическим ожиданием веса переборок следует считать

$$123 - 3 = 120 \text{ т.}$$

**Нормы точности вычислений веса.** По приведенным выше формулам легко могут быть установлены нормы точности расчета любой статьи нагрузки для любого проекта. Однако для практиков-конструкторов было бы удобнее указывать нормы точности не результаты расчета, а тех вычислений, с помощью которых этот результат получается. Под этими последними мы понимаем указание количества или порядка последней значащей цифры, до которой должен быть доведен вычисление на той или иной стадии расчета (9—10).

Основой для разработки таких норм, очевидно, должна служить допустимая ошибка весового водоизмещения, определяемая делением назначенного проектируемого судна и той стадии проектирования, для которой предназначена данная нагрузка. Анализом и логическим обоснованием соответствующих погрешностей займемся ниже (§ 39), здесь же отметим только, что если возможная погрешность водоизмещения достигает, например,  $\pm 1\%$ , то нет смысла ни вычислять, ни изображать его числом, содержащим более трех значащих цифр, из которых последняя всегда будет недостоверной. При таких условиях водоизмещение всех судов свыше 500 т должно округляться до  $\pm 5$  т, судов свыше 1000 т — до  $\pm 10$  т и т. д.

Допустимая ошибка каждой из отдельных статей нагрузки согласно равенству (14,3) должна быть в  $\sqrt{n}$  раз меньше допустимой ошибки водоизмещения. Выше мы рекомендовали достигать суммарную нагрузку из 20—25 статей. Следовательно, допустимая ошибка каждой из них будет в пять раз меньше допустимой ошибки водоизмещения.

Допустимые ошибки отдельных рабочих чертежей не могут быть оценены одной нормой, так как количество таких чертежей, относящихся к разным статьям, может быть различным. Однако, продолжая наши рассуждения, можно прийти к заклю-

чению, что при наличии в статье не более 100 чертежей ошибка расчета веса по каждому из них должна быть в 10 раз меньше ошибки веса самой статьи. Для тех статей, где число рабочих чертежей превышает 100, но не более 400, эту норму следует считать вдвое и т. д.

Аналогично можно наметить допустимые точности расчета веса отдельных деталей каждого рабочего чертежа. При этом для деталей, вес которых меньше нормы допустимой ошибки как бланк и кой, он может оцениваться лишь ориентировочно, общей суммой. Для этого можно пользоваться аналогией с выполненными ранее конструкциями, считая этот вес пропорциональным сумме весов всех крупных деталей, как было указано выше.

В результате всех приведенных рассуждений в практику каждого конструкторского бюро может быть введена постоянная таблица допусков для расчетов веса, с указанием порядка последней значащей цифры, до которой рекомендуется доводить вычисление. В качестве одного из возможных примеров приводится табл. XXI.

Таблица XXI

Нормы точности вычислений веса, т

Объект расчета	Водоизмещение, т					
	100—500	500—1000	1000—2000	2000—10000	10000—50000	50000—100000
<b>Водоизмещение</b>						
Эскизный проект	5	10	50	100	500	1000
Технический проект	1	5	10	50	100	500
Рабочий проект	1	5	10	50	100	500
<b>Статьи нагрузки</b>						
Эскизный проект	1	1	10	10	100	100
Технический проект	0,1	1	1	10	10	100
Рабочий проект	0,1	1	1	10	10	100
<b>Рабочие чертежи</b>						
По корпусу	0,01	0,1	0,1	1	1	10
По оборудованию	0,01	0,05	0,1	0,5	1	5
<b>Детали на чертежах</b>						
По корпусу	0,001	0,01	0,01	0,1	0,1	1
По оборудованию	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5

Возможные ошибки, связанные с точностью исходных данных и формул пересчета, будут не меньше указанных здесь величин, поэтому последнюю значащую цифру во всех случаях следует рассматривать как недостоверную и записывать результат вычисления, например, так:

$$D = 4650 \pm 50 \text{ м.}$$

В настоящее время таблицы нагрузок вычисляются вручную более подробно, хотя действительная точность результатов от этого, как мы видели, не выигрывает.

### § 36. Расчет координат центра тяжести

**Аппликата центра тяжести.** Возмещение центра тяжести судна над основной  $z_g$  определяется отношением

$$z_g = \frac{M_g}{D} = \frac{\sum P_i z_i}{D} = \sum p_i z_i, \quad (36, 1)$$

где  $M_g$  — статический момент всех грузов от основной;

$P_i$  и  $z_i$  — вес и аппликата центра тяжести груза;

$p_i = \frac{P_i}{D}$  — относительный вес груза, выраженный в долях водоизмещения.

Величина  $z_g$  должна рассматриваться как функция многих независимых переменных  $P_i$  и  $z_i$ . Поэтому ее средняя квадратичная ошибка может быть найдена по формуле (10, 11)

$$\sigma(z_g) = \sqrt{\sum \left[ \frac{\partial z_g}{\partial P_i} \sigma(P_i) \right]^2 + \sum \left[ \frac{\partial z_g}{\partial z_i} \sigma(z_i) \right]^2}. \quad (36, 2)$$

Дифференцируя равенство (36, 1) по любой из переменных  $P_i$  и пренебрегая производными высших порядков, получим

$$\frac{\partial z_g}{\partial P_i} \sigma(P_i) = z_i \frac{\sigma(P_i)}{D} \quad (36, 3)$$

и, следовательно,

$$\sum \left[ \frac{\partial z_g}{\partial P_i} \sigma(P_i) \right]^2 = z_g^2 \frac{\sum P_i \sigma(P_i)^2}{D^2} = z_g^2 \delta(D) \sigma^2. \quad (36, 4)$$

Здесь мы заменили среднее значение аппликаты  $z_{g0}$  аппликатой общего центра тяжести  $z_g$ . Строго говоря, такая замена была бы вполне законной только при условии пропорциональности ошибок веса всех грузов своему их весу, т. е. при наличии одинаковых коэффициентов их определения. Однако, стремясь лишь к ориентировочной оценке порядка возможных ошибок, можем считать эту замену допустимой. В каждом же конкретном проекте расчет

может быть произведен и без этой замены, непосредственно по формуле (36, 3), если в этом встретится необходимость.

Аналогично и второе слагаемое под знаком равенства (36, 2) может быть преобразовано так:

$$\sum \left[ \frac{\partial z_g}{\partial z_i} \sigma(z_i) \right]^2 = \left[ \sigma(z_i) \right]^2 \sum \left( \frac{P_i}{D} \right)^2. \quad (36, 5)$$

Подставив найденные выражения в равенство (36, 2) и разделив обе его части на  $z_g$ , получим среднюю квадратичную погрешность аппликаты центра тяжести

$$\delta(z_g) = \sqrt{\delta(D) \sigma^2 + \left[ \frac{\sigma(z_i)}{z_g} \right]^2 \sum p_i^2}. \quad (36, 6)$$

Следует заметить, что  $\sum p_i^2$  уменьшается с увеличением числа статей нагрузки, на которые разбивается общий вес судна, и с увеличением равномерности этой разбивки. Так, например, если нагрузка судна состоит только из трех статей с одинаковыми весами  $p_i = 0,6$ ;  $0,3$  и  $0,1$ , то  $\sum p_i^2 = 0,46$ ; если же три статьи будут иметь одинаковый относительный вес —  $\sum p_i^2 = 3 \cdot 0,333^2 = 0,333$ , а если каждую из последних статей разбить еще на две равные части —  $\sum p_i^2 = 6 \cdot 0,1667^2 = 0,1667$ .

Это открывает широкие возможности для уточнения аппликаты центра тяжести судна путем деления каждого его груза даже на тех стадиях проектирования, когда точное определение координат отдельных грузов еще невозможно. Пределом этого уточнения служит погрешность расчета водоизмещения, которая на первых стадиях проектирования может достигать 5—10% (см. § 39). Формула (36, 6) показывает, что погрешность определения аппликаты центра тяжести при любых условиях не может быть меньше погрешности водоизмещения.

Для того чтобы погрешность аппликаты центра тяжести практически не превышала погрешности водоизмещения, должно быть выполнено условие (14, 13), согласно которому

$$\frac{\sigma(z_i)}{z_g} \sqrt{\sum p_i^2} < \frac{1}{3} \delta(D). \quad (36, 7)$$

Если нагрузка судна разбита на  $n$  примерно равных по весу статей, то можно считать  $p_i = \frac{1}{n}$  и

$$\sum p_i^2 = \left( \frac{1}{n} \right)^2 n = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, средняя квадратичная ошибка в определении аппликаты центра тяжести каждой из этих статей, выраженная

в процентах от аппланаты центра тяжести всего судна, должна быть не больше

$$\frac{\sigma(x_i)}{x_g} < \frac{n}{3} \delta(D). \quad (36, 8)$$

Например, на стадии эскизного проектирования при средней квадратичной погрешности водонесения порядка  $\delta(D) = 2,5\%$  и разбросе нагрузки на  $n = 25$  статей средняя квадратичная погрешность в определении центра тяжести отдельных статей может в среднем достигать

$$\frac{\sigma(x_i)}{x_g} = \frac{26}{3} \cdot 2,5 = 20\%.$$

При техническом проектировании число статей нагрузки может быть увеличено до  $n = 100$ , а средняя квадратичная погрешность водонесения обычно не превышает  $\delta(D) = 0,5\%$ . При этом допустимо

$$\frac{\sigma(x_i)}{x_g} = \frac{100}{3} \cdot 0,5 = 16\%.$$

С другой стороны, для стадии рабочего проектирования, когда  $\delta(D) = 0,3\%$ , а аппланаты центров тяжести отдельных статей нагрузки могут быть вычислены со средней квадратичной погрешностью, не превышающей  $\frac{\sigma(x_i)}{x_g} = 10\%$ , по формуле (36, 8) можно найти минимальное число статей, на которое должна быть разбита нагрузка,

$$n \geq 3 \frac{\sigma(x_i)}{x_g} \frac{1}{\delta(D)},$$

т. е.

$$n \geq 3 \frac{10}{0,3} = 100.$$

Следовательно, в указанных условиях форма сводной таблицы нагрузки может быть сохранена одинаковой как для технического, так и рабочего проекта.

В более сложном случае, если, как это обычно и бывает, отдельные статьи нагрузки существенно отличаются друг от друга по весу, определение необходимой точности расчета апеллирует к центрам тяжести по формуле (36, 7) несколько усложняется, но все же не встречает принципиальных затруднений.

Абсцисса центра тяжести. Абсцисса ц. т. судна определяется теми же приемами, что и его аппланата. Поэтому все приведенные выше рассуждения в одинаковой мере могут быть распространены и на погрешности расчета отстояния центра тяжести судна от ми-

деля или косового перпендикуляра. Различие может возникнуть лишь в оценке допустимой точности определения этой координаты.

Для обеспечения высоких скоростей хода, необходимых современным судам, их обводы должны выбираться в соответствии с требованиями ходкости. Этим условием фиксируется и положение центра величины судна относительно миделя, а следовательно, до известной степени и положение его центра тяжести во всех возможных условиях загрузки. Расхождение между этими точками по длине ограничивается пределами допустимого дифферента, определенными как требованиями ходкости, так и условиями плавания (морозодостое, осадка).

Угол дифферента, возникающего при несовпадении абсцисс центров тяжести и центра величины, находится по метacentрической формуле

$$\varphi = \frac{H}{T}, \quad (36, 9)$$

где  $\varphi$  — угол дифферента, рад;  
 $H$  — продольная метacentрическая высота;  
 $T = x_c - x_g$  — разность абсцисс центра величины и центра тяжести.

Средняя квадратичная погрешность угла дифферента

$$\delta(\varphi) = \sqrt{[\delta(H)]^2 + [\delta(T)]^2}. \quad (36, 10)$$

В этой формуле погрешность продольной метacentрической высоты  $H$  может быть заменена погрешностью большого метacentрического радиуса  $R$ , так как по сравнению с возможными ошибками последнего ошибки возмещения центра тяжести над центром величины совершенно незначительны

$$\delta(H) = \delta(R) = \sqrt{[\delta(I_x)]^2 + [\delta(D)]^2}. \quad (36, 11)$$

После подстановки и простых преобразований из равенства (36, 10) находим допустимую среднюю квадратичную погрешность разности абсцисс

$$\delta(T) = \sqrt{[\delta(\varphi)]^2 - [\delta(I_x)]^2 - [\delta(D)]^2}, \quad (36, 12)$$

по которой и может быть определена допустимая точность в расчете абсциссы центра тяжести проектируемого судна,

$$\sigma(x_g) = \sqrt{[\sigma(T)]^2 - [\sigma(x_c)]^2}, \quad (36, 13)$$

где  $\sigma(x_g) = x_g \delta(x_g)$  — средняя квадратичная ошибка абсциссы центра величины (находится по способу, изложенному в § 24).

Аналогично может быть найдена и допустимая погрешность в расчете положения центра тяжести судна по его ширине.

Расчет погрешностей метacentрической высоты ( $r_1 = 3,35$  м;  $r_2 = 6,15$  м;  $q = 3,34$  м;  $h = 0,54$  м)

## § 37. Расчет начальной метacentрической высоты

Начальная метacentрическая высота представляет собой относительно малую разность между аппликатами метacentра и центра тяжести. Поэтому погрешность ее определения всегда существенно больше, чем погрешность вычисления исходных аппликат,

$$\delta(h) = \frac{\sigma(h)}{h}, \quad (37, 1)$$

где  $\sigma(h)$  — средняя квадратичная ошибка метacentрической высоты

$$\sigma(h) = \sqrt{[\sigma(r_1)]^2 + [\sigma(r_2)]^2 + [\sigma(q)]^2}, \quad (37, 2)$$

$\sigma$  — малый метacentрический радиус.

Все компоненты этих выражений были нами уже рассмотрены выше, и вычисление по ним средней погрешности не встречает затруднений. С конкретными значениями этих компонентов связан и общий анализ равенства (37, 2), который поэтому будет удобнее начать с частного примера.

В табл. XXII приведен расчет возможной погрешности в определении метacentрической высоты товаро-пассажирского теплохода водоизмещением 3050 м (115—436), имеющего в полном грузу следующие элементы.

Длина  $L = 110$  м.

Шарина  $B = 15,5$  м.

Осадка  $T = 5,64$  м.

Аппликата центра величины  $r_1 = 3,35$  м.

Аппликата центра тяжести  $r_2 = 6,15$  м.

Метacentрический радиус  $q = 3,34$  м.

Метacentрическая высота  $h = 0,54$  м.

Расчет выполняем для трех стадий проектирования: эскизной, технической и рабочей. Получаемые результаты, конечно, не являются обязательными для любого проекта, но как некоторые средние величины они позволяют ориентироваться в возможной точности вычислений и сделать полезные выводы.

Прежде всего следует отметить, что расчет начальной остойчивости на предельных стадиях проектирования совершенно бесполезен: появление случайных погрешностей смысле  $\pm 100\%$  при этом вполне возможно, что не дает достаточных оснований, чтобы судить о рациональности выбранных главных размеров.

Несколько лучшие результаты дают расчеты эскизной и технической проектов: в первом возможная погрешность метacentрической высоты достигает  $\pm 60\%$ , во втором  $\pm 20\%$ . Однако и эти цифры еще настолько велики, что весь расчет начальной остойчивости и в этих стадиях следует рассматривать скорее как выработку допустимых и возможных норм для ординат центров тяжести отдельных составляющих нагрузки, а не как действительную

Обозначения	Размерность	Проекты		
		эскизный	технический	рабочий
$\delta(r_1)$	%	0,9	0,46	0,13
$\delta(q)$		2,4	0,5	0,4
$\delta(r_2)$		3,0	0,7	0,3
$\sigma(r_1)$	см	3,0	1,3	0,44
$\sigma(q)$		8,0	1,7	1,34
$\sigma(r_2)$		18,4	4,3	1,84
$[\sigma(r_1)]^2$	см <sup>2</sup>	9,0	2,25	0,19
$[\sigma(q)]^2$		64,0	2,90	1,76
$[\sigma(r_2)]^2$		329,0	18,50	3,40
$[\sigma(h)]^2$	см <sup>2</sup>	412	23,7	5,37
$\sigma(h)$	см	20	4,9	2,32
$\delta(h)$	%	37	9	4,3
$v$	—	0,56	0,50	0,999
$r_1$	—	1,54	2,33	3,30
$\delta_v(h)$	%	60	21	13

проверку метacentрической высоты. Фактически этого взгляда уже давно придерживаются все конструкторские бюро, неустanno контролируемые с этой точки зрения свои рабочие чертежи в процессе их создания и требующие от конструкторов строгого соблюдения проектных норм расположения грузов по высоте. Поэтому указанный выше вывод не является неожиданным; он только обосновывает существующую практику.

Приведенный пример показывает также, что возможные ошибки в определении ординат центра величины и метacentра на всех стадиях проектирования значительно меньше ошибок в определении центра тяжести. Поэтому в эскижном проекте можно ограничиться расчетами ординат центра величины и метacentра; по ним, исходя из статистических или иных соображений относительно

возможной метацентрической высоты, найти рациональную аппланату центра тяжести судна и по ней корректировать нормы для положения центров тяжести отдельных статей загрузки, которые и считать заданными для дальнейшего проектирования.

На более ранних стадиях проектирования, когда обеспеченная надлежущей остойчивости еще может содействовать и рациональный выбор главных размерений, положение общего центра тяжести может назначаться только по аналогии с прототипом или на основании статистических данных, без более детальных расчетов. И только в техническом проекте возможно определение аппланаты центра тяжести суммированием статистических моментов веса отдельных статей загрузки, как это обычно и делается.

На основании положенного можно сделать вывод и о том, что при разработке общих требований или заданий на проектирование следует устанавливать нормы остойчивости судов с допуском не менее  $\pm 15\%$ , так как с большей точностью метацентрическая высота не может быть гарантирована.

Наконец, полезно отметить, что на всех стадиях проектирования погрешность в определении метацентрической высоты может превосходить погрешность водоизмещения в 10—15 раз. Это соотношение не может быть установлено аналитически, но оно подтверждается рядом практических расчетов.

## ГЛАВА VI

### ВЫБОР ГЛАВНЫХ РАЗМЕРЕНИЙ

#### § 38. Выбор степени достоверности расчетов

**Точность расчета.** Точность расчета характеризуется величиной возможной ошибки или погрешности. Если случайная ошибка какого-либо вычисления окажется больше допустимой, соответствующий расчет должен быть исправлен или выполнен заново, что потребует непредвиденного расхода времени и труда. Еще большие потери возникнут в том случае, если недопустимая ошибка будет обнаружена лишь после того, как результаты данного вычисления будут использованы в других расчетах, чертежах или исследованиях. С другой стороны, выполнение всех расчетов с предельно возможной точностью само по себе еще более трудоемко и потому не только нецелесообразно, но и недопустимо. Сочетание умеренной точности с обоснованным риском, очевидно, может дать наиболее плодотворные результаты.

Трудоемкость вычислений зависит от той средней квадратичной ошибки, которая в данном расчете допускается, а возможная ошибка результата пропорциональна средней квадратичной ошибке, умноженной на возможную нормированную ошибку, зависящую только от степени достоверности, с которой результат расчета должен быть получен. При одной и той же средней квадратичной ошибке с возможной ошибкой может считаться равной 0,84 $\sigma$ , если будет признана достаточной достоверность результата  $\nu = 0,8$ ; но если окажется необходимым повысить степень достоверности до  $\nu = 0,999$ , то возможная ошибка увеличится до 3,1 $\sigma$ , т. е. будет почти вчетверо больше. И, наоборот, для получения одной и той же возможной ошибки средняя квадратичная должна быть тем меньше, чем больше достоверность результата потребуется по условиям данного расчета.

Поэтому рациональному выбору степени достоверности должно быть уделено не меньше внимания, чем определению допустимой ошибки результата.

**Достоверность.** Если величина допустимой ошибки назначается по чисто техническим соображениям, то степень достоверности

относится скорее к планово-экономическим характеристикам, так как показывает лишь вероятность того, что выполненный расчет не потребует исправлений. Поэтому норма достоверности должна быть непосредственно связана с трудоемкостью как самой вычислительной работы, так и работы по ее исправлению и ликвидации последствий последней в том случае, если в дальнейшем маяк-либа из случайных ошибок выйдет за допустимые пределы.

Предположим, например, что в проектное бюро за некоторый промежуток времени производится  $n$  однотипных расчетов, причем затраты труда на каждый из них составляет  $R_1$  нормо-часов (или рублей), а степень достоверности результата равна  $v_1$ . Допустим далее, что средняя затрата труда на исправление каждого расчета, в котором в дальнейшем будет обнаружена недопустимая ошибка, а также на ликвидацию всех ее последствий, составляет  $R_{11}$  нормо-часов (или рублей). Количество таких исправляемых расчетов в среднем за достаточно длительный промежуток времени будет, очевидно, равно  $(1 - v_1)n$ , а следовательно, полная трудоемкость всей работы

$$\sum_1 R = n \cdot R_1 + (1 - v_1)nR_{11}.$$

Аналогично в случае введения в практику нового метода расчета, сокращающего трудоемкость вычислений до  $R_2 < R_1$  нормо-часов (или рублей), но понижающего достоверность результата до  $v_2 < v_1$ , получим общую затрату труда

$$\sum_2 R = nR_2 + (1 - v_2)nR_{21}$$

где  $R_{21}$  — трудоемкость исправлений и ликвидации последствий ошибок во втором случае.

Очевидно, экономическая допустимость применения второго метода определится неравенством

$$\sum_2 R < \sum_1 R,$$

откуда после подстановки находим

$$v_2 > 1 - \frac{R_2 - R_1 + (1 - v_1)R_{11}}{R_{21}}. \quad (38, 1)$$

При сохранении в этом неравенстве только знака равенства получим условие того, что в среднем за достаточно длительный период времени применение нового метода не даст никакого экономического эффекта, т. е. что суммарные расходы на выполнение расчетов и ликвидацию последствий появления в них недопустимых ошибок останутся прежними. Однако полную уверенность в том, что увеличенные потери и полученная экономия таким образом взаимно компенсируются, можно иметь только в отношении весьма длительных промежутков времени, когда количество выполняемых расчетов данного типа будет измеряться сотнями. Практически же нам приходится иметь дело с весьма ограниченными отчетными

и планируемыми периодами в один год или в 7—10 лет, в течение которых количество выполненных расчетов измерится единицами или десятками, а относительно количество обнаруживаемых ошибок может существенно отличаться от среднего как в меньшую, так и в большую сторону. Это может привести как к непредвиденным перерасходам времени и денежных средств, так и столь же непредвиденной экономии и случайному, неустойчивому переполнению плана. С этой точки зрения неравенство (38, 1) дает лишь условие равной вероятности перерасхода или экономии при сохранении в нем знака равенства или неопределенно повышенной вероятности экономии при сохранении в нем знака  $>$ .

Для более четкого решения вопроса об экономической целесообразности перехода к новому методу следует оценить вероятность появления того или иного количества недопустимых ошибок, отличного от среднего, наиболее вероятного, именно за данный ограниченный период времени.

Возможен случай появления недопустимых ошибок. Положим, что в течение планируемого периода конструкторское бюро выполняет  $n$  проектов, имеющих достоверность  $v$ . Посмотрим, какова вероятность того, что на этих  $n$  проектах  $m$  проектов не будет содержать недопустимых ошибок.

Известно, что общее число возможных сочетаний из  $n$  объектов по  $m$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (38, 2)$$

Вероятность же того, что в каждом таком сочетании все  $m$  объектов не будут содержать данного признака (недопустимой ошибки), равна  $v^m$ , а вероятность того, что во всех остальных  $(n - m)$  объектах этот признак обязательно будет, составляет  $(1 - v)^{n-m}$ . Следовательно, интересующая нас вероятность того, что не больше и не меньше, чем  $m$  проектов, не будет содержать недопустимых ошибок, определится произведением

$$v_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} v^m (1 - v)^{n-m}. \quad (38, 3)$$

Выражение (38, 3) имеет максимум при  $m = np$ , чему и соответствует среднее количество расчетов, свободных от недопустимых ошибок за весьма длительный промежуток времени, и наиболее вероятное количество таких расчетов за рассматриваемый относительно короткий период.

Для оценки экономической целесообразности нового метода расчета имеет значение не вероятность появления того или иного конкретного количества ошибок, а общая вероятность того, что количество расчетов, не содержащих недопустимых ошибок, будет

не менее заданного заранее числа  $m_0$ . Эта вероятность найдется суммированием всех значений  $\tau_n$  в пределах от  $m - m_0$  до  $m$ :

$$\tau = \sum_{n=m-m_0}^m \frac{n!}{n!(n-n)!} v^n (1-v)^{n-n}. \quad (38)$$

Иногда, для упрощения вычислений, это выражение будет удобно заменить следующим:

$$\tau = 1 - \sum_{n=0}^{m_0} \frac{n!}{n!(n-n)!} v^n (1-v)^{n-n},$$

которое легко получается из предыдущего, если заметить, что

$$\sum_{n=0}^m \frac{n!}{n!(n-n)!} v^n (1-v)^{n-n} = 1.$$

Оба полученных выражения при  $m_0 = m$  дают  $\tau = 0,5$ , что и указывает на равную вероятность получения как большего так и меньшего числа ошибок, чем среднее, наиболее вероятное.

Введение нового метода расчета может считаться экономически целесообразным, если вероятность получения экономии  $\tau$  будет по крайней мере, в два-три раза больше вероятности получения убытка  $1 - \tau$ . Это будет обеспечено в том случае, если  $\tau$  будет не менее 0,7—0,75, чему и должна удовлетворять степень достоверности нового метода расчета.

**Пример.** Допустим, что конструкторская бюро производит за отчетный период  $n = 25$  однотипных расчетов, трудоемкость каждого из них определена в  $R_1 = 80$  чел.-час. При этом в среднем около 10% всех расчетов требуют исправлений, т. е.  $v = 0,9$ , а на каждое исправление затрачивается  $R_{ис} = 36$  чел.-час.

Допустим далее, что введенный новый метод вычисления тех же расчетов сокращает их трудоемкость до  $R_2 = 75$  чел.-час. при сохранении той же трудоемкости каждого исправления. Определа, какова должна быть достоверность нового метода, чтобы введение его оказалось рентабельным.

По формуле (38, 1) находим

$$v_0 > 1 - \frac{80 - 75 + (1 - 0,9)36}{36} = 0,76.$$

Следовательно, за весьма длительный период времени ( $n \rightarrow \infty$ ) новый способ окажется экономически рентабельным ступень и том случае, если на каждые 25 расчетов не менее  $m_0 = 0,76 \cdot 25 = 19$  не потребуют исправлений. Для более уверенного получения экономии за относительно короткий отчетный период ( $n = 25$ ) прием  $v_0 = 0,8$ , соответствующий по-прежнему  $m_0 = 19$ . Тогда из формулы (38, 4) получим

$$\tau = \sum_{n=19}^{25} \frac{25!}{n!(25-n)!} 0,8^n (1 - 0,8)^{25-n} = 0,78,$$

т. е. вероятность того, что число расчетов, не требующих исправления, будет не менее девятнадцати, и, следовательно, введение нового способа рентабельно.

аналогично ( $\tau = 0,78$ ); в 3,5 раза повышается вероятность вычисления убытка ( $1 - \tau = 1 - 0,78 = 0,22$ ), связанных с возможностью появления более шести исправляемых ошибок. Следовательно, новый способ может быть рекомендован.

**Нормы достоверности.** Изложенные выше методы, позволяющие установить рациональную норму достоверности расчетов в любых конкретных условиях, не дают единого численного решения, обязательного для всех проектных организаций. Результаты определения экономически рациональной достоверности всегда будут зависеть от трудоемкости применяемых методов проектирования, которая может меняться как и зависимости от специфических особенностей проектируемого корабля и его проекта, так и общей организации работ в данном конструкторском бюро. Во всех случаях выбор оптимального метода расчета должен производиться путем сравнения трудоемкостей различных возможных методов и достоверностей получаемых по ним результатов. В табл. XXIII приводятся некоторые средние нормы достоверности, которые, по мнению автора, могут быть рекомендованы до уточнения их более широкой практикой.

Таблица XXIII

Нормы точности последовательных этапов проектирования

Этапы проектирования	Степень достоверности $\tau$	Допустимая нормальная относительная ошибка, %	Погрешности, %	
			средняя квадратическая $\delta$	допустимая $\delta_d$
I приближение	0,8	0,84	10,0	8,4
II приближение	0,9	1,28	4,0	5,1
Экономный проект	0,95	1,64	2,2	3,6
Технический проект	0,99	2,33	0,45	1,0
Рабочий проект	0,999	3,10	0,3	0,9

### § 39. Допустимые ошибки в расчетах водонизменника

Высокая точность определения необходимого водонизменника, которая должна получиться в результате процесса проектирования, может быть достигнута только после ряда последовательных приближений. При этом каждая стадия проектирования должна отличаться от предыдущей большей степенью достоверности и меньшей допустимой ошибкой результата. Для определения этих показателей необходимо сперва конкретно установить задачи, которые должны решаться на каждом этапе, а затем, по их характеру и трудоемкости определить допустимую ошибку и достоверность.

При этом надо иметь в виду, что объем графических работ при проектировании составляет 80—85% всей трудоемкости проекта.



Поэтому даже существенное усложнение расчетов, необходимом для повышения их точности, может быть оправдано, если оно идет к снижению стоимости графических работ.

**Этапы проектирования.** Проф. Л. М. Ногда [11—43] рекомендует прежде, чем приступить к измерчиванию судна, определить его водоизмещение и главные размерения расчетным путем, состоящим из 6—7 этапов — последовательных приближений. Другие методы расчета могут дать тот же результат после большего или меньшего числа приближений. Однако во всех случаях оказывается возможным разбить процесс проектирования на пять основных стадий, отличающихся своими целями и условиями:

- 1) расчеты первого приближения имеют целью выбор типа и марок главных и вспомогательных механизмов;
- 2) расчеты второго приближения служат для определения оптимальных главных размерений и конструктивного типа корпуса;
- 3) третье приближение — эскизный проект — позволяет уточнить водоизмещение и главные размерения в соответствии с требованиями общего расположения, мореходности, ходкости, экономичности и других эксплуатационных качеств;
- 4) технический проект окончательно фиксирует главные размерения и обводы корпуса, общее расположение, основные конструкции и эксплуатационные показатели;
- 5) рабочий проект детализирует все конструкции судна и обеспечивает возможность их выполнения из завода с необходимой степенью точности и качества.

Стремление выбрать тип и марку главных и вспомогательных механизмов сразу же после определения водоизмещения в первом приближении объясняется тем, что по весу и занимаемым объемам эти механизмы составляют существенную долю в общем водоизмещении судна. Поэтому уточнение их показателей позволяет резко повысить точность всех последующих расчетов.

После второго приближения должна быть обеспечена возможность приступить к разработке чертежей общего расположения эскизного проекта. Для того чтобы эта работа не погрязла в дальнейшем коронных исправлениях, необходима большая точность определения главных размерений, чем это возможно по данным первого приближения. Этим и диктуется необходимость расчетов второго приближения.

Назначение последующих приближений же требует особых пояснений. Отметим только, что этап эскизного проекта не всегда обязателен; при достаточной тщательности выбора водоизмещения и главных размерений расчетным путем и первых приближениях, после проверки их эскизами общего расположения, часто оказывается возможным продолжить детализацию этих чертежей, перейдя непосредственно к техническому проекту.

С другой стороны, на первых стадиях проектирования не всегда возможно получить необходимую точность результата

в первом же варианте расчета. Поэтому иногда расчеты первого и второго приближений могут повториться по два и более раз, до тех пор, пока предельные к ним требования не будут выполнены.

**Погрешности переходящих величин.** В результате всех расчетов каждого этапа находят те или иные данные, которые входят затем без изменения в следующий этап проектирования. Так, после определения водоизмещения и главных размерений в первом приближении и выбора типа и марки главных механизмов находятся основные показатели последних, зная затем в расчеты второго приближения; в результате уточнений второго приближения получаются главные размерения судна, по которым разрабатываются чертежи эскизного проекта и т. д. Очевидно, все такие переходящие величины должны обладать средней квадратичной ошибкой не большей, чем это требуется по нормам достоверности и допустимых ошибок того этапа, для которого эти величины предназначены.

**Расчеты первого приближения.** Необходимая мощность главных механизмов в первом приближении может быть найдена, например, по следующей формуле:

$$N = \frac{1}{2} \frac{\rho^3}{\eta_p \eta_c} S \sum_{i=1}^n v_i^3, \quad (39, 1)$$

где  $N$  — искомая мощность, л. с.;

$\rho$  — массовая плотность воды, кг сек<sup>3</sup> м<sup>-3</sup>;

$v$  — скорость хода, м сек<sup>-1</sup>;

$S$  — суммарная поверхность, м<sup>2</sup>;

$\eta_p$  — пропульсивный коэффициент;

$\sum_{i=1}^n v_i^3$  — сумма коэффициентов сопротивления.

Считая массовую плотность воды и скорость хода величинами достоверными, так как они конкретно задаются на основании эксплуатационных соображений, найдем дисперсию погрешностей мощности

$$\delta(N)^2 = \delta(S)^2 + \delta(\eta_p)^2 + \delta(\sum_{i=1}^n v_i^3)^2. \quad (39, 2)$$

Для нового корабля главные двигатели следует выбирать из числа образцов, уже выпускаемых промышленностью, или проектировать заново. В обоих случаях их мощность не может задаваться произвольно, а должна подчиняться принятой закономерности мощностного ряда с тем, чтобы производительность двигателей могла носить массовый или хотя бы серийный характер. Для этого разница в мощностях ближайших ярудов двигателей должна быть не менее 25—30%, следовательно, погрешность в предварительном определении их мощности  $\delta_p(N) = \pm (13 \div 15)\%$  может считаться допустимой.

Закон распределения этой погрешности должен считаться нормальным, так как точнее его выражение нам неизвестно, а при нормальном распределении допустимая средняя квадратичная ошибка получается наименьшей, что лучше гарантирует условия сборки поставленных требований. Если степень достоверности второго приближения принять равной  $v = 0,9$  (табл. XXIII), то соответствующая возможная нормированная ошибка будет  $\sigma_v = 1,28$ , и, следовательно, допустимая средняя квадратичная погрешность мощности окажется равной  $\delta(N) = 10-12\%$ .

Пропульсивный коэффициент  $\eta_p$  обычно выбирается по опыту и уточняется в расчетах второго приближения. При этом уточнении его абсолютная величина редко меняется более чем на  $\pm 5\%$  и для всех однотипных кораблей не выходит за пределы  $\pm 5\%$  средней. При этих условиях его средняя квадратичная ошибка может считаться не больше  $\sigma(\eta_p) = 3\%$ , а средняя квадратичная погрешность  $\delta(\eta_p) = 5\%$ .

Аналогично, на основании опыта проектирования однотипных кораблей, а также соображений, изложенных в § 30 и 31, можно установить возможную погрешность суммы коэффициентов сопротивления воды  $\Sigma \zeta_i$ . Наиболее вероятная величина ее средней квадратичной погрешности оказывается порядка  $\delta(\Sigma \zeta_i) = 5\%$ .

Подставляя найденные величины в формулу (39, 2), воспользуемся ею для определения допустимой средней квадратичной погрешности смоченной поверхности

$$\delta(S) = \sqrt{[\delta(N)]^2 + [\delta(\eta_p)]^2 + [\delta(\Sigma \zeta_i)]^2}. \quad (39, 3)$$

Обычно эта величина получается близкой к  $7-8\%$  и может быть уточнена в каждом отдельном случае. Смоченная поверхность пропорциональна квадрату линейных размеров, а водоизмещение пропорционально их кубу. Поэтому средняя квадратичная погрешность водоизмещения может быть в полтора раза больше, чем такая же погрешность смоченной поверхности, и для выбора главных механизмов может достигать  $\delta(V) = 10-12\%$ .

**Расчеты второго приближения.** Расчеты второго приближения должны быть выполнены с такой точностью, чтобы при дальнейшем уточнении главных размерений не потребовалось существенно менять размещение главных и вспомогательных механизмов, грузовых трюмов, жилых, служебных и пассажирских помещений и прочего кругового оборудования. Все изменения в общем расположении при переходе к техническому проекту должны, по возможности, ограничиваться соответствующей корректировкой ширины проходов и монтажных зазоров. Это требование может быть удовлетворено, если погрешности главных размерений не превыдают  $\pm (2-3)\%$ , чему соответствует допустимая погрешность водоизмещения в  $\pm (6-9)\%$ . Принимая степень достоверности второго приближения равной  $v = 0,95$ , найдем допустимую среднюю

квадратичную погрешность водоизмещения, определенного по второму приближению,  $\delta(V) = \pm (4-5)\%$ .

При степени достоверности второго приближения  $v = 0,9$  этому будут соответствовать допустимая погрешность водоизмещения  $\delta_v(V) = \pm (5-6)\%$ .

**Эскизный проект.** Чертежи общего расположения эскизного проекта могут подвергаться корректировке в процессе технического проектирования. Однако при этом изменение длины судна, существенно связанной с размещением главных механизмов, лайки шала и других крупных устройств, а также со столь важными эксплуатационными показателями, как скорость хода и торговальность, должно быть ограничено пределами  $\pm 1\%$ . Сохраняя прежний допуск в поперечных размерах до  $\pm 2\%$ , мы должны уменьшить допустимую погрешность определения водоизмещения по данным эскизного проекта до  $\pm 5\%$ . При достоверности технического проекта  $v = 0,99$  это будет соответствовать средней квадратичной погрешности  $\delta(V) = 2,2\%$ . Такой же должна быть и средняя квадратичная погрешность эскизного проекта.

**Технический проект.** Наконец, так как при работе проектирования уже незначительные изменения главных размеров судна недопустимы, возможная погрешность технического проекта не должна превышать допустимой погрешности рабочего проекта, к определению которой мы и перейдем.

**Грузоподъемность.** Ошибка в выборе водоизмещения при проектировании может отразиться на грузоподъемности построенного судна, дальности его плавания, скорости хода, мореходности и управляемости. Все эти показатели должны быть учтены при назначении допустимой ошибки водоизмещения, но даже априорно можно утверждать, что для транспортных судов грузоподъемность будет иметь решающее значение.

Количество груза, которое может быть принято на борт, определяется главным образом наличием запаса плавучести судна без груза и высотой его надводного борта, необходимой для безопасного плавания. Объем трюмов играет в этом отношении меньшую роль, так как недостаток этого объема в большинстве случаев может быть компенсирован приемом части груза на палубу. Поэтому грузоподъемность  $G$  построенного судна может быть определена как разность между его нормальным водоизмещением  $D$  (по грузовой марке) и весом нетто, а который входит вес корпуса, механизмов, запасов, личного состава и всего оборудования и снабжения.

$$G = D - \sum P_i. \quad (39, 4)$$

Следовательно, средняя квадратичная ошибка грузоподъемности

$$\sigma(G) = \sqrt{\sigma[D]^2 + [\sigma(\sum P_i)]^2}. \quad (39, 5)$$

а допустимая средняя квадратичная ошибка водозмещения

$$\sigma(D) = \sqrt{[\sigma(G)]^2 + [\sigma(\sum P_i)]^2}. \quad (39, 6)$$

Разделив обе части этого равенства на  $D$  и переходя от ошибки к погрешностям, получим

$$\delta(D) = \sqrt{\left[\frac{\delta}{D} \delta(G)\right]^2 + \left[\frac{\sum P_i}{D} \delta(\sum P_i)\right]^2}. \quad (39, 7)$$

Здесь, очевидно,

$$\frac{\delta}{D} + \frac{\sum P_i}{D} = 1.$$

В § 34 было показано, что средняя квадратичная погрешность веса судна негто на стадии рабочего проектирования может иметь порядок  $\delta(\sum P_i) = 0,1\%$ . Вес полезного груза, размещенного на судне, вряд ли может быть измерен с точностью, большей  $\pm 1\%$ , чему соответствует средняя квадратичная погрешность  $\delta(G) = 0,6\%$ . Полезная грузоподъемность современных морских грузовых теплоходов составляет в среднем около 60% их водоизмещения. При этом по формуле (39, 7) получаем допустимую среднюю квадратичную погрешность водозмещения

$$\delta(D) = \sqrt{(0,6-0,6)^2 + (0,4-0,1)^2} = 0,36\%.$$

Для пассажирских теплоходов, имеющих полезную грузоподъемность порядка 25% водоизмещения, при тех же условиях мы получили бы допустимую погрешность водозмещения существенно более низкой. Но для них и погрешность веса полезного груза может быть доведена до  $\pm (3-5)\%$ , что вновь приводит к увеличению  $\delta(D)$  до 0,4% и более.

Таким образом, для обеспечения требуемой грузоподъемности при рабочем проектировании можно допустить среднюю квадратичную погрешность водозмещения не выше 0,3-0,35%, чему будет соответствовать при достоверности  $\nu = 0,999$  возможная погрешность не более  $\pm (0,9-1,0)\%$ .

Дальность плавания. При наличии небольшой ошибки в проекте определении водоизмещения построенного судна его осадка может быть доведена до грузовой марки и за счет изменения запаса топлива. Однако такая корректировка существенно отразится на предельной дальности плавания, что не всегда допустимо.

Запас топлива на современном океанском теплоходе обычно лежит в пределах 5-7% водоизмещения. Если допустить среднюю квадратичную погрешность водозмещения 0,3-0,35%, как было найдено выше, то среднее квадратичное изменение запаса топлива, необходимое для компенсации этой погрешности, согласно формуле (39, 7) составит

$$\delta(G_0) = \frac{D}{\nu} \sqrt{[\delta(D)]^2 + \left[\frac{\sum P_i}{D} \delta(\sum P_i)\right]^2}, \quad (39, 8)$$

что после подстановки дает

$$\delta(G_0) = 5-7\%.$$

Этому будет соответствовать возможная погрешность до 15-20%.

Такое сокращение запаса топлива и соответствующее сокращение предельной дальности плавания допустимо лишь для тех коротких рейсов, при которых полный запас топлива все равно не может быть использован.

Скорость хода. Важные ошибок водозмещения на скорость хода корабля может быть оценено по адмиралтейской формуле, на которой следует

$$v = D^{1/3} \sqrt{CN}, \quad (39, 9)$$

где  $v$  — заданная скорость хода;

$C$  — адмиралтейский коэффициент;

$N$  — мощность главных механизмов.

Так как на данной стадии проектирования мощность механизмов фиксирована, то ошибки скорости будут определяться только неточностью значений  $C$  и  $D$ , а допустимая средняя квадратичная погрешность водозмещения получится равной

$$\delta(D) = \frac{v}{2} \sqrt{[\delta(v)]^2 + \left[\frac{1}{3} \delta(C)\right]^2}. \quad (39, 10)$$

Скорость хода при установленной спецификацией мощности двигателей обычно может быть измерена с погрешностью не менее  $\pm 2\%$ . Адмиралтейский коэффициент при рабочем проектировании может быть найден с погрешностью не более  $\pm 5\%$  (§ 32). Принимая для обеих этих величин равномерные законы распределения, получим  $\delta(v) = 1,2\%$  и  $\delta(C) = 2,9\%$ , и, следовательно, средняя квадратичная погрешность водозмещения по условиям точности должна быть не более

$$\delta(D) = \frac{v}{2} \sqrt{1,2^2 + \left(\frac{1}{3} 2,9\right)^2} = 3,2\%.$$

Мероплощадь. Период бортовой качки судна, как известно, прямо пропорционален радиусу инерции его массы  $R$  и обратно пропорционален квадратному корню из его метацентрической высоты  $h$

$$T = 2\pi \frac{R}{\sqrt{gh}}. \quad (39, 11)$$

Наибольшее изменение радиуса инерции будет иметь место в том случае, если вся ошибка водозмещения является результатом отклонения только поперечных размеров судна. При этом водоизмещение будет меняться пропорционально квадрату линейных

размеров, а радиус инерции — пропорционально их первой степени. Следовательно, погрешность радиуса инерции будет вдвое меньше погрешности водоизмещения

$$\delta(R) = \frac{1}{2} \delta(D). \quad (39, 12)$$

Погрешность поперечной метацентрической высоты, как мы отметили в § 37, превышает погрешность водоизмещения в 10—15 раз

$$\delta(h) = (10 + 15) \delta D. \quad (39, 13)$$

Таким образом, пользуясь формулой (39, 11), можем установить, что погрешность в расчетах периода бортовой качки определяется главным образом погрешностью метацентрической высоты и составляет

$$\delta(T) = \sqrt{[\delta(R)]^2 + \left[\frac{1}{2} \delta(h)\right]^2} = (5 + 7) \delta D.$$

При обычных для грузовых судов периодах качки 10—15 сек. изменение этого периода на 1 сек. несущественно, и погрешность его определения  $\delta_v(T) = \pm (7-10)\%$  может считаться допустимой. Следовательно, так как законы распределения всех рассматриваемых величин должны быть нормальными, можем принять погрешность водоизмещения

$$\delta_v(D) = \frac{1}{5+7} \delta(T) = \pm (1+2)\%,$$

как вполне допустимую. Ей будет соответствовать средний квадратичная погрешность  $\delta(D) = 0,3+0,6\%$ .

Аналогичный вывод может быть сделан для килевой качки. Разница будет заключаться лишь в том, что наибольшее изменение радиуса инерции здесь будет иметь место в том случае, когда ось погрешности водоизмещения будет связана лишь с погрешностью длины и потому  $\delta(R)$  может быть равным  $\delta(D)$ . С другой стороны, продольная метацентрическая высота практически равна продольному метацентрическому радиусу и не зависит от относительного расположения центра тяжести и центра величины. Поэтому точность ее определения значительно выше, чем для бортовой качки, и примерно равна точности определения водоизмещения.

При этих условиях погрешность водоизмещения может быть почти равна допустимой погрешности периода качки и может достигать  $\delta_v(D) = \pm (5+8)\%$ .

**Управляемость.** Отношение радиуса установившейся циркуляции к длине судна, как известно, практически не зависит от изменения его размеров, если при этом сохраняется их геометрическое подобие. Поэтому, поскольку случайные отклонения радиуса

циркуляции от проектной величины на 2-3% совершенно несущественны, такая же погрешность в определении длины судна может считаться допустимой. Если указанные погрешности появятся только в длине, то и допустимая погрешность водоизмещения будет также равна 2-3%; погрешность же других главных размеров, которые могут ее еще увеличить, не окажут существенного влияния на поворотливость, а потому с возможностью их появления можно не считаться.

**Выводы.** Таким образом, из всех рассмотренных нами критериев только один — дальность плавания — указывает на желательность расчета водоизмещения с возможной погрешностью, меньшей  $\pm 1\%$ . Все прочие критерии позволяют увеличить эту погрешность до  $\pm (2+3)\%$  и более. При таких условиях представляется рациональным принять в качестве допустимой погрешности водоизмещения не менее  $\pm (0,9+1)\%$ , а требование гарантированной дальности плавания удовлетворить введением в расчетную величину запасов топлива соответствующего избытка (систематической ошибки) в 10-15%, что обычно и практикуется.

На основании всех изложенных соображений и составления табл. XXIII, отнюдь не претекдущая за непреложность. Она может свободно и в широких пределах пересматриваться и изменяться каждой проектирующей организацией. Со своей стороны мы можем ее рекомендовать лишь как первое приближение.

## § 40. Форма уравнения веса

Уравнение веса, в каком бы виде его ни написали, является ни чем иным, как выражением закона Архимеда, согласно которому общий вес судна, состоящий из суммы весов всех его деталей, равен весу вытесненной им воды

$$\sum P_i = \gamma V = D. \quad (40, 1)$$

Но так как веса большинства конструкций судна зависят не только от заданных эксплуатационных показателей, но и от его размеров, то вес каждого из грузов  $P_i$  может быть представлен в виде некоторой степенной функции от водоизмещения, т. е. вместо (40, 1) можно написать

$$\sum A_i D^{\alpha_i} = D, \quad (40, 2)$$

где для вновь проектируемого судна коэффициенты веса  $A_i$  находят путем тех или иных преобразований тех же коэффициентов прототипа  $\bar{A}_i$

$$A_i = K_i \bar{A}_i. \quad (40, 3)$$

Если в качестве прототипа используется уже построенное судно или его рабочий проект, то коэффициенты веса всех частей

его нагрузки могут быть получены с любой необходимой точностью. Источником ошибок при этом могут оказаться только множители преобразования  $K_0$ , которые нам и следует рассмотреть.

Множители преобразования не поддаются строгому аналитическому выражению; в лучшем случае они могут быть составлены на основе законов механического подобия, но и при этом всегда остается ряд параметров, отчасти неизвестных, влияние которых невозможно точно учесть.

Рассмотрим в качестве примера приближенное полуаналитическое выражение для веса продольных связей корпуса, участвующих в общем изгибе судна, выведенное Л. М. Ногидом [11—56] <sup>2</sup>:

$$P_{\text{пр}} = \varphi \delta_0 \frac{DL}{\eta} \frac{L}{H} \left( 1 + \frac{\delta}{k_1} \frac{h}{Y} \right), \quad (40, 4)$$

где  $\varphi$  — эмпирический коэффициент;  
 $\delta_0$  — коэффициент полноты водоизмещения;  
 $\eta$  — коэффициент утилизации сечения эквивалентного бруса;  
 $\delta$  и  $k_1$  — коэффициенты моментов, нагибающих судно на тихой воде и на волнении (дополнительных);  
 $h$  — высота волны, длина которой равна длине судна.

Чтобы придать коэффициенту веса форму, зависящую не от водоизмещения судна и его главных размерений, а лишь от безразмерных их соотношений и других параметров, разделим равенство (40, 4) на  $D^{3/2}$ . Именно так находится показатель степени в уравнении (40, 2)

$$A_1 = \varphi \delta_0 \frac{1}{\eta} \frac{L}{\sqrt{D}} \frac{L}{H} \left( 1 + \frac{\delta}{k_1} \frac{h}{Y} \right). \quad (40, 5)$$

Множителем преобразования будет являться отношение этого выражения, записанного для проектируемого судна, к такому же выражению для его прототипа.

Рассматривая равенство (40, 5), видим, что для прототипа все слагаемые, стоящие в правой части перед скобками, кроме  $\varphi$ , достоверны. Известно также  $\bar{A}_0$ , а поэтому может быть найдена и величина  $\varphi$  с любой желаемой точностью. Не вносит ошибок и коэффициенты моментов  $\delta$  и  $k_1$  и относительная высота волны  $h : T$ , применяемые в расчетах прочности вполне условно и корректно. Так же условно должны быть крайние эти параметры и для аналь преобразуемого судна. Соотношения главных разме-

рений  $L : \sqrt{D}$  и  $L : H$  и коэффициент полноты  $\delta_0$  для нового судна сначала назначаются условно, в нескольких вариантах, из которых затем выбирается оптимальный.

Таким образом, а коэффициенте веса продольных связей для нового проекта остаются случайными только эмпирический коэффициент  $\varphi$  и коэффициент утилизации  $\eta$ , возможные погрешности которых и должны быть определены путем статистических исследований. После этого нетрудно установить и среднюю квадратичную погрешность коэффициента веса  $A_1$ , или, что то же самое, множителя преобразования  $K_1$ .

$$\delta(K_1) = \sqrt{[\delta(\varphi)]^2 + [\delta(\eta)]^2}. \quad (40, 6)$$

Аналогично могут быть найдены и погрешности всех других множителей преобразования. Во всех случаях погрешность множителя будет тем меньше, чем больше переходная формула описывает действительные условия механического подобия сравнимых конструкций. Однако и при самом строгом соответствии ее с требованиями теории все же следует вводить в рассмотрение и некоторый поправочный эмпирический множитель  $\varphi$ , как в формуле (40, 4), к которому и отнести все методические погрешности, связанные с неполнотой учета физических параметров и условий.

В некоторые множители преобразования входят и параметры, задаваемые техническими условиями на проектирование: скорость хода, дальность плавания, нормы гидравлических испытаний, допускаемые напряжения и т. д. Все такие параметры принимаются как обязательные, а потому должны считаться достоверными.

Показатели степени при водоизмещении могут приобретать весьма различные численные значения. Выше мы уже видели, что для продольных связей, участвующих в общем изгибе судна, рациональным является показатель  $x_{\text{пр}} = 3/2$ . Для веса главных поперечных переборок Л. М. Ногид дает следующую переходную формулу [10—51] <sup>3</sup>:

$$k_0 \delta_0^{3/2} B H^{3/2}.$$

Следовательно, после перехода к коэффициенту веса, не считая от водоизмещения, получим  $x_2 = 1/2$ . Для платформ и палуб, не участвующих в общем изгибе судна,  $x_{\text{пл}} = 1/2$  и т. д.<sup>4</sup>

При детальном анализе множителей преобразования для одного из классов теплоходов были, например, получены следующие данные:

$x = 0$  — для полезного груза, средств связи, навигационного оборудования, пассажироз, кают и слабения для них;  
 $x = 1/2$  — для личного состава с багажом, оборудованием помещений и запасами пресной и питьевой воды;

<sup>2</sup> В обоих последних случаях в множитель преобразования должно быть включено отношение числа переборок, палуб или платформ на проектируемом судне к их числу на прототипе.

<sup>3</sup> См. также статью автора в журн. «Кораблостроение», № 9, 1958 г.

- $x = 1/2$  — для палуб, платформ, главных механизмов, запясов, топ-лива, дельных ватер, окраски и изоляции, отходящих и части вспомогательных механизмов и устройств;
- $x = 1/3$  — для главных поперечных переборок, трубопроводов машинного отделения, водостоканной и осушительной системы;
- $x = 1$  — для бортовой обшивки, поперечных связей корпуса, переборок, механизмов судовых систем и устройств;
- $x = 13/12$  — для труб судовых систем, кроме осушительной и отопительной;
- $x = 5/4$  — для арматуры тех же систем;
- $x = 4/3$  — для продольных связей корпуса.

После подстановки этих значений в равенство (40, 2) и устранения дробных показателей получим уравнение 16-й степени, в котором неизвестное будет содержаться в восьми различных степенях. Решение подобных уравнений может быть найдено только методом последовательных приближений или интерполирования. Оно может быть сравнительно легко получено на цифровой электронной машине, но для ручного счета, необходимость в котором еще не отпала, а также для сокращения программы машинного счета на первых стадиях проектирования, когда не требуется столь высокой точности, представляется желательным упростить уравнение (40, 2) путем частичного объединения показателей степени при неизвестном в различных его членах. Теория ошибок позволяет установить пределы, в которых подобное объединение допустимо.

**Упрощение уравнения веса.** Заменим в уравнении (40, 2) водоизмещение проектируемого судна  $D$  его выражением через общий множитель преобразования  $K$  и водоизмещение прототипа  $\bar{D}$

$$\sum A_i K^i \bar{D}^i = K \bar{D},$$

Заметим, что  $A_i = K \bar{A}_i$  и  $\bar{A}_i = \frac{\bar{P}_i}{\bar{V}_i}$ . Поэтому

$$\sum A_i K^i \bar{D}^i = \sum K \bar{P}_i K^i = K \bar{D},$$

где произведение  $K \bar{P}_i$  от показателя степени  $x_i$  не зависит.

Последнее равенство может быть разделено на  $K \bar{D}$

$$\sum K \bar{P}_i K^i = 1, \quad (40, 7)$$

где  $\bar{P}_i = \frac{\bar{P}_i}{\bar{D}}$  — относительный вес деляной статьи нагрузки прототипа

$$\alpha = x_i - 1.$$

Если в каком-либо из членов уравнения веса (40, 2) произвольно заменить показатель степени  $x_i$  при водоизмещении  $D$  на  $x_i + \epsilon (x_i)$ , то погрешность от такой замены будет точно столько же, сколько погрешности соответствующего члена уравнения (40, 7) при замене в нем показателя  $\alpha_i$  на  $\alpha_i + \epsilon (\alpha_i)$ , где  $\epsilon (x_i) = \epsilon (x_i)$ . По согласно табл. V погрешности, внесенная случайным или преднамеренным отклонением показателя степени достоверной (немаксимальной) величинами от его истинного значения, находится так:

$$\epsilon (K^{\alpha_i}) = \alpha_i \ln K \delta (\alpha_i). \quad (40, 8)$$

Например, если в статье «лифты» для общего множителя преобразования  $K$ , а следовательно, и водоизмещения  $D$  в уравнении (40, 2) принять показатель степени  $x_i = 1/2$  или  $\alpha_i = -1/2$  вместо  $x_i = 1/2$  или  $\alpha_i = 0$ , то при наибольшем возможном значении  $K = 2$  получим

$$\epsilon (K^{\alpha_i}) = -\frac{1}{2} \cdot 0,693 \frac{1/2 - 0}{1/2} = -0,12,$$

что при весе всей статьи, составляющей только 1% водоизмещения, дает систематическую ошибку — 0,12%  $D$ . Очевидно, такая ошибка даже на стадии эскизного проекта вполне допустима, тем более, что величина ее с достаточной точностью определена, а следовательно, может быть в случае надобности комплексирована.

Значительно большая погрешность может внести объединение показателей в таких крупных статьях, как «вертикальные связи корпуса» и «бортовая обшивка и поперечный набор». В этом случае  $\alpha_1 = 1/2$  и  $\alpha_2 = 0$ . Следовательно, при  $K = 2$  будем иметь

$$\epsilon (K^{\alpha_i}) = \frac{1}{2} \cdot 0,693 \frac{1/2 - 0}{1/2} = 0,23.$$

Вес продольных связей может достигать 15% водоизмещения, и соответствующая ошибка при этом окажется равной 3,5%  $D$ . Подобная неточность соизмерима с другими ошибками вычислений и не всегда может быть допущена даже в расчетах первого приближения. Лишь при отношении водоизмещений  $K = D : \bar{D} < 1,2$  она становится незначительной и для расчетов второго приближения.

Также же рассуждая, из с более благоприятным результатом могут быть выполнены в отношении членов, содержащих водоизмещение в степени  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1/3$  и  $1/4$ . Все они могут быть объединены с членами, содержащими первую степень водоизмещения. Это и дает возможность переписать уравнение веса в классической форме

$$AD + BD^{1/2} + C = D, \quad (40, 9)$$

где  $A = \sum A_i$  — сумма коэффициентов веса статей, считавшихся пропорциональными водоизмещению  $D$ ;

$B = \sum A_i$  — то же, пропорциональные  $D^{1/2}$ ;

$C = \sum A_i$  — сумма весов, не зависящих от  $D$ .

Только в тех случаях, когда объединение показателей степени  $1/2$  и  $1$  окажется недопустимым, а уравнение (40, 9) должно быть добавлен еще один член

$$A_1 D^{1/2} + A_2 D + B D^{1/2} + C = D. \quad (40, 10)$$

Однако в такой форме уравнение веса не имеет решения в замкнутом виде и потому обычно не употребляется.

**Компенсация систематических ошибок.** После решения уравнения веса в первом приближении все указанные выше систематические ошибки могут быть вычтены с довольно высокой точностью. Это дает возможность ввести в уравнение (40, 9) соответствующие поправки без существенного его усложнения, что позволяет и в расчетах второго приближения не прибегать к более разветвленным формам, типа (40, 2).

Выше мы установили, что замена в любом члене уравнения (40, 2) показателю степени вносит в его левую часть ошибку, равную  $\epsilon (K^*) D$ , где  $\epsilon (K^*)$  находится по формуле (40, 8), все данные для применения которой теперь известны. Добавляя в левую часть равенства (40, 9) поправочный член, равный  $\sum \epsilon (K^*) D$ , мы тем самым компенсируем получившиеся ошибки и можем сохранить это уравнение для расчета водонамещения во втором приближении в том же виде, изменив лишь содержание коэффициента  $A$  при первом его члене:

$$A = \sum A_i + \sum \epsilon (K^*). \quad (40, 11)$$

Возможная погрешность этого выражения легко определяется по результатам решения уравнения веса во втором приближении, которое даст более, уточненное значение  $K$ .

**Определяющие и дополнительные статьи нагрузки.** Дальнейшего упрощения уравнения веса можно достигнуть, как это было указано в § 35, выделив из нагрузки прототипа статьи, которые имеют наибольший вес, а следовательно, требуют большей точности пересчета, и статьи, тонкий пересчет которых не представляет никаких затруднений. К последним относятся все грузы, вес которых не зависит от водонамещения. Вес прочих, более мелких статей может считаться пропорциональным весу отобранных определяющих статей или водозамещению в целом. Это позволяет не вычислять коэффициенты веса для каждой такой статьи в отдельности, а объединять их в большие группы, включая затем их суммарные коэффициенты в соответствующие члены уравнения веса без всяких пересчетов или же пересчитывая их совместно

с коэффициентами веса определяющих статей по множителям преобразования последних.

Так, например, для обшивки и набора корпуса и главной палубы можно находить общий коэффициент веса, пересчитываемый по множителю преобразования веса продольных связей, а все переборки, рубки, дельные ящики и прочее зачислять по общему же коэффициенту веса, взятому с прототипа без пересчета. Аналогично общий коэффициент веса может быть определен для всего вспомогательного оборудования машинно-котельных отделений, а пересчет его может быть произведен по множителю преобразования веса главного турбоузелного агрегата или котла. Сюда же должен быть включен вес фундаментов, трапов, площадок и креплений, зависящий непосредственно от веса и размеров главных двигателей. В статью «топливо» следует включать и вес масла и пресной воды для котлов, а также вес топливных, масляных и водяных цистерн и их трубопроводов.

При таких условиях количество слагаемых, входящих в каждый член левой части уравнения веса, может быть значительно сокращено, и весь расчет сильно упростится. Предел этого сокращения обусловлен необходимой точностью решения уравнения веса, которая будет нами рассмотрена в § 42.

#### § 41. Уравнение объема (вместимости)

Решение только уравнения веса не всегда может дать удовлетворительные результаты. При этом замечается в том, что этим уравнением не учитываются габариты военного груза, жилых и пассажирских помещений, главных механизмов и прочего оборудования, для размещения которого необходимы соответствующие объемы и их конфигурация. Хотя окончательная проверка размеров помещений возможна только на чертежах или макетах, предварительное, расчетное определение их объемов все же следует считать обязательным. На стадии эскизного проекта разработка детальных чертежей общего расположения экономически невыгодна. Схематические же эскизы не могут полностью обеспечить возможность размещения среднего и мелкого оборудования, которое занимает на судне порой весьма существенную долю объема его машинных, котельных и вспомогательных помещений.

**Общий вид уравнения.** Общий вид уравнения объема, очевидно, должен быть аналогичен виду уравнения веса, так как объемы отдельных оборудования изменяются по тем же законам, что и их веса. Однако удачные объемы, зависящие различными видами генерального груза, механизмов, устройств и систем, резко отличаются между собой и еще более отличаются от удельных объемов корпусных конструкций. Поэтому значения коэффициентов в уравнении объема непропорциональны значениям соответствующих коэффициентов уравнения веса, и определяющими

статьями здесь оказываются не наиболее тяжелые составляющие нагрузки судна, а трубоудие наибольшего объема для размещения оборудования, обслуживания и управления механизмами.

В частности, одной из определяющих статей объема может оказаться, помимо пассажирских помещений, личный состав с его каютами, кубриками, кают-компаниями, провизионными кладовыми, цистернами питьевой воды, умывальниками, камбузами и пр. С другой стороны, объем стали в составе корпуса обычно не превышает 1—2% водоизмещения. Поэтому статья «корпус» должна быть исключена из числа определяющих.

Поскольку в сводной таблице объемов статьи «личный состав» может занять одно из определяющих мест, уравнение объема следовало бы писать в таком виде:

$$A_0 V + B_0' V^{1/3} + B_0'' V^{2/3} + C_0 = k_0 V, \quad (41, 1)$$

где  $V$  — объемное водоизмещение судна;

$k_0$  — коэффициент, учитывающий объем надводной части корпуса.

В некоторых случаях в объем  $A_0 V$  окажется удобным включить объем надстроек и рубок, используемых для размещения груза, личного состава и пассажиров.

Решение уравнения (41, 1) возможно только методом последовательных приближений или интерполирования, что заметно увеличивает трудоемкость работы. Поэтому желательно его упростить, освободившись от члена, содержащего неизвестное в степени  $1/3$ . Как мы видели выше, замена в этом члене показателя степени на  $2/3$  вызывает повышенные систематической погрешности — 0,12%. Очевидно, такой же будет и погрешность объема этой статьи, так как удельный объем всех помещений (на одного человека) мы должны считать, как и удельный вес, заданным, а следовательно, достоверным. Но если в таблице нагрузки статьи «личный состав» занимает всего около 1% водоизмещения и потому ошибка в определении последнего от этой замены не превышает —0,12%  $D$ , то в таблице объемов эта статья может достигать 5—8% водоизмещения, и рассматриваемая ошибка может увеличиться до 0,6—1,0%  $D$ .

При определении общей погрешности водоизмещения такой величиной пренебречь не следует, но для первого приближения обычно она оказывается допустимой, а во втором приближении вся статья «личный состав» может быть вычлена более точно и перенесена из группы  $B_0$  в группу  $C_0$ . Поэтому общий вид уравнения объема может быть таким же, как уравнение веса,

$$A_0 V + B_0 V^{1/3} + C_0 = k_0 V, \quad (41, 2)$$

**Коэффициенты объема.** Коэффициенты объема находятся по прототипу так же, как определяются коэффициенты веса. Для этого корпус прототипа должен быть разбит на отдельные объемы,

включающие то или иное устройство или комплект механизмов, вместе с пространством, необходимым для его обслуживания, ремонта и управления им. Разбивка эта не должна быть слишком детальной, поскольку и для объема, очевидно, действует закон приближенной пропорциональности, как и для веса. В частности, весь объем машинно-котельных отделений может быть отнесен к статье «главные механизмы» за вычетом только объемов расположенных в них топливных, масляных и цистерн котельной воды, относимых в статью «топливо». Объем грузовых трюмов должен включать и пространство между штабелями, бимсами и другими деталями набора, даже в том случае, если при переборке штабного груза это пространство не используется. Сумма полученных таким образом частных объемов должна равняться внутреннему объему корпуса прототипа.

Полученные указанным способом частные объемы группируются по статьям и затем пересчитываются с помощью тех же множителей преобразования, что и статьи нагрузки. Различие заключается лишь в том, что вместо удельных весов механизмов, устройств и других грузов здесь используются их удельные объемы, а коэффициент объема статьи «личный состав» пересчитывается пропорционально сумме двух показателей:

$\omega_1$  — объем жилых и бытовых помещений, приходящийся на 1 чел.;

$\omega_2$  — объем кладовых для провизии и цистерн для питьевой воды, также приходящийся на 1 чел. на все заданное время плавания.

Оба эти показателя легко могут быть выбраны в соответствии с заданной степенью комфорта и действующими нормами снабжения.

**Точность исходных данных.** С первого взгляда может показаться, что решение уравнения объема не может быть столь же точным, как решение уравнения веса, так как первичная разбивка объема прототипа содержит элемент произвольности. Однако это не так.

Наиболее крупные статьи объема — спаленный груз, «пассажир» и «главные механизмы» включают шпальные объемы соответствующих отсеков — объемы, которые находятся по чертежам прототипа с высокой точностью. Статья «топливо» включает объемы цистерн судовых запасов, которые всегда точно проверяются как при проектировании, так и в постройке (валками). Таким образом, из всех определяющих статей объема только «личный состав» и «навигационное оборудование» могут до некоторой степени зависеть от произвольного разграничения их объемов на прототипе. Однако и для этих статей трудно ожидать, что погрешность в определении их объемов на прототипе превышает 5—10%. Это должно быть учтено при оценке точности решений уравнения объема, но влияние этой погрешности, как правило,



исследовании малости самих статей оказывается в первом приближении незначительным. Во втором же приближении оба указанных объема могут быть уточнены и перенесены в группу постоянных объемов  $C$ .

Таким образом, исходные данные для составления уравнения объема могут практически считаться столь же достоверными, как и исходные данные для составления уравнения веса.

#### § 42. Решение уравнений веса и объема

Точность решения уравнений веса и объема зависит главным образом от точности определения их коэффициентов и тех допущений и упрощений, которые были приняты при их составлении и рассмотрены в § 40. Однако некоторые влияния на точность результата может оказать и метод решения; в этом отношении уравнения веса и объема являются весьма наглядной иллюстрацией к тому, что говорилось в начале § 16.

Из существующих методов решения уравнений веса (и объема) рассмотрим способ подстановки, способ А. Н. Крылова и способ гиперболических функций [1—4]. Все они основаны на строгих математических выводах и потому не содержат сами по себе источников методических ошибок. Однако различие в характере и последовательности вычислений приводит к тому, что при одинаковой точности исходных величин (коэффициентов) погрешности результата оказываются различными.

Из всех форм уравнений веса, указанных в § 40, рассмотрим только вторую (40, 9), так как первая (40, 2) и третья (40, 10) применяются редко, а методика расчета погрешностей способом подстановки, изложенная ниже, применима и к другим, более развинутым формам.

**Способ подстановки.** Способ подстановки заключается в главном выборе ряда значений искомой величины  $D$  с последующим интерполированием, обычно графическим, и проверкой результата подставивший его в исходное уравнение. Точность решения может считаться удовлетворительной, если возможная погрешность левой части уравнения веса после подстановки окажется не больше допустимой погрешности правой части, т. е. найденного водоизмещения. Так как степень достоверности и закон распределения для левой и правой частей одинаковы, то сравнительно удобнее производить непосредственно по средним квадратичным погрешностям

$$\delta(AD + BD^{1/3} + C) < \delta(C). \quad (42, 1)$$

При составлении уравнения (40, 9) веса всех определяющих статей нагрузки в группах  $A$  и  $B$  получаются умножением их коэффициентов на водоизмещение в соответствующей степени. Следовательно,

конечно, после подстановки найденного решения погрешность веса каждой статьи нагрузки во группе  $A$  будет

$$\delta(P_{Ai}) = \sqrt{[\delta(A_i)]^2 + [\delta(D)]^2}, \quad (42, 2)$$

а во группе  $B$

$$\delta(P_{Bi}) = \sqrt{[\delta(B_i)]^2 + \left[\frac{2}{3}\delta(D)\right]^2}. \quad (42, 3)$$

Все веса в группе  $C$  находятся независимо от водоизмещения. Следовательно, не будет от него зависеть и их погрешность

$$\delta(P_{Ci}) = \delta(C). \quad (42, 4)$$

Для нахождения общей погрешности суммы весов определяющих статей необходимо знать ту долю, которую занимает каждая такая статья в нагрузке судна  $P_i = \frac{P_i}{P}$ . Тогда средняя квадратичная погрешность интересующей нас суммы выразится так:

$$\delta(\sum P_i) = \sqrt{\sum \left[ \frac{P_i}{\sum P_i} \delta(P_i) \right]^2}, \quad (42, 5)$$

где индекс  $i$  указывает на то, что данная сумма содержит только члены, относящиеся к определяющим статьям нагрузки.

Погрешность веса дополнительных статей может быть найдена по статистическим данным. Если, например, известно, что для ряда построенных ранее судов сумма относительных весов определяющих статей нагрузки не выходила за пределы

$$\alpha < \sum P_i < \beta,$$

то можно предположить, что и для проектируемого судна возможные отклонения в весе дополнительных статей не выйдут за пределы  $\pm \frac{1}{2}[(1 - \beta) - (1 - \alpha)] = \pm \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ .

Закон распределения этих отклонений можно принять, не стремясь к большей точности, равновероятным, и поэтому положить среднюю квадратичную ошибку веса дополнительных грузов равной

$$\sigma(p_i) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\beta - \alpha). \quad (42, 6)$$

Если потребуются более точные статистические расчеты, то они могут быть выполнены согласно указанным в § 6.

В обоих случаях средняя квадратичная погрешность левой части уравнения веса находится по формуле (15, 5), которая приобретает следующий вид:

$$\delta[AD + BD^{1/3} + C] = \sqrt{[\delta(P_{Ai})]^2 + [\sigma(p_i)]^2}. \quad (42, 7)$$

Решение задачи заканчивается сравнением полученного результата с допустимой средней квадратичной погрешностью, указанной для данного этапа проектирования в табл. XXIII (предпоследний столбец).

Средю потерь, в равенствах (42, 2) и (42, 3) следует подставлять значение средней квадратичной погрешности водозмещения, которое затем будет получено из равенства (42, 7). Однако на практике оказывается вполне достаточным подставить сюда значение наибольшей допустимой величины  $\delta(D)$  из табл. XXIII. Если при этом неравенство (42, 1) все же будет удовлетворено, подобная замена приведет к явной завышенности найденной погрешности водозмещения, и второго пересчета не потребуется. Если же неравенство (42, 1) при этом окажется неудовлетворенным, то при втором приближении это расхождение может только увеличиться. Следовательно, и в этом случае потребуется не повторное определение погрешности водозмещения, а поштучное вычисление коэффициентов веса определяющих статей или дополнение их перечня за счет перевода в эту группу некоторых статей, считавшихся ранее дополнительными (с соответствующим изменением методики их пересчета).

**Способ А. Н. Крылова.** Этот способ облегчает подбор решения, но исследование меньшей точности требует последующей проверки методом подстановки. Он основан на замене неизвестной  $D$  ее функцией

$$y = \frac{D^{1/3}}{B} (1 - A), \quad (42, 8)$$

после чего уравнение веса приводится к виду

$$y^2 - y^2 = \frac{C}{B^2} (1 - A)^2, \quad (42, 9)$$

Нужные значения  $y$  для подстановки в левую часть этого равенства размещаются по таблицам квадратов и кубов натуральных чисел, имеющихся в каждом математическом справочнике.

Погрешность правой части равенства (42, 9) находится по общим формулам теории ошибок (табл. V)

$$\delta(y^2 - y^2) = \sqrt{[\delta(C)]^2 + [3\delta(B)]^2 + \left[2 \frac{A}{1-A} \delta(A)\right]^2}, \quad (42, 10)$$

С другой стороны,

$$\delta(y^2 - y^2) = \frac{\delta(y^2 - y^2)}{dy} \cdot \frac{\sigma(y)}{y^2 - y^2} = \frac{2y - y}{y - 1} \cdot \delta(y). \quad (42, 11)$$

Отсюда может быть найдена средняя квадратичная погрешность величины  $y$

$$\delta(y) = \frac{y-1}{2y-1} \sqrt{[\delta(C)]^2 + [3\delta(B)]^2 + \left[2 \frac{A}{1-A} \delta(A)\right]^2}. \quad (42, 12)$$

Нетрудно убедиться на примерах в том, что погрешность определения этой величины получается достаточно малой и обычно не превышает 3-4%. В то же время она оказывается достаточно высокой, чтобы допустить пользование таблицами квадратов и кубов трехзначных чисел без их интерполирования.

Значительно меньшую точность дает вычисление водозмещения из формулы (42, 8)

$$\delta(D) = 3 \sqrt{[\delta(y)]^2 + [\delta(B)]^2 + \left[\frac{A}{1-A} \delta(A)\right]^2}. \quad (42, 13)$$

Определившись здесь величиной погрешности коэффициентов  $A$  и  $B$ , достигающей на стадии 1 приближения 8-10%. При этом средняя квадратичная погрешность водозмещения оказывается в 5-6 раз больше, чем при нахождении его способом подстановки. Поэтому и необходимо его уточнение.

**Способ гиперболических функций.** По этому способу предварительно находится величина вспомогательной функции

$$\text{sh } 3\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-A}{B} \cdot \sqrt{\frac{3C}{B}}, \quad (42, 14)$$

после чего

$$D = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3C}{B} \cdot \frac{1}{\text{sh } \alpha}}\right)^3. \quad (42, 15)$$

Очевидно и здесь необходимость введения в куб может существенно снизить точность результата.

Средняя квадратичная погрешность первого вычисления находится так:

$$\delta(\text{sh } 3\alpha) = \sqrt{\left[\frac{A}{1-A} \delta(A)\right]^2 + \left[\frac{3}{2} \delta(B)\right]^2 + [\delta(C)]^2}. \quad (42, 16)$$

С другой стороны,

$$\delta(\text{sh } 3\alpha) = \frac{\text{ch } 3\alpha}{\text{sh } 3\alpha} \sigma(3\alpha) = \frac{3\alpha}{\text{sh } 3\alpha} \cdot \delta(\alpha),$$

откуда

$$\delta(\alpha) = \frac{\text{sh } 3\alpha}{3\alpha} \delta(\text{sh } 3\alpha). \quad (42, 17)$$

Эта погрешность получается достаточно малой только в том случае, если углы  $3\alpha$  и  $\alpha$  определены с точностью до третьего знака после запятой. После этого находится средняя квадратичная погрешность водозмещения

$$\delta(D) = 3 \sqrt{\left[\frac{1}{2} \delta(C)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} \delta(B)\right]^2 + [\delta(\text{sh } \alpha)]^2}. \quad (42, 18)$$

В ряде случаев погрешность водоизмещения, определенное по способу гиперболических функций, оказывалась несколько меньше, чем по способу А. Н. Крылова, но все же дополнительная проверка подстановкой должна быть рекомендована и здесь.

Само собою разумеется, что к возможным погрешностям, введенным по формулам данного параграфа, должны быть добавлены систематические погрешности, возникающие от объединения показателей степени и других упрощений, принятых при составлении уравнения веса. Но в большинстве случаев эти дополнительные погрешности, как мы видели выше, оказываются достаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь.

Все сказанное в одинаковой степени относится и к уравнению объема.

### § 43. Дифференциальные методы определения водоизмещения

Способ непосредственного решения уравнений веса и объема в алгебраической форме прост и удобен в том случае, если проектируемое судно существенно отличается от своего прототипа водоизмещением и габаритными размерами. Прямое его применение следует считать условно равным допустимой ошибке нового водоизмещения и разности между водоизмещением нового судна и прототипа. При меньших разностях водоизмещения лучших результатов можно ожидать от применения дифференциальных способов, предназначенных для непосредственного определения указанной малой разности как функции приращений всех статей загрузки. При этом конечные приращения водоизмещения и весов всех грузов находятся с помощью ряда Тейлора, в котором, как правило, сохраняются только линейные члены. Этим вносятся дополнительные ошибки, нуждающиеся в нашем внимании.

Погрешностями, вносимыми неточностью исходных данных, мы в этом параграфе заниматься не будем, так как метод их определения был уже достаточно освещен выше.

**Дифференцирование уравнения веса.** Найдем частные производные первого порядка от обеих частей уравнения (40, 9) по каждому из его коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial A} &= A \frac{\partial D}{\partial A} + \frac{2}{3} \frac{B}{V D} \cdot \frac{\partial D}{\partial A} + D \\ \frac{\partial D}{\partial B} &= A \frac{\partial D}{\partial B} + \frac{2}{3} \frac{B}{V D} \cdot \frac{\partial D}{\partial B} + D^{1/3} \\ \frac{\partial D}{\partial C} &= A \frac{\partial D}{\partial C} + \frac{2}{3} \frac{B}{V D} \frac{\partial D}{\partial C} + 1 \end{aligned} \right\} (43, 1)$$

Отсюда легко находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial A} &= \frac{D}{N_p} \\ \frac{\partial D}{\partial B} &= \frac{D^{1/3}}{N_p} \\ \frac{\partial D}{\partial C} &= \frac{1}{N_p} \end{aligned} \right\} (43, 2)$$

где

$$N_p = 1 - A - \frac{2}{3} \frac{B}{V D} \quad (43, 3)$$

Нетрудно убедиться в том, что коэффициент  $N_p$  является величиной обратной известному коэффициенту Нормала.

Для продолжения дифференцирования найдем сначала частые производные коэффициента  $N_p$  по параметрам  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_p}{\partial A} &= -1 + \frac{2}{9} \frac{B}{N_p V D} \\ \frac{\partial N_p}{\partial B} &= -\frac{2}{3} \frac{1}{V D} + \frac{2}{3} \frac{B}{N_p V D^2} \\ \frac{\partial N_p}{\partial C} &= -\frac{2}{9} \frac{B}{N_p D V D} \end{aligned} \right\} (43, 4)$$

Используя эти выражения при дифференцировании равенств (43, 2), найдем вторые производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 D}{\partial A^2} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{D}{N_p} \right) = \frac{D}{N_p^2} \left( 2 - \frac{2}{9} \frac{B}{N_p V D} \right) \\ \frac{\partial^2 D}{\partial B^2} &= \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{D^{1/3}}{N_p} \right) = \frac{1}{3} \frac{D^{1/3}}{N_p^2} \left( 2 - \frac{1}{3} \frac{B}{N_p V D} \right) \\ \frac{\partial^2 D}{\partial C^2} &= -\frac{2}{9} \frac{B}{N_p^2 D V D} \end{aligned} \right\} (43, 5)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial A \partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{D}{N_p} \right) = \frac{1}{3} \frac{D^{1/3}}{N_p^2} \left( 5 - \frac{2}{3} \frac{B}{N_p V D} \right)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial A \partial C} = \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{1}{N_p} \right) = \frac{1}{N_p^2} \left( 1 - \frac{2}{9} \frac{B}{N_p V D} \right)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial B \partial C} = \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{N_p} \right) = \frac{1}{N_p^2} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{V D} - \frac{2}{9} \frac{B}{N_p V D^2} \right)$$

Разлагая водоизмещение в ряд Тейлора по найденным производным, получим его конечное приращение в виде многочлена

$$\epsilon D = \epsilon' D + \epsilon'' D + \epsilon''' D, \quad (43, 6)$$

где

$$\epsilon' D = \frac{\partial D}{\partial A} \epsilon A + \frac{\partial D}{\partial B} \epsilon B + \frac{\partial D}{\partial C} \epsilon C; \quad (43, 7)$$

$$\epsilon'' D = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial A^2} (\epsilon A)^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial B^2} (\epsilon B)^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial C^2} (\epsilon C)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 D}{\partial A \partial B} (\epsilon A)(\epsilon B) + 2 \frac{\partial^2 D}{\partial A \partial C} (\epsilon A)(\epsilon C) + 2 \frac{\partial^2 D}{\partial B \partial C} (\epsilon B)(\epsilon C) \right]; \quad (43, 8)$$

$\epsilon''' D$  — одна из сумм от суммы 10 комбинаций из трех производных водоизмещения, умноженных на произведение соответствующих приращений параметров. Этим членом в дальнейшем будем пренебрегать ввиду его малости по сравнению со вторым, потому полное его выражение здесь не приводится.

В подстановке сюда полученных выше выражений производных нет необходимости; гораздо проще вычислять их отдельно по формулам (43, 2) и (43, 5) и подставлять в равенства (43, 7) и (43, 8) непосредственно их численные значения.

**Сравнение алгебраических и дифференциальных методов.** В отличие от алгебраических способов решения уравнений веса, основанных на строгих математических преобразованиях, разложение водоизмещения в ряд Тейлора вносит в расчет систематическую ошибку, равную сумме всех отброшенных членов этого бесконечного ряда. Во всех практических интересных случаях величина третьего и последующих членов правой части равенства (43, 6) действительно оказывается настолько малой, что пренебрежение ею не влияет на результаты вычисления. Отбрасывание же второго члена, как это обычно практикуется, может внести значительно более существенные ошибки, требующие определения.

Величина второго члена равенства (43, 6) зависит прежде всего от величины тех приращений, которые получают коэффициенты уравнения веса, а следовательно, и водоизмещение нового судна по сравнению с прототипом. Особенно быстрое возрастание этого члена замечается в тех случаях, когда водоизмещение проектируемого судна превышает водоизмещение прототипа на 20—30% и более. Если до этой границы систематические ошибки получаются меньшими, хотя и соизмеримыми со случайными, то за этой границей они становятся существенно большими, чем случайные, и выходят далеко за допустимые пределы.

В качестве примера возьмем прототип, имеющий водоизмещение  $\bar{D} = 1000$  м<sup>3</sup> и коэффициенты уравнения веса  $\bar{A} = 0,45$ ;  $\bar{B} = 3,0$  и  $\bar{C} = 250$  м. Дадим этим коэффициентам приращения

$\epsilon A = 0,15$ ;  $\epsilon B = 1,0$  и  $\epsilon C = 50$  м. Решая уравнение веса способом гиперболических функций, получим

$$\operatorname{sh} 3x = \frac{3}{4} \cdot \frac{0,4}{4} \sqrt{\frac{2300}{4}} = 2,250; \quad 3x = 1,550;$$

$$x = 0,517; \quad \operatorname{sh} x = 0,540,$$

и, следовательно,

$$D = \left( \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2300}{4} - \frac{1}{0,540}} \right)^3 = 2680 \text{ м}^3.$$

Проверка способом подстановки подтверждает эту величину. Решая ту же задачу дифференциальным способом, с сохранением в правой части равенства (43, 6) только первого члена, найдем для прототипа

$$N_p = 1 - 0,45 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3,0}{\sqrt{1000}} = 0,33$$

и затем для проектируемого судна

$$\epsilon' D = \frac{1000}{0,33} \cdot 0,15 + \frac{1000^{3/4}}{0,33} \cdot 1,0 + \frac{1}{0,33} \cdot 50 = 855 \text{ м}^3.$$

Следовательно, искомое водоизмещение получается равным

$$D = \bar{D} + \epsilon' D = 1855 \text{ м}^3,$$

т. е. на 30% меньше, чем по более точному решению, полученному выше. Расхождение между решениями может быть уменьшено до 2%, если в равенстве (43, 6) будет сохранен и второй член  $\epsilon'' D$ .

При уменьшении приращений осей коэффициентов уравнения веса в три раза по сравнению с принятыми выше водоизмещение нового судна уменьшится до 1330 м<sup>3</sup>, а погрешность от пренебрежения вторым членом формулы (43, 6) сократится в семь раз ( $\epsilon' D = 4,4\% D$ ), оставаясь все же еще недопустимой даже для расчетов первого приближения.

**Способ И. Г. Бубнова.** Способ отличается от изложенного выше прежде всего тем, что в нем в качестве неизвестных вводятся главные размеры судна, а не водоизмещение. Число членов уравнения веса при этом значительно сокращается и для возможности решения ему придается дифференциальная форма. В связи с этим отпадает необходимость в объединении показателей степеней при неизвестных, что повышает точность исходного уравнения. Однако по этой же причине отпадает возможность сохранения в дифференциальной форме вторых (и высших) производных, что вновь понижает точность решения, особенно при больших приращениях главных размеров.

Уравнение И. Г. Бубнова будем рассматривать в той форме, которую ему придал А. И. Балкаши (11-119)

$$\Delta P = \left( \frac{D}{L} - \sum \frac{\partial P_i}{\partial L} \right) \varepsilon L + \left( \frac{D}{B} - \sum \frac{\partial P_i}{\partial B} \right) \varepsilon B + \left( \frac{D}{T} - \sum \frac{\partial P_i}{\partial T} \right) \varepsilon T. \quad (43, 9)$$

Это выражение может быть выведено из равенств (40, 1) и (40, 2) принципиально тем же путем, что и уравнение (43, 6) — разложением водозмещения в ряд Тейлора.

Из равенства (40, 1) следует, что любое конечное приращение водозмещения равно сумме таких же приращений отдельных статей нагрузки

$$\varepsilon D = \sum \varepsilon P_i. \quad (43, 10)$$

Но поскольку согласно (40, 2)  $P_i = A_i D^3$ , т. е. зависит как от параметров, определяемых техническими заданиями ( $A_i$ ), так и от главных размеров судна, то при разложении  $\sum P_i$  в ряд Тейлора с сохранением лишь производных первого порядка мы должны записать

$$\sum \varepsilon P_i = \sum \frac{\partial P_i}{\partial A_i} \varepsilon A_i + \sum \frac{\partial P_i}{\partial D} \varepsilon D.$$

Обозначим через  $\Delta P$  сумму приращений, зависящих только от изменения эксплуатационно-технических показателей нового судна по сравнению с прототипом, без учета изменения его водозмещения

$$\Delta P = \sum \frac{\partial P_i}{\partial A_i} \varepsilon A_i.$$

Тогда равенство (43, 10) преобразуется в следующее:

$$\Delta P = \left( 1 - \sum \frac{\partial P_i}{\partial D} \right) \varepsilon D. \quad (43, 11)$$

Далее выразим водозмещение в его выражении через главные размеры, считая коэффициент полноты  $\delta_0$  постоянным.

$$D = \delta_0 L B T; \quad (43, 12)$$

$$\varepsilon D = D \left( \frac{\varepsilon L}{L} + \frac{\varepsilon B}{B} + \frac{\varepsilon T}{T} \right). \quad (43, 13)$$

Кроме того, обратим внимание на то, что  $\frac{\partial D}{\partial L} = \frac{D}{L}$ , а

$$\frac{\partial P_i}{\partial D} = \frac{\partial P_i}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial D} = \frac{L}{D} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial L} \quad (43, 14)$$

и аналогично по другим главным размерам.

Произведя все указанные подстановки в уравнение (43, 11), мы и преобразуем его в основное равенство (43, 9).

Таким образом, видно, что в выводе уравнения И. Г. Бубнова весь ход математических преобразований вполне корректен и истинным методическим прогрессом может служить только пренебрежение производными второго и высших порядков при разложении суммы весов в ряд Тейлора. Систематическая ошибка,

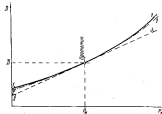


Рис. 27. Изменение водозмещения в зависимости от скорости машины установки.

1 — по формуле (43, 9); 2 — по формуле (43, 9); 3 — по формуле (43, 11).

которая вносится из-за пренебрежения, очевидно, будет не меньше

$$\varepsilon^2 D = \frac{1}{2} \left\{ \sum \frac{\partial^2 P_i}{\partial A_i^2} (\varepsilon A_i)^2 + \sum \frac{\partial^2 P_i}{\partial D^2} (\varepsilon D)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 P_i}{\partial A_i \partial D} (\varepsilon A_i) (\varepsilon D) \right\} \quad (43, 15)$$

с точностью до производных третьего порядка. Численно эта ошибка не отличается от определенной по формуле (43, 8), выведенной ранее, а, следовательно, оба способа в этом отношении эквивалентны.

Некоторое повышение точности решений по способу И. Г. Бубнова может наблюдаться лишь при проектировании быстроходных судов с большой относительной длиной корпуса, где условия общей прочности требуют преимущественного развития продольных связей, и поэтому объединение их в одну лосовую стельку со связями, участвующими в обеспечении только местной прочности, как это сделано при выводе уравнения (40, 13), окажется недопустимым. Однако, с другой стороны, такое уделение

ние вычислений, связанное с увеличением числа параметров и промежуточных выкладок, ведет к увеличению возможности случайных ошибок, как мы это видели на примерах § 42. Поэтому окончательный вывод о преимуществах того или иного способа с точки зрения их точности может быть сделан лишь на основе конкретной практики.

Изложенное наглядно иллюстрируется рис. 27, где показаны кривые изменения возмущенной проекцируемого судна в зависимости от изменения веса машинной установки. Кривая 1 получена непосредственным решением уравнения веса в алгебраической форме, кривая 2 — дифференциальным методом с удержанием в разложении Тейлора производных первого и второго порядка, а кривая 3 — таким же способом, но с удержанием производных только первого порядка. Последнее решение совпадает с решением, получаемым по способу И. Г. Бубнова. Наибольшего доверия, очевидно, заслуживает первая кривая.

#### § 44. Метод вариаций

Метод вариаций применяется как для решения общих задач по выбору оптимальных главных размеров или состава машинной установки, так и для ответа на многие частные вопросы, связанные с влиянием тех или иных конструктивных параметров на эксплуатационные качества судна. Во всех случаях возникает необходимость в выборе количества вариантов, подлежащих рассмотрению, и назначении наименьшего интервала варьирования последующих параметров, позволяющего достаточно четко заметить различия в характеристиках двух соседних вариантов. Решение обеих этих задач связано с точностью определения сравниваемых критериев.

**Число вариантов.** Для построения кривых, выражающих любую однозначную закономерность аperiodического характера, полученную экспериментально или расчетом, необходимо иметь число точек, превышающее ее порядок не менее, чем на два. Это требование вытекает из представления такой закономерности в пределах заданного участка в виде сходящегося степенного ряда с постоянными коэффициентами

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^n + Lx^{n+1}. \quad (44, 1)$$

Чтобы эта функция имела порядок  $n$  и была полностью определена, требуется найти численные значения всех постоянных коэффициентов до  $K$  включительно и убедиться в том, что прочие коэффициенты, начиная с  $L$ , отличаются от нуля не более, чем на величину допустимой ошибки. Для этого необходимо составить и решить не менее  $n+2$  частных уравнений, т. е. иметь  $n+2$  совместных частных значений  $x$  и  $y$ . Поэтому для умеренного построения линейной зависимости надо иметь не менее трех

точек, лежащих на одной прямой; для такого же построения параболы 2-й степени — не менее четырех точек и т. д.

Указанное минимальное число точек достаточно только в том случае, если их положение определено способом, позволяющим непосредственно вычислить и возможные случайные ошибки найденных коэффициентов. Методическая ошибка всего определения при этом равна сумме отбрасываемых членов ряда (44, 1) или при достаточно быстрой его сходимости может считаться близкой к первому из них. Если величина возможной общей ошибки не

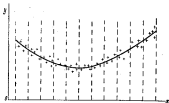


Рис. 28. Построение графика по экспериментальным точкам.

выходит за допустимые пределы на протяжении всего рассматриваемого участка, то это и будет служить доказательством достаточности числа имеющихся точек.

Задача усложняется, если непосредственная оценка погрешностей найденных коэффициентов затрудняется большой сложностью их определения. В таком случае число исходных точек должно быть значительно увеличено с тем, чтобы среднюю квадратичную ошибку построенного графика можно было определить по методике, изложенной в § 6. Само построение графика при этом производится следующим способом (рис. 28).

**Построение графика.** Весь рассматриваемый участок делится на интервалы (не обязательно равные) с таким расчетом, чтобы в каждом интервале заключалось по возможности не менее 4—5 экспериментальных точек. Для каждого такого интервала находится среднее значение координат  $x$  и  $y$  и наносится усредненным таким образом точки  $(\bar{x}, \bar{y})$ , соединяемые затем плавной кривой. Эта кривая и принимается за математическое ожидание последующей закономерности.

Синная затем с графика получившиеся отклонения по высоте отдельных точек от построившей кривой ( $\Delta_i$ ), находим систематическую ошибку последней

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n} \sum \Delta_i \quad (44, 2)$$

и среднюю квадратичную ошибку всего исследования

$$\sigma(y) = \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{n(n-1)}} \quad (44, 3)$$

Если обе указанные ошибки не выйдут за допустимые пределы, то количество измеряемых точек и точность их определения могут считаться удовлетворительными. В противном случае построившая кривая должна быть смещена вверх или вниз на величину систематической ошибки, а если это не помогает, — все исследование должно быть продолжено для получения большего числа точек.

Подобная проверка может быть выполнена как для графика в целом, так и для отдельных его частей, состоящих каждая из трех-четырех интервалов. Это позволяет внести некоторые исправления в проведенную ранее кривую и тем самым еще уменьшить ее случайные ошибки.

Если все полученные точки ложатся точно на одну кривую, такая зависимость между двумя переменными называется функциональной. Если при любой точности измерений наблюдается все же разброс точек, не объясняемый погрешностями отсчета или расчета, говорят о корреляции, как о зависимости величин, с которыми функциональная [4—170]. Большинство величин, с которыми приходится встречаться при проектировании, имеют корреляцию между собой: они зависят не только от тех основных параметров, которые удается ввести в рассмотрение, но и многих других второстепенных факторов, не поддающихся учету или учет которых нецелесообразен.

Среди различных видов корреляционных зависимостей особый интерес представляет линейная; для нее могут быть указаны наиболее простые способы построения и оценки точности. Во все же время к этому виду могут быть привлечены путем логарифмирования и любые одночленные степенные зависимости, широко распространенные в технике. Примером может служить формула Прандтля—Шантинга, рассмотренная в § 30.

**Линейная корреляция.** Допустим, что график исследуемой функции может быть представлен в виде прямой

$$y = a + bx \quad (44, 4)$$

Требуется на основании ряда испытаний найти значение коэффициентов  $a$  и  $b$  и их средние квадратичные погрешности, которыми будет определяться и погрешность формулы (44,4).

Разделим всю совокупность испытаний на две серии так, чтобы количество испытаний в обеих сериях было по возможности одинаковым. Пусть в первую серию войдут все испытания, имеющие  $x < x_0$ , а во вторую  $x > x_0$ . Затем подставим в равенство (44,4) найденные численные значения  $x_i$  и  $y_i$  и сложим их для каждой серии

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} y_i &= n_1 a + b \sum_{i=1}^{n_1} x_i \\ \sum_{i=1}^{n_2} y_i &= n_2 a + b \sum_{i=1}^{n_2} x_i \end{aligned} \right\} \quad (44, 5)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — число испытаний в каждой серии. Разделив каждое из этих уравнений на соответствующее число  $n_1$  или  $n_2$  и вычтем одно из другого. В результате получаем возможность определить коэффициент  $b$

$$b = \frac{\bar{y}_2 n_1 - \bar{y}_1 n_2}{\bar{x}_2 n_1 - \bar{x}_1 n_2} \quad (44, 6)$$

где индексом «ср» обозначены средние значения величин  $x$  и  $y$  на каждой серии испытаний. Их средние квадратичные ошибки легко находятся по указаниям § 6, после чего

$$\delta(b) = \sqrt{\frac{[\sigma(\bar{y}_2 n_1)]^2 + [\sigma(\bar{y}_1 n_2)]^2}{(\bar{x}_2 n_1 - \bar{x}_1 n_2)^2} + \frac{[\sigma(\bar{x}_2 n_1)]^2 + [\sigma(\bar{x}_1 n_2)]^2}{(\bar{x}_2 n_1 - \bar{x}_1 n_2)^2}} \quad (44, 7)$$

После определения коэффициента  $b$  легко находится и величина свободного члена  $a$ , а именно,

$$a = \bar{y}_0 - b \bar{x}_0 \quad (44, 8)$$

и

$$\delta(a) = \sqrt{[\sigma(\bar{y}_0)]^2 + [b \sigma(\bar{x}_0)]^2 + [\bar{x}_0 \delta(b)]^2} \quad (44, 9)$$

где  $\bar{x}_0$  и  $\bar{y}_0$  — средние значения для всей совокупности испытаний.

Средняя квадратичная ошибка величины  $y$  при ее определении по формуле (44,4), очевидно, будет зависеть от параметра  $x$ , который в общем случае может быть также недостоверным

$$\sigma(y) = \sqrt{[\sigma(y)]^2 + [b \sigma(x)]^2 + [x \delta(b)]^2} \quad (44, 10)$$

**Число варьируемых параметров.** Объем вычислительных работ при вариационном исследовании в значительной степени зависит от количества тех параметров, значения которых на рассматриваемый критерий желательно установить. Действительно, если варьируемо подвергается  $k$  параметров, из которых каждый может приобретать  $n$  различных значений ( $n$  точек для построения

графика), то общее число комбинаций, подлежащих анализу, составит (рис. 29)

$$N = n^k. \quad (44, 11)$$

Большинство интересующих судостроителей зависимостей может достаточно хорошо аппроксимироваться параболой 2-й и 3-й степеней. Поэтому в расчетах первого приближения достаточно

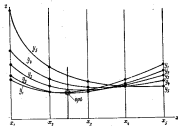


Рис. 29. Полное исследование функций двух переменных ( $n = 4$ ;  $k = 2$ ).

положить  $n = 4$ , а во втором приближении  $n = 5$ . Но и при этом, чтобы исследовать, например, влияние на водоизмещение проектируемого судна хотя бы только двух соотношений главных размеров  $L : B$  и  $B : T$ , т. е. при  $k = 2$ , потребуется в первом приближении  $N = 4^2 = 16$  вариантов. Если же к этому добавить изменение коэффициента полноты ( $k = 3$ ), то число вариантов возрастет до  $N = 4^3 = 64$  и т. д.

Для сокращения работы часто оказывается возможным ввести предположение о независимости влияния отдельных параметров на последующий критерий. Так, например, влияние отношения ширины судна к его осадке на его ходовые качества практически не зависит от относительного удлинения. В таком случае выбор оптимальных значений каждого из этих отношений может быть сделан раздельно. Для чего в общем случае потребуются рассчитать только следующие число вариантов (рис. 30):

$$N = k(n-1) + 1. \quad (44, 12)$$

В частности, для выбора главных размеров в первом приближении ( $n = 4$ ;  $k = 2$ ) будем иметь  $N = 2(4-1) + 1 = 7$  вариантов вместо 16 в предыдущем случае.

Расчеты при этом удобно вести последовательно: задав произвольные значения для тех параметров, влияние которых относительно мало, найти оптимальное значение наиболее сильного параметра, затем для этого его значения найти оптимальную величину следующего по значимости параметра и т. д. При многих

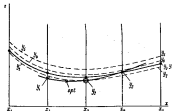


Рис. 30. Сокращенное исследование той же функции, что и на рис. 29.

варируемых параметрах и отсутствии электронных вычислительных машин этот путь может оказаться единственно доступным для проектной организации.

В обоих описанных приемах точность определения критерия для сравнения  $Q$  зависит только от точности исходных данных и методов расчета лишь для тех конкретных вариантов, которые были фактически рассчитаны (пока, зависевшие на крайне рис. 29 и 30). Однако на практике при втором способе часто возникает необходимость экстраполировать полученные графики до одной из переменных. Это создает новый источник ошибок, которые иногда могут оказаться весьма существенными.

Дело в том, что, условно ограничиваясь независимым варьированием каждого из рассматриваемых параметров в отдельности, мы тем самым предполагаем, что интересующий нас критерий  $Q = f(x, y)$  может быть представлен в виде суммы или произведения двух независимых функций

$$Q = f_1(x) + f_2(y) \quad (44, 13)$$

или

$$Q = f_1(x) f_2(y). \quad (44, 14)$$



В первом случае отдельные кривые условного семейства будут располагаться на графике эквидистантно (пунктирные линии на рис. 30), во втором — их ординаты будут пропорциональны значению  $f_2(y)$ , определенному для одного конкретного  $x$ , принятого в качестве оптимального. В обоих случаях они могут существенно отклоняться от истинных значений рассматриваемой функции двух переменных (сплошные линии на рис. 29), что неизбежно приведет к смещению искомого точки оптимума, отмеченной на обоих рисунках двойным кружком. Устранить это смещение можно лишь путем производства дополнительных экспериментов или расчетов, которые позволят нанести на график не менее трех дополнительных точек в том районе, где ожидается окончательный оптимум. На рис. 30 такие точки более точных значений  $Q$  показаны крестиками и соединены сплошной линией.

Если зависимость  $Q = f(x, y)$  представляется аналитически, то возможная ошибка в определении  $Q$  последдем из описанных способов может быть ориентировочно оценена по формуле, аналогичной (43, 6). Считая функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  независимыми, мы тем самым предполагаем, что все смешанные производные от  $Q$  по  $x$  и  $y$  равны нулю. Следовательно, сумма таких производных, умноженных на соответствующие отклонения в  $x$  и  $y$ , будет равна систематической ошибке графика, построенного описанным выше сокращенным способом.

**Интервал варьирования.** Наибольший интервал между двумя соседними величинами варьируемого параметра  $p$  должен быть согласован с возможной точностью расчета так, чтобы получаемые конкретные значения сравниваемого критерия  $Q$  не сблизались между собой более, чем на удвоенную величину их возможной погрешности. Принципиально следует стремиться к еще большему увеличению этого интервала, так как и при нем случайное сочетание знаков и величин полученных ошибок может привести к совпадению двух соседних значений критерия, а следовательно, и к существенному искажению исследуемой зависимости. Однако вероятность такого совпадения равна произведению вероятностей появления в обоих вариантах ошибок, больших возможной (в принятом нами понимании этого слова).

$$1 - v = (1 - v_0)^2, \quad (44, 15)$$

где  $v$  — достоверность несовпадения возможных ошибок;  
 $v_0$  — достоверность определения величины сравниваемого критерия.

Отсюда получаем

$$v_0 = 1 - \sqrt{1 - v}. \quad (44, 16)$$

Достоверность несовпадения возможных ошибок сравниваемого критерия, очевидно, может соответствовать достоверности деск

расчетов, принятой для данной стадии проектирования. Следовательно, достоверность возможной ошибки самого критерия, которая должна учитываться при выборе интервала варьирования, может быть существенно понижена по сравнению с первой. Наименьший интервал между двумя соседними значениями критерия находится при этих условиях из следующей зависимости:

$$\Delta Q > 2 \frac{\sigma_Q}{z_v} \sigma_v(Q), \quad (44, 17)$$

где  $\Delta Q$  — интервал варьирования критерия;  
 $z_v$  — нормированная возможная ошибка, соответствующая степени достоверности  $v_0$ , определенной по формуле (44, 16);  
 $\sigma_v$  — нормированная возможная ошибка, соответствующая достоверности всех расчетов на данной стадии проектирования;  
 $\sigma_v(Q)$  — возможная ошибка рассматриваемого критерия.

По левой части этого неравенства и может быть найден допустимый интервал варьирования исследуемого параметра.

**Выбор главных размерений.** Выбор главных размерений обычно производится на основе сравнения нескольких вариантов проекта, опитающихся друг от друга только соотношениями  $L : B ; B : T$  и  $H : T$ , а в некоторых случаях и коэффициентом полноты. Ниже сравнимся вариантами только отношения  $L : L : B$ , как наиболее сильно влияющего на ходовые судья. Оценка вариаций других отношений может быть выполнена по такой же схеме, и поэтому приводить ее здесь нет необходимости.

Одна из наиболее удобных критериев сравнения может служить водоизмещение, так как при одинаковых грузоподъемностях, скоростях хода и дальности плавания им определяется стоимость постройки и эксплуатации судна, численность его личного состава и оборудование причальных линий. Поэтому для выбора интервала варьирования используем формулу (45, 6), взяв при ней лишь производные первого порядка и перенеся ее в следующий виде:

$$\frac{\partial D}{\partial L} = \frac{\partial A}{\partial L} + \frac{\partial B}{\partial L} \frac{1}{N_p D^2} + \frac{\partial C}{\partial L} D. \quad (44, 18)$$

Выбор главных размерений обычно производится на стадии расчетов второго приближения, когда возможная погрешность водоизмещения может быть не менее  $\sigma_v(D) = 5,1\%$ , но результаты его предвзначаются для эскизного проекта, когда степень достоверности достигнет  $v = 0,95$  ( $z_v = 1,64$ ). Подставив это значение  $v$  в равенство (44, 16), получим

$$v_0 = 1 - \sqrt{1 - 0,95} = 0,8,$$

и по табл. 1 находим  $z_v = 0,84$ .

Следовательно, по формуле (44, 17) минимально Допустимая разность водоизмещений двух соседних вариантов может составлять

$$\epsilon D_{\text{min}} = 2 \frac{0,84}{1,54} 5,1 = 5,2\%$$

от водоизмещения.

На основании [11—58] будем считать, что при постоянстве отношений  $B : T$  и  $T : H$  вес продольных связей, составляющих определяющую статью в весе корпуса, изменяется пропорционально отношению  $l = L : B$  и водоизмещению. Поэтому относительное изменение коэффициента этого веса может считаться равным относительному изменению отношения  $l$

$$\frac{\epsilon A_{\text{пр}}}{A_{\text{пр}}} = \frac{\epsilon l}{l}$$

С другой стороны, вес продольных связей составляет часть  $A_{\text{пр}} : A$  от веса всей группы  $A$ . Прочие статьи этой группы от отношения  $l$  не зависят, и поэтому приращение коэффициента веса всей группы равно приращению коэффициента веса продольных связей, а общее изменение коэффициента веса всей группы будет

$$\frac{\epsilon A}{A} = \frac{\epsilon A_{\text{пр}}}{A} \cdot \frac{A_{\text{пр}}}{A} = \frac{\epsilon l}{l} \cdot \frac{A_{\text{пр}}}{A} \quad (44, 19)$$

Мощность, а следовательно, и вес главных механизмов при умеренных числах Фруда, свойственных грузовым судам, могут считаться пропорциональными смоченной поверхности. Для вывода зависимости последней от отношения  $l$  воспользуемся формулой (28, 6), опустив в ней относительно малое слагаемое — квадрат площади миделя — и выразив остальные площади через главные размеры,

$$S = 3q\beta \sqrt{(lT)^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha L\right)^2}$$

Для перехода к коэффициенту веса разделим обе части этого равенства на водоизмещение в степени  $3/2$ . После простых преобразований получим

$$\frac{S}{(B_0 L T)^{3/2}} = \frac{3q\beta}{\delta_0^{3/2}} \left(\frac{l}{B}\right)^{1/2} \sqrt{T^2 \left(\frac{T}{B}\right)^{1/2} + \frac{1}{4} \alpha^2 \left(\frac{B}{T}\right)^{1/2}}$$

Следовательно, относительное приращение коэффициента веса главных механизмов при постоянстве отношения  $B : T$  и всех коэффициентов полноты будет

$$\frac{\epsilon \delta_{\text{м}}}{\delta_{\text{м}}} = \frac{1}{3} \frac{\epsilon l}{l}$$

или аналогично предыдущему

$$\frac{\epsilon \delta}{\delta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon l}{l} \cdot \frac{\delta_{\text{м}}}{\delta} \quad (44, 20)$$

Подставляя найденные выражения в равенство (44, 18) и учитывая принятую норму  $\frac{\epsilon D}{D} > 5,2\%$ , получим

$$\frac{\epsilon l}{l} \left( \frac{A_{\text{пр}}}{B_0} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_{\text{м}}}{\delta_0 D^{1/2}} \right) > 0,022 \quad (44, 21)$$

откуда и находим искомое значение  $\epsilon l / l$ .

Выражение, заключенное в круглые скобки, обычно мало отличается от единицы. Поэтому в большинстве случаев интервал варьирования отношения  $l = L : B$ , равный или больший 5,5%, оказывается вполне удовлетворительным.

Сложнее определить интервал варьирования для быстроходных судов, ходовые качества которых в большей степени определяются остаточным сопротивлением, а не сопротивлением трения. Для таких судов равенства (44, 20) и (44, 21) дают заведомо завышенные результаты, и уточнение их могло бы быть сделано только после уточненного определения чисел Фруда для всех рассматриваемых вариантов. Трудоемкость такой работы не оправдывается ее целью. Поэтому и для быстроходных судов можно рекомендовать пользоваться формулой (44, 21).

В книге затронута лишь небольшая часть тех актуальных вопросов, в решении которых применение теории ошибок может оказаться полезным. Однако и при этом мы убедились, что во многих случаях правдивая оценка величины и источников возникновения ошибок способствует уменьшению объема вычислительной работы и дает возможность даже повысить при этом ее точность. Автор надеется, что в дальнейшем развитие этого метода привлечет участие более широкого круга инженеров-кораблестроителей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многие технические показатели или конструктивные элементы могут быть рассчитаны несколькими способами, различающимися между собой, с одной стороны, по сложности и трудоемкости выполнения, с другой, по точности получаемых результатов. Вполне очевидно, что возможные погрешности расчета не должны выходить за те пределы, которые диктуются его назначением, но также ясно, что увеличение трудоемкости работы ради повышения точности результата сверх необходимой по меньшей мере нецелесообразно. Поэтому во всех подобных случаях, приступая к расчету, полезно прежде всего оценить известные способы его выполнения с точки зрения их относительной трудоемкости и точности и выбирать только тот из них, который требует наименьшей затраты труда и дает погрешности результата, наиболее близкие к допустимым пределам.

Серьезное внимание должно быть обращено на точность входных в расчет исходных данных. Не следует забывать, что ошибка результата зависит в одинаковой мере от точности как метода расчета, так и исходных величин. Никаким повышением точности расчета нельзя компенсировать неточность данных и никакой усложнение расчета не улучшит достоверность результата, если недостоверны его источники. Характерным примером в этом отношении может служить современная строительная механика корабля. В трудах И. Г. Бубнова, П. Ф. Панковича, Ю. А. Шиманского и их последователей она достигла исключительно высокого развития — буквально атомарной точности в определении напряжений по заданным условиям нагрузки. Но в то же время многие внешние воздействия, как, например, силы, изгибающие корабль на волне, еще до сих пор задаются произвольно или определяются по ряду априорных предположений. С другой стороны, и допускаемые напряжения выбираются условно, а доля от предела текучести, являющегося случайной величиной, законом распределения которой еще не исследованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базилевский С. А. Новые способы расчета уравнений веса. «Судостроение», 1958, № 8, стр. 4.
2. Бубнов Н. Г. Основы статистики судостроения. Морской сборник, 1901, № 11 и 12.
3. Ван-Лангерен, Трост, Колинг. Сопротивление, пропульсивные качества и управляемость судов. Судостроение, 1950.
4. Вейнгассль Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1953.
5. Власов В. Г. Стойка корабля. Воениздат, 1948.
6. Давыдов В. В. Теоретические вычисления и криволинейная. Флотский транспорт, 1961.
7. Злобин Г. П. Отличия вычислений при расчетах весовой нагрузки. «Судостроение», 1956, № 1.
8. Идельсон М. М. Способ вычисления квадратов в теории математической обработки наблюдений. Геоиздат, 1947.
9. Крылов А. Н. Лекции прикладной механики. Гостехиздат, 1954.
10. Михайлов В. И. Сопротивление от шероховатости обшивки корпуса корабля. «Судостроение», 1958, № 1.
11. Носик Л. М. Теория проектирования судов. Судостроение, 1955.
12. Ромашовский В. И. Основы теории ошибок. Гостехиздат, 1947.
13. Седов Л. М. Методы подобия и размерности в механике. ГИИЛ, 1954.
14. Смирнов Н. В., Дуанин-Барковский Н. В. Краткий курс математического статистики для технических приложений. Физматгиз, 1959.
15. Семешов-Ткач-Шанский В. В. Стойка и динамика корабля. Судостроение, 1960.
16. Теория корабля. Изд. «Советская энциклопедия», 1959.
17. Шиманский Ю. А. Сборник статей по судостроению. Судостроение, 1954.
18. Шиманский Ю. В., Гарденин М. Ф., Сарачинская Е. А. для криволинейных измерений. Пугр., 1954.
19. Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. ГИИЛ, 1950.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<b>Глава I. Ошибки и погрешности случайных величин</b>	7
1. Понятие о достоверных и случайных величинах	—
2. Законы распределения случайных ошибок	11
3. Числовые характеристики законов распределения	16
4. Степень достоверности случайной величины	21
5. Ошибки неограниченного ряда измерений	27
6. Ошибки конечного ряда измерений	30
7. Погрешности случайных величин	33
8. Систематические ошибки	41
<b>Глава II. Комбинирование законов распределения</b>	48
9. Ошибки и погрешности вычислений	—
10. Дискретные ошибки функций случайных величин	54
11. Законы распределения ошибок суммы двух случайных	60
12. Законы распределения ошибок суммы многих случайных	68
13. Достоверность суммы случайных величин	75
14. Оптимальное распределение ошибок в группе случайных	86
15. Пропорциональное преобразование	92
16. Правила приближенных вычислений	96
<b>Глава III. Расчеты надежности и устойчивости формы</b>	103
17. Правило тригонометрии	—
18. Правило Симпсона (первое)	113
19. Правило Чебышева	115
20. Планиметрирование	118
21. Расчеты площадей по размерам, указанным по чертежу	121
22. Расчет водозаимания	128
23. Построение интегральных кривых	127
24. Расчет координат центра тяжести	133
25. Расчет метадатрических радиусов	144
26. Устойчивость по координатам углов кривой	148
<b>Глава IV. Расчеты надежности</b>	157
27. Определение случайной погрешности по теоретическому чер- тежу	—
28. Приближенные формулы для расчета случайной погрешности	163
29. Испытание модели в опытовом бассейне	172
30. Сопротивляемость трения	176
31. Оптимальное опережение	183
32. Мощность планки метадатрике	185
<b>Глава V. Расчеты весовой нагрузки</b>	189
33. Определение веса по таблицам весов	—
34. Таблицы весовых ошибок	195
35. Сводные таблицы нагрузки	201
36. Расчет координат центра тяжести	210
37. Расчет дальности метадатрической высоты	214

Глава VII. Выбор главных размерений	217
38. Выбор степени достоверности расчетов	220
39. Допустимые отклонения в расчетах гидродинамики	229
40. Формы ураганной волны	235
41. Уравнение объема (емкости)	238
42. Решение уравнений веса и объема	242
43. Дифференциальные методы определения водоизмещения	248
44. Метод вариаций	258
Заключение	260
Литература	260

## ИЗДАТЕЛЬСТВО „СУДОСТРОЕНИЕ“ в 1964 году

выпускает в свет новые книги по разделу научно-теоретической литературы:  
**НОГИД Л. М. Проектирование судов, ч. I. Методика определения элементов проектируемого судна. 20 печ. л., цена 85 коп.**

Книга является первой (самостоятельной) частью учебника по проектированию морских судов. В ней дано понятие теории проектирования судов, освещены вопросы, связанные с пересчетом показателей судна по прототипу, с нагрузкой и измерителями весов, положением центра тяжести судна, удифферентовкой и балластировкой судна, уравнением весов, грузоемкостью, вычислением приближенных формул элементов плавучести и начальной остойчивости, а также остойчивостью при различных условиях нагрузки и больших углах крена. Даны определения элементов проектируемого судна и приведены примеры использования метода вариаций.

Учебник предназначен для студентов кораблестроительных вузов и может быть использован специалистами проектно-конструкторских организаций судостроительной промышленности.

**ВВЕВОДИН И. Ф. Влияние приема груза на остойчивость судов. 10 печ. л., цена 85 коп.**

В книге рассмотрены теоретические и практические вопросы, связанные с изменением статической и динамической остойчивости при приеме или снятии с судна твердых и жидких грузов.

Описанные графические приемы, а также детальное объяснение физического смысла рассматриваемых явлений позволяют рационально подходить к решению многих задач, возникающих при проектировании, модернизации и переоборудовании судов. Большое внимание уделено правильной балансировке судов в тех случаях, когда остойчивость их не удовлетворяет установленным нормам.

Книга является практическим руководством для инженеров-кораблестроителей и эксплуатационников и может быть использована преподавателями, аспирантами и студентами старших курсов кораблестроительных вузов.