

М. Ф. СУББОТИН

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ
АСТРОНОМИЮ



М. Ф. СУББОТИН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ АСТРОНОМИЮ



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968**

Введение в теоретическую астрономию, Субботин М. Ф.,
Главная редакция физико-математической литературы Издательства
«Наука», 1968, 800 стр.

Монография проф. М. Ф. Субботина «Введение в теоретическую астрономию», принадлежащая перу одного из крупнейших специалистов в области небесной механики, возникла в результате коренной переработки и значительных дополнений его трехтомного «Курса небесной механики», явившегося в свое время первым полным современным руководством в этой области на русском языке.

Книга состоит из четырех частей, разбитых на 21 главу. В первой части («Закон всемирного тяготения», главы I—II) дается исторический очерк развития теоретической астрономии от Птолемея до Эйнштейна и формулируются ее основные задачи. Во второй части («Теория невозмущенного движения», главы III—VI) описываются все возможные случаи кеплерова движения, излагается метод Гаусса определения орбит по двум положениям и даются тригонометрические ряды, представляющие эллиптическое движение. В третьей части («Вычисление орбит», главы VII—XIII) излагается определение и улучшение орбит по трем и многим наблюдениям во всех случаях, в том числе особых. Часть четвертая («Теория возмущенного движения», главы XIV—XXI) — основная. Здесь собраны и четко сформулированы основные результаты аналитической и качественной теории задачи трех тел (Сундмана и Шази), дана теория канонических преобразований, созданная Якоби и Пуанкаре, а затем изложены основные методы классической небесной механики и их современные модификации (в том числе методы Ганзена, Ньюкома, Андуайе, Энке, Хилла и Брауэра). Здесь же нашла свое место современная теория движения Луны по Хиллу и Брауну.

Книга М. Ф. Субботина рассчитана на студентов старших курсов университетов, аспирантов и специалистов по небесной механике и астродинамике.

Тщательный отбор материала, современное освещение, с одной стороны, привлечение и использование многих старых, но совершенных методов, — с другой, делают этот курс весьма полезным для научных работников, стимулируя их изыскания.

Рисунков 24, таблиц 5+XIV (в конце книги), библиографических ссылок 296.

Михаил Федорович Субботин
Введение в теоретическую астрономию
М., 1968 г., 800 стр. с илл.

Редактор *П. Т. Резниковский*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Ю. И. Зварич*

Сдано в набор 22/XII 1967 г.

Подписано к печати 12/VI 1968 г.

Бумага 60×90/16

Физ. печ. л. 50.

Условн. печ. л. 50.

Уч.-изд. л. 50,74.

Тираж 3800 экз.

T-08386.

Цена книги 3 р. 40 к. Заказ № 1035.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	10
Предисловие	11

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Глава I. Открытие закона всемирного тяготения	13
§ 1. Теория эксцентриков и эпициклов	13
§ 2. Гелиоцентрическая теория планетных движений	20
§ 3. Движение по законам Кеплера	24
§ 4. Динамические следствия законов Кеплера	28
§ 5. Закон Ньютона	31
§ 6. Доказательства закона тяготения, данные Ньютоном	34
Глава II. Закон всемирного тяготения и основные задачи теоретической астрономии	41
§ 1. Создание гравитационной теории движения Луны	41
§ 2. Гравитационная теория движения планет. Внешние планеты	51
§ 3. Движение внутренних планет	58
§ 4. Закон тяготения Эйнштейна	64
§ 5. Задачи теоретической астрономии	67

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Глава III. Задача двух тел	72
§ 1. Дифференциальные уравнения движения	72
§ 2. Первые интегралы уравнений относительного движения	74
§ 3. Движение в плоскости орбиты	76
§ 4. Траектория движения	78
§ 5. Движение по эллипсу	81
§ 6. Движение по гиперболе	82
§ 7. Движение по параболе	83
§ 8. Введение прямоугольных орбитальных координат	84
§ 9. Случай прямолинейного движения	86
§ 10. Законы Кеплера	89
§ 11. Астрономическая система единиц	91
§ 12. Разложение координат в ряды по степеням времени	95
§ 13. Соударения в задаче двух тел	97
§ 14. Радиус сходимости разложений координат по степеням времени	105

Глава IV. Вычисление координат планет и комет	107
§ 1. Вычисление средней и эксцентрической аномалий	107
§ 2. Орбитальные координаты в случае эллиптического движения	110
§ 3. Орбитальные координаты в случае параболического движения	111
§ 4. Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице	113
§ 5. Вычисление эклиптических и экваториальных гелиоцентрических координат	117
§ 6. Переход от эклиптических элементов орбиты к экваториальным и обратно	121
§ 7. Вычисление эфемерид малых планет и комет	123
§ 8. Поисковые эфемериды	125
§ 9. Движение по орбите, мало наклоненной к эклиптике	128
Глава V. Нахождение орбиты по начальным или граничным условиям движения	131
§ 1. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Первый способ	131
§ 2. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Второй способ	134
§ 3. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Первый способ	137
§ 4. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Второй способ	141
§ 5. Нахождение параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	143
§ 6. Метод Гаусса для нахождения параметра орбиты	144
§ 7. Решение уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей сектора и треугольника	147
§ 8. Отношение площадей сектора и треугольника для параболической орбиты. Теорема Эйлера	152
§ 9. Вычисление элементов орбиты малой планеты по двум гелиоцентрическим положениям. Пример	154
§ 10. Площадь фокального сектора конического сечения	158
§ 11. Теорема Ламберта	163
§ 12. Вторая форма уравнения Эйлера	165
§ 13. Применение теоремы Ламберта к нахождению орбиты по двум гелиоцентрическим положениям	166
Глава VI. Тригонометрические ряды теории эллиптического движения	171
§ 1. Предварительные замечания	171
§ 2. Некоторые свойства бесселевых функций	173
§ 3. Вычисление бесселевых функций	176
§ 4. Преобразование тригонометрических рядов по кратным эксцентрической аномалии в ряды по кратным средней аномалии	177
§ 5. Разложение некоторых основных функций	181
§ 6. Уравнение центра	186
§ 7. Разложение некоторых функций, встречающихся в теории возмущенного движения	188
§ 8. Разложение координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета	190
§ 9. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии	193
§ 10. Разложение некоторых функций по кратным истинной аномалии	196
§ 11. Перемножение тригонометрических рядов	197

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НАХОЖДЕНИЕ ОРБИТ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Глава VII. Сопоставление вычисленных и наблюдаемых положений светил	200
§ 1. Учет параллакса	200
§ 2. Аберрация света	203
§ 3. Учет аберрации	205
§ 4. Постоянная аберрации	211
§ 5. Влияние прецессии на координаты светил	212
§ 6. Влияние прецессии на элементы орбиты	214
Глава VIII. Вычисление орбит планет и комет по трем наблюдениям	218
§ 1. Введение	218
§ 2. Соотношения между координатами трех гелиоцентрических положений светила	219
§ 3. Уравнения, выражающие геоцентрические расстояния через отношения площадей треугольников	222
§ 4. Вычисление геоцентрических расстояний в первом приближении	223
§ 5. Влияние погрешностей в n_1 и n_2 на значения геоцентрических расстояний	225
§ 6. Точные значения геоцентрических расстояний	228
§ 7. Формулы Гиббса для отношений площадей треугольников	230
§ 8. Решение уравнений Лагранжа	232
§ 9. Сопоставление формул для вычисления гелиоцентрических координат по методу Лагранжа — Гаусса	235
§ 10. Пример вычисления орбиты малой планеты	241
§ 11. Особые случаи при вычислении орбиты по трем наблюдениям	245
Глава IX. Вычисление параболической орбиты	249
§ 1. Общие соображения	249
§ 2. Основные уравнения. Первое приближение	250
§ 3. Второе приближение	252
§ 4. Сопоставление формул для вычисления параболической орбиты	254
§ 5. Пример вычисления параболической орбиты	260
§ 6. Другой метод вычисления параболической орбиты	265
§ 7. Уравнение Ольберса	267
§ 8. О решении основной системы уравнений	269
§ 9. Формулы Банахевича для вычисления элементов орбиты	271
Глава X. Особые случаи, встречающиеся при вычислении предварительной орбиты	274
§ 1. Вычисление орбиты по четырем наблюдениям	274
§ 2. Пример вычисления орбиты по четырем наблюдениям	278
§ 3. Вычисление круговой орбиты	281
§ 4. Пример вычисления круговой орбиты	285
§ 5. Вычисление эллиптической орбиты по двум наблюдениям	288
Глава XI. Улучшение орбит	290
§ 1. Вводные замечания	290
§ 2. Подготовка наблюдений. Нормальные места	292
§ 3. Метод вариации геоцентрических расстояний	294
§ 4. Улучшение орбит малых планет	297
§ 5. Улучшение параболической орбиты	298
§ 6. Непараболические кометные орбиты	300

§ 7.	Метод вариации элементов	303
§ 8.	Производные координат по внешним элементам	306
§ 9.	Производные координат по внутренним элементам. Случай эллиптической орбиты	309
§ 10.	Продолжение. Случай параболической орбиты	311
§ 11.	Продолжение. Орбиты с эксцентриситетами, очень близкими к единице	315
§ 12.	Составление условных уравнений	318
§ 13.	Подготовка и выверка условных уравнений	322
§ 14.	Составление нормальных уравнений	324
§ 15.	Решение нормальных уравнений. Метод исключения	326
§ 16.	Компактная форма метода исключения	328
§ 17.	Метод Банахевича	334
§ 18.	Средние ошибки неизвестных. Заключительный контроль	336
§ 19.	Случай, когда определитель системы нормальных уравнений близок к нулю	338
Глава XII.	Вычисление орбит визуально-двойных звезд	341
§ 1.	Предварительные замечания	341
§ 2.	О наблюдениях визуально-двойных звезд	343
§ 3.	Элементы орбиты. Вычисление эфемериды	345
§ 4.	Видимая орбита	350
§ 5.	Метод Ковальского	353
§ 6.	Метод Тиле — Иннеса	357
§ 7.	Особые случаи вычисления орбиты двойной звезды	360
§ 8.	Исправление орбит двойных звезд	362
Глава XIII.	Методы вычисления орбит в их историческом развитии 366	366
§ 1.	Проблема кометных орбит. Метод Ньютона	366
§ 2.	Работы Эйлера и Ламберта	368
§ 3.	Работа Лагранжа 1778 г.	371
§ 4.	Метод Лагранжа 1783 г. и его дальнейшее развитие	373
§ 5.	Работа Дю-Сежура. Метод Ольберса	375
§ 6.	Метод Гаусса	378
§ 7.	Дальнейшее развитие метода Гаусса	381
§ 8.	Метод Фабрициуса	385
§ 9.	Метод Харцера	387
§ 10.	Практическая эффективность рассмотренных методов	389
§ 11.	Метод Лапласа	391
§ 12.	Точность метода Лапласа	395
§ 13.	Работы Чаллиса и Вилларсо	396
§ 14.	Работы Харцера и Лойшнера	398
§ 15.	Метод фиктивных положений	400
§ 16.	Метод Вьяйсяля	404
§ 17.	Заключительные замечания	408

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Глава XIV.	Задача нескольких тел	411
§ 1.	Дифференциальные уравнения задачи и их первые интегралы	411
§ 2.	Движение солнечной системы	417
§ 3.	Плоскость Лапласа	417
§ 4.	Первая форма уравнений относительного движения	420
§ 5.	Вторая форма уравнений относительного движения	422
§ 6.	Формула Лагранжа — Якоби	426
§ 7.	Теорема вириала	429

§ 8.	Формулы Сундмана	430
§ 9.	Об общем решении задачи нескольких тел	432
§ 10.	Об общем решении задачи трех тел	434
Глава XV.	Частные случаи задачи трех тел	439
§ 1.	Случай, в которых задача трех тел приводится к задаче двух тел	439
§ 2.	Планетоидная задача трех тел	442
§ 3.	Ограниченная задача трех тел. Интеграл Якоби	446
§ 4.	Поверхности нулевой скорости	448
§ 5.	Особые точки поверхностей нулевой скорости	452
§ 6.	Критерий Тиссерана	457
§ 7.	Применение ограниченной задачи к изучению движения комет	460
§ 8.	Движение вблизи коллинеарных центров либрации	463
§ 9.	Движение вблизи тригональных центров либрации	466
§ 10.	Движение вблизи конечных масс	470
§ 11.	Преобразование уравнений	472
§ 12.	Периодические орбиты Хилла	473
§ 13.	Вычисление коэффициентов	475
§ 14.	Ряды Хилла	477
§ 15.	Периодические решения задачи трех тел	480
§ 16.	Применения периодических решений	485
§ 17.	Финальные движения в задаче трех тел	487
Глава XVI.	Основы теории возмущенного движения	491
§ 1.	Теорема Пуанкаре	491
§ 2.	Решение уравнений возмущенного движения способом последовательных приближений	495
§ 3.	Мгновенные элементы	497
§ 4.	Оскулирующие элементы	498
§ 5.	Нахождение оскулирующих элементов	500
§ 6.	Уравнения Эйлера	501
§ 7.	Другие формы уравнений Эйлера	507
§ 8.	Уравнения Лагранжа	510
§ 9.	Специальные формы уравнений Лагранжа	514
§ 10.	Возмущенное движение планет	516
§ 11.	Классификация возмущений	518
§ 12.	Периодические возмущения	521
§ 13.	Вековые возмущения	524
§ 14.	Метод Гаусса для вычисления вековых возмущений	527
§ 15.	Возмущенное движение спутников	532
§ 16.	Исторические замечания	535
Глава XVII.	Разложение пертурбационной функции в ряд	538
§ 1.	Введение	538
§ 2.	Вычисление вспомогательных величин	541
§ 3.	Случай круговых орбит	542
§ 4.	Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов	546
§ 5.	Выражение пертурбационной функции через средние аномалии	550
§ 6.	Начальные члены разложения пертурбационной функции	551
§ 7.	Вычисление коэффициентов Лапласа	555
§ 8.	Рекуррентные соотношения	558
§ 9.	Производные коэффициентов Лапласа	559
§ 10.	Дополнительные замечания	563
§ 11.	Случай, когда взаимный наклон орбит велик	565

§ 12.	Численные методы разложения пертурбационной функции	567
§ 13.	Метод Брауэра	569
§ 14.	Полуаналитические методы разложения	571
§ 15.	Метод Ганзена	572
§ 16.	Другие формы метода Ганзена	576
Глава XVIII. Аналитические теории движения планет		579
§ 1.	Возмущения элементов	579
§ 2.	Среднее движение планеты	580
§ 3.	Переход к возмущениям в координатах	583
§ 4.	Возмущения, производимые близкой к Солнцу планетой	586
§ 5.	Уравнения, дающие вековые возмущения	589
§ 6.	Тригонометрическая форма вековых возмущений	592
§ 7.	Вековые возмущения больших планет	596
§ 8.	Вековые возмущения малых планет	598
Глава XIX. Аналитические методы нахождения возмущенных координат		601
§ 1.	Уравнения движения в цилиндрических координатах	601
§ 2.	Уравнения Клеро — Лапласа	602
§ 3.	Метод Лапласа	605
§ 4.	Метод Лапласа (продолжение)	609
§ 5.	Метод Лапласа — Ньюкома	611
§ 6.	Метод Лапласа — Андуайе	613
§ 7.	Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах	617
§ 8.	Переход от ганзеновских координат к исходным	621
§ 9.	Метод Ганзена. Радиус-вектор и долгота в орбите	624
§ 10.	Метод Ганзена. Функция W	628
§ 11.	Метод Ганзена. Широта планеты	630
§ 12.	Метод Ганзена. Дополнительные замечания	632
§ 13.	Возмущения прямоугольных координат. Метод Энке	633
§ 14.	Метод Хилла	636
Глава XX. Канонические элементы и их применение к изучению возмущенного движения		640
§ 1.	Канонические уравнения	640
§ 2.	Лемма Пуанкаре	642
§ 3.	Канонические преобразования	643
§ 4.	Решение канонических систем	646
§ 5.	Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических элементов	648
§ 6.	Канонические элементы эллиптического движения	649
§ 7.	Новый вывод уравнений Лагранжа	653
§ 8.	Канонические элементы Делоне и Пуанкаре	655
§ 9.	Каноническая форма уравнений относительного движения	657
§ 10.	Выражение прямоугольных координат через канонические элементы	659
§ 11.	Разложение пертурбационной функции	663
§ 12.	Возмущения канонических элементов	665
§ 13.	Теорема Пуанкаре о ранге	666
§ 14.	Теорема Пуассона	671
§ 15.	Теорема Пуанкаре о классе	673
§ 16.	Возмущения наименьшего класса	675
§ 17.	Уравнения, дающие члены наименьшего класса	678
§ 18.	Вычисление долгопериодических возмущений	680

Глава XXI. Основы теории движения Луны	682
§ 1. Общий характер движения Луны	682
§ 2. Основная проблема	686
§ 3. Вариационная кривая	691
§ 4. Вариационные орбиты	694
§ 5. Решение уравнения Хилла	700
§ 6. Уравнение, дающее показатель s	702
§ 7. Вычисление определителя $\Delta(0)$	706
§ 8. Вычисление коэффициентов	709
§ 9. Важнейшие неравенства движения Луны	710
§ 10. Неравенства, зависящие от m и e	715
§ 11. Влияние наклона лунной орбиты	718
§ 12. Движение узла	721
§ 13. Возмущения широты	722
Библиография	724

Таблицы

I. Коэффициенты разложений $C_r^{n,m}$ по степеням эксцентриситета	737
II. Коэффициенты разложений $S_r^{n,m}$ по степеням эксцентриситета	741
III. Зависимость между большой полуосью орбиты и средним суточным движением	745
IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической и средней аномалиями	749
V. Параболическое движение	757
VI. Параболическое движение. Вычисление σ в случае, когда истинная аномалия близка к 180°	766
VIIa. Значения функций $U(\xi)$ и $V(\xi)$	767
VIIb. Значения функций $\lg U(\xi)$ и $\lg V(\xi)$	769
VIII. Функция $\xi(x)$	773
IX. Вторая форма уравнения Эйлера	775
X. Приближенное решение уравнений Лагранжа	780
XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2	784
XII. Функция $T(\xi)$	795
XIII. Коэффициенты интерполяционной формулы Бесселя	797
XIV. Коэффициенты формулы, дающей первую производную	798
Приложение. Система астрономических постоянных	799

ОТ РЕДАКТОРА

Монография покойного проф. М. Ф. Субботина — выдающегося теоретика, педагога и историка астрономии — «Введение в теоретическую астрономию» является весьма существенной переработкой его трехтомного «Курса небесной механики», первого современного руководства на русском языке в этой области, ставшего настольной книгой как для студентов, так и для специалистов.

После произведенных автором изменений книга стала более однородной по своему содержанию. Так, полностью исключен материал третьего тома упомянутого «Курса», что вполне оправдано, так как теория фигур небесных тел (или теория притяжения) давно уже выделилась в самостоятельную дисциплину. Исключено также описание методов численного интегрирования, которые теперь можно найти в специальных руководствах. Более отчетливо выявилась цель книги — дать изложение основных классических методов небесной механики в их историческом развитии и их современные модификации.

М. Ф. Субботин успел полностью завершить работу над монографией, если не считать предисловия. Приводимое ниже «Предисловие» представляет собой соединение нескольких фрагментов, найденных в бумагах покойного.

Издание книги М. Ф. Субботина производилось под наблюдением Редакционной комиссии (Г. А. Мерман — председатель, В. К. Абалакин, В. А. Брумберг, Ш. Г. Шараф, В. А. Шор), созданной в Институте теоретической астрономии АН СССР в Ленинграде. Таблицы выверила и подготовила к печати М. Б. Железняк.

Г. А. Мерман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение движений космических тел, составляющее предмет Теоретической астрономии, можно рассматривать как основной раздел астрономических наук, поскольку познание движений небесных тел служит фундаментом познания Космоса. С другой стороны, только теория движения тел солнечной системы — основная и древнейшая часть Теоретической астрономии — позволила создать ту пространственно-временную систему отсчета, которая, будучи как бы материализована звездными каталогами и астрономическими ежегодниками, является, с зарождения астрономии и по настоящее время, фундаментом всех исследований, имеющих дело с измерением пространства и времени.

Эта книга имеет своей целью прежде всего дать обстоятельное изложение всех тех вопросов Теоретической астрономии, знание которых нужно для изучения специальной литературы. Таким образом, она предназначена для подготовки изучающих эту науку к дальнейшей разработке ее проблем. Вместе с тем, особое внимание было обращено на то, чтобы сделать книгу удобной как для первоначального изучения предмета в объеме немногих основных глав, соответствующих программе общеобязательного университетского курса, так и для углубленного изучения, соответствующего различным специальным курсам.

Теоретическая астрономия является в настоящее время наукой столь обширной и разнообразной, что стремиться к исчерпывающему изложению ее содержания было бы нецелесообразно. Но если многие вопросы должны изучаться непосредственно по специальным монографиям и статьям, то некоторая область основных вопросов должна быть изложена не только в форме, удобной для изучения, но и так, чтобы обеспечить решение тех основных астрономических и небесно-механических задач, с которыми приходится встречаться в процессе научной работы особенно часто.

Книга снабжена, сообразно с этим, всеми необходимыми таблицами. Автор учитывал, однако, что при решении практических задач всегда приходится пользоваться астрономическими ежегодниками, содержание которых за последнее время значительно расширилось. Это обстоятельство позволило существенно

сократить число приводимых таблиц и ограничиться лишь таблицами специфического характера.

Подготовка специалиста в области науки с таким большим и поучительным прошлым, как у Теоретической астрономии, была бы неполной без знакомства с историей ее развития. Поэтому было уделено много внимания историческому освещению изучаемых вопросов. Но это освещение должно лишь дополнить, а не заменить то, что излагается в курсе истории астрономии.

Заметим, что эта книга является до известной степени заменой нового издания «Курса небесной механики», три тома которого вышли в 1933—1949 гг. Однако переработка была настолько существенной, что сделала необходимым изменение названия.

Теоретическая астрономия имеет своей задачей изучение движений реально существующих небесных тел и открытие законов природы, управляющих этими движениями. Небесная механика занимается решением математических задач, возникающих при применении абсолютизированных законов природы к идеализированным объектам. Иначе говоря, Теоретическая астрономия есть часть естественного знания, тогда как Небесная механика есть математическая дисциплина, вполне аналогичная математической физике. Это две смежные науки, области которых в какой-то мере перекрываются, но которые имеют и свои различные области.

В этой книге, предназначенной служить введением во всю область, охватываемую Теоретической астрономией, вопросам Небесной механики, понимаемой в указанном выше смысле, отведено подчиненное место.

В литературных ссылках указывались лишь работы, в которых содержатся существенные дополнения к изложенным вопросам, таблицы и другой материал, не нашедший места в книге. Обилие в настоящее время справочных изданий позволяет значительно уменьшить литературные ссылки. Ссылки эти включены в текст. Фамилия автора сопровождается указанием года получения им результата, о котором идет речь, что дает представление о хронологии развития науки. Числа в квадратных скобках, поставленные после фамилии автора, указывают год выхода работы и относятся к статьям, подробные данные о которых приведены в Библиографии (стр. 724). Параграфы имеют последовательную нумерацию в рамках каждой главы.

Формулы пронумерованы последовательно в пределах каждого параграфа, причем номеру формулы предшествует номер параграфа. Таким образом, ссылка (4.7) означает 7-ю формулу четвертого параграфа текущей главы. Если делается ссылка на формулу из другой главы, то в тексте указывается и глава.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Г Л А В А I

ОТКРЫТИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ**§ 1. Теория эксцентриков и эпициклов**

Раздел астрономических наук, который начиная с XVII в. стал называться теоретической астрономией, имеет своим основным предметом изучение движений тел солнечной системы.

Это изучение началось с открытия различного рода периодичностей в их видимых движениях. Такие чисто эмпирические закономерности были найдены еще в глубокой древности. За 5—6 веков до начала нашей эры вавилоняне уже знали с большой точностью не только продолжительность года и месяца, но и периоды обращений пяти планет. Для получения таких результатов нужны были столетия систематических наблюдений.

Дальнейшее развитие астрономических знаний стало возможным лишь после того как греческие ученые создали геометрию. Первые теоретические представления, оставившие прочный след в науке, мы встречаем у натурфилософов пифагорейской школы. Ими была установлена шарообразность Земли и было показано, что движение Солнца подобно движению Луны может быть получено сложением двух равномерных круговых движений: вокруг оси экватора с суточным периодом и вокруг оси эклиптики с годовым периодом. Этот успех естественно привел к попыткам объяснить подобным же образом и движения пяти планет.

Первая систематическая попытка представить движения небесных тел сочетаниями вращений концентрических сфер, общий центр которых совпадает с центром Земли, связана с именами Эвдокса Книдского (409—356 гг. до н. э.) и Калиппа (370—300 гг. до н. э.). Согласно этим представлениям «сфера неподвижных звезд», заключающая внутри себя все остальные и вращавшаяся с суточным периодом вокруг оси экватора, сообщала это вращение всем другим сферам, воспроизводившим индивидуальные особенности движений Солнца, Луны и планет.

Индивидуальные движения Солнца и Луны принимались происходящими по большому кругу геоцентрической сферы, так что

для их воспроизведения достаточно было ввести только по одной сфере для каждого светила. Гораздо сложнее дело обстояло с планетами, основные закономерности в движениях которых были подмечены еще в глубокой древности. Было известно, что каждая планета, несмотря на всю причудливость своего движения, в среднем движется поступательно по большому кругу; что ее угловая скорость вдоль этого круга хотя и меняет свою величину (а временами даже знак), в среднем остается постоянной. Дальнейшее изучение движения того или иного светила приводилось поэтому к изучению его «неравенств» или «уравнений», т. е. отклонений от равномерного движения по большому кругу. Таким образом различались неравенства долготы (в орбите), менявшие скорость движения, и неравенства широты, отклонявшие планету от движения по большому кругу.

По мере того как движение планет становилось известным лучше, количество геоцентрических сфер, потребных для представления этого движения, приходилось увеличивать. Наибольшее свое развитие эта концепция получила у Аристотеля (384—322 гг. до н. э.), который довел общее число сфер до 56. Но и при таком усложнении нельзя было достичь удовлетворительного представления даже весьма грубых наблюдений того времени. Однако преклонение перед всеобъемлющей энциклопедией человеческих знаний, созданной Аристотелем, было столь велико, что его «система мира» преподавалась в университетах до конца XV в. Основные причины того, что эта столь несовершенная, чисто качественная теория так долго пользовалась всеобщим признанием, заключались в отсутствии связи схоластической науки средневековья с практическими приложениями и в том, что хрустальные сферы Аристотеля давали вполне законченную, так сказать, физическую картину мира. Между тем несравненно более совершенные с практической точки зрения теории Птолемея, позволявшие предвычислять положения светил, вскрывали лишь законы видимых движений, но, в сущности, не претендовали на «объяснение» устройства мира. Только в эпоху Возрождения, когда бурно развивавшееся мореплавание выдвинуло на первый план практические приложения астрономии, учение Аристотеля было окончательно оставлено.

Первоначальная форма математических теорий, позволивших астрономам древности удовлетворительно воспроизвести общий характер движения светил, связана с именами Аристарха Самосского (начало III в. до н. э.), у которого мы встречаем первые попытки делать астрономические измерения, и Аполлония Пергского (середина III в. до н. э.), одного из величайших греческих математиков. Такой первоначальной формой была теория «подвижных эксцентриков», согласно которой каждая планета двигалась равномерно по эксцентрическому кругу, т. е. по

кругу, центр которого не совпадал с центром Земли. Центр каждой планетной орбиты считали находящимся на прямой, соединяющей центр Земли с центром Солнца, так что центры планетных орбит обращались вокруг Земли вместе с Солнцем. Солнце и Луна двигались, согласно тогдашним представлениям, по окружностям, центры которых совпадали с центром Земли. Радиусы планетных орбит предполагались такими, что Земля находилась вне орбит Меркурия и Венеры, тогда как орбиты внешних планет, т. е. Марса, Юпитера и Сатурна, заключали внутри себя как Землю, так и орбиту Солнца.

Первые действительно научные теории, представляющие движения светил не только качественно, но и количественно, мы находим у Гиппарха (II в. до н. э.). Для объяснения открытой им неравномерности движения Солнца по эклиптике, выражающейся прежде всего в неравенстве времен года, Гиппарх предположил, что Солнце движется равномерно по неподвижному эксцентрику. Он показал, что это дает возможность, сохранив принцип равномерного кругового движения, удовлетворительно воспроизвести наблюдаемое движение Солнца. Действительно, при надлежащей величине эксцентриситета (так было названо отношение расстояния между центром Земли и центром орбиты Солнца к радиусу этой орбиты) движение, рассматривавшееся Гиппархом, хорошо воспроизводило найденную им неравномерность в изменении долготы Солнца*). Аналогичную теорию Гиппарх построил для Луны. Но здесь ему пришлось придать эксцентрику, по которому движется Луна, еще два вращательных движения: одно — с периодом в $18\frac{1}{2}$ лет — для представления попятного движения линии узлов, другое — с периодом около 9 лет — для учета поступательного движения перигея лунной орбиты.

Гиппарх показал, что открытое им так называемое первое неравенство в движениях Солнца и Луны, заключающееся в периодическом изменении скорости видимого движения, с периодом, равным времени обращения светила, может быть воспроизведено и другим путем. Он использовал для этого известную еще Аполлонию эквивалентность движения по эксцентрику движению по надлежаще выбранному эпициклу. Так, например, движение Солнца совершенно одинаково представляется каждой из двух следующих гипотез.

*) Равномерное движение по эксцентрику с большою точностью воспроизводит кеплерово движение по эллипсу с небольшим эксцентриситетом, если эксцентриситет эксцентрика взять равным удвоенному эксцентриситету эллипса.

Эксцентриситет круговой солнечной орбиты Гиппарх нашел равным $\frac{1}{24}$, тогда как эксцентриситет эллиптической орбиты Земли в действительности равняется $0,01675 = 1/59,7$.

1. Солнце S (рис. 1) движется равномерно с запада на восток по окружности SA , центр которой C не совпадает с центром Земли T , делая полный оборот в один тропический год.

2. Солнце S равномерно обращается с востока на запад с периодом в один тропический год, по эпициклу, радиус которого S_0S равен TC . Центр эпицикла S_0 равномерно обращается с тем же периодом, но в противоположном направлении, с запада на восток, по геоцентрической окружности, радиус которой TS_0 равен радиусу $CS = CA$ эпицикла.

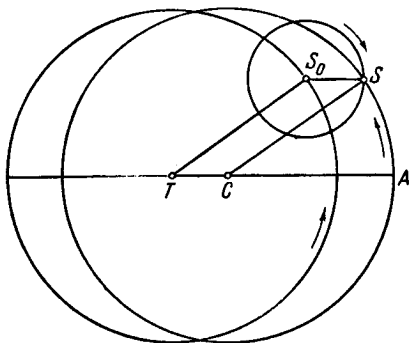


Рис. 1.

ним солнцем, а угол ATS_0 — средней аномалией Солнца *).

Аналогично этому, теорию движения Луны Гиппарх дал также в двух различных формах — при помощи эксцентрика и при помощи эпицикла, как бы подчеркивая этим, что он видит свою задачу только в математическом представлении видимых движений.

Теорию движения планет Гиппарх не разрабатывал, так как считал недостаточными имевшиеся в его распоряжении наблюдения. Он ограничился собиранием наблюдений и доказательством с их помощью неудовлетворительности теорий современных ему астрономов.

Дальнейшим и притом весьма существенным прогрессом в деле развития теоретической астрономии мы обязаны Клавдию Птолемею (прибл. 70—140 гг. н. э.). В его знаменитом трактате «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах», известном под сокращенным арабизированным названием «Альмагест» (от греческого «Мегистэ Синтаксис» — «Величайшее Построение»), впервые были установлены законы видимых движений планет и стало возможным предвычислять их положения. Таким образом, в «Альмагесте» решалась задача, которую

* Полезно отметить, что обычай отсчитывать углы от перигелия окончательно установился только в начале XIX в. Раньше углы отсчитывались от апоцентра.

в древности многие (например, Платон) считали непосильной для человеческого разума. Это имело, конечно, первостепенное идеологическое значение, но не менее важно было то практическое значение, которое имело открытие законов видимого движения светил для нужд кораблевождения и составления географических карт. Именно практическая ценность таблиц движения светил, содержащихся в «Альмагесте», создала тот огромный авторитет, которым пользовалось это сочинение сначала на Востоке, а потом и в Западной Европе.

Теорию движения Солнца, созданную Гиппархом, Птолемей воспроизвел в «Альмагесте» без всяких изменений, но теорию движения Луны он существенно дополнил, открыв новое неравенство в долготе Луны, названное впоследствии эвекцией. Учет и этого второго неравенства (для чего геоцентрический деферент Гиппарха был заменен деферентом-эксцентриком) позволил Птолемею настолько точно представить наблюдаемые долготы Луны вблизи сизигий и квадратур, что впервые стало возможным удовлетворительное предсказание затмений *).

Исключительно большой заслугой Птолемея является создание первой настоящей теории движения планет, притом настолько совершенной, что в течение 13 веков никто не сумел заменить ее лучшей. По праву гордясь результатами своей огромной работы, Птолемей начинает вторую половину «Альмагеста», посвященную планетам, словами: «Теперь нашей целью является показать, что и для пяти блуждающих звезд, совершенно так же как для Солнца и Луны, кажущиеся аномалии движения могут быть воспроизведены сочетанием равномерных круговых движений; именно такие движения приличествуют небесным телам, тогда как беспорядок и многообразие чужды им; вот почему решение этой задачи может быть рассматриваемо как великое достижение, более того, — как конечная цель философски понимаемых математических наук; но по многим причинам эта

* Амплитуду эвекции Птолемей нашел равной $1^{\circ}19'30''$, что мало отличается от истинной величины, близкой к $1^{\circ}16'48''$.

Невозможность хорошо представить долготы Луны в орбите подвижным эксцентриком (учитывающим первое неравенство — уравнение центра, зависящее, как мы теперь знаем, от эллиптичности орбиты) была ясна еще Гиппарху. Но только Птолемею удалось выделить из остающихся невязок второе неравенство. Птолемей знал, что двумя неравенствами наблюдения Луны не могут быть представлены вполне удовлетворительно, но он не сумел открыть третье большое неравенство долготы Луны — вариацию. Несмотря на большую амплитуду (около $39^{\circ}30''$), вариация была открыта лишь в 1598 г. Тихо Браге. Так как вариация не изменяет долготу Луны в сизигиях и квадратурах, то понятно, почему неучет ее не отражался на точности предвычисления затмений по таблицам Альмагеста.

задача трудна и потому естественно, что до сих пор никто не имел успеха в ее решении».

Следуя теории, разработанной им для Луны, Птолемей разложил видимое движение каждой планеты (относительно неподвижных звезд) на два движения: по деференту-эксцентрику и по эпициклу. Но для того, чтобы воспроизвести как первое неравенство в движении планет (изменение величины скорости), так и второе (изменение направления движения — стояния и попятные движения), это разложение было выполнено иначе, нежели для Луны. Рассмотрим движение внешней планеты P относительно Земли T (рис. 2). Пусть в точке S_0 находится среднее солнце, обращающееся по геоцентрической окружности. Окружность с центром в C представляет деферент, по которому движется средняя планета P_0 , являющаяся центром эпицикла. Движение происходит так, что радиус эпицикла P_0P все время параллелен прямой TS_0 ; таким образом, движение по эпициклу и по деференту совершается здесь в одном и том же направлении.

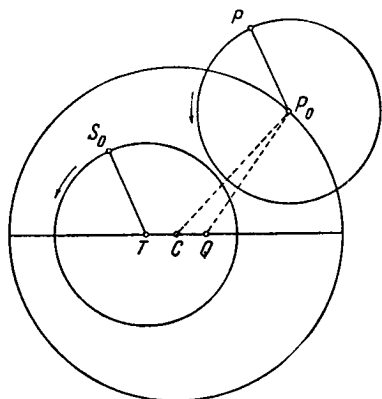


Рис. 2.

В изложенную теорию, являющуюся прямым развитием концепций Аполлония, Птолемей внес новую, весьма плодотворную идею. Чтобы лучше представить первое неравенство (уравнение центра),

он отказался от равномерности движения центра эпицикла P_0 по деференту: у него точка P_0 движется так, что вращается с постоянной угловой скоростью не прямая CP_0 , а прямая QP_0 , где точка Q определяется условием $CQ = CT$. Сравнение с эллиптическим движением показывает, что эта «гипотеза биссекции» (точка C делит отрезок TQ пополам) уменьшает ошибку в уравнении центра в три раза.

Точка Q , из которой угловое движение средней планеты представляется равномерным, служила у Птолемея центром «круга равномерного движения», получившего впоследствии название *э к в а н т а*. Эквантом называлась также и сама точка Q (*pinctum aequans* — точка выравнивания).

Теория движения внутренних планет — Меркурия и Венеры — отличалась тем, что долгота средней планеты P_0 была все время равна долготе среднего солнца S_0 , т. е. прямые QP_0 и TS_0 были параллельны. Таким образом, период обращения по деференту

здесь был равен году, а период обращения по эпициклу — сидерическому обороту планеты *).

Придав плоскостям деферента и эпицикла надлежащие наклоны, Птолемей сумел до известной степени представить и движение планет по широте, т. е. второе неравенство.

Насколько хорошо теории «Альмагеста» воспроизводили относительные размеры, форму и положение планетных орбит (с точки зрения возможности представления долгот), видно из таблицы 1. Через a , e обозначены большие полуоси и эксцентриситеты эллиптических планетных орбит; через α обозначено найденное Птолемеем отношение радиуса эпицикла к радиусу деферента, а через ϵ — найденное им значение эксцентриситета (кругового).

Таблица 1

Планета	a	$1/a$	α	e	$\frac{1}{2} e$
Меркурий	0,3871	—	0,3708	0,206	0,050
Венера	0,7233	—	0,7194	0,007	0,011
Марс	1,5237	0,6563	0,6583	0,093	0,100
Юпитер	5,2028	0,1922	0,1917	0,048	0,046
Сатурн	9,5388	0,1048	0,1083	0,056	0,057

Таким образом, цель, которую себе ставил Птолемей — дать возможность предвычислять видимые долготы и широты планет, была достигнута. Но он не мог не знать, что его теория движения Луны неизбежно приводит к таким колебаниям в ее геоцентрических расстояниях, что наибольший видимый диаметр Луны должен был бы быть вдвое больше наименьшего, что совершенно противоречит наблюдениям. Это дало основание думать, что Птолемей рассматривал развитие им теории не как «систему мира», представляющую реальные движения небесных тел, а лишь как средство предвычислять их видимые положения **)

*) Для Меркурия, представление движения которого было сопряжено с особыми трудностями (вследствие большого эксцентриситета его орбиты), Птолемей поместил центр экванта между Землей и центром деферента.

Конструкция, аналогичная экванту, была Птолемеем введена и в теорию движения Луны для учета эвекции.

***) В «Альмагесте» Птолемей действительно стоит на чисто научных позициях и не только предупреждает против излишних гипотез, но и действительно избегает их. Однако подобно тому как Лаплас, закончив строго научный трактат «Небесная механика», написал «Изложение системы мира», в котором он развивает свои философские взгляды и дает волю воображению, так и Птолемей после «Альмагеста» написал еще «Гипотезы о блуждающих светилах». Во введении к этой книге он говорит: «Я не претендую представить этим путем все движения одновременно; но я покажу, что каждое из

§ 2. Гелиоцентрическая теория планетных движений *)

От создания «Альмагеста» до появления в 1543 г. трактата «Об обращении небесных тел, VI книга» (*De revolutionibus orbium coelestium, Libri VI*), обессмертившего имя Николая Коперника (1473—1543), прошло 14 веков. За это время было сделано несколько попыток улучшить теории Птолемея в различных деталях, но эти попытки носили чисто технический характер и не имели большого значения. Действительно полезным для науки результатом работы средневековых астрономов было, с одной стороны, существенное развитие тригонометрии (замена хорд синусами, введение тангенсов, улучшение способов решения сферических треугольников); с другой, — составление новых таблиц движения светил, хотя и основанных на тех же теориях, что и таблицы «Альмагеста», но опирающихся на более точные и более многочисленные наблюдения.

Заслуженной известностью пользовались: «Хакемитовы таблицы», составленные Ибн-Юнусом (950—1009) на обсерватории, построенной для него Аль-Хахимом в Каире; «Толедские таблицы», составленные Аль-Заркали (1029—1087); «Ильхановы таблицы», созданные Мухаммедом Насирэдином Туси (1201—1274) и учеными руководимой им обсерватории в Мераге; таблицы Улугбека (1394—1449), явившиеся результатом работ созданной им в Самарканде обсерватории. Особенно большое распространение имели «Альфонсовы таблицы», созданные в 1240—1252 гг. группой арабских и еврейских астрономов, собранных для этой цели Кастильским королем Альфонсом X; в течение трех столетий они считались наилучшими.

Огромное значение трактата Коперника, сделавшее его появление переломным моментом в истории естествознания, было обусловлено тем, что этот труд был первым решительным шагом в деле преобразования астрономии из науки чисто геометрической в науку физическую. Птолемей изучал движение каждого светила в отдельности как чисто геометрическую проблему. Этим объясняется то странное теперь для нас обстоятельство, что подмеченная им зависимость движения каждой планеты от движения Солнца не привела его ни к объединению теорий отдельных

них может быть объяснено в отдельности при помощи соответствующей гипотезы». После такого заявления, вполне гармонирующего с духом «Альмагеста», Птолемей в дальнейшем занимается построением комбинаций сферических тел, которые воспроизводили бы видимые движения светил, причем эти комбинации вращающихся сфер он выводит, следуя «Физике» Аристотеля, из свойств субстанции, образующей небо, т. е. рассматривает их как представляющие истинную природу вещей, а не как математические модели.

*) Некоторые вопросы истории создания теорий движения планет изложены в книгах Фришауфа [1922] и Штумпфа [1959].

светил в одно целое, ни к выяснению до конца роли Солнца. Более того, в теориях Птолемея движением планет управляет, как мы видели в предыдущем параграфе, не реальное Солнце, а фиктивная точка — среднее солнце.

Коперник первый отчетливо понял, что не было смысла углублять дальше математическую теорию движения каждой планеты в отдельности (как это делали все последователи Птолемея), если еще не объяснены и не использованы связи, существующие между видимыми движениями планет и Солнца и подчеркивающие особую роль Солнца. «Допустим, — говорит он, — что Венера и Меркурий обращаются вокруг Солнца, тогда их элонгации вполне определятся радиусами их орбит. Кто нам мешает отнести к тому же центру движения Сатурна, Юпитера и Марса? Для этого нужно только задать надлежащим образом радиусы их орбит». Эти слова показывают, что Коперник пришел сначала к «системе мира», в которой пять планет обращались вокруг Солнца, которое в свою очередь обращалось вокруг Земли. Огромный прогресс был здесь не только в том, что «мир» впервые был связан в одно органическое целое, что непонятные раньше эмпирические зависимости получали весьма простое объяснение, но и в большей точности представления видимых движений, что было обусловлено прежде всего отнесением движения планет к положению реального Солнца.

Таков был первый этап в деле создания гелиоцентрической теории планетных движений. Второй этап заключался в том, что Коперник низвел Землю на положение одной из планет. Если первый этап потребовал от Коперника большого математического искусства и немалой наблюдательной работы, то второй этап был связан с преодолением весьма серьезных трудностей со стороны физики, находившейся в эмбриональном состоянии и неотделившейся еще от схоластической философии. Копернику пришлось здесь, оставаясь формально на позициях схоластической философии, проводить новую, чрезвычайно важную идею, в корне подрывавшую сущность этой философии — идею о единстве мира, о том, что «небо» и «земля» подчиняются одним и тем же законам. В то время как Птолемей, следуя Аристотелю, доказывал невозможность вращения Земли тем, что такое вращение разорвало бы Землю на части, Коперник указывает, что при допущении неподвижности Земли «небу» пришлось бы двигаться с неизмеримо большими скоростями и опасность разрушения была бы несравненно больше. Этим аргументом аристотелевское «небо» сразу лишалось вечности и неизменности — ему приписывались свойства, характерные для всего «земного».

Приняв вращение Земли около оси, Коперник уже легко мог допустить и ее обращение вокруг Солнца. Он прекрасно понимал полную кинематическую эквивалентность своей

первоначальной системы (тождественной с той, которую в 1587 г. предложил Тихо Браге для спасения тезиса о совпадении «центра мира» с центром Земли) с «гелиоцентрической системой мира». Перенос «центра мира» в центр Солнца Коперник мотивирует соображениями в духе схоластической философии: «В середине всех этих орбит находится Солнце; ибо может ли прекрасный этот светоч быть помещен в столь великолепной храмине в другом, лучшем месте, откуда он мог бы все освещать собой?» Целесообразность и даже необходимость такого переноса вытекала, если не для самого Коперника, то во всяком случае для его ближайших продолжателей, из законов динамики, еще не сформулированных, но уже более или менее ясно ощущавшихся благодаря успехам техники.

Идеи вращения Земли и ее обращения вокруг Солнца не были новыми *), но лишь Коперник, связавший их с математическими теориями Птолемея и уже носившимися в воздухе идеями новой механики, сделал их убедительными и плодотворными для науки.

Все возможности, заключавшиеся в гелиоцентрической **) теории планетных движений как рабочей гипотезе, были с исключительной мощью вскрыты Иоганном Кеплером (1571—1630). Его основное сочинение «Новая астрономия или Небесная физика, содержащая исследования движения Марса по наблюдениям Тихо Браге» (*Astronomia nova seu Physica Coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis. Ex observationibus G. V. Tychonis Brahe. 1609*), законченное в 1607 г., имело для

*) Современник Аристотеля Гераклит Понтийский полагал, что «можно описать видимые явления, если предположить Небо неподвижным, а Землю, находящуюся в центре Мира, вращающейся». Не менее интересным было предложенное им объяснение движений Меркурия и Венеры обращением этих планет вокруг Солнца. В совершенно законченном виде мы находим гелиоцентрическую систему у Аристарха Самосского (примерно через 50 лет после смерти Аристотеля), который выдвинул ее в качестве возможной гипотезы. Его взгляды, по свидетельству древних авторов, были широко известны.

Все это хорошо знал Птолемей. В «Альмагесте» указывается на возможность объяснить суточное движение светил как вращением Земли, так и вращением всего «мира», и подчеркивается геометрическая эквивалентность этих гипотез. Но, как отмечает Птолемей, большинство ученых считает вращение Земли физически невозможным. Столь же мало возможным, с точки зрения античной механики, изложенной в «Физике» Аристотеля, было обращение Земли вокруг Солнца.

Птолемей подчеркивает, что основной целью «Альмагеста» является решение практических задач и что уже по одному этому следует исходить из предположения о неподвижности Земли, так как «все, что трудно понимаемо, представляется широким кругам непригодным для практического применения».

**) Развитая Коперником «система мира» не была «гелиоцентрической» в буквальном смысле слова, так как центры деферентов-эксцентриков, по которым в ней двигались эпициклы планет, не совпадали с Солнцем.

развития науки не меньшее значение, чем трактат Коперника. Одинаково важны были и полученные в этом сочинении законы движения планет и использованный Кеплером метод, знаменовавший начало новой науки, целиком основанной на наблюдении и эксперименте. Коперник, так же как и Птолемей, у которого «Альмагест» начинается с аксиом, клал в основу своих теорий априорное утверждение: «Движение небесных тел есть движение равномерное, круговое, непрерывное или слагающееся из круговых движений»; это утверждение он обосновывает лишь «совершенством» небесных тел *). Напротив, Кеплер ставит себе целью построить «астрономию без гипотез». Комбинируя видимые положения планеты в надлежаще выбранные моменты и сопоставляя их с одновременными положениями Солнца, он получает пространственные гелиоцентрические координаты планеты; не связывая себя никакими предвзятыми принципами, он ищет затем зависимости между этими координатами и временем.

Таким путем он делает первое свое открытие: движение каждой планеты происходит в плоскости, проходящей через центр Солнца. Уже этот результат позволил представить широты планет несравненно лучше, чем это имело место в теориях Птолемея и Коперника, в которых планеты двигались по кривым двоякой кривизны. Далее Кеплером был получен закон площадей и, наконец, после ряда проб им было установлено, что траектория планеты лучше всего представляется эллипсом, фокус которого совпадает с центром Солнца.

Эти открытия позволили Кеплеру представить движение каждой планеты с гораздо большей точностью, чем это могли сделать все его предшественники. В 1619 г. он дополнил их еще одним открытием первостепенной важности: его многолетние усилия найти связь между элементами различных планет увенчались наконец успехом.

Все эти результаты составляют три закона Кеплера, формулируемые обычно следующим образом:

I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II. Площадь сектора, описываемого радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.

*) В отношении соблюдения принципа равномерных круговых движений, как единственно возможных для небесных тел, Коперник был еще более строг, нежели Птолемей. В своей теории эквантов Птолемей молчаливо отошел от этого принципа, допустив неравномерное движение по кругу. Это было плодотворной идеей, открывшей впоследствии дорогу Кеплеру к установлению истинных законов планетных движений. Коперник ставил себе в заслугу полный отказ от эквантов: он их заменил дополнительными эпичклами.

III. Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Уже Кеплеру было известно, что эти законы, завершившие создание эмпирической кинематики солнечной системы, не абсолютно строги. Хотя для планет они выполняются с большой точностью (особенно два первых), но чтобы представить скольконибудь удовлетворительно движение Луны, нужно было еще сделать эллиптическую орбиту подвижной и добавить эвекцию и вариацию. Причины всех этих отклонений стали ясны после открытия закона всемирного тяготения.

Вскоре после появления гелиоцентрической теории Эразм Рейнгольд составил основанные на ней новые таблицы движения светил, более точные и более подробные, нежели таблицы самого Коперника. Эти таблицы, названные им «Прусскими таблицами» (*Tabulae Prutenicae*, 1551), быстро вытеснили «Альфонсовы таблицы», имевшие еще широкое распространение.

Открыв свои первые два закона, Кеплер приступил к составлению основанных на них таблиц. Они были опубликованы в 1627 г. под названием «Рудольфовых таблиц» (*Tabulae Rudolphinae*) и по своей точности далеко превзошли все прежние таблицы.

§ 3. Движение по законам Кеплера

Покажем, как координаты планеты, движущейся вокруг Солнца по законам Кеплера, могут быть выражены в функции времени.

Центр S эллипса, описываемого планетой M (рис. 3) примем за начало координат; за ось Sx примем направление большой полуоси $SP = a$, проходящей через фокус S , в котором находится Солнце; за ось Sy примем направление малой полуоси $SB = b$.

Уравнение эллипса в этой системе координат

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

заменим параметрическими уравнениями, выбрав параметр следующим образом. Из точки $M(x, y)$, изображающей положение планеты, опустим перпендикуляр MN на ось абсцисс. Продолжение этого перпендикуляра до пересечения с окружностью, описанной на большой оси эллипса AP как на диаметре, дает точку M' . Задание каждой из точек M и M' однозначно определяет другую. Но положение точки M' можно определить углом E , отсчитываемым от большой полуоси SP до радиуса SM' в направлении движения планеты. Этот угол называется эксцентрической аномалией.

Уравнение (3.1) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$x = a \cos E, \quad y = b \sin E.$$

Отношение $e = CS/CP$, характеризующее форму эллипса, называется его эксцентриситетом. Очевидно,

$$CS = ae, \quad CB = b = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Введем теперь систему прямоугольных орбитальных координат $S\xi\eta$, оси которой параллельны осям системы Sxy , а начало находится в фокусе S . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \cos E - ae, \\ \eta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \right\} (3.2)$$

Через r и v обозначим полярные орбитальные координаты, соответствующие ξ и η . Угол v , отсчитываемый от радиуса-вектора SP , направленного в перигелий Π , называется истинной аномалией планеты.

Так как

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v, \quad (3.3)$$

то сравнение равенств (3.2) и (3.3) дает следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ r \cos v &= a (\cos E - e), \end{aligned} \right\} (3.4)$$

служащие для вычисления полярных орбитальных координат, когда задано E .

Из формул (3.4) легко находим

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.5)$$

Комбинирование этого равенства со вторым из равенств (3.4) дает

$$\left. \begin{aligned} r(1 - \cos v) &= a(1 + e)(1 - \cos E), \\ r(1 + \cos v) &= a(1 - e)(1 + \cos E), \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} &= \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{E}{2}. \end{aligned} \right\} (3.6)$$

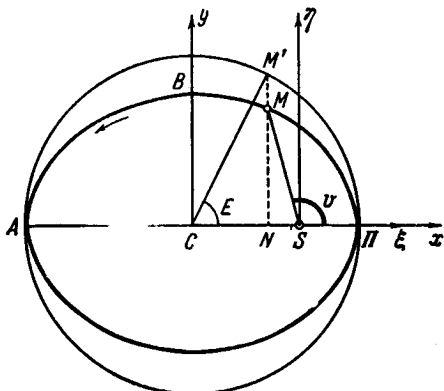


Рис. 3.

причем двойственность знака при извлечении корня устраняется тем соображением, что $\frac{1}{2}v$ и $\frac{1}{2}E$ находятся всегда в одном и том же квадранте (значению $E=180^\circ$ соответствует $v=180^\circ$).

Из (3.6) вытекает следующая часто употребляемая формула:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (3.7)$$

Таким образом, для вычисления r и v по заданному E можно вместо (3.4) употреблять либо формулы (3.6), либо формулы (3.5) и (3.7).

Заметим еще, что исключение E из равенств (3.4) и (3.5) дает уравнение эллипса в полярных координатах

$$r = p/(1 + e \cos v), \quad (3.8)$$

где $p = a(1 - e^2)$ есть параметр эллипса, т. е. ордината точки, для которой $v = 90^\circ$.

Полезно напомнить, что уравнение (3.8) является общим уравнением конических сечений. При $e = 1$ оно представляет параболу, а при $e > 1$ — ветвь гиперболы, вогнутую по отношению к фокусу S .

Обратимся теперь ко второму закону Кеплера. Если через T и t обозначить моменты времени, в которые планета занимает положения Π и M , а через P обозначить период обращения планеты, то этот закон даст такое соотношение:

$$\frac{Q}{\pi ab} = \frac{t - T}{P}, \quad (3.9)$$

где через Q обозначена площадь сектора $S\Pi M$.

Вычислим Q . Если через A обозначить площадь криволинейной трапеции NMP , то

$$Q = A - \text{пл. } \Delta NMS. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.4) показывают, что

$$\text{пл. } \Delta NMS = -\frac{1}{2} r^2 \sin v \cos v = -\frac{1}{2} ab \sin E (\cos E - e).$$

С другой стороны, имеем

$$A = \frac{b}{a} A',$$

где через A' обозначена площадь криволинейной трапеции $NM'\Pi$. Легко видеть, что

$$A' = \frac{1}{2} a^2 (E - \sin E \cos E).$$

Подстановка полученных выражений в равенство (3.10) дает

$$Q = \frac{1}{2} ab(E - e \sin E),$$

вследствие чего уравнение (3.9) можно написать так:

$$E - e \sin E = M, \quad (3.11)$$

где

$$M = n(t - T), \quad n = 2\pi/P.$$

Величина n , представляющая среднюю скорость изменения угла E , называется средним движением планеты; величина M получила название средней аномалии; а уравнение (3.11) называется уравнением Кеплера.

Зная элементы орбиты a , e , P и T , мы можем, после того как уравнение Кеплера решено относительно E , вычислить орбитальные координаты планеты либо по формулам (3.2), либо по формулам (3.4) или (3.5), (3.7).

Примечание. При небольших значениях e орбитальные координаты удобно представить, пользуясь разложениями в ряды, в виде явных функций времени. В главе VI этот вопрос будет рассмотрен подробно. Сейчас покажем только, что первые члены таких разложений легко получить элементарными приемами.

Уравнение (3.11), написанное в форме

$$E = M + e \sin E,$$

дает в первом приближении

$$E = M + e \sin M.$$

Во втором приближении имеем

$$E = M + e \sin(M + e \sin M),$$

или

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + e^2 \sin^2 M + \frac{3}{2} e^3 \cos M \sin^2 M + \dots \quad (3.13)$$

Из формул (3.4) легко находим, что

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1-e \cos E},$$

тогда как уравнение Кеплера дает

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1-e \cos E}.$$

Следовательно,

$$dv = \sqrt{1 - e^2} \frac{dE}{dM} dE = \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2 dM.$$

Подставив сюда выражение (3.12) и проинтегрировав, получим

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M - \\ - \frac{4}{3} e^3 \sin M \left(1 - \frac{13}{4} \cos^2 M \right) + \dots \quad (3.14)$$

Эти разложения позволяют удобно сравнить эллиптическое движение с движением по эксцентрику, которым пользовались до Кеплера.

Движение по эксцентрику — это движение равномерно обращающейся точки M' , видимое из точки S (рис. 3). Обозначая по-прежнему через r и v радиус-вектор и истинную аномалию точки M' , а через $\varepsilon = CS/CP$ — эксцентриситет, и замечая, что для рассматриваемого теперь движения $E = M = n(t - T)$, легко найдем

$$r = a(1 - 2\varepsilon \cos M + \varepsilon^2)^{1/2}; \quad \operatorname{tg} v = \frac{\sin M}{\cos M - \varepsilon},$$

откуда

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos M + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 M + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \cos M \sin^2 M + \dots,$$

$$v = M + \varepsilon \sin M + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2M - \frac{1}{3} \varepsilon^3 \sin M (1 - 4 \cos^2 M) + \dots$$

Сравнение этих формул с предыдущими показывает, что взяв $\varepsilon = 2e$, мы представим изменение v с ошибкой порядка e^2 , но в r ошибка будет порядка e ; если же взять эксцентрик, для которого $\varepsilon = e$, то хорошо представятся радиусы-векторы, но представление угловой координаты будет неудовлетворительно.

§ 4. Динамические следствия законов Кеплера

Законы Кеплера существенно помогли Исааку Ньютону (1642—1727) завершить открытие основных законов динамики, начатое Галилеем (1564—1642), Декартом (1596—1650) и Гюйгенсом (1629—1695). Создание динамики позволило в свою очередь совсем по-новому подойти к вопросу о движении планет. Вместо смутных представлений о причине планетных движений, корнящейся в Солнце, которые руководили Коперником и, в гораздо более отчетливой форме, Кеплером, Ньютон смог изучить явление количественно и найти силу, производящую движение планеты.

Так как движение планеты не является прямолинейным и равномерным, то согласно закону инерции на планету действует некоторая сила. Чтобы найти эту силу или, что приводится к тому же, ускорение планеты, достаточно воспользоваться одним только первым законом Кеплера. Из этого закона прежде всего следует, что при всякой начальной скорости планеты ее траектория лежит в плоскости, проходящей через центр Солнца. Таким образом, если планета M (рис. 4) станет двигаться вокруг Солнца S по орбите MA , то действующее на нее ускорение должно находиться в плоскости SMA ; если же планета станет двигаться по орбите MB , то ускорение должно находиться в плоскости SMB . Отсюда следует, что вектор ускорения ω , которое планета имеет в положении M , должен быть направлен по прямой SM . Так как ускорение направлено всегда в сторону вогнутости траектории, то ω направлено в сторону Солнца. Иначе говоря, движение планеты происходит под действием центральной силы, направленной к центру Солнца.

Обратимся теперь к нахождению величины ускорения. Положение планеты M (см. рис. 4) в плоскости ее орбиты SMA будем определять полярными координатами: полярным углом u , отсчитываемым от неподвижной прямой SN , и радиус-вектором $r = SM$. Проекции ускорения на радиус-вектор и на перпендикулярный к нему вектор, направленный в сторону движения, выражаются, как известно, формулами

$$\omega_r = \ddot{r} - r\dot{u}^2; \quad \omega_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{u}). \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае, как мы только что видели,

$$\omega_r = -\omega; \quad \omega_p = 0. \quad (4.2)$$

Поэтому

$$r^2\dot{u} = c, \quad (4.3)$$

где c — постоянная величина.

Поскольку стоящее слева выражение есть удвоенная секторная скорость, то равенство (4.3) выражает закон площадей. Отсюда видно, что второй закон Кеплера является с точки зрения динамики следствием первого закона.

Положив

$$s = r^{-1}$$

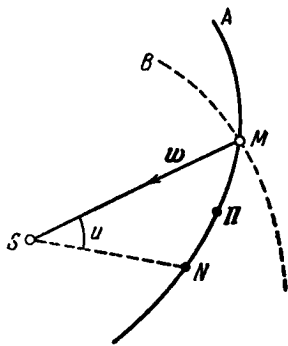


Рис. 4.

и представив равенство (4.3) в форме

$$\frac{du}{dt} = cs^2,$$

получим

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dt} \frac{dr}{du} \right) = cs^2 \frac{d}{du} \left(cs^2 \frac{ds^{-1}}{du} \right),$$

или

$$\ddot{r} = -c^2 s^2 \frac{d^2 s}{du^2}.$$

Поэтому равенства (4.1) и (4.2) дают

$$\omega = c^2 s^2 \left(\frac{d^2 s}{du^2} + s \right). \quad (4.4)$$

Это выражение абсолютной величины ускорения материальной точки, движущейся под действием центральной силы, носит название формулы Бине.

Так как движение планеты происходит согласно первому закону Кеплера, т. е. по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце, то соотношение (3.8) дает

$$\frac{1}{s} = r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}.$$

Через ω здесь обозначен полярный угол u , соответствующий перигелию Π .

Подставив это выражение в формулу (4.4), получим

$$\omega = c^2 p^{-1} r^{-2}.$$

Но

$$p = a(1 - e^2); \quad c = 2\pi abP^{-1}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

где через P обозначен период обращения планеты. Следовательно,

$$\omega = \mu r^{-2}, \quad (4.5)$$

где

$$\mu = 4\pi^2 a^3 P^{-2}. \quad (4.6)$$

Итак, законы механики позволяют вывести из первого закона Кеплера такое заключение: движение каждой планеты происходит от действия на нее силы, направленной к центру Солнца и равной $t\mu r^{-2}$, где t — масса этой планеты, а μ определяется формулой (4.6).

Но согласно третьему закону Кеплера отношение $a^3 P^{-2}$ одинаково для всех планет. Следовательно, величина μ — одна и та же для всех планет; она характеризует силовое поле Солнца.

Примечание. Закон действия силы, выражаемый формулой (4.5), можно получить, используя только часть тех свойств движения, которые содержатся

в первом законе Кеплера. Задачи такого рода были поставлены и решены Берtrandом (J. Bertrand) в 1873 и 1877 годах. В частности, им была решена следующая задача:

Найти центральную силу, под действием которой материальная точка при всех начальных условиях движется по коническому сечению.

Оказывается, что этому условию удовлетворяют только две силы, не зависящие от направления: сила, определяемая формулой (4.5), и сила, прямо пропорциональная расстоянию r .

Можно показать, что тот же самый результат получается и в том случае, если отбросить условие, что искомая сила должна быть центральной. Эта более общая задача была решена Альфаном (G. Halphen) в 1877 г. и В. Г. Имшенецким в 1879 г.

Вопрос о значении такого рода задач для доказательства применимости закона всемирного тяготения за пределами солнечной системы будет рассмотрен в гл. XII.

§ 5. Закон Ньютона

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в 1686 г., был опубликован в его знаменитом произведении *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, оказавшем исключительно большое влияние на дальнейшее развитие не только астрономии, но и всего естествознания *).

Ньютон опирался на законы Кеплера. Из этих законов следует, как было показано в предыдущем параграфе, что Солнце является центром силового поля, производящего в каждой точке пространства ускорение

$$\omega = \mu r^{-2}, \quad (5.1)$$

где r — расстояние этой точки от центра Солнца, а μ — некоторая постоянная величина.

Наблюдения показывают, что движения спутников вокруг планет происходят, по крайней мере в первом приближении, по законам Кеплера. Это позволяет считать, что планеты, имеющие спутников, являются центрами силовых полей, аналогичных силовому полю Солнца. Так, например, Юпитер является центром силового поля, у которого ускорение в каждой точке равно

$$\omega_1 = \mu_1 r^{-2}, \quad (5.2)$$

где r — расстояние этой точки от центра Юпитера, μ_1 — постоянная величина, отличная, как показывают наблюдения, от μ .

Обозначим через M и m_1 массы Солнца и Юпитера. В таком случае сила, с которой Солнце притягивает Юпитер, будет равна $m_1 \mu r^{-2}$, тогда как сила, с которой Юпитер притягивает Солнце, равна $M \mu_1 r^{-2}$. По закону равенства действия и

*) Перевод этого сочинения на русский язык, снабженный ценными примечаниями, был опубликован А. Н. Крыловым в 1911 г. и переиздан в 1936 г. (Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, 1936.)

противодействия эти две силы должны быть равны. Следовательно,

$$m_1 \mu r^{-2} = M \mu_1 r^{-2},$$

откуда

$$\mu/M = \mu_1/m_1.$$

Если величину этого отношения, оказывающегося одинаковым для Солнца и для планет, имеющих спутников, обозначить через f , то получим $\mu = fM$, $\mu_1 = fm_1$, так что выражение (5.1) принимает вид

$$w = fMr^{-2}.$$

Отсюда следует, что два небесных тела, имеющие массы m_1 и m_2 , притягивают друг друга с силой

$$F = fm_1 m_2 r^{-2}, \quad (5.3)$$

где r — расстояние между их центрами, а коэффициент f один и тот же для всех небесных тел.

Хотя формула (5.2) непосредственно доказывается лишь для планет, имеющих спутников, естественно предположить, что она имеет место и для остальных планет.

Установление закона (5.3), по которому происходит взаимодействие небесных тел, явилось первым этапом в рассуждениях Ньютона, приведших к открытию закона всемирного тяготения. Напомним, что этот первый этап заключался: в окончательном выяснении первых двух законов механики; в выводе при помощи этих законов из эмпирических законов Кеплера свойств силового поля Солнца; в открытии третьего закона механики и в выводе при его помощи формулы (5.3).

Существенную заслугу в деле получения формулы (5.1) сам Ньютон приписывает Гюйгенсу, который незадолго перед тем (1675) получил известную формулу для центростремительного ускорения при круговом движении. Применение этой формулы позволило нескольким современникам Ньютона установить, что движение планеты производится притяжением Солнца, изменяющимся обратно пропорционально квадрату расстояния. Но такой вывод относился лишь к фиктивному случаю строго кругового движения планеты. Ньютон поставил и решил задачу нахождения силы, производящей эллиптическое движение — задачу более общую и, при тогдашнем состоянии математики, гораздо более трудную.

Вторым этапом в рассуждениях Ньютона было отождествление силы, действующей между небесными телами, с силой тяжести. К этому отождествлению Ньютон пришел следующим образом. Наличие у Земли спутника, движение которого подчиняется (по крайней мере приближенно) первому закону Кеплера, показывает, что Земля является, подобно Солнцу и другим планетам,

центром силового поля, производящего ускорение, определяемое формулой (5.1). Стоящую в ней величину μ можно вычислить, если в выражение (4.6) подставить известные из наблюдений значения большой полуоси лунной орбиты и периода ее обращения. Взяв после этого r равным радиусу Земли, Ньютон нашел, что ускорение, производимое рассматриваемым силовым полем на поверхности Земли, равно $9,9 \text{ м/сек}^2$ (в наших единицах).

С другой стороны, из опытов было известно, что ускорение силы тяжести равно $9,8 \text{ м/сек}^2$. Отличие этого значения от предыдущего достаточно мало, так что Ньютон был вправе отнести его за счет неточности исходных данных и считать доказанным, что движение Луны, а следовательно, и других небесных тел, производится силой тяжести, хорошо нам известной из повседневного опыта. Этим была окончательно стерта та грань между «земным» и «небесным», разрушение которой было начато Коперником.

Сила тяжести доступна для экспериментального изучения. Такое изучение позволило еще Галилею установить, что ускорение, сообщаемое этой силой, не зависит от размеров тела: все тела падают при отсутствии посторонних сил с одинаковым ускорением. Отсюда следует, что сила тяжести, действующая на какое-либо тело, есть сумма сил, действующих на его частицы. Подобно этому и силы взаимного притяжения между небесными телами должны получаться от сложения сил, с которыми притягиваются их частицы.

Такого рода соображения привели Ньютона к формулировке, в качестве весьма обоснованной рабочей гипотезы, закона всемирного тяготения:

Каждые две частицы вещества притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Третий этап рассуждений состоял в доказательстве справедливости этого гипотетического закона. Такое доказательство, заключающееся в выводе следствий из этого закона и в установлении согласия этих следствий с наблюдениями, начатое Ньютоном, потребовало огромной работы, занявшей более двух столетий. Эта работа, важнейшие этапы которой будут вкратце описаны в следующей главе, превратила закон Ньютона из гипотезы в один из наиболее строго обоснованных законов природы.

Примечание. Чтобы строго доказать тождественность силы, производящей движение небесных светил, с силой тяжести, нужно проделать вычисления, значительно более сложные, нежели указанные выше вычисления Ньютона.

Для основного коэффициента формулы, дающей величину силы тяжести в точках поверхности земного сфероида, наблюдения дают значения, заключенные между 978,047 и 978,057 (в системе CGS). Но этот коэффициент равен

произведению $f m_0 \rho_0^{-2}$ (где m_0 и ρ_0 — масса и экваториальный радиус Земли), умноженному на некоторую функцию сжатия α земного сфероида (гл. XXX, § 3). Таким образом, взяв вероятнейшие значения ρ_0 и α , из измерений силы тяжести, получаем

$$f m_0 = 3,9862 \times 10^{20}. \quad (5.4)$$

С другой стороны, ускорение силового поля, производящего движение Луны относительно Земли, выражается формулой (5.1) при $\mu = f(m_0 + m_1)$, где m_1 — масса Луны. Чтобы вычислить эту величину, надо в формулу (4.6) подставить те значения a и P , которые имели бы место, если бы Луна двигалась только под действием взаимного притяжения между ней и Землей. Между тем получаемые из наблюдений значения

$$a = 3,84395 \times 10^{10}; \quad P = 2,3605915 \times 10^6$$

включают еще и влияние Солнца.

Наиболее существенная часть этого влияния будет учтена (гл. XXI, § 3), если только что приведенное значение a (полученное из наблюдаемых значений параллакса Луны) умножить на 1,000913. Это дает

$$f(m_0 + m_1) = 4,0350 \times 10^{20}. \quad (5.5)$$

Коэффициент лунного неравенства в движении Земли, пропорциональный отношению масс Земли и Луны, дает $m_0 = 81,375 m_1$. Умножив, соответственно с этим, величину (5.5) на 0,98786, окончательно получим

$$f m_0 = 3,9860 \times 10^{20},$$

что находится в полном согласии с величиной (5.4), выведенной из измерений силы тяжести.

§ 6. Доказательства закона тяготения, данные Ньютоном

Указанные в двух предыдущих параграфах рассуждения, приведшие к открытию закона тяготения, не могут считаться доказательством этого закона хотя бы уже потому, что их отправным пунктом являются законы Кеплера, выполняющиеся лишь приближенно. Эти рассуждения являются лишь обоснованием выдвижения закона тяготения в качестве рабочей гипотезы. Чтобы доказать этот закон, нужно вывести из него все следствия, поддающиеся опытной проверке, и сравнить их с результатами измерений. Этим путем и пошел Ньютон.

Он начал с изучения движения небесных тел, вытекающего из закона тяготения. Эту задачу он упростил, показав, что каждое небесное тело можно при этом заменить материальной точкой, считая его массу сосредоточенной в центре инерции. Таким образом, вопрос привелся к решению задачи о движении произвольного числа материальных точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона. Так возникла знаменитая «задача n тел».

Простейший случай, когда $n=2$, т. е. «задачу двух тел», Ньютон решил с достаточной полнотой. Это дало ему возможность найти законы, по которым двигалась бы каждая планета,

если бы она не испытывала притяжения со стороны других планет. Оказалось, что в этом случае первые два закона Кеплера выполнялись бы совершенно точно. Что же касается третьего закона, то он должен быть изменен: одно и то же значение для каждой планеты имеет не величина P^2/a^3 , рассматривавшаяся Кеплером, а величина

$$(1 + m/M) P^2/a^3, \quad (6.1)$$

где через M и m обозначены масса Солнца и масса рассматриваемой планеты.

В новой, исправленной таким образом формулировке третий закон Кеплера позволил найти массы Юпитера и Сатурна. Это дало возможность убедиться, что величина (6.1) действительно имеет одно и то же значение для всех планет, по крайней мере в пределах точности наблюдений того времени.

Ньютон показал также, что в задаче двух тел возможны движения не только по эллипсу, но и по другим коническим сечениям. Это позволило ему, впервые в истории науки, правильно объяснить движение комет. Он показал, что комета 1680 г., так привлекающая к себе внимание своей исключительной величиной и яркостью, двигалась по параболе. Разработанный Ньютоном способ нахождения параболических орбит позволил Галлею (E. Halley, 1656—1742) показать, что все кометы, для которых имелись достаточно точные наблюдения, также двигались по коническим сечениям *).

Следующий этап проделанной Ньютоном работы заключался в доказательстве того, что из формулированного им закона вытекают не только законы Кеплера, но и все наблюдаемые отступления от этих законов.

Самые большие отступления имеют место в движении Луны. Еще в древности было известно, что плоскость ее орбиты не остается неподвижной: восходящий узел имеет попятное движение со средней скоростью $19^\circ 21'$ в год, на которое накладывается периодическое колебание с амплитудой, равной $1^\circ 26'$; наклон плоскости орбиты к плоскости эклиптики колеблется между $5^\circ 0'$ и $5^\circ 18'$, сохраняя постоянную среднюю величину. С другой стороны, эллиптическая орбита Луны вращается в своей плоскости так, что перигей движется со средней скоростью $40^\circ 41'$ в год,

*) Галлей вычислил параболические орбиты для 24 комет. Заметив очень большое сходство орбит комет 1305, 1380, 1456, 1531, 1607 и 1682 годов, он высказал предположение, что эти кометы являются повторными возвращениями одной и той же кометы, движущейся по вытянутой эллиптической орбите и имеющей период обращения в 75 лет. Когда предсказанное им на 1758 год возвращение этой кометы (получившей название «кометы Галлея») подтвердилось, то это явилось одним из наиболее общедоступных доказательств справедливости закона всемирного тяготения.

а на это поступательное движение перигея накладывается еще его периодическое колебание с амплитудой, доходящей до $8^{\circ}41'$. Наконец, движение в орбите отличается от вычисленного по закону площадей на ряд периодических неравенств, наибольшими из которых являются эвекция с амплитудой в $1^{\circ}16'26''$, вариация с амплитудой в $39'30''$ и годовое неравенство — с амплитудой в $11'10''$.

Ньютон показал, что все эти отступления от законов Кеплера, характеризующих движение в задаче двух тел, объясняются притяжением Солнца. Изучение движения Луны является, таким образом, даже в первом приближении уже не задачей двух тел, а задачей трех тел. Преодолев весьма значительные по тому времени математические трудности, Ньютон нашел некоторые свойства движения в том частном случае задачи трех тел, когда одно из расстояний между телами очень мало по сравнению с двумя другими. Это дало ему возможность показать, что вариация является следствием закона всемирного тяготения, и найти теоретическую величину ее амплитуды ($35'10''$), достаточно близкую к наблюдаемой. Таким же следствием закона тяготения оказалось и движение линии узлов: теоретическая величина среднего движения узла, полученная Ньютоном ($19^{\circ}18'$), была очень близка к указанной выше величине, полученной из наблюдений. Для амплитуды периодического колебания узла Ньютон получил $1^{\circ}30'$, также в прекрасном согласии с наблюдениями. Колебание наклона лунной орбиты тоже оказалось следствием притяжения Солнца, а теоретическая величина амплитуды этого колебания, равная $17'45''$, оказалась в полном согласии с наблюдениями.

Подробное изложение теории вариации и теории движения плоскости лунной орбиты Ньютон заканчивает словами: «Этим расчетами движений Луны я хотел показать, что на основании теории тяготения движения Луны могут быть вычислены по причинам их производящим». Затем он указывает, не входя в подробности, что теория тяготения объясняет годовое неравенство и дает для него амплитуду, равную $11'50''$; что должно существовать полугодичное неравенство с амплитудой в $3'45''$ (тогда еще не открытое наблюдениями); что из теории тяготения вытекает поступательное движение перигея *).

*) Относительно теоретического значения средней скорости движения перигея в Principia имеется только следующий расчет. Если к силе притяжения, действующей между Землей и Луной, прибавить так называемую постоянную часть возмущающей силы Солнца (величина которой в среднем в 357 раз меньше притяжения Земли), то для средней скорости движения перигея получается величина приблизительно вдвое меньшая наблюдаемой.

Получение более точной величины этой скорости представляет несравненно более сложную задачу, занимавшую Ньютона до конца жизни. Остав-

Таковы основные результаты, полученные Ньютоном в теории движения материальных точек, притягивающих друг друга по найденному им закону. Не меньшее значение для установления этого закона имели сделанные Ньютоном выводы из него в отношении притяжения протяженных тел. Эти выводы заложили основы новой дисциплины — теории притяжения, из которой впоследствии развился один из важнейших разделов математической физики — теория потенциала.

Ньютон начинает с нахождения притяжения, производимого бесконечно тонкой однородной сферической оболочкой на внутреннюю и на внешнюю точки. Это дало ему возможность показать, что тело сферической структуры притягивает внешнюю точку так, как если бы его масса была сосредоточена в центре (см. гл. XX, § 5). Изучение притяжения, производимого однородным телом вращения на точку, лежащую на оси вращения, позволило, далее, сравнить притяжение, производимое эллипсоидом вращения в точке, лежащей на его полюсе, и в точке, лежащей на экваторе. А это в свою очередь дало Ньютону возможность сделать новый, весьма важный шаг в деле выяснения фигуры Земли.

До Ньютона строго сферическая форма Земли была общепринятой научной истиной — задача заключалась лишь в возможно точном нахождении радиуса Земли. Ньютон показал, что необходимым следствием закона тяготения является «фигура Земли, не вполне сферическая, а образуемая вращением эллипса около его малой оси». В самом деле, «если бы у планеты было устранено суточное вращение, то вследствие одинакового отовсюду тяготения частей ее она должна бы принять форму шара. Вследствие же вращения части близ экватора стремятся удалиться от оси; следовательно, если бы вещество было жидким, то оно своим подъемом увеличило бы диаметр экватора и своим опусканием уменьшило бы ось, проходящую через полюса. Так, диаметр Юпитера (согласно наблюдениям астрономов) оказывается меньшим между полюсами, нежели с востока на запад».

В основу теории фигуры Земли Ньютон кладет предположение, что Земля ограничена уровенной поверхностью, т. е. такой, во всех точках которой сила тяжести одинакова, причем под силой тяжести разумеется равнодействующая силы притяжения и центробежной силы. Таким образом, теория фигуры Земли

шиеся после его смерти рукописи, опубликованные лишь в 1888 г., показали, что ему удалось достичь гораздо большей точности в решении задачи о движении перигея Луны. Для средней скорости этого движения он получил теоретическую величину, равную $38^{\circ}51'51''$ в год вместо действительной $40^{\circ}41'$.

Весьма подробный разбор всех работ Ньютона, как опубликованных им, так и найденных в его бумагах, содержит книга: W. W. Rouse Ball, *An Essay on Newton's Principia*, London, 1893.

Ньютона базируется, как и современная теория, на законе тяготения и на условиях гидростатического равновесия. Однако в столь общем виде задача о нахождении фигуры планеты не решена и по настоящее время. Ньютон решал ее, делая еще два дополнительных предположения: что планета однородна и что ее внешняя поверхность есть эллипсоид вращения с очень малым сжатием. Это второе предположение приводит задачу к нахождению зависимости между сжатием эллипсоида и угловой скоростью вращения планеты. Ньютон нашел, пренебрегая второй степенью сжатия α , что

$$\alpha = \frac{5}{4} q,$$

где q есть отношение центробежной силы к силе притяжения в точке, лежащей на экваторе планеты.

Для Земли $q=1/288$, что дает $\alpha=1/230$. Такова теоретическая величина сжатия, полученная Ньютоном на основании только что указанных предположений. Эти выводы имели весьма важное значение для признания закона всемирного тяготения. Ньютон показал хорошее согласие их с известными тогда наблюдениями силы тяжести под разными широтами. Но вывод Ньютона относительно сжатой у полюсов формы Земли противоречил результатам геодезических работ того времени. Обширные измерения, выполненные во Франции как раз в это время (1683—1718), дали для 1° меридиана на юге Франции 57097 туазов, а на севере — 56960 туазов, что указывало (если бы эти результаты были достаточно точны) на продолговатую, а не сплюснутую форму Земли. Так как это кажущееся расхождение следствий из закона тяготения с действительностью было, в сущности, единственным научным доводом против этого закона (остальные возражения носили философский характер), то на нем особенно настаивали французские ученые, до 30-х годов XVIII в. остававшиеся приверженцами картезианской физики, объяснявшей и тяжесть, и движение светил эфирными вихрями.

Чтобы окончательно решить вопрос, приобретший, таким образом, большое принципиальное значение, французским правительством были снаряжены две экспедиции. Одна из них измерила (1735—1742) дугу в $3^\circ 8'$ в Перу и нашла, что вблизи экватора величина 1° меридиана равна 56734 туазам; другая экспедиция, работавшая в Лапландии, нашла (1736—1737), что под широтой $66^\circ 20'$ длина 1° меридиана равна 57438 туазам. Этим была окончательно доказана сжатая форма Земли. Заметим, что достаточно точную величину сжатия удалось получить из геодезических измерений гораздо позднее — только в начале XIX в. Она оказалась в полном согласии с законом всемирного тяготения.

Полученная Ньютоном величина сжатия, равная $5q/4$, основана на допущении однородности Земли. Он ошибочно считал, что для планеты, плотность которой возрастает к центру, сжатие должно быть больше этой величины. В 1690 г. Гюйгенсом была опубликована работа «О причине силы тяжести», в которой он получил теоретическую фигуру планеты, исходя из картезианских (хотя и сильно им измененных) представлений о природе силы тяжести. Отрицая ньютоново притяжение между каждой парой материальных частиц, Гюйгенс полагал, что из теории эфирных вихрей вытекает стремление каждой частицы планеты к ее центру. Он показал, что, каков бы ни был закон изменения силы этого притяжения с расстоянием от центра, сжатие планеты будет равно $q/2$. Таким образом, сжатие Земли по Гюйгенсу должно было бы равняться $1/576$.

С точки зрения ньютоновой теории тяготения полученный Гюйгенсом результат дает сжатие планеты для того случая, когда планета настолько уплотнена к центру, что вся ее притягивающая масса может считаться сосредоточенной в центре.

Современная теория фигур планет в своих наиболее существенных частях была создана Клеро (A. Clairaut, 1713—1765) в его книге «Теория фигуры Земли, основанная на принципах гидростатики», вышедшей в 1743 г. *). Здесь было показано, что каков бы ни был у планеты закон возрастания плотности с глубиной, ее сжатие всегда будет заключаться между величинами $5q/4$ и $q/2$, найденными Ньютоном и Гюйгенсом. Это является необходимым следствием закона всемирного тяготения и основных принципов гидростатики.

Установив истинную форму Земли, Ньютон смог сделать еще одно открытие чрезвычайной важности: он показал, что прецессионное движение точки весеннего равноденствия, открытое еще Гиппархом, также является необходимым следствием закона всемирного тяготения, причем величина прецессии, рассчитанная на основании этого закона, удовлетворительно согласуется с получаемой из наблюдений.

Для вычисления величины прецессии Ньютон представил себе Землю состоящей из однородного шара и кольца, расположенного вдоль экватора. Рассматривая это кольцо как «кольцо лун» и найдя попятное движение узлов этих лун, Ньютон получил для величины лунно-солнечной прецессии $68''$ в год. Лапласом было отмечено, что расхождение этой величины с наблюдаемой зависит прежде всего от принятого Ньютоном значения сжатия $1/230$, значительно превосходящего действительную величину. Для сжатия, равного $1/300$, вычисления Ньютона дали

*) Русский перевод этой книги издан Академией наук СССР в серии «Классики науки» (1947).

бы прецессию, равную $53''{,}6$, что весьма близко, принимая во внимание грубость расчета, к действительной величине $50''{,}4$.

Последним, но не менее важным доводом, выдвинутым Ньютоном в подтверждение закона всемирного тяготения, было вытекающее из этого закона объяснение приливов. Связь между приливными изменениями уровня океана и движением Луны была замечена давно. Но единственная, в сущности, попытка объяснить эту связь, сделанная Декартом и его последователями, не имела никакого научного значения *). Только Ньютон, опираясь на открытые им законы динамики и закон всемирного тяготения, смог объяснить причину приливов: он дал первые основы теории, устанавливающей связь между распространением приливной волны по земной поверхности и движениями Луны и Солнца.

Теорию приливов Ньютон строит на ряде упрощающих предположений. Он принимает Землю за однородное жидкое тело, имеющее под действием притяжения Луны форму вытянутого эллипсоида вращения, полярная ось которого направлена к Луне. При нахождении фигуры этого эллипсоида он кладет в основу принцип статической теории приливов: в каждый момент времени для каждой частицы Земли должно существовать равновесие между приливообразующей силой и силой, с которой вся масса жидкости притягивает эту частицу.

Изучив таким путем в отдельности лунные и солнечные приливы и сложив их, Ньютон получил движение всей приливной волны по поверхности Земли. Полученные им результаты качественно согласовались с наблюдениями достаточно хорошо, но не могли служить основой для сколько-нибудь точных расчетов.

Через 100 лет после появления *Principia* Лаплас начал создание динамической теории приливов, основанной на уравнениях гидродинамики. Эта теория гораздо полнее представляет наблюдаемые явления, нежели статическая теория; ее лимитируют в этом отношении только трудности учета влияния конфигурации берегов и морского дна.

*) Декарт объяснял приливы давлением на океаны того вихря, который, согласно его взглядам, сопровождает движение Луны.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

§ 1. Создание гравитационной теории движения Луны

Следствия, выведенные Ньютоном из закона всемирного тяготения, достаточно убедительно показывали, что этот закон близок к истине. Но поскольку эти следствия имели приближенный, а в некоторых случаях лишь качественный характер, они не могли рассматриваться как строгое доказательство закона тяготения. Оставался открытым вопрос, является ли закон, сформулированный Ньютоном, точным законом или только приближенным, подлежащим дальнейшему улучшению.

Для решения этого вопроса было необходимо вывести следствия из закона тяготения не грубо приближенно, как это было сделано самим Ньютоном, а со всею точностью, соответствующей точности наблюдений. Эта проблема, ставшая в начале XVIII в. одной из центральных проблем всего естествознания, получила достаточно удовлетворительное решение только после двухсотлетней напряженной работы. В течение всего этого периода успехи в разрешении ее были неразрывно связаны с развитием математического анализа, прежде всего — теории дифференциальных уравнений, и в свою очередь стимулировали это развитие.

Геометрический метод, которым были получены результаты, содержащиеся в *Principia*, не мог служить для более глубокого изучения движений небесных тел. Приоритет в деле использования для этой цели только что оформившегося анализа бесконечно малых принадлежит Клеро, Даламберу (1717—1783) и Леонарду Эйлеру (1707—1783), которые почти одновременно (в 1743—1747 гг.) и независимо один от другого дали дифференциальные уравнения, определяющие движения трех небесных тел под действием их взаимного тяготения, и наметили пути для приближенного решения этих уравнений. Таким образом было положено начало длинному ряду работ, важнейшие из которых, представляющие не только исторический интерес, будут указаны

в следующих главах. Сейчас отметим лишь общий характер полученных результатов.

Рассмотрим прежде всего теорию движения Луны. Две причины делали создание возможно точной теории движения Луны весьма актуальной проблемой науки того времени.

Такая теория была нужна для решения практической задачи первостепенной важности — задачи нахождения долгот на море. Наиболее точным способом нахождения географической долготы какого-либо места был в то время «способ лунных расстояний», предложенный еще в 1514 г. Джоном Вернером. Он заключался в сравнении наблюденного в этом месте положения Луны, выведенного из измерений ее расстояний от нескольких ярких звезд и отнесенного к местному времени, с положениями Луны, соответствующими моментам времени основного меридиана. Такое сравнение давало возможность найти разность местного времени и времени основного меридиана в один и тот же физический момент, т. е. долготу места. Но чтобы применять этот способ на море, необходимо иметь вычисленную заранее достаточно точную эфемериду Луны.

Только открытие закона тяготения дало надежду построить теорию движения Луны, позволяющую предвычислять ее положения с нужной точностью. Отсюда те многочисленные премии за усовершенствование теории движения Луны, которые предлагались в первой половине XVIII в. адмиралтействами и академиями наук различных стран.

С другой стороны, теория движения Луны была наиболее чувствительным критерием для решения вопроса о том, является ли закон Ньютона точным законом природы, или только приближенным.

Применение аналитических методов к изучению движения Луны начинается мемуаром Клеро «Об орбите Луны в системе мира Ньютона» (1743), в котором из дифференциальных уравнений движения были выведены полученные Ньютоном результаты относительно вариации и движения узлов. Очередной и наиболее важной задачей Клеро правильно считал исследование новыми, мощными методами того неравенства, «которое получило у Ньютона наиболее темное развитее, а именно, движения лунного перигея». Однако, когда полученный им результат оказался таким же, как у Ньютона, т. е. для движения перигея получилась величина, почти вдвое меньшая наблюдаемой, Клеро решил, что закон тяготения должен быть изменен. Он предложил (1747) для напряжения силового поля, производимого точечной массой M , вместо выражения $\omega = \frac{fM}{r^2}$, соответствующего закону Ньютона, взять одно из выражений

$$\omega = fMr^{-2} + \alpha Mr^{-3}$$

или

$$\omega = \alpha Mr^{-2} + \beta Mr^{-4}.$$

Если коэффициент α или β взять достаточно малым, то для расстояний, имеющих место между планетами и Солнцем, взаимодействие между телами не будет отличаться от определяемого законом Ньютона; но для очень малых расстояний (расстояние Луны от Земли на два порядка меньше) вторые члены указанных выражений дадут дополнительное вращение линии апсид.

К аналогичным результатам одновременно с Клеро пришел несколько иным путем Даламбер. Но возникшие таким образом сомнения в точности закона Ньютона продолжались недолго. В 1749 г. Клеро показал, что причиной расхождений с наблюдениями является не ошибочность закона Ньютона, а недостаточность первого приближения. Когда ему удалось выполнить второе приближение, то для годичного движения лунного перигея он получил $34^{\circ}22'$, что было гораздо ближе к получаемой из наблюдений величине $40^{\circ}41'$, нежели результат первого приближения, равный $20^{\circ}12'$.

Устранение этой трудности не только рассеяло сомнения в точности закона Ньютона, но и открыло путь к построению полной гравитационной теории движения Луны, охватывающей все ее неравенства. Первые попытки решения этой задачи, предложенной Петербургской Академией на соискание премии, мы находим в трех сочинениях, появившихся почти одновременно.

В сочинении Клеро [1752] с гордым названием «Теория Луны, выведенная из одного только принципа притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний», премированного и изданного Петербургской Академией наук, дифференциальные уравнения движения Луны решаются с полным учетом первой степени возмущающей силы Солнца, а частично — с учетом второй степени. За независимое переменное Клеро берет долготу Луны в орбите, а за неизвестные величины время, обратную величину радиуса-вектора, долготу узла и наклон лунной орбиты. Исходным приближением служит вращающийся эллипс, определяемый уравнением

$$\rho/r = 1 + e \cos cv,$$

где постоянная c характеризует движение перигея.

Теория, почти одновременно развитая Даламбером [1754], была основана на тех же дифференциальных уравнениях. Но в то время как Клеро ограничился лишь численным решением для взятых из наблюдений значений параметров, Даламбер дал буквенное и притом несколько более полное решение. Эта работа была представлена Парижской Академии в январе 1751 г.

В 1753 г. Петербургской Академией было издано сочинение Эйлера с длинным названием: «Теория движения Луны, выявляющая все ее неравенства. В Прибавлении дается другая трактовка того же вопроса и показывается, каким образом движение Луны со всеми ее бесчисленными неравенствами этим другим путем может быть представлено и подчинено вычислениям» [Эйлер, 1753].

В основной части этого сочинения Эйлер исходит из уравнений движения Луны в цилиндрических координатах и развивает ту теорию, которая получила впоследствии название «первой лунной теории Эйлера». Метод, данный им в Прибавлении (*Additamentum*), является первоначальной формой метода вариации элементов.

Конечно, теория Эйлера, так же как и теория Клеро, не могла представить движение Луны с точностью, сравнимой с точностью наблюдений. Но она имела, тем не менее, большое практическое значение. Геттингенский астроном Майер (*Tobias Mayer*, 1723—1762), взяв из этой теории только форму лунных неравенств и найдя их коэффициенты из большого числа наблюдений, построил таблицы, которые воспроизводили движение Луны с невиданной еще точностью. Даваемое ими положение Луны не расходилось с наблюдениями больше чем на 1',5, а в большинстве случаев расхождения не превышали одной минуты. (Это соответствовало ошибке в полградуса при нахождении долготы места способом лунных расстояний.)

Таблицы Т. Майера долго (до 1823 г.) служили для вычисления эфемерид Луны, даваемых в астрономических ежегодниках. Они были изданы Британским адмиралтейством в 1755 г. и (в переработанном виде) в 1770 г. Будучи полумпирическими, эти таблицы нуждались в частых исправлениях при помощи дальнейших наблюдений. Такие исправленные таблицы были опубликованы в 1787 г. (*C. Mason*), 1806 г. (*J. T. Burg*) и 1812 г. (*J. K. Burckhardt*).

Через 20 лет Эйлер, не перестававший усердно работать над усовершенствованием теории движения Луны, опубликовал обширный трактат «Теория движения Луны, трактованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны для любого времени легко могут быть получены, созданная под руководством Леонарда Эйлера невероятным усердием и неутомимыми трудами трех академиком: И.-А. Эйлера, В. Л. Крафта, И.-А. Лексея» [Эйлер, 1772].

Можно отметить, что этот труд, вычисления для которого выполнялись под руководством Эйлера тремя академиками, является в истории теоретической астрономии первым примером большой коллективной работы.

Здесь Эйлером был развит совершенно новый метод, имевший огромное значение для дальнейшего развития как теорети-

ческой астрономии, так и теории нелинейных колебаний в механике и теории дифференциальных уравнений в математике.

Все значение идей, положенных в основу этой так называемой «второй лунной теории Эйлера», было понято лишь в конце XIX в. Одной из важнейших причин того, что она не привлекла внимание современников Эйлера и была вскоре забыта, была ее малая практическая значимость. Несмотря на большой прогресс, достигнутый Эйлером в вычислении теоретических значений коэффициентов неравенств, он все же не смог получить их с нужной для практики точностью. Поэтому его таблицы давали положение Луны с большими ошибками, чем значительно более простые полуэмпирические таблицы Майера.

Большое значение в истории науки имела лунная теория Лапласа, созданная им в 1772—1802 г. и изложенная в окончательной форме в третьем томе его «Небесной механики» [Лаплас, 1802]. В своей основе она явилась дальнейшим развитием теорий Клеро и Даламбера, выполненным с большим искусством и доведенным до значительно большей степени точности.

Весьма важным достижением Лапласа было объяснение векового ускорения среднего движения Луны. Это ускорение было открыто Галлеем еще в 1693 г. при попытке использовать для нахождения среднего движения Луны наблюдения затмений, сделанные в древности и в средние века. Оказалось, что среднее движение Луны с течением времени увеличивается. Несмотря на премии, предлагавшиеся различными академиями наук за выяснение причины этого явления, которое, казалось бы, никак не вытекало из закона тяготения, оно очень долго не поддавалось объяснению. Лаплас сначала безуспешно пытался объяснить вековое ускорение гипотезой конечной скорости распространения силы тяготения. Истинная причина была открыта им в 1787 г., когда он показал, что вековое ускорение движения Луны является необходимым следствием векового уменьшения эксцентриситета земной орбиты, производимого возмущениями планет. Теоретическая величина ускорения, найденная Лапласом ($11''$,1, затем $10''$,2), оказалась в полном согласии с тем, что давали наблюдения. Он показал также, что эта же самая причина производит ускорения в движении перигея и в движении узла лунной орбиты, что было подтверждено наблюдениями.

Дальнейшее развитие теория Лапласа получила в работах Дамуазо и Плана.

Теорию движения Луны, близкую по своим основным принципам к теории Лапласа, но отличающуюся от нее тем, что за независимую переменную с самого начала принимается время, построили Лаббок [1834] и Понтекулан [1846]. Особенно подробно эту теорию развил Понтекулан, тогда как Лаббок ограничился лишь начальными приближениями.

В теории Лапласа независимой переменной служит истинная долгота Луны; это несколько упрощает построение теории, но требует для получения координат в функции времени выполнения сложных и очень трудоемких преобразований рядов.

В *Additamentum* к своей первой теории движения Луны Эйлер сделал попытку, как было указано выше, развить эту теорию методом вариации элементов. Но он скоро убедился, что этот метод, столь выгодный для изучения движения планет, практически непригоден для построения теории движения Луны, так как требует невыполнимого количества приближений. Новая попытка в этом направлении была сделана Пуассоном (1781—1840). Предложенный им метод [Пуассон, 1835] заключается в учете вековых изменений долготы узла, долготы перигея и средней долготы эпохи начиная уже с первого приближения (см. § 15, гл. XVI). Однако и в такой форме метод не может служить для создания полной теории движения Луны. Но он может быть полезен для изучения некоторых классов возмущений; прежде всего — долгопериодических и вековых возмущений, производимых притяжением планет. Представляет также интерес особая форма, в которой метод Пуассона был представлен Пюизё [1864].

Итак, метод вариации элементов ни в своей первоначальной форме, ведущей начало от Эйлера, ни с теми сравнительно неглубокими изменениями, которые были внесены Пуассоном, не мог служить для эффективного нахождения огромных возмущений, производимых Солнцем в движении Луны. Чтобы сделать этот путь пригодным для изучения столь трудных случаев возмущенного движения, нужно было существенно новое и гораздо более глубокое развитие идей, лежащих в его основе.

Эта задача была разрешена замечательным методом интегрирования уравнений возмущенного движения, развитым Делоне (1816—1872). Применяв свой метод к теории движения Луны, Делоне впервые смог построить чисто алгебраическую (с буквенными параметрами) и притом весьма полную теорию солнечных неравенств в ее движении. Ценою двадцатилетней работы он получил общие выражения для всех неравенств до 7-го порядка включительно относительно возмущающих сил [Делоне, 1867].

Теория Делоне, усовершенствованная в работах Радо (R. Radu, 1835—1911) и Андуайе (H. Andoyer, 1862—1929), легла в основу весьма точных таблиц движения Луны, построенных под руководством Радо [1911]. Эфемериды Луны, вычисленные по этим таблицам, публиковались с 1915 по 1925 г. во французском астрономическом ежегоднике.

В истории создания гравитационной теории движения Луны и построения точных таблиц выдающееся место занимают ра-

боты Ганзена (1795—1874). Ганзен начал с опубликования [1838] краткого изложения новой разработанной им теории. Потом были изданы [1857] основанные на ней таблицы. Окончательная форма его теории, существенно улучшенной в процессе составления таблиц, была дана значительно позднее [Ганзен, 1862—1864].

Наиболее существенное отличие этой теории от других заключалось в особом способе получения возмущенной долготы Луны. Ганзен вычисляет ее по формулам невозмущенного движения, но при помощи возмущенной средней аномалии. Вычисление возмущений в средней аномалии оказалось значительно более коротким, нежели непосредственное вычисление возмущений в долготе.

Созданные Ганзеном таблицы были первыми, претендовавшими на представление координат Луны гравитационной теорией с точностью, вполне сравнимой с точностью наблюдений. Действительно, наблюдения с 1750 по 1850 г. представлялись этими таблицами с ошибками, не превосходящими ошибок наблюдений. Казалось, что задача создания гравитационной теории движения Луны наконец полностью решена. Эфемериды Луны во всех астрономических ежегодниках стали вычисляться по таблицам Ганзена.

Но если с 1850 по 1860 г. наблюдения представлялись с ошибками, не превосходящими $2''$, то в 1870 г. ошибки таблиц Ганзена достигли уже $5''$, в 1880 г. они были порядка $10''$, а в 1889 г. дошли до $18''$.

В результате обширных работ, выполненных в Бюро Американского астрономического ежегодника С. Ньюкомом (S. Newcomb, 1835—1909), выяснилось (1878), что таблицы Ганзена не дают удовлетворительного представления и наблюдений, сделанных до 1750 г. Его исследования дали следующие поправки к долготе Луны, вычисленной по таблицам Ганзена:

—687 г. . .	—11' ± 4'	1625 г. . . .	+50" ± 13"	1775 г. . .	0" ± 1
—381 » . .	—27 ± 5	1650 » . . .	+39 ± 5	1800 » . .	0 ± 1"
—189 » . .	—20 ± 3	1675 » . . .	+32 ± 1	1825 » . .	0 ± 1
—134 » . .	—16 ± 4	1700 » . . .	+21 ± 1	1850 » . .	0 ± 1
		1725 » . . .	+7 ± 1	1875 » . .	—8 ± 1
		1750 » . . .	0 ± 1		

Для выяснения причин этих расхождений прежде всего нужно было проверить найденные Ганзеном солнечные неравенства. Такая проверка была произведена путем сравнения его теории с теорией Делоне, построенной на совершенно иных принципах. Это сравнение, произведенное двумя различными способами Ньюкомом (1880) и Коуэллом (1904), показало, что в солнечных

неравенствах у Ганзена нет неточностей, которые могли бы объяснить расхождения его таблиц с наблюдениями.

Но в отношении возмущений Луны, зависящих от прямого или косвенного действия планет, Ньюком установил, помимо мелких неточностей, два существенных отклонения теории Ганзена от чисто гравитационной теории. Во-первых, Ганзен принял в своих таблицах вековое ускорение Луны равным $12'',18$, между тем чисто гравитационное значение этой величины равно $6'',11$, как это было уже установлено двумя совершенно различными методами Адамсом (1853) и Делоне (1862). Во-вторых, в таблицах Ганзена среди долгопериодических членов, выражающих планетные возмущения, имелся член с амплитудой $21'',47$ и с периодом в 239 лет; однако при проверке оказалось, что амплитуда этого члена в действительности равна только $0'',27$.

Внесение этих исправлений полностью разрушило то замечательное согласие с наблюдениями, которое создало такой авторитет теории Ганзена, и вскрыло ряд весьма важных особенностей движения Луны. Прежде всего, было окончательно доказано, что выводимая из наблюдений величина векового ускорения Луны, равная по новейшим данным $11'',23 \pm 0'',30$, существенно отличается от теоретической величины $6'',01 \pm 0'',02$, не вызывающей в настоящее время никаких сомнений. Причина этого расхождения заключается, как теперь установлено, в замедлении вращения Земли, вызываемом приливным трением. Такое объяснение, на возможность которого указывал еще Лаплас, было поставлено вне сомнения подсчетом трения приливных волн в мелких морях, выполненным за последние десятилетия. Конечно, подобные подсчеты не могут быть сделаны с большой точностью. Поэтому в теории движения Луны приходится пользоваться значением векового ускорения, выведенным непосредственно из наблюдений, а не из гравитационной теории.

Не менее важные последствия имело практически полное удаление долгопериодического члена с амплитудой в $21'',47$, ошибочно включенного Ганзенем в теорию движения Луны. Ньюком показал, что без этого члена представление наблюдений становится совершенно неудовлетворительным: погрешности вычисленных долгот для интервала времени с 1625 по 1875 г. меняются в пределах от $-28''$ до $+33''$. Чтобы дать возможность предвычислять положение Луны с достаточной точностью, Ньюкому пришлось исправленную теорию Ганзена дополнить эмпирическим членом, близким по своей форме и величине к удаленному ошибочному члену. С таким дополнением таблицы Ганзена употреблялись для вычисления астрономических ежегодников до 1923 г., когда они были заменены таблицами Брауна (E. W. Brown, 1866—1938). Аналогичные эмпирические поправки были введены и в таблицы Радо.

Таким образом, к началу XX в. проблема построения гравитационной теории движения Луны была решена двумя разными путями — теорией Ганзена и теорией Делоне, с очень высокой точностью, причем выявилась необходимость дополнения этих теорий некоторыми эмпирическими членами. Третье решение этой проблемы, представляющее, по существу, развитие второй лунной теории Эйлера, было дано в работах Хилла (G. W. Hill, 1838—1914) и Брауна, которые будут рассмотрены в гл. XXI *). Созданная Брауном в 1895—1908 гг. теория была им использована для построения таблиц движения Луны, законченных в 1919 г. **) [E. W. Brown, 1896; 1897, ...; 1915; 1936]. Таблицы Брауна основаны на гравитационной теории, точность которой заведомо превышает точность имеющегося в настоящее время наблюдательного материала. Изобретение электронных вычислительных машин позволило еще раз убедиться (в 1942—1944 гг.) в правильности полученных для координат Луны выражений путем прямой подстановки этих выражений (содержащих несколько тысяч членов сложной структуры) в исходные дифференциальные уравнения.

Но этим была решена только математическая часть задачи. Когда Браун приступил к нахождению постоянных интегрирования из всей совокупности наблюдений, то он скоро убедился, что движение Луны не может быть представлено созданной им чисто гравитационной теорией. Чтобы таблицы представляли наблюдения, в них пришлось включить еще так называемый «большой эмпирический член», очень близкий к эмпирической поправке, предложенной Ньюкомом для теории Ганзена.

Большой эмпирический член, введенный Брауном как дополнение к долготе Луны, вычисленной на основании закона тяготения, выражается формулой

$$+ 10'',71 \sin(140^\circ,0 T + 240^\circ,7),$$

где через T обозначено время, считаемое от 0 янв. 1900 г. и выраженное в юлианских столетиях. Таким образом, наблюдаемая невязка в долготе была с удовлетворительной для многих целей точностью представлена одним синусоидальным членом с периодом в 257 лет. Однако в тех случаях, когда положение Луны нужно было предвычислить с большой точностью,

*) Приспособление метода Хилла — Брауна к вычислениям при помощи быстродействующих электронных вычислительных машин дано в работе В. А. Шора [1960].

**) К этому же времени относятся исследования М. А. Вильева по теории движения Луны [1919].

например, для предвычисления солнечных затмений, координаты Луны, найденные по таблицам Брауна (с учетом только что указанного эмпирического члена), еще подправляют, экстраполируя вперед поправки, полученные из наблюдений Луны за последние годы.

Все эти отклонения долготы Луны от чисто гравитационной теории нашли свое объяснение одновременно с объяснением причин аналогичных невязок в долготах Меркурия, Венеры и Земли, открытых в первой четверти XX в. Тщательный анализ всех этих невязок, выполненный в работах Ньюкома, Брауна, де Ситтера (*W. de Sitter, 1872—1934*) и Спенсера Джонса (*H. Spencer Jones*) завершился открытием весьма простой зависимости между ними. Если через B обозначить разность между наблюдаемой долготой Луны и ее значением, даваемым гравитационной теорией (эта разность получила название *ф л у к т у а ц и и*), то аналогичная разность для Меркурия оказывается равной $0,310 B$, т. е. величине B , уменьшенной во столько раз, во сколько среднее суточное движение Меркурия ($4^{\circ},09$) меньше среднего суточного движения Луны ($13^{\circ},18$). Эта закономерность оказывается справедливой и для Венеры и для Земли, невязки в долготах которых хорошо представляются выражениями $0,112 B$ и $0,0747 B$. Что касается долготы Марса, то в ней соответствующая невязка едва ощутима и еще недостаточно хорошо изучена. В долготах остальных планет соответствующие величины находятся за пределами точности наблюдений.

Из всех этих результатов с полной очевидностью вытекало, что невязки в долготы Луны, так долго заставлявшие придавать к гравитационной теории эмпирические поправки, так же как и аналогичные невязки в движениях планет, представляют собою не реальные особенности их движений, а являются лишь отражением в их движениях неравномерности вращения Земли, использовавшегося астрономами для измерения времени. Таким образом, в результате ряда работ, начатых мемуаром Ньюкома 1876 г. и завершенных в 1939 г. мемуаром Спенсера Джонса, было сделано открытие капитальной важности. Было установлено, что вращение Земли, служившее всегда для измерения времени, происходит неравномерно. С другой стороны, было доказано, что движение Луны согласуется, в пределах точности наших наблюдений, с гравитационной теорией.

Результатом этого открытия было введение в качестве основного аргумента астрономических ежегодников эфемеридного времени, т. е. того равномерно текущего времени, которое является независимой переменной в дифференциальных уравнениях, на которых основываются гравитационные теории движения светил.

Переход от всемирного времени, т. е. времени, измеряемого вращением Земли, к эфемеридному времени, осуществляется при помощи сравнения наблюдаемых положений Луны с ее положениями, даваемыми чисто гравитационной теорией *).

§ 2. Гравитационная теория движения планет.

Внешние планеты

Рассмотрим теперь историю создания гравитационной теории движения планет.

Она начинается тремя мемуарами Эйлера, премированными Парижской Академией наук в 1748, 1752 и 1756 гг. **).

В двух первых из этих мемуаров Эйлер делает попытку объяснить отклонения в движениях Юпитера и Сатурна от законов Кеплера. Это была весьма актуальная в то время проблема, тесно связанная с решением вопроса, сохраняет ли закон тяготения свою форму и для очень больших расстояний. Вот почему эта проблема три раза подряд — в 1748, 1750 и 1752 гг. — предлагалась на соискание премии. Работы Эйлера, премированные в 1748 и 1752 гг. (в 1750 г. конкурс не состоялся), хотя и не решали поставленную задачу, содержали весьма важные результаты. В них был сделан первый, но уже значительный шаг в деле приближенного решения дифференциальных уравнений, представляющих возмущенное движение планет. В частности, здесь были заложены основы методов разложения возмущающих сил в тригонометрические ряды, явившиеся ключом всего дальнейшего прогресса в этой области. Из полученных Эйлером результатов следует отметить открытие вековых возмущений эксцентриситетов, наклонов, долгот перигелиев и долгот узлов.

Задача, решавшаяся Эйлером в мемуаре, премированном в 1756 г., заключалась в усовершенствовании теории движения Земли. Здесь впервые была построена гравитационная теория движения планеты с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Созданные Эйлером методы были развиты и существенно усовершенствованы Лагранжем (J. L. Lagrange, 1736—1813) и Лапласом. Открытие Лапласом долгопериодических возмущений, возникающих в тех случаях, когда при интегрировании тригонометрических членов появляются малые делители, позволило,

*) Эфемерида Луны, вычисленная по разложениям теории Брауна с учетом рекомендаций VIII Генеральной Ассамблеи Международного Астрономического Союза (Рим, 1952), в результате которых был исключен так называемый Большой эмпирический член и уточнена поправка за аберрацию, носит название «Улучшенной эфемериды Луны» [Лунные эфемериды 1952—1959].

**) Они были опубликованы в издававшемся Парижской Академией наук сборнике: *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences*. Paris, t. VI (1750), t. VII (1769), t. VIII (1771).

наконец, объяснить (в 1787 г.) неправильности в движениях Юпитера и Сатурна. Это было новым большим триумфом закона Ньютона.

Рассеяв, таким образом, последние сомнения в полной строгости закона Ньютона, Лаплас приступил к построению вытекающей из этого закона теории движения всех планет, основанной на единой системе констант. Решение этой основной для всей астрономии задачи, данное Лапласом в третьем томе «Небесной механики» (1802), послужило основой для многочисленных таблиц движения планет. Некоторые из этих таблиц употреблялись для вычисления астрономических ежегодников до второй половины XIX в. *). Сравнение этих таблиц с наблюдениями показало, что теории Лапласа давали удовлетворительное представление движения всех планет, кроме Урана.

Предпринятая в 1820 г. Буваром попытка представить движение Урана при помощи найденных Лапласом возмущений сразу натолкнулась на неожиданные трудности. Оказалось, что всякая система элементов, удовлетворительно представляющая наблюдения Урана, сделанные после его открытия в 1781 г., неизбежно приводит к недопустимым невязкам при представлении тех 20 наблюдений, которые были получены в 1690—1769 гг. наблюдателями, принимавшими Уран за звезду.

Это привело Буvara к решению отбросить полностью старые наблюдения, «предоставив будущему выяснить, зависит ли трудность согласования от неточности старых наблюдений, или от наличия какого-то внешнего, неизвестного нам влияния на планету».

Однако очень скоро обнаружилось, что таблицы Буvara, основанные на наблюдениях 1781—1820 гг., не могут удовлетворительно представить не только более ранние наблюдения, но и более поздние. К 1840 г. ошибка в табличной долготе дошла до $1',5$. Выяснившаяся таким образом невозможность представить движение Урана одними и теми же элементами для сколь угодно значительного промежутка времени была единодушно приписана действию более далекой, еще неизвестной планеты. Задача нахождения орбиты этой планеты по производимым ею возмущениям в движении Урана была не только совершенно новой, но и по существу дела достаточно трудной. Основная трудность заключалась в том, что наблюдения до 1781 г. были заведомо мало точны и их ошибки искажали те значения возмущений, которые являлись исходными данными задачи. С другой стороны, отбросить эти наблюдения было нельзя, так как прой-

*) Из этих таблиц могут быть отмечены таблицы, составленные Деламбром (J. Delambre, 1749—1822) для Солнца, Буваром (A. Bouvard, 1767—1843) — для Юпитера, Сатурна и Урана, Линденау (B. Lindenau, 1780—1854) — для Марса.

денная Ураном за 60 лет часть орбиты была слишком мала для успешного решения задачи.

Первое решение задачи дал Адамс (J. C. Adams, 1819—1892), взявшийся за нее в 1843 г. и сообщивший 21 октября 1845 г. директору Гринвичской обсерватории Эри (G. B. Airy, 1801—1892) элементы орбиты и положение на небе неизвестной планеты. Эри отнесся с недоверием к полученным результатам и не спешил начинать поиски.

Летом 1845 г. за ту же задачу взялся Леверрье (U. J. J. Le-verrier, 1811—1877). В трех статьях, доложенных Парижской Академии наук в ноябре 1845 г., в июне и августе 1846 г. и немедленно опубликованных, он пришел к выводам, очень близким к выводам Адамса. Чтение второй из этих статей настолько поколебало недоверие Эри, что он посоветовал директору Кембриджской обсерватории (обладавшей подходящим инструментом) приступить к поискам планеты в указанном Адамсом месте, как к делу более важному, чем все текущие работы. Такие поиски были начаты 29 июля и заключались, согласно разработанному Эри плану, в измерении координат всех звезд до 10—11 величины на площади около 300 квадратных градусов: это дало бы возможность узнать планету по ее смещению.

Но планета была открыта раньше, чем эти поиски были доведены до конца. Закончив свою третью статью, в которой было дано уточненное положение искомой планеты, Леверрье обратился к директорам ряда обсерваторий с просьбой организовать ее поиски. Аналогичную просьбу он включил несколько позднее в письмо, написанное совсем по другому поводу Галле (J. G. Gal-le, 1812—1910) — ассистенту Берлинской обсерватории, отметив, что планета должна иметь видимый диаметр, превосходящий 3", т. е. вполне заметный.

Получив это письмо, Галле решил сделать попытку, хотя директор обсерватории Энке (J. F. Encke, 1791—1865) и не советовал ему попусту терять время. В распоряжении Галле была только что изданная Берлинской Академией наук подробная карта соответствующей части неба, что существенно облегчало поиски.

В первый же вечер, 23 сентября 1846 г., он легко нашел новую планету, узнав ее по заметному диску. Просмотр поисковых наблюдений, сделанных в Кембридже, показал, что планета, названная вскоре Нептуном, наблюдалась там еще 4 и 12 августа; но эти наблюдения не были своевременно сопоставлены, а диск планеты не привлек внимания *).

*) Планета была найдена на расстоянии 52' от места, указанного Леверрье и 2°27' от места, вычисленного Адамсом. Однако такая точность была

Открытие Нептуна устранило причину наибольших невязок между гравитационной теорией движения планет и наблюдениями. Но к середине XIX в. выявилась недостаточная точность большинства планетных таблиц, дававших хотя и небольшие, но систематические расхождения с наблюдениями. Огромная работа по созданию новой более точной гравитационной теории движения планет была предпринята Леверрье *).

Полностью отказавшись от метода вычисления возмущений непосредственно в полярных координатах, который был применен Лапласом, Леверрье положил в основу метод вариации элементов, дающий возмущения элементов планетных орбит в функции времени. Другой особенностью его работы было систематическое использование наблюдательного материала для нахождения поправок не только элементов орбит планет, но и их масс.

Построенные Леверрье теории движения Меркурия, Венеры, Земли и Марса настолько хорошо согласуются с наблюдениями, что до сих пор служат для вычисления эфемерид этих планет, даваемых в *Connaissance des Temps*. Для достижения этого согласия ему пришлось, однако, теоретические значения вековых движений перигелиев Меркурия и Марса увеличить соответственно на $38''$ и $25''$, т. е. сделать эмпирические поправки в чисто гравитационных теориях движения этих планет. Аномалию в движении Меркурия Леверрье пытался объяснить притяжением интра-меркуриальной планеты. Но эта попытка оказалась неудачной: давно уже нет сомнения, что планета требуемых размеров не существует.

Значительно большие трудности представило изучение движений Юпитера и Сатурна как вследствие больших масс этих планет, так и по причине долгопериодических возмущений, вызываемых тем, что отношение периодов этих планет очень мало отличается от простой дроби $5/2$. В то время как для четырех внутренних планет почти всегда достаточен учет лишь возмущений первого порядка относительно масс, здесь пришлось вычислять много возмущений 2-го, 3-го и даже 4-го порядка. Несмотря на все усилия, Леверрье так и не удалось добиться удовлетворительного представления наблюдений Сатурна (расхождения в гелиоцентрической долготе доходили до $5''$ и даже до $9''$ — для

до известной степени случайна. Леверрье, публикуя свои результаты, считал, что он дает положение планеты с ошибкой, не превосходящей 18° .

Подробное изложение методов, употребленных Адамсом и Леверрье, дают Тиссеран [1889] и Смарт [1953]. История открытия Нептуна весьма обстоятельно изложена в специальной работе Смарта [1947].

*) Созданные им теории движения планет и основанные на них таблицы были опубликованы в первых 14 томах (с 1855 по 1877 г.) *Annales de l'Observatoire de Paris (Mémoires)*.

наблюдений XVIII в.), а для Юпитера он получил удовлетворительное представление наблюдений за 1750—1863 гг. только ценой совершенно недопустимого уменьшения массы Сатурна.

Гайо (A. Gaillot), долголетний сотрудник Леверрье и продолжатель его работ, добился впоследствии гораздо более удовлетворительных результатов. Построенные им теми же методами теории движения Юпитера и Сатурна [Гайо, 1904 и 1913] дали довольно хорошее представление наблюдений за 1750—1890 гг. Невязки имеют, правда, систематический характер, но они невелики.

Другая теория движения Юпитера и Сатурна, основанная на методе Ганзена, была создана Хиллом [1890]. Его таблицы [1898] употреблялись для вычисления эфемерид этих планет в астрономических ежегодниках (кроме *Connaissance des Temps*, где применялись таблицы Гайо) до 1959 г. включительно *).

Вскоре после открытия Урана Леверрье приступил к построению теории его движения. Только через много лет эти работы были завершены Гайо [1910]. Гораздо раньше была опубликована теория движения Урана, созданная Ньюкомом [1873] при помощи видоизмененного им метода Лапласа, дающего возмущения полярных координат планеты без предварительного нахождения возмущений элементов. Таблицы, составленные Ньюкомом [1898] при помощи этой теории, вошли во всеобщее употребление, и все астрономические ежегодники (за исключением *Connaissance des Temps*) до 1959 г. включительно продолжали пользоваться таблицами Ньюкома, хотя эти таблицы базировались на меньшем наблюдательном материале, нежели таблицы Гайо.

После открытия Нептуна начались различного рода попытки найти еще более далекую, занептунную планету. Здесь можно отметить прежде всего попытки обосновать существование такой планеты, и даже указать ее положение, при помощи изучения расположения афелиев долгопериодических комет. Наиболее разработанная из таких попыток (Forbes, 1887) дала для среднего расстояния планеты 104,4 (тогда как для Плутона оно равно 39,5), а положение планеты отличалось от положения Плутона примерно на 80° .

К гораздо более надежным результатам могло привести изучение невязок между табличными и наблюдаемыми положениями Урана и Нептуна, начатое Гайо. Полагая, что наблюдения Нептуна, хотя и обнаружившие уже систематические невязки,

*) Сравнение положений Юпитера и Сатурна, даваемых таблицами Гайо и таблицами Хилла, показало, что для 1750—1950 гг. разности долгот и широт лишь в очень редких случаях превосходят $1''$, но никогда не достигают $2''$.

еще не могут дать хороших результатов, поскольку они охватывают лишь часть орбиты Нептуна, он сосредоточил свои усилия на изучении движения Урана, для которого наблюдения покрывали более двух периодов. Но и здесь задача была весьма трудной, поскольку возмущения Урана неизвестной планетой были несомненно раз в двадцать меньше тех, которыми оперировали Адамс и Леверрье, и едва превосходили ошибки наблюдений. Несмотря на это, Гайо удалось получить, усовершенствовав метод Леверрье, достаточно определенное решение задачи (1909). Решение получилось двойное: в зависимости от того, находилась ли неизвестная планета в эпоху наибольших невязок в соединении или в противостоянии с Ураном, для нее получались два положения на небе, отличающиеся приблизительно на 180° . Одно из найденных Гайо положений отличалось, как выяснилось впоследствии, от положения Плутона на 20° .

В 1915 г. Персиваль Лоуэлл (Percival Lowell, 1855—1916) опубликовал результаты своих многолетних работ. Его метод, являющийся дальнейшим развитием метода Леверрье, позволил вывести два решения, представляющие невязки в наблюдениях Урана лучше, чем решения Гайо. А учтя невязки в движении Нептуна, Лоуэлл смог сделать окончательный выбор между двумя решениями. Весьма важной заслугой Лоуэлла было обеспечение систематических поисков занептунной планеты. Созданная им в 1915 г. Флагстаффская обсерватория имела одной из своих главных задач такие поиски.

В течение долгого времени эти поиски велись при помощи недостаточно мощных инструментов. Но после установки (1929) Лоуренсом Лоуэллом нового большого телескопа, они очень скоро привели к цели. Планета была найдена [Томбо, 1960] при сравнении пластинок, полученных 23 и 29 января 1930 г. Она оказалась 15-й величины. Новая планета вскоре была названа Плутоном.

Открытие было подтверждено пластинкой, снятой 21 января 1930 г., вследствие чего эту дату считают иногда днем открытия планеты. Опубликовано открытие было 13 марта 1930 г. — в день, который является годовщиной открытия Урана и днем рождения Персиваля Лоуэлла.

Плутон оказался на расстоянии около 6° от места, соответствующего предсказанной Лоуэллом планете. Элементы Плутона — $a=39,6$, $e=0,246$, $\pi(1850,0)=221^\circ,3$ и $\epsilon(1850,0)=19^\circ,4$ оказались даже ближе к предсказанным Лоуэллом значениям $a=43,0$, $e=0,202$, $\pi=203^\circ,8$ и $\epsilon=22^\circ,1$, чем это имело место для Нептуна и предсказанной Леверрье планеты.

Задача о нахождении занептунной планеты из невязок, обнаружившихся в движении Нептуна, изучалась Годдом (D. P. Todd) в 1877—1880 гг. Но с гораздо большим успехом это было сде-

лано Вильямом Пикерингом (W. H. Pickering, 1858—1938), который существенно улучшил графический метод, употребленный Тоддом, и применил его также и к невязкам Урана. В 1909, 1919 и 1928 гг. Пикеринг опубликовал три орбиты искомой планеты. Как выяснилось впоследствии, эти орбиты давали для эпохи 1930,0 долготу планеты, отличающуюся соответственно на $26^{\circ},6$, на $5^{\circ},9$ и на $26^{\circ},5$ от долготы Плутона. В декабре 1919 г. и январе 1920 г. по просьбе Пикеринга Маунт-Вилсоновской обсерваторией была получена серия поисковых пластинок, но планета найдена не была, хотя ее изображения на этих пластинках имелись. Она не была найдена потому, что на пластинках просматривалась лишь узкая зона в пределах 2° от эклиптики. Между тем Плутон находился в это время на расстоянии 4° от эклиптики *).

Открытие Плутона позволило по-новому подойти к задаче о построении гравитационной теории движения внешних планет. Не подлежит сомнению, что планеты, находящиеся за пределами орбиты Плутона, если таковые существуют, не могут оказать ощутимого влияния на движение пяти внешних планет, по крайней мере в течение тех немногих столетий, которые охватываются нашими наблюдениями. С другой стороны, влияние четырех внутренних планет на движение внешних планет весьма мало и поэтому легко поддается совершенно точному учету. Таким образом, представление наблюдений гравитационной теорией пяти внешних планет можно с полным основанием рассматривать как проверку закона Ньютона. Но, конечно, гравитационная теория должна быть для этого совершенно строгой, т. е. давать точное, в пределах принятого числа знаков, решение дифференциальных уравнений движения.

Получение такого решения стало возможным благодаря огромному прогрессу вычислительной техники, которым ознаменовалась первая половина XX в. Электронные вычислительные машины позволили Эккерт, Брауэру и Клеменсу дать совершенно точную гравитационную теорию движения пяти внешних планет для отрезка времени, охватывающего все достаточно точные наблюдения [1951].

Ими было произведено численное интегрирование системы дифференциальных уравнений, определяющих движение Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона под действием притяжения Солнца и их взаимных притяжений, т. е. системы 30-го порядка. Это интегрирование было выполнено с 14 знаками на интервале времени от 1653 по 2060 год. Значения постоянных интегрирования были исправлены при помощи 25 000 наблюдений, полученных с 1780 по 1940 год.

* Подробный анализ методов, употребленных Лоуэллом и Пикерингом, а также полученных ими результатов, содержит мемуар Курганова [1940].

В результате этой грандиозной работы было установлено, что закон Ньютона представляет движение пяти внешних планет совершенно точно; иначе говоря, отклонения нигде не выходят за пределы ошибок наблюдений. Этим было доказано, что все невязки с наблюдениями прежних таблиц движения этих планет были лишь следствием неполноты аналитических теорий, положенных в основу этих таблиц.

Начиная с 1960 г. эфемериды внешних планет даются астрономическими ежегодниками на основании этих вычислений

§ 3. Движение внутренних планет

Гравитационные теории движения четырех внутренних планет, исчерпывающим образом использующие наблюдательный материал, впервые были даны Леверрье в 1858—1861 гг.

Опираясь на меридианные наблюдения Солнца, полученные в 1750—1850 гг. в Гринвиче, Париже и Кенигсберге, Леверрье построил прежде всего теорию движения Земли, являющуюся основой изучения движения всех других планет. В частности, исследование движения Земли позволило фиксировать с большой точностью массу Венеры, существенно важную для вычисления возмущений Меркурия. Теория Меркурия представила, как уже было отмечено, наибольшие затруднения: для векового движения перигелия этой планеты наблюдения давали значение, несомненно, отличающееся от теоретического.

Леверрье нашел, что прогрессивное увеличение долготы перигелия Меркурия за юлианское столетие, вызываемое притяжением других планет, выражается следующими числами:

от действия	Венеры . . .	+280",64
»	» Земли . . .	+ 83 ,61
»	» Марса . . .	+ 2 ,55
»	» Юпитера . . .	+152 ,59
»	» Сатурна . . .	+ 7 ,24
»	» Урана . . .	+ 0 ,14
»	» Нептуна . . .	+ 0 ,06

В совокупности это дает увеличение долготы перигелия на 526",83 в столетие. Между тем дискуссия наблюдений (особо важное значение здесь имели наблюдения прохождений Меркурия по диску Солнца) показала, что прогрессивное перемещение перигелия Меркурия в действительности равно 565",1 в столетие, т. е. на 38",3 больше только что указанного теоретического значения.

Приведенная табличка показывает полную невозможность объяснить эту невязку неточностью принятых масс планет. Содержащиеся в ней числа пропорциональны массам соответствующих планет; чтобы эти числа довести до нужной вели-

чины, пришлось бы массы планет увеличить совершенно недопустимым образом.

Нужно отметить, что из наблюдений непосредственно получается не вековое изменение долготы перигелия $D_{i\pi}$, а произведение этой величины на эксцентриситет планеты. Так как для Меркурия $e=0,20561$, то найденная Леверрье невязка, по существу, равна $7'',88$. Она смещает положение Меркурия в его орбите всего лишь на $0'',08$ в год.

Аналогичное затруднение Леверрье встретил в теории движения Марса: к теоретической величине векового возмущения перигелия Марса ему пришлось придать эмпирическую поправку, равную $25'',15$. Но здесь это произошло потому, что он не решился ввести в массу Земли соответствующую поправку, хотя такая поправка ясно вытекала из всей совокупности наблюдений не только Марса, но и Венеры. Леверрье был слишком убежден в исключительной точности значения массы Земли (вместе с Луной), равного $1/354936$, вытекавшего из значения параллакса Солнца $8'',5776 \pm 0'',0370$, которое Энке получил (1824) из обработки наблюдений прохождений Венеры 1761 и 1769 г. Четыре десятичных знака, данные Энке, до такой степени импонировали, что лишь через 40—50 лет для параллакса Солнца стали употребляться значения, более близкие к величине $8'',80$, принятой в настоящее время. Если взять массу Земли (вместе с Луной), соответствующую этому значению, т. е. $1/328272$, то эмпирическая поправка векового движения перигелия Марса, найденная Леверрье, становится равной $7''$. Поскольку для Марса $e=0,09333$, то невязка в величине $eD_{i\pi}$, непосредственно выводимой из наблюдений, составляет всего $+0'',65$ в столетие.

Конец XIX в. ознаменовался еще более грандиозными работами по созданию гравитационной теории движения четырех внутренних планет. Эти работы были выполнены С. Ньюкомом силами руководимого им Бюро Американского астрономического ежегодника (American Ephemeris) при Вашингтонской обсерватории*).

Помимо наблюдательного материала, уже использованного Леверрье, Ньюком имел в своем распоряжении четыре новых прохождения Меркурия и два прохождения Венеры в 1874 и 1882 годах, не говоря уже о большом количестве новых высокоточных меридианных наблюдений. Для интервала времени с 1750 по 1892 г. он имел свыше 40 000 наблюдений Солнца, 5000 наблюдений Меркурия, около 12 000 — Венеры и 4000 — Марса.

*) Созданные Ньюкомом теории движения Меркурия, Венеры, Земли и Марса, основанные на этих теориях таблицы, а также все подготовительные мемуары помещены в томах I—VII (1882—1898) основанного им издания: *Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*.

Таблицы планет, созданные Леверрье, не были основаны на единой системе масс, так как по мере продвижения работы он придавал массам поправки, полученные при помощи уже законченных таблиц. Ньюком поставил себе целью устранить этот недостаток. С другой стороны, в отличие от Леверрье, опиравшегося при нахождении масс исключительно на вековые возмущения планет, Ньюком широко использовал здесь и другие возможности: некоторые периодические возмущения, изучение движений спутников, малых планет и даже комет.

В небольшом сочинении [Ньюком, 1895b], посвященном подведению итогов всех этих работ, окончательное сопоставление теорий движения внутренних планет с наблюдениями было выполнено следующим образом. Из условных уравнений, основанных на невязках между наблюдаемыми и вычисленными положениями планеты, он получает поправки не только элементов, но и вековых возмущений:

$$D_i e; e D_i \pi; D_i i; \sin i D_i \Omega. \quad (3.1)$$

Найденные таким образом эмпирические значения этих четырех величин он сравнивает с их теоретическими значениями, даваемыми уравнениями Лагранжа (§ 13, гл. XVI). Это дает возможность судить, насколько точно движение планеты представляется законом Ньютона.

Оказалось, что разность между эмпирическими и теоретическими значениями величин (3.1) практически равна нулю во всех случаях, за исключением лишь трех следующих: она равна $+8''.68 \pm 0''.43$ для $e D_i \pi$ у Меркурия; $+0''.60 \pm 0''.17$ для $\sin i D_i \Omega$ у Венеры и $+0''.75 \pm 0''.35$ для $e D_i \pi$ у Марса.

Принимая во внимание указанные здесь вероятные ошибки (по приблизительной и скорее заниженной оценке Ньюкома), можно с полной несомненностью утверждать наличие невязки только в вековом движении перигелия Меркурия. Это вековое движение получается равным *) $+42''.2 \pm 2''.2$, что очень близко к величине $38''.3$, найденной Леверрье. Невязка в движении перигелия Марса, равная $+8''.04$, находится также в хорошем согласии с тем, что получилось бы у Леверрье при употреблении более точных значений масс.

Попытки объяснить невязки в движениях перигелиев Меркурия и Марса (а также узла Венеры) притяжением каких-то новых масс или перераспределением уже известных нам космических масс были неудачны. С полной несомненностью было установлено, что разработанная еще Леверрье гипотеза интра-меркуриальной планеты должна быть оставлена — отсутствие такой

*) В указанные нами для Меркурия величины включены некоторые поправки, вытекающие из вычислений Ньюкома, но им не сделанные. Ньюком дает $8''.48$ и $41''.2$.

планеты было окончательно доказано фотографическими наблюдениями, делавшимися во время полных солнечных затмений.

Была сделана попытка заменить одну планету кольцом настолько мелких планетоидов, чтобы их нельзя было видеть в отдельности. Общая масса такого кольца может быть подобрана так, что она будет производить нужное перемещение перигелия Меркурия, не оказывая такого влияния на перигелии других планет, которое могло бы быть обнаружено современными наблюдениями. Но для того, чтобы это кольцо не производило не наблюдаемого нами перемещения узла Меркурия, оно должно находиться в плоскости его орбиты. А в этом случае оно необходимо произведет такое движение узла Венеры, которое противоречит наблюдениям. Таким образом, эту гипотезу также пришлось оставить. Не была удачной и попытка Ньюкома поместить гипотетическое кольцо планетоидов между орбитами Меркурия и Венеры. Можно упомянуть еще гипотезу не вполне сферического распределения солнечных масс.

Наиболее обещающей в течение некоторого времени оказалась гипотеза, детально разработанная Зеелигером (H. v. See-linger) в 1906 г. Он показал, что межпланетной материи, производящей явление зодиакального света, можно приписать такое распределение масс, которое полностью воспроизводит все установленные Ньюкомом невязки, не нарушая согласия между гравитационной теорией и наблюдениями в других вековых эффектах, если только еще придать эклиптической системе координат надлежащее вращение по отношению к инерциальной системе. Однако успех этой гипотезы был обусловлен прежде всего большим числом произвольных параметров, которые она вводила и которые подбирались так, чтобы получить наилучшее согласие с наблюдениями. Но когда важнейший из этих параметров — плотность вещества зодиакального света — был найден совсем другим путем, а именно из фотометрических измерений, то для него получилась величина в 10^8 раз меньшая той, которая нужна для объяснения аномалии в движении перигелия Меркурия. Таким образом, все попытки объяснить рассматриваемые аномалии, не меняя закона Ньютона, оказались безрезультатными.

Идея внести соответствующее изменение в закон тяготения была выдвинута Асафом Холлом (Asaph Hall) в 1895 г. Для силы взаимного притяжения двух материальных частиц с массами m и m' , находящимися на расстоянии r , он предложил взять выражение

$$fmm'r^{-2-\sigma},$$

где поправка σ очень мала.

Легко показать, что в этом случае движение планеты вокруг Солнца происходило бы по орбите, очень близкой к равномерно

вращающемуся эллипсу, причем угол между наименьшим радиусом-вектором r_1 и наибольшим r_2 выражался бы формулой

$$\Theta = \frac{180^\circ}{\sqrt{1-\sigma}} \left[1 + \frac{\sigma(3+\sigma)}{24} \left(\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} \right)^2 + \dots \right]. \quad (3.2)$$

Если начальные условия изменять так, чтобы $r_2 \rightarrow r_1$, т. е. чтобы орбита приближалась к круговой, то

$$\lim \Theta = \frac{180^\circ}{\sqrt{1-\sigma}}.$$

Этот результат был известен еще Ньютону, который воспользовался им для доказательства полной строгости равенства $\sigma=0$, опираясь на установленный опытом факт неподвижности перигелиев планет.

Холл предложил определить поправку σ при помощи обнаруженного движения перигелия Меркурия.

Для векового движения перигелия планеты формула (3.2) дает

$$D_{i,\pi} = \frac{n}{\sqrt{1-\sigma}} \left[1 + \frac{\sigma(3+\sigma)}{24} e^2 + \dots \right] n,$$

где через e и n обозначены эксцентриситет и среднее вековое движение этой планеты.

Так как для Меркурия (1900,0)

$$e=0,2056122, \quad n=538\ 106\ 667'',$$

то при $D_{i,\pi}=42'',4$ из предыдущего равенства получаем

$$\sigma=0,000\ 0001552.$$

Окончательно, при составлении таблиц движения Меркурия, Венеры, Земли и Марса, Ньюком принял

$$\sigma=0,000\ 000\ 1612 \quad (3.3)$$

и, согласно с этим, ввел дополнительные эмпирические поправки вековых движений перигелиев этих планет, равные соответственно

$$43'',37; \quad 16'',98; \quad 10'',45; \quad 5'',55. \quad (3.4)$$

Он стремился при этом наилучшим образом удовлетворить наблюдениям не только Меркурия, но и других планет.

Составленные Ньюкомом таблицы движения Меркурия, Венеры и Земли служили с 1901 по 1959 г. включительно для вычисления эфемерид этих планет в астрономических ежегодниках. Его таблицы движения Марса, заменившие в ежегодниках, начиная с 1903 г., таблицы Леверрье, скоро стали давать замет-

ные расхождения с наблюдениями. Пересмотр построенной Ньюкомом теории движения Марса, выполненный Россом [1917], позволил внести в нее исправления и изменения, существенно улучшившие согласие с наблюдениями.

Но элемент эмпиризма увеличился при этом еще больше, поскольку Росс ввел в таблицы эмпирические значения вековых изменений элементов.

Когда Ньюком ввел в теорию движения планет эмпирическую поправку (3.3) к закону тяготения, то эта поправка дала также хорошее представление невязок в вековых движениях перигея и узла Луны, обнаруженных Ганzenом [1862—1864]. Это служило как бы подтверждением гипотезы Холла. Работы Брауна показали, однако, что рассматриваемые невязки являлись лишь следствием несовершенства теории Ганzenа. Более того, созданная Брауном теория движения Луны показала, что для получения согласия с наблюдениями необходимо, чтобы σ удовлетворяло условию $\sigma < 0,00000004$. Таким образом, одно и то же значение σ не может представить как движения планет, так и движение Луны.

Задача объяснения аномалий в вековых движениях планет, близких к Солнцу, была решена открытием закона тяготения Эйнштейна, о котором будет сказано в следующем параграфе *).

Это обстоятельство и открытие неравномерности вращения Земли (§ 1), так же как и большое количество новых наблюдений, сделали целесообразным повторение сопоставления гравитационных теорий движения внутренних планет с наблюдениями. Эта огромная работа была выполнена для Меркурия Клеменсом [1943] и для Венеры — Данкомом [1956].

Оказалось, что теория Ньюкома с исправленными элементами, после удаления эмпирических поправок (3.4) и введения поправок, соответствующих переходу от закона Ньютона к закону тяготения Эйнштейна, очень хорошо представляет наблюдения: теоретические значения вековых изменений элементов во всех случаях совпадают, в пределах точности наблюдений, с их эмпирическими значениями. В частности, совершенно отсутствует упомянутая выше аномалия в движении узла Венеры.

Теория Марса была заново построена Клеменсом в 1947—1957 гг. Он употребил для этого ту форму метода Ганzenа, которая была использована Хиллом в созданных им теориях Юпитера и Сатурна (§ 2). Для Марса также получилось полное согласие между гравитационной теорией и наблюдениями.

*) Дорелятивистские попытки объяснения аномалий в движениях планет и Луны подробно рассмотрены в весьма содержательном сочинении Шази [1928].

§ 4. Закон тяготения Эйнштейна

Открыв закон тяготения, носящий его имя, Ньютон пытался выяснить природу тяготения, т. е. установить связь между ним и другими явлениями. Но не будучи в состоянии это сделать, он формулировал свою точку зрения следующим образом:

«До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы наших морей на основании силы тяготения, но я не указывал причины самого тяготения. Эта сила происходит от некоторой причины, проникающей до центра Солнца и планет без уменьшения своей способности и действующей не пропорционально величине поверхности частиц, на которые она действует (что обыкновенно имеет место для механических причин), но пропорционально количеству твердого вещества; действие этой причины распространяется повсюду, на огромное расстояние, убывая пропорционально квадрату расстояний.

Тяготение к Солнцу составляется из тяготения к отдельным частицам его и при удалении от Солнца убывает в точности пропорционально квадратам расстояний даже до орбиты Сатурна, что следует из неподвижности афелиев планет, и даже до крайних афелиев комет, если только эти афелии неподвижны.

Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотезу же я не измышляю. Все же, что не выводится из явлений, должно называться гипотезой, а гипотезам метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам — не место в экспериментальной философии. В такой философии предложения выводятся из явлений и обобщаются помощью индукции. Так были изучены непроницаемость, подвижность и напор тел, законы движения и тяготение. Довольно того, что тяготение реально существует, действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря».

Таким образом, Ньютон, не найдя в известных ему явлениях точки опоры для выяснения природы тяготения и не желая заниматься измышлением произвольных беспочвенных построений (которые он называл гипотезами), отделил этот вопрос от первоочередной задачи изучения следствий закона тяготения и оставил его будущим поколениям.

Только через 200 лет развитие физики дало, наконец, недостававшую Ньютону точку опоры. Ею явился знаменитый опыт Майкельсона, открывший постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета. Это вскрыло недопустимость существовавших ранее представлений об абсолютном пространстве и абсолютном времени и привело к созданию теории относительности. Альберт Эйнштейн (1879—1955), завершивший в 1916 г. построение этой теории, показал, что тяготение является

выражением той неоднородности пространства и времени, которая производится присутствием материи. Согласно установленному Эйнштейном закону тяготения движение материальной частицы в поле тяготения является движением по инерции, которое происходит по геодезическим линиям четырехмерного «пространства — времени», имеющего в этом случае (т. е. в присутствии тех масс, благодаря которым возникает поле тяготения) риманову метрику.

Теория тяготения, созданная Эйнштейном, сразу устранила принципиальные трудности, связанные с мгновенной передачей взаимодействия и с действием на расстоянии, которое как бы подразумевалось законом Ньютона. Оказалось, что эти представления были следствием того, что закон Ньютона является лишь приближенным выражением того, что имеет место в действительности. Тяготение есть, согласно теории Эйнштейна, результат тех изменений, которые вносит присутствие материи в свойства пространства — времени, и передается со скоростью света в пустоте, т. е. с той наибольшей скоростью, с которой возможна передача взаимодействия.

Если отношения скоростей всех движущихся тел к скорости света стремятся к нулю, то в пределе релятивистская механика переходит в обычную ньютонову механику, а закон тяготения Эйнштейна в закон Ньютона. В достаточно слабых гравитационных полях, т. е. таких, в которых можно пренебречь кривизной четырехмерного пространства — времени, теория Эйнштейна приводит к таким же результатам, как и классическая механика, дополненная ньютоновым законом тяготения. Только в тех случаях, когда скорости движения тел настолько велики, что нельзя пренебрегать квадратами их отношений к скорости света, получается заметное отличие.

Из всех тел солнечной системы Меркурий движется наиболее быстро: его скорость меняется от 39 до 59 км/сек. Вот почему Эйнштейн, в поисках экспериментального подтверждения своей теории, вспомнил об аномалии в движении Меркурия.

Исследование движений, вытекающих из закона тяготения Эйнштейна, представляет весьма сложную задачу, изучение которой только еще начинается*). Но в самом простом случае, а именно в случае движения точечной массы в статическом центрально-симметричном гравитационном поле, эту задачу удалось решить до конца. Оказалось, что в этом случае движение происходит — при тех начальных условиях и с той точностью, которые соответствуют астрономическим задачам, — по эллипсу, большая ось которого равномерно вращается в сторону движения по

*) Астрономические следствия из закона тяготения Эйнштейна с большою обстоятельностью изучены Шази [1928 и 1930]. Физическая сторона этих вопросов глубоко освещена В. А. Фоком [1955].

орбите. За время каждого оборота точечной массы большая ось поворачивается на угол, даваемый формулой

$$24\pi^3 a^2 / c^2 P^2 (1 - e^2),$$

где a , e , P — большая полуось, эксцентриситет и период обращения эллиптической орбиты, а через c обозначена, как обычно, скорость света. Во всем остальном законы движения сколько-нибудь заметно не меняются.

Эта формула позволяет легко рассчитать, что вековые перемещения перигелиев Меркурия, Венеры, Земли и Марса, вызываемые заменой ньютонова закона тяготения законом Эйнштейна, равны соответственно

$$43'',03; 8'',62; 3'',83; 1'',35.$$

Произведения этих величин на эксцентриситеты соответствующих планет, дающие то, что реально наблюдается, равны

$$8'',847; 0'',059; 0'',064; 0'',126.$$

Работы, указанные в конце предыдущего параграфа, дали для этих величин, т. е. для невязок между наблюдениями и теорией, основанной на ньютоновом законе:

$$8'',863 \pm 0'',093; 0'',057 \pm 0'',033; 0'',084 \pm 0'',020; 0'',100 \pm 0'',025.$$

Таким образом, замена ньютонова закона тяготения законом Эйнштейна привела к полному согласию между теорией и наблюдениями. Для внешних планет эта замена станет ощутимой лишь через много столетий. Очень нескоро эта замена заметно скажется в движении Луны, а тем более, других спутников. В движении некоторых малых планет, обладающих исключительно большими эксцентриситетами, такая замена станет ощутимой уже в ближайшие десятилетия.

Создание теории относительности является завершающим звеном той огромной работы, которая была выполнена человечеством для установления единства мира. Естественно возникшее на заре сознательной жизни человечества представление о разделении мира на две качественно совершенно различные части, «небо» и «землю», держалось очень долго. Оформленное древнегреческими учеными и философами, оно было твердо усвоено средневековой наукой. Первый и очень серьезный удар этому представлению был нанесен Коперником, сделавшим Землю одной из планет. Но не только Коперник, но и его великие продолжатели — Галилей и Кеплер, считали силы, управляющие движением небесных тел, принципиально отличным от всего земного. Первая попытка дать единую картину мира, слишком поспешно сделанная Декартом в его теории вихрей, была неудачной. Только Ньютону, поставившему науку на пра-

вильный путь, удалось доказать единство сил, действующих во всем мире. А через сто лет Лаплас мог уже считать всю астрономию обширной проблемой механики — единой механики и для «земли» и для «неба».

Однако великое дело установления единства мира все же не было еще закончено. Ньютону и его продолжателям пришлось сохранить понятия абсолютного пространства и абсолютного времени, ничем не связанных с материей. Только создание теории относительности окончательно освободило науку от этих последних остатков средневекового «неба».

§ 5. Задачи теоретической астрономии

Прогресс науки и неизбежно связанная с ним специализация привели в конце XVIII в. к разделению единой когда-то астрономии на астрономию наблюдательную (или «практическую») и астрономию теоретическую. Свидетельством этого было почти одновременное появление двух капитальных сочинений, посвященных отдельно и притом возможно полному изложению теоретической астрономии. В Петербурге был издан трехтомный трактат «Теоретическая астрономия» академика Ф. И. Шуберта [1798], а в Париже вышел первый том «Небесной механики» Лапласа [1799].

Эти сочинения, имевшие одну и ту же цель — дать систематическое изложение теорий движения небесных тел, столь блестяще развитых в течение XVIII в., были названы различно. В то время как Шуберт сохранил употреблявшийся раньше термин «теоретическая астрономия», Лаплас ввел новое название: «небесная механика»^{*)}. Этим он хотел подчеркнуть, что после

^{*)} Так как происшедшая отсюда двойственность в наименовании сохранилась до настоящего времени и привела к некоторым недоразумениям, то полезно сделать следующие замечания.

В русской научной литературе название «небесная механика» для всего учения о движении небесных тел очень долго не применялось. Как на пример, можно указать на известное сочинение М. Хандрикова «Очерк теоретической астрономии» [1883], служившее основным руководством для многих поколений русских астрономов-теоретиков. Термин «небесная механика» не употреблялся до самого недавнего времени и в английской литературе, где сначала применялось название «физическая астрономия», а когда возникновение астрофизики сделало его неудобным, то название — «динамическая астрономия».

Название «теоретическая астрономия» представляется более удобным. Кроме того, название «небесная механика» как бы маскирует то основное достижение, о котором говорилось в конце предыдущего параграфа, — создание единой механики для Земли и для Космоса.

С другой стороны, термин «небесная механика» может быть весьма естественно употреблен в ином значении, как это будет указано ниже.

По этим причинам мы будем употреблять старинное, более удобное и принципиально более правильное наименование: теоретическая астрономия.

открытия закона всемирного тяготения и выяснения доминирующего значения этого закона «астрономия, рассматриваемая с самой общей точки зрения, стала не чем иным, как грандиозной проблемой механики...». Но несмотря на различие в названии, задачи, стоявшие перед вновь оформившейся астрономической дисциплиной, понимались одинаково: они заключались, говоря словами Лапласа, в выводе всех следствий закона всемирного тяготения «в отношении движения и равновесия твердых и жидких масс, составляющих солнечную систему, а также аналогичные системы, наполняющие мировое пространство».

В результате огромной работы, выполненной за истекшие 150 лет, эта весьма общая формулировка может быть сделана гораздо более конкретной. Первая половина XX в. войдет в историю науки как эпоха грандиозного триумфа теоретической астрономии. За этот сравнительно очень короткий промежуток времени с блестящим и даже несколько неожиданным успехом были завершены многовековые работы по созданию теорий движения Луны и планет. Впервые удалось дать такие, основанные на едином законе и освобожденные от всяких эмпирических исправлений теории, которые представляют все имеющиеся наблюдения в пределах их точности.

Этот успех был, конечно, связан с открытием Плутона и огромным прогрессом вычислительной техники, столь характерным для нашего века, но прежде всего он был обусловлен открытием неравномерности вращения Земли и глубоким проникновением в природу тяготения.

Установление неравномерности вращения Земли открыло путь для перехода от времени, получаемого из астрономических наблюдений, к тому равномерному времени, которое фигурирует в законах динамики. Только после этого стало возможным вполне строгое сравнение эфемерид с наблюдениями.

Теория Эйнштейна, вскрывшая сущность тяготения, позволила, прежде всего, фиксировать границы, в которых закон Ньютона имеет место. Этим была решена задача, над которой так долго безуспешно трудились *). С другой стороны, эта теория дала новый закон тяготения, точность которого во всяком случае намного превосходит то, что могут обнаружить современные наблюдения.

Другая причина, заставляющая пересмотреть и несколько сузить проблематику теоретической астрономии, формулированную Лапласом, заключается в возникновении и развитии смежных разделов естествознания. Так, например, теория приливов и учение о внутреннем строении Земли, входившие раньше в

*) Подробный критический разбор этих попыток содержит курс, прочитанный Пуанкаре в 1907—1908 гг. и лишь недавно опубликованный [1953].

круг ведения теоретической астрономии, являются теперь частями геофизики; учения о строении Солнца, планет и комет, а также их эволюции, отошли в область астрофизики и космогонии.

Конечно, граница между теоретической астрономией и смежными науками во многих случаях является условной, определяемой скорее соображениями удобства. Например, учение о движениях в системах двойных и кратных звезд, рассматриваемых как материальные точки, может быть отнесено к теоретической астрономии, тогда как изучение этих же движений с учетом приливных деформаций и внутреннего строения звезд удобнее считать астрофизической проблемой.

Таковы соображения, определившие задачи, составляющие в настоящее время содержание теоретической астрономии.

В нее входит прежде всего изучение ряда чисто механических задач, непосредственно связанных с законом Ньютона и нужных для решения астрономических вопросов. Этот раздел естественно назвать небесной механикой. Его с одинаковым правом можно относить и к астрономии и к механике.

К небесной механике относится теория притяжения, т. е. учение о гравитационном поле неподвижных тел. При решении астрономических задач используются лишь основы этой теории. Ее дальнейшее развитие, давшее теорию потенциала, положило начало созданию математической физики.

Основным содержанием небесной механики является задача n тел, т. е. изучение движения n материальных точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона. Эта задача полностью решена только в случае $n=2$. При $n \geq 3$ трудности этой задачи настолько превосходят возможность современного математического анализа, что здесь могли быть сколько-нибудь изучены лишь немногие весьма частные случаи движения. Некоторые из таких частных случаев оказались полезными для решения астрономических вопросов, примером чего могут служить периодические решения задачи трех тел.

Открытие закона тяготения Эйнштейна существенно раздвинуло границы небесной механики. Классическая задача n тел, соответствующая притяжению по закону Ньютона, сохранила все свое значение как предельного случая и первого приближения, но стала уже недостаточной. На очередь встала неизмеримо более трудная релятивистская задача n тел (§ 4).

Понимая под небесной механикой совокупность тех механических задач, которые возникли в связи с астрономическими проблемами, к ней можно относить и учение о фигурах равновесия вращающихся жидких масс, столь глубоко развитое А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым (1857—1918).

Следующий раздел теоретической астрономии составляют методы, служащие для изучения возмущенного движения. Мы имеем здесь прежде всего общие методы, позволяющие учитывать отклонения от движения, соответствующего задаче двух тел, под действием любых дополнительных (иначе говоря, возмущающих) сил. Сюда же относятся и различные специальные методы, созданные для изучения движения больших планет, малых планет, Луны, спутников и комет, а также методы, служащие для учета влияния фигур небесных тел на их движение.

Все эти методы еще не настолько развиты, чтобы давать изучаемое движение для неограниченно большого интервала времени. Однако многие из них позволяют представлять движение с любой точностью для интервалов времени, несомненно, превосходящих во много раз интервал времени, охватываемый наблюдениями. Хотя нужно отметить, что величину интервала времени, в пределах которого тот или иной метод дает определенную точность, мы еще не умеем находить.

Третью группу задач теоретической астрономии составляют вопросы, связанные с нахождением из наблюдений постоянных интегрирования, за которые обычно принимаются элементы орбит (или оскулирующих орбит для определенного момента времени или так называемых средних орбит), а также констант, характеризующих массы, размеры и фигуры космических тел. Сюда относятся прежде всего методы нахождения предварительных орбит по минимальному числу наблюдений, методы исправления этих орбит при помощи дополнительных наблюдений и, наконец, методы нахождения вероятнейших орбит по всей совокупности наблюдений*). Сюда же можно отнести и все вопросы вычисления эфемерид, а также сравнения эфемерид с наблюдениями.

Особый раздел задач, стоящих перед теоретической астрономией, представляет изучение вращательного движения космических тел, рассматриваемых как тела твердые. Возмущения вращательных движений изучаются методами, близкими к употребляемым для изучения возмущений поступательных движений.

*) Полезно отметить, что иногда совокупность методов для решения только что указанных вопросов называют «теоретической астрономией», относя к «небесной механике» задачу n тел и методы изучения возмущенного движения.

Нецелесообразность такого наименования (возникшего по случайным причинам) совершенно очевидна: нельзя применять столь широкое понятие как «теоретическая астрономия» (содержание которого вполне установилось еще в конце XVIII в.) к весьма, в сущности, узкому и скорее техническому вопросу вычисления орбит.

Весьма важной задачей теоретической астрономии является изучение вращательного движения Земли, поскольку это движение дает нам, с одной стороны, ту пространственную координатную систему, которая лежит в основе всей астрономии и всей геодезии, а с другой стороны, — служит для измерения времени. Если математическая сторона теории вращения Земли не представляет в настоящее время (в пределах нужной нам точности) особых затруднений, то фиксация фундаментальных постоянных, дающих числовое выражение этой теории, представляет сложную задачу, к которой необходимо время от времени возвращаться по мере накопления наблюдательного материала. Эта задача, связанная с нахождением постоянных, характеризующих движение планет и Луны, является частью одной из основных задач теоретической астрономии — установления системы фундаментальных астрономических постоянных, т. е. таких, из которых все остальные могут уже быть получены теоретическим путем.

Теория фигур планет, возникшая в теоретической астрономии, продолжает быть тесно с ней связанной, хотя дальнейшее развитие учения о строении Земли стало теперь предметом геофизики, а учение о строении других планет отошло в область астрофизики.

ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА III

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения

Задача двух тел заключается в изучении движения двух материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона. Фундаментальное значение этой задачи обусловлено тем, что при изучении движений небесных тел мы почти всегда каждое тело можем заменить материальной точкой (§ 6, гл. I); с другой стороны, весьма часто встречаются случаи, когда два небесных тела могут рассматриваться как изолированные от внешнего гравитационного воздействия либо полностью, либо хотя бы в первом приближении.

Рассмотрим сначала абсолютное движение двух тел, т. е. их движение относительно произвольной инерциальной системы отсчета.

Обозначим через m_0 и m массы тел S и M , а через ρ_0 и ρ векторы, определяющие их положение относительно начала координат O выбранной нами инерциальной координатной системы. Положение тела M относительно S будет определяться вектором

$$\mathbf{r} = \rho - \rho_0.$$

Сила взаимного притяжения, действующая на каждое из рассматриваемых тел, по абсолютной величине равна

$$k^2 m_0 m / r^2,$$

где коэффициент тяготения обозначен, как это принято в теории движения небесных тел, через k^2 .

Сообразно с этим, дифференциальные уравнения, определяющие движение S и M , можно написать так:

$$m_0 \frac{d^2 \rho_0}{dt^2} = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad m \frac{d^2 \rho}{dt^2} = k^2 \frac{m_0 m}{r^2} \left(\frac{-\mathbf{r}}{r} \right). \quad (1.1)$$

Почленное сложение этих уравнений и интегрирование полученного равенства дает

$$m_0 \frac{d\rho_0}{dt} + m \frac{d\rho}{dt} = \alpha; \quad m_0 \rho_0 + m \rho = \alpha t + \beta, \quad (1.2)$$

где не зависящие от времени векторы α и β являются постоянными интегрирования.

Равенства (1.2) представляют шесть интегралов движения центра инерции системы, образованной рассматриваемыми телами. Эти интегралы позволяют привести изучение движения, определяемого уравнениями (1.1), которое принято называть абсолютным движением, к изучению относительного движения. Такое приведение может быть выполнено различно.

Чтобы найти уравнение, определяющее движение M относительно S , нужно почленно вычесть первое из уравнений (1.1) из второго. Это дает

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{k^2 (m_0 + m)}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (1.3)$$

Если уравнение (1.3) разрешено, то равенства

$$\rho - \rho_0 = r; \quad m_0 \rho_0 + m \rho = \alpha t + \beta$$

позволят найти ρ_0 и ρ в функции времени, что даст абсолютное движение.

Иногда бывает целесообразно рассматривать движение тел S и M относительно их общего центра инерции G .

Положение G относительно O определяется таким вектором σ , что

$$(m_0 + m) \sigma = m_0 \rho_0 + m \rho. \quad (1.4)$$

Если через s_0 и s обозначить векторы, определяющие положение S и M по отношению к G , то

$$\rho_0 = \sigma + s_0; \quad \rho = \sigma + s, \quad (1.5)$$

а равенство (1.4) даст

$$m_0 s_0 + m s = 0.$$

Последнее соотношение совместно с очевидным равенством $r = s - s_0$ дает

$$(m_0 + m) s_0 = - m r; \quad (m_0 + m) s = m_0 r. \quad (1.6)$$

Таким образом, орбиты, описываемые телами S и M вокруг их общего центра инерции G , подобны между собой и подобны орбите, описываемой одним телом вокруг другого.

Подстановка выражений (1.5) в уравнения движения относительно центра инерции дает

$$\frac{d^2 s_0}{dt^2} = \frac{-k^2 m^3}{(m_0 + m)^2} \frac{s_0}{s_0^3}; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{-k^2 m_0^3}{(m_0 + m)^2} \frac{s}{s^3}. \quad (1.7)$$

Каждое из этих уравнений имеет такой же вид, как и уравнение (1.3), так что изучение относительного движения в обоих случаях приводится к решению уравнения вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\kappa^2 r r^{-3}, \quad (1.8)$$

где κ^2 — положительный постоянный множитель, зависящий от постоянной тяготения и масс рассматриваемых тел.

В дальнейшем мы будем почти всегда изучать движение одного тела относительно другого. Поэтому, если не будет особо оговорено, будем считать, что

$$\kappa^2 = k^2 (m_0 + m). \quad (1.9)$$

Для сокращения письма можно было бы в уравнении (1.8) принять за независимую переменную величину κt . Тогда это уравнение приняло бы вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + r r^{-3} = 0,$$

не содержащий явно притягивающие массы. Таким образом, в задаче двух тел изменение масс эквивалентно изменению единицы времени.

§ 2. Первые интегралы уравнений относительного движения

Уравнение (1.8), к решению которого приводится задача двух тел, эквивалентно следующей системе шестого порядка:

$$x'' + \kappa^2 x r^{-3} = 0; \quad y'' + \kappa^2 y r^{-3} = 0; \quad z'' + \kappa^2 z r^{-3} = 0, \quad (2.1)$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Эти уравнения можно написать в форме

$$x'' = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa^2}{r} \right); \quad y'' = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa^2}{r} \right); \quad z'' = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\kappa^2}{r} \right). \quad (2.2)$$

Они представляют движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы, имеющей силовую функцию. Основные теоремы механики дают поэтому четыре первых интеграла этих уравнений.

Интегралы площадей. Векторное умножение уравнения (1.8) на \mathbf{r} дает

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0,$$

откуда

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \kappa \mathbf{c}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

а через \mathbf{c} обозначена постоянная, введенная интегрированием. Это равенство, выражающее постоянство вращательного импульса (иначе называемого моментом количества движения), будучи написано в скалярной форме, дает три интеграла площадей:

$$yz' - zy' = \kappa c_x; \quad zx' - xz' = \kappa c_y; \quad xy' - yx' = \kappa c_z. \quad (2.4)$$

Так как левая часть равенства (2.3) представляет удвоенную секторную скорость движущейся точки, то интегралы площадей выражают постоянство секторной скорости.

Скалярное умножение равенства (2.3) на \mathbf{r} дает

$$\mathbf{c}\mathbf{r} = 0,$$

или

$$c_x x + c_y y + c_z z = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, движение происходит в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору \mathbf{c} .

Интеграл энергии. Почленное умножение уравнений (2.2) на x' , y' , z' , сложение их и интегрирование полученного равенства дает интеграл энергии:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2\kappa^2 r^{-1} + \kappa^2 h. \quad (2.6)$$

Входящая в него постоянная h носит название постоянной энергии.

Равенство (2.6) можно написать так:

$$V^2 = \kappa^2 (2r^{-1} + h). \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что постоянная энергии не зависит ни от системы координат, ни от направления скорости.

Поскольку скорость не может быть мнимой, то при $h < 0$ движущаяся точка не может выйти из сферы

$$r = -2h^{-1},$$

во всех точках которой скорость равна нулю. Эту сферу будем называть поверхностью нулевой скорости.

§ 3. Движение в плоскости орбиты

Равенство (2.5) показывает, что движение происходит в неизменной плоскости. Положение этой плоскости и секторная скорость движения в ней определяются постоянными интегрирования c_x , c_y , c_z .

Положение плоскости орбиты при решении астрономических задач принято определять не коэффициентами ее уравнения, а двумя углами, имеющими более непосредственное геометрическое значение.

Прямая NSN' (рис. 5), по которой плоскость орбиты пересекается с основной координатной плоскостью Sxy , называется

линией узлов. Полупрямая SN , которую точка M пересекает, переходя из области $z < 0$ в область $z > 0$, называется положительным направлением линии узлов. Угол между осью Sx и SN называется долготой восходящего узла и обозначается обычно буквой Ω . Этот угол отсчитывается от оси Sx в сторону оси Sy от 0° до 360° .

Угол между плоскостью орбиты и плоскостью Sxy называется наклоном орбиты*).

Условимся называть положительной нормалью $S\xi$ к плоско-

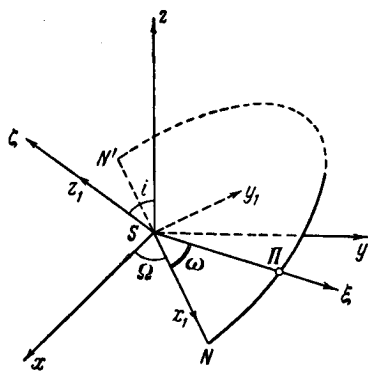


Рис. 5.

сти орбиты ту нормаль, относительно которой движение точки M по орбите осуществляет правостороннее вращение. Наклон орбиты будет измеряться углом i между $S\xi$ и Sz . Наклон может иметь все значения от 0° до 180° . Если $0^\circ \leq i < 90^\circ$, то движение называется прямым, если же $90^\circ < i \leq 180^\circ$, то говорят, что движение обратное.

Так как изучаемое движение плоское, то выгодно от координатной системы $Sxyz$ перейти к системе $Sx_1y_1z_1$, в которой за основную плоскость принята плоскость траектории.

За ось Sx_1 новой системы примем положительное направление SN линии узлов; за ось Sz_1 примем положительное направление $S\xi$ нормали к плоскости орбиты. Таким образом, движение точки M будет происходить в направлении от Sx_1 к Sy_1 .

*) Это название, введенное автором в 1949 г. вместо прежнего «наклонение орбиты», в настоящее время включено в список рекомендуемых обозначений в астрономии.

Переход к системе $Sx_1y_1z_1$ выполним в два этапа. Сначала перейдем от системы $Sxyz$ к промежуточной системе Sx_1y^0z , получающейся из $Sxyz$ путем поворота около оси Sz на угол Ω . Формулы перехода

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cos \Omega - y^0 \sin \Omega, \\y &= x_1 \sin \Omega + y^0 \cos \Omega, \\z &= z\end{aligned}$$

запишем в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{vmatrix}.$$

Переход от промежуточной системы Sx_1y^0z к системе $Sx_1y_1z_1$ осуществляется путем поворота около оси Sx_1 на угол i . Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y^0 \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}.$$

Подстановка этого выражения в правую часть предыдущего равенства дает

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}, \quad (3.1)$$

или, после перемножения матриц,

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Теперь легко найти зависимость между постоянными интегрирования c_x , c_y , c_z и введенными нами величинами Ω и i . Отложим по нормали $S\xi$ отрезок SC , равный

$$c = (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)^{1/2},$$

т. е. абсолютной величине вектора c . Координаты точки C в старой системе равны c_x , c_y , c_z , тогда как в новой они равны 0 , 0 , c . Формула (3.2) дает поэтому

$$c_x = c \sin i \sin \Omega; \quad c_y = -c \sin i \cos \Omega; \quad c_z = c \cos i. \quad (3.3)$$

Таким образом, приняв за постоянные интегрирования c , Ω и i , интегралы площадей (2.4) можно записать в следующем

виде:

$$\left. \begin{aligned} yz' - zy' &= \kappa c \sin i \sin \Omega, \\ zx' - xz' &= -\kappa c \sin i \cos \Omega, \\ xy' - yx' &= \kappa c \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

В системе координат $Sx_1y_1z_1$, когда $z_1=0$, эти интегралы приводятся к одному:

$$x_1y_1' - y_1x_1' = \kappa c. \quad (3.5)$$

Введем полярные координаты точки M : радиус-вектор $r=SM$ и полярный угол u , образуемый этим радиусом-вектором с осью Sx_1 . Подставив координаты

$$x_1 = r \cos u; \quad y_1 = r \sin u; \quad z_1 = 0 \quad (3.6)$$

точки M в формулу (3.2), получим следующие выражения для ее координат в исходной системе:

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Изучение движения M приводится, таким образом, к нахождению r и u в функции времени.

Введенный нами полярный угол u , т. е. угловое расстояние точки M от положительного направления линии узлов, называется аргументом широты.

§ 4. Траектория движения

Для решения задачи о выражении r и u в функции времени воспользуемся интегралом площадей (3.5) и интегралом энергии (2.7). Переходя в этих интегралах к полярным координатам при помощи (3.6), будем иметь два уравнения:

$$r^2 \frac{du}{dt} = \kappa c, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\kappa^2 r^{-1} + \kappa^2 h. \quad (4.2)$$

Решение этих уравнений удобно начать с нахождения зависимости между r и u , т. е. с вывода уравнения траектории.

Рассмотрим сначала случай, когда $c \neq 0$. Уравнение (4.1) дает

$$\frac{du}{dt} = \frac{\kappa c}{r^2}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{\kappa c}{r^2} \frac{dr}{du}.$$

Исключая теперь время из уравнения (4.2), получим

$$\frac{c^2}{r^4} \left(\frac{dr}{du} \right)^2 = h + \frac{2}{r} - \frac{c^2}{r^2},$$

или

$$\left[\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} \right) \right]^2 = h + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c} \right)^2,$$

или

$$\left[\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c} \right) \right]^2 = A^2 - \left(\frac{c}{r} - \frac{1}{c} \right)^2,$$

где

$$A^2 = h + c^{-2}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{c}{r} - \frac{1}{c} = A \cos(u - \omega),$$

где через ω обозначена постоянная, введенная интегрированием, откуда

$$r = \frac{c^2}{1 + Ac \cos(u - \omega)}.$$

Такое уравнение представляет, как известно, коническое сечение с фокусом в начале координат S . Отождествляя его со стандартным уравнением конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (4.3)$$

где p — параметр, e — эксцентриситет, а v — истинная аномалия (гл. I, § 3), получим

$$p = c^2; \quad e = Ac = (1 + hc^2)^{1/2}, \quad (4.4)$$

$$v = u - \omega. \quad (4.5)$$

Так как $p = a(1 - e^2)$, то соотношения (4.4) дают

$$c = \sqrt{p}; \quad h = -a^{-1}. \quad (4.6)$$

Равенство (4.5) показывает, что новая постоянная интегрирования ω есть значение полярного угла u , соответствующее значению $v=0$, т. е. перигелию. Эту постоянную будем называть аргументом перигелия (для планет и комет — аргументом перигелия). Она называется также расстоянием перигелия от узла.

Вид конического сечения, описываемого точкой M , определяется, как показывает соотношение (4.4), знаком постоянной энергии. Если $h < 0$, то $e < 1$, и движение происходит по эллипсу; если $h = 0$, то $e = 1$ и уравнение (4.3) представляет параболу; если, наконец, $h > 0$, то $e > 1$ и движение происходит по гиперболе.

Заметим, что интеграл энергии (2.7) принимает теперь вид

$$V^2 = \kappa^2 (2r^{-1} - a^{-1}). \quad (4.7)$$

Этот интеграл показывает, что абсолютная величина скорости в каждой точке орбиты зависит только от большой полуоси и радиуса-вектора этой точки.

Обратно, абсолютная величина скорости на данном расстоянии от центрального тела вполне определяет (при фиксированном значении κ) величину большой полуоси. Так, например, в случае $h < 0$ при одной и той же величине скорости V точка M (рис. 6) будет описывать различные эллипсы в зависимости от направления скорости. Но большие полуоси всех этих эллипсов будут равны одной и той же величине a , определяемой соотношением (4.7). Каково бы ни было направление начальной скорости, движущаяся точка не может выйти за пределы окружности,

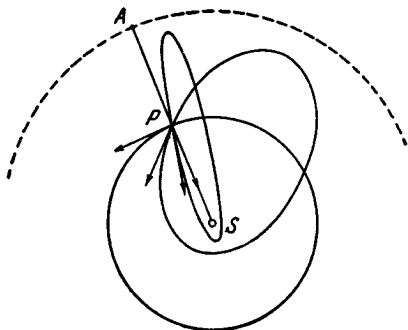


Рис. 6.

описанной из S как центра радиусом $SA = 2a$. Эта окружность является пересечением плоскости орбиты с поверхностью нулевой скорости (§ 2).

Заметим, что скорость эллиптического движения на расстоянии $SM = r$ от притягивающего центра S равняется той, которую приобретает в M тело, свободно падающее из A , т. е. с расстояния $2a$.

Если в уравнении (4.7) положить $a = \infty$, что соответствует движению по параболе, то получим скорость

$$V_p = \kappa \sqrt{\frac{2}{r}},$$

которая называется параболической. Такую скорость имеет на расстоянии r от центра притяжения тело, свободно падающее из бесконечности.

Если $V < V_p$, то $a > 0$ и, следовательно, движение происходит по эллипсу; если $V = V_p$, то движение происходит по параболе; наконец, если $V > V_p$, то $a < 0$, и потому движение происходит по гиперболе.

Как известно, большинство комет движется по орбитам, мало отличающимся в пределах солнечной системы от парабол, тогда как орбиты планет мало отличаются от окружностей. Так как для кругового движения (при $r = a$) формула (4.7) дает

$$V = \kappa \sqrt{\frac{1}{r}},$$

то отсюда следует, что скорость кометы в случае пересечения планетной орбиты в $\sqrt{2}$ раз больше скорости планеты.

Нам остается рассмотреть случай, когда $c=0$. Уравнение (4.1) показывает, что здесь движение происходит по прямой $u=\omega+180^\circ$, где $\omega=\text{const}$, проходящей через точку S . Координаты точки M в системе $Sx_1y_1z_1$ даются параметрическими уравнениями

$$x_1 = -r \cos \omega; \quad y_1 = -r \sin \omega; \quad z_1 = 0, \quad (4.8)$$

причем радиус-вектор r находится в функции времени при помощи уравнения

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \kappa^2(2r^{-1} + h), \quad (4.9)$$

вытекающего из интеграла энергии (4.2). Решение этого уравнения будет рассмотрено в § 9.

§ 5. Движение по эллипсу

Чтобы закончить изучение движения в задаче двух тел, остается решить совместно найденное в предыдущем параграфе уравнение траектории

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} \quad (5.1)$$

и уравнение

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \kappa \sqrt{a(1-e^2)}, \quad (5.2)$$

выражающее интеграл площадей.

В том случае, когда движение происходит по эллипсу, т. е. когда $e < 1$, $a > 0$, мы можем ввести в качестве вспомогательной переменной эксцентрическую аномалию E . Тогда (§ 3, гл. I):

$$r \sin v = a \sqrt{1-e^2} \sin E; \quad r \cos v = a(\cos E - e), \quad (5.3)$$

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (5.4)$$

Дифференцирование соотношений (5.3) дает, как легко убедиться,

$$r dv = a \sqrt{1-e^2} dE. \quad (5.5)$$

Подставив выражения (5.4) и (5.5) в уравнение (5.2), получим

$$(1 - e \cos E) dE = \kappa a^{-3/2} dt.$$

Отсюда после интегрирования найдем уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = \kappa a^{-3/2} (t - T), \quad (5.6)$$

где T — постоянная интегрирования. Это уравнение было нами выведено раньше (гл. I, § 3) тем путем, которым шел Кеплер,

не имевший в своем распоряжении дифференциального и интегрального исчисления.

Величина

$$n = \kappa a^{-3/2} = k \sqrt{m_0 + m} a^{-3/2}, \quad (5.7)$$

где κ дается равенством (1.9), называется средним движением, а

$$M = n(t - T) \quad (5.8)$$

— средней аномалией.

При изучении движения планет вместо постоянной интегрирования T , представляющей, очевидно, момент прохождения планеты через перигелий, удобнее пользоваться другой величиной. Обозначим через t_0 какой-либо определенный момент времени и перепишем равенство (5.8) так:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (5.9)$$

где

$$M_0 = n(t_0 - T)$$

есть средняя аномалия для момента t_0 , или, как принято говорить, средняя аномалия эпохи t_0 .

Вычисление средней аномалии M по формуле (5.9) удобнее при малых эксцентриситетах потому, что M_0 сохраняет смысл и при $e=0$, тогда как T становится неопределенным.

При возрастании E от $-\infty$ до $+\infty$ функция $E - e \sin E$, производная которой всегда положительна, монотонно возрастает в тех же границах. Отсюда следует, что уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (5.10)$$

при любом значении M имеет одно и только одно вещественное решение.

После того как решение уравнения (5.10) дало значение E , соответствующее заданному моменту t , по формулам (5.3) и (5.4) можно найти r , v , а следовательно, и $u = v + \omega$. Формулы (3.7) дадут координаты x , y , z .

Таким образом, координаты рассматриваемого тела нами выражены в функции времени и шести постоянных

$$a, e, M_0, \Omega, i, \omega,$$

введенных интегрированием.

§ 6. Движение по гиперболе

Этот случай отличается от рассмотренного в предыдущем параграфе случая эллиптического движения только тем, что в уравнениях (5.1) и (5.2), подлежащих разрешению относительно r и v , надо считать $e > 1$, $a < 0$.

Но сделанная нами подстановка (5.3), выражающая r и v через E , одинаково применима и в случае гиперболического движения, так как она тождественно удовлетворяет уравнению орбиты (5.1) при всех значениях a и e .

Отличие заключается только в том, что для $e > 1$, $a < 0$ формулы (5.3) дают для $\sin E$ мнимое значение, тогда как $\cos E$ остается величиной вещественной. Сообразно с этим, здесь удобнее вместо E ввести величину

$$H = iE,$$

имеющую для гиперболического движения вещественные значения.

Это дает

$$i \sin E = \operatorname{sh} H; \quad \cos E = \operatorname{ch} H,$$

вследствие чего соотношения (5.3) и (5.4) принимают вид

$$r \sin v = |a| \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H; \quad r \cos v = |a| (e - \operatorname{ch} H), \quad (6.1)$$

$$r = |a| (e \operatorname{ch} H - 1), \quad (6.2)$$

а уравнение Кеплера (5.6) обращается в

$$e \operatorname{sh} H - H = \kappa |a|^{-3/2} (t - T). \quad (6.3)$$

При изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ стоящая слева функция монотонно изменяется в тех же границах, поскольку ее производная всегда положительна. Отсюда следует, что при каждом значении t уравнение (6.3) имеет одно и только одно вещественное решение.

§ 7. Движение по параболе

Если $e = 1$, то траектория движения является параболой. Уравнение траектории (4.3) принимает вид

$$r = \frac{p}{1 + \cos v}.$$

Полагая

$$q = \frac{1}{2} p,$$

это уравнение можно представить так:

$$r = q \sec^2 \frac{v}{2}. \quad (7.1)$$

Вместо двух элементов a и e , характеризующих форму и размеры эллипса или гиперболы, мы имеем для параболы только один элемент q . Он носит название перигельного расстояния, так как $r = q$, если $v = 0$.

Подставив выражение (7.1) в интеграл площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \kappa \sqrt{2q},$$

получим

$$\sec^4 \frac{v}{2} dv = \sqrt{2} \kappa q^{-3/2} dt.$$

Это равенство можно написать так:

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) d\left(\operatorname{tg} \frac{v}{2}\right) = \frac{\kappa dt}{\sqrt{2} q^{3/2}},$$

откуда, полагая

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma, \quad (7.2)$$

получим

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} B, \quad (7.3)$$

где

$$B = q^{-3/2} (t - T). \quad (7.4)$$

Введенная интегрированием постоянная T есть, очевидно, момент прохождения через перигелий. Величину B будем называть параболическим аргументом.

При изменении v от -180° до $+180^\circ$ левая часть уравнения (7.3) монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, это уравнение для каждого значения t дает одно и только одно вещественное значение v .

§ 8. Введение прямоугольных орбитальных координат

Остановимся еще на вопросе о выражении координат x , y , z , определяющих относительную конфигурацию системы в задаче двух тел, в функции времени и постоянных интегрирования.

В предыдущих параграфах мы видели, что в том случае, когда вращательный импульс не равен нулю, движение происходит по коническому сечению. Оно полностью определяется в самом общем случае шестью постоянными интегрирования, носящими название элементов орбиты.

Если постоянная энергии не равна нулю, за элементы орбиты можно принять следующие величины:

$$a, e, M_0 \text{ (или } T), \Omega, i, \omega,$$

называемые эллиптическими (или гиперболическими) элементами орбиты.

Когда постоянная энергии равна нулю, орбита определяется пятью параболическими элементами:

$$q, T, \Omega, i, \omega.$$

Число элементов уменьшается также для круговой орбиты, когда положение перигелия становится неопределенным, и для орбиты, лежащей в основной плоскости Sxy , когда отпадает понятие узлов орбиты.

Изложенный в предыдущих параграфах метод вычисления координат x , y , z распадается на два этапа. Сначала вычисляются полярные орбитальные координаты r и v , что делается различно, в зависимости от вида орбиты. После этого находится аргумент широты

$$u = v + \omega,$$

и по формулам (3.7) вычисляются прямоугольные декартовы координаты x , y , z .

Другой способ решения той же задачи основан на употреблении прямоугольных орбитальных координат

$$\xi = r \cos v; \quad \eta = r \sin v.$$

Эти координаты являются более простыми функциями времени, нежели соответствующие полярные координаты.

В самом деле, для эллиптического и гиперболического движений мы имеем выражения

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (8.1)$$

и

$$\xi = |a|(e - \operatorname{ch} H); \quad \eta = |a|\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \quad (8.2)$$

очень легко вычисляемые, как только решено уравнение Кеплера (5.6) или соответствующее ему уравнение (6.3).

Для параболического движения из формул (7.1) и (7.2) легко выводим

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = 2q\sigma, \quad (8.3)$$

где σ находится путем решения кубического уравнения (7.3).

Прямоугольная орбитальная система координат $S\xi\eta\zeta$, у которой ось $S\xi$ направлена в перигелий Π (см. рис. 5 на стр. 76), получается из системы $Sx_1y_1z_1$, рассматривавшейся нами в § 3, путем поворота вокруг оси Sz_1 (тождественной с $S\zeta$) на угол ω . Таким образом,

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Результат подстановки этого выражения в формулу (3.1) запишем в сокращенном виде:

$$[x, y, z] = \mathbf{Z}(\Omega) \mathbf{X}(t) \mathbf{Z}(\omega) \{\xi, \eta, 0\} \quad (8.4)$$

Символами $X(\alpha)$ и $Z(\alpha)$ будем обозначать матрицы, соответствующие повороту на угол α вокруг оси абсцисс и оси аппликат, так что

$$X(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad Z(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Символом $\{a, b, c\}$ обозначена, как обычно, матрица, состоящая из одного столбца.

Равенство (8.4) можно написать так:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (8.5)$$

причем, как нетрудно убедиться, выполнив перемножение трех первых множителей в правой части равенства (8.4),

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ p_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ p_z &= \sin \omega \sin i, \\ q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ q_z &= \cos \omega \sin i, \\ r_x &= \sin i \sin \Omega, \\ r_y &= -\sin i \cos \Omega, \\ r_z &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Таковы направляющие косинусы орбитальных осей координат. Если вычисления ведутся при помощи арифмометра, то чаще всего предпочитают находить их не по формулам (8.6), а путем численного перемножения соответствующих матриц.

§ 9. Случай прямолинейного движения

Нам остается рассмотреть тот случай движения, когда вращательный импульс c равен нулю.

Мы уже видели, что движение происходит в этом случае по прямой, имеющей параметрические уравнения (4.8). Радиус-вектор, который в этих уравнениях служит параметром, определяется уравнением (4.9). Введем вместо постоянной энергии h

величину a , определяемую равенством

$$h = -a^{-1}.$$

Тогда это уравнение примет вид

$$\dot{r}^2 = \kappa^2 (2r^{-1} - a^{-1}). \quad (9.1)$$

Таким образом, обозначив через T постоянную интегрирования, имеем

$$\int_0^r \sqrt{\frac{r}{2-ra^{-1}}} dr = \kappa(t - T). \quad (9.2)$$

Если $h=0$, $a=\infty$, то отсюда сразу получаем

$$r = \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - T)^{2/3}. \quad (9.3)$$

Эту зависимость можно униформизировать, по аналогии с параболическим движением, при помощи вспомогательной переменной σ , определяемой равенством $r = \sigma^2$; тогда получим

$$\frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (t - T). \quad (9.4)$$

Если $h < 0$, $a > 0$, то для выполнения интегрирования в уравнении (9.2) можно ввести переменную E , определяемую равенством

$$r = a(1 - \cos E) \quad (9.5)$$

Это дает

$$E - \sin E = n(t - T), \quad (9.6)$$

где

$$n = \kappa a^{-3/2}.$$

В том случае, когда $h > 0$, $a < 0$, вспомогательная переменная E , униформизирующая зависимость между r и t , становится мнимой. В этом случае можно положить

$$r = |a|(\operatorname{ch} H - 1), \quad (9.7)$$

что дает

$$\operatorname{sh} H - H = \kappa |a|^{-3/2} (t - T). \quad (9.8)$$

Итак, зависимость между r и t в обоих случаях, когда $h < 0$ и когда $h > 0$, получается из соответствующих формул для эллиптического и гиперболического движений, если в них положить $p=0$, а следовательно, $e=1$. Иначе говоря, рассматриваемые случаи прямолинейного движения являются предельными случаями эллиптического или гиперболического движения с тем же значением постоянной энергии, если направление начальной скорости стремится к совпадению с начальным радиусом-вектором.

Заметим, что для вычисления скорости \dot{r} удобно пользоваться следующими легко получаемыми формулами:

$$r\dot{r} = \kappa \sqrt{a} \sin E; \quad r\dot{r} = \kappa \sqrt{-a} \operatorname{sh} H.$$

Рис. 7 представляет графически зависимость между r и t во всех трех случаях.

В случае $h < 0$ эта зависимость, даваемая соотношениями (9.5) и (9.6), изображается циклоидой. Точки возврата циклоиды, имеющие абсциссы t_k , где

$$t_k = T + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (9.9)$$

соответствуют моментам соударений.

При $h = 0$ зависимость выражается уравнением (9.3), которому на рис. 7 соответствует полукубическая парабола.

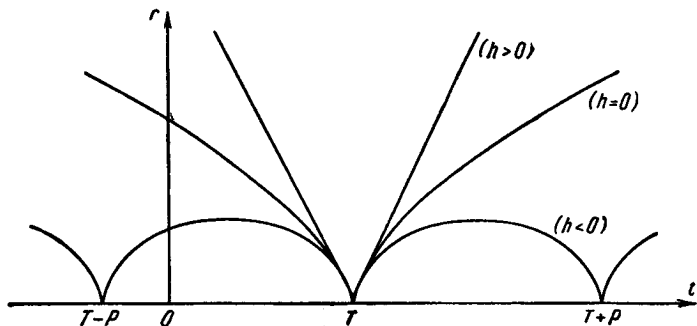


Рис. 7.

Для $h > 0$ кривая, представляемая уравнениями (9.7) и (9.8), имеет только одну точку, в которой $r = 0$. При $t \rightarrow \pm \infty$ эта кривая асимптотически приближается к двум прямым, симметричным относительно прямой $t = T$.

При всех значениях h точечная масса M в момент соударения как бы отскакивает от точечной массы S . Оставаясь в области абстрактных математических понятий, можно сказать, что соударения не прекращают движения. Движение представляется полученными нами формулами для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$, несмотря на наличие соударений в вещественные моменты времени. Можно показать, что прямолинейное движение гиперболического характера (когда $h > 0$) имеет, помимо вещественного соударения при $t = T$, еще соударения, происходящие в комплексные моменты времени.

При каждом соударении скорость обращается в бесконечность. Это непосредственно вытекает из дифференциального

уравнения (9.1). Для $h=0$ поведение радиуса-вектора, а следовательно, и скорости, при приближении к моменту соударения дается соотношением (9.3). В случае $h<0$ исключение переменной E из уравнений (9.5) и (9.6) приводит к разложению,

$$r = \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - t_k)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} c_n (t - t_k)^{n/3}, \quad (9.10)$$

которое сходится в области точки $t=t_k$. Если $h>0$, то имеет место аналогичное разложение:

$$r = \left(\frac{3\kappa}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} (t - T)^{2/3} + \sum_{n=3}^{\infty} d_n (t - T)^{n/3}.$$

Таким образом, при приближении к соударению главная часть радиуса-вектора не зависит от постоянной энергии.

Примечание. Случай прямолинейного движения в задаче двух тел приобрел за последнее время практический интерес. С этим случаем мы встречаемся при изучении движения ракеты по нормали к поверхности Земли. В связи с этим были построены специальные таблицы [Херрик, 1953] для удобного пользования формулами (9.5), (9.6) и для квазигиперболического движения формулами (9.7), (9.8). Эти таблицы могут быть использованы и при изучении движения комет.

Положим

$$\left. \begin{aligned} U &= E - \sin E; & C_e(U) &= 1 - \cos E, \\ S_e(U) &= \sin E; & X_e(U) &= E \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

в случае движения эллиптического типа, и

$$\left. \begin{aligned} U &= \operatorname{sh} H - H; & C_h(U) &= \operatorname{ch} H - 1; \\ S_h(U) &= \operatorname{sh} H; & X_h(U) &= H \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

— в случае движения гиперболического типа.

Указанные таблицы дают функции C , S и X по аргументу U . Это позволяет удобно решать все задачи, связанные с прямолинейным движением.

§ 10. Законы Кеплера

Полученные в предыдущих параграфах результаты позволяют выяснить полностью связь между законом тяготения и эмпирическими закономерностями в планетных движениях, которые были найдены Кеплером и которые привели Ньютона к открытию закона тяготения.

В первом приближении мы можем пренебречь силами, с которыми планеты действуют друг на друга, и рассматривать

движение каждой планеты как результат гравитационного взаимодействия этой планеты и Солнца. В этом предположении движение каждой планеты будет подчиняться первому и второму законам Кеплера. В самом деле, в § 2 было показано, что движение происходит в плоскости, проходящей через центр Солнца, а в § 4 — что траектория движения есть эллипс, в фокусе которого находится Солнце.

Закон тяготения дает первый закон Кеплера в обобщенном виде: движение одного небесного тела относительно другого может происходить не только по эллипсу, но и по другим коническим сечениям, в частности, по прямой линии.

Третий закон Кеплера связывает большие полуоси орбит планет с периодами их обращения вокруг Солнца. Чтобы получить зависимость между этими величинами, обратимся к формуле (5.7), дающей среднее движение планеты:

$$n = k \sqrt{m_0 + m} a^{-3/2}.$$

Если через P обозначить период обращения планеты, то

$$n = 2\pi/P.$$

Сопоставление этого равенства с предыдущим дает

$$P = \frac{2\pi}{k \sqrt{m_0 + m}} a^{-3/2}. \quad (10.1)$$

Для другой планеты с массой m_1 , периодом обращения P_1 и большой полуосью a_1 , будем иметь аналогичное равенство

$$P = \frac{2\pi}{k \sqrt{m_0 + m_1}} a_1^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{P^2}{a^3} \left(1 + \frac{m}{m_0}\right) = \frac{P_1^2}{a_1^3} \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right). \quad (10.2)$$

Такова исправленная форма третьего закона Кеплера. Поскольку это равенство является прямым следствием соотношения (10.1), оно часто также называется третьим законом Кеплера. Приближенная форма этого закона, найденная эмпирически Кеплером, получается, если в равенстве (10.2) пренебречь отношениями планетных масс к массе Солнца.

Соотношение (10.1) позволяет находить с большой точностью массы планет, имеющих спутников. В самом деле, пусть m — масса такой планеты, a и P — элементы ее орбиты. Обозначим через m' массу ее спутника, а через a' и P' — элементы орбиты, описываемой спутником вокруг планеты. Тогда, кроме

равенства (10.1), мы будем иметь еще и такое:

$$P' = \frac{2\pi}{k\sqrt{m+m'}} a'^{3/2},$$

что дает

$$\frac{m+m'}{m_0+m} = \left(\frac{P}{P'}\right)^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^3.$$

Отсюда, пренебрегая исчезающе малым отношением массы спутника к массе Солнца, получим массу планеты, выраженную в частях массы Солнца.

§ 11. Астрономическая система единиц

При изучении движений небесных тел приходится пользоваться особой системой единиц, так как применяемые в физике единицы длины и массы оказываются здесь непригодными. Дело в том, что отношения расстояний между небесными телами мы можем измерять с относительной точностью, доходящей в некоторых случаях до 10^{-8} , однако выразить эти расстояния в сантиметрах мы можем лишь с точностью, не превышающей 10^{-3} , поскольку пересчет в сантиметры основан на величине солнечного параллакса, который известен нам с ошибкой именно такого порядка. Аналогично дело обстоит и с массами небесных тел: мы знаем с гораздо большей точностью их отношения, нежели значения в граммах.

Это привело к употреблению астрономической системы единиц, в которой за единицу длины была принята большая полуось земной орбиты *), за единицу масс — масса Солнца, а за единицу времени — средние солнечные сутки.

Чтобы применить эту систему единиц при изучении движений небесных тел, нужно найти соответствующее ей значение постоянной тяготения. Для этого можно воспользоваться формулой (10.1), дающей

$$k = \frac{2\pi a^{3/2}}{P\sqrt{m_0+m}}, \quad (11.1)$$

где $m_0 = 1$.

Целесообразнее всего применить эту формулу к Земле, так как в этом случае $a = 1$ известно совершенно точно, а период обращения известен точнее, нежели для какой-либо другой планеты.

В своем знаменитом трактате *Theoria motus corporum coelestium* Гаусс принял [Гаусс, 1809]:

$$P = 365, 256 3835 \text{ ср. солн. суток}, \quad m = 1/354 710,$$

*) Точнее, большая полуось орбиты, описываемой вокруг Солнца центром инерции системы, состоящей из Земли и Луны.

что дало

$$k = 0,017\ 202\ 098\ 95. \quad (11.2)$$

Эта величина употреблялась в течение XIX в. во всех астрономических вычислениях и легла в основу наиболее фундаментальных таблиц. Поэтому, когда выяснилось, что принятые Гауссом значения P и m нуждаются в исправлении, предпочли оставить без изменения значение, найденное Гауссом для k , и изменить соответствующим образом единицу длины. При таком условии большая полуось земной орбиты уже не равняется единице, а получается по формуле

$$a = \left(\frac{kP\sqrt{1+m}}{2\pi} \right)^{2/3}.$$

Такой выбор системы единиц был окончательно узаконен постановлением Международного Астрономического Союза в 1938 г.

В настоящее время наилучшими значениями продолжительности сидерического года и массы Земли (точнее, массы системы, состоящей из Земли и Луны) можно считать такие:

$$P = 365,256\ 36042 \text{ (для 1900,0),}$$

$$m = 1/328912 \text{ [Труды Межд. Астрон. Союза, 1964].}$$

Сообразно с этим большая полуось земной орбиты получается равной

$$a = 1,000\ 000\ 032 \text{ астр. единиц.} \quad (11.3)$$

Единица времени была несколько уточнена постановлениями, принятыми на съездах Международного Астрономического Союза, происходивших в 1948, 1952, 1955 и 1958 годах. Было признано необходимым во всех случаях, когда нужна большая точность, основывать измерение времени не на периоде вращения Земли, а на периоде обращения Земли вокруг Солнца.

Окончательно современная астрономическая система единиц фиксируется следующими тремя положениями:

1. За единицу массы принимается масса Солнца.

2. За единицу времени принимается продолжительность средних солнечных суток, равная 86 400 секундам эфемеридного времени. Секунда эфемеридного времени определяется как $1/315\ 569\ 25975$ часть тропического года эпохи 1900, январь, 0, в 12^h эфемеридного времени.

3. Для постоянной тяготения k^2 фиксируется значение, соответствующее константе Гаусса (11.2).

Отметим следующие часто употребляемые величины

$$k = 0,017\ 202\ 098\ 950\ 000,$$

$$k^{\circ} = 0,985\ 607\ 668\ 601\ 425,$$

$$k'' = 3548,187\ 606\ 965\ 130,$$

$$\lg k^{\circ} = 8,235\ 581\ 441\ 488\ 214_{-10},$$

$$\lg k^{\circ} = 9,993\ 704\ 073\ 897\ 396_{-10},$$

$$\lg k'' = 3,550\ 006\ 574\ 664\ 673.$$

Зная размеры Земли и параллакс Солнца, можно астрономическую единицу длины выразить в сантиметрах. Она получается равной

$$\rho_0/a \sin p_{\odot},$$

где ρ_0 — экваториальный радиус Земли, a дается равенством (11.3), а через p_{\odot} обозначен экваториальный горизонтальный параллакс Солнца. Принимая $\rho_0 = 6\ 378\ 16000$ см (эллипсоид Межд. Астрон. Союза) и $p_{\odot} = 8'',79405$, получим

$$1 \text{ астр. единица} = 1,4960000 \times 10^{13} \text{ см.}$$

Постоянная тяготения $f = k^2$ связана с величинами, поддающимися измерению, тремя различными путями: с результатами астрономических наблюдений ее связывает формула (11.1); сила тяжести, измеряемая на поверхности Земли, пропорциональна этой постоянной; наконец, эту постоянную можно найти из опытов над взаимным притяжением двух тел с известными массами. Сопоставление того, что дают эти различные пути, приводит к весьма важным результатам.

Зависимость между параллаксом Солнца и массой Земли

Изучение движения искусственных спутников Земли позволило определить следующее значение величины $f m_{\oplus}$ (с которой мы уже встречались в § 5 гл. I):

$$f m_{\oplus} = 3,98603 \times 10^{20}, \quad (11.4)$$

где f и масса Земли m_{\oplus} выражены в системе CGS.

Выразим величины, входящие в равенство (11.1), в единицах CGS. После возведения в квадрат это равенство можно представить так:

$$f(m_0 + m) = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 a^3, \quad (11.5)$$

где

$$2\pi/P = 2\pi/(365,25636042 \times 86\ 400)$$

есть среднее движение Земли в одну секунду; большая полуось земной орбиты выражена через экваториальный радиус Земли и параллакс Солнца:

$$a = 6\,378\,16000 / \sin p_{\odot};$$

через $m_{\odot} + m = m_{\odot} + m_{\oplus} + m_{\zeta}$ обозначена сумма масс Солнца, Земли и Луны.

Положив, как обычно, $\sin p_{\odot} = p''_{\odot} \operatorname{arc} 1''$ и исключив из равенств (11.4) и (11.5) постоянную тяготения f , будем иметь

$$\left(\frac{m_{\odot} + m_{\oplus} + m_{\zeta}}{m_{\oplus}} \right)^{1/3} p''_{\odot} = 609''.517.$$

Так как

$$m_{\oplus} + m_{\zeta} = (1 + \mu) m_{\oplus},$$

где $\mu = 1/81,30$, то полученное соотношение можно еще написать как

$$\left(\frac{1 + m_3}{m_3} \right)^{1/3} p''_{\odot} = 607''.038, \quad (11.6)$$

если через m_3 обозначить сумму масс Земли и Луны, выраженную в частях массы Солнца.

Если в сделанных нами вычислениях взять $\rho_0 = 6378\,38800$ см, т. е. заменить земной эллипсоид МАС эллипсоидом Хейфорда, то стоящая справа величина будет равна $607''.060$.

Для величины параллакса Солнца $8''.79405$, принятой в настоящее время, формула (11.6) дает $m_3 = 1/328912$, а если взять эллипсоид Хейфорда, то $m_3 = 1/328953$.

Массы Земли и Солнца

Лабораторные методы нахождения постоянной тяготения дают

$$f = (6,670 \pm 0,005) \times 10^{-8}. \quad (\text{CGS})$$

Подставив это значение в равенство (11.4), получим массу Земли в граммах:

$$m_{\oplus} = 5,976 \times 10^{27}.$$

Так как объем Земли равен $1,083\,320 \times 10^{27}$ см³ (по Хейфорду), то средняя плотность Земли получается равной $5,516$ г/см³.

Сравнение массы Земли, выраженной в граммах, с ее значением в частях солнечной массы, равным $1/322958$, показывает, что масса Солнца равна

$$m_{\odot} = 1,990 \times 10^{33} \text{ г.}$$

§ 12. Разложение координат в ряды по степеням времени

В предыдущих параграфах было дано точное решение задачи двух тел. В этом решении координаты выражаются неявными и достаточно сложными функциями времени. Между тем при нахождении орбит малых планет и комет из наблюдений весьма важно иметь хотя бы приближенные, но зато простые и явные выражения координат через время. Простейшим путем для получения таких выражений является разложение координат в ряды по степеням времени.

Пренебрегая массой рассматриваемого светила по сравнению с массой Солнца, принятой за единицу, мы можем уравнения гелиоцентрического движения написать так (§ 2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2xu; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2yu; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2zu,$$

где для краткости положено

$$u = r^{-3}.$$

Вместо t введем переменную

$$\theta = k(t - t_0),$$

т. е. время, считаемое от выбранного нами начального момента и выраженное в единицах, равных $1/k = 58,13244 \dots$ суток. Тогда, условившись обозначать штрихами производные по θ , уравнения движения будут иметь в таком виде:

$$x'' = -xu; \quad y'' = -yu; \quad z'' = -zu. \quad (12.1)$$

Для малых значений θ , которые только и встречаются при вычислении орбит из наблюдений, мы можем, пользуясь основной теоремой Коши, получить решение системы (12.1) в форме степенных рядов, расположенных по степеням θ . В самом деле, поскольку случай прямолинейного движения нами исключается, при $\theta=0$ радиус-вектор r не может быть равен нулю; поэтому правые части уравнений (12.1) являются голоморфными функциями в точке $\theta=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Таким образом, ряд

$$x = x_0 + x'_0\theta + \frac{1}{2!}x''_0\theta^2 + \dots \quad (12.2)$$

и аналогичные ряды для двух других координат сходятся для достаточно малых по абсолютной величине значений θ .

Чтобы найти коэффициенты этих рядов, продифференцируем почленно уравнения (12.1) и положим затем $\theta=0$. Тогда

получим:

$$\begin{aligned}x_0'' &= -x_0 u_0, \\x_0''' &= -x_0 u_0' - x_0' u_0, \\x_0^{IV} &= -x_0 (u_0'' - u_0^2) - 2x_0' u_0', \\&\dots\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в ряд (12.2) и аналогичные ему дает

$$\left. \begin{aligned}x &= x_0 F(\theta) + x_0' G(\theta), \\y &= y_0 F(\theta) + y_0' G(\theta), \\z &= z_0 F(\theta) + z_0' G(\theta),\end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned}F(\theta) &= 1 - \frac{1}{2} u_0 \theta^2 - \frac{1}{6} u_0' \theta^3 - \frac{1}{24} (u_0'' - u_0^2) \theta^4 - \dots, \\G(\theta) &= \theta - \frac{1}{6} u_0 \theta^3 - \frac{1}{12} u_0' \theta^4 + \frac{1}{120} (u_0^2 - 3u_0'') \theta^5 + \dots\end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Заметим, что при помощи найденного в §§ 5—7 решения задачи двух тел можно функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ выразить в конечном виде. Воспользуемся тем, что эти функции не зависят от выбора координатной системы. Мы можем поэтому считать, что координатная система совпадает с орбитальной. Но тогда, взяв случай эллиптического движения и обозначив через E и E_0 соответствующие эксцентрические аномалии, будем иметь

$$\begin{aligned}x &= a (\cos E - e); & x_0 &= a (\cos E_0 - e); \\y &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E; & y_0 &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E_0; \\z &= 0, & z_0 &= 0, \\x_0' &= -a \sin E_0 \cdot E_0', \\y_0' &= a \sqrt{1 - e^2} \cos E_0 \cdot E_0', \\z_0' &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в равенства

$$F(\theta) = \frac{xy_0' - yx_0'}{x_0 y_0' - y_0 x_0'}; \quad G(\theta) = \frac{yx_0 - xy_0}{x_0 y_0' - y_0 x_0'},$$

непосредственно вытекающие из (12.3), и замечая, что

$$E_0' = a^{-3/2} (1 - e \cos E_0)^{-1},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0}, \\ G(\theta) &= a^{3/2} [\sin(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Полагая

$$2f = v - v_0; \quad 2g = E - E_0,$$

где v и v_0 — истинные аномалии в моменты t и t_0 , можно эти формулы представить в такой форме:

$$F(\theta) = 1 - \frac{2a}{r_0} \sin^2 g; \quad G(\theta) = 2 \sqrt{arr_0} \cos f \sin g. \quad (12.6)$$

Легко видеть, какие изменения нужно сделать в этих выражениях для случая гиперболического движения. Если движение происходит по параболе, то (§ 8)

$$x = q(1 - \sigma^2); \quad x_0 = q(1 - \sigma_0^2); \quad x'_0 = -2q\sigma_0\sigma'_0$$

$$y = 2q\sigma; \quad y_0 = 2q\sigma_0; \quad y'_0 = 2q\sigma'_0,$$

причем

$$\sqrt{2} \sigma'_0 = q^{-3/2} (1 + \sigma_0^2)^{-1}.$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &= (1 + 2\sigma\sigma_0 - \sigma^2)(1 + \sigma_0^2)^{-1}, \\ G(\theta) &= \sqrt{2} q^{3/2} (\sigma - \sigma_0)(1 + \sigma\sigma_0). \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Примечание. Употребляя при вычислении орбит разложения (12.4), в них берут только по два или по три первых члена. Учет следующих членов, содержащих вторые и высшие производные радиуса-вектора, слишком усложнил бы вычисления. О степени аппроксимирования функций F и G , даваемого первыми членами, можно судить по области сходимости рядов (12.4). В следующем параграфе будут рассмотрены особые точки функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяемых дифференциальными уравнениями (12.1). Расположение этих особых точек на плоскости комплексного переменного t определяет область сходимости разложений (12.4).

§ 13. Соударения в задаче двух тел

Мы уже видели, что в случае прямолинейного движения существуют вещественные моменты соударений (§ 9). В случае движения по коническому сечению соударения также происходят, но, как будет показано в этом параграфе, они имеют место только в комплексные моменты времени. Тем не менее, изучение соударений представляет интерес и в этом случае. Действительно, моменты, в которые $r=0$, являются, очевидно, единственными особыми точками дифференциальных уравнений (2.1), определяющих движение. Поэтому расположение моментов соударений в плоскости комплексной переменной t непосредственно

связано с изучением областей сходимости рядов, представляющих движение.

Эллиптическое движение. Так как моменты соударений определяются условием $r=0$, а зависимость между r и t в рассматриваемом случае устанавливается формулами (5.4) и (5.6), то моменты соударений можно получить путем исключения E из уравнений:

$$1 - e \cos E = 0, \quad (13.1)$$

$$E - e \sin E = n(t - T). \quad (13.2)$$

Первое из этих уравнений дает значения E , соответствующие искомым моментам, а именно:

$$E_k = 2k\pi + i\alpha, \quad \bar{E}_k = 2k\pi - i\alpha \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (13.3)$$

где

$$\alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Так как отсюда следует, что

$$\sin E_k = i \sqrt{e^{-2} - 1},$$

то для моментов соударений получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_k &= T + kP + \frac{i}{n} \beta, \\ \bar{\tau}_k &= T + kP - \frac{i}{n} \beta, \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

где для краткости положено:

$$\beta = \alpha - \sqrt{1 - e^2}; \quad P = \frac{2\pi}{n}.$$

Итак, в случае эллиптического движения все моменты соударений лежат на двух прямых, параллельных вещественной оси комплексной переменной t и симметрично расположенных относительно этой оси (рис. 8).

При изменении e от 0 до 1 функция $\beta(e)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Таким образом, при круговом движении, когда $e=0$, соударения отсутствуют, ибо все точки (13.4) уходят в бесконечность. Напротив, при прямолинейном движении, когда $e=1$, моменты соударений попарно сливаются и становятся вещественными. В этом случае они совпадают со значениями, даваемыми формулами (9.9).

Если уравнение (13.2) написать в форме

$$f(E, t) = 0,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial E} = 1 - e \cos E; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} = e \sin E; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial E^3} = e \cos E.$$

При $e < 1$ только первая из этих производных обращается в нуль в точках (13.3). Если же $e = 1$, то и вторая производная равна нулю, но третья производная отлична от нуля. Отсюда видно, что при $e < 1$ каждый из моментов соударений является точкой разветвления первого порядка функции $E(t)$, определяемой уравнением (13.2); при $e = 1$ точки $\tau_k = \bar{\tau}_k$ являются для этой функции точками разветвления второго порядка.

Легко видеть, что других конечных особых точек, кроме (13.4), функция $E(t)$ не имеет. Это следует из того, что во всех других точках ее производная

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}$$

имеет определенное конечное значение, а потому функция $E(t)$ голоморфна.

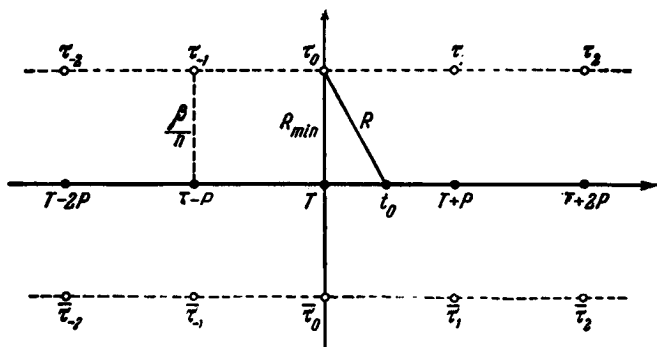


Рис. 8.

Так как координаты x , y , z , определяющие положение тела M , являются голоморфными функциями E (§ 8), то и эти координаты никаких других особых точек, кроме (13.4), не имеют.

Характер особых точек функции $E(t)$ может быть установлен иначе. Разложение левой части уравнения (13.2) в ряд позволяет написать это уравнение так:

$$n(t - \tau_k) = \frac{i\sqrt{1-e^2}}{2!} (E - E_k)^2 + \frac{1}{3!} (E - E_k)^3 - \frac{i\sqrt{1-e^2}}{4!} (E - E_k)^4 - \dots \quad (13.5)$$

Отсюда, полагая для краткости

$$\theta_k = \sqrt{n(t - \tau_k)}; \quad m = \sqrt[4]{1 - e^2},$$

получим разложение

$$E - E_k = \frac{1-i}{m} \theta_k + \frac{1}{3m^3} \theta_k^2 + \frac{1+i}{18m^7} \theta_k^3 + \dots, \quad (13.6)$$

сходящееся для достаточно малых по абсолютной величине значений θ_k . Заменяя в равенстве (13.6) i на $-i$, будем иметь разложение функции $E(t)$ в области сопряженной точки $\bar{\tau}_k$. Эти разложения показывают, что при $e < 1$ особые точки (13.4) являются точками разветвления первого порядка.

Если $e = 1$, то обращение ряда (13.5) дает

$$E - E_k = [6n(t - \tau_k)]^{1/3} + \dots,$$

что приводит к разложению (9.10) для радиуса-вектора. Таким образом, при слиянии каждой пары точек разветвления первого порядка мы получаем точку разветвления второго порядка.

Назовем главной ветвью бесконечно многозначной функции $E(t)$ ту ветвь, которая определяется начальным значением $E(T) = 0$. Легко видеть, что все точки (13.4) являются особыми для главной ветви функции $E(t)$. Отсюда следует, что каждая из этих точек является особой, помимо главной ветви, еще только для одной из других ветвей. Иначе говоря, схема соединения листов римановой поверхности функции $E(t)$ вдоль прямой, проходящей через точки τ_k , имеет вид, изображенный на рис. 9. Такой же характер имеет структура римановой поверхности вдоль прямой, проходящей через точки $\bar{\tau}_k$.

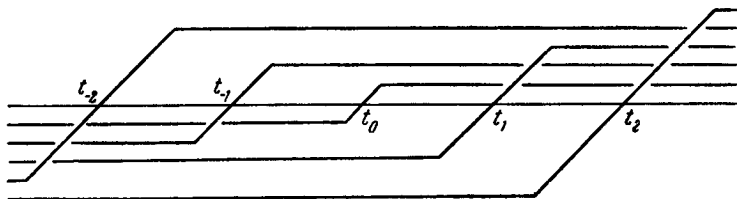


Рис. 9.

Чтобы доказать принадлежность любой особой точки τ_k (или $\bar{\tau}_k$) главной ветви, достаточно убедиться в том, что аналитическое продолжение главной ветви дает в точке τ_k значение $E(\tau_k) = E_k$. С этой целью будем вести аналитическое продолжение от начального элемента, определяемого значениями $t = T$, $E = 0$, сначала вдоль вещественной оси переменной t до точки $t = T + \frac{2k\pi}{n}$. В эту точку мы придем с вещественным значением $E = 2k\pi$. Дальнейшее аналитическое продолжение будем

производить вдоль отрезка прямой

$$t = T + \frac{2k\pi}{n} + \frac{i}{n} s; \quad 0 \leq s \leq \beta.$$

Пусть

$$E = 2k\pi + \xi + i\eta$$

есть соответствующее значение рассматриваемой функции, так что ξ и η являются вещественными функциями вещественной переменной s , обращающимися в нуль при $s=0$.

Соотношение (13.2) показывает, что $\xi(s)$ и $\eta(s)$ определяются уравнениями

$$\xi - e \sin \xi \operatorname{ch} \eta = 0,$$

$$\eta - e \cos \xi \operatorname{sh} \eta = s.$$

Первое из этих уравнений на плоскости (ξ, η) представляет прямую $\xi=0$ и некоторую кривую, не проходящую через начало координат. Поэтому функция $\xi(s)$ должна быть тождественно равна нулю, а для определения $\eta_1 = \eta(\beta)$ имеем уравнение

$$\eta_1 - e \operatorname{sh} \eta_1 = \beta. \quad (13.7)$$

Так как

$$\beta = \alpha - \sqrt{1 - e^2} = \alpha - e \operatorname{sh} \alpha,$$

то уравнение (13.7) имеет решение

$$\eta_1 = \eta(\beta) = \alpha.$$

Единственность этого решения следует из того, что производная

$$\frac{ds}{d\eta} = 1 - e \operatorname{ch} \eta$$

положительна при $0 \leq \eta < \alpha$ и отрицательна при $\eta > \alpha$; при $\eta = \alpha$ она равна нулю.

Отсюда ясно, что аналитическое продолжение главной ветви дает $E(\tau_k) = E_k$, что и требовалось доказать.

Гиперболическое движение. Формулы (6.2) и (6.3) показывают, что в этом случае для получения моментов соударений нужно из уравнений

$$e \operatorname{ch} H - 1 = 0, \quad (13.8)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - T) \quad (13.9)$$

исключить параметр H .

Первое из этих уравнений дает значения параметра в моменты соударений:

$$\left. \begin{aligned} H_k &= i(2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}); \\ \bar{H}_k &= -i(2k\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}). \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Второе уравнение дает для моментов соударений такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \tau_h &= T + \frac{i}{n} (\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1} - 2k\pi), \\ \bar{\tau}_h &= T - \frac{i}{n} (\sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1} - 2k\pi), \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

ибо

$$\operatorname{sh} H_h = i \sqrt{1 - e^{-2}}. \quad (13.12)$$

Чтобы выяснить, какой характер имеют точки (13.11) для функции $H(t)$, определяемой уравнением (13.9), напомним это уравнение так:

$$f(H, t) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial H} = e \operatorname{ch} H - 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial H^2} = e \operatorname{sh} H; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial H^3} = e \operatorname{ch} H.$$

Отсюда ясно, учитывая (13.8) и (13.12), что при $e > 1$ все точки (13.11) являются точками разветвления первого порядка; если же $e = 1$, то это будут точки разветвления второго порядка.

Моменты соударений (13.11) лежат на прямой, проходящей через точку $t = T$ и перпендикулярной к вещественной оси. Эти моменты являются комплексными, за одним только исключением: для значений эксцентриситета $e = e_h$ ($h = 0, 1, 2, \dots$), определяемых уравнением

$$\sqrt{e_h^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e_h^2 - 1} - 2h\pi = 0,$$

вместо двух комплексных моментов τ_h и $\bar{\tau}_h$ формулы (13.11) дают только один вещественный момент $t = T$.

Из последнего уравнения находим

$$e_0 = 1; \quad e_1 = 7,782 \dots; \quad e_2 = 198,8 \dots; \dots$$

При $e = 1$, т. е. в случае прямолинейного движения, точки разветвления первого порядка τ_0 и $\bar{\tau}_0$ действительны, они сливаются и дают точку разветвления второго порядка T , уже изученную в § 9. Заметим, что в этом случае формулы (13.11) дают, кроме момента соударения $t = T$, еще бесчисленное множество комплексных моментов соударений.

Если $e = e_h$, где $h = 1, 2, \dots$, то моменты τ_h и $\bar{\tau}_h$ не сливаются, ибо, как мы уже видели, каждый из них остается точкой разветвления первого порядка. Здесь имеет место только наложение двух точек разветвления первого порядка. Это видно, между прочим, из формул (13.10), которые показывают, что значения H_h и \bar{H}_h остаются различными. Таким образом, в точке (T, H_h) римановой поверхности функции $H(t)$ соединяется одна

пара листов этой поверхности, а в точке (T, \bar{H}_h) — другая пара листов.

Важно выяснить, какие из точек (13.11) являются особыми для главной ветви функции $H(t)$, т. е. для той ветви, которая характеризуется начальной точкой $t=T, H=0$.

Пусть точка t движется вдоль прямой

$$t = T + \frac{i}{n} s, \quad (13.13)$$

где s — вещественная величина, возрастающая от значения $s=0$. Если соответствующее значение главной ветви функции $H(t)$ обозначить через

$$H = \xi + i\eta,$$

то ξ и η будут вещественные функции s , обращающиеся в нуль при $s=0$. Эти функции определяются соотношением (13.9), которое дает

$$e \operatorname{sh} \xi \cos \eta - \xi = 0,$$

$$e \operatorname{ch} \xi \sin \eta - \eta = s.$$

Кривая, представляемая первым из этих уравнений, имеет только одну ветвь, а именно $\xi=0$, проходящую через начало координат. Таким образом, $\xi(s) \equiv 0$, а функция $\eta(s)$ определяется уравнением

$$e \sin \eta - \eta = s.$$

Это уравнение показывает, что при возрастании η от нуля до $\operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}$ переменная s монотонно изменяется от нуля до

$$\beta = \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}.$$

Иначе говоря, аналитическое продолжение главной ветви вдоль прямой (13.13) приводит в точку

$$t = T + \frac{i}{n} \beta; \quad H = \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1},$$

т. е. точка τ_0 (и аналогично $\bar{\tau}_0$) является особой для главной ветви функции $H(t)$.

Имеет ли главная ветвь еще и другие особые точки среди точек, даваемых формулами (13.11)? Этот вопрос не представляет интереса, если ограничиться, как мы это делаем, изучением вещественного движения. Действительно, какую бы точку на вещественной оси переменной t мы ни взяли, всегда τ_0 и $\bar{\tau}_0$ будут ближайшими к ней точками из числа представляемых формулами (13.11).

Параболическое движение. В этом случае

$$r = q(1 + \sigma^2); \quad \sigma + \frac{1}{3}\sigma^3 = n(t - T), \quad (13.14)$$

где

$$n = 2\kappa(2q)^{-3/2}.$$

Условие $r=0$, дающее $\sigma = \pm i$, показывает, что здесь мы имеем только два момента соударения:

$$\tau_0 = T + \frac{2}{3} \frac{i}{n}; \quad \bar{\tau}_0 = T - \frac{2}{3} \frac{i}{n}. \quad (13.15)$$

Каждое из этих значений времени есть, очевидно, точка разветвления первого порядка функции $\sigma(t)$, определяемой уравнением (13.14), причем, как нетрудно убедиться, обе точки (13.15) действительно являются особыми для главной ветви функции $\sigma(t)$, т. е. для той ветви, которая определяется начальными значениями $t=T$, $\sigma=0$. Ясно также, что τ_0 и $\bar{\tau}_0$ — единственные конечные особые точки функции $\sigma(t)$, а следовательно, и координат x , y , z , поскольку эти координаты являются (§ 8) полиномами от σ .

Из всего сказанного в этом параграфе вытекают следующие, важные для дальнейшего, заключения. Оставим в стороне случай прямолинейного движения и ограничимся, как всегда, изучением только вещественного движения, т. е. движения, определяемого главной ветвью одной из функций: $E(t)$, $H(t)$ или $\sigma(t)$ для вещественных значений t . В таком случае единственными особыми точками, представляющими интерес при исследовании областей сходимости разложений координат по степеням времени, являются во всех случаях лишь точки τ_0 и $\bar{\tau}_0$.

Действительно, для гиперболического или параболического движения непосредственно ясно, что именно эти точки являются всегда ближайшими к любой точке вещественной оси переменного t . В случае эллиптического движения то же самое будет иметь место для отрезка вещественной оси, определяемого неравенствами

$$-\frac{1}{2}P \leq t - T \leq +\frac{1}{2}P, \quad (13.16)$$

где $P=2\pi/n$ — период обращения. Это ясно из рис. 8.

Таким образом, особые точки, расстояния которых от исходной точки t_0 , лежащей на оси абсцисс, являются наименьшими, во всех случаях даются формулами:

$$\tau_0 = T + \frac{i}{n} \beta(e); \quad \bar{\tau}_0 = T - \frac{i}{n} \beta(e), \quad (13.17)$$

где функция $\beta(e)$ определяется равенствами:

$$\beta(e) = \begin{cases} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} - \sqrt{1 - e^2}, & \text{если } e < 1; \\ 2/3, & \text{если } e = 1; \\ \sqrt{e^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, & \text{если } e > 1. \end{cases} \quad (13.18)$$

§ 14. Радиус сходимости разложений координат по степеням времени

Обратимся теперь к нахождению радиуса сходимости R разложений координат по степеням $t - t_0$, даваемых формулами (12.3) и (12.4).

Так как радиус сходимости равен расстоянию от точки t_0 до ближайшей особой точки, то результаты предыдущего параграфа дают

$$R = |t_0 - \tau_0|,$$

где τ_0 определяется формулами (13.17) и (13.18).

Наименьшее значение радиус сходимости будет иметь, очевидно, в том случае, когда $t_0 = T$. Таким образом, для эллиптического и гиперболического движений

$$R_{\min} = |a|^{3/2} \beta(e)/k,$$

где функция $\beta(e)$ дается формулой (13.18), тогда как для параболического движения

$$R_{\min} = (2q)^{3/2}/3k.$$

Эти минимальные значения радиуса сходимости (выраженные в средних сутках) приведены в таблице 2 для орбит, имеющих одно и то же перигельное расстояние $q=1$, но различные эксцентриситеты.

Для значений t_0 , не совпадающих с моментом прохождения через перигелий, радиус сходимости может быть значительно

Таблица 2

e	R_{\min}	e	R_{\min}	e	R_{\min}
0,0	∞	0,5	74,1	1,0	54,8
0,1	136,1	0,6	68,6	1,1	52,3
0,2	106,7	0,7	64,1	1,2	50,1
0,3	91,3	0,8	60,5	1,3	48,5
0,4	81,3	0,9	57,4	2,0	39,9

больше своего минимального значения. В таблице 3 приведены радиусы сходимости для эллиптической орбиты с большой полуосью, равной 2,65, что близко к средней величине из больших полуосей орбит малых планет. Значения R даны для тех четырех точек орбиты, в которых планета находится в моменты T , $T + \frac{1}{6}P$, $T + \frac{1}{3}P$, $T + \frac{1}{2}P$.

Таблица 3

e	T	$T + \frac{1}{6}P$	$T + \frac{1}{3}P$	$T + \frac{1}{2}P$
0,0	∞	∞	∞	∞
0,1	501,2	553,0	726,0	933,7
0,2	329,3	421,1	620,0	854,0
0,3	230,7	349,6	573,7	821,0
0,4	163,1	302,2	550,1	805,1
0,5	113,0	285,9	537,3	796,0
0,6	74,9	273,1	530,5	791,5
0,7	45,5	266,5	527,3	789,3
0,8	23,4	263,7	525,8	788,4
0,9	7,7	262,7	525,3	788,0
0,95	2,8	262,7	525,2	788,0

Таблица показывает, что при небольших значениях эксцентриситета, обычно встречающихся у малых планет (в среднем у них, как известно, $e=0,15$), радиус сходимости измеряется сотнями дней. Он значительно превышает таким образом те интервалы времени между наблюдениями, с которыми приходится иметь дело при нахождении орбит. В дальнейшем (гл. VIII) мы увидим, что чаще всего применяемые методы нахождения орбит основаны как раз на употреблении разложений координат по степеням времени.

Расположение и характер особых точек для случая параболического движения были изучены Гамильтоном (W. A. Hamilton) в 1903 г. В том же году Мультион (F. R. Moulton) нашел расположение особых точек в случаях эллиптического и гиперболического движения, что позволило ему закончить нахождение радиуса сходимости разложений по степеням времени. Аналитический характер особых точек в двух последних случаях был выяснен Шази [1913] и Н. С. Самойловой-Яхонтовой [1927].

ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПЛАНЕТ И КОМЕТ

§ 1. Вычисление средней
и эксцентрической аномалий

Рассмотрим движение светила по эллиптической орбите, определяемой элементами

$$a, e, M_0, \Omega, i, \omega.$$

Вычисление координат светила, движущегося по этой орбите, для заданного момента времени t начинается с вычисления средней аномалии M . Для этого служит формула

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (1.1)$$

где

$$n = ka^{-3/2}. \quad (1.2)$$

Чтобы получить среднее суточное движение n в градусах, в этой формуле надо взять значение константы Гаусса в градусах:

$$k^0 = 0^\circ,985\ 60767 = [9,993\ 7041].$$

Для получения n в секундах дуги надо взять

$$k'' = 3548'',1876 = [3,550\ 0066].$$

С точностью, вполне достаточной в обычно встречающихся случаях, переход от n'' к a и обратно удобно выполняется при помощи таблицы III в конце книги. В других случаях можно воспользоваться таблицей XI, дающей $a^{-3/2}$ по аргументу a .

Вычислив среднюю аномалию M , переходим к нахождению эксцентрической аномалии E , определяемой уравнением Кеплера:

$$E - e \sin E = M. \quad (1.3)$$

Если вычисления ведутся при помощи тригонометрических таблиц, у которых аргумент выражен в градусах, минутах и секундах, то в этом уравнении e надо выразить в секундах дуги.

Для этого служит формула

$$e'' = 206\,264'',81e = [5,314\,4251]e. \quad (1.4)$$

Предпочтительнее, однако, вести вычисления в долях градуса, для чего в настоящее время имеется много хороших таблиц. В этом случае эксцентриситет должен быть выражен в градусах:

$$e^\circ = 57^\circ,295\,780e = [1,758\,1226]e. \quad (1.5)$$

Если эксцентриситет не очень близок к единице, то решение уравнения (1.3) проще всего выполняется одним из следующих способов.

Способ линейного интерполирования. При помощи таблицы IV находим приближенное значение эксцентрической аномалии, равное E_0 , и вычисляем

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0.$$

Взяв затем соседнее значение E_1 такое, чтобы E находилось в интервале (E_0, E_1) , вычисляем

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1.$$

Линейное интерполирование дает

$$E = E_1 + (E_0 - E_1) \frac{M - M_1}{M_0 - M_1}. \quad (1.6)$$

В случае надобности вычисление можно повторить, взяв более тесный интервал.

Пример. Дано:

$$e = 0,2453162; \quad M = 332^\circ,48188;$$

требуется найти эксцентрическую аномалию.

Соотношение (1.5) дает $e^\circ = 14^\circ,05558$. Из таблицы IV, с приближенными значениями аргументов $e = 0,245$ и $M = 332^\circ,5$, находим $E_0 = 324^\circ,3$.

Таким образом,

$E_0 = 324^\circ,30$	$E_1 = 324^\circ,27$	$E = 324^\circ,27486$
$e^\circ \sin E_0 = -8,20201$	$= -8,20799$	$= -8,20702$
$M_0 = 332,50201$	$M_1 = 332,47799$	$M = 332,48188$
$M_0 - M_1 = +0,02402 \quad M - M_1 = +0,00389.$		

После того как найдено M_0 , выбираем подходящее значение для E_1 и делаем вычисление во втором столбце. Формула (1.6) дает

$$E = 324^\circ,27 + 0^\circ,03 \frac{389}{2402} = 324^\circ,27486.$$

Третий столбец показывает, что это значение удовлетворяет уравнению (1.3) со всей нужной точностью.

Способ итерации. Уравнение (1.3) можно написать так:

$$E = M + e \sin E.$$

Условие применимости метода итерации *) здесь выполняется, поскольку

$$\left| \frac{d}{dE}(M + e \sin E) \right| = |e \cos E| \leq e < 1.$$

Поэтому, найдя E_0 по таблице IV и вычисляя последовательно

$$E_1 = M + e \sin E_0,$$

$$E_2 = M + e \sin E_1,$$

.

мы можем быть уверены, что E_n стремится к искомому значению E . Сходимость будет тем лучше, чем меньше $|e \cos E_0|$.

Способ итерации особенно удобен при вычислении на арифмометре. В этом случае можно, установив на результативном счетчике M , а на установочном регистре (клавиатуре) множитель e° , — придать к M величину $e^\circ \sin E_0$. На результативном счетчике будем иметь E_1 , что позволяет найти $\sin E_1$ и переделать на счетчике оборотов $\sin E_0$ в $\sin E_1$; на результативном счетчике появится E_2 и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока на счетчике оборотов не окажется значение $\sin E$, соответствующее тому значению E , которое стоит на результативном счетчике. Важно отметить, что вычисление может быть существенно ускорено, если не стремиться к итеративности процесса, а только к тому, чтобы установить соответствие между E на результативном счетчике и $\sin E$ на счетчике оборотов.

Если эксцентриситет e велик, то при употреблении этого приема целесообразно уравнение (1.3) представить так:

$$\sin E = -\left(\frac{M}{e}\right) + \frac{1}{e} E. \quad (1.7)$$

Здесь метод итерации неприменим. Чтобы видеть это, достаточно положить $x = \sin E$. Но только что указанный прием свободного согласования показаний счетчика оборотов и результативного счетчика при некоторой опытности быстро приводит к цели **).

Чтобы применить этот прием к уравнению (1.7), на результативном счетчике устанавливаем частное M/e (обе величины

*) Это условие заключается, как известно, в следующем: корень α уравнения $x = \varphi(x)$ может быть найден при помощи итерации, если $|\varphi'(\alpha)| < 1$.

Сходимость итеративного процесса тем быстрее, чем меньше $|\varphi'(\alpha)|$.

***) Такой прием был впервые предложен Л. Л. Маткевичем, широко использовавшим его в своей многолетней работе по изучению движения кометы Энке (для которой $e = 0,84$).

должны быть, конечно, выражены либо в градусах, либо в радианах, смотря по тому, какими таблицами приходится пользоваться); на клавиатуре устанавливаем $1/e$, а на счетчике оборотов получаем исходное значение E_0 . На результативном счетчике тогда получится некоторое значение $\sin E_1$. Найдя по таблицам соответствующее ему значение E_1 , не совпадающее, вообще говоря, с E_0 , изменяем показание счетчика оборотов до тех пор, пока значение E , стоящее на счетчике оборотов, не будет согласно с $\sin E$, стоящим на результативном счетчике.

На других, весьма многочисленных, способах решения уравнения Кеплера здесь нет надобности останавливаться, так как указанные способы вполне обеспечивают это решение во всех тех случаях, когда пользуются эксцентрической аномалией для получения орбитальных координат *).

§ 2. Орбитальные координаты в случае эллиптического движения

Для вычисления прямоугольных орбитальных координат служат формулы

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = a\cos\varphi\sin E, \quad (2.1)$$

где $\varphi = \arcsin e$.

Если вычисления ведутся с небольшим числом знаков, то эти координаты могут быть найдены без предварительного вычисления эксцентрической аномалии, при помощи специальных таблиц, дающих величины (их обозначают также через X и Y)

$$C = \cos E - e; \quad S = \sqrt{1-e^2}\sin E \quad (2.2)$$

по аргументам e и M .

Таблицы Иннеса [1927] дают C и S с пятью десятичными знаками для $M=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ и для $e=0,00(0,01)0,99$. Таблицы Штракке [1928] дают эти величины с четырьмя десятичными знаками для $M=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ и для $e=0^\circ(0^\circ10')25^\circ$.

Для вычисления полярных орбитальных координат r и v чаще всего пользуются формулами

$$r \sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E; \quad r \cos v = a(\cos E - e), \quad (2.3)$$

или, если употребляется угол эксцентриситета φ ,

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E; \quad r \cos v = a(\cos E - \sin \varphi). \quad (2.4)$$

*) Наиболее полный перечень работ, посвященных решению уравнения Кеплера, содержит статья Вуда [1950]. В ней не упомянута статья А. П. Тяхта [1944], в которой рассматривается вопрос о решении уравнения Кеплера с особенно большой точностью.

Иногда бывают удобны формулы:

$$r = a(1 - e \cos E); \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.5)$$

Вторую из этих формул можно, для получения бóльшей точности при том же числе знаков, заменить такой:

$$\sin \frac{1}{2}(v - E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \frac{\varphi}{2} \sin E. \quad (2.6)$$

При небольшой точности вычислений (например, при изучении движения двойных звезд, или при составлении поисковых эфемерид планет и комет) можно пользоваться таблицами, позволяющими находить радиус-вектор и истинную аномалию непосредственно по средней аномалии, минуя вычисление эксцентрисической аномалии.

Таблицы Титъена [1892] дают $v - M$ с точностью до $0^\circ,01$ для всех значений M через 1° и $\varphi = 0^\circ(0^\circ 20') 20^\circ 20'$. После нахождения v радиус-вектор вычисляется по формуле

$$r = p / (1 + e \cos v).$$

Таблицы Петерса [1912] дают разность $v - M$ с точностью до $0^\circ,01$ и $\lg(r/a)$ с четырьмя знаками для $M = 0^\circ(1^\circ) 180^\circ$ и $\varphi = 0^\circ(0^\circ 20') 24^\circ$.

Предназначенные для двойных звезд таблицы Шлезингера и Удикк [1912] дают v с точностью до $0^\circ,01$ для $M = 0^\circ(1^\circ) 180^\circ$ и $e = 0,00(0,01) 0,77$.

В таблицах Боке [1920] по аргументам $v = 0^\circ(1^\circ) 180^\circ$ и $e = 0,00(0,01) 0,49$ даются значения средней аномалии M с точностью до $0^\circ,001$ и значения $\lg(r/a)$ с пятью десятичными знаками. Таблицы для вычисления эфемерид искусственных спутников Земли, составленные И. Д. Жонголовичем и В. М. Амелиным [1960], дают $v - M$ с точностью до $0^\circ,01$, а отношение r/a с четырьмя знаками для $M = 0^\circ(1^\circ) 360^\circ$ и $e = 0,01(0,01) 0,76$.

§ 3. Орбитальные координаты в случае параболического движения

Если движение происходит по параболе, то орбита определяется пятью элементами: q, T, Ω, i, ω .

Вычисление орбитальных координат для заданного момента t начинается с нахождения параболического аргумента

$$B = q^{-3/2}(t - T). \quad (3.1)$$

Тут можно воспользоваться таблицей XI, которая дает $q^{-3/2}$ по аргументу q . Уравнение (§ 7 гл. III)

$$\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} B \quad (3.2)$$

дает σ , после чего прямоугольные орбитальные координаты находятся по формулам (§ 8 гл. III)

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = 2q\sigma, \quad (3.3)$$

а полярные орбитальные координаты при помощи соотношений

$$r = q(1 + \sigma^2); \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sigma. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.2) производится проще всего при помощи специальных таблиц.

Таблица V дает σ для значений B от 0 до 300. Для бóльших значений B (доходящих до $B=1540$) эта таблица дает B по аргументу σ . Точность соответствует шестизначному вычислению. В тех, крайне редких случаях, когда может понадобиться более точное значение σ , его можно очень легко получить путем исправления (одним из обычных способов) того значения, которое найдено из таблицы V.

В том случае, когда v приближается к 180° , параболический аргумент B и величина σ стремятся к бесконечности, а потому всегда могут выйти за пределы только что рассмотренных таблиц, как бы они ни были обширны. В таких случаях приходится поступать иначе.

Полагая

$$\alpha = \left(\frac{3k}{V^2} B \right)^{1/3}; \quad \operatorname{lg} \left(\frac{3k}{V^2} \right)^{1/3} = 9,5207292328_{-10}, \quad (3.5)$$

напишем уравнение (3.2) следующим образом:

$$\alpha = \sigma(1 + 3\sigma^{-2})^{1/3},$$

или

$$\sigma = \alpha\beta, \quad (3.6)$$

где поправочный множитель

$$\beta = (1 + 3\sigma^{-2})^{-1/3} \quad (3.7)$$

в рассматриваемом нами случае близок к единице.

Чтобы выразить β через α , подставим (3.6) в (3.7). Это даст

$$3x\beta + \beta^3 = 1,$$

где $x = \alpha^{-2}$, откуда

$$\beta = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Таблица VI дает $\operatorname{lg} \beta$ для значений x от 0,000 до 0,090. При $x > 0,069$ уже можно пользоваться таблицей V.

Форма выражений (3.5) и (3.6) такова, что логарифмические вычисления здесь являются более удобными.

Примечание. Для вычисления σ и ν могут служить следующие формулы. Считая, что $B > 0$, введем величины β и γ , определяемые равенствами

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{3k}{2\sqrt{2}} B; \quad \operatorname{tg} \gamma = \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \right)^{1/3}, \quad (3.8)$$

$$(3k/2\sqrt{2} = 0,01824\ 55812\ 2691)$$

и условиями $0 < \beta < \pi/2$; $0 < \gamma < \pi/2$. Тогда

$$\sigma = 2 \operatorname{ctg} 2\gamma; \quad \nu = 180^\circ - (2\gamma + \beta). \quad (3.9)$$

Эти формулы остаются удобно применимыми и для значений ν , сколь угодно близких к 180° . Первая из формул (3.9) непосредственно вытекает из тождеств

$$\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma = 2 \operatorname{ctg} 2\gamma,$$

$$(\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma) + \frac{1}{3} (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma)^3 = \frac{1}{3} (\operatorname{ctg}^3 \gamma - \operatorname{tg}^3 \gamma).$$

Вторая из формул (3.9) была открыта недавно (В. Kulaschko, 1944). Она является следствием несколько неожиданного соотношения:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\nu + \beta) = \frac{\operatorname{tg}^3 \gamma - \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma}{1 - (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg}^3 \gamma} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma (1 - \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^4 \gamma)}{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^4 \gamma} = \operatorname{ctg} \gamma.$$

§ 4. Движение по орбите, эксцентриситет которой близок к единице

Орбиты многих комет в той части, которая охватывается наблюдениями, оказываются неотличимыми от параболы. Но чем многочисленнее и точнее делаются наблюдения, тем чаще приходится встречаться с кометами, эксцентриситеты которых хотя и мало, но все же заметно отличаются от единицы.

Легко видеть, что для значений e , очень близких к единице, обычные формулы эллиптического движения

$$E - e \sin E = M, \quad (4.1)$$

$$\xi = a (\cos E - e); \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (4.2)$$

так же как и соответствующие формулы для гиперболического движения, становятся непригодными для вычисления координат ξ и η (а следовательно, и r , и ν).

Действительно, если при некотором постоянном значении перигельного расстояния

$$q = a(1 - e) \quad (4.3)$$

эксцентриситет стремится к единице, то $a \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$, и выражения (4.2) становятся неопределенными.

Чтобы получить формулы, пригодные для рассматриваемых кометных орбит, преобразуем уравнение (4.1) так, чтобы при

$e \rightarrow 1$ оно переходило в пределе в уравнение

$$\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} B; \quad B = q^{-3/2} (t - T), \quad (4.4)$$

соответствующее параболическому движению.

С этой целью перепишем уравнение (4.1) следующим образом:

$$\frac{(1-e) \sin E + E - \sin E}{(1-e)^{3/2}} = kB,$$

или

$$\frac{2\varepsilon \sin E + E - \sin E}{4\varepsilon^{3/2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} B, \quad (4.5)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (1 - e). \quad (4.6)$$

Это равенство можно написать так:

$$\sigma \cos g + \sigma^3 G(g) = \frac{k}{\sqrt{2}} B, \quad (4.7)$$

если положить

$$\sigma = \varepsilon^{-1/2} \sin g; \quad G(g) = \frac{2g - \sin 2g}{4 \sin^3 g}, \quad (4.8)$$

причем $E = 2g$.

Когда $e \rightarrow 1$, то $g \rightarrow 0$, и потому

$$\cos g \rightarrow 1; \quad G(g) \rightarrow 1/3.$$

Отсюда следует, что уравнение (4.7) действительно в пределе обратится в (4.4) и что

$$\lim \sigma = \lim (\varepsilon^{-1/2} \sin g) = \sigma_0.$$

Выразим координаты (4.2) через σ . Принимая во внимание (4.8), получим

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = 2q \sqrt{1 - \varepsilon} \sigma \cos g. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.7) и (4.8) должны быть решены относительно σ и g . Вместо g удобно ввести другую вспомогательную неизвестную, а именно,

$$\zeta = \sin^2 g. \quad (4.10)$$

Тогда эти уравнения примут такой вид:

$$\zeta = \varepsilon \sigma^2; \quad \sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta) = B, \quad (4.11)$$

где

$$U(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k} \sqrt{1 - \zeta}; \quad V(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k} G(g), \quad (4.12)$$

или, как нетрудно видеть,

$$U(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\zeta^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\zeta^3 - \dots \right),$$

$$V(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{7}\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\zeta^2 + \dots \right).$$

Формулы (4.9) напишутся так:

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = \sqrt{2} k q \sqrt{1 - \varepsilon} \sigma U(\zeta) = k^2 q U(\varepsilon) \cdot \sigma U(\zeta). \quad (4.13)$$

Решение уравнений (4.11) относительно σ и ζ выполняется весьма просто последовательными приближениями, так как ζ очень мало, а функции (4.12) при малых значениях ζ изменяются медленно. Для первого приближения можно взять $\zeta=0$; тогда уравнения (4.11) обратятся в (4.4) и мы будем иметь $\sigma = \sigma_0$. Это значение можно найти, таким образом, при помощи таблицы V. Для получения более точного значения σ вычислим B_0 по формулам

$$\zeta_0 = \varepsilon \sigma_0^2; \quad \sigma_0 U(\zeta_0) + \sigma_0^3 V(\zeta_0) = B_0.$$

Тогда равенство

$$\sigma - \sigma_0 = K(B - B_0), \quad (4.14)$$

где

$$K = \frac{k^2}{2} \frac{U(\zeta_0)}{1 + \varepsilon \sigma_0^2}; \quad \frac{k^2}{2} = 0,00014796 = [6,17013_{-10}],$$

которое вытекает, на основании (4.8), (4.10) и (4.1), из способа Ньютона для улучшения приближенного значения корня, даст новое, более точное значение σ . Конечно, коэффициент K , вычисленный для первого приближения, может употребляться и во всех дальнейших, если таковые понадобятся.

Можно также, вычислив B_1 для близкого к σ_0 значения σ_1 , применить линейное интерполирование.

Все выведенные для эллиптического движения формулы остаются справедливыми и для гиперболического движения (см. § 6, гл. III), но величины E и g становятся в этом случае мнимыми. Поэтому в случае гиперболического движения мы будем иметь

$$\varepsilon < 0, \quad \zeta < 0.$$

Таблица VIIb дает семизначные логарифмы функций $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ для значений ζ от $-0,20$ до $+0,20$.

Если вместо прямоугольных координат ξ и η нужны полярные координаты r и ν , то проще всего воспользоваться формулами

$$r = q(1 + \varepsilon \sigma^2); \quad \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sigma \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 - \zeta}} = \frac{U(\varepsilon)}{U(\zeta)} \sigma, \quad (4.15)$$

которые легко получаются из соотношений (4.3), (4.6), (4.8) и (2.5).

Для контроля можно воспользоваться формулой

$$r = p / (1 + e \cos v); \quad p = q(1 + e).$$

Пример. Дано: $e = 0,96764567$, $\lg q = 9,7656500$, $t - T = 63,54400$; требуется вычислить r и v .

Прежде всего находим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e) = 0,01617716,$$

$$B = q^{-3/2}(t - T) = 142,7577;$$

затем при помощи таблицы V по аргументу B получаем σ для первого приближения.

Вычисления располагаем следующим образом:

$t - T \dots$	1,803 075			$1 + e\sigma_0^2 =$	2,3557
$q\sqrt{q} \dots$	9,648 475			$k^2/2 \dots$	6,17013
$B \dots$	2,154 600			$(1 + e\sigma_0^2)^{-1} \dots$	9,62788
$B =$	142,7577			$U(\xi_0) \dots$	1,90996
				$K \dots$	7,70797
$\sigma =$	1,183 66	1,187 732	1,187 722		
$\sigma^2 =$	1,401 05	1,410 707	1,410 684		
$\xi =$	0,022 6650	0,022 8212	0,022 8209		
$U(\xi) \dots$	1,909 955	1,909 921			
$\sigma \dots$	0,073 227	0,074 719			
$I \dots$	1,983 182	1,984 640			
$V(\xi) \dots$	1,440 791	1,440 812			
$\sigma^3 \dots$	0,219 681	0,224 156			
$II \dots$	1,660 472	1,664 968			
$I =$	96,2015	96,5250			
$II =$	45,7585	46,2347			
$B =$	141,9600	142,7597			
$\Delta B =$	+ 0,7977	- 0,0020			
$\Delta B \dots$	9,90184				
$\Delta \sigma \dots$	7,60981				
$\Delta \sigma =$	+ 0,004 072	- 0,00010			
$U(\varepsilon) \dots$	1,911 392	$q \dots$	9,765 650		
$1/U(\xi) \dots$	8,090 079	$1 + e\sigma^2 \dots$	0,373 839		
$\sigma \dots$	0,074 715	$r \dots$	0,139 489		
				$e \dots$	9,985 716
$\operatorname{tg} \frac{v}{2} \dots$	0,076 186			$\cos v \dots$	9,239 670
				$e \cos v \dots$	9,225 386
$v = 100^\circ 0' 0'', 0$				$1 + e \dots$	0,293 947
				$p \dots$	0,059 597
				$1 + e \cos v \dots$	0,920 108
				(контроль) \dots	0,139 489

Примечание. Изложенный в этом параграфе метод вычисления координат в случае орбиты, эксцентриситет которой мало отличается от единицы, был развит Андуайе [1918] и М. Ф. Субботиным [1927]. Среди методов, основанных на сравнении изучаемого движения с параболическим движением, имеющим те же элементы q и T , он является наиболее простым и требует наименьшего количества вспомогательных таблиц. Действительно, сравнительно очень небольшая таблица значений функции $V(\zeta)$ все равно нужна для других целей, как увидим дальше (§ 12, гл. V), а без таблицы значений $U(\zeta)$ легко можно было бы обойтись.

В 1945 г. Херрик предложил существенно иной метод. Он основан на сравнении изучаемого эллиптического (или гиперболического) движения не с параболическим, а с прямолинейным движением, имеющим ту же величину a .

Соотношения (4.1) и (4.2) дают

$$M = E - \sin E + (1 - e) \sin E,$$

$$\xi = a [(1 - e) - (1 - \cos E)]; \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Поэтому, полагая

$$\varepsilon = 1 - e; \quad S_e(U) = \sin E,$$

$$U = E - \sin E; \quad C_e(U) = 1 - \cos E,$$

будем иметь

$$M = U + \varepsilon S_e; \quad \xi = a(\varepsilon - C_e); \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} S_e.$$

Указанные в § 9, гл. III таблицы, дающие S_e и C_e по аргументу U , позволяют удобно решать задачу о нахождении ξ и η по заданному M при сколь угодно малых значениях e . Аналогично трактуется случай гиперболического движения.

Такой метод изучения движения в случае, когда e близко к единице, базирующийся на соответствующем прямолинейном движении, является теоретически наиболее простым, но он требует специальных, довольно обширных таблиц [Херрик, 1953].

§ 5. Вычисление эллиптических и экваториальных гелиоцентрических координат

После того как вычислены орбитальные координаты, можно легко найти положение светила как в эллиптической, так и в экваториальной системах координат.

Элементы орбиты i, Ω, ω будем всегда считать отнесенными к эллиптической системе координат $Sx_c y_c z_c$, в которой за основную плоскость принята плоскость эклиптики для какого-либо определенного момента времени, а ось Sx_c направлена в точку весеннего равноденствия для того же момента. Элементы, отнесенные к такой системе координат, будем называть эллиптическими.

Те же самые элементы орбиты, отнесенные к экваториальной системе координат $Sxyz$, в которой основная плоскость есть плоскость экватора, а ось Sx направлена в точку весеннего равноденствия, будем обозначать через i', Ω', ω' и называть экваториальными элементами.

Для вычисления эклиптических координат может служить формула (8.4) гл. III, дающая

$$\{x_c, y_c, z_c\} = Z(\Omega) X(i) Z(\omega) \{\xi, \eta, 0\},$$

где

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a\sqrt{1-e^2} \sin E. \quad (5.1)$$

Перемножение первых трех множителей в правой части этой формулы дает

$$\{x_c, y_c, z_c\} = O_c \cdot \{\xi, \eta, 0\}, \quad (5.2)$$

где

$$O_c = Z(\Omega) X(i) Z(\omega) = \begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Элементы этой матрицы, которую целесообразно назвать эклиптической орбитальной матрицей, даются формулами (8.6) гл. III. Эти элементы представляют собой косинусы углов, образуемых орбитальными осями с осями координат эклиптической системы координат.

Если пользуются орбитальными полярными координатами r и v , то применяются формулы (3.7) гл. III, дающие

$$\left. \begin{aligned} x_c &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y_c &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z_c &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где

$$u = \omega + v.$$

Перейдем теперь к нахождению экваториальных координат. Они связаны с эклиптическими соотношениями

$$\{x, y, z\} = X(\epsilon) \{x_c, y_c, z_c\}, \quad (5.5)$$

так как эклиптическая система получается из экваториальной вращением на угол ϵ (наклон эклиптики к экватору) около оси абсцисс.

Соотношения (5.2) и (5.5) дают

$$\{x, y, z\} = X(\epsilon) \cdot O_c \cdot \{\xi, \eta, 0\}. \quad (5.6)$$

Введя экваториальную орбитальную матрицу, определяемую равенством

$$O = X(\epsilon) Z(\Omega) X(i) Z(\omega) = \begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix}, \quad (5.7)$$

можно равенство (5.6) записать так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

поскольку третий столбец матрицы (5.7) здесь может быть опущен.

Учитывая выражения (5.1), введем еще следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= aP_x; & A_y &= aP_y; & A_z &= aP_z, \\ B_x &= bQ_x; & B_y &= bQ_y; & B_z &= bQ_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где $b = a\sqrt{1-e^2}$. Тогда соотношение (5.8) примет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos E - e \\ \sin E \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Векторы $P(P_x, P_y, P_z)$ и $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$, так же как векторы $A = aP$ и $B = bQ$, называются векторными элементами орбиты. Иногда это название распространяют и на вектор $R(R_x, R_y, R_z)$.

Два вектора, P и Q , вполне определяют положение орбиты в пространстве, а следовательно, и элементы i, Ω, ω .

Вычисление компонент единичных векторов P, Q, R , направленных по орбитальным осям координат, производится обычно путем численного перемножения матриц, стоящих в левой части формулы (5.7). Для контроля употребляются соотношения

$$P^2 = Q^2 = R^2 = 1, \quad Q \cdot R = R \cdot P = P \cdot Q = 0.$$

Явные выражения элементов экваториальной орбитальной матрицы (5.7) нам будут нужны для решения обратной задачи — нахождения элементов орбиты по векторам P и Q . Эти выражения таковы:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ R_x &= \sin i \sin \Omega, \\ R_y &= -\sin i \cos \Omega \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon, \\ R_z &= -\sin i \cos \Omega \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Чтобы получить выражения P_x, P_y, \dots, R_z через экваториальные элементы, нужно в написанных формулах заменить i, Ω, ω через i', Ω', ω' и положить $\varepsilon = 0$.

Постоянные Гаусса. Если употребляются полярные орбитальные координаты (что бывает удобно при пользовании логарифмами), то формулам (5.8) можно придать другой вид. Положим

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sin a \sin (A + \omega); & Q_x &= \sin a \cos (A + \omega), \\ P_y &= \sin b \sin (B + \omega); & Q_y &= \sin b \cos (B + \omega), \\ P_z &= \sin c \sin (C + \omega); & Q_z &= \sin c \cos (C + \omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Этими равенствами и дополнительными условиями

$$\sin a > 0; \quad \sin b > 0; \quad \sin c > 0 \quad (5.13)$$

величины a, b, c, A, B, C , носящие название постоянных Гаусса, определяются вполне однозначно.

Подставив выражения (5.12) в формулы (5.8) и выразив ξ, η через r, v , получим

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A + u), \\ y &= r \sin b \sin (B + u), \\ z &= r \sin c \sin (C + u), \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

где $u = \omega + v$.

Для вычисления постоянных Гаусса можно дать формулы более удобные, нежели (5.12). В самом деле, подстановка выражений (5.4) в соотношение (5.5) дает

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i, \\ y &= r \cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + r \sin u (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon), \\ z &= r \cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + r \sin u (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon). \end{aligned}$$

Отождествив эти равенства с (5.14), получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega, \\ \sin a \cos A &= -\sin \Omega \cos i, \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon, \\ \sin b \cos B &= \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon, \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon, \\ \sin c \cos C &= \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Отсюда при условиях (5.13) однозначно находятся постоянные Гаусса. Для контроля вычислений можно пользоваться следующими легко выводимыми формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c &= 2, \\ \sin a \cos A \operatorname{tg} i &= \sin b \sin c \sin (C - B). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Можно также употреблять для контроля соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 a \sin^2 (A + \omega) + \sin^2 b \sin^2 (B + \omega) + \sin^2 c \sin^2 (C + \omega) &= 1, \\ \sin^2 a \cos^2 (A + \omega) + \sin^2 b \cos^2 (B + \omega) + \sin^2 c \cos^2 (C + \omega) &= 1, \\ \sin^2 a \sin 2(A + \omega) + \sin^2 b \sin 2(B + \omega) + \sin^2 c \sin 2(C + \omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

непосредственно вытекающие из равенств (5.12).

Углу ω здесь можно придавать произвольное значение.

Полезно также иметь в виду, что при $i=0$ имеют место равенства

$$A = \Omega + 90^\circ; \quad B = \Omega; \quad C = \Omega.$$

При малых значениях i они должны приближенно выполняться.

Формулы, выражающие постоянные Гаусса через экваториальные элементы, будут даны в следующем параграфе.

Нетрудно видеть, что a, b, c суть углы, образованные орбитальной осью $S\xi$ (перпендикулярной к плоскости орбиты) с экваториальными осями координат.

§ 6. Переход от эклиптических элементов орбиты к экваториальным и обратно

Положение орбиты чаще всего определяется эклиптической системой элементов i, Ω, ω . Но в некоторых случаях приходится пользоваться экваториальными элементами i', Ω', ω' . Чтобы найти эти последние, рассмотрим сферический треугольник, образованный экватором, эклиптической и орбитой светила. Углы этого треугольника равны $i, 180^\circ - i'$ и ϵ , причем стороны, противолежащие двум первым углам, равны соответственно Ω' и Ω ; сторону, противолежащую углу ϵ , обозначим через d . Очевидно, $d = \omega' - \omega$.

Основные формулы сферической тригонометрии дают

$$\left. \begin{aligned} \sin i' \sin \Omega' &= \sin i \sin \Omega, \\ \sin i' \cos \Omega' &= \cos i \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon \cos \Omega, \\ \cos i' &= \cos i \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \cos \Omega, \\ \sin i' \sin d &= \sin \epsilon \sin \Omega, \\ \sin i' \cos d &= \sin i \cos \epsilon + \cos i \sin \epsilon \cos \Omega, \\ \omega' &= \omega + d. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Можно воспользоваться также формулами Деламбра:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' + d) &= \cos \frac{1}{2} (i - \epsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega, \\ \cos \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' + d) &= \cos \frac{1}{2} (i + \epsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega, \\ \sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\Omega' - d) &= \sin \frac{1}{2} (i - \epsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega, \\ \sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\Omega' - d) &= \sin \frac{1}{2} (i + \epsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega, \\ \omega' &= \omega + d. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Для обратного перехода от экваториальных элементов к эклиптическим служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= \sin i' \sin \Omega', \\ \sin i \cos \Omega &= -\cos i' \sin \varepsilon + \sin i' \cos \varepsilon \cos \Omega', \\ \cos i &= \cos i' \cos \varepsilon + \sin i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \sin i \sin d &= \sin \varepsilon \sin \Omega', \\ \sin i \cos d &= \sin i' \cos \varepsilon - \cos i' \sin \varepsilon \cos \Omega', \\ \omega &= \omega' - d, \end{aligned} \right\} (6.3)$$

или, аналогично (6.2),

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega', \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega', \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \Omega', \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \Omega', \\ \omega &= \omega' - d. \end{aligned} \right\} (6.4)$$

Если пользоваться экваториальными элементами i' , Ω' , ω' , то формулы (5.15), служащие для вычисления постоянных Гаусса, можно заменить такими:

$$\left. \begin{aligned} \sin a' \sin A' &= \cos \Omega', \\ \sin a' \cos A' &= -\sin \Omega' \cos i', \\ \sin b' \sin B' &= \sin \Omega', \\ \sin b' \cos B' &= \cos \Omega' \cos i', \\ c' &= i'; \quad C' = 0, \end{aligned} \right\} (6.5)$$

получающимися из них при $\varepsilon=0$.

Легко видеть при помощи соотношений (6.1), что

$$a' = a; \quad b' = b; \quad c' = c.$$

Таким образом, для вычисления прямоугольных экваториальных координат будем иметь следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + \omega' + v), \\ y &= r \sin b \sin (B' + \omega' + v), \\ z &= r \sin c \sin (C' + \omega' + v), \end{aligned} \right\} (6.6)$$

причем очевидно, что

$$A' + \omega' = A + \omega; \quad B' + \omega' = B + \omega; \quad C' + \omega' = C + \omega.$$

§ 7. Вычисление эфемерид малых планет и комет

В предыдущих параграфах были подробно рассмотрены способы нахождения прямоугольных гелиоцентрических координат светил. Зная прямоугольные гелиоцентрические экваториальные координаты x , y , z , по формулам переноса начала легко получить геоцентрические экваториальные координаты. Они будут равны

$$x+X; \quad y+Y; \quad z+Z,$$

где через X , Y , Z обозначены геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты Солнца.

Обозначим через ρ , α и δ полярные геоцентрические координаты — геоцентрическое расстояние, прямое восхождение и склонение. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y + Y, \\ \rho \sin \delta &= z + Z. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Эти формулы являются основой сопоставления теории с наблюдениями, так как находимые по ним значения α и δ можно сравнивать (после учета некоторых поправок, рассматриваемых в гл. VII) с наблюдаемыми значениями этих величин.

Координаты Солнца X , Y , Z известны из теории движения Земли. При помощи астрономических ежегодников они легко могут быть найдены для любого момента времени.

Формулы (7.1) служат как для вычисления изолированных положений светил, так и для вычисления эфемерид.

Эфемеридой называется таблица геоцентрических положений светила для ряда равноотстоящих моментов, позволяющая достаточно удобно находить его положения для всех промежуточных моментов.

Эфемериды бывают двух родов. Для того чтобы можно было найти и наблюдать малую планету или комету, вычисляется **поисковая эфемерида**. Так как точность до $1'$ здесь вполне достаточна, то вычисление такой эфемериды производится с четырьмя или пятью знаками. Точные эфемериды вычисляются в тех случаях, когда нужно сравнить группу близких между собой наблюдений с теорией. Обычно они вычисляются с точностью до $0^{\circ},01$ по прямому восхождению и до $0'',1$ по склонению.

Отличие вычисления эфемериды от вычисления изолированных положений светил заключается прежде всего в том, что при вычислении эфемериды почти весь вычислительный процесс удобно и надежно контролируется при помощи разностей. Кроме того, решение уравнения Кеплера существенно облегчается тем,

что экстраполирование дает почти точные значения E для дальнейших моментов, как только получены значения этой величины для 2—3 первых моментов.

Вычисление эфемериды начинается с нахождения векторов P и Q , рассмотренного в § 5.

В случае эллиптического движения вычисляем вспомогательные величины ($b = a\sqrt{1 - e^2}$):

$$\left. \begin{aligned} A_x &= aP_x; & A_y &= aP_y; & A_z &= aP_z, \\ B_x &= bQ_x; & B_y &= bQ_y; & B_z &= bQ_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

после чего формулы (7.1) дают

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= A_x (\cos E - e) + B_x \sin E + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= A_y (\cos E - e) + B_y \sin E + Y, \\ \rho \sin \delta &= A_z (\cos E - e) + B_z \sin E + Z. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Если вычисления производятся при помощи указанных в § 2 таблиц Иннеса или Штракке, то вместо величин B_x, B_y, B_z употребляются величины

$$B'_x = aQ_x; \quad B'_y = aQ_y; \quad B'_z = aQ_z.$$

В случае параболического движения пользуются вспомогательными величинами

$$\left. \begin{aligned} m_x &= qP_x; & m_y &= qP_y; & m_z &= qP_z, \\ n_x &= 2qQ_x; & n_y &= 2qQ_y; & n_z &= 2qQ_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

и геоцентрические положения находят по формулам

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= m_x (1 - \sigma^2) + n_x \sigma + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= m_y (1 - \sigma^2) + n_y \sigma + Y, \\ \rho \sin \delta &= m_z (1 - \sigma^2) + n_z \sigma + Z. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Наконец, в случае движения по орбите, эксцентриситет которой близок к единице, по формулам § 4 находят ξ, η . Формулы (5.8) дадут x, y, z , после чего вычисление заканчивается по формулам (7.1).

Если вычисления выполняются при помощи логарифмов, то гелиоцентрические координаты вычисляют обычно при помощи постоянных Гаусса, как это было показано в § 5.

Барицентрическая эфемерида. В формулах (7.1) обычно берутся геоцентрические координаты Солнца X_g, Y_g, Z_g , что дает геоцентрические координаты светила $\alpha_g, \delta_g, \rho_g$.

Так как центр Земли обращается вокруг центра инерции системы Земля — Луна в 27 суток, то при шаге эфемериды, превышающем 4—5 суток, ход разностей X_g, Y_g, Z_g , а следовательно, и α_g, δ_g , не отличается должной плавностью (если эфемерида

вычисляется с большой точностью), даже в том случае, когда гелиоцентрические координаты светила x, y, z меняются очень плавно. Чтобы облегчить интерполирование и сделать его более точным, приходится уменьшать шаг.

В подобных случаях вместо геоцентрической эфемериды иногда употребляют барицентрическую, т. е. такую, в которой за начало координат принят центр инерции системы Земля — Луна.

Чтобы получить барицентрические координаты $\alpha_b, \delta_b, \rho_b$, нужно в формулы (7.1) подставить барицентрические координаты Солнца X_b, Y_b, Z_b . Для вычисления этих последних служат следующие легко выводимые соотношения:

$$\left. \begin{aligned} X_b &= X_g - dX; & Y_b &= Y_g - dY; & Z_b &= Z_g - dZ, \\ dX &= B \operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \cos \alpha_{\zeta}, \\ dY &= B \operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \cos \delta_{\zeta} \sin \alpha_{\zeta}, \\ dZ &= B \operatorname{cosec} \pi_{\zeta} \sin \delta_{\zeta}, \end{aligned} \right\} (7.6)$$

$B = \frac{\mu}{1+\mu} \sin 8'',80 = 5,179 \cdot 10^{-7}$; $\lg B = 3,7143_{-10}$, где через $\alpha_{\zeta}, \delta_{\zeta}, \pi_{\zeta}$ обозначены прямое восхождение, склонение и параллакс Луны, а через μ — отношение масс Луны и Земли.

При вычислении B было принято:

$$\mu = 1/81,375 \text{ [E. Rabe, 1949].}$$

При сравнении барицентрической эфемериды с наблюдениями надо либо от полученных из наблюдений (после учета параллакса) геоцентрических α_g, δ_g перейти к барицентрическим α_b, δ_b , либо полученные из эфемериды барицентрические координаты обратить в геоцентрические. Для этого служат следующие формулы, получаемые из (7.1) дифференцированием:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_g &= \alpha_b + da; & \delta_g &= \delta_b + d\delta; & \rho_g &= \rho_b + d\rho, \\ \rho \cos \delta \operatorname{arc} 1'' \cdot da &= -\sin \alpha dX + \cos \alpha dY, \\ \rho \operatorname{arc} 1'' \cdot d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha dX - \sin \delta \sin \alpha dY + \cos \delta dZ, \\ d\rho &= \cos \delta \cos \alpha dX + \cos \delta \sin \alpha dY + \sin \delta dZ. \end{aligned} \right\} (7.7)$$

Величины dX, dY, dZ даются формулами (7.6).

§ 8. Поискные эфемериды

За немногими исключениями, малую планету целесообразно наблюдать лишь около времени оппозиции. Поэтому эфемериды, предназначенные для поисков и наблюдений малых планет, обычно охватывают 50-дневный интервал, середина которого

приблизительно совпадает с моментом оппозиции. Шаг теперь берется, как общее правило, 10-дневный, тогда как до 1950 г. употреблялся преимущественно 8-дневный.

Вычисление поисковой эфемериды производится обычно с четырьмя знаками, вследствие чего широко используются вспомогательные таблицы, указанные в § 2.

Чтобы начать вычисление эфемериды, нужно хотя бы приблизительно найти время оппозиции. Для планет, которые уже наблюдались в нескольких оппозициях, достаточно сопоставить моменты последовательных оппозиций, чтобы предсказать следующую оппозицию с точностью до нескольких дней.

Если речь идет о вновь открытой планете, то нужно найти дату оппозиции в год открытия и период синодического обращения планеты.

Для получения момента оппозиции по прямому восхождению сопоставляю прямые восхождения планеты α и прямые восхождения Солнца A . При помощи интерполирования находят момент, когда разность $\alpha - A - 12^h$ обращается в нуль, — это и будет время оппозиции по прямому восхождению.

Синодическое обращение планеты S в сутках вычисляется по формуле

$$S = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{n_{\oplus} - n} = \frac{1\,296\,000}{n_{\oplus} - n},$$

где n — среднее суточное движение планеты, выраженное в секундах дуги, а $n_{\oplus} = 3548''$ — среднее суточное движение Земли.

Если эксцентриситет невелик, то момент оппозиции, вычисленный при помощи синодического обращения, достаточно точен для того, чтобы начинать вычисление эфемериды. Если же эксцентриситет значителен, то бывает полезно найти время оппозиции точнее. Делается это следующим образом. Для двух моментов, t_1 и t_2 , охватывающих предполагаемый момент оппозиции и отстоящих примерно на 40—60 дней, вычисляются гелиоцентрические долготы планеты l_1 и l_2 . Вычисление ведется с точностью до 1° . Сначала находятся средние аномалии M_1 и M_2 , затем истинные аномалии v_1 и v_2 (проще всего при помощи таблиц Титъена или Петерса), и, наконец, искомые долготы по формулам

$$\operatorname{tg}(l_1 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v_1 + \omega),$$

$$\operatorname{tg}(l_2 - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v_2 + \omega).$$

Обозначим через L_1 и L_2 взятые из эфемерид для тех же моментов долготы Земли. В таком случае момент оппозиции по долготе получится по формуле

$$T = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)(l_1 - L_1)}{(l_1 - L_1) - (l_2 - L_2)} = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)(l_2 - L_2)}{(l_1 - L_1) - (l_2 - L_2)}.$$

Около этого момента и располагается середина эфемериды.

Для облегчения поисков и особенно идентификации планеты поисковая эфемерида сопровождается обычно указанием изменений прямого восхождения и склонения, соответствующих изменению средней аномалии на 1° , а также отношением этих величин, которое называется вариацией. Вариация показывает, насколько должно сдвинуться положение планеты по склонению при определенном сдвиге по прямому восхождению. Таким образом, вариация дает возможность судить, насколько изменение средней аномалии может привести эфемериду в совпадение с наблюдениями.

Вариация изменяется настолько медленно, что обычно ее дают только для середины эфемериды, или только в начале и в конце.

Эфемерида малой планеты снабжается указанием ее видимой звездной величины. Так как малая планета светит отраженным солнечным светом, то ее блеск I_m обратно пропорционален не только квадрату расстояния от Земли, но и квадрату расстояния от Солнца. Поэтому

$$I_m = I_g r^{-2} \rho^{-2},$$

где через I_g обозначен блеск для $r = \rho = 1$.

Если звездные величины, соответствующие I_m и I_g , обозначить через m и g , то, по закону Погсона,

$$\lg(I_m/I_g) = 0,4(g - m).$$

Таким образом,

$$m = g + 5 \lg(rp). \quad (8.1)$$

Входящая в эту формулу величина g выводится из нескольких наблюдаемых значений m . Когда g найдено, формула (8.1) служит для предвычисления звездной величины малой планеты.

Для характеристики средних условий видимости планеты употребляется величина

$$m_0 = g + 5a(a - 1).$$

Она равна звездной величине планеты при $r = a$, $\rho = a - 1$.

Звездные величины комет приближенно представляются формулой

$$m = g + n \lg r + 5 \lg \rho,$$

Однако стоящий в ней коэффициент n имеет часто различные значения даже у одной и той же кометы в различные периоды ее существования. Поэтому предсказание видимой величины кометы должно сопровождаться указанием, какое именно значение n было принято. Во многих случаях ограничиваются лишь помещением в эфемериде значений r и ρ .

§ 9. Движение по орбите, мало наклоненной к эклиптике

Случай, когда наклон орбиты i очень мал, представляет некоторые особенности, на которых следует остановиться. С таким случаем мы встречаемся при изучении движения всех больших планет (исключением можно считать только Плутон, у которого $i=17^\circ$). Среди малых планет этот случай также встречается весьма часто: для 33% известных в настоящее время малых планет наклон орбиты меньше 6° , для 59% он меньше 10° .

Чем ближе к нулю наклон i , тем менее определенным становится положение восходящего узла орбиты. При $i=0$ положение узла становится полностью неопределенным. Вследствие этого долгота восходящего узла Ω находится из наблюдений с ошибкой, неограниченно возрастающей по мере приближения i к нулю.

Чтобы избежать возникающих отсюда неудобств при определении положения перигелия, вместо элемента ω пользуются элементом

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (9.1)$$

носящим название долготы перигелия.

На гелиоцентрической небесной сфере долгота перигелия есть, таким образом, ломанная дуга, измеряемая от точки весеннего равноденствия по эклиптике до восходящего узла, а затем по орбите до перигелия.

Величина

$$w = \pi + v = \Omega + u, \quad (9.2)$$

измеряемая аналогичным образом, называется долготой планеты в орбите. Она служит в рассматриваемом случае вместо u для фиксирования положения планеты в орбите.

Формулы (5.4), дающие прямоугольные эклиптические координаты, можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= r \left[\cos w + 2 \sin \Omega \sin (w - \Omega) \sin^2 \frac{i}{2} \right], \\ y_c &= r \left[\sin w - 2 \cos \Omega \sin (w - \Omega) \sin^2 \frac{i}{2} \right], \\ z_c &= r \sin (w - \Omega) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Отсюда видно, что погрешность в Ω будет очень мало влиять, при малых значениях i , на координаты, если долгота в орбите найдена независимо от Ω .

При изучении движения больших планет вместо прямоугольных эклиптических координат x , y , z обычно употребляют соответствующие им полярные эклиптические координаты — радиус-

вектор r , долготу l и широту b , определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} x_c &= r \cos b \cos l, \\ y_c &= r \cos b \sin l, \\ z_c &= r \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Для вычисления сферических координат l и b вместо этих формул употребляется следующий прием.

Обратимся к прямоугольному сферическому треугольнику на гелиоцентрической небесной сфере (рис. 10), образованному эклипстикой NQ , орбитой NP и кругом широт PQ , проходящим через положение планеты P .

Так как $l = \angle QN$, $b = \angle PQ$,

то
$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u, \quad (9.5)$$

$$\sin b = \sin i \sin u. \quad (9.6)$$

Уравнение (9.5) имеет вид

$$\operatorname{tg} Y = \mu \operatorname{tg} X \quad (\mu > 0). \quad (9.7)$$

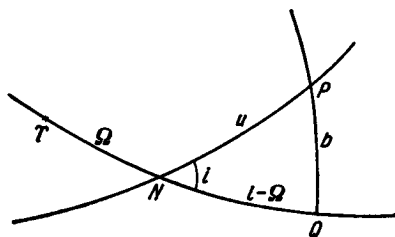


Рис. 10.

Такие уравнения решаются при помощи следующей формулы:

$$Y = X + \sum_1^{\infty} \frac{1}{h} \beta^h \sin 2hX, \quad (9.8)$$

где

$$\beta = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

В рассматриваемом случае

$$\beta = \frac{\cos i - 1}{\cos i + 1} = -\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2},$$

следовательно,

$$l - \Omega = u - \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \cdot \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \cdot \sin 4u - \dots$$

Разность между гелиоцентрической долготой l и долготой в орбите w называется приведением к эклиптике. Обозначая эту величину через R , получим

$$l = w + R,$$

где, учитывая (9.2),

$$R = -\frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \dots,$$

$$u = w - \Omega.$$

Для каждой большой планеты составлена таблица, дающая R по аргументу u при некотором среднем значении i , а также изменения R , соответствующие вековым изменениям i .

Другая таблица, вычисленная непосредственно по формуле (9.6), дает широту b по аргументу u . Таблицы такого рода и послужили основанием к тому, чтобы назвать величину u аргументом широты.

Примечание. Чтобы получить разложение (9.8), можно поступить следующим образом.

Положим

$$x = \exp iX, \quad y = \exp iY,$$

тогда уравнение (9.7) примет вид

$$\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = \mu \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Следовательно,

$$y^2 = \frac{1 - \mu + (1 + \mu)x^2}{1 + \mu + (1 - \mu)x^2} = x^2 \frac{1 - \beta x^{-2}}{1 - \beta x^2},$$

или, после логарифмирования,

$$Y = X + \frac{1}{2i} \ln(1 - \beta x^{-2}) - \frac{1}{2i} (1 - \beta x^2).$$

Так как $|\beta| < 1$, то после разложения логарифмов в ряды получим формулу (9.8).

НАХОЖДЕНИЕ ОРБИТЫ ПО НАЧАЛЬНЫМ ИЛИ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Первый способ

Невозмущенное движение светила в общем случае определяется шестью элементами орбиты:

$$a, e, M_0, \Omega, i, \omega. \quad (1.1)$$

Вместо трех последних элементов при вычислении эфемериды обычно пользуются (§ 5 гл. IV) векторными элементами P и Q , или эквивалентными им величинами A и B .

С другой стороны, движение материальной точки вполне определяется заданием ее положения и скорости для какого-либо момента времени. Таким образом, как элементы (1.1) однозначно определяют величины

$$x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \quad (1.2)$$

для момента t_0 , так и, наоборот, задание величин (1.2) однозначно определяет элементы (1.1).

Для нахождения элементов орбиты по величинам (1.2) нужно, очевидно, воспользоваться первыми интегралами задачи двух тел, подробно изученными в гл. III. Для сокращения письма величину

$$\kappa = k \sqrt{1+m},$$

фигурирующую в этих интегралах, мы заменим везде через k . Если масса m заметно отличается от нуля и должна быть учтена, то восстановление в полученных формулах опущенного множителя $\sqrt{1+m}$ не представит труда.

Чтобы внести полную определенность и получить формулы в наиболее удобном для практических приложений виде, будем считать, что величины (1.2) даны в экваториальной системе координат.

Формулы

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; & V_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2, \\ r_0 \dot{r}_0 &= x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

позволяют найти радиус-вектор, квадрат скорости и радиальную скорость. После этого интеграл энергии, представленный в форме

$$1/a = 2/r_0 - k^{-2} V_0^2; \quad k^{-2} = 3379,3807, \quad (1.4)$$

даст большую полуось орбиты.

Дифференцирование уравнения Кеплера дает

$$\dot{E} = k/r \sqrt{a}, \quad (1.5)$$

вследствие чего из соотношений

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

имеем

$$r \dot{r} = k \sqrt{a} e \sin E, \quad (1.6)$$

$$V^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = a(1 - e^2 \cos^2 E) k^2 r^{-2} = k^2 r^{-1} (1 + e \cos E).$$

Положив здесь $t = t_0$, получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} e \sin E_0 &= k^{-1} r_0 \dot{r}_0 / \sqrt{a}; & k^{-1} &= 58,132441, \\ e \cos E_0 &= 1 - a/r_0 = k^{-2} V_0^2 r_0 - 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

позволяющие найти e и E_0 .

Для контроля может служить соотношение

$$a(1 - e^2) = k^{-2} [r_0^2 V_0^2 - (r_0 \dot{r}_0)^2].$$

Для вычисления третьего из элементов (1.1) служит уравнение Кеплера:

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0.$$

Чтобы найти векторные элементы, обратимся к формулам (5.10) гл. IV, выражающим гелиоцентрические экваториальные координаты через эксцентрическую аномалию. Эти формулы дают, при помощи (1.5),

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A_x (\cos E_0 - e) + B_x \sin E_0, \\ \dot{x}_0 &= (-A_x \sin E_0 + B_x \cos E_0) k / r_0 \sqrt{a}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Отсюда найдем A_x и B_x . Перестановка букв даст остальные компоненты этих векторов. Таким образом, получим следующие

рабочие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= Kx_0 - L\dot{x}_0; & B_x &= Mx_0 + N\dot{x}_0, \\ A_y &= Ky_0 - L\dot{y}_0; & B_y &= My_0 + N\dot{y}_0, \\ A_z &= Kz_0 - L\dot{z}_0; & B_z &= Mz_0 + N\dot{z}_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} K &= ar_0^{-1} \cos E_0; & M &= ar_0^{-1} \sin E_0, \\ L &= k^{-1} a^{3/2} \sin E_0; & N &= k^{-1} a^{3/2} (\cos E_0 - e). \end{aligned}$$

Контроль:

$$\begin{aligned} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 &= a^2; & B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 &= a^2(1 - e^2), \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= 0. \end{aligned}$$

Вычисление векторных элементов P и Q заканчивается по формулам

$$\left. \begin{aligned} b &= a \sqrt{1 - e^2}, \\ P_x &= a^{-1} A_x; \dots, \\ Q_x &= b^{-1} B_x; \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Для получения эклиптических элементов i , Ω , ω надо обратиться к соотношениям (5.11) гл. IV, которые дают

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ \sin i \cos \omega &= Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\ \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Контроль:

$$P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega.$$

Если формула (1.4) дала $1/a=0$, то движение происходит по параболе.

Дифференцирование формул параболического движения

$$r = q(1 + \sigma^2); \quad \sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} \frac{t - T}{q^{3/2}}$$

дает

$$r\dot{r} = k\sqrt{2q}\sigma.$$

Таким образом, для момента t_0 имеем

$$\sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} = \frac{r_0 \dot{\sigma}_0}{k\sqrt{2q}}, \quad (1.12)$$

что дает возможность при помощи соотношений

$$B = \frac{V\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right); \quad T = t_0 - q^{3/2} B, \quad (1.13)$$

найти момент прохождения через перигелий. Величина B может быть также найдена при помощи таблицы V.

Если формула (1.4) дала $a < 0$, то движение происходит по гиперболе. В этом случае в указанные выше формулы для эллиптического движения нужно внести изменения в соответствии с тем, что было сказано в § 6 гл. III.

§ 2. Вычисление орбиты по положению и скорости в начальный момент. Второй способ

После того как по формулам (1.3) и (1.4) предыдущего параграфа найдена большая полуось орбиты, обращаемся к интегралам площадей, выражаемым соотношениями (3.4) гл. III. Применив эти соотношения к моменту $t = t_0$ и написав их для экваториальной системы координат, получим

$$\left. \begin{aligned} k\sqrt{p} \sin i' \sin \Omega' &= y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0, \\ k\sqrt{p} \sin i' \cos \Omega' &= x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0, \\ k\sqrt{p} \cos i' &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Эти уравнения однозначно определяют параметр p и элементы i' , Ω' , фиксирующие положение плоскости орбиты.

Соотношение

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.2)$$

дает эксцентриситет, однако оно мало пригодно в тех случаях, когда эксцентриситет невелик.

Уравнение орбиты (4.3) гл. III напишем в таком виде:

$$e \cos v = pr^{-1} - 1 \quad (2.3)$$

и продифференцируем. Это даст

$$e \sin v \dot{v} = pr^{-2} \dot{r},$$

откуда, пользуясь интегралом площадей

$$r^2 \dot{v} = k\sqrt{p},$$

получим

$$e \sin v = k^{-1} \sqrt{p} \dot{r}. \quad (2.4)$$

Применив соотношения (2.3) и (2.4) к моменту $t=t_0$, получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} r_0 e \sin v_0 &= k^{-1} \sqrt{p} r_0 \dot{\sigma}_0; & k^{-1} &= 58,132441, \\ r_0 e \cos v_0 &= p - r_0; & r_0 \dot{\sigma}_0 &= x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

дающие возможность найти e и v_0 . Для контроля можно воспользоваться соотношением (2.2).

Обратимся теперь к выражениям прямоугольных гелиоцентрических координат через истинную аномалию, даваемым формулами (3.7) гл. III. Применив их к моменту $t=t_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r_0 (\cos u'_0 \cos \Omega' - \sin u'_0 \sin \Omega' \cos i'), \\ y_0 &= r_0 (\cos u'_0 \sin \Omega' + \sin u'_0 \cos \Omega' \cos i'), \\ z_0 &= r_0 \sin u'_0 \sin i', \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где $u'_0 = v_0 + \omega'$.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} r_0 \sin u'_0 &= (y_0 \cos \Omega' - x_0 \sin \Omega') \sec i' = z_0 \operatorname{cosec} i', \\ r_0 \cos u'_0 &= x_0 \cos \Omega' + y_0 \sin \Omega', \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

что позволяет найти u'_0 , а следовательно, и

$$\omega' = u'_0 - v_0. \quad (2.8)$$

Остается вычислить последний элемент — время прохождения через перигелий T (или среднюю аномалию эпохи M_0). Этот элемент находится различно в зависимости от вида орбиты.

Для эллиптической орбиты с не очень большим эксцентриситетом находим эксцентрическую аномалию E_0 , а по ней — среднюю аномалию M_0 . Для этого служат формулы

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2}; \quad M_0 = E_0 - e \sin E_0.$$

Среднее суточное движение n и время прохождения через перигелий T , представляющее интерес для комет, вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} n &= ka^{-3/2}; & T &= t_0 - M_0/n, \\ k^\circ &= 0^\circ,98560767; & k'' &= 3548'',1876. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Для малых планет, для которых принято выражать n в секундах дуги, можно воспользоваться таблицей III.

В случае параболической орбиты, т. е. когда интеграл энергии дал $a = \infty$, имеем

$$e = 1; \quad q = \frac{1}{2} p.$$

В этом случае уравнения (2.5) целесообразно заменить такими:

$$\left. \begin{aligned} r_0 \dot{r}_0 &= x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0; & \sigma_0 &= \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} = \frac{r_0 \dot{r}_0}{k \sqrt{2q}}, \\ B &= \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_0 + \frac{1}{3} \sigma_0^3 \right); & T &= t_0 - q^{3/2} B, \\ \frac{\sqrt{2}}{k} &= 82,21168629, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

дающими как истинную аномалию v_0 , так и время прохождения через перигелий T . Вычисления облегчаются применением таблицы V.

Для эллиптических и гиперболических орбит, имеющих эксцентриситеты, близкие к единице (примерно для $0,90 < e < 1,15$), применяется способ, изложенный в § 4 гл. IV. В случае гиперболических орбит с более значительными эксцентриситетами, если бы таковые встретились, можно применить формулы, указанные в § 6 гл. III.

Найденные в этом параграфе экваториальные элементы i' , Ω' , ω' могут непосредственно употребляться для вычисления эфемериды при помощи формул (2.6). Но иногда предпочитают приводить эти формулы к логарифмическому виду путем введения постоянных Гаусса.

Полагая (§ 6, гл. IV)

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A' &= \cos \Omega', \\ \sin a \cos A' &= -\sin \Omega' \cos i', \\ \sin b \sin B' &= \sin \Omega', \\ \sin b \cos B' &= \cos \Omega' \cos i', \\ c &= i'; \quad C' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + \omega' + v), \\ y &= r \sin b \sin (B' + \omega' + v), \\ z &= r \sin c \sin (C' + \omega' + v). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Примечание. Легко получить формулы, дающие непосредственно постоянные

$$a, \dots; A_1 = A' + \omega' = A + \omega, \dots, \quad (2.13)$$

минус вычисление экваториальных элементов. В самом деле, дифференцирование первого из выражений (2.12) дает

$$\dot{x} = \dot{r} \sin a \sin (A_1 + v) + r \sin a \cos (A_1 + v) \dot{v},$$

или

$$\dot{x} - x \dot{r} r^{-1} = k \sqrt{p} r^{-1} \sin a \cos (A_1 + v),$$

так как согласно интегралу площадей

$$r^2 \dot{v} = k \sqrt{p}.$$

Применив эти соотношения, так же как формулы (2.12), к моменту $t=t_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin (A_1 + v_0) &= x_0 r_0^{-1}, \\ \sin a \cos (A_1 + v_0) &= (\dot{x}_0 r_0 - x_0 \dot{r}_0) / k \sqrt{p}, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

и аналогичные уравнения для двух других координат. Решение этих уравнений попарно даст величины (2.13).

§ 3. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Первый способ

В двух предыдущих параграфах была рассмотрена задача нахождения орбиты по начальным условиям. Теперь мы обратимся к задаче нахождения орбиты по граничным условиям, заключающейся в следующем:

Даны два гелиоцентрических положения светила, определяемых (в экваториальной системе координат) векторами

$$\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \quad (3.1)$$

и соответствующих заданным моментам t_1 и t_2 . Требуется найти элементы орбиты.

Эта задача значительно сложнее предыдущей, и ее решение мы разделим на несколько частей. Начнем с того, что решим ее при дополнительном условии: предположим, что параметр орбиты p нам уже известен.

В дальнейшем будем всегда считать, что $t_1 < t_2$ и что разность истинных аномалий v_2 и v_1 , соответствующих положениям (3.1), не превосходит 90° . Таким образом, обозначив угол между векторами (3.1) через

$$2f = v_2 - v_1, \quad (3.2)$$

будем иметь $0^\circ < 2f < 90^\circ$. Такое ограничение вполне соответствует характеру астрономических приложений рассматриваемой задачи. При этом условии задача имеет, как будет ясно из дальнейшего, решение и притом единственное. Если же $2f > 90^\circ$, то задача имеет более чем одно решение.

Чтобы найти угол $2f$, играющий весьма важную роль в дальнейшем, можно употребить следующий прием.

Пусть (рис. 11) M_1 и M_2 — положения светила, определяемые векторами (3.1). Из точки M_2 опустим перпендикуляр M_2Q на

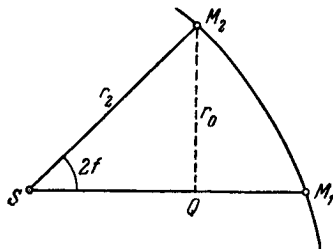


Рис. 11

вектор SM_1 и положим

$$\sigma = \frac{SQ}{SM_1} = \frac{r_2 \cos 2f}{r_1}. \quad (3.3)$$

Так как

$$r_1 r_2 \cos 2f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

то

$$\sigma = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2}. \quad (3.4)$$

Введем, далее, вспомогательный вектор $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, компоненты которого определяются равенствами

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1. \quad (3.5)$$

Равенство (3.3) показывает, что

$$r_0 = r_2 - \sigma r_1 = r_2 - \vec{SQ},$$

поэтому

$$r_0 = QM_2 = r_2 \sin 2f. \quad (3.6)$$

Чтобы получить угол $2f$, нужно, следовательно, выполнить такие операции: по формулам (3.4) и (3.5) найти x_0, y_0, z_0 ; по формуле

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

вычислить r_0 ; при помощи соотношения (3.6) найти $2f$.

Для контроля проделанных вычислений можно употребить следующую, правда, несколько громоздкую, формулу:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Она является следствием очевидного равенства

$$r_1 \times r_0 = r_1 \times r_2.$$

Отметим также следующее соотношение:

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_0 r_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2},$$

которое может иногда оказаться полезным.

Зная угол $2f$ и параметр p , легко найти каждую из истинных аномалий v_1 и v_2 . В самом деле, уравнение орбиты

$$r = p/(1 + e \cos v),$$

будучи применено к моментам t_1 и t_2 , дает

$$e \cos v_1 = q_1; \quad e \cos v_2 = q_2,$$

где для краткости положено

$$q_1 = pr_1^{-1} - 1; \quad q_2 = pr_2^{-1} - 1.$$

Второе из этих соотношений можно представить, учитывая (3.2), следующим образом:

$$e \cos(v_1 + 2f) = q_2,$$

или

$$q_1 \cos 2f - e \sin v_1 \sin 2f = q_2.$$

Это дает уравнения

$$e \sin v_1 = q_1 \operatorname{ctg} 2f - q_2 \operatorname{cosec} 2f; \quad e \cos v_1 = q_1. \quad (3.7)$$

позволяющие найти e и v_1 . Равенство (3.2) дает v_2 .

Обратимся теперь к вычислению векторных элементов P и Q .

Применив формулу (5.8) гл. IV к моментам t_1 и t_2 , получим

$$x_1 = P_x r_1 \cos v_1 + Q_x r_1 \sin v_1; \quad x_2 = P_x r_2 \cos v_2 + Q_x r_2 \sin v_2$$

и аналогичные соотношения для двух других координат.

Отсюда находим, учитывая равенство (3.2),

$$P_x = \frac{x_1 r_2 \sin v_2 - x_2 r_1 \sin v_1}{r_1 r_2 \sin 2f};$$

$$Q_x = \frac{x_2 r_1 \cos v_1 - x_1 r_2 \cos v_2}{r_1 r_2 \sin 2f}.$$

Эти формулы уже решают поставленную задачу. Но их можно заменить другими, гораздо более удобными. Так как

$$\sin v_2 = \cos v_1 \sin 2f + \sin v_1 \cos 2f,$$

$$\cos v_2 = \cos v_1 \cos 2f - \sin v_1 \sin 2f,$$

то полученные выражения можно написать, если учесть (3.3) и (3.5), следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{x_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{x_0}{r_0} \sin v_1; & Q_x &= \frac{x_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{x_0}{r_0} \cos v_1, \\ P_y &= \frac{y_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{y_0}{r_0} \sin v_1; & Q_y &= \frac{y_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{y_0}{r_0} \cos v_1, \\ P_z &= \frac{z_1}{r_1} \cos v_1 - \frac{z_0}{r_0} \sin v_1; & Q_z &= \frac{z_1}{r_1} \sin v_1 + \frac{z_0}{r_0} \cos v_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Для перехода от векторных элементов к эклиптическим элементам i , Ω , ω служат формулы (1.11).

Последний этап заключается в нахождении элементов a и M_0 или им эквивалентных.

Предположим сначала, что решение уравнений (3.7) дало для эксцентриситета значение, не превосходящее 0,9. В этом

случае по формулам

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 \quad (3.9)$$

находим эксцентрисические аномалии E_1 и E_2 .

Иногда полагают $e = \sin \varphi$ и вычисляют E_1 по одной из формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 &= \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1; \\ \sin \frac{1}{2} (v_1 - E_1) &= \sqrt{\frac{r_1}{p}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v_1. \end{aligned}$$

Для E_2 применяются аналогичные формулы.

Уравнение Кеплера дает соответствующие средние аномалии:

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1; \quad M_2 = E_2 - e \sin E_2. \quad (3.10)$$

Это позволяет найти среднее суточное движение и среднюю аномалию эпохи:

$$n = (M_2 - M_1)/(t_2 - t_1); \quad M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1). \quad (3.11)$$

Для комет обычно вычисляется, вместо M_0 , время прохождения через перигелий:

$$T = t_1 - M_1/n = t_2 - M_2/n. \quad (3.12)$$

Вычисление большой полуоси может быть выполнено двояко. С одной стороны, после нахождения e из уравнений (3.7) можно сразу воспользоваться соотношением

$$a = p/(1 - e^2) = p \sec^2 \varphi. \quad (3.13)$$

С другой стороны, воспользовавшись величиной n , полученной из (3.10) и (3.11), имеем

$$a = (k/n)^{2/3}. \quad (3.14)$$

Равенство величин (3.13) и (3.14) является не только контролем проделанных вычислений, но и свидетельством правильности значения p , положенного в основу этих вычислений. Первые попытки вычисления эллиптических орбит производились именно путем подбора такого значения p , при котором величины (3.13) и (3.14) совпадают.

Случай, когда эксцентриситет орбиты равен единице, будет рассмотрен в § 5. Может еще встретиться случай, когда эксцентриситет настолько близок к единице, что пользоваться эксцентрисической аномалией (или величиной H , заменяющей ее в гиперболическом движении) становится неудобно или даже невозможно. В этом случае, после решения уравнений (3.7),

вычисляем

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e); \quad \operatorname{tg} v_1; \quad \operatorname{tg} v_2.$$

Формулы (§ 4, гл. IV)

$$\operatorname{tg} v = \eta/\xi = k^2 U(\varepsilon) U(\zeta) \sigma (1 - \sigma^2)^{-1},$$

$$\zeta = \varepsilon \sigma^2; \quad B = \sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta)$$

дают возможность найти величины

$$B_1 = q^{-3/2}(t_1 - T); \quad B_2 = q^{-3/2}(t_2 - T) \quad (3.15)$$

при помощи немногих, быстро сходящихся приближений.

Отсюда

$$q^{-3/2} = (B_2 - B_1)/(t_2 - t_1), \quad (3.16)$$

$$T = t_1 - q^{3/2} B_1 = t_2 - q^{3/2} B_2. \quad (3.17)$$

Согласие величины (3.16), вытекающей из закона площадей, с величиной

$$q = p/(1 + e),$$

даваемой геометрическими соображениями, служит контролем вычислений и гарантией правильности принятого значения параметра p .

§ 4. Вычисление орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру. Второй способ

Задача заключается в нахождении элементов орбиты, если известны положения светила

$$\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$$

в моменты t_1 и t_2 и параметр p .

Решение задачи, изложенное в предыдущем параграфе, чаще всего употребляется в практике нахождения орбит по наблюдениям. Но иногда может оказаться более удобным следующее решение, дающее сразу элементы, определяющие положение плоскости орбиты.

Полагая опять, что $t_1 < t_2$ и что угол $2f = v_2 - v_1 < 90^\circ$, рассмотрим векторное произведение $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, абсолютную величину которого будем обозначать через

$$[r_1 r_2] = r_1 r_2 \sin 2f. \quad (4.1)$$

Компоненты этого произведения по осям координат равны

$$[r_1 r_2] R_x; \quad [r_1 r_2] R_y; \quad [r_1 r_2] R_z,$$

где через R_x , R_y , R_z обозначены, как и раньше, направляющие косинусы орбитальной оси $S\zeta$, перпендикулярной к плоскости орбиты.

Мы видели (§ 5 гл. IV), что

$$R_x = \sin i' \sin \Omega'; \quad R_y = -\sin i' \cos \Omega'; \quad R_z = \cos i'.$$

Поэтому, полагая для краткости

$$x_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1; \quad y_{12} = x_1 z_2 - x_2 z_1; \quad z_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} [r_1 r_2] \sin i' \sin \Omega' &= x_{12}, \\ [r_1 r_2] \sin i' \cos \Omega' &= y_{12}, \\ [r_1 r_2] \cos i' &= z_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

позволяющие найти элементы i , Ω' и угол $2f$. После этого уравнения (3.7) дадут e и v_1 , а соотношения

$$\left. \begin{aligned} r_1 \sin u'_1 &= (y_1 \cos \Omega' - x_1 \sin \Omega') \sec i' = z_1 \operatorname{cosec} i', \\ r_1 \cos u'_1 &= x_1 \cos \Omega' + y_1 \sin \Omega', \\ \omega' &= u'_1 - v_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

аналогичные равенствам (2.7) и (2.8), позволят найти элемент ω' .

Элементы a и M_0 (или T) находятся по формулам, указанным в предыдущем параграфе.

Если имеется в виду вычисление эфемериды, то по экваториальным элементам i' , Ω' и ω' находят постоянные Гаусса. Для этого служат формулы (2.11). Если же нужны эклиптические элементы, для их вычисления можно воспользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} [r_1 r_2] \sin i \sin \Omega &= x_{12}, \\ [r_1 r_2] \sin i \cos \Omega &= y_{12} \cos e - z_{12} \sin e, \\ [r_1 r_2] \cos i &= y_{12} \sin e + z_{12} \cos e, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

которые являются следствием соотношений (4.2) и формул поворота осей координат. Эти формулы здесь несколько удобнее, нежели формулы (6.3) гл. IV.

Чтобы найти ω , можно употребить одно из уравнений (§ 6 гл. IV):

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' + e) \sin \frac{1}{2} \Omega' \sec \frac{1}{2} i, \\ \cos \frac{1}{2} (\Omega - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' - e) \cos \frac{1}{2} \Omega' \sec \frac{1}{2} i, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где $d = \omega' - \omega$. Другое уравнение должно быть учтено при выборе квадранта.

§ 5. Нахождение параболической орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

При вычислении орбиты вновь открытой кометы обычно принимают, что комета движется по параболе. В этом случае найденные из наблюдений гелиоцентрические положения кометы

$$r_1(x_1, y_1, z_1), \quad r_2(x_2, y_2, z_2)$$

в моменты t_1 и t_2 таковы, что соответствующая им орбита есть параболическая. Зная это заранее, можно и без предварительного нахождения параметра найти все элементы орбиты.

В самом деле, после того как по формулам (3.4)—(3.6) или по формулам (4.1), (4.2) найдем угол $2f = v_2 - v_1$, обратимся к уравнению параболы, которое дает:

$$r_1 = q \sec^2 \frac{v_1}{2}, \quad r_2 = q \sec^2 \frac{v_2}{2}.$$

Эти равенства можно представить так:

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}} \cos \frac{v_1}{2} = 1; \quad \sqrt{\frac{r_2}{q}} \cos \frac{v_2}{2} = 1,$$

или

$$\sqrt{\frac{r_1}{q}} \sin \frac{v_1}{2} = \operatorname{ctg} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f; \quad \sqrt{\frac{r_1}{q}} \cos \frac{v_1}{2} = 1. \quad (5.1)$$

Отсюда можно найти как истинные аномалии v_1 и $v_2 = v_1 + 2f$, так и перигельное расстояние q .

Если угол $2f$ вычислялся по формулам (4.1) и (4.2), что попутно дало элементы i' и Ω' , то, применив (4.5), найдем ω' . Чтобы закончить вычисление элементов, остается найти момент прохождения через перигелий T . Для этого служат обычные формулы параболического движения:

$$\sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}; \quad B_1 = \sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_1^3; \quad T = t_1 - q^{3/2} B_1.$$

Вычисление T , исходя из v_2 , служит хорошим контролем. Переход от σ_1 и σ_2 к B_1 и B_2 выполняется при помощи таблицы V.

В том случае, когда предпочитают иметь дело с векторными элементами, их находят по формулам, указанным в § 3.

После этого величины

$$\left. \begin{aligned} m_x &= qP_x; & m_y &= qP_y; & m_z &= qP_z, \\ n_x &= 2qQ_x; & n_y &= 2qQ_y; & n_z &= 2qQ_z \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

дают возможность пользоваться при вычислении эфемериды формулами

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_x & n_x \\ m_y & n_y \\ m_z & n_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 - \sigma^2 \\ \sigma \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Соотношения

$$\begin{aligned} m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 &= q^2; & n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 4q^2, \\ m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z &= 0 \end{aligned}$$

могут служить для контроля величин (5.2).

§ 6. Метод Гаусса для нахождения параметра орбиты

В предыдущих параграфах было показано, что вычисление всех элементов орбиты по двум заданным гелиоцентрическим положениям светила выполняется очень просто, если параметр орбиты уже известен. Задача нахождения параметра, имеющая, таким образом, здесь основное значение, впервые полностью была решена Гауссом [1809]. Данный им метод и по настоящее время остается основным. Он применяется во всех случаях, когда различного рода приближенные методы становятся недостаточными.

Стоящая перед нами задача заключается в нахождении параметра p по двум положениям светила

$$\mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}; \quad \mathbf{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\} \quad (6.1)$$

в моменты t_1 и t_2 . Она приводится, как мы скоро увидим, к решению системы трансцендентных уравнений, что может быть выполнено лишь путем последовательных приближений. Чтобы сделать проведение этих последовательных приближений возможно более удобным, Гаусс выразил p через вспомогательную неизвестную η , равную отношению площади сектора орбиты, заключенного между векторами (6.1), к площади треугольника, образованного этими векторами и хордой. Таким образом,

$$\eta = \frac{k\sqrt{p}(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin 2f}, \quad (6.2)$$

где, как и раньше, через $2f = v_2 - v_1$ обозначен угол между векторами (6.1).

Эта формула показывает, что вычисление p приводится к вычислению η , и наоборот. Заметим, что введение η вместо p целесообразно еще и потому, что эта величина сама по себе используется при нахождении орбит из наблюдений, как это будет показано в гл. VIII.

Полагая для краткости

$$\tau = k(t_2 - t_1); \quad \kappa = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f,$$

выражение (6.2) можно представить так:

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{p}}{\kappa \sqrt{r_1 r_2} \sin f}. \quad (6.3)$$

Формулы (3.6) гл. I, будучи применены к двум рассматриваемым положениям светила, дают

$$\sqrt{r_1} \sin \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sqrt{r_1} \cos \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_1,$$

$$\sqrt{r_2} \sin \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E_2,$$

$$\sqrt{r_2} \cos \frac{1}{2} v_2 = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E_2.$$

Перемножая эти равенства попарно, а затем почленно складывая и вычитая результаты, получим

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1) = a \sqrt{1-e^2} \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1),$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{1}{2} (v_2 - v_1) = a \cos \frac{1}{2} (E_2 - E_1) - ae \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1).$$

Положим

$$E_2 - E_1 = 2g; \quad e \cos \frac{1}{2} (E_2 + E_1) = \cos h, \quad (6.4)$$

причем условимся, чтобы сделать определение угла h вполне однозначным, что

$$0^\circ < h < 180^\circ.$$

Только что полученные соотношения запишутся так:

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin g, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{2} \kappa = \sqrt{r_1 r_2} \cos f = a (\cos g - \cos h). \quad (6.6)$$

Поэтому вместо (6.3) имеем

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{p}}{\kappa a \sqrt{1-e^2} \sin g}$$

или, поскольку $p = a(1-e^2)$,

$$\eta = \frac{\tau}{\kappa \sqrt{a} \sin g}. \quad (6.7)$$

Покажем теперь, что легко получить два уравнения, не содержащие других неизвестных, кроме a и g .

В самом деле, соотношения

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1); \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

дают, с учетом (6.4),

$$r_1 + r_2 = 2a(1 - \cos g \cos h).$$

Так как на основании (6.6)

$$\cos h = \cos g - \frac{\kappa}{2a}, \quad (6.8)$$

то это равенство принимает вид

$$r_1 + r_2 = 2a \sin^2 g + \kappa \cos g. \quad (6.9)$$

С другой стороны, уравнение Кеплера дает

$$E_1 - e \sin E_1 = \kappa a^{-3/2}(t_1 - T); \quad E_2 - e \sin E_2 = \kappa a^{-3/2}(t_2 - T),$$

откуда

$$E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1) = \kappa a^{-3/2}(t_2 - t_1),$$

или

$$\tau a^{-3/2} = 2g - 2 \sin g \cos h.$$

Воспользовавшись опять равенством (6.8), получим

$$\tau a^{-3/2} = 2g - \sin 2g + \kappa a^{-1} \sin g. \quad (6.10)$$

Мы получили, таким образом, два уравнения (6.9), (6.10), не заключающие других неизвестных помимо a и g .

Рассмотрение соотношений (6.7), (6.9) и (6.10) показывает, что из трех неизвестных, входящих в них, легче всего исключить a . Равенство (6.7) дает

$$a^{-1} = \tau^{-2} \kappa^2 \eta^2 \sin^2 g.$$

Подставив это выражение в равенства (6.9) и (6.10), получим

$$r_1 + r_2 = 2\tau^2 \kappa^{-2} \eta^{-2} + \kappa \cos g,$$

$$\tau^{-2} \kappa^3 \eta^3 \sin^3 g = 2g - \sin 2g + \tau^{-2} \kappa^3 \eta^2 \sin^3 g,$$

или

$$\frac{r_1 + r_2}{2\kappa} = \tau^2 \kappa^{-3} \eta^{-2} + \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{g}{2} \right),$$

$$\tau^{-2} \kappa^3 (\eta^3 - \eta^2) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}.$$

Полагая

$$n = \tau^2 \kappa^{-3}; \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{\kappa} - 1 \right), \quad (6.11)$$

и вводя функцию $X(x)$, определяемую равенствами

$$X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}; \quad x = \sin^2 \frac{g}{2}, \quad (6.12)$$

окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \eta^3 - \eta^2 &= mX(x), \\ x &= m\eta^{-2} - l. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Таковы уравнения, полученные Гауссом для нахождения отношения η . Решив эти уравнения, легко вычислить, пользуясь формулой (6.3), параметр орбиты.

В заключение отметим, что вывод уравнений (6.13) остается в силе и для случая гиперболического движения, так как все формулы, которыми мы пользовались, имеют место и в этом случае; разница заключается только в том, что для гиперболического движения в них $a < 0$, $e > 1$, а эксцентрисические аномалии имеют чисто мнимые значения (§ 6, гл. III). Сообразно с этим для гиперболических орбит величина

$$x = \sin^2 \frac{g}{2} = \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{4}$$

будет отрицательной.

Формулы для параболических орбит можно получить путем предельного перехода, делая $a \rightarrow \infty$. Так как все эксцентрисические аномалии будут при этом стремиться к нулю, то в пределе получим $x=0$.

Итак, если при решении уравнений (6.13) получится

$x > 0$, то орбита эллиптическая.

$x = 0$, то орбита параболическая,

$x < 0$, то орбита гиперболическая.

§ 7. Решение уравнений Гаусса, определяющих отношение площадей сектора и треугольника

Переходя к решению уравнений (6.13), дающих отношение η , мы должны прежде всего познакомиться с некоторыми свойствами функции $X(x)$, определяемой равенствами (6.12). Эти равенства дают

$$g = 2 \arcsin \sqrt{x},$$

откуда

$$\begin{aligned} 2g - \sin 2g &= 2g - 4 \sin \frac{1}{2} g \cos \frac{1}{2} g \left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} g\right) = \\ &= 4 \arcsin \sqrt{x} - 4 \sqrt{x} \sqrt{1-x} (1-2x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2g - \sin 2g = (\sqrt{x})^3 \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{5}x - \frac{4}{7}x^2 - \dots \right).$$

С другой стороны,

$$\sin^3 g = (2\sqrt{x} \sqrt{1-x})^3 = (\sqrt{x})^3 (8 - 12x + 3x^2 + \dots),$$

поэтому

$$X(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{5}x + \frac{64}{35}x^2 + \dots$$

Таким образом, найдены первые члены разложения рассматриваемой функции и доказана ее голоморфность в круге $|x| < 1$. Чтобы вычислить больше членов этого разложения, надо воспользоваться дифференциальным уравнением

$$2(x - x^2) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X,$$

которому, как легко убедиться, удовлетворяет функция $X(x)$.

Подставив в это уравнение ряд

$$X(x) = \frac{4}{3} + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$a_n = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)}.$$

Таким образом,

$$X(x) = \sum_0^{\infty} \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)} x^n. \quad (7.1)$$

Положим

$$X(x) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)}. \quad (7.2)$$

Это равенство дает

$$\begin{aligned} 1 - \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}\xi &= \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}x^2 + \dots \right)^{-1} = \\ &= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{175}x^2 + \frac{312}{7875}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots \quad (7.3)$$

Введение функции $\xi(x)$ выгодно в том отношении, что, как показывает сравнение (7.1) и (7.3), табулирование этой функции намного удобнее табулирования функции $X(x)$.

Подстановка (7.2) в уравнения (6.13) дает

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{\frac{4}{3} m}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)} = \frac{\frac{10}{9} m}{\frac{5}{6} - x + \xi} = \frac{\frac{10}{9} m}{\frac{5}{6} + l + \xi - m\eta^{-2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби на $\frac{5}{6} + l + \xi$ и положим

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}.$$

Это даст

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{\frac{10}{9} h}{1 - h\eta^{-2}},$$

или

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9} h = 0. \quad (7.4)$$

Таким образом, для нахождения η мы теперь имеем вместо (6.13) такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}; & \eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{1}{9} h &= 0, \\ x &= m\eta^{-2} - l. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Решение этих уравнений очень легко выполняется методом итерации. Для начала можно положить $x=0$, $\xi=0$ и, следовательно,

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l}; \quad \frac{5}{6} = 0,833\ 3333 \dots$$

Найдя из кубического уравнения соответствующее значение η , вычисляем x . Это дает возможность найти $\xi(x)$, а следовательно, и более точное значение h , с которым повторяется нахождение η и т. д. Во всех встречающихся на практике случаях этот процесс быстро сходится. Функция $\xi(x)$ берется из таблицы VIII.

Заметим, что для первого приближения вместо $x=0$ выгоднее взять $x=m-l$.

Решение кубического уравнения (7.4) можно заменить нахождением η по аргументу h из особой таблицы. Однако необходимости в такой таблице нет, поскольку существуют весьма удобные способы для непосредственного решения этого уравнения. Один из таких способов, предложенный Ганzenом [1863], заключается в следующем.

Положим

$$\eta = 1 + s.$$

Тогда уравнение (7.4) заменится таким:

$$s(1+s)^2 - \frac{10}{9} h \left(1 + \frac{9}{10} s\right) = 0.$$

Пользуясь тождеством

$$(1+s)^2 = \left(1 + \frac{9}{10} s\right) \left(1 + \frac{11}{10} s\right) + \frac{1}{100} s^2,$$

его можно написать в следующем виде:

$$\frac{10}{9} h = s \left(1 + \frac{11}{10} s\right) + \frac{1}{100} \frac{s^3}{1 + \frac{9}{10} s},$$

или

$$\frac{11}{9} h = \frac{11}{10} s \left(1 + \frac{11}{10} s\right) + \frac{11}{1000} \frac{s^3}{1 + \frac{9}{10} s}.$$

В обычных условиях вычисления предварительной орбиты второй член с правой стороны может быть отброшен без всякого ущерба для точности. Поэтому, полагая для сокращения письма

$$d = \frac{11}{9} h; \quad s_1 = \frac{11}{10} s,$$

получим квадратное уравнение

$$s_1(1+s_1) = d,$$

очень удобно решаемое способом итерации. В самом деле, его можно представить так:

$$s_1 = d / (1 + s_1),$$

где величина $s_1 = \frac{11}{10} s$ очень мала.

Применение итеративного процесса в данном случае эквивалентно вычислению цепной дроби. Поэтому

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \frac{d}{1 + \dots}}} \quad (7.6)$$

Если угол $2f$ в рассматриваемом случае велик (больше 18° при семизначном вычислении, или больше 27° при шестизначном — для орбит с не очень большими эксцентриситетами), надо повторить вычисление по формуле (7.6), взяв вместо d величину

$$d' = d - \frac{11}{1000} \frac{s^3}{1 + \frac{9}{10} s}.$$

Таким повторением будет получено совершенно точное решение уравнения (7.4). Конечно, при вычислении нового значения d должно быть взято значение h , определяемое соотношениями (7.5).

Однако для огромного большинства встречающихся в практике вычисления орбит случаев можно ограничиться однократным применением формулы (7.6), взяв в ней

$$d = \frac{11}{9} \frac{m}{\frac{5}{6} + l} = \frac{22m}{15 + 18l}.$$

Если сюда подставить выражения (6.11), получим

$$d = \frac{\frac{11}{9} k^2 (t_2 - t_1)^2}{x^2 \left[\frac{1}{3} x + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right]}; \quad \frac{11}{9} k^2 = 0,000\ 361\ 6705, \quad (7.7)$$

причем для вычисления x удобно пользоваться следующей легко выводимой формулой:

$$x^2 = 2 (r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \quad (7.8)$$

Формулы (7.6) и (7.7) дают искомое отношение η с ошибкой шестого порядка малости, если τ принимать, как это всегда делается, за величину первого порядка.

Примечание 1. Изложенный метод решения уравнений (6.13) является наиболее употребительным.

Если значение $|x|$ велико и выходит за границы таблицы VIII, то систему (6.13) следует заменить уравнением

$$(x+l)[1+(x+l)X(x)]^2 = m,$$

получающимся после исключения η . Это уравнение легко решить методом интерполирования, так как в рассматриваемом случае, когда промежуток времени τ весьма велик, приближенное значение разности эксцентрических аномалий, а следовательно, и x , бывает обычно известно. Функцию $X(x)$ здесь можно вычислять непосредственно по формулам (6.12) без заметной потери точности. Когда x найдено, формула

$$\eta^2 = \frac{m}{x+l}$$

даст η .

С другой стороны, когда промежуток времени τ , а следовательно, и величины m и l достаточно малы, можно воспользоваться немногими первыми членами разложения:

$$\begin{aligned} \eta = 1 + m \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{5} l + 1,8286l^2 - 2,03l^3 + 2,2l^4 - 2l^5 + \dots \right) - \\ - m^2 \left(\frac{88}{45} - 4,876l + 8,777l^2 - 13,7l^3 + 20l^4 - 30l^5 + \dots \right) + \\ + m^3 (5,6212 - 21,21l + 51,8l^2 - 100l^3 + 200l^4 - \dots) - \\ - m^4 (20,13 - 102l + 300l^2 - 700l^3 + \dots) + \\ + m^5 (80,6 - 510l + 1700l^2 - \dots) - m^6 (300 - \dots) + \dots, \end{aligned}$$

которое получается, если из уравнений (6.13) исключить x .

А. В. Пурцхванидзе [1952] показал, что ошибка приближенной формулы

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} m \left[1 - 1,1 \left(\frac{4}{3} m \right) - 1,2l \right]$$

не превосходит единицы шестого знака при $2g < 8^\circ$ и единицы седьмого знака при $2g < 5^\circ$.

Примечание II. Ряд (7.1) сходится достаточно быстро только при очень малых значениях $|x|$. В. И. Фабрициус показал [1892], что функцию $X(x)$ можно представить в другом, гораздо более удобном для вычислений виде, а именно:

$$X(x) = 4(1 + \zeta) \left(\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{\zeta}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\zeta^2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\zeta^3}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \right),$$

где

$$\zeta = \frac{x}{1-x} = \operatorname{tg}^2 \frac{g}{2}.$$

Чтобы получить это выражение, заметим, что

$$X(x) = \frac{4}{3} F \left(1, 3, \frac{5}{2}; x \right),$$

как это видно из равенства (7.1).

Применение известной формулы для преобразования гипергеометрических функций

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha} F \left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{-x}{1-x} \right)$$

дает указанное выражение.

§ 8. Отношение площадей сектора и треугольника для параболической орбиты. Теорема Эйлера

Чтобы получить отношение η для параболической орбиты, предположим, что в соотношениях (6.13) большая полуось a стремится к бесконечности. В этом случае, как уже было отмечено, $x \rightarrow 0$, а так как $X(0) = \frac{4}{3}$, то рассматриваемые соотношения принимают вид

$$\eta^3 - \eta^2 = \frac{4}{3} m; \quad m\eta^{-2} - l = 0, \quad (8.1)$$

где

$$m = \tau^2 (2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^{-3}; \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - 1 \right). \quad (8.2)$$

Исключение величины m (содержащей время) дает следующее, чисто геометрическое соотношение:

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} l = \frac{1}{3} + \frac{r_1 + r_2}{3 \sqrt{r_1 r_2} \cos f}. \quad (8.3)$$

Обозначим через s хорду, соединяющую концы рассматриваемых радиусов-векторов. Тогда

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2f,$$

или

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 \cos^2 f,$$

или

$$\left(\frac{s}{r_1 + r_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{r_1r_2} \cos f}{r_1 + r_2}\right)^2. \quad (8.4)$$

Таким образом, положив

$$\sin \gamma = \frac{s}{r_1 + r_2}; \quad 0^\circ < \gamma < 90^\circ, \quad (8.5)$$

окончательно получим

$$\eta = \frac{1}{3}(1 + 2 \sec \gamma). \quad (8.6)$$

При вычислении параболической орбиты хорда s обычно известна, поэтому применение формул (8.5) и (8.6) может оказаться несколько более удобным, нежели (8.3).

Весьма важное свойство параболического движения получается, если из соотношений (8.1) исключить величину η . Это дает

$$m = l \left(1 + \frac{4}{3} l\right)^2, \quad (8.7)$$

или

$$18m = (\sec \gamma - 1)(2 \sec \gamma + 1)^2,$$

поскольку

$$l = \frac{1}{2}(\sec \gamma - 1).$$

А так как на основании (8.2), (8.4) и (8.5)

$$m = \tau^2 [(r_1 + r_2) \cos \gamma]^{-3},$$

то после несложных преобразований получим

$$6\tau (r_1 + r_2)^{-3/2} = (1 + \sin \gamma)^{3/2} - (1 - \sin \gamma)^{3/2},$$

или, учитывая (8.5),

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}. \quad (8.8)$$

При выводе этого соотношения мы предполагали, что $2f < 180^\circ$, и потому $\cos f > 0$. Легко видеть, что в случае, когда разность истинных аномалий $v_2 - v_1 = 2f$ больше 180° , соотношение (8.8) принимает вид

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} + (r_1 + r_2 - s)^{3/2}. \quad (8.9)$$

Соотношения (8.8) и (8.9) представляют знаменитую теорему Эйлера, открытую им в 1743 г.

Поскольку угол γ вполне определяется (в случае $2f < 180^\circ$) величиной

$$\mu = \frac{(2\tau)^2}{(r_1 + r_2)^3},$$

то, как легко найти,

$$1/\eta = 1 - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}\mu^2 - \frac{1}{9}\mu^3 - \frac{55}{648}\mu^4 - \dots$$

Существуют таблицы, дающие η (или $\lg \eta$) по аргументу μ [М. Ф. Субботин, 1929 и 1941] или по аргументу $\sqrt{\mu}$ [Баушингер и Штракке, 1934].

Подстановка выражений (8.2) в соотношение (8.7) дает следующую интересную формулу,

$$9\tau^2 = 2(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^2, \quad (8.10)$$

эквивалентную теореме Эйлера.

Конечно, соотношения (8.6), (8.9) и (8.10), полученные нами путем предельного перехода, могут быть легко выведены непосредственно из формул параболического движения.

§ 9. Вычисление элементов орбиты малой планеты по двум гелиоцентрическим положениям. Пример

Дадим сводку наиболее употребительных формул, причем в основу положим методы, изложенные в §§ 3 и 7.

Пусть имеем гелиоцентрические экваториальные координаты планеты

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2),$$

соответствующие моментам t_1 и t_2 .

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы r_1 , r_2 и вспомогательные величины:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$\sigma = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) r_1^{-2};$$

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1; \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

После этого находим разность истинных аномалий $2f = v_2 - v_1$ по формулам

$$\sin 2f = r_0/r_2; \quad \cos 2f = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)/r_1 r_2.$$

Согласие этих величин является контролем только что выполненных вычислений. При малых значениях $2f$ этот контроль мало чувствителен и его можно заменить таким:

$$(r_1 r_0)^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Затем вычисляется отношение η и параметр орбиты p . Для этого служат формулы:

$$\kappa^2 = 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2),$$

$$\tau = k(t_2 - t_1); \quad k = 0,017\ 202\ 098\ 95,$$

$$d = \frac{\frac{11}{9} \tau^2}{\kappa^2 \left[\frac{1}{3} \kappa + \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \right]} = \frac{22 \tau^2}{\kappa^2 [6\kappa + 9(r_1 + r_2)]},$$

$$\eta = 1 + \frac{10}{11} \frac{d}{1+d}, \quad \sqrt{p} = \eta r_1 r_0 / \tau.$$

Если в пределах принятой точности нельзя пренебречь $d^3/20$, то полученное значение η следует уточнить при помощи способа, указанного в § 7.

Формулы

$$\begin{aligned} q_1 &= p/r_1 - 1; \quad q_2 = p/r_2 - 1; \\ \begin{cases} e \sin v_1 = (q_1 \cos 2f - q_2) / \sin 2f, \\ e \cos v_1 = q_1, \end{cases} \\ v_2 &= v_1 + 2f \end{aligned}$$

дают истинные аномалии и эксцентриситет.

Контроль:

$$p = r_2 (1 + e \cos v_2).$$

Для вычисления большой полуоси орбиты и эксцентрических аномалий служат соотношения:

$$e = \sin \varphi; \quad a = \frac{p}{(1-e)(1+e)} = \frac{p}{\cos^2 \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$$

и аналогично для E_2 .

Контроль:

$$b = a \cos \varphi; \quad b \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1) = \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{1}{2} (v_2 - v_1).$$

Затем идет вычисление средних аномалий:

$$e^\circ = 57^\circ,295\ 7795e = [1,758\ 12263]e,$$

$$M_1 = E_1 - e^\circ \sin E_1; \quad M_2 = E_2 - e^\circ \sin E_2.$$

Если употребляются таблицы со старинным подразделением градуса, то эксцентриситет выражают в секундах дуги:

$$e'' = 206\ 264'', \quad 8!e = [5,314\ 42513]e.$$

Среднее суточное движение и средняя аномалия M_0 избранной эпохи t_0 вычисляются по формулам

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}; \quad M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1).$$

Контроль: при помощи таблицы III находим n'' и $n^\circ = n''/3600''$. Если вычисления ведутся более чем с шестью знаками, то

$$n^\circ = 0,985\,60767/a \sqrt{a} = [9,99370407]/a \sqrt{a}.$$

Векторные элементы вычисляются по формулам (3.8), которые удобно представить в таком виде:

$$\begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \\ z_1 & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +r_1^{-1} \cos v_1 & +r_1^{-1} \sin v_1 \\ -r_0^{-1} \sin v_1 & +r_0^{-1} \cos v_1 \end{pmatrix}.$$

Полезно тут же вычислить и величины

$$\begin{aligned} A_x &= aP_x; & A_y &= aP_y; & A_z &= aP_z, \\ B_x &= bQ_x; & B_y &= bQ_y; & B_z &= bQ_z, \end{aligned}$$

и сразу проконтролировать этот раздел при помощи соотношений

$$\begin{aligned} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 &= a^2; & B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 &= b^2; \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= 0. \end{aligned}$$

Вычисление i , Ω и ω производится по формулам (§ 1):

$$\begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_z \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon; & \sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ \sin i \cos \omega &= Q_z \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon; & \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \end{aligned}$$

причем наклон эклиптики к экватору ε берется для эпохи употребляемой координатной системы.

Контроль: $\sin \Omega$ и $\cos \Omega$ должны соответствовать одному и тому же углу; кроме того, должно быть

$$P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega = -\cos i \sin \Omega.$$

Пример. Для малой планеты 1931 LB были получены два следующие гелиоцентрические положения (экваториальная система координат эпохи 1931,0):

t_1	1931 июнь 6,873 91	t_2	1931 июнь 37,845 74
x_1	-0,681 413	x_2	-0,366 131
y_1	-2,623 534	y_2	-2,656 641
z_1	-0,821 382	z_2	-0,897 057

Для 1931,0 астрономические ежегодники дают:

$$\sin \varepsilon = 0,397\,9207, \quad \cos \varepsilon = 0,917\,4198.$$

Вычисление элементов можно расположить следующим образом;

r_1^2	8,021 923	r_2^2	7,996 505	$x_1 x_2 + \dots$	+7,956 101
r_1	2,832 300	r_2	2,827 809	$r_1 r_2$	8,009 203
σ	+0,991 795	x_0	+0,309 691	κ^2	31,930 608
r_0^2	0,105 6853	y_0	-0,054 633	κ	5,650 717
r_0	0,325 093	z_0	-0,082 414	$r_1 + r_2$	5,660 109
$r_1 r_0$	0,920 761	$\sin 2f$	+0,114 9629	$\frac{1}{2} (r_1 + r_2)$	2,830 055
τ	0,532 7805	$\cos 2f$	+0,993 370	$\frac{1}{3} \kappa$	1,883 572
$r_1 r_0 / \tau$	1,728 219	q_2	+0,060 624	[...]	4,713 627
η	1,002 0907	q_1	+0,058 942	κ^2 [...]	150,509
\sqrt{p}	1,731 832	$e \sin v_1$	-0,018 032	$\frac{11}{9} \tau^2$	0,346 934
p	2,999 242	$\operatorname{tg} v_1$	-0,305 928	d	0,002 3050
e	0,061 639	$\cos v_1$	+0,956 252	$d(1 + \dots)$	0,002 2998
φ	3°,533 90	$\sin v_1$	-0,292 544	$2f$	6°,601 49
$\cos \varphi$	0,998 098	v_2	349°,591 15	f	3°,300 75
e°	3°,531 655	v_1	342°,989 66	$\frac{1}{2} v_1$	171°,494 83
$45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$	46,766 95	E_2	350°,211 00	$\frac{1}{2} v_2$	174,795 58
$1 - e^2$	0,996 201	E_1	343,994 02	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1$	-0,149 544
a	3,010 680	$\sin E_2$	-0,170 020	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2$	-0,091 085
b	3,004 954	$\sin E_1$	-0,275 738	$\operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$	0,940 149
n''	679",220	M_2	350°,811 45	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1$	-0,140 594
n°	0°,188 672	M_1	344,967 83	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2$	-0,085 634
t_0	37 ^d ,000 00	$M_2 - M_1$	5,843 62	$\frac{1}{2} E_2$	175°,105 50
$t_1 - t_0$	-30,126 09	n°	0,188 675	$\frac{1}{2} E_1$	171°,997 01
$n^\circ (t_1 - t_0)$	-5°,684 04	a^2	9,064 194	$\frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	3°,108 49
M_0	350°,651 87	b^2	9,029 749	$\sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	0,054 227
				$\sin f$	0,057 577
				$b \sin \frac{1}{2} (E_2 - E_1)$	0,162 950
				$\sqrt{r_1 r_2} \sin f$	0,162 946

Далее находим векторные элементы:

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,681\,413 & +0,309\,691 \\ -2,623\,534 & -0,054\,633 \\ -0,821\,382 & -0,082\,414 \end{vmatrix} \times \\ \times \begin{vmatrix} +0,337\,624 & -0,103\,289 \\ +0,899\,878 & +2,941\,472 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +0,048\,623 & +0,981\,330 \\ -0,934\,931 & +0,110\,279 \\ -0,351\,481 & -0,157\,579 \end{vmatrix}.$$

Остается вычислить коэффициенты A и B , а также угловые эллиптические элементы ω , i , Ω :

A_x	+0,146 388	B_x	+2,948 851	A^2	9,064 186
A_y	-2,814 778	B_y	+0,331 383	B^2	9,029 756
A_z	-1,058 197	B_z	-0,473 518	AB	-0,000 018
$P_z \cos \varepsilon$	-0,322 4556	$P_y \cos \omega$	+0,904 1699	$P_x \cos \omega$	-0,047 0232
$-P_y \sin \varepsilon$	+0,372 0285	$-Q_y \sin \omega$	-0,028 0553	$-Q_x \sin \omega$	-0,249 6533
$Q_z \cos \varepsilon$	-0,144 5661	$\sin \Omega$	+0,954 977	$-P_x \sin \omega$	-0,012 3698
$-Q_y \sin \varepsilon$	-0,043 8823	$\cos \Omega$	-0,296 676	$-Q_x \cos \omega$	+0,949 0423
$\sin i \sin \omega$	+0,049 5729			Сумма	+0,936 672
$\sin i \cos \omega$	-0,188 4484			$\cos i \sin \Omega$	+0,936 671
$\operatorname{tg} \omega$	-0,263 058			1931,0 $\begin{cases} \omega & 165^\circ,261\,79 \\ i & 11,236\,54 \\ \Omega & 107,258\,10 \end{cases}$	
$\sin \omega$	+0,254 403				
$\cos \omega$	-0,967 098				
$\sin i$	+0,194 860				
$\cos i$	+0,980 831				

§ 10. Площадь фокального сектора конического сечения

В предыдущих параграфах было показано, что при нахождении орбиты по граничным условиям весьма большое значение имеет отношение площади фокального сектора конического сечения к площади треугольника, образованного радиусами-векторами, ограничивающими этот сектор. При вычислении этого отношения — величины, по существу, чисто геометрической, мы брали для площади фокального сектора значение динамическое, вытекающее из закона площадей. Таким образом, мы избежали выражения площади этого сектора через геометрические условия задачи. Но получение такого геометрического выражения для площади сектора представляет, тем не менее, большой интерес, так как открывает другой путь для нахождения элементов.

Обозначим через r_1 и r_2 радиусы-векторы, ограничивающие сектор, через v_1 и v_2 — соответствующие им истинные аномалии. Удвоенная площадь сектора дается, как известно, формулой

$$(r_1 r_2) = \int_{v_1}^{v_2} r^2 dv.$$

Остается только вычислить этот интеграл для конического сечения. Для этого удобнее всего, как в случае эллипса, так и в случае гиперболы, выразить r и v через эксцентрическую аномалию. Формулы

$$r = a(1 - e \cos E); \quad dv = \frac{\sqrt{1 - e^2} dE}{1 - e \cos E}$$

дают

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} \int_{E_1}^{E_2} (1 - e \cos E) dE,$$

где через E_1 и E_2 обозначены эксцентрические аномалии, соответствующие границам сектора.

Следовательно,

$$\begin{aligned} (r_1 r_2) &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)] = \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[E_2 - E_1 - 2e \sin \frac{E_2 - E_1}{2} \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Полагая опять, как и в § 6,

$$E_2 - E_1 = 2g; \quad e \cos \frac{E_2 + E_1}{2} = \cos h \quad (0^\circ < h < 180^\circ),$$

получим

$$(r_1 r_2) = 2a^2 \sqrt{1 - e^2} (g - \sin g \cos h). \quad (10.1)$$

Эта формула решает вопрос о вычислении площади фокального сектора, но она представляет то неудобство, что выражает эту площадь через значения вспомогательной переменной — эксцентрической аномалии. Для исключения этой последней (или, что все равно, углов g и h) воспользуемся прежде всего соотношениями

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1), \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2),$$

которые дают

$$r_1 + r_2 = 2a - 2a \cos g \cos h. \quad (10.2)$$

Хорду s , соединяющую концы радиусов-векторов r_1 и r_2 , можно выразить через те же углы g и h . В самом деле, так как прямоугольные орбитальные координаты концов хорды равны

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a(\cos E_1 - e); & \xi_2 &= a(\cos E_2 - e), \\ \eta_1 &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E_1; & \eta_2 &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E_2, \end{aligned}$$

то

$$s = [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2]^{1/2} = 2a \sin g \sin h. \quad (10.3)$$

Теперь нам остается только, воспользовавшись полученными формулами, исключить углы g и h из найденного ранее выражения площади сектора.

Равенства (10.2) и (10.3) дают

$$r_1 + r_2 + s = 2a [1 - \cos(g + h)]; \quad r_1 + r_2 - s = 2a [1 - \cos(g - h)].$$

Полагая

$$h + g = \varepsilon, \quad h - g = \delta,$$

или

$$h = \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta); \quad g = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta), \quad (10.4)$$

можно последние равенства написать так:

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}. \quad (10.5)$$

Вводя теперь углы ε и δ в формулу (10.1), окончательно получим для удвоенной площади сектора такое выражение:

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta)], \quad (10.6)$$

причем ε и δ определяются равенствами (10.5).

Формула (10.6) одинаково применима как для эллипса, так и для гиперболы. Разница будет заключаться только в том, что для гиперболы $a < 0$, $e > 1$ и углы ε и δ будут мнимые. Чтобы избежать употребления мнимых величин, можно было бы ввести новые переменные, полагая $\varepsilon = i\varepsilon_1$, $\delta = i\delta_1$, но мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим подробнее процесс вычисления площади эллиптического сектора по формуле (10.6). Самый вывод этой формулы показывает, что она обладает полной общностью и потому одинаково применима к секторам всех возможных видов (рис. 12). Нужно только в каждом случае суметь выбрать надлежащим обра-

зом углы ε и δ , неоднозначно определяемые формулами (10.5).

Ограничимся случаем, когда угол раствора сектора $2f = v_2 - v_1$ меньше 2π . В таком случае, очевидно, будем иметь

$$2g = E_2 - E_1 < 2\pi$$

и потому

$$0 < g < \pi.$$

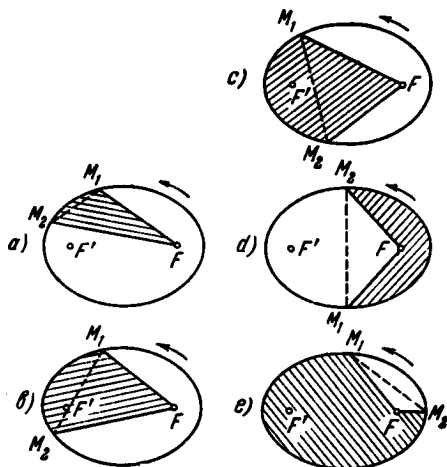


Рис. 12.

Поскольку, с другой стороны, угол h был определен условием

$$0 < h < \pi,$$

мы будем иметь

$$\varepsilon = g + h < 2\pi.$$

Поэтому во всех случаях будет

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Чтобы найти знак $\sin \frac{\delta}{2}$, обратимся к формуле (6.6), которую при помощи равенств (10.4) можно написать так:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = 2a \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\delta}{2}. \quad (10.7)$$

Это соотношение показывает, что

$$\sin \frac{\delta}{2} > 0, \text{ если } 0 < 2f < \pi,$$

$$\sin \frac{\delta}{2} < 0, \text{ если } \pi < 2f < 2\pi.$$

Для окончательного определения квадрантов, в которых должны находиться углы $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$, остается найти знаки их косинусов.

Для предельного случая бесконечно узкого сектора, когда $2g = E_2 - E_1 = 0$, имеем $\varepsilon = \delta = h$, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а потому

$$\cos \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0.$$

Когда $\cos \frac{\varepsilon}{2}$ обратится в нуль? В этом случае должно быть

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1,$$

следовательно,

$$r_1 + r_2 + s = 4a, \text{ или } s = (2a - r_1) + (2a - r_2).$$

Таким образом, $\cos \frac{\varepsilon}{2}$ обращается в нуль тогда, когда хорда $M_1 M_2$ проходит через второй фокус F' (рис. 12, б).

Легко видеть, что всегда

$$\cos \frac{\delta}{2} > 0,$$

ибо обращение этой величины в нуль повлекло бы за собой невозможное равенство

$$r_1 + r_2 - s = 4a.$$

Введем теперь углы ε_0 , δ_0 , однозначно определяемые равенствами

$$\sin \frac{\varepsilon_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}; \quad \sin \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}. \quad (10.8)$$

и условиями

$$0 < \varepsilon_0 < \pi, \quad 0 < \delta_0 < \pi.$$

В таком случае произведенное исследование позволяет сформулировать следующие выводы:

1) если сегмент рассматриваемого сектора не включает ни одного фокуса (рис. 12, *a*), то

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \delta = \delta_0,$$

следовательно,

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (10.9)$$

2) если сегмент включает второй фокус F' , но не содержит первого фокуса F , служащего вершиной сектора (рис. 12, *c*), то

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0; \quad \sin \frac{\delta}{2} > 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} \varepsilon = \pi - \frac{1}{2} \varepsilon_0, \quad \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \delta_0,$$

а потому

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 - (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (10.10)$$

3) если сегмент включает только фокус F , находящийся в вершине сектора (рис. 12, *d*), то

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} > 0; \quad \sin \frac{\delta}{2} < 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,$$

и, сообразно с этим,

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \delta = -\delta_0.$$

Следовательно, в этом случае

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]; \quad (10.11)$$

4) наконец, если сегмент включает оба фокуса (рис. 12, *e*), то

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} > 0, \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} < 0; \quad \sin \frac{\delta}{2} < 0, \quad \cos \frac{\delta}{2} > 0,$$

а потому

$$\frac{1}{2} \varepsilon = \pi - \frac{1}{2} \varepsilon_0, \quad \frac{1}{2} \delta = -\frac{1}{2} \delta_0.$$

Следовательно,

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [2\pi - \varepsilon_0 + \sin \varepsilon_0 + (\delta_0 - \sin \delta_0)]. \quad (10.12)$$

Формулы (10.8) — (10.12) полностью решают задачу о нахождении площади фокального сектора конического сечения.

Полученные нами формулы позволяют дать чисто геометрическое выражение для отношения площадей сектора и треугольника. Так как

$$\begin{aligned} [r_1 r_2] &= 2(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) = \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [\sin E_2 (\cos E_1 - e) - \sin E_1 (\cos E_2 - e)] = \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [\sin 2g - 2 \sin g \cos h] = \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} [\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)], \end{aligned}$$

то

$$\eta = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]} = \frac{\varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}{\sin(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta)}, \quad (10.13)$$

если ограничиться первым из четырех рассмотренных выше случаев.

§ 11. Теорема Ламберта

При решении астрономических задач приходится иметь дело только с такими эллиптическими секторами, у которых сегмент не заключает «пустого» фокуса, а может заключать лишь тот фокус, в котором находится Солнце. Иначе говоря, из перечисленных в предыдущем параграфе случаев могут встретиться лишь первый и третий.

Соответствующие этим случаям формулы (10.9) и (10.11) можно объединить в одну:

$$(r_1 r_2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} [e - \sin \varepsilon \mp (\delta - \sin \delta)], \quad (11.1)$$

где верхний знак берется в том случае, когда угол раствора сектора меньше 180° , а нижний — когда этот угол больше 180° . Величины ε и δ однозначно определяются условиями:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; & \sin^2 \frac{\delta}{2} &= \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}, \\ 0 < \varepsilon < 180^\circ; & & 0 < \delta < 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Если по рассматриваемому коническому сечению происходит движение по законам задачи двух тел, то

$$(r_1 r_2) = \tau \sqrt{a(1 - e^2)},$$

где

$$\tau = k(t_2 - t_1),$$

а через t_1 и t_2 обозначены моменты, в которые движущееся тело занимало положения (r_1, v_1) и (r_2, v_2) .

Подставив сюда выражение (11.1), получим теорему Ламберта:

$$\tau a^{-3/2} = \varepsilon - \sin \varepsilon \mp (\delta - \sin \delta). \quad (11.3)$$

Эта теорема дает зависимость между четырьмя величинами: большой полуосью орбиты, временем, в течение которого светило переходит из одного положения в другое, суммой радиусов-векторов этих двух положений, и хордой, соединяющей их. Таким образом, если три из этих величин известны, то четвертая может быть найдена.

Легко видеть, что правые части выражений (11.1) и (11.3) могут быть разложены в ряды по отрицательным степеням a .

Действительно, положив для краткости

$$m = \sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}},$$

будем иметь

$$\frac{\varepsilon}{2} = \arcsin m = m + \frac{1}{3} \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{5} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^5 + \dots,$$

$$\frac{1}{2} \sin \varepsilon = m(1 - m^2)^{1/2} = m - \frac{1}{2} m^3 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} m^5 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 - \dots,$$

и потому

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = 4 \left(\frac{1}{3} m^3 + \frac{1}{5} \frac{1}{2} m^5 + \frac{1}{7} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^7 + \dots \right). \quad (11.4)$$

Подстановка этого выражения и аналогичного для $\delta - \sin \delta$ в равенство (11.3) дает

$$\begin{aligned} 6\tau &= (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} + \\ &+ \frac{3}{40} \frac{1}{a} [(r_1 + r_2 + s)^{5/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{5/2}] + \\ &+ \frac{9}{896} \frac{1}{a^2} [(r_1 + r_2 + s)^{7/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{7/2}] + \\ &+ \frac{5}{3072} \frac{1}{a^3} [(r_1 + r_2 + s)^{9/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{9/2}] + \dots \quad (11.5) \end{aligned}$$

Эта форма теоремы Ламберта одинаково удобна и для эллиптических и для гиперболических орбит. Стоящий справа ряд сходится тем лучше, чем больше $|a|$.

Переходя к пределу при $|a| \rightarrow \infty$, получим теорему Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}, \quad (11.6)$$

уже найденную нами (§ 8) другим путем.

Соотношение (11.6), сделавшееся основой аналитических методов нахождения кометных орбит, заменивших геометрический метод Ньютона, было опубликовано Эйлером в работе «Определение орбиты кометы, которая наблюдалась главным образом в марте этого 1742 года» [Эйлер, 1743].

Геометрическая теорема, эквивалентная уравнению Эйлера, была известна еще Ньютону. Это было отмечено Лагранжем, но затем забыто. Вновь обратил на это внимание А. Н. Крылов [1911, 1924 и 1936].

Теорема Ламберта (11.3), давшая обобщение теоремы Эйлера для всех случаев невозмущенного движения, была им опубликована в 1761 г. в книге «Замечательные свойства кометных орбит» [Ламберт, 1761].

Чисто геометрическое доказательство Ламберта очень громоздко. Аналитическое доказательство было дано Лагранжем [1778] и затем существенно упрощено Гауссом в *Theoria motus* [1809].

Глубокие корни, связывающие теорему Ламберта с весьма общими теоремами динамики, наиболее полно освещены Винтнером [1941].

§ 12. Вторая форма уравнения Эйлера

Уравнение Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \quad (12.1)$$

выражает промежуток времени $\tau = k(t_2 - t_1)$, в течение которого проходит дуга параболической орбиты, стягиваемая хордой s , через эту хорду и сумму радиусов-векторов в концах дуги.

В тех часто встречающихся случаях, когда предварительная орбита кометы вычисляется в предположении, что комета движется по параболе, уравнение (12.1) служит для выражения этого условия. Таким образом, в процессе вычисления предварительной орбиты приходится в каждом приближении проверять выполнение уравнения (12.1).

Между тем, форма правой части уравнения (12.1) мало удобна для вычисления. Кроме того, поскольку в этом уравнении приходится брать верхний знак (при вычислении предварительной орбиты гелиоцентрическое движение не превосходит 180°), то правую часть приходится часто вычислять как разность двух мало отличающихся по величине чисел, т. е. с большой потерей точности. Покажем, как путем надлежащего преобразования уравнения (12.1) можно избежать этих неудобств.

Ограничиваясь случаем, когда гелиоцентрическое движение кометы меньше 180° , напомним уравнение (12.1) так:

$$6\tau = (r_1 + r_2)^{3/2} \left[\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_2} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_2} \right)^{3/2} \right],$$

или

$$2\tau = (r_1 + r_2)^{3/2} \left[\frac{s}{r_1 + r_2} - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^5 - \dots \right].$$

Возведя обе части в квадрат и положив

$$c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^2.$$

получим

$$(2\tau)^2 = s^2 (r_1 + r_2) \left(1 - \frac{1}{24} c - \frac{1}{128} c^2 - \dots \right)^2.$$

Этому уравнению придадим такой вид:

$$\theta_0 (2\tau)^2 = s^2 (r_1 + r_2), \quad (12.2)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \left(1 - \frac{1}{24} c - \frac{1}{128} c^2 - \dots \right)^{-2} = \\ &= 1 + \frac{1}{12} c + \frac{1}{48} c^2 + \frac{7}{864} c^3 + \frac{83}{20736} c^4 + \frac{95}{41472} c^5 + \frac{1363}{746496} c^6 + \dots \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера, представленное в форме (12.2), свободно от указанных выше недостатков.

Таблица IX дает θ_0 и $\lg \theta_0$ для $c = 0,000 (0,001) 0,500$.

Заметим, что

$$\theta_0 = \left(\frac{3\sqrt{c}}{(1+\sqrt{c})^{3/2} - (1-\sqrt{c})^{3/2}} \right)^2.$$

Если положить $\sin \gamma = \sqrt{c}$, то это выражение примет вид

$$\theta_0 = \left(\frac{3 \sec \frac{1}{2} \gamma}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \gamma} \right)^2.$$

Форма (12.2) уравнения Эйлера [М. Ф. Субботин, 1923] несколько удобнее употреблявшейся ранее формы [Энке, 1833], а именно,

$$s = \zeta \sqrt{\mu} (r_1 + r_2). \quad (12.3)$$

Вычисленную Энке таблицу, дающую $\zeta = \sqrt{\theta_0}$ по аргументу

$$\sqrt{\mu} = 2\tau (r_1 + r_2)^{-3/2},$$

или ей эквивалентную, можно найти в большинстве сборников вспомогательных таблиц.

§ 13. Применение теоремы Ламберта к нахождению орбиты по двум гелиоцентрическим положениям

Вычисление элементов орбиты распадается, как было показано в предыдущих параграфах, на две части. Угловые элементы i , Ω и аргумент широты $u_1 = v_1 + \omega$ (нужный для получения ω) находятся весьма просто из чисто геометрических соображений. Вычисление остальных элементов и истинной аномалии v_1 находится в зависимости от вычисления пара-

метра p , или эквивалентной ему величины η , определяемой более удобным для решения уравнением.

Уравнение Ламберта открывает другой путь для нахождения элементов второй группы. Оно дает возможность найти большую полуось a , после чего вычисление остальных элементов выполняется очень просто.

Пусть гелиоцентрические положения для моментов t_1 и t_2 даны координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) .

Вычислив по формулам

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2; \\ s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \end{aligned}$$

радиусы-векторы и хорду, мы можем из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tau a^{-3/2} &= \varepsilon - \sin \varepsilon \mp (\delta - \sin \delta), \\ \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{r_1 + r_2 + s}{4a}; & \sin^2 \frac{\delta}{2} &= \frac{r_1 + r_2 - s}{4a}, \\ 0 < \varepsilon < \pi; & & 0 < \delta < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

даваемых теоремой Ламберта, найти a . Вместе с тем будут известны углы ε и δ , а потому и полуразность эксцентрисических аномалий, так как

$$\frac{1}{2}(E_2 - E_1) = g = \frac{1}{2}(e - \delta).$$

С другой стороны, почленное сложение и вычитание равенств

$$r_1 = a(1 - e \cos E_1); \quad r_2 = a(1 - e \cos E_2)$$

дает

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2}(E_1 + E_2) &= \frac{r_2 - r_1}{2a} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(E_2 - E_1), \\ e \cos \frac{1}{2}(E_1 + E_2) &= (1 - 2R) \sec \frac{1}{2}(E_2 - E_1), \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

где

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}.$$

Уравнения (13.2) позволяют найти эксцентриситет e и эксцентрисические аномалии E_1 и E_2 . По обычным формулам (3.10) и (3.11) вычисляются n и M_0 .

Согласие полученного значения n с тем, что дает соотношение

$$n = ka^{-3/2},$$

служит хорошим контролем сделанных вычислений.

Наконец, формула

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1$$

дает возможность найти v_1 и тем закончить вычисление ω .

Рассмотрим теперь решение уравнений (13.1) относительно u .

Наибольшее практическое значение имеет случай, встречающийся при изучении таких кометных орбит, у которых эксцентриситет близок к единице. В этом случае углы ε и δ очень малы, и чтобы правую часть первого из уравнений (13.1) было удобно вычислять, это уравнение подвергнем следующему преобразованию.

Введем в рассмотрение функцию $V(\zeta)$, которой мы уже пользовались раньше (§ 4, гл. IV). Она определяется равенствами

$$V(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{4k} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}; \quad \zeta = \sin^2 g \quad (13.3)$$

и дается таблицей VIIa.

Если положить

$$\varepsilon = 2g; \quad \delta = 2g'; \quad \zeta' = \sin^2 g',$$

то будем иметь

$$\zeta = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 + s); \quad \zeta' = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 - s),$$

и потому

$$\varepsilon - \sin \varepsilon = \frac{4k}{\sqrt{2}} \zeta^{3/2} V(\zeta); \quad \delta - \sin \delta = \frac{4k}{\sqrt{2}} \zeta'^{3/2} V(\zeta').$$

Таким образом, теорема Ламберта может быть выражена уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{8}(t_2 - t_1) &= (r_1 + r_2 + s)^{3/2} V(\zeta) \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} V(\zeta'), \\ \zeta &= \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 + s); \quad \zeta' = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 - s). \end{aligned} \right\} (13.4)$$

С рассматриваемым нами случаем приходится встречаться при улучшении орбиты, приближенно уже известной. Поэтому промежуток времени $t_2 - t_1$ берется большой, так что хорда s оказывается величиной того же порядка, что и $r_1 + r_2$. Вследствие этого вычисление правой части первого из уравнений (13.4) выполняется без потери точности.

С другой стороны, приближенное значение a уже известно и потому решение уравнений (13.4) выполняется здесь особенно удобно.

Другой, практически интересный случай тот, когда рассматривается планетная орбита, а промежуток времени $t_2 - t_1$ не велик. Здесь углы ε и δ могут быть значительны, но разность $\varepsilon - \delta$ очень мала, так как хорда мала по сравнению с радиусами-векторами. Сообразно с этим поступаем следующим образом.

После того как для данных значений $r_1 + r_2$ и s и принятого значения a по формулам

$$\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 + s); \quad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4a} (r_1 + r_2 - s), \quad (13.5)$$

$$0^\circ < \varepsilon < 180^\circ, \quad 0^\circ < \delta < 180^\circ$$

найденны $\frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\delta$, находим с возможной точностью разность этих величин при помощи соотношения

$$\sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) \sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) = \frac{s}{2a}, \quad (13.6)$$

являющегося прямым следствием равенств (13.5).

Далее, так как

$$2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) - (\sin \varepsilon - \sin \delta) =$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) \left[1 - \cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta) \right] = \frac{s}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\varepsilon + \delta),$$

то первому из равенств (13.1), в котором в рассматриваемом случае может иметь место только верхний знак, можно придать такой вид:

$$\tau a^{-3/2} = \frac{s}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\varepsilon + \delta) + 2 \left[\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) - \sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) \right].$$

Выразив квадратную скобку через функцию (13.3), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \tau a^{-3/2} &= \frac{s}{a} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon + \delta}{4} + \frac{8k}{\sqrt{2}} \zeta^{3/2} V(\zeta), \\ \zeta &= \sin^2 \frac{\varepsilon - \delta}{4}; \quad \frac{8k}{\sqrt{2}} = 0,097\,30977 = [8,988\,1564]. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Значение a варьируется до тех пор, пока правая и левая части этого равенства, вычисляемые при помощи (13.5) и (13.6), не станут равными *).

Другой метод для нахождения a , одинаково пригодный во всех встречающихся на практике случаях, но требующий

*) Изложенный способ применения теоремы Ламберта к нахождению большой полуоси является модификацией способа, данного Пламмером [1906]. До него этот вопрос изучали Март [1865] и М. А. Ковальский [1875].

специальных таблиц [М. Ф. Субботин, 1923 и 1929], основан на представлении уравнения Ламберта в форме

$$\frac{1}{4a} = \frac{\theta}{r_1 + r_2} - \frac{s^2}{4\tau^2}, \quad (13.8)$$

являющейся обобщением интеграла энергии. Здесь

$$\theta = R + \frac{16R^3c}{(\varepsilon - \sin \varepsilon - \delta + \sin \delta)^2},$$

причем

$$R = \frac{r_1 + r_2}{4a}; \quad c = \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^2.$$

При наличии таблиц, дающих θ по аргументам R и c , уравнение (13.8), представленное в форме

$$R = \theta - \frac{s^2}{4\tau^2} (r_1 + r_2),$$

легко решается относительно R способом итерации.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Предварительные замечания

Решение задачи двух тел, полученное в гл. III, дает координаты в виде неявных функций времени. Эти выражения позволяют, как мы видели, во всех случаях достаточно удобно вычислять координаты. Однако в том весьма важном случае, когда рассматривается движение по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом, для координат могут быть получены выражения совсем другого рода, в виде явных функций времени.

Но как раз этот случай движения и представляет особый интерес при изучении солнечной системы. Действительно, если для Плутона $e=0,247$, для Меркурия $e=0,206$ и для Марса $e=0,093$, то для всех остальных больших планет эксцентриситеты не превышают 0,056. С другой стороны, около 30% малых планет имеют эксцентриситеты, меньшие 0,10, а для 65% малых планет эксцентриситет не превосходит 0,18.

Явные и достаточно удобные выражения координат в функции времени важно иметь не столько для облегчения вычислений, сколько для решения других задач, прежде всего, для изучения возмущенного движения планет.

Различные координаты, могущие служить для определения положения светила в эллиптическом движении (например, E , r , v), являются периодическими функциями средней аномалии M , имеющими период 2π . Во всех рассматриваемых нами в дальнейшем случаях эти функции будут разложимы в тригонометрические ряды вида

$$f(M) = A^0 + 2 \sum_1^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \quad (1.1)$$

сходящиеся для всех значений M .

Более того, поскольку рассматриваемые нами величины $f(M)$ будут всегда (при $e < 1$) аналитическими функциями M и e ,

ряды (1.1) будут сходиться для всех значений M и e , а коэффициенты их будут убывать так, что произведения $A_k k^\alpha$ и $B_k k^\alpha$ при любом показателе α будут стремиться к нулю, когда $k \rightarrow \infty$.

Положив

$$A_{-k} = A_k, \quad B_{-k} = -B_k, \quad B_0 = 0,$$

ряд (1.1) можно написать так:

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \quad (1.2)$$

Так как операции над степенными рядами выполняются проще, нежели над тригонометрическими, часто бывает выгодно заменить ряд (1.2) соответствующим рядом Лорана. Делая

$$z = \exp iM, \quad i = \sqrt{-1},$$

откуда

$$2 \cos kM = z^k + z^{-k}; \quad 2 \sin kM = -iz^k + iz^{-k},$$

получим

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k, \quad (1.3)$$

где

$$P_k = A_k - iB_k.$$

Ряд (1.3) сходится внутри кольца, содержащего окружность $|z| = 1$. Известные формулы для коэффициентов ряда (1.1)

$$2\pi A_k = \int_0^{2\pi} f(M) \cos kM dM; \quad 2\pi B_k = \int_0^{2\pi} f(M) \sin kM dM$$

дают

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f(M) z^{-k} dM. \quad (1.4)$$

Для тех функций, которые нам придется рассматривать, интегралы (1.4) не могут быть, за редкими исключениями, выражены через элементарные функции, но они очень удобно выражаются через бесселевы функции. Нужные нам свойства этих функций будут рассмотрены в следующем параграфе.

Помимо разложений вида (1.2) по кратным средней аномалии иногда приходится пользоваться аналогичными разложениями по кратным истинной аномалии v или эксцентрической аномалии E . Мы остановимся поэтому и на возникающих здесь задачах перехода от одного вида разложения к другому.

§ 2. Некоторые свойства бесселевых функций

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right].$$

При любом конечном не равном нулю значении x она имеет только две особые точки: $z=0$ и $z=\infty$. Поэтому ее разложение в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n \quad (2.1)$$

сходится на всей плоскости комплексной переменной z , за исключением точки $z=0$.

Коэффициент $J_n(x)$ в этом разложении называется бесселевой функцией с индексом n .

Если в равенстве (2.1) заменить z через $-z^{-1}$, то вследствие единственности разложения функции в ряд Лорана будем иметь

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x); \quad (2.2)$$

заменяя в этом же равенстве x на $-x$, а z на z^{-1} , получим

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \quad (2.3)$$

Легко получить разложение функции $J_n(x)$ в степенной ряд. Так как

$$\exp\left(\frac{x}{2}z\right) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!}; \quad \exp\left(-\frac{x}{2}z^{-1}\right) = \sum_0^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^{\beta} \frac{z^{-\beta}}{\beta!},$$

то перемножение этих рядов дает разложение (2.1) в такой форме:

$$\Phi(z) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha! \beta!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} z^{\alpha-\beta}.$$

Соберем здесь члены, имеющие множителем z^n , где $n \geq 0$ (соотношение (2.2) показывает, что мы можем ограничиться этим случаем). Для таких членов $\alpha = \beta + n$, а так как $\alpha \geq 0$, то мы получим все нужные нам члены, меняя β от 0 до $+\infty$. Итак,

$$J_n(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta! (\beta+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta}. \quad (2.4)$$

Этот ряд сходится, очевидно, на всей плоскости комплексной переменной x .

Дифференцирование равенства (2.1) по z дает тождество

$$\frac{x}{2} (1 + z^{-2}) \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} n J_n(x) z^{n-1},$$

откуда, приравняв коэффициенты при z^{n-1} , будем иметь

$$n J_n(x) = \frac{x}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \quad (2.5)$$

С другой стороны, дифференцирование равенства (2.1) по x дает

$$\frac{1}{2} (z - z^{-1}) \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} J'_n(x) z^n.$$

Приравняв здесь коэффициенты при z^n , получим

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \quad (2.6)$$

Это равенство позволяет представить производную какого угодно порядка бесселевой функции в виде линейной комбинации таких функций. Так, например,

$$J''_n(x) = \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)].$$

Покажем, что функция $J_n(x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В самом деле, последнее равенство можно написать следующим образом:

$$J''_n(x) = -J_n(x) + \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) + J_n(x)] + \frac{1}{4} [J_n(x) + J_{n+2}(x)],$$

или

$$\begin{aligned} J''_n(x) + J_n(x) &= \frac{1}{2x} [(n-1)J_{n-1}(x) + (n+1)J_{n+1}(x)] = \\ &= \frac{n}{2x} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] - \frac{1}{2x} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь соотношениями (2.5) и (2.6), получим

$$J''_n(x) + \frac{1}{x} J'_n(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение, дающее возможность изучать функции $J_n(x)$ для всех как действительных, так и комплексных значений индекса n , является основой общей теории бесселевых функций.

Если в формуле (2.1) положить

$$z = \exp i\varphi,$$

то она примет вид

$$\exp(ix \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \exp(in\varphi).$$

Пусть x и φ вещественны. Приравнявая вещественные и мнимые части и учитывая соотношения (2.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin \varphi) &= J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi + \dots, \\ \sin(x \sin \varphi) &= \quad + 2J_1(x) \sin \varphi + 2J_3(x) \sin 3\varphi + \dots \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Замена φ через $\frac{\pi}{2} + \varphi$ дает:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \cos \varphi) &= J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi - \dots, \\ \sin(x \cos \varphi) &= \quad 2J_1(x) \cos \varphi - 2J_3(x) \cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Докажем еще следующую формулу, носящую название интеграла Пуассона,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^n}{(2n-1)!!} \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \cos(x \cos \varphi) d\varphi. \quad (2.9)$$

Для этого заметим, что разложение (2.4) можно написать так:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= x^n \sum_0^\infty \frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{(2\beta)!! (2n+2\beta)!!} = \\ &= \frac{x^n}{(2n-1)!!} \sum_0^\infty \frac{(2n-1)!! (2\beta-1)!!}{(2n+2\beta)!!} \frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{(2\beta)!}, \end{aligned}$$

и воспользуемся известной формулой:

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \cos^{2\beta} \varphi d\varphi = \pi \frac{(2n-1)!! (2\beta-1)!!}{(2n+2\beta)!!}.$$

Это даст

$$J_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!} \sum_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \frac{(-1)^\beta x^{2\beta} \cos^{2\beta} \varphi}{(2\beta)!} d\varphi,$$

откуда и следует справедливость формулы (2.9).

Интеграл Пуассона показывает, что для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$|J_n(x)| < \frac{|x|^n}{(2n-1)!!}, \quad (2.10)$$

дающее очень удобную и достаточно точную верхнюю границу.

§ 3. Вычисление бесселевых функций

В астрономических задачах обычно приходится вычислять все функции $J_0(x)$, $J_1(x)$, ..., которые при рассматриваемом значении x отличны от нуля в пределах принятого числа знаков. Неравенство (2.10) позволяет заранее найти то значение n , до которого при этом надо вести вычисления. Зная n , мы можем применить один из следующих двух способов.

Первый способ. Почленное сложение равенств (2.8) дает

$$F(\varphi) = c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \cos(x \cos \varphi) + \sin(x \cos \varphi), \\ c_0 &= J_0(x), \quad c_1 = 2J_1(x), \quad c_2 = -2J_2(x), \\ c_3 &= -2J_3(x), \quad c_4 = 2J_4(x), \quad c_5 = 2J_5(x), \dots \end{aligned}$$

Таким образом, вычислив $F(\varphi)$ для достаточного числа равноотстоящих значений φ и применив обычные формулы гармонического анализа, мы сразу получим $J_0(x)$, $J_1(x)$, ..., $J_n(x)$.

Для контроля можно использовать какие-либо частные случаи формул (2.7) или (2.8), например, одно из равенств

$$\begin{aligned} 1 &= J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots, \\ \cos x &= J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots, \\ \sin x &= 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots \end{aligned}$$

Второй способ. Введем в рассмотрение отношения p_k двух смежных бесселевых функций, полагая

$$J_1(x) = p_1 J_0(x); \quad J_2(x) = p_2 J_1(x); \quad \dots$$

Отсюда, опустив для краткости аргумент x , получим

$$J_1 = J_0 p_1; \quad J_2 = J_0 p_1 p_2; \quad \dots; \quad J_n = J_0 p_1 p_2 \dots p_n. \quad (3.1)$$

Задача приводится, таким образом, к вычислению $J_0(x)$ и к нахождению p_1, p_2, \dots, p_n . Обратимся сначала к вычислению этих последних величин. Формула (2.5) дает

$$\frac{2k}{x} = \frac{J_{k-1}}{J_k} + \frac{J_{k+1}}{J_k},$$

откуда

$$\frac{2k}{x} = \frac{1}{p_k} + p_{k+1}. \quad (3.2)$$

Делая здесь $k = n-1, n-2, \dots, 1$, получим соотношения

$$\frac{1}{p_{n-1}} = \frac{2n-2}{x} - p_n; \quad \frac{1}{p_{n-2}} = \frac{2n-4}{x} - p_{n-1}; \quad \dots; \quad \frac{1}{p_1} = \frac{2}{x} - p_2,$$

позволяющие, если p_n известно, удобно и без потери точности найти $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$.

Но то же самое равенство (3.2) дает

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - p_{n+1}}; \quad p_{n+1} = \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - p_{n+2}},$$

так что p_n выражается следующей цепной дробью:

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - \frac{1}{\frac{2n+4}{x} - \dots}}}$$

которая сходится тем быстрее, чем больше n и чем меньше x .

Вычисление $J_0(x)$ может быть выполнено как при помощи ряда (2.4), так и по формуле (2.9). Кроме того, имеются многочисленные таблицы, дающие $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с большой точностью.

Укажем, например, таблицы, помещенные в фундаментальном трактате Ватсона [1922]. Они дают $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с семью знаками для $x=0,00$ (0,02) 16,00.

Таблицы Хайаши [1930] дают эти функции с 18 знаками для $x=0,000$ (0,001) 0,110; с 16 знаками для $x=0,12$ (0,01) 0,50; и с 12 знаками для $x=0,50$ (0,01) 25,10.

Сведения о других таблицах можно найти в специальных справочниках [А. В. Лебедев и Р. М. Федорова, 1956].

§ 4. Преобразование тригонометрических рядов по кратным эксцентрической аномалии в ряды по кратным средней аномалии

Рассмотрим аналитическую функцию f эксцентрической аномалии E , имеющую период 2π , а потому разлагающуюся в тригонометрический ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_k \cos kE + b_k \sin kE). \quad (4.1)$$

В силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (4.2)$$

эта функция будет также разлагаться в ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \quad (4.3)$$

Для решения стоящей перед нами задачи преобразования ряда (4.1) в ряд (4.3) заменим оба эти ряда соответствующими

степенными рядами. Полагая

$$y = \exp iE; \quad z = \exp iM, \quad (4.4)$$

получим

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k y^k; \quad p_k = a_k - ib_k \quad (4.5)$$

и

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k; \quad P_k = A_k - iB_k. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.2) показывает, что переменные (4.4) связаны между собой соотношением

$$z = y \exp\left(-\frac{e}{2}y + \frac{e}{2}y^{-1}\right), \quad (4.7)$$

преобразующим окружность $|y|=1$ в окружность $|z|=1$.

Рассмотрим особые точки функции $y(z)$, определяемой этим соотношением. Помимо очевидных особых точек $z=0$ и $z=\infty$, могут еще быть точки разветвления, обращающие в нуль производную

$$\frac{dz}{dy} = \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right] \exp\left(-\frac{e}{2}y + \frac{e}{2}y^{-1}\right).$$

Действительно, корни этого уравнения

$$y_1 = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}; \quad y_2 = \frac{1}{y_1} = \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}$$

дают две точки разветвления:

$$z_1 = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \exp(-\sqrt{1 - e^2}); \quad z_2 = \frac{1}{z_1}.$$

Так как в рассматриваемом нами случае эллиптического движения $0 \leq e < 1$, то $z_1 < 1 < z_2$. Отсюда следует, что функция $y(z)$ разлагается в ряд Лорана, область сходимости которого заключает окружность $|z|=1$. Таким образом, ряд (4.6), получающийся из сходящегося ряда (4.5), будет также сходящимся.

Формула (1.4) дает

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f z^{-k} dM, \quad (4.8)$$

но из (4.2), (4.4) и (4.7) легко получаем

$$\frac{dM}{dE} = 1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1}); \quad z^{-k} = y^{-k} \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]. \quad (4.9)$$

Следовательно,

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} f y^{-k} \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right] \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right] dE,$$

или

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} F_k y^{-k} dE, \quad (4.10)$$

где

$$F_k = f \cdot \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right] \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.10) с (4.8), получаем *первое правило Коши*:

Для получения коэффициента P_k ряда (4.6) надо функцию F_k , в которой f заменено рядом (4.5), разложить по степеням y . Коэффициент при y^k в этом разложении будет равен P_k .

Можно идти несколько иным путем. Так как

$$\frac{dz^{-k}}{dM} = -kz^{-k-1} \frac{dz}{dM} = -ikz^{-k}$$

иначе говоря

$$z^{-k} = \frac{i}{k} \frac{dz^{-k}}{dM},$$

то формулу (4.8) можно написать так:

$$2\pi P_k = \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} f \frac{dz^{-k}}{dM} dM.$$

Интегрирование по частям и последующий переход к переменной интегрирования E дают

$$2\pi P_k = -\frac{i}{k} \int_0^{2\pi} z^{-k} \frac{df}{dM} dM = -\frac{i}{k} \int_0^{2\pi} z^{-k} \frac{df}{dE} dE.$$

Подставляя сюда выражение (4.7) и замечая, что

$$\frac{df}{dE} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dE} = iy \frac{df}{dy},$$

окончательно получим

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} G_k y^{-(k-1)} dy,$$

где

$$G_k = \frac{1}{k} \frac{df}{dy} \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]. \quad (4.12)$$

Это дает второе правило Коши:

Для получения коэффициента при z^k в ряде (4.6) надо функцию G_k разложить по степеням y и взять коэффициент при y^{k-1} .

Какое из двух правил Коши окажется более удобным, зависит от структуры функции f . Заметим только, что второе правило неприменимо для нахождения коэффициента P_0 .

Так как функции, которые приходится разлагать, почти всегда очень просто выражаются через $y+y^{-1}$ и $y-y^{-1}$, то применение указанных правил естественно приводит к употреблению чисел Коши: так называются коэффициенты $N_{-p, j, q}$ в разложении

$$(t+t^{-1})^j (t-t^{-1})^q = \sum_{-\infty}^{+\infty} N_{-p, j, q} t^p,$$

где j и q — целые, не отрицательные числа.

Это равенство показывает, что

$$N_{-p, j, q} = \begin{cases} 1, & \text{если } j+q-p=0, \\ 0, & \text{если } j+q-p < 0 \text{ или равно нечетному числу.} \end{cases}$$

Мы можем, следовательно, положить

$$j+q-p=2r,$$

где r — целое неотрицательное число.

Рассмотрим сначала вычисление чисел Коши в случае, когда $j=0$. Так как

$$(t-t^{-1})^q = \sum_{\beta=0}^q (-1)^\beta \frac{q!}{\alpha! \beta!} t^{\alpha-\beta},$$

где $\alpha+\beta=q$, то полагая $\alpha-\beta=p$, получим

$$N_{-p, 0, q} = (-1)^r \frac{q!}{r!(p+r)!}; \quad (2r=q-p).$$

Для случая, когда $j>0$, можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$N_{-p, j+1, q} = N_{-p+1, j, q} + N_{-p-1, j, q},$$

непосредственно вытекающим из очевидного тождества

$$(t+t^{-1})^{j+1} (t-t^{-1})^q = t(t+t^{-1})^j (t-t^{-1})^q + t^{-1}(t+t^{-1})^j (t-t^{-1})^q.$$

Столь же просто доказывается формула

$$N_{p, j, q} = (-1)^q N_{-p, j, q}.$$

В заключение отметим, что числа Коши выражаются через гипергеометрические полиномы:

$$N_{-p, j, q} = \frac{j!}{r!(j-r)!} F(-q, -r, j-r+1; -1),$$

что и является источником многочисленных соотношений, связывающих эти числа.

Подробные сведения о числах Коши и об их применении содержит работа Бурже [1863].

§ 5. Разложение некоторых основных функций

В качестве простейшего примера применения изложенных в предыдущем параграфе методов рассмотрим разложение функции

$$\frac{a}{r} = (1 - e \cos E)^{-1} = \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right]^{-1}.$$

Чтобы применить первое правило Коши, составим по формуле (4.11) соответствующую функцию

$$F_k = \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(ke) y^n.$$

Разложение этой функции по степеням y показывает, что

$$P_k = J_k(ke),$$

а потому

$$\frac{a}{r} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(ke) z^k.$$

Пользуясь формулами (2.2), (2.3) и (4.4), этот ряд можно написать так:

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \quad (5.1)$$

Найдем разложения функций $\cos mE$ и $\sin mE$, где m — целое число. Для этого рассмотрим функцию

$$f = \exp imE = y^m$$

и положим

$$y^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k^m z^k.$$

Все коэффициенты P_k^m при $k \neq 0$ мы получим, согласно второму правилу, взяв коэффициент при y^{k-1} в разложении

функции, определяемой формулой (4.12), т. е.

$$G_k = \frac{m}{k} y^{m-1} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(ke) y^n.$$

Таким образом, если $k \neq 0$, то

$$P_k^m = \frac{m}{k} J_{k-m}(ke).$$

Чтобы найти P_0^m , воспользуемся первым правилом Коши. Формула (4.11) дает

$$F_0 = y^m \left[1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}) \right].$$

Отсюда видно, что $P_0^1 = -\frac{e}{2}$ и $P_0^m = 0$, если $m > 1$. Все это дает следующие разложения

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} J_{k-1}(ke) \cos kM,$$

$$\cos mE = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{k} J_{k-m}(ke) \cos kM \quad (m > 1),$$

$$\sin mE = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{k} J_{k-m}(ke) \sin kM \quad (m \geq 1).$$

Если $m > 1$, то полученные ряды можно представить в таком виде:

$$\cos mE = \sum_1^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \cos kM, \quad (5.2)$$

$$\sin mE = \sum_1^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)] \sin kM. \quad (5.3)$$

Если же $m = 1$, то формулы (2.5) и (2.6) позволяют написать их еще проще:

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J'_k(ke) \cos kM, \quad (5.4)$$

$$\sin E = \sum_1^{\infty} \frac{2}{ke} J_k(ke) \sin kM. \quad (5.5)$$

Подстановка двух последних разложений в равенства

$$E - e \sin E = M, \quad r = a(1 - e \cos E)$$

дает

$$E = M + \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (5.6)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \sum_1^{\infty} \frac{2e}{k} J'_k(ke) \cos kM. \quad (5.7)$$

Последнюю формулу, особенно часто встречающуюся в приложениях, дадим в развернутом виде. Напишем ее так:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \sum_1^{\infty} G_k \cos kM;$$

тогда

$$G_1 = 2 \left(\frac{e}{2}\right) - 3 \left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{6} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{7}{72} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \frac{9}{1440} \left(\frac{e}{2}\right)^9 - \dots,$$

$$G_2 = 2 \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + 4 \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{64}{45} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \dots,$$

$$G_3 = 3 \left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{45}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{567}{40} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \frac{729}{80} \left(\frac{e}{2}\right)^9 + \dots,$$

$$G_4 = \frac{16}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{128}{5} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{2048}{45} \left(\frac{e}{2}\right)^8 - \dots,$$

$$G_5 = \frac{125}{12} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{4375}{72} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \frac{15625}{112} \left(\frac{e}{2}\right)^9 - \dots,$$

$$G_6 = \frac{108}{5} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \frac{5184}{35} \left(\frac{e}{2}\right)^8 + \dots,$$

$$G_7 = \frac{16807}{360} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \frac{117649}{320} \left(\frac{e}{2}\right)^9 + \dots,$$

$$G_8 = \frac{32768}{315} \left(\frac{e}{2}\right)^8 - \dots;$$

$$G_9 = \frac{531441}{2240} \left(\frac{e}{2}\right)^9 - \dots$$

Выписав логарифмы коэффициентов, будем иметь *)

$$G_1 = e - [9,574\ 0313] e^3 + [8,415\ 6688] e^5 - [6,880] e^7 + \dots,$$

$$G_2 = [9,698\ 9700] e^2 - [9,522\ 8787] e^4 + [8,795\ 88] e^6 - [7,7447] e^8 + \dots$$

*) В таком виде это разложение, а также разложение (6.5), было дано Ф. Шубертом [1798]. Разложения (5.6) и (5.7), имеющие фундаментальное значение для теоретической астрономии, были найдены Лагранжем в 1769 г. Общая форма коэффициентов рассматриваемых разложений легко получается при помощи бесселевых функций многих переменных [Акимов, 1929].

$$\begin{aligned}
G_3 &= [9,574\ 0313] e^3 - [9,546\ 0025] e^5 + [9,044\ 313] e^7 - [8,25] e^9 + \dots, \\
G_4 &= [9,522\ 8787] e^4 - [9,602\ 0600] e^6 + [9,249\ 88] e^8 - [8,627] e^{10} + \dots, \\
G_5 &= [9,512\ 5788] e^5 - [9,676\ 436] e^7 + [9,435\ 33] e^9 - [8,938] e^{11} + \dots, \\
G_6 &= [9,528\ 2738] e^6 - [9,762\ 357] e^8 + [9,6094] e^{10} - [9,211] e^{12} + \dots, \\
G_7 &= [9,561\ 98] e^7 - [9,856\ 17] e^9 + [9,7762] e^{11} - \dots, \\
G_8 &= [9,6089] e^8 - [9,9557] e^{10} + [9,938] e^{12} - \dots, \\
G_9 &= [9,6659] e^9 - [10,0595] e^{11} + [10,096] e^{13} - \dots, \\
G_{10} &= [9,731] e^{10} - [10,167] e^{12} + \dots, \\
G_{11} &= [9,8025] e^{11} - [10,277] e^{13} + \dots, \\
G_{12} &= [9,879] e^{12} - \dots, \\
G_{13} &= [9,961] e^{13} - \dots
\end{aligned}$$

(из характеристик всех логарифмов надо вычесть 10).

Выведенные нами формулы позволяют получить много других разложений. Так, например, соотношение

$$1 + e \cos v = (1 - e^2) \frac{a}{r}$$

позволяет из (5.1) вывести ряд

$$\cos v = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_1^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \quad (5.8)$$

Чтобы найти разложение $\sin v$, заметим, что

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right) = e \sin E \frac{dE}{dM} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin v,$$

и воспользуемся формулой (5.7). Это даст

$$\sin v = 2 \sqrt{1 - e^2} \sum_1^{\infty} J'_k(ke) \sin kM. \quad (5.9)$$

Еще одно полезное разложение дает соотношение

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right)^2 = \frac{d}{dM} (1 - e \cos E)^2 = 2e \sin E.$$

После подстановки сюда выражения (5.5) и интегрирования будем иметь

$$\left(\frac{r}{a} \right)^2 = C - \sum_1^{\infty} \frac{4}{k^2} J_k(ke) \cos kM. \quad (5.10)$$

Для нахождения постоянной C нужно только заметить, что

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \cos E + \frac{e^2}{2} \cos 2E,$$

и учесть разложения (5.2) и (5.4). Это дает $C = 1 + \frac{3}{2} e^2$.

Примечание. В разложениях, выведенных в этом параграфе, так же как и в большинстве астрономических приложений, бесселевы функции встречаются чаще всего в двух следующих формах:

$$\frac{2}{e} J_k(ke) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \times \\ \times \left[1 - \frac{k^2 e^2}{2 \cdot (2k+2)} + \frac{k^4 e^4}{2 \cdot 4 \cdot (2k+2)(2k+4)} - \dots \right];$$

$$2J'_k(ke) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \times \\ \times \left[1 - \frac{k+2}{k} \frac{k^2 e^2}{2 \cdot (2k+2)} + \frac{k+4}{k} \frac{k^4 e^4}{2 \cdot 4 \cdot (2k+2)(2k+4)} - \dots \right].$$

Отметим следующие частные случаи, которые особенно полезно иметь в готовом виде:

$$\frac{2}{e} J_1(e) = 1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \dots,$$

$$\frac{2}{e} J_2(2e) = e \left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \dots \right),$$

$$\frac{2}{e} J_3(3e) = \frac{9e^2}{8} \left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \dots \right),$$

$$\frac{2}{e} J_4(4e) = \frac{4e^3}{3} \left(1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \dots \right),$$

$$\frac{2}{e} J_5(5e) = \frac{625e^4}{384} \left(1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \dots \right),$$

$$\frac{2}{e} J_6(6e) = \frac{81e^5}{40} \left(1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \dots \right),$$

.....

$$2J'_1(e) = 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} - \frac{7e^6}{9216} + \dots,$$

$$2J'_2(2e) = e \left(1 - \frac{2e^2}{3} + \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{90} + \dots \right),$$

$$2J'_3(3e) = \frac{9e^2}{8} \left(1 - \frac{15e^2}{16} + \frac{189e^4}{640} - \dots \right),$$

$$2J'_4(4e) = \frac{4e^3}{3} \left(1 - \frac{6e^2}{5} + \frac{8e^4}{15} - \dots \right),$$

$$2J'_5(5e) = \frac{625e^4}{384} \left(1 - \frac{35e^2}{24} + \frac{375e^4}{448} - \dots \right),$$

$$2J'_6(6e) = \frac{81e^5}{40} \left(1 - \frac{12e^2}{7} + \frac{135e^4}{112} - \dots \right).$$

Соотношения

$$(1 \pm e)^{-1} = \sum_1^{\infty} (\mp 1)^{k-1} \frac{2}{e} J_k(ke),$$

$$(1 \pm e)^{-2} = \sum_1^{\infty} (\mp 1)^{k-1} 2kJ'_k(ke),$$

на доказательстве которых мы не будем останавливаться, могут служить для контроля.

§ 6. Уравнение центра

Уравнением центра называется разность между истинной аномалией и средней аномалией. Чтобы получить эту величину в виде явной функции времени, выразим сначала истинную аномалию через эксцентрическую. Для этого решим уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (6.1)$$

при помощи формулы (9.8) гл. IV. Получим

$$v = E + 2 \left[\beta \sin E + \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2E + \dots \right], \quad (6.2)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}. \quad (6.3)$$

Полезно отметить, что из соотношения (6.1), написанного в форме

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

получается разложение

$$E = v - 2 \left[\beta \sin v - \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2v + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 3v - \dots \right]. \quad (6.4)$$

Замена в равенстве (6.2) E , $\sin E$, $\sin 2E$, ... их выражениями (5.3), (5.6) дает следующую весьма важную формулу для уравнения центра:

$$v - M = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \dots, \quad (6.5)$$

где

$$H_1 = 4 \left(\frac{e}{2} \right) - 2 \left(\frac{e}{2} \right)^3 + \frac{5}{3} \left(\frac{e}{2} \right)^5 + \frac{107}{36} \left(\frac{e}{2} \right)^7 + \dots$$

$$H_2 = 5 \left(\frac{e}{2} \right)^2 - \frac{22}{3} \left(\frac{e}{2} \right)^4 + \frac{17}{3} \left(\frac{e}{2} \right)^6 + \dots,$$

$$H_3 = \frac{26}{3} \left(\frac{e}{2} \right)^3 - \frac{43}{2} \left(\frac{e}{2} \right)^5 + \frac{95}{4} \left(\frac{e}{2} \right)^7 - \dots$$

$$H_4 = \frac{103}{6} \left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{902}{15} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$H_5 = \frac{1097}{30} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{5957}{36} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots$$

$$H_6 = \frac{1223}{15} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots,$$

$$H_7 = \frac{47\,273}{252} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots$$

Приведем еще значения H_1, H_2, \dots в секундах дуги, причем вместо числовых коэффициентов дадим их логарифмы:

$$H_1 = [5,615455129] e - [4,7123651] e^3 + [4,031124] e^5 + \\ + [3,6803] e^7 + [3,541] e^9 + \dots,$$

$$H_2 = [5,411335146] e^2 - [4,9756066] e^4 + [4,26157] e^6 + \\ + [3,1875] e^8 + \dots,$$

$$H_3 = [5,34918724] e^3 - [5,1417136] e^5 + [4,58288] e^7 - [3,514] e^9 + \dots,$$

$$H_4 = [5,3449911] e^4 - [5,28736] e^6 + [4,8682] e^8 - [4,14] e^{10} + \dots,$$

$$H_5 = [5,3723605] e^5 - [5,42594] e^7 + [5,120] e^9 - [4,554] e^{11} + \dots,$$

$$H_6 = [5,41958] e^6 - [5,5615] e^8 + [5,348] e^{10} - \dots,$$

$$H_7 = [5,48043] e^7 - [5,69557] e^9 + [5,56] e^{11} - \dots,$$

$$H_8 = [5,5512] e^8 - [5,829] e^{10} + [5,76] e^{12} - \dots,$$

$$H_9 = [5,62953] e^9 - [5,9618] e^{11} + [5,952] e^{13} - \dots,$$

$$H_{10} = [5,7138] e^{10} - [6,094] e^{12} + \dots,$$

$$H_{11} = [5,8028] e^{11} - [6,227] e^{13} + \dots,$$

$$H_{12} = [5,896] e^{12} - \dots,$$

$$H_{13} = [5,992] e^{13} - \dots$$

Примечание. Коэффициенты ряда (6.5) имеют весьма сложную структуру. Несравненно проще выражаются коэффициенты разложения уравнения центра по кратным истинной аномалии. Чтобы вывести такое разложение, обратимся к формулам

$$M = E - e \sin E; \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1 + e \cos v},$$

которые дают

$$M = E + \sqrt{1-e^2} \frac{d}{dv} \ln(1 + e \cos v).$$

Так как, полагая $x = \exp(iv)$, имеем

$$1 + e \cos v = \frac{e}{2\beta} (1 + \beta x)(1 + \beta x^{-1}),$$

то

$$\ln(1 + e \cos v) = \ln \frac{e}{2\beta} + 2 \left(\beta \cos v - \frac{1}{2} \beta^2 \cos 2v + \dots \right),$$

и потому

$$M = E + 2 \sqrt{1 - e^2} (-\beta \sin v + \beta^2 \sin 2v - \beta^3 \sin 3v + \dots).$$

Заменяв здесь E выражением (6.4), окончательно получим

$$M = v + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \beta^k (1 + k \sqrt{1 - e^2}) \sin kv. \quad (6.6)$$

§ 7. Разложение некоторых функций, встречающихся в теории возмущенного движения

При изучении возмущенного движения планет употребляются разложения по кратным средней аномалии функций

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\sin}{\cos} m(v - M), \quad (7.1)$$

где p , n и m — целые числа, причем p и m принимают только положительные и равные нулю значения.

Вычисление коэффициентов разложений таких функций до определенной степени e не представляет никаких трудностей. Имеем, например,

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin m(v - M) = \\ = \left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{ m(v - M) - \frac{1}{6} m^3 (v - M)^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь r/a и $v - M$ рядами (5.7) и (6.5), получим требуемый результат.

Коэффициенты разложений функций (7.1), вычисленные до e^7 , дает Леверрье [1855]. Кэли [1861] дал с той же точностью коэффициенты разложений функций

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \frac{\sin}{\cos} mv$$

для $p=0, 1, \dots, 7$, $m=0, 1, \dots, 7$ и функций

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{\sin}{\cos} mv$$

для $n=-5, -4, \dots, -1, 1, \dots, 4$; $m=0, 1, \dots, 5^*$).

*) Дальнейшее расширение таблиц Кэли, содержащее в числе прочих разложения функций $(r/a)^n \exp(imf)$ (f — истинная аномалия) с точностью до e^{20} , опубликовано в *Astron. Papers*, Vol. XVIII, 1965 под названием *Expansions in Elliptic Motion* Ярнагином (Milton P. Jarnagin, Jr.).

Некоторые, наиболее часто встречающиеся разложения приведены на стр. 737—744 в форме таблиц I и II. Эти таблицы дают коэффициенты при различных степенях e в $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$, фигурирующих в разложениях:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv &= C_0^{n,m} + C_1^{n,m} \cos M + C_2^{n,m} \cos 2M + \dots, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv &= S_1^{n,m} \sin M + S_2^{n,m} \sin 2M + \dots \end{aligned} \right\} (7.2)$$

Так, например, таблица II показывает, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right) \sin v &= \left(1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4 - \frac{457}{9216} e^6 - \dots\right) \sin M + \\ &+ \left(\frac{1}{2} e - \frac{5}{12} e^3 + \frac{1}{24} e^5 - \frac{1}{45} e^7 + \dots\right) \sin 2M + \\ &+ \left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{51}{128} e^4 + \frac{543}{5120} e^6 - \dots\right) \sin 3M + \dots \end{aligned}$$

Таблицы I и II содержат разложения до e^7 . Некоторые из этих разложений, продолженные до e^9 , дает Ш. Г. Шараф [1953].

Вместо того, чтобы рассматривать отдельно два разложения (7.2), можно изучать ряд

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m} z^k.$$

Коэффициенты $X_k^{n,m}$ этого ряда называются иногда коэффициентами Ганзена, так как Ганзен первый дал общие выражения этих величин, представив их в виде рядов, расположенных по степеням β . Ньюком [1895] и Иннес [1904] дали коэффициенты в разложениях $X_m^{n,m}$, $X_{m+1}^{n,m}$, ..., по степеням e в виде полиномов от n и m .

Проще всего эти коэффициенты могут быть получены при помощи первого правила Коши.

Согласно этому правилу $X_k^{n,m}$ будет равняться коэффициенту при y^k в разложении выражения

$$F_k = f \left[1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}) \right] \exp \left[\frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right].$$

Выразим прежде всего функцию

$$f = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$$

через y . Мы имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = 1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}).$$

Легко видеть, что

$$\frac{r}{a} = (1 + \beta^2)^{-1} (1 - \beta y) (1 - \beta y^{-1}),$$

где, как и раньше,

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

С другой стороны, соотношение (6.1) дает

$$x = y(1 - \beta y^{-1})(1 - \beta y)^{-1}. \quad (7.3)$$

Таким образом,

$$F_k = (1 + \beta^2)^{-n-1} y^m (1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} \exp \left[\frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right].$$

Пользуясь формулой бинома, легко вычислить коэффициенты разложения:

$$(1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} = \sum_{k=p-\infty}^{+\infty} E_{k-p}^{n,m} y^{k-p-m}$$

и получить их в такой форме:

$$E_{k-p}^{n,m} = (-\beta)^{k-p-m} \binom{n-m+1}{k-p-m} \times \\ \times F(k-p-n-1, -m-n-1, k-p-m+1; \beta^2)$$

где через $F(a, b, c; x)$ обозначена гипергеометрическая функция.

Так как

$$\exp \left[\frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_p(ke) y^p,$$

то искомым коэффициентом при y^k в разложении функции F_k равен

$$X_k^{n,m} = (1 + \beta^2)^{-n-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} E_{k-p}^{n,m} J_p(ke).$$

Эта формула позволяет сравнительно очень легко получить разложения коэффициентов $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета.

§ 8. Разложение координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

Разложения функций вида $F(r, v)$ в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии M , рассмотренные в предыдущих параграфах, сходятся при всех значениях эксцентриситета e . Но при употреблении этих рядов часто приходится поль-

зоваться, вместо точных значений коэффициентов (являющихся сложными функциями e) приближенными значениями; коэффициенты при этом разлагаются по степеням e и все члены, начиная с некоторой определенной степени e , отбрасываются. Таким образом, фактически мы часто употребляем разложения функций $F(r, v)$ по степеням e , причем коэффициенты этих разложений являются периодическими (с периодом 2π) функциями M . Рассмотрим вопрос о сходимости таких степенных рядов при произвольном значении M .

Функцию $F(r, v)$ можно рассматривать как функцию $\Phi(E)$ эксцентрической аномалии, которая в свою очередь является функцией e и M в силу уравнения Кеплера:

$$E - e \sin E = M. \quad (8.1)$$

Для всех нужных нам функций, например, для функций (7.1), соответствующая функция $\Phi(E)$ является либо целой, либо произведением целой на мероморфную функцию $(1 - e \cos E)^n$, где n — целое отрицательное число.

Так как

$$\frac{d}{de} \Phi(E) = \Phi'(E) \frac{\sin E}{1 - e \cos E},$$

то отсюда следует, что особые точки всех таких функций $\Phi(E)$, рассматриваемых как функции e при фиксированном M , удовлетворяют уравнению

$$1 - e \cos E = 0, \quad (8.2)$$

которое должно решаться совместно с (8.1).

Обозначим через e_M тот корень системы уравнений (8.1) и (8.2), который при фиксированном значении M имеет наименьший модуль. Положим

$$|e_M| = \varphi(M).$$

Функция $\Phi(E)$ будет для этого значения M голоморфной внутри круга $|e| < \varphi(M)$.

Наша задача приводится к нахождению наименьшего значения $\varphi(M)$ при изменении M от нуля до 2π .

Это наименьшее значение $\varphi(M)$ может представлять для нас интерес только в том случае, если оно соответствует комплексному значению E . В самом деле, если бы соответствующее значение E_M было вещественно, то уравнение (8.2) дало бы $e_M > 1$.

Итак, положим

$$E_M = \rho + i\sigma,$$

а через \bar{e}_M обозначим комплексное число, сопряженное с e_M .

Дифференцирование очевидного равенства

$$\varphi^2(M) = |e_M|^2 = e_M \bar{e}_M$$

дает

$$\frac{d}{dM} \varphi^2(M) = e_M \frac{d\bar{e}_M}{dM} + \bar{e}_M \frac{de_M}{dM}.$$

Так как

$$\frac{de_M}{dM} = \frac{-1}{\sin E_M}; \quad e_M = \frac{1}{\cos E_M},$$

то

$$\frac{d}{dM} \varphi^2(M) = \frac{-\sin(E_M + \bar{E}_M)}{\sin E_M \cos E_M \sin \bar{E}_M \cos \bar{E}_M} = \frac{-4 \sin 2\rho}{\sin^2 2\rho + \operatorname{sh}^2 2\sigma}.$$

Изменение знака этой производной показывает, что при $\rho=0, \pm\pi, \dots$ функция $\varphi^2(M)$ имеет максимумы, а при $\rho = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi, \dots$ она имеет минимумы. Все максимумы и все минимумы равны между собой, как это видно из равенства (8.2).

Чтобы вычислить значение M , соответствующее $E = \frac{\pi}{2} + i\sigma$, исключим e из уравнений (8.1) и (8.2); это даст

$$M = E - \operatorname{tg} E = \frac{\pi}{2} + i\sigma - i \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh} \sigma}.$$

Поскольку нас интересуют только вещественные значения M , то отсюда следует, что $M = \frac{\pi}{2}$ и

$$\sigma \operatorname{sh} \sigma - \operatorname{ch} \sigma = 0,$$

откуда

$$\sigma = 1,199678640257734 \dots,$$

а потому

$$\min \varphi(M) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left| \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)} \right| = \frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} = 0,6627434193492 \dots$$

Итак, при разложении функций $F(r, v)$ по степеням e , модуль ближайшей к началу координат особой точки равен $0,6627 \dots$. Такова, следовательно, нижняя грань радиусов сходимости этих разложений при различных значениях M .

Примечание 1. Разложения функций координат эллиптического движения по кратным средней аномалии сходятся для всех значений M и для всех значений e , удовлетворяющих условию

$$0 \leq e < 1.$$

Коэффициенты этих тригонометрических рядов являются степенными рядами, сходящимися по крайней мере в том же интервале.

Между тем, расположив эти разложения по степеням e , мы получаем степенные ряды, которые сходятся (при всех значениях M) только в интервале

$$0 \leq e < 0,6627 \dots$$

Такое изменение области сходимости связано здесь с тем обстоятельством, что входящие в коэффициенты тригонометрических разложений бесселевы функции

$$J_k(ke) = \frac{1}{k!} \left(\frac{ke}{2}\right)^k \left[1 - \frac{k^2 e^2}{2(2k+2)} + \dots\right]$$

представляются своими первыми членами тем менее точно, чем больше k . Отношения второго и последующего членов к первому стремятся, как показывает это выражение, к бесконечности при $k \rightarrow \infty$.

Примечание II. Можно показать [Леви-Чивита, 1904], что разложение эксцентрической аномалии E (а следовательно, и всех целых функций от E) по степеням величины

$$\eta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \exp \sqrt{1 - e^2}$$

сходится при всех значениях средней аномалии в интервале $0 \leq \eta < 1$, которому соответствует интервал $0 \leq e < 1$.

§ 9. Тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии

Разложения координат эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным эксцентрической аномалии выполняются проще, нежели разложения по кратным средней аномалии. Поэтому такие разложения могут служить промежуточным звеном для получения (при помощи приема, изложенного в § 4) разложений по кратным средней аномалии. Но эти разложения могут иногда представлять и самостоятельный интерес.

Нами уже была получена формула (6.2), дающая разложение истинной аномалии. Чтобы получить разложения других, представляющих наибольший интерес функций, рассмотрим величину

$$X_{n,m} = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv + i \sin mv).$$

Легко видеть, что

$$r = a(1 - e \cos E) = a(1 + \beta^2)^{-1} (1 - \beta y) (1 - \beta y^{-1}).$$

Поэтому, учитывая (7.3), имеем

$$X_{n,m} = (1 + \beta^2)^{-n} y^m (1 - \beta y)^{n-m} (1 - \beta y^{-1})^{n+m}.$$

Но произведение рядов

$$(1 - \beta y)^{n-m} = \sum_0^{\infty} \binom{n-m}{k} (-\beta y)^k,$$

$$(1 - \beta y^{-1})^{n+m} = \sum_0^{\infty} \binom{n+m}{k} (-\beta y^{-1})^k$$

можно написать так:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-\beta y)^l \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-m}{k+i} \binom{n+m}{k} \beta^{2k} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} (-\beta y^{-1})^l \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-m}{k} \binom{n+m}{k+i} \beta^{2k}. \quad (9.1)$$

А учитывая еще, что

$$\binom{a}{k+i} = \binom{a}{i} \frac{(a-i)(a-i-1)\dots(a-i-k+1)}{(i+1)(i+2)\dots(i+k)},$$

мы будем иметь

$$X_{n,m} = (1 + \beta^2)^{-n} \left\{ S_0 y^m + \sum_{l=1}^{\infty} (-\beta)^l \left[\binom{n-m}{i} S_l y^{m+l} + \binom{n+m}{i} S'_l y^{m-l} \right] \right\}, \quad (9.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= 1 + \frac{n^2 - m^2}{1^2} \beta^2 + \frac{(n^2 - m^2)[(n-1)^2 - m^2]}{1^2 \cdot 2^2} \beta^4 + \dots, \\ S_l &= 1 + \frac{n-m-i}{i+1} \frac{n+m}{1} \beta^2 + \\ &+ \frac{(n-m-i)(n-m-i-1)}{(i+1)(i+2)} \frac{(n+m)(n+m-1)}{1 \cdot 2} \beta^4 + \dots, \\ S'_l &= 1 + \frac{n+m-i}{i+1} \frac{n-m}{1} \beta^2 + \\ &+ \frac{(n+m-i)(n+m-i-1)}{(i+1)(i+2)} \frac{(n-m)(n-m-1)}{1 \cdot 2} \beta^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Легко видеть, что эти выражения являются гипергеометрическими функциями β^2 . В самом деле,

$$S_l = F(-n-m, -n+m+i, i+1; \beta^2).$$

Пользуясь известными свойствами этих функций, имеем

$$S_i = (1 - \beta^2)^{n+m} F\left(-n - m, 1 + n - m, i + 1; \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2}\right) = \\ = (1 - \beta^2)^{n+m} \left\{ 1 + \frac{n+m}{1} \frac{1+n-m}{i+1} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \right. \\ \left. + \frac{(n+m)(n+m-1)}{1 \cdot 2} \frac{(1+n-m)(2+n-m)}{(i+1)(i+2)} \left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 + \dots \right. \quad (9.4)$$

Выражение для S'_i получается отсюда изменением знака m . Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (9.2).

Пусть $m=0$. Воспользовавшись выражениями (9.4) и полагая для краткости

$$F_i = F\left(-n, 1+n, i+1; \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right),$$

получим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^n \left[F_0 + \sum_1^{\infty} (-\beta)^i \binom{n}{i} F_i \cdot (y^i + y^{-i}) \right].$$

Так как

$$\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \sqrt{1-e^2},$$

то окончательно будем иметь

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = (1-e^2)^{\frac{n}{2}} \left[F_0 + 2 \sum_1^{\infty} (-\beta)^i \binom{n}{i} F_i \cos iE \right]. \quad (9.5)$$

Если $n=-1$, то

$$F_i = 1; \quad \binom{-1}{i} = (-1)^i,$$

и потому

$$\frac{a}{r} = (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\beta \cos E + 2\beta^2 \cos 2E + \dots). \quad (9.6)$$

Если $n=-2$, то

$$F_i = 1 + \frac{2}{i+1} \frac{\beta^2}{1-\beta^2}; \quad \binom{-2}{i} = (-1)^i (i+1), \\ \binom{-2}{i} F_i = (-1)^i \left(i + \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \right) = (-1)^i \left(i + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} \beta^i (1 + i\sqrt{1-e^2}) \cos iE \right]. \quad (9.7)$$

Полагая в формуле (9.2) $n = 0$, $m = 1$, и замечая, что в этом случае

$$\binom{-1}{i} S_i = (-1)^i (1 - \beta^2); \quad \binom{1}{i} S'_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1, \\ 0, & \text{если } i > 1, \end{cases}$$

будем иметь

$$x = -\beta + (1 - \beta^2) \sum_1^{\infty} \beta^{i-1} y^i,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \cos v &= -\beta + (1 - \beta^2) \sum_1^{\infty} \beta^{i-1} \cos iE, \\ \sin v &= (1 - \beta^2) \sum_1^{\infty} \beta^{i-1} \sin iE. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Преобразование ряда (9.2) в ряд Лорана, расположенный по степеням z (§ 4), приводит наиболее простым путем к разложению функций (7.2) по кратным средней аномалии.

§ 10. Разложение некоторых функций по кратным истинной аномалии

При изучении возмущенного движения иногда бывает выгодно принять истинную аномалию за независимую переменную. В таких случаях приходится пользоваться разложениями по кратным истинной аномалии.

Формула (6.4) дает разложение эксцентрической аномалии. Так как выражения (см. § 6)

$$x = y \frac{1 - \beta y^{-1}}{1 - \beta y}; \quad y = x \frac{1 + \beta x^{-1}}{1 + \beta x}$$

отличаются только заменой β на $-\beta$, то делая такую замену в формулах (9.8), получим

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \beta + (1 - \beta^2) \sum_1^{\infty} (-\beta)^{i-1} \cos iv, \\ \sin E &= (1 - \beta^2) \sum_1^{\infty} (-\beta)^{i-1} \sin iv. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Рассмотрим еще разложение функции

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = (1 - e^2)^{-n} (1 + e \cos v)^n.$$

Легко видеть, что

$$1 + e \cos v = (1 + \beta^2)^{-1} (1 + \beta x)(1 + \beta x^{-1}),$$

а потому

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \frac{(1+\beta^2)^n}{(1-\beta^2)^{2n}} (1+\beta x)^n (1+\beta x^{-1})^n.$$

Произведение двух последних множителей можно получить из выражения (9.1), если положить в нем $m=0$ и изменить знак перед β . Это дает следующую формулу:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = \left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^n \left[F_0 + 2 \sum_1^{\infty} \beta^i \binom{n}{i} F_i \cos i\nu \right], \quad (10.2)$$

где

$$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \quad F_i = F\left(-n, 1+n, i+1; \frac{-\beta^2}{1-\beta^2}\right).$$

Для $n=-2$ формула (10.2) дает

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sqrt{1-e^2} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} (1+i\sqrt{1-e^2}) (-\beta)^i \cos i\nu \right]. \quad (10.3)$$

Так как интеграл площадей можно написать в форме

$$\frac{dM}{d\nu} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

то из формулы (10.3) находим следующее выражение для средней аномалии:

$$M = \nu + 2 \sum_1^{\infty} (k^{-1} + \sqrt{1-e^2}) (-\beta)^k \sin k\nu. \quad (10.4)$$

Примечание. В разложении (10.4) коэффициент при $\sin \nu$ равен $-2e$. Это показывает, как и формула (6.5), что при малых эксцентриситетах наибольшее значение $|\nu - M|$ есть величина порядка $2e$. С другой стороны, из формулы (6.2) или (6.3) видно, что наибольшее значение $|\nu - E|$ есть величина порядка e . Таким образом, при малых значениях эксцентриситета эксцентрическая аномалия ближе воспроизводит изменения истинной аномалии, нежели средняя.

§ 11. Перемножение тригонометрических рядов

При употреблении выведенных в предыдущих параграфах тригонометрических рядов в теоретических исследованиях эти ряды часто приходится перемножать. Для выполнения этой операции удобен следующий прием, учитывающий структуру коэффициентов перемножаемых рядов. Этот прием был развит в трактате Брауна и Шука [1933], содержащем много интересных в практическом отношении замечаний.

Рассмотрим два ряда,

$$\left. \begin{aligned} A_0 + 2 \sum_1^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM), \\ P_0 + 2 \sum_1^{\infty} (P_k \cos kM + Q_k \sin kM), \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

у которых каждый коэффициент с индексом k имеет вид

$$e^k (\beta_{0k} + \beta_{1k} e^2 + \beta_{2k} e^4 + \dots). \quad (11.2)$$

Перемножение таких рядов состоит, очевидно, из трех отдельных операций.

1° Перемножаются две четные функции

$$A = a_0 + 2 \sum e^k a_k \cos kM; \quad P = p_0 + 2 \sum e^k p_k \cos kM.$$

Здесь, как и в дальнейшем, суммирование производится от $k=1$ до $k=+\infty$.

Положив

$$z = e \times \exp iM,$$

получим

$$2e^k \cos kM = z^k + e^{2k} z^{-k}; \quad 2e^k \sin kM = -iz^k + ie^{2k} z^{-k},$$

вследствие чего искомое произведение можно написать так:

$$AP = (A' + A'')(P' + P''), \quad (11.3)$$

где

$$A' = a_0 + \sum a_k z^k; \quad A'' = \sum e^{2k} a_k z^{-k},$$

$$P' = p_0 + \sum p_k z^k; \quad P'' = \sum e^{2k} p_k z^{-k}.$$

Функция AP , будучи четной, разлагается в ряд, содержащий только косинусы. Поэтому в ее разложении в ряд Лорана коэффициенты при z^k и $e^{2k} z^{-k}$ одинаковы; достаточно, таким образом, найти коэффициент c_k при z^k — произведение будет выражаться рядом

$$AP = c_0 + 2 \sum e^k c_k \cos kM.$$

Но чтобы найти коэффициент при z^k в произведении (11.3), достаточно взять члены

$$A'P' + A'P'' + A''P'.$$

Поэтому

$$c_0 = a_0 p_0 + 2e^2 a_1 p_1 + 2e^4 a_2 p_2 + \dots,$$

$$c_k = (a_0 p_k + a_1 p_{k-1} + \dots + a_k p_0) +$$

$$+ e^2 (a_{k+1} p_1 + a_1 p_{k+1}) + e^4 (a_{k+2} p_2 + a_2 p_{k+2}) + \dots$$

2° Перемножаются две нечетные функции:

$$B = 2 \sum e^k b_k \sin kM; \quad Q = 2 \sum e^k q_k \sin kM.$$

Таким же способом получим

$$BQ = c_0 + 2 \sum e^k c_k \cos kM,$$

где

$$c_0 = 2e^2 b_1 q_1 + 2e^4 b_2 q_2 + \dots,$$

$$c_k = -(b_1 q_{k-1} + b_2 q_{k-2} + \dots + b_{k-1} q_1) + \\ + e^2 (b_{k+1} q_1 + b_1 q_{k+1}) + e^4 (b_{k+2} q_2 + b_2 q_{k+2}) + \dots$$

3° Перемножаются четная и нечетная функции:

$$A = a_0 + 2 \sum e^k a_k \cos kM; \quad Q = 2 \sum e^k q_k \sin kM.$$

В этом случае

$$AQ = 2 \sum e^k d_k \sin kM,$$

причем только что указанный прием дает

$$d_k = (a_0 q_k + a_1 q_{k-1} + \dots + a_{k-1} q_1) + \\ + e^2 (a_1 q_{k+1} - a_{k+1} q_1) + e^4 (a_2 q_{k+2} - a_{k+2} q_2) + \dots$$

Таким образом, если коэффициенты перемножаемых рядов (11.1) имеют форму (11.2), то коэффициенты произведения будут иметь такую же форму.

НАХОЖДЕНИЕ ОРБИТ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

ГЛАВА VII

СОПОСТАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕННЫХ И НАБЛЮДЕННЫХ ПОЛОЖЕНИЙ СВЕТИЛ

§ 1. Учет параллакса

Зависимость между даваемыми теорией гелиоцентрическими координатами светила (x, y, z) и доступными наблюдению его сферическими координатами α и δ устанавливается уравнениями (§ 7 гл. IV)

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y + Y, \\ \rho \sin \delta &= z + Z, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где через X, Y, Z обозначены прямоугольные экваториальные координаты Солнца.

Все координаты, входящие в основные уравнения (1.1), должны быть отнесены к одной и той же плоскости экватора и одному и тому же равноденствию. Но, кроме этого, стоящие слева координаты светила и стоящие справа координаты Солнца должны быть отнесены к одному и тому же началу координат. Тут возможны два случая.

При вычислении эфемериды в правых частях уравнений (1.1) берутся геоцентрические координаты Солнца. В этом случае даваемые этими уравнениями координаты α, δ, ρ будут также геоцентрические. Чтобы сравнить их с даваемыми наблюдениями топоцентрическими координатами α^0, δ^0 , нужно эти последние привести к центру Земли.

Обозначим через dx, dy, dz геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты места наблюдения в момент рассматриваемого нами наблюдения. В таком случае

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= \rho^0 \cos \delta^0 \cos \alpha^0 + dx, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= \rho^0 \cos \delta^0 \sin \alpha^0 + dy, \\ \rho \sin \delta &= \rho^0 \sin \delta^0 + dz. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Пусть φ' и $\bar{\rho}'$ — геоцентрическая широта и геоцентрическое расстояние (выраженное в астрономической единице) места наблюдения. Через s обозначим местное звездное время.

Тогда

$$dx = \bar{\rho}' \cos \varphi' \cos s; \quad dy = \bar{\rho}' \cos \varphi' \sin s; \quad dz = \bar{\rho}' \sin \varphi'. \quad (1.3)$$

Для всех светил, кроме Луны, $\bar{\rho}'$ столь малó по сравнению с ρ и ρ^0 , что величины

$$d\alpha = \alpha - \alpha^0; \quad d\delta = \delta - \delta^0; \quad d\rho = \rho - \rho^0$$

можно рассматривать как дифференциалы. Это позволяет заменить равенства (1.2) такими:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha d\rho - \rho \sin \delta \cos \alpha d\delta - \rho \cos \delta \sin \alpha d\alpha &= dx, \\ \cos \delta \sin \alpha d\rho - \rho \sin \delta \sin \alpha d\delta + \rho \cos \delta \cos \alpha d\alpha &= dy, \\ \sin \delta d\rho + \rho \cos \delta d\delta &= dz. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta d\alpha &= -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy, \\ \rho d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha dx - \sin \delta \sin \alpha dy + \cos \delta dz, \end{aligned} \right\} (1.4)$$

что после подстановки выражений (1.3) дает

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta d\alpha &= \bar{\rho}' \cos \varphi' \sin(s - \alpha), \\ \rho d\delta &= -\bar{\rho}' \cos \varphi' \cos(s - \alpha) \sin \delta + \bar{\rho}' \sin \varphi' \cos \delta. \end{aligned} \right\} (1.5)$$

Геоцентрическое расстояние места наблюдения, выраженное в частях экваториального радиуса Земли, обозначим через ρ' . Очевидно,

$$\bar{\rho}' = \rho' \sin p_{\odot}. \quad (1.6)$$

Поэтому, выражая обе части первого из равенств (1.5) в секундах времени, а второго — в секундах дуги, получим

$$\rho p_{\alpha} = C^s \sec \delta \sin(s - \alpha); \quad \rho p_{\delta} = S'' \cos \delta - C'' \sin \delta \cos(s - \alpha), \quad (1.7)$$

где ($p_{\odot} = 8''.80$)

$$C^s = 0''.5867\rho' \cos \varphi'; \quad C'' = 8''.80\rho' \cos \varphi'; \quad S'' = 8''.80\rho' \sin \varphi',$$

а через p_{α} и p_{δ} обозначены разности $\alpha - \alpha^0$ и $\delta - \delta^0$, выраженные соответственно в секундах времени и в секундах дуги.

Конечно, в правых частях равенств (1.7) можно считать $\alpha = \alpha^0$, $\delta = \delta^0$.

Вторую из формул (1.7) можно заменить такой:

$$\rho p_{\delta} = S \operatorname{cosec} \gamma \sin(\gamma - \delta),$$

где вспомогательный угол γ определяется условиями

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi' \sec (s - \alpha); \quad 0^\circ < \gamma < 180^\circ.$$

Таким образом, чтобы сравнить наблюдаемое топоцентрическое положение светила (α^0, δ^0) с эфемеридным, нужно, взяв из эфемериды геоцентрическое расстояние ρ , найти по формулам (1.7) параллактические смещения ρ_α и ρ_δ ; исправленные за параллакс координаты $\alpha^0 + \rho_\alpha$, $\delta^0 + \rho_\delta$ дадут геоцентрическое положение светила, уже сопоставимое с эфемеридой.

Величины $\rho\rho_\alpha$ и $\rho\rho_\delta$, носящие название параллактических множителей, обычно публикуются вместе с наблюдениями.

Рассмотрим теперь другой случай, когда уравнения (1.1) применяются к нахождению орбиты вновь открытого светила. Так как здесь ρ еще совершенно не известно, то мы не можем от полученных из наблюдений топоцентрических координат перейти к соответствующим геоцентрическим. Таким образом, вместо уравнений (1.1), где (α, δ, ρ) и (X, Y, Z) — геоцентрические координаты, приходится пользоваться уравнениями

$$\rho^0 \cos \delta^0 \cos \alpha^0 = x + X - dx,$$

$$\rho^0 \cos \delta^0 \sin \alpha^0 = y + Y - dy,$$

$$\rho^0 \sin \delta^0 = z + Z - dz,$$

получающимися путем подстановки (1.2) в (1.1).

Стоящие справа выражения

$$X^0 = X + \Delta X; \quad Y^0 = Y + \Delta Y; \quad Z^0 = Z + \Delta Z,$$

где

$$\Delta X = -dx; \quad \Delta Y = -dy; \quad \Delta Z = -dz$$

представляют топоцентрические координаты Солнца.

Соотношения (1.3) и (1.6) дают

$$\Delta X = A \cos s; \quad \Delta Y = A \sin s; \quad \Delta Z = -\sin p_\odot \cdot \rho' \sin \varphi', \quad (1.8)$$

где

$$A = -\sin p_\odot \cdot \rho' \cos \varphi'.$$

Итак, в рассматриваемом нами случае от геоцентрических координат Солнца, даваемых ежегодниками, переходят к топоцентрическим путем прибавления поправок (1.8). Это дает возможность пользоваться уравнениями того же вида (1.1), но с топоцентрическими координатами светила в левых частях.

Величины C , S , $\operatorname{tg} \varphi'$, а также A и ΔZ , зависящие только от места наблюдения, даются в астрономических ежегодниках для всех обсерваторий *).

*) Специальные таблицы для вычисления поправки за параллакс дает Расмусен [1951] и В. И. Орельская [1959].

§ 2. Аберрация света

Скорости, с которыми приходится иметь дело при изучении относительных движений в солнечной системе, весьма малы по сравнению со скоростью света. Но они не настолько малы, чтобы скорость света по отношению к ним можно было бы считать бесконечно большой. Иначе говоря, мы не можем пренебрегать отношениями скоростей небесных тел к скорости света. Поправки, которые приходится вследствие этого придавать к наблюдаемым координатам, чтобы сделать их сравнимыми с вычисленными, носят общее название поправок за аберрацию. Эти поправки бывают двух родов.

С одной стороны, направление луча света, идущего от светила к наблюдателю, меняется в зависимости от той системы отсчета, к которой относятся наблюдения. Изменения сферических координат, соответствующие такому изменению системы отсчета, называются звездной аберрацией. С другой стороны, за время, в течение которого свет доходит от светила до наблюдателя, координаты светила в системе отсчета, неизменно связанной с наблюдателем, могут заметно изменяться. Поправки, позволяющие учесть эти изменения и перейти от направления светового луча к геометрическому направлению на светило, носят название планетной аберрации. Эти поправки принимаются во внимание только для тел солнечной системы.

Звездную аберрацию приходится рассматривать двух родов: годовую и суточную. Годичная аберрация учитывает изменение направления светового луча при переходе от системы отсчета, связанной с движущейся по своей орбите Землей, к системе отсчета, связанной с Солнцем. Суточная аберрация учитывает изменение направления световых лучей при переходе от системы отсчета, связанной с точкой земной поверхности, к системе отсчета, связанной с центром Земли.

Рассмотрим инерциальную систему $S^*(x^*, y^*, z^*; t^*)$, движущуюся относительно инерциальной системы $S(x, y, z; t)$ в направлении оси x с постоянной скоростью v .

Из теории относительности известно, что эти две системы связаны между собой следующими соотношениями, носящими название уравнений Лоренца:

$$x^* = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y^* = y, \quad z^* = z, \quad t^* = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.1)$$

Через $\beta = v/c$ здесь обозначено отношение скорости v к скорости света c . Пусть наблюдатель, связанный с системой S^* , регистрирует направление луча света:

$$x^* = -ct^* \cos \psi^*; \quad y^* = -ct^* \sin \psi^*; \quad z^* = 0. \quad (2.2)$$

В системе S этот луч будет иметь уравнения

$$x = -ct \cos \psi; \quad y = -ct \sin \psi; \quad z = 0, \quad (2.3)$$

так что угол, образуемый им с осью абсцисс, будет не $180^\circ + \psi^*$, а $180^\circ + \psi$. Направление луча (2.2) называется в видимом, тогда как направление (2.3) относительно системы S , принимаемой за «неподвижную», называется истинным.

Подстановка выражений (2.1) в уравнения (2.2) дает

$$x - vt = -c(t - \beta x/c) \cos \psi^*,$$

$$y \sqrt{1 - \beta^2} = -c(t - \beta x/c) \sin \psi^*,$$

откуда

$$x = -ct \frac{\cos \psi^* - \beta}{1 - \beta \cos \psi^*}; \quad y = -ct \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \psi^*}{1 - \beta \cos \psi^*}.$$

Отождествление этих равенств с первыми двумя из (2.3) показывает, что

$$\cos \psi = \frac{\cos \psi^* - \beta}{1 - \beta \cos \psi^*}; \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \psi^*}{1 - \beta \cos \psi^*}.$$

Эти соотношения дают

$$\sin(\psi - \psi^*) = \frac{\beta - (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \cos \psi^*}{1 - \beta \cos \psi^*} \sin \psi^*$$

или

$$\sin(\psi - \psi^*) = \beta \sin \psi^* + \frac{1}{4} \beta^2 \sin 2\psi^* + \dots \quad (2.4)$$

Для орбитального движения Земли $v = 30$ км/сек, следовательно, $\beta \approx 10^{-4}$. Таким образом, при вычислении годичной абберации учет второго члена в формуле (2.4) изменяет абберационное смещение $\psi - \psi^*$ меньше чем на $0'',00052$. При вычислении суточной абберации верхняя граница ошибки, которую может вызвать отбрасывание второго члена, меньше этой величины в 4500 раз.

Итак, во всех случаях, встречающихся в астрономической практике, формула (2.4) может быть заменена такой:

$$\sin(\psi - \psi^*) = \beta \sin \psi^*. \quad (2.5)$$

Эта приближенная формула имеет простую и удобную для пользования интерпретацию: она эквивалентна геометрическому вычитанию скорости наблюдателя по отношению к той системе отсчета, которая принимается за «неподвижную», из

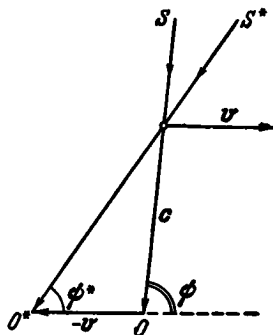


Рис. 13.

скорости света (в пустоте) по отношению к этой системе отсчета, в результате чего получается вектор скорости света по отношению к системе отсчета, связанной с наблюдателем *).

В самом деле, пусть $AO = c$ есть вектор скорости света в «неподвижной» системе отсчета (рис. 13). Вычтя из него вектор \mathbf{v} , представляющий скорость наблюдателя относительно этой системы, получим вектор AO^* , представляющий скорость света в системе отсчета, связанной с наблюдателем. Треугольник AOO^* дает соотношение (2.5).

§ 3. Учет aberrации

Рассмотрим влияние звездной aberrации на экваториальные координаты светил.

Обозначим через (α, δ) сферические экваториальные координаты истинного направления AO (см. рис. 13) на светило, а через $(\alpha + \Delta\alpha, \delta + \Delta\delta)$ — координаты видимого направления O^*A . Тогда

$$\left. \begin{aligned} (c + \Delta c) \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(\alpha + \Delta\alpha) &= c \cos \delta \cos \alpha + \dot{x}, \\ (c + \Delta c) \cos(\delta + \Delta\delta) \sin(\alpha + \Delta\alpha) &= c \cos \delta \sin \alpha + \dot{y}, \\ (c + \Delta c) \sin(\delta + \Delta\delta) &= c \sin \delta + \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — компоненты скорости наблюдателя по экваториальным осям координат. Отрезок $OA = c$ представляет скорость света в пустоте, а отрезок $O^*A = c + \Delta c$ — скорость света в движущейся системе отсчета, но измеренную при помощи единицы времени, соответствующей неподвижной системе отсчета.

Пренебрегая квадратами поправок $\Delta\alpha, \Delta\delta, \Delta c$, из соотношений (3.1) имеем

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta\alpha \\ \Delta\delta \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} -\sec \delta \sin \alpha & + \sec \delta \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \dot{x}/c \\ \dot{y}/c \\ \dot{z}/c \end{array} \right\|. \quad (3.2)$$

Годичная aberrация. Экваториальные гелиоцентрические координаты Земли даются формулами

$$x = -R \cos \odot; \quad y = -R \cos \varepsilon \sin \odot; \quad z = -R \sin \varepsilon \sin \odot, \quad (3.3)$$

*) Эта интерпретация приближенной формулы (2.5) формально совпадает с тем объяснением явления aberrации, которое было дано Брадлеем в 1727 г. Конечно, эту интерпретацию можно рассматривать лишь как удобное мнемоническое правило, а объяснение явления aberrации дается, как мы видели, преобразованием Лоренца (2.1).

где R — радиус-вектор Земли, \odot — истинная долгота Солнца, ε — наклон эклиптики к экватору. Очевидно

$$\odot = \Gamma + v,$$

где v и Γ — истинная аномалия и долгота перигея Солнца.

Рассматривая движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна как эллиптическое, имеем

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v},$$

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{R^2}; \quad \frac{dR}{dt} = \frac{nea \sin v}{\sqrt{1-e^2}},$$

вследствие чего дифференцирование выражений (3.3) дает

$$\begin{aligned} \dot{x} &= na(1-e^2)^{-1/2}(\sin \odot + e \sin \Gamma), \\ \dot{y} &= -na(1-e^2)^{-1/2}(\cos \odot + e \cos \Gamma) \cos \varepsilon, \\ \dot{z} &= -na(1-e^2)^{-1/2}(\cos \odot + e \cos \Gamma) \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}/c &= A(\sin \odot + e \sin \Gamma), \\ \dot{y}/c &= -A(\cos \odot + e \cos \Gamma) \cos \varepsilon, \\ \dot{z}/c &= -A(\cos \odot + e \cos \Gamma) \sin \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где

$$A = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}.$$

Эта величина носит название постоянной аберрации. С конца XIX в. по 1964 г. в астрономической практике употреблялось значение $A = 20''{,}47$, принятое Международной конференцией (Conférence Internationale des Étoiles Fondamentales. Paris, 1896), впервые унифицировавшей значения астрономических постоянных. На XII Генеральной ассамблее Международного Астрономического Союза в 1964 г. для A было принято значение, равное $20''{,}4958$.

Формулы (3.2) и (3.4) дают разности

$$\Delta\alpha = \alpha_{\text{app}} - \alpha, \quad \Delta\delta = \delta_{\text{app}} - \delta,$$

служащие для перехода от истинных координат (α, δ) к видимым $(\alpha_{\text{app}}, \delta_{\text{app}})$ и обратно.

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{app}} &= \alpha - 20'',496 (\sin \alpha \sin \odot + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon) \sec \delta - \\ &\quad - 0'',343 (\sin \alpha \sin \Gamma + \cos \alpha \cos \Gamma \cos \varepsilon) \sec \delta, \\ \delta_{\text{app}} &= \delta + 20'',496 [(\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) \cos \odot - \\ &\quad - \cos \alpha \sin \delta \sin \odot] + \\ &\quad + 0'',343 [(\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) \cos \Gamma - \\ &\quad - \cos \alpha \sin \delta \sin \Gamma]. \end{aligned} \right\} (3.5)$$

Входящая в эти формулы долгота перигея Солнца дается табличкой

$$\begin{array}{ccc} t = 1800,0 & 1900,0 & 2000,0 \\ \Gamma = 279^{\circ}30' & 281^{\circ}13' & 282^{\circ}56', \end{array}$$

которая показывает, что члены формулы (3.5), зависящие от Γ , практически постоянны. Это позволило считать эти члены включенными в средние места звезд. При переходе от среднего места звезды к видимому и обратно их поэтому не учитывают. Таким образом, для звезд учет годичной аберрации производится всегда либо по формулам

$$\alpha_{\text{app}} - \alpha = cC + dD; \quad \delta_{\text{app}} - \delta = c'C + d'D, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} c &= \sec \delta \cos \alpha; & c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, \\ d &= \sec \delta \sin \alpha; & d' &= \cos \alpha \sin \delta, \end{aligned}$$

либо по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{app}} - \alpha &= h \sin(H + \alpha) \sec \delta; \\ \delta_{\text{app}} - \delta &= h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{aligned} \right\} (3.7)$$

Величины C , D , h , H , i даются астрономическими ежегодниками. До 1960 г. они вычислялись по формулам

$$\left. \begin{aligned} C &= -20'',47 \cos \varepsilon \cos \odot; & D &= -20'',47 \sin \odot, \\ h \sin H &= C; & i &= -20'',47 \sin \varepsilon \cos \odot, \\ h \cos H &= D, \end{aligned} \right\} (3.8)$$

которые непосредственно вытекают из сравнения выражений (3.6) и (3.7) с формулами (3.5) ($A=20'',47$). Начиная с 1960 г., при вычислении этих величин для компонент \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} скорости движения Земли берутся не приближенные значения (3.4), основанные на теории эллиптического движения, а точные значения, вытекающие из теории возмущенного движения Земли.

Кроме того, координаты Земли x , y , z относят не к центру Солнца, а к центру инерции солнечной системы. Однако из полученной таким образом полной поправки за аберрацию вычитаются члены, зависящие от долготы перигея Солнца, как уже включенные в средние положения звезд.

Таким образом, начиная с 1960 г. редуccionные величины, даваемые астрономическими ежегодниками, вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} C &= +1189,80\dot{y} + 0,343 \cos \varepsilon \cos \Gamma, \\ D &= -1189,80\dot{x} + 0,343 \sin \varepsilon, \\ i &= +1189,80\dot{z} + 0,343 \sin \varepsilon \cos \Gamma, \\ h \sin H &= C; \quad h \cos H = D; \quad i = C \operatorname{tg} \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

в которых \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} получаются при помощи численного дифференцирования точных координат Земли относительно центра инерции солнечной системы*). С 1964 г. числовые коэффициенты в формулах (3.9) принимаются равными $\pm 1191,303$ и $+0,343$, что соответствует новому значению постоянной аберрации $20,4958$.

При введении поправок за годичную аберрацию в наблюдения планет, комет и спутников, члены, зависящие от долготы перигея Солнца, должны быть учтены.

Поэтому к разностям между видимыми и истинными координатами, найденным по формулам (3.7), должны быть еще прибавлены поправки

$$\Delta \alpha = h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sec \delta; \quad \Delta \delta = h_0 \cos(H_0 + \alpha) \sin \delta + i_0 \cos \delta, \quad (3.10)$$

где h_0 , H_0 , i_0 даются табличкой:

t	h_0	H_0	i_0
1800,0	0",342	351°,3	-0",022
1900,0	0,342	349,7	-0,026
2000,0	0,342	348,1	-0,030

*) Величины C и D , вычисленные по формулам (3.9), имеются в готовом виде для 1952—1959 гг. [Эккерт, Джонс и Кларк, 1954].

Чтобы судить о точности формул (3.8), употреблявшихся до 1960 г., можно отметить, что аберрация для центра Земли может отличаться от аберрации для центра инерции системы Земля—Луна на величины, доходящие до $0,0085$. С другой стороны, аберрации, вычисленные относительно центра Солнца и относительно центра инерции солнечной системы, могут отличаться на $0,01$.

Конечно, поправки (3.10) вводятся лишь при обработке достаточно точных наблюдений.

Суточная абберация. Экваториальные геоцентрические координаты точки земной поверхности даются формулами

$$x = \rho' \cos \varphi' \cos s; \quad y = \rho' \cos \varphi' \sin s; \quad z = \rho' \sin \varphi', \quad (3.11)$$

где ρ' и φ' — геоцентрическое расстояние и геоцентрическая широта, а s — местное звездное время.

Так как средние сутки равны 1,002 737 909 звездных суток, то угловая скорость вращения Земли равна

$$\dot{s} = 1296\,000'' \times 1,002\,737\,909.$$

Поэтому дифференцирование выражений (3.11) по времени и подстановка полученных производных \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} в формулы (3.2) дают

$$\alpha_{\text{app}} = \alpha + 0,320 \cos \varphi' \cos (s - \alpha) \sec \delta,$$

$$\delta_{\text{app}} = \delta + 0,320 \cos \varphi' \sin (s - \alpha) \sin \delta.$$

Эти формулы позволяют перейти от координат α_{app} , δ_{app} , отсчитываемых в системе, связанной с местом наблюдения, к координатам α , δ , соответствующим системе отсчета, связанной с центром Земли. В публикуемых координатах светил суточная абберация уже учтена.

Планетная абберация. Пусть в момент t^0 светило находилось в точке M^0 , а наблюдатель (связанный с центром Земли) в точке A^0 (рис. 14). Свет, вышедший из M^0 в момент t^0 , дойдет до наблюдателя в момент

$$t = t^0 + L\rho,$$

когда наблюдатель будет находиться уже в точке A . Через ρ обозначено расстояние AM^0 , а через L — время, в течение которого свет проходит расстояние, равное одной астрономической единице.

Промежуток времени $L\rho$, употребляемый светом на прохождение расстояния AM^0 , называется абберационным временем или световым временем.

Взяв для скорости света значение

$$C = 299\,792,5 \pm 0,4 \text{ км/сек}$$

и значение астрономической единицы длины, равное $149\,600 \times 10^3$ км, будем иметь

$$L = 0^d,00577560 = 499,012 \text{ сек.}$$

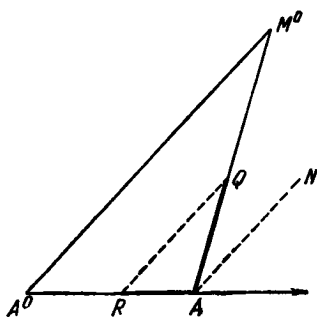


Рис. 14.

Если же взять скорость света $299\,974,6$ км/сек, соответствующую принятому до 1964 г. значению постоянной аберрации ($A=20'',47$) и параллакса Солнца ($8'',80$), то получим (международный эллипсоид 1912 г.)

$$L = 498^s,383 = 0^d,005\,76832,$$

или (эллипсоид Красовского 1941 г.)

$$L = 498^s,382 = 0^d,005\,76831.$$

Движение наблюдателя за аберрационное время, приводящее его из точки A^0 в точку A , будем считать прямолинейным и равномерным. При этом допущении в треугольнике AA^0M^0 будем иметь

$$AM^0 = c(t - t^0), \quad AA^0 = v(t - t^0),$$

где v — скорость движения Земли, производящая явление годической аберрации.

В неподвижной системе отсчета (т. е. связанной с Солнцем) наблюдатель, находящийся в точке A , регистрировал бы «истинное» направление на светило AM^0 . Но так как наблюдатель движется, то он будет регистрировать светило в «видимом» направлении AN . Для получения этого видимого направления нужно, как было показано (§ 2), направление скорости света в неподвижной системе отсчета, даваемое вектором \vec{QA} , сложить с вектором \vec{AR} , равным и противоположным скорости наблюдателя.

Так как $QA = c$, $AR = v$, то видимое направление AN , параллельное RQ , будет параллельно прямой A^0M^0 , представляющей истинное направление на светило в момент t^0 . Этим доказывается справедливость первого правила Гаусса:

I. Видимое направление на светило в момент t совпадает с истинным направлением в момент $t^0 = t - L\rho$.

Если видимое направление AN исправить за звездную аберрацию (с учетом членов, зависящих от долготы перигея Солнца), то получим направление AM^0 . Отсюда вытекает второе правило Гаусса:

II. Истинное направление на светило в момент t дает направление прямой, соединяющей положение Земли в момент t с положением светила в момент $t^0 = t - L\rho$.

При сравнении эфемериды с наблюдениями применяется первое правило. Так как в настоящее время обычно публикуются средние координаты светила, отнесенные к началу года, то к этим средним координатам придается звездная аберрация, вычисленная по формулам (3.7) и (3.10). Полученные таким обра-

зом видимые координаты для момента t сравниваются с координатами, взятыми из эфемериды для момента $t^0 = t - L\rho$.

При вычислении орбиты вновь открытого светила аберрацию удобнее учитывать при помощи второго правила. Заметим, что предположение о равномерности и прямолинейности движения наблюдателя нужно только для доказательства первого правила. Поэтому первое правило является лишь приближенным, тогда как второе является вполне точным. Например, для Нептуна, для которого аберрационное время превышает иногда 4,2 часа, применение первого правила может давать ошибки, доходящие до $0''{,}03$.

§ 4. Постоянная аберрации

В предыдущем параграфе было показано, что для вычисления годичной аберрации, помимо элементов земной орбиты, нужно знать еще постоянную аберрации

$$A = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}.$$

Чтобы применить эту формулу для вычисления A , возьмем за единицу длины километр, а за единицу времени средние сутки. Тогда

$$A = \frac{na_{km}}{86400c\sqrt{1-e^2}},$$

где a_{km} — большая полуось земной орбиты, выраженная в километрах, c — скорость света в км/сек, а n — среднее суточное движение Земли в секундах дуги.

Так как

$$a_{km} = \rho_0 \frac{206\,264''{,}8}{p_{\odot}},$$

где ρ_0 — экваториальный радиус земного эллипсоида в километрах, то получаем следующее соотношение:

$$Acp_{\odot} = C,$$

где

$$C = \frac{206\,264''{,}8n\rho_0}{86\,400\sqrt{1-e^2}}.$$

Для 1900,0 имеем (по Ньюкому):

$$n = 3548''{,}192\,8323; \quad e = 0,016\,751\,04.$$

Поэтому, приняв $\rho_0 = 6378,388$ (эллипсоид Хейфорда, принятый в 1924 г. Международным геодезическим и геофизическим

союзом), получим $C=54\,036\,912$. Если взять эллипсоид Красовского (1941), для которого $\rho_0=6378,295$, то $C=54\,036\,108$.

Полагая $c=299792,5$ (§ 3) будем иметь соответственно

$$Ap_{\odot} = 180,24771 \text{ (эллипсоид Хейфорда),}$$

$$Ap_{\odot} = 180,24503 \text{ (эллипсоид Красовского),}$$

где постоянная аберрации и параллакс Солнца выражены в секундах дуги.

Отсюда следует, что узаконенному до 1964 г. значению параллакса Солнца, равному $8'',80$, соответствует значение $A=20'',4827$, заметно отличающееся от столь же узаконенного значения постоянной аберрации, равного $20'',47$. Это показывает, что в старой системе фундаментальных астрономических постоянных имелись некоторые внутренние противоречия. Эти противоречия были, однако, не настолько велики, чтобы с ними нельзя было мириться в течение длительного промежутка времени. Любое изменение фундаментальной системы постоянных является делом столь сложным, что производить его следует возможно реже.

Отмеченные выше противоречия в значительной мере устранены в новой системе астрономических постоянных, принятой в 1964 г. Так, при $\rho_0=6378,160$ и указанных значениях n , e и c имеем

$$Ap_{\odot} = 180,24124,$$

откуда находим, что принятому значению параллакса $8'',79405$ соответствует значение постоянной аберрации $20'',4958$.

Постоянная аберрации может быть получена непосредственно из наблюдений различными методами*). Но во всех этих методах систематические ошибки имеют тот же годичный период, как и явление аберрации. Поэтому исключение их представляет сложную и далеко еще не разрешенную задачу.

§ 5. Влияние прецессии на координаты светил

В настоящее время наблюдатели дают средние координаты малых планет и комет, отнесенные либо к равноденствию начала того года, в котором сделаны наблюдения, либо к так называемому нормальному равноденствию. До 1937 г. включительно нормальным равноденствием служило равноденствие 1925,0; начиная с 1938 г. координаты относят к равноденствию 1950,0.

Этот порядок установился примерно в 1920—1925 гг.; раньше публиковались, как общее правило, видимые положения светил.

*) Относительно этих методов и полученных ими результатов см. К. А. Куликов [1956].

При пользовании такими наблюдениями нужно, прежде всего, от видимых положений перейти к средним для начала года. Это делается при помощи хорошо известных формул:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{med}} - \alpha_{\text{app}} &= -f^s - g^s \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \alpha - h^s \sin(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta, \\ \delta_{\text{med}} - \delta_{\text{app}} &= -g \cos(G + \alpha) - h \cos(H + \alpha) \sin \delta - i \cos \delta. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Если приходится пользоваться наблюдениями, отнесенными к равноденствиям различных эпох, то их приводят к одной общей эпохе. Для этого чаще всего можно прибегнуть к приближенным формулам:

$$\alpha = \alpha_0 + (m + n \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m)(t - t_0); \quad \delta = \delta_0 + n \cos \alpha_m (t - t_0), \quad (5.2)$$

где через (α, δ) , (α_0, δ_0) и (α_m, δ_m) обозначены координаты, относящиеся соответственно к эпохам t , t_0 и $\frac{1}{2}(t_0 + t)$. Величины m и n , соответствующие моменту $\frac{1}{2}(t_0 + t)$, берутся из ежегодников или вычисляются по формулам

$$m^s = 3^s,07327 + 0^s,00186T; \quad n^s = 1^s,33617 - 0^s,00057T,$$

$$n'' = 20'',0426 - 0'',0085T.$$

Через T здесь обозначено время, считаемое от 1950,0 и выраженное в тропических столетиях.

В тех случаях, когда полярное расстояние $90^\circ - \delta$, выраженное в градусах, меньше чем $\frac{1}{4}(t - t_0)$, где разность эпох выражена в годах, формулы (5.2) должны быть заменены более точными формулами Ристенпарта или еще более точными формулами Андуайе. Если же точность и этих формул становится недостаточной, то приходится употреблять вполне точные формулы *).

*) Точные формулы и таблицы входящих в них величин можно найти в каждом из трех выпусков «Планетных координат», отнесенных к равноденствию 1950,0 [Планетные координаты, 1933, 1939, 1958] и в книге Шауба [1950].

Укажем также специальные таблицы Петерса [1934], предназначенные для перехода к эпохе 1950,0, и таблицы Шорра [1927], служащие для перехода к эпохе 1925,0.

Коэффициенты формул Ристенпарта для перехода от эпох 1875,0, 1900,0 и 1925,0 к эпохе 1950,0 содержатся в только что указанных «Планетных координатах».

С 1914 по 1937 г. Berliner Jahrbuch давал коэффициенты этих формул для перехода от эпохи начала года к эпохе 1925,0, а с 1938 — для перехода к эпохе 1950,0; величины, входящие в формулы Андуайе, даются там с 1938 г. Nautical Almanac с 1931 г. дает коэффициенты формул Ристенпарта для перехода к эпохе 1950,0, а с 1944 г. он содержит величины, необходимые для применения формул Андуайе.

Иногда может встретиться надобность перевести прямоугольные экваториальные координаты Солнца с одной эпохи на другую. Для этого служат формулы:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Если через X, Y, Z и X^0, Y^0, Z^0 обозначить координаты, отнесенные к экватору и равноденствию эпохи $1950,0+T$ и соответственно $1950,0$, то элементы матрицы преобразования равны:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 1,0000\ 0000 & -0,0002\ 9696T^2 \\ & & -0,0000\ 00147T^3, \\ Y_x &= -X_y = -0,0223\ 4941T & -0,0000\ 0676T^2 \\ & & +0,0000\ 0221T^3, \\ Z_x &= -X_z = -0,0097\ 1691T & +0,0000\ 0206T^2 \\ & & +0,0000\ 0098T^3, \\ Y_y &= 1,0000\ 0000 & -0,0002\ 4975T^2 \\ & & -0,0000\ 0015T^3, \\ Z_y &= Y_z = -0,0001\ 0858T^2, \\ Z_z &= 1,0000\ 0000 & -0,0000\ 4721T^2 \\ & & +0,0000\ 0002T^3, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где T — интервал времени, выраженный в столетиях.

§ 6. Влияние прецессии на элементы орбиты

Рассмотрим прежде всего изменения, производимые прецессией в векторных элементах.

Аналогично (5.3), для перехода от векторных элементов P^0, Q^0, R^0 эпохи $1950,0$ к векторным элементам P, Q, R эпохи $1950,0+T$ и обратно служат формулы

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{vmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\begin{vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

Коэффициенты X_x, \dots, Z_z могут быть вычислены по формулам (5.4). Их можно также найти в различных сборниках вспомогательных таблиц.

Переходя к учету влияния прецессии на угловые элементы, начнем с решения самой общей задачи о преобразовании таких элементов.

Пусть N_0 (рис. 15) есть восходящий узел орбиты $N_0N\Pi$ на основной плоскости $\gamma_0 A_0$, в которой γ_0 служит началом счета долгот. Если перигелий находится в точке Π , то элементы орбиты в этой системе отсчета будут

$$\begin{aligned} \gamma_0 N_0 &= \Omega_0, \quad \angle A_0 N_0 \Pi = i_0, \\ N_0 \Pi &= \omega_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Элементы той же орбиты, но отнесенные к основной плоскости γA , в которой долготы отсчитываются от точки γ , обозначим через

$$\begin{aligned} \gamma N &= \Omega, \quad \angle AN\Pi = i, \quad N\Pi = \omega. \end{aligned} \quad (6.4)$$

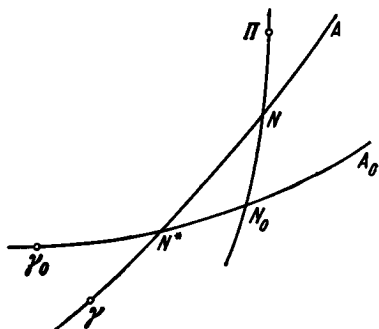


Рис. 15.

Положение новой системы отсчета относительно прежней определяется величинами

$$\gamma_0 N^* = \Omega_0^*, \quad \gamma N^* = \Omega^*, \quad \angle A_0 N^* A = i^*.$$

Применив к треугольнику $N^* N_0 N$, образованному тремя узлами, формулы Деламбра, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega^* + d) \sin \frac{1}{2} i^* &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_0 - \Omega_0^*) \sin \frac{1}{2} (i_0 + i^*), \\ \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega^* + d) \sin \frac{1}{2} i^* &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_0 - \Omega_0^*) \sin \frac{1}{2} (i_0 - i^*), \\ \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega^* - d) \cos \frac{1}{2} i^* &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_0 - \Omega_0^*) \cos \frac{1}{2} (i_0 + i^*), \\ \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega^* - d) \cos \frac{1}{2} i^* &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_0 - \Omega_0^*) \cos \frac{1}{2} (i_0 - i^*), \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где

$$d = \omega_0 - \omega.$$

Эти уравнения полностью решают задачу перехода от элементов (6.3) к элементам (6.4). Их можно заменить такими:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega - \Omega^* + d) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(i_0 + i^*)}{\sin \frac{1}{2}(i_0 - i^*)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega_0^*), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega - \Omega^* - d) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(i_0 + i^*)}{\cos \frac{1}{2}(i_0 - i^*)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega_0^*), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(i - i_0) &= - \frac{\cos \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega_0^* + \Omega - \Omega^*)}{\cos \frac{1}{2}(\Omega_0 - \Omega_0^* - \Omega + \Omega^*)} \operatorname{tg} \frac{r}{2}. \end{aligned} \right\} (6.6)$$

Предположим теперь, что через (6.3) и (6.4) обозначены элементы, отнесенные соответственно к эклиптике и равноденствию эпохи 1900,0 и эпохи 1900,0 + t . В таком случае,

$$\Omega_0^* = \Pi; \quad \Omega^* = \Pi + \int_0^t p dt; \quad i^* = (\pi) = \int_0^t \pi dt, \quad (6.7)$$

где

$$\Pi = 173^\circ 57' 06 + 0,5477t = 173,9510 + 0,009128t$$

есть долгота восходящего узла эклиптики эпохи 1900,0 + t на эклиптике эпохи 1900,0, а через

$$p = 50'',2564 + 0,000222t, \quad \pi = 0,4711 - 0,000007t$$

обозначены соответственно годовая общая прецессия и годовая скорость вращения эклиптики в момент 1900,0 + t . Интервал времени t выражен здесь в тропических годах.

Если интервал времени не превышает нескольких лет, то для нахождения прецессионных изменений элементов вместо точных формул (6.5) или (6.6) можно употребить гораздо более простые дифференциальные формулы. Чтобы получить эти формулы, обозначим через $\Omega + d\Omega$, $i + di$, $\omega + d\omega$, $\Omega^* + d\Omega^*$, $(\pi) + d(\pi)$ значения, соответствующие моменту $t + dt$, и применим к треугольнику N_0NN^* дифференциальные формулы сферической тригонометрии. Это дает

$$\begin{aligned} d\omega &= -\cos i(d\Omega - d\Omega^*) - \sin i \sin(\Omega - \Omega^*) d(\pi), \\ d\Omega - d\Omega^* &= -\cos i d\omega, \quad di = -\cos(\Omega - \Omega^*) d(\pi). \end{aligned}$$

Если из двух первых соотношений найти $d\Omega - d\Omega^*$ и $d\omega$, то получим, учитывая (6.7),

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= p + \operatorname{ctg} i \sin(\Omega - \Omega^*) \pi, \\ \frac{di}{dt} &= -\cos(\Omega - \Omega^*) \pi, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\operatorname{cosec} i \sin(\Omega - \Omega^*) \pi.\end{aligned}$$

Интегрирование этих равенств в интервале от t_1 до t_2 дает

$$\left. \begin{aligned}\Omega_2 &= \Omega_1 + [p_m + \operatorname{ctg} i_m \sin(\Omega_m - \Pi_m) \pi_m] (t_2 - t_1), \\ i_2 &= i_1 - \cos(\Omega_m - \Pi_m) \pi_m (t_2 - t_1), \\ \omega_2 &= \omega_1 - \operatorname{cosec} i_m \sin(\Omega_m - \Pi_m) \pi_m (t_2 - t_1),\end{aligned}\right\} \quad (6.8)$$

где индексами 1, 2, m обозначены величины, соответствующие моментам t_1 , t_2 , $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, считаемым от 1900,0 и выраженным в тропических годах.

В первом приближении в правых частях формул (6.8) можно взять $\Omega_m = \Omega_1$, $i_m = i_1$, $\omega_m = \omega_1$, а затем повторить вычисление, принимая $\Omega_m = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2)$ и т. д.

Для вычисления влияния прецессии на экваториальные элементы Ω' , i' , ω' служат следующие легко выводимые формулы:

$$\left. \begin{aligned}\Omega'_2 &= \Omega'_1 + (m_m - n_m \operatorname{ctg} i'_m \cos \Omega'_m) (t_2 - t_1), \\ i'_2 &= i'_1 - n_m \sin \Omega'_m (t_2 - t_1), \\ \omega'_2 &= \omega'_1 + n_m \operatorname{cosec} i'_m \cos \Omega'_m (t_2 - t_1),\end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

где через

$$m = 46''.0850 + 0''.0002788t; \quad n = 20''.0468 - 0''.0000856t$$

обозначены годовые прецессии по прямому восхождению и склонению.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРБИТ ПЛАНЕТ И КОМЕТ ПО ТРЕМ НАБЛЮДЕНИЯМ

§ 1. Введение

Нахождение орбиты вновь открытого светила, со всей необходимой точностью, есть длительный процесс, распадающийся на ряд этапов. Первым из этих этапов является вычисление орбиты при помощи возможно малого числа наблюдений, разделенных небольшими интервалами времени. Такая орбита необходима для вычисления эфемериды, обеспечивающей возможность продолжать наблюдения, а также как основа всей дальнейшей работы. Но она не может быть достаточно точной, так как ее искажают неизбежные ошибки наблюдений, причем влияние этих ошибок тем больше, чем меньше интервалы времени между наблюдениями и чем меньше использовано наблюдений. Поэтому найденная из наименьшего числа наблюдений предварительная орбита подвергается затем постепенному улучшению при помощи использования дальнейших наблюдений.

Каждое наблюдение светила, дающее для определенного момента t_h прямое восхождение α_h и склонение δ_h , позволяет написать (§ 7, гл. IV) три уравнения,

$$\rho_h \lambda_h = x_h + X_h; \quad \rho_h \mu_h = y_h + Y_h; \quad \rho_h \nu_h = z_h + Z_h, \quad (1.1)$$

где

$$\lambda_h = \cos \delta_h \cos \alpha_h; \quad \mu_h = \cos \delta_h \sin \alpha_h; \quad \nu_h = \sin \delta_h. \quad (1.2)$$

Так как геоцентрические *) координаты Солнца X_h, Y_h, Z_h для момента t_h нам известны, то неизвестными в этих уравнениях являются геоцентрическое расстояние ρ_h и шесть элементов орбиты, через которые выражаются гелиоцентрические координаты x_h, y_h, z_h .

*) При нахождении орбиты вновь открытого светила в уравнениях (1.1) берутся топоцентрические значения α_h, δ_h и, согласно с этим, топоцентрические координаты Солнца (§ 1, гл. VII). В этом случае расстояния ρ_h являются топоцентрическими, но ради удобства мы будем в дальнейшем называть их всегда геоцентрическими. Это не может привести к недоразумениям.

В случае трех наблюдений, соответствующих значениям индекса $h=0, 1, 2$, система (1.1) будет состоять из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2; a, e, M_0, \Omega, i, \omega.$$

Таким образом, для нахождения орбиты необходимо иметь по крайней мере три наблюдения. Изучение решения указанной системы девяти уравнений покажет, что в общем случае эта система разрешима, так что три наблюдения не только необходимы, но и достаточны. Лишь в некоторых исключительных случаях для получения орбиты нужно иметь не три, а четыре наблюдения.

Гелиоцентрические координаты светила являются весьма сложными функциями элементов орбиты. Поэтому еще Эйлер, впервые поставивший и значительно продвинувший вопрос о решении рассматриваемой системы уравнений, разделил эту задачу на две:

- 1) нахождение геоцентрических расстояний ρ_0, ρ_1, ρ_2 ;
- 2) вычисление элементов орбиты при помощи уже известных геоцентрических расстояний.

Вторую из этих задач мы можем считать уже решенной. В самом деле, зная геоцентрические расстояния, мы можем найти при помощи соотношений (1.1) гелиоцентрические положения для моментов наблюдений. Но уже двух таких положений достаточно (§ 3—9, гл. V) для нахождения элементов орбиты. Остается, таким образом, решить первую задачу.

Чтобы облегчить нахождение геоцентрических расстояний, целесообразно определять орбиту не обычными элементами a, e, \dots, ω , а положением и скоростью светила в момент t_0 , т. е. величинами $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0$. Через эти величины гелиоцентрические координаты выражаются рядами, расположенными по степеням интервала времени (§ 12, гл. III).

Для небольших интервалов времени между наблюдениями эти ряды быстро сходятся и позволяют дать достаточно простые приближенные выражения для гелиоцентрических координат.

Таким образом, открывается путь для нахождения геоцентрических расстояний последовательными приближениями.

§ 2. Соотношения между координатами трех гелиоцентрических положений светила

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, условимся нулевым индексом отмечать величины, относящиеся к среднему наблюдению, т. е. будем считать, что

$$t_1 < t_0 < t_2.$$

Такая нумерация наблюдений удобна потому, что среднее наблюдение фигурирует в формулах совершенно иначе, нежели крайние.

Для любого момента времени t , достаточно близкого к t_0 , координаты светила, движущегося вокруг Солнца по обобщенным законам Кеплера, могут быть представлены рядами (12.3) гл. III, дающими

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} F(\theta) + \begin{vmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{vmatrix} G(\theta),$$

где через $\theta = k(t - t_0)$ обозначено время, выраженное в единицах, равных $k^{-1} = 58,132\ 441$ суток.

Поэтому, положив

$$\tau_1 = k(t_2 - t_0); \quad \tau_2 = k(t_0 - t_1), \tag{2.1}$$

и введя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} F(-\tau_2) &= F_1; & F(\tau_1) &= F_2, \\ G(-\tau_2) &= G_1; & G(\tau_1) &= G_2, \end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 F_1 + x'_0 G_1; & x_2 &= x_0 F_2 + x'_0 G_2, \\ y_1 &= y_0 F_1 + y'_0 G_1; & y_2 &= y_0 F_2 + y'_0 G_2, \\ z_1 &= z_0 F_1 + z'_0 G_1; & z_2 &= z_0 F_2 + z'_0 G_2. \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы можем опустить нулевой индекс, отмечающий величины, относящиеся к среднему наблюдению.

Таким образом, полагая

$$u = r^{-3}; \quad u' = -3r^{-4}r'; \quad u'' = 12r^{-5}r'^2 - 3r^{-4}r''; \quad \dots \tag{2.3}$$

из общих формул (12.4) гл. III получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{1}{2} u \tau_2^2 + \frac{1}{6} u' \tau_2^3 + \frac{1}{24} (u^2 - u'') \tau_2^4 + \dots, \\ G_1 &= -\tau_2 + \frac{1}{6} u \tau_2^3 - \frac{1}{12} u' \tau_2^4 - \frac{1}{120} (u^2 - 3u'') \tau_2^5 + \dots, \\ F_2 &= 1 - \frac{1}{2} u \tau_1^2 - \frac{1}{6} u' \tau_1^3 + \frac{1}{24} (u^2 - u'') \tau_1^4 + \dots, \\ G_2 &= \tau_1 - \frac{1}{6} u \tau_1^3 - \frac{1}{12} u' \tau_1^4 + \frac{1}{120} (u^2 - 3u'') \tau_1^5 + \dots \end{aligned}$$

Исключим из соотношений (2.2) производные x'_0, y'_0, z'_0 . Это дает

$$\left. \begin{aligned} n_1 x_1 - x + n_2 x_2 &= 0, \\ n_1 y_1 - y + n_2 y_2 &= 0, \\ n_1 z_1 - z + n_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где

$$n_1 = \frac{G_2}{F_1 G_2 - F_2 G_1}; \quad n_2 = \frac{-G_1}{F_1 G_2 - F_2 G_1}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что

$$F_1 G_2 - F_2 G_1 = \tau - \frac{1}{6} u \tau^3 + \frac{1}{12} u' (\tau_2 - \tau_1) \tau^3 + \dots,$$

если аналогично (2.1) положить

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = k(t_2 - t_1).$$

Поэтому, выполнив деление до членов четвертого порядка включительно, будем иметь следующие разложения*):

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau} \left\{ 1 + \frac{u}{6} (\tau^2 - \tau_1^2) - \frac{u'}{12} \tau_2 (\tau \tau_2 - \tau_1^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{360} (\tau^2 - \tau_1^2) (7\tau^2 - 3\tau_1^2) + \frac{u''}{120} [3(\tau^4 - \tau_1^4) - 10\tau_1 \tau_2 \tau^2] + \dots \right\}, \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau} \left\{ 1 + \frac{u}{6} (\tau^2 - \tau_2^2) + \frac{u'}{12} \tau_1 (\tau \tau_1 - \tau_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2}{360} (\tau^2 - \tau_2^2) (7\tau^2 - 3\tau_2^2) + \frac{u''}{120} [3(\tau^4 - \tau_2^4) - 10\tau_1 \tau_2 \tau^2] + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Подставим сюда значения (2.3) и представим эти выражения в таком наиболее для нас удобном виде:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \quad (2.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} n_1^0 &= \frac{\tau_1}{\tau}; \quad n_2^0 = \frac{\tau_2}{\tau}, \\ c_1 &= \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0) + \frac{r'}{4r} \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau \tau_2 - \tau_1^2)}{\tau} + \dots, \\ c_2 &= \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0) - \frac{r'}{4r} \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau \tau_1 - \tau_2^2)}{\tau} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Соотношения (2.4) устанавливают зависимости, существующие между гелиоцентрическими координатами светила для трех

*) Эти разложения до десятых степеней интервалов времени дает Харцер [1901].

моментов наблюдений и интервалами времени между этими моментами. Эти соотношения содержат еще, как показывают формулы (2.7) и (2.8), радиус-вектор светила r для момента среднего наблюдения и его последовательные производные r' , r'' , ...

Величины n_1 и n_2 имеют простое геометрическое значение. В самом деле, первые два из соотношений (2.4) дают

$$n_1 = \frac{xy_2 - x_2y}{x_1y_2 - x_2y_1}; \quad n_2 = \frac{x_1y - xy_1}{x_1y_2 - x_2y_1}. \quad (2.9)$$

Выражения, стоящие здесь в числителях и знаменателях, представляют удвоенные площади проекции треугольников, заключенных между тремя радиусами-векторами r_1 , r , r_2 на координатную плоскость xy . Поэтому если удвоенные площади этих треугольников обозначить через $[r_1r]$, $[rr_2]$, $[r_1r_2]$, то

$$\frac{x_1y - xy_1}{[r_1r]} = \frac{xy_2 - x_2y}{[rr_2]} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{[r_1r_2]}.$$

Следовательно,

$$n_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]}; \quad n_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]}. \quad (2.10)$$

Таким образом, n_1 и n_2 равны отношению площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами светила.

Заметим еще, что соотношения (2.4) представляют собой условие нахождения трех положений светила в плоскости, проходящей через Солнце. Чтобы получить это условие в обычной форме, достаточно исключить n_1 и n_2 .

§ 3. Уравнения, выражающие геоцентрические расстояния через отношения площадей треугольников

Гелиоцентрические координаты светила выражаются через геоцентрические расстояния формулами (1.1), дающими

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \lambda_1 - X_1, & x &= \rho \lambda - X, & x_2 &= \rho_2 \lambda_2 - X_2, \\ y_1 &= \rho_1 \mu_1 - Y_1, & y &= \rho \mu - Y, & y_2 &= \rho_2 \mu_2 - Y_2, \\ z_1 &= \rho_1 \nu_1 - Z_1, & z &= \rho \nu - Z, & z_2 &= \rho_2 \nu_2 - Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Подставив эти выражения в основные соотношения (2.4), найденные в предыдущем параграфе, получим

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho \lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho \mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho \nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Эти уравнения позволили бы сразу найти ρ_1 , ρ , ρ_2 , если бы n_1 и n_2 были известны. Раньше чем показать, как здесь можно

воспользоваться разложениями, даваемыми формулами (2.7) и (2.8), представим уравнения (3.2) в другом виде.

Решение уравнений (3.2) относительно ρ дает

$$D\rho = D',$$

если положить

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} X - n_1 X_1 - n_2 X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y - n_1 Y_1 - n_2 Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z - n_1 Z_1 - n_2 Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}.$$

Введя следующие обозначения:

$$\lambda_{12} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1; \quad \mu_{12} = \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1; \quad \nu_{12} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1, \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= X\lambda_{12} + Y\mu_{12} + Z\nu_{12}, \\ U_1 &= X_1\lambda_{12} + Y_1\mu_{12} + Z_1\nu_{12}, \\ U_2 &= X_2\lambda_{12} + Y_2\mu_{12} + Z_2\nu_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

будем иметь

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \quad (3.5)$$

где

$$D = \lambda\lambda_{12} + \mu\mu_{12} + \nu\nu_{12}. \quad (3.6)$$

Когда ρ найдено, вычисление двух других геоцентрических расстояний целесообразно выполнить так. Пусть из величин (3.3) самой большой по абсолютному значению оказалась ν_{12} . В таком случае для нахождения ρ_1 следует взять два первые из уравнений (3.2). Исключив из них ρ_2 получим

$$n_1 \nu_{12} \rho_1 = (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)\rho - (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + n_1 (\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + n_2 (\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2). \quad (3.7)$$

Когда ρ и ρ_1 уже известны, любое из уравнений (3.2) может служить для нахождения ρ_2 . Для получения результата с наибольшей точностью, здесь также следует взять то уравнение, в котором коэффициент при ρ_2 имеет наибольшее абсолютное значение.

§ 4. Вычисление геоцентрических расстояний в первом приближении

Обратимся теперь к нахождению геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения.

Подстановка выражений (2.7) в равенство (3.5) дает

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad (4.1)$$

где

$$P = D^{-1}(U - n_1^0 U_1 - n_0 U_2); \quad Q = D^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2). \quad (4.2)$$

Коэффициент P этого уравнения выражается через величины, полученные из наблюдений, а потому может быть вычислен совершенно точно. Коэффициент Q , помимо известных величин, содержит еще величины c_1 и c_2 , даваемые разложениями (2.8).

Интервалы времени τ_1 , τ_2 , τ мы считаем малыми величинами первого порядка. Поэтому, ограничиваясь точностью до членов второго порядка включительно, будем иметь

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0); \quad c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0), \quad (4.3)$$

и коэффициент Q будет известен.

В равенство

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

подставим значения (3.1); это даст

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2, \quad (4.4)$$

где

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z); \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad (4.5)$$

что представляет точное уравнение, связывающее неизвестные ρ и r .

Таким образом, если в уравнении (4.1) ограничиться приближенными значениями (4.3), то система уравнений (4.1) и (4.4) позволит найти приближенные значения ρ и r . Эту систему, впервые полученную Лагранжем (1778), будем называть уравнениями Лагранжа.

После того как решение уравнений Лагранжа дало ρ и r , по формулам (2.7) можно найти n_1 и n_2 , а затем при помощи уравнений (3.7) и (3.2) вычислить ρ_1 и ρ_2 . Этим заканчивается нахождение геоцентрических расстояний в первом приближении.

Примечание. Чтобы получить первое приближение, мы взяли для c_1 и c_2 значения (4.3), имеющие, как показывают равенства (2.8), ошибку третьего порядка. Это сделано потому, что члены третьего и высших порядков в разложениях (2.8) содержат новые неизвестные r' , r'' , ...

Можно попытаться повысить точность уравнения (4.1), взяв в рядах (2.8) или, что то же самое, в рядах (2.6) еще члены четвертого порядка, не зависящие от производных r' , r'' , ...

Это дает вместо использованных нами формул

$$n_1 = n_1^0 + c_1 \dot{r}^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 \dot{r}^{-3}, \quad (4.6)$$

где c_1 и c_2 выражаются равенствами (4.3), такие:

$$n_1 = n_1^0 + \frac{c_1}{r^3} \left(1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_1^2}{60r^3} \right); \quad n_2 = n_2^0 + \frac{c_2}{r^3} \left(1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_2^2}{60r^3} \right). \quad (4.7)$$

Поскольку члены четвертого порядка здесь учитываются лишь частично, а членами третьего порядка мы вовсе пренебрегаем, целесообразно эти выражения упростить, пользуясь тем, что почти всегда промежутки времени

между наблюдениями приблизительно равны, так что $\tau \approx 2\tau_1 \approx 2\tau_2$. Это дает

$$7\tau^2 - 3\tau_1^2 \approx 7\tau^2 - 3\tau_2^2 \approx \frac{25}{4} \tau^2,$$

откуда

$$1 + \frac{7\tau^2 - 3\tau_1^2}{60r^3} \approx 1 + \frac{5\tau^2}{48r^3} \approx \frac{r^3}{r^3 - \frac{5}{48} \tau^2}.$$

Таким образом, вместо формул (4.6) для первого приближения можно взять формулы Эберта [1906]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 \left(r^3 - \frac{5}{48} \tau^2 \right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 \left(r^3 - \frac{5}{48} \tau^2 \right)^{-1}, \quad (4.8)$$

или формулы Андуайе [1923]:

$$n_1 = n_1^0 + c_1 \left(r^3 - \frac{1}{6} \tau^2 \right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 \left(r^3 - \frac{1}{6} \tau^2 \right)^{-1}. \quad (4.9)$$

Использование этих формул вместо (4.6) лишь незначительно усложняет решение уравнений, дающих ρ и r .

Если планета движется по круговой орбите, то $r' = r'' = \dots = 0$. В этом случае употребление только что указанных формул дает несомненный выигрыш в точности. Для орбиты с большим эксцентриситетом величины членов, пропорциональных производным

$$r' = \frac{e}{\sqrt{p}} \sin v; \quad r'' = \frac{e}{r^2} \cos v; \quad \dots$$

могут быть гораздо более значительными, нежели тех, которые мы здесь учитываем. Для такой орбиты замена формул (4.6) формулами (4.7), не говоря уже о формулах Эберта и Андуайе, не даст более точных результатов.

§ 5. Влияние погрешностей в n_1 и n_2 на значения геоцентрических расстояний

Вычисление геоцентрических расстояний начинается, как мы видели, с решения системы уравнений

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \quad (5.1)$$

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2 \quad (5.2)$$

относительно ρ и r .

Коэффициенты этих уравнений выражаются формулами (3.4), (3.6) и (4.5) через данные наблюдений и координаты Солнца, а потому их значения от нас не зависят. Что же касается до n_1 и n_2 , то вместо них приходится подставлять те или иные приближенные значения.

Предположим, что принятые значения n_1 и n_2 имеют ошибки порядка m относительно интервалов времени

$$\tau_1 = k(t_2 - t); \quad \tau_2 = k(t - t_1); \quad \tau = k(t_2 - t_1)$$

и посмотрим, каков будет порядок соответствующей ошибки в ρ .

Формула Тэйлора дает

$$\lambda_1 = \lambda - \tau_2 \lambda' + \frac{1}{2} \tau_2^2 \lambda'' - \dots; \quad X_1 = X - \tau_2 X' + \frac{1}{2} \tau_2^2 X'' - \dots,$$

$$\lambda_2 = \lambda + \tau_1 \lambda' + \frac{1}{2} \tau_1^2 \lambda'' + \dots; \quad X_2 = X + \tau_1 X' + \frac{1}{2} \tau_1^2 X'' + \dots$$

и аналогичные разложения для двух других направляющих косинусов и двух других координат.

Подставив эти разложения в формулы (3.3), получим

$$\begin{aligned} \lambda_{12} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1 = & \tau (\mu \nu' - \mu' \nu) - \frac{1}{2} (\tau_1^2 - \tau_2^2) (\mu \nu'' - \mu'' \nu) + \\ & + \frac{1}{6} (\tau_1^3 + \tau_2^3) (\mu \nu''' - \mu''' \nu) - \frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 (\mu' \nu'' - \mu'' \nu') + \dots \end{aligned}$$

и аналогичные выражения для μ_{12} и ν_{12} .

После этого, пользуясь выражениями (3.4) и (3.6), будем иметь

$$D = -\frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 E + \text{члены четвертого порядка}, \quad (5.3)$$

$$U = M\tau + N; \quad U_1 = M\tau + N_1; \quad U_2 = M\tau + N_2, \quad (5.4)$$

где положено

$$E = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} X & \lambda' & \lambda'' \\ Y & \mu' & \mu'' \\ Z & \nu' & \nu'' \end{vmatrix},$$

а через N , N_1 и N_2 обозначены величины, порядок которых не ниже второго.

Ограничимся общим случаем, когда определители E и M не равны нулю. Подстановка выражений (5.3) и (5.4) в равенство (5.1) дает

$$\rho = (1 - n_1 - n_2) \tau M D^{-1} + (N - n_1 N_1 - n_2 N_2) D^{-1}. \quad (5.5)$$

Так как D есть величина третьего порядка малости, то коэффициент у $(1 - n_1 - n_2)$ здесь (-2) -го порядка, а коэффициенты у n_1 и n_2 порядка (-1) -го. Мы приходим, следовательно, к такому заключению:

Если для отношений n_1 и n_2 взять значения, имеющие ошибку порядка h , то ρ получится в общем случае с ошибкой порядка $h-2$.

Но если n_1 и n_2 имеют ошибку порядка h , а сумма $n_1 + n_2$ имеет ошибку порядка $h+1$, то ошибка в ρ будет порядка $h-1$.

Уравнения (5.2), (3.7) и (3.2) показывают, что r , ρ_1 и ρ_2 найдутся с той же точностью, с какой известно ρ .

Рассмотрим теперь случай, когда промежутки времени между наблюдениями равны, т. е. когда

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \tau.$$

Формулы (2.7) и (2.8), дающие

$$1 - n_1 - n_2 = -\frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 r^{-3} - \frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \tau_1) r^{-4} r' + \dots,$$

показывают, что в этом случае

$$1 - n_1 - n_2 = -\frac{1}{8} \tau^2 r^{-3} + (4) + (6) + \dots, \quad (5.6)$$

где через (4), (6), ... обозначены члены четвертого, шестого, ... порядков. Легко видеть, что все члены нечетных порядков здесь действительно обращаются в нуль. В самом деле, при замене τ_1 , τ_2 на $-\tau_2$, $-\tau_1$ выражения (2.5) переходят одно в другое; но при такой замене все члены нечетных порядков относительно τ_1 и τ_2 меняют знак.

Предположим теперь, что в случае равноотстоящих наблюдений для n_1 и n_2 взяты значения, имеющие ошибки порядка $2l+1$. В силу равенства (5.6) сумма $1 - n_1 - n_2$ будет известна с ошибкой порядка $2l+2$, вследствие чего ρ найдется с ошибкой порядка $2l$.

Отсюда видно, что при вычислении орбиты по трем наблюдениям весьма выгодно пользоваться равноотстоящими наблюдениями, так как ошибки в принятых значениях n_1 и n_2 в этом случае меньше влияют на геоцентрические расстояния. Но употребление равноотстоящих наблюдений выгодно и по другой причине: чем ближе к равенству величины τ_1 и τ_2 , сумма которых τ постоянна, тем больше произведение $\tau_1 \tau_2$, а следовательно, и абсолютное значение D , как это видно из (5.3); тем точнее, следовательно, вычисляется ρ .

Применим полученные результаты к рассмотренному в предыдущем параграфе первому приближению, основанному на формулах (4.3) или, что то же самое, (4.6). Так как ошибки этих формул третьего порядка малости, то отсюда следует, что в общем случае первое приближение дает геоцентрические расстояния с ошибками первого порядка; если же взяты равноотстоящие наблюдения, то геоцентрические расстояния получаются с ошибками второго порядка.

§ 6. Точные значения геоцентрических расстояний

После того как получены приближенные геоцентрические расстояния при помощи формул, указанных в § 3 и 4, их можно использовать для вычисления приближенной орбиты. Так поступают, когда надо возможно скорее дать эфемериду, или когда промежутки времени между наблюдениями очень малы. Но если должна быть вычислена орбита, которая совершенно точно удовлетворяет трем взятым наблюдениям, то геоцентрические расстояния, найденные в первом приближении, нужно уточнить.

Для перехода от приближенных значений геоцентрических расстояний к точным значениям применяется разработанный Гауссом метод итерации, основанный на следующих соображениях.

Мы видели (§ 3), что для каждой пары значений n_1 и n_2 уравнение

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2 \quad (6.1)$$

дает возможность найти соответствующее значение ρ , после чего формулы (3.7) и (3.2) дадут ρ_1 и ρ_2 . Но обратный переход — от уже известных ρ , ρ_1 , ρ_2 к отношениям n_1 , n_2 площадей треугольников — можно выполнить не только по формулам (3.1) и (2.9) (что являлось бы лишь контролем вычислений), но и совершенно иначе.

В самом деле, после того как при помощи известных ρ , ρ_1 , ρ_2 по формулам (3.1) найдены соответствующие значения гелиоцентрических координат, мы можем вычислить (§ 6 гл. V) отношения площадей сектора и треугольника для каждой пары положений светила, т. е. величины

$$\eta = \frac{(r_1 r_2)}{[r_1 r_2]}; \quad \eta_1 = \frac{(r r_2)}{[r r_2]}; \quad \eta_2 = \frac{(r_1 r)}{[r_1 r]}. \quad (6.2)$$

С другой стороны, закон площадей дает отношения площадей секторов:

$$\frac{(r r_2)}{(r_1 r_2)} = \frac{\tau_1}{\tau} = n_1^0; \quad \frac{(r_1 r)}{(r_1 r_2)} = \frac{\tau_2}{\tau} = n_2^0.$$

Поэтому для отношений площадей треугольников получаем такие значения:

$$\bar{n}_1 = \frac{[r r_2]}{[r_1 r_2]} = n_1^0 \frac{\eta}{\eta_1}; \quad \bar{n}_2 = \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]} = n_2^0 \frac{\eta}{\eta_2}. \quad (6.3)$$

Важно отметить, что при наличии в исходных значениях ρ , ρ_1 , ρ_2 ошибок определенного порядка относительно малых величин τ , τ_1 , τ_2 , соответствующие ошибки в величинах (6.3) будут более

высокого порядка *). На этом и основан итеративный процесс, предложенный Гауссом и заключающийся в следующем. Взяв те или иные приближенные значения для n_1 и n_2 , находим при помощи уравнений (6.1), (3.7) и (3.2) геоцентрические расстояния; вычислив затем соответствующие им гелиоцентрические координаты светила, по формулам (6.2) и (6.3) получаем новые значения \bar{n}_1 , \bar{n}_2 для отношений n_1 , n_2 . Если эти новые значения не совпадают с исходными, то вычисление повторяется. Так как новые значения получаются каждый раз более близкими к истинным, нежели исходные, то в конце концов получим $\bar{n}_1 = n_1$, $\bar{n}_2 = n_2$.

Поскольку конечные значения \bar{n}_1 , \bar{n}_2 каждого приближения являются функциями $f_1(n_1, n_2)$, $f_2(n_1, n_2)$ начальных значений n_1 , n_2 этого приближения, задача заключается в решении системы уравнений

$$n_1 = f_1(n_1, n_2), \quad n_2 = f_2(n_1, n_2). \quad (6.4)$$

Метод Гаусса состоит в решении этой системы при помощи итерации. Но уравнения (6.4) можно решать и другими методами. На практике обычно бывает достаточно второго приближения по методу итерации и лишь изредка приходится делать третье. В тех же случаях, когда итеративный процесс сходится медленно, лучше после первых двух приближений пользоваться способом линейного интерполирования.

С практической точки зрения весьма существенно то, что вычисление геоцентрических расстояний в каждом приближении можно производить по одним и тем же формулам.

В самом деле, в первом приближении мы положили

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}, \quad (6.5)$$

вследствие чего уравнение (6.1) приняло форму

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad (6.6)$$

где

$$P = D^{-1}(U - n_1 U_1 - n_2 U_2), \quad Q = D^{-1}(c_1 U_1 + c_2 U_2).$$

Чтобы сохранить форму (6.6) во втором и следующих приближениях, вычисляемых с более точными значениями \bar{n}_1 , \bar{n}_2 , представим эти последние в таком же виде, как (6.5), т. е.

*) Это обстоятельство, делающее предложенный Гауссом итеративный процесс сходящимся, не было им обосновано теоретически, а лишь подтверждено многочисленными примерами. Теоретическое обоснование было дано в работах П. Ш. Месиса [1947] и Г. М. Баженова [1949]. П. Ш. Месисом было показано, между прочим, что уменьшение ошибки при переходе от величин ρ , ρ_1 , ρ_2 к величинам (6.3) тем больше, чем меньше эксцентриситет орбиты и чем ближе к оппозиции рассматриваемые положения светила.

положим

$$\bar{n}_1 = n_1^0 + \bar{c}_1 r^{-3}; \quad \bar{n}_2 = n_2^0 + \bar{c}_2 r^{-3},$$

где r имеет значение, найденное в предыдущем приближении. Таким образом, P остается неизменным, а Q во втором и следующих приближениях будет вычисляться по формулам

$$Q = D^{-1}(\bar{c}_1 U_1 + \bar{c}_2 U_2),$$

$$\bar{c}_1 = r^3(\bar{n}_1 - n_1^0); \quad \bar{c}_2 = r^3(\bar{n}_2 - n_2^0).$$

В формулах (3.7) и (3.2), применяемых для вычисления ρ_1 и ρ_2 , коэффициенты при n_1 и n_2 остаются, конечно, без изменения во всех приближениях.

§ 7. Формулы Гиббса для отношений площадей треугольников

Формулы (6.3), служащие для нахождения более точных значений n_1 , n_2 , во втором приближении могут быть заменены гораздо более простыми приближенными формулами, дающими вполне достаточную для этого приближения точность.

Такого рода формулы могут быть получены при помощи следующего приближенного соотношения, связывающего три значения функции со значениями ее второй производной для тех же значений аргумента.

Обозначим через X_1 , X , X_2 значения функции $X(\theta)$ в точках $\theta = -\tau_2$, 0 , $+\tau_1$, а через X_1'' , X'' , X_2'' значения ее вторых производных в тех же точках. Предположим, далее, что функция может быть представлена с достаточной точностью полиномом четвертой степени, так что

$$X(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + A_4\theta^4,$$

$$X''(\theta) = 2A_2 + 6A_3\theta + 12A_4\theta^2.$$

Из шести уравнений

$$X_1 = A_0 - A_1\tau_2 + A_2\tau_2^2 - A_3\tau_2^3 + A_4\tau_2^4,$$

$$X = A_0,$$

$$X_2 = A_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_1^2 + A_3\tau_1^3 + A_4\tau_1^4,$$

$$X_1'' = \quad \quad \quad + 2A_2 - 6A_3\tau_2 + 12A_4\tau_2^2,$$

$$X'' = \quad \quad \quad + 2A_2,$$

$$X_2'' = \quad \quad \quad + 2A_2 + 6A_3\tau_1 + 12A_4\tau_1^2.$$

мы можем исключить пять коэффициентов A_0, A_1, \dots, A_4 . Это даст

$$\begin{vmatrix} X_1 & 1 & -\tau_2 & \tau_2^2 & -\tau_2^3 & \tau_2^4 \\ X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ X_1'' & 0 & 0 & 2 & -6\tau_2 & 12\tau_2^2 \\ X'' & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ X_2'' & 0 & 0 & 2 & 6\tau_1 & 12\tau_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если развернуть этот определитель по элементам первого столбца, то будем иметь

$$12X_1\tau_1 + X_1''\tau_1(\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_2^2) - 12X\tau - X''\tau(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_2 + \tau_2^2) + 12X_2\tau_2 + X_2''\tau_2(\tau_2^2 - \tau_1\tau_2 - \tau_1^2) = 0,$$

где, как обычно, $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

После очевидных упрощений, положив для краткости

$$B_1 = \frac{1}{12}(\tau\tau_2 - \tau_1^2); \quad B = \frac{1}{12}(\tau_1\tau_2 + \tau^2); \quad B_2 = \frac{1}{12}(\tau\tau_1 - \tau_2^2), \quad (7.1)$$

окончательно получим искомое соотношение в следующем виде:

$$X_1\tau_1\left(1 - \frac{B_1X_1''}{X_1}\right) - X\tau\left(1 + \frac{BX''}{X}\right) + X_2\tau_2\left(1 - \frac{B_2X_2''}{X_2}\right) = 0. \quad (7.2)$$

Применим теперь соотношение (7.2) к координатам x, y, z планеты или кометы.

Так как эти координаты удовлетворяют уравнениям

$$x'' = -xr^{-3}, \quad y'' = -yr^{-3}, \quad z'' = -zr^{-3},$$

то формула (7.2) дает

$$x_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - x\tau(1 - Br^{-3}) + x_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0,$$

$$y_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - y\tau(1 - Br^{-3}) + y_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0,$$

$$z_1\tau_1(1 + B_1r_1^{-3}) - z\tau(1 - Br^{-3}) + z_2\tau_2(1 + B_2r_2^{-3}) = 0.$$

Сравнение этих приближенных равенств с соотношениями (2.4) показывает, что имеют место приближенные формулы

$$n_1 = n_1^0 \frac{1 + B_1r_1^{-3}}{1 - Br^{-3}}, \quad n_2 = n_2^0 \frac{1 + B_2r_2^{-3}}{1 - Br^{-3}}. \quad (7.3)$$

Для выяснения точности, даваемой выражениями (7.3), разложим их по степеням τ, τ_1, τ_2 и сравним с разложениями (2.6) точных значений n_1 и n_2 . Легко видеть, что поправка, которую

надо придать выражению (7.3) для n_1 для получения точного значения, равна

$$+ \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau) (\tau_2 + \tau) (\tau_1 - \tau_2)}{40\tau} \left(\frac{1}{9r^6} + \frac{4r'^2}{r^5} - \frac{r''}{r^4} \right) + (5), \quad (7.4)$$

где через (5) обозначена совокупность членов не ниже пятого порядка. Поправка выражения (7.3) для n_2 получается отсюда заменой τ_1 и τ_2 соответственно через $-\tau_2$ и $-\tau_1$.

Таким образом, выражения (7.3), данные Гиббсом [1888] и носящие название формул Гиббса, позволяют находить отношения n_1 и n_2 с ошибкой четвертого порядка в общем случае и с ошибкой пятого порядка в случае равных интервалов времени, когда $\tau_1 = \tau_2$; но сумма $n_1 + n_2$ получается по этим формулам во всех случаях с ошибкой пятого порядка.

Коэффициенты (7.1) формул Гиббса можно представить в форме

$$B = \frac{\tau^2}{12} (1 + n_1^0 n_2^0), \quad B_1 = \frac{\tau^2}{12} (n_2^0 - n_1^0 n_1^0), \quad B_2 = \frac{\tau^2}{12} (n_1^0 - n_2^0 n_2^0),$$

более удобной для вычислений, нежели (7.1).

§ 8. Решение уравнений Лагранжа

Чтобы закончить рассмотрение задачи о нахождении геоцентрических расстояний, нужно еще остановиться на вопросе о численном решении уравнений Лагранжа

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2 \quad (8.1)$$

относительно ρ и r . Как мы видели (§ 6), эту систему приходится решать в каждом приближении, постепенно уточняя значение коэффициента Q .

Отметим прежде всего некоторые свойства коэффициентов этих уравнений.

В треугольнике STP (рис. 16), образованном Солнцем S , местом наблюдения T и светилом P ,

обозначим через ψ угол между направлением на светило и продолжением радиуса-вектора Земли. Тогда второе из уравнений (8.1) можно написать так:

$$r^2 = \rho^2 + 2\rho R \cos \psi + R^2,$$

откуда $C = R \cos \psi$.

Полагая

$$S^2 = R^2 - C^2 = R^2 \sin^2 \psi,$$

получим

$$r^2 = (\rho + C)^2 + S^2. \quad (8.2)$$

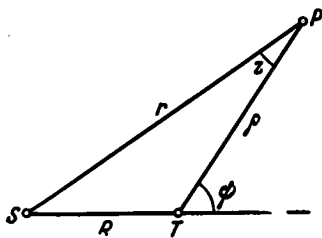


Рис. 16.

С другой стороны, легко видеть, что значения

$$\rho = 0, \quad r = R \quad (8.3)$$

должны почти точно удовлетворять уравнениям (8.1), вследствие чего должно иметь место приближенное равенство

$$Q = PR^3. \quad (8.4)$$

В самом деле, при выводе уравнений (8.1) мы исходили только из двух предположений: 1) светило движется вокруг Солнца по законам Кеплера; 2) это светило в моменты рассматриваемых наблюдений находилось на тех трех прямых, которые фиксируются наблюденными координатами светила. Так как место наблюдения находилось в моменты наблюдений как раз на этих прямых, и так как его перемещение относительно Солнца происходит приблизительно по законам Кеплера, то отсюда ясно, что значения (8.3) должны почти точно удовлетворять уравнениям (8.1).

Исключение радиуса-вектора r из уравнений (8.1) дает

$$\rho = P - Q(\rho^2 + 2\rho R \cos \psi + R^2)^{-3/2}. \quad (8.5)$$

Пользуясь соотношением (8.4) и полагая

$$x = \rho R^{-1}, \quad p = RP^{-1},$$

легко привести это уравнение к виду

$$\rho x = 1 - (x^2 + 2x \cos \psi + 1)^{-3/2}. \quad (8.6)$$

Так как уравнение (8.6) содержит только два параметра, то приближенное значение x может быть удобно найдено при помощи таблицы с двумя входами. Таблица X дает значения p по аргументам x и $\cos \psi$. Она позволяет легко находить значения x для заданных значений p и $\cos \psi$.

Полученное при помощи таблицы X приближенное значение x , а следовательно, и $\rho = xR$, позволяет вычислить соответствующий корень уравнения (8.5) со всей нужной точностью. Для этого можно применить метод Ньютона. Написав уравнение (8.5) в форме

$$f(\rho) \equiv \rho - P + Qr^3 = 0,$$

получим

$$f'(\rho) = 1 - 3Q(\rho + C)r^5.$$

Это позволяет удобно переходить от приближенного значения ρ' к более точному ρ'' при помощи формулы

$$\rho'' = \rho' - \frac{f(\rho')}{f'(\rho')}.$$

Для перехода от значения r^2 , даваемого формулой (8.2), к r^{-3} можно пользоваться таблицей XI.

Метод итерации, примененный непосредственно к уравнениям (8.1), также весьма часто быстро приводит к цели.

Пример. Требуется решить систему

$$\begin{aligned} \rho &= 1,9328 - 1,9653r^{-3}, \\ r^2 &= (\rho + 0,966552)^2 + 0,098758. \end{aligned}$$

Так как здесь

$$R = 1,016, \quad p = 0,526, \quad \cos \psi = 0,95,$$

то из таблицы X находим, что $x = 1,80$, а потому для первого приближения имеем $\rho' = 1,83$.

Вычисление по методу Ньютона имеет такой вид:

	ρ	1,83	1,846 1	r^{-6}	0,005 666
	$\rho + C$	2,796 552	2,812 652	$3Q(\rho' + C)$	16,488
	r^2	7,919 46	8,009 767	$f'(\rho')$	0,906 6
	r^{-3}	0,044 870	0,044 113	$\rho'' - \rho'$	0,016 1
	$f(\rho)$	-0,014 6	0,000 0		

Вычисление по методу итерации может быть выполнено следующим образом:

	ρ	1,83	1,844 6	1,846 1
	$\rho + C$	2,796 552	2,811 152	2,812 652
	r^2	7,919 46	8,006 33	8,009 769
	r^{-3}	0,044 87	0,044 14	0,044 113
	ρ	1,844 6	1,846 1	1,846 1

Таким образом, окончательно имеем $\rho = 1,8461$.

Примечание I. Таблица X дает практически полное решение задачи о числе положительных значений ρ и r , удовлетворяющих уравнениям Лагранжа (8.1). Она показывает, что в некоторых случаях эта система уравнений в интересующей нас области может иметь два решения, вследствие чего будут существовать две различные орбиты, одинаково хорошо удовлетворяющие трем рассматриваемым наблюдениям.

Исследование числа решений системы (8.1), легко приводящееся к нахождению числа положительных корней одного алгебраического уравнения, может быть выполнено обычными методами, но получающиеся критерии имеют несколько громоздкий вид.

Примечание II. Гаусс указал способ приведения системы (8.1) к одному уравнению, особенно удобный при логарифмическом вычислении.

Обозначим через z угол треугольника STP (рис. 16) при вершине P . Так как

$$\frac{\rho}{\sin(\psi - z)} = \frac{r}{\sin \psi} = \frac{R}{\sin z},$$

то

$$\rho = R \frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}, \quad r = R \frac{\sin \psi}{\sin z}. \tag{8.7}$$

Подстановка этих выражений в первое из уравнений (8.1) дает для нахождения угла z такое соотношение:

$$-R \sin \psi \cos z + (R \cos \psi + P) \sin z = Q (R \sin \psi)^{-3} \sin^4 z. \quad (8.8)$$

Положим

$$\mu \sin q = R \sin \psi; \quad \mu \cos q = R \cos \psi + P,$$

$$m = Q\mu^{-1} (R \sin \psi)^{-3},$$

причем условимся выбрать квадрант q так, чтобы μ имело такой же знак, как и Q , иначе говоря, чтобы было $m > 0$.

Уравнение (8.8), принимающее вид

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z, \quad (8.9)$$

и есть уравнение Гаусса.

Так как $\sin(z - q)$ и $\sin(\psi - z)$ должны быть положительны, то для нас интересны только те корни уравнения Гаусса, которые находятся в интервале

$$q < z < \psi.$$

Для малых планет, открываемых всегда вблизи оппозиции, z мало отличается от q , поскольку угол z невелик, в силу чего правая часть уравнения (8.9) очень мала.

Вследствие этого, взяв для первого приближения $z' = q$, из уравнения

$$\sin(z'' - q) = m \sin^4 z'$$

получим более точное значение z'' . Повторение этого приема довольно быстро дает значение z , удовлетворяющее уравнению Гаусса с нужной точностью.

Существуют различные приемы и вспомогательные таблицы, облегчающие решение уравнения Гаусса. Таблицы Т. Банахевича [1916], включенные в сборник таблиц Баушингера и Штракке [1934], дают z с точностью до шестого знака.

§ 9. Сопоставление формул для вычисления гелиоцентрических координат по методу Лагранжа—Гаусса

Нахождение орбиты по трем наблюдениям распадается, как мы видели (§ 1), на две части: нахождение геоцентрических расстояний, дающих возможность вычислить гелиоцентрические координаты светила, и вычисление элементов орбиты по гелиоцентрическим координатам.

Вторая часть задачи была нами полностью изучена в гл. V. Решение первой части задачи, изложенное в предыдущих параграфах, может быть названо методом Лагранжа—Гаусса, поскольку основная идея и осуществление первого приближения были даны Лагранжем, а разработка способа получения точных значений гелиоцентрических координат была выполнена Гауссом.

В этом параграфе мы соберем вместе все формулы, обычно употребляемые при пользовании этим методом.

Исходными данными являются: моменты трех выбранных наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1 < t < t_2$), выраженные в средних солнечных

сутках; наблюденные координаты светила (α_1, δ_1) , (α, δ) , (α_2, δ_2) ; координаты Солнца в моменты наблюдений (X_1, Y_1, Z_1) , (X, Y, Z) , (X_2, Y_2, Z_2) . Координаты светила и координаты Солнца должны быть выражены в одной и той же системе, т. е. должны быть одновременно либо геоцентрическими, либо топоцентрическими, и должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

Ради полной определенности мы будем предполагать, что наблюдения исправлены за аберрацию неподвижных звезд, но не исправлены за планетную аберрацию.

Сферические координаты светила дают направляющие косинусы:

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1, \dots$$

Примечание I. Вычисление орбиты ведется, как правило, с шестью знаками. В случае наблюдений исключительно большой точности (например, при вычислении по нормальным местам (см. гл. XI)), может быть целесообразно частичное применение семизначного вычисления. Если вычисляется предварительная орбита по мало точным наблюдениям (например, по данным с точностью до 1"), то можно ограничиться пятью знаками (самое большее — вычислить с шестью знаками основные постоянные, а все остальное — вычислять с пятью).

Примечание II. Так как всякая ошибка в исходных данных сведет на нет всю последующую работу, то не следует жалеть времени на самую тщательную проверку всех этих величин. Для контроля координат Солнца можно образовать величины $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$, . . . и сравнить их с квадратами радиусов-векторов Земли, найденными из эфемерид. При этом берутся, конечно, геоцентрические координаты Солнца.

Вычисление постоянных

$$\lambda_{12} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1; \quad \mu_{12} = \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1; \quad \nu_{12} = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1,$$

$$D = \lambda \lambda_{12} + \mu \mu_{12} + \nu \nu_{12}; \quad U = X \lambda_{12} + Y \mu_{12} + Z \nu_{12},$$

$$U_1 = X_1 \lambda_{12} + Y_1 \mu_{12} + Z_1 \nu_{12}; \quad U_2 = X_2 \lambda_{12} + Y_2 \mu_{12} + Z_2 \nu_{12}.$$

Контроль:

$$L = \lambda_1 + \lambda + \lambda_2 + X_1 + X + X_2,$$

$$M = \mu_1 + \mu + \mu_2 + Y_1 + Y + Y_2,$$

$$N = \nu_1 + \nu + \nu_2 + Z_1 + Z + Z_2,$$

$$L \lambda_{12} + M \mu_{12} + N \nu_{12} = D + U_1 + U + U_2.$$

Далее находим:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2; \quad C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z),$$

$$S^2 = R^2 - C^2.$$

Первое приближение:

$$\tau_1 = k(t_2 - t), \quad \tau_2 = k(t - t_1), \quad \tau = k(t_2 - t_1),$$

$$k = 0,017202099;$$

$$n_1^0 = \tau_1/\tau; \quad n_2^0 = \tau_2/\tau,$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_1^0); \quad c_2 = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2 (1 + n_2^0).$$

Контроль:

$$\frac{1}{3} (c_1 + c_2) = \frac{1}{6} \tau_1 \tau_2.$$

Далее находим:

$$DP = U - n_1^0 U_1 - n_2^0 U_2; \quad DQ = c_1 U_1 + c_2 U_2, \quad (A)$$

и составляем основную систему

$$\rho = P - Qr^{-3}; \quad r^2 = (\rho + C)^2 + S^2. \quad (B)$$

Относительно решения этой системы см. § 8.

Примечание. Если вычисление ведется с логарифмами, то можно перейти к уравнению Гаусса. Получив из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mu \sin q &= S, \\ \mu \cos q &= C + P, \end{aligned} \right\} \quad (S = R \sin \psi > 0)$$

μ и q (для μ берем знак, одинаковый со знаком Q), находим

$$m = Q\mu^{-1}S^{-3} \quad (m > 0).$$

Решив затем уравнение Гаусса

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z,$$

вычисляем ρ и r :

$$\sin \psi = \frac{S}{R}; \quad \rho = R \frac{\sin(\psi - z)}{\sin z}; \quad r = R \frac{\sin \psi}{\sin z}.$$

После того как тем или иным способом вычислены ρ и r , переходим к нахождению геоцентрических расстояний и радиусов-векторов для моментов двух крайних наблюдений.

Прежде всего находим

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3}.$$

Затем вычисляем ρ_1 по одному из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n_1 \lambda_{12} \rho_1 &= (\nu \nu_2 - \nu \mu_2) \rho - (\nu_2 Y - \mu_2 Z) + \\ &+ n_1 (\nu_2 Y_1 - \mu_2 Z_1) + n_2 (\nu_2 Y_2 - \mu_2 Z_2), \\ n_1 \mu_{12} \rho_1 &= (\nu \lambda_2 - \lambda \nu_2) \rho - (\lambda_2 Z - \nu_2 X) + \\ &+ n_1 (\lambda_2 Z_1 - \nu_2 X_1) + n_2 (\lambda_2 Z_2 - \nu_2 X_2), \\ n_1 \nu_{12} \rho_1 &= (\lambda \mu_2 - \mu \lambda_2) \rho - (\mu_2 X - \lambda_2 Y) + \\ &+ n_1 (\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) + n_2 (\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2). \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

Выбираем то уравнение, в котором коэффициент при ρ_1 наибольший.

Точно так же для нахождения ρ_2 берем то из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n_2 \lambda_2 \rho_2 &= \lambda \rho - n_1 \lambda_1 \rho_1 - X + n_1 X_1 + n_2 X_2, \\ n_2 \mu_2 \rho_2 &= \mu \rho - n_1 \mu_1 \rho_1 - Y + n_1 Y_1 + n_2 Y_2, \\ n_2 \nu_2 \rho_2 &= \nu \rho - n_1 \nu_1 \rho_1 - Z + n_1 Z_1 + n_2 Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

в котором коэффициент при ρ_2 наибольший.

Наконец, переходим к вычислению гелиоцентрических координат, для чего служат формулы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1; & x &= \lambda \rho - X; & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1; & y &= \mu \rho - Y; & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1; & z &= \nu \rho - Z; & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

и радиусов-векторов светила:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad r^2 = \dots, \quad r_2^2 = \dots$$

Контроль: полученная величина r^2 должна совпадать с найденной раньше. Кроме того, должны выполняться соотношения

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2, \quad y = n_1 y_1 + n_2 y_2, \quad z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Первое приближение заканчиваем учетом планетной аберрации: полученные нами координаты светила (x_1, y_1, z_1) , (x, y, z) , (x_2, y_2, z_2) относятся соответственно к моментам

$$t_1 - L\rho_1, \quad t - L\rho, \quad t_2 - L\rho_2,$$

где

$$L = 0^d,0057756; \quad \lg L = 7,761597_{-10}.$$

Для малых планет очень часто можно ограничиться той точностью, которую дает первое приближение, и перейти сразу к нахождению элементов.

Второе и следующие приближения

Второе приближение лучше всего начать с вычисления более точных значений n_1 и n_2 по формулам Гиббса

$$n_1 = n_1^0 \frac{1 + B_1 r_1^{-3}}{1 - B r^{-3}}; \quad n_2 = n_2^0 \frac{1 + B_2 r_2^{-3}}{1 - B r^{-3}},$$

в которых

$$B = \frac{r^2}{12} (1 + n_1^0 n_2^0); \quad B_1 = \frac{r_1^2}{12} (n_2^0 - n_1^0 n_1^0); \quad B_2 = \frac{r_2^2}{12} (n_1^0 - n_2^0 n_2^0).$$

Не следует забывать, что τ , τ_1 , τ_2 , n_1^0 , n_2^0 должны быть перевычислены с моментами наблюдений, исправленными за планетную аберрацию.

В третьем и дальнейших приближениях вместо формул Гиббса следует взять точные формулы:

$$n_1 = n_1^0 \eta / \eta_1; \quad n_2 = n_2^0 \eta / \eta_2.$$

Вычисление отношений площадей секторов и треугольников η , η_1 , η_2 выполняется по формулам, указанным в § 7 гл. V.

Точными формулами можно пользоваться и во втором приближении в более трудных случаях, например, для кометы вблизи перигелия или в случае весьма значительных промежутков времени.

После того как тем или иным способом получены новые значения n_1 и n_2 (обозначения для них сохраняем прежние), вычисляем соответствующие им новые значения c_1 и c_2 . Для этого служат формулы

$$c_1 = (n_1 - n_1^0) r^3; \quad c_2 = (n_2 - n_2^0) r^3,$$

где для n_1^0 , n_2^0 берутся значения, исправленные за планетную аберрацию, а для r — значение, полученное в последнем приближении.

Затем при помощи соотношений (A) и (B) находим новые значения ρ и r . Подставив новые значения n_1 , n_2 и ρ в те из уравнений (C) и (D), которые употреблялись в первом приближении, получим новые значения ρ_1 и ρ_2 .

После этого уравнения (E) дадут новые значения гелиоцентрических координат.

Если новые значения ρ , ρ_1 , ρ_2 отличаются больше чем на 0,001 от тех, которые были употреблены для исправления моментов наблюдений за планетную аберрацию, то соответствующие поправки иногда бывает нужно перевычислить.

Последовательные приближения надо продолжать до тех пор, пока новые значения n_1 и n_2 не будут совпадать, в пределах точности вычисления, с полученными в предыдущем приближении.

Когда получены окончательные значения n_1 , n_2 , а следовательно, и гелиоцентрических координат, переходим к вычислению элементов орбиты. Для этого употребляются значения моментов и координат, полученные для двух крайних положений светила

$$t_1(x_1, y_1, z_1), \quad t_2(x_2, y_2, z_2)$$

в последнем приближении. Сводка применяемых здесь формул уже была дана (§ 9 гл. V).

Представление наблюдений

Наиболее полным контролем полученной орбиты является представление исходных наблюдений при помощи найденных элементов. Практически достаточным является контроль, заключающийся в представлении среднего наблюдения, непосредственно не участвовавшего в определении элементов. Вычисленные координаты светила должны совпадать с исходными данными в пределах точности вычисления.

Представление исходных наблюдений позволяет судить только о правильности вычислений, но не о качестве полученной орбиты. Пригодность найденной орбиты может быть оценена лишь после представления ею других наблюдений. Дурное представление этих последних может иногда с определенностью указать на наличие ошибок в исходных наблюдениях и на необходимость повторения вычисления орбиты с другими данными.

Чтобы вычислить координаты, соответствующие наблюдённому моменту t , пользуемся формулами

$$t^* = t - L\rho; \quad L = 0^d0057756,$$

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$

$$E - e^{\circ} \sin E = M,$$

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = A_x (\cos E - e) + B_x \sin E + X,$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = A_y (\cos E - e) + B_y \sin E + Y,$$

$$\rho \sin \delta = A_z (\cos E - e) + B_z \sin E + Z.$$

Координаты Солнца берутся для момента t . Аберрационное время $L\rho$ получается путем интерполирования или экстраполирования из значений, имеющих для трех исходных наблюдений. После вычисления ρ правильность принятой величины $L\rho$ проверяется и, в случае надобности, вычисление повторяется. Сравнимое наблюдение исправляется за параллакс.

В том случае, когда вычисления ведутся при помощи логарифмов и применен способ нахождения элементов (§ 4 гл. V), дающий в первую очередь экваториальные элементы Ω' , i' , ω' представление наблюдений можно начать с вычисления постоянных Гаусса:

$$\begin{cases} \sin a \sin A' = \cos \Omega', \\ \sin a \cos A' = -\cos i' \sin \Omega', \end{cases} \quad \begin{cases} \sin b \sin B' = \sin \Omega', \\ \sin b \cos B' = \cos i' \cos \Omega'. \end{cases}$$

После этого, обозначая через $t^* = t - L\rho$ момент наблюдения, исправленный за аберрационное время, для нахождения геоцентрических координат будем

иметь формулы

$$M = M_0 + n(t^* - t_0),$$

$$E - e \sin E = M,$$

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E,$$

$$r \cos v = a (\cos E - e),$$

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = r \sin a \sin (A' + \omega' + v) + X,$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = r \sin b \sin (B' + \omega' + v) + Y,$$

$$\rho \sin \delta = r \sin i' \sin (\omega' + v) + Z.$$

Координаты Солнца должны быть взяты для несправленного момента t .

§ 10. Пример вычисления орбиты малой планеты

Даны следующие топоцентрические положения планеты 1931 LB, полученные в Симеизской обсерватории Г. Н. Неуйминым:

	1931	Всем. вр.	α (1931.0)	δ (1931.0)
Июнь	6	21 ^h 13 ^m ,6	17 ^h 04 ^m 59 ^s ,13	-13°39'13",2
>	21	21 25,3	16 52 16,49	-14 16 16,9
Июль	7	20 33,9	16 41 35,77	-15 11 40,0

Вычисление направляющих косинусов и некоторых вспомогательных величин располагаем следующим образом:

t	6 ^d ,884 45	21 ^d ,892 57	37 ^d ,856 88
α	256°246 38	253°068 71	250°399 04
δ	-13,653 67	-14,271 36	-15,194 44
$\cos \alpha$	-0,237 747	-0,291 225	-0,335 467
$\sin \alpha$	-0,971 327	-0,956 655	-0,942 052
$\cos \delta$	+0,971 740	+0,969 139	+0,965 042
λ	-0,231 028	-0,282 238	-0,323 740
μ	-0,943 877	-0,927 132	-0,909 120
ν	-0,236 052	-0,246 515	-0,262 096
X	+0,259 587	+0,008 504	-0,258 673
Y	+0,900 143	+0,932 409	+0,902 079
Z	+0,390 383	+0,404 379	+0,391 223
$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$	0,999 998	1,000 002	1,000 001
	C	+0,966 552	L -0,827 588
	R^2	1,032 981	M -0,045 498
	S^2	0,098 758	N +0,441 322

Координаты Солнца вписываем сюда уже исправленными за параллакс, т. е. топоцентрические.

Вычислены постоянных

λ_{12}	+0,032 7868	D	-0,000 4137
μ_{12}	+0,015 8680	U	-0,023 5595
ν_{12}	-0,095 5386	U_1	-0,014 5021
		U_2	-0,031 5438
$L\lambda_{12} + \dots$	-0,070 0192	Сумма	-0,070 0191
$-0,095 5386 n_1 \rho_1 =$	$-0,043 5615 \rho$	$-0,294 1269 +$	$+0,055 4166 n_1 +$
		$+0,527 2039 n_2$	
$-0,262 096 n_2 \rho_2 =$	$-0,246 515 \rho$	$-0,404 379 +$	
	$+0,236 052 n_1 \rho_1$	$+0,390 383 n_1 +$	$+0,391 223 n_2$

Первое приближение

$t_2 - t$	15,964 31	τ_1	0,274 6197	c_1	0,017 9071
$t - t_1$	15,008 12	τ_2	0,258 1712	c_2	0,017 5423
$t_2 - t_1$	30,972 43	τ	0,532 7908		
n_1^0	0,515 4362	$\frac{1}{6} \tau_1 \tau_2$	0,011 8165	$c_1 + c_2$	0,035 4494
n_2^0	0,484 5638			$\frac{1}{3} (c_1 + c_2)$	0,011 8165
PD	-0,000 7996	P	1,9328		
QD	-0,000 81304	Q	1,9653		

Следовательно, уравнения Лагранжа имеют в настоящем случае такой вид:

$$\rho = 1,9328 - 1,9653r^{-3}, \quad r^2 = (\rho + 0,966552)^2 + 0,098758.$$

Решение этой системы (см. § 8) дает

$$\rho = 1,8461, \quad r^2 = 8,009769, \quad r^{-3} = 0,04411.$$

Контроль и вычисление отношений n_1, n_2 :

x	-0,529 544	$c_1 r^{-3}$	0,000 7897
y	-2,643 987	$c_2 r^{-3}$	0,000 7736
z	-0,859 470		
r^2	8,009 773	n_1	0,516 226
		n_2	0,485 337

После этого обращаемся к уравнениям, дающим ρ_1 и ρ_2 и заканчиваем приближение вычислением абберационного времени и гелиоцентрических координат:

$\nu_{12} n_1 \rho_1$	-0,090 0667	ρ_1	1,826 189	$L\rho_1$	0,010 54
$n_1 \rho_1$	0,942 726			$L\rho$	0,010 65
		ρ_2	1,930 246	$L\rho_2$	0,011 14
$\nu_2 n_2 \rho_2$	-0,245 537				
$\nu_2 n_2$	-0,127 205				
x_1	-0,681 488	x_2	-0,366 225	$n_1 x_1 + n_2 x_2$	-0,529 544
y_1	-2,623 841	y_2	-2,656 904	$n_1 y_1 + n_2 y_2$	-2,643 989
z_1	-0,821 459	z_2	-0,897 133	$n_1 z_1 + n_2 z_2$	-0,859 470
r_1^2	8,023 76	r_2^2	7,998 11		
r_1^{-3}	0,04400	r_2^{-3}	0,044 21		

Второе приближение

Пользуемся формулами Гиббса

t_2	37,845 74	B_1	0,005 178	n_1	0,516 2207
t	21,881 92	B_2	0,006 637	n_1^0	0,515 4303
t_1	6,873 91	B	0,029 561	$n_1 - n_1^0$	0,000 7904
$t_2 - t$	15,963 82	$1 + B_1 r_1^{-3}$	1,000 2278	n_2	0,485 3449
$t - t_1$	15,008 01	$1 + B_2 r_2^{-3}$	1,000 2934	n_2^0	0,484 5697
$t_2 - t_1$	30,971 83	$1 - B r^{-3}$	0,998 6963	$n_2 - n_2^0$	0,000 7752
τ	0,532 7805	n_1/n_1^0	1,001 5335	c_1	0,017 9175
τ^2	0,283 8550	n_2/n_2^0	1,001 5998	c_2	0,017 5729
PD	-0,000 7995	r^3	22,668 9	ρ	1,8458
		P	1,9326	r^2	8,008 082
QD	-0,000 81416	Q	1,9680	r^{-3}	0,0441
$v_{12} n_1 \rho_1$	-0,090 0498	ρ_1	1,825 864	x	-0,529 459
$n_1 \rho_1$	-0,942 549			y	-2,643 709
		ρ_2	1,929 956	z	-0,859 396
$v_2 n_2 \rho_2$	0,245 504			r^2	8,080 086
$v_2 n_2$	-0,127 207				
x_1	-0,681 413	x_2	-0,366 131	$n_1 x_1 + n_2 x_2$	-0,529 459
y_1	-2,623 534	y_2	-2,656 641	$n_1 y_1 + n_2 y_2$	-2,643 710
z_1	-0,821 382	z_2	-0,897 057	$n_1 z_1 + n_2 z_2$	-0,859 396
r_1^2	8,021 923	r_2^2	7,996 505		
r_1	2,832 300	r_3	2,827 809	$r_1 r_2$	8,009 203

Вычисление элементов орбиты по полученным во втором приближении гелиоцентрическим координатам было уже нами выполнено (§ 9 гл. V). Как окончательный результат, мы имеем следующую систему элементов:

Эпоха $t_0 = 1931$ июль 7,0

M_0	350° 6519	ω	165° 2618	} Эклиптика и равноденствие 1931,0
φ	3° 5339	i	11° 2365	
n	0° 188 675	Ω	107° 2581	

В заключение приводим представление одного из наблюдений, не употреблявшихся при вычислении орбиты:

t	17 ^d ,854 24	X	+0,076 786
α	16 ^h 55 ^m 33 ^s ,85	Y	+0,929 502
δ	-14° 4' 41",5	Z	+0,403 163

Наблюденные координаты исправлены за параллакс, поэтому координаты Солнца взяты геоцентрические:

$L\rho$	0,010 59	$\rho \cos \delta \cos \alpha$	-0,493 733
t^*	17,843 65	$\rho \cos \delta \sin \alpha$	-1,709 540
M	347°,037 59	$\operatorname{tg} \alpha$	3,462 479
E	346,194 87	α	253°, 890 73
		$\rho \sin \delta$	-0,446 249
		$\rho \cos \delta$	+1,779 410
$\sin E$	-0,238 620	$\operatorname{tg} \delta$	-0,250 785
$\cos E$	+0,971 113	δ	-14°,078 06
$\cos E - e$	+0,909 474	α	16 ^h 55 ^m 33 ^s ,78
		δ	-14°4' 41",0

Итак: $H - B. \Delta\alpha = +0^s,07$, $\Delta\delta = -0'',5$

Отсюда заключаем, что вычисление не содержит значительных ошибок. Так как взятое наблюдение довольно близко к одному из наблюдений, употребленных при определении орбит, то полученный результат еще не может полностью гарантировать безошибочности употребленных наблюдений: только представление наблюдения, далеко отстоящего от этих последних, могло бы дать такую гарантию.

Примечание I. При вычислении первого приближения мы пользовались приближенными формулами (4.6) для n_1 и n_2 . Если бы вместо них мы взяли формулы (4.9), предложенные Андуайе, то уравнения Лагранжа имели бы вид

$$\rho = 1,9328 - 1,9653(r^2 - 0,0473)^{-1}; \quad r^2 = (\rho + 0,966\ 552)^2 + 0,098\ 758.$$

Решение этих уравнений почти столь же просто, как и уравнений (8.7). Взяв опять за исходное приближение $\rho = 1,83$, $r^2 = 7,919\ 46$, получим $\rho = 1,8459$, $r^2 = 8,008\ 644$, т. е. практически то же самое, что было получено выше во втором приближении при помощи формул Гиббса. Таким образом, употребление в первом приближении формул Андуайе дает здесь реальный выигрыш в точности и могло бы избавить от выполнения второго приближения. Это связано с тем, что эксцентриситет орбиты очень мал.

Примечание II. Остановимся еще на вопросе о той точности, с которой получены элементы орбиты в рассмотренном нами примере.

Легко видеть, что число реальных знаков как в гелиоцентрических координатах, так и в полученных из них элементов не превышает трех-четырех. В самом деле, мы получили $D = -0,000\ 4137$, причем последний знак здесь очень мало надежен. Поэтому коэффициенты P и Q уравнения Лагранжа имеют не более 3—4 реальных знаков, а следовательно, ρ может быть найдено только с такой точностью. Поскольку все остальные неизвестные — геоцентрические расстояния, гелиоцентрические координаты и элементы вычисляются при помощи полученного значения ρ , их реальная точность не может быть выше.

Тем не менее, чтобы получить элементы, представляющие наблюдения в пределах принятой нами точности (т. е. до $0'',1$), необходимо все дальнейшие вычисления вести с шестью знаками и сохранить соответствующее число знаков в результатах.

Причина заключается в том, что все элементы связаны между собой: конечно, мы можем изменять как угодно нереальные знаки какого-либо элемента (например, отбросить их), но при этом мы должны — для того, чтобы

исходные наблюдения были точно удовлетворены, — произвести соответственное изменение в остальных элементах.

Чтобы лучше уяснить механизм этого явления, возьмем следующий простой пример: нужно найти x и y , удовлетворяющие системе уравнений

$$0,84852x + 0,36444y - 0,16559 = 0,$$

$$0,87816x + 0,37732y - 0,17232 = 0,$$

с точностью до единицы пятого знака.

Решая эти уравнения относительно x , получим (сохраняем один запасный знак)

$$x = -\frac{0,000\ 320}{0,000\ 127} = -2,52.$$

Соответствующее значение y находим из второго уравнения:

$$y = 6,32165.$$

Конечно, реальных значащих цифр в x , а потому и в y , только две; но если бы мы взяли, ограничиваясь лишь реальными знаками,

$$x = -2,5, \quad y = 6,3,$$

то левые части наших уравнений обратились бы в

$$+0,00908, \quad +0,00940,$$

т. е. уравнения были бы удовлетворены лишь с точностью до 0,01.

Легко видеть, что x можно дать любое значение в пределах от $-2,50$ до $-2,54$. Если соответствующее значение y вычислим с пятью десятичными знаками, то эта пара значений неизвестных будет удовлетворять заданным уравнениям с точностью до 0,00001.

Совершенно такое же явление имеет место при нахождении элементов орбиты из наблюдений: в этом случае все неизвестные задачи выражаются через одну (ρ в способе Лагранжа — Гаусса), на которой и отражается неопределенность решения; но коль скоро значение этой неизвестной фиксировано (в пределах тех 3—4 знаков, которые имеют реальное значение), все остальные неизвестные должны вычисляться с той точностью, с которой мы желаем удовлетворить исходным наблюдениям, т. е. с 5—6 знаками.

§ 11. Особые случаи при вычислении орбиты по трем наблюдениям

В предыдущих параграфах рассмотрен общий случай нахождения орбиты по трем наблюдениям. Остановимся теперь на тех осложнениях, которые могут встретиться, если полученные из наблюдений координаты светила обладают некоторыми специальными свойствами.

Отметим прежде всего, что возможны такие случаи, когда три наблюдения недостаточны для нахождения орбиты. В самом деле, если светило движется по эллипсу в плоскости эклиптики, то его движение определяется четырьмя элементами: a , e , M_0 и долготой перигелия π . Между тем три наблюдения дают в этом случае только три координаты, а потому позволяют составить только три уравнения. Таким образом, в этом случае для

нахождения элементов орбиты необходимо иметь четыре наблюдения.

Конечно, ни одна планета или комета не движется совершенно точно в плоскости эклиптики. Но в тех довольно часто встречающихся на практике случаях, когда наклон орбиты малой планеты не превышает нескольких градусов, коэффициенты P и Q в уравнениях Лагранжа (§ 4) становятся столь мало точными (в предельном случае, когда светило движется в плоскости эклиптики, они принимают неопределенный вид $\frac{0}{0}$), что для определения геоцентрических расстояний приходится брать не три, а четыре наблюдения.

Следует отметить, что употребление четырех наблюдений вместо трех позволяет заметно точнее вычислить коэффициенты уравнений, с помощью которых находятся геоцентрические расстояния. Поэтому иногда может оказаться выгодным воспользоваться четырьмя наблюдениями в таких случаях, когда можно было бы вычислить орбиту и по трем наблюдениям, например, в тех случаях, когда не удастся подобрать три наблюдения, разделенные достаточно одинаковыми интервалами времени.

В §§ 4—6 было показано, что нахождение геоцентрических расстояний светила основано, в конечном счете, на решении системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} D\rho &= U - n_1U_1 - n_2U_2, \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2 \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

относительно ρ и r , причем

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad (11.2)$$

а U , U_1 , U_2 выражаются формулами

$$U = \begin{vmatrix} X & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y & \mu_1 & \mu_2 \\ Z & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_1 = \begin{vmatrix} X_1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_1 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_1 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad U_2 = \begin{vmatrix} X_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ Y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ Z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}. \quad (11.3)$$

Затруднения при решении системы (11.1) могут возникнуть только в том случае, когда $D=0$.

Напишем это соотношение следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \rho\lambda & \rho_1\lambda_1 & \rho_2\lambda_2 \\ \rho\mu & \rho_1\mu_1 & \rho_2\mu_2 \\ \rho\nu & \rho_1\nu_1 & \rho_2\nu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $(\rho\lambda, \rho\mu, \rho\nu)$, $(\rho_1\lambda_1, \rho_1\mu_1, \rho_1\nu_1)$, ... суть не что иное, как прямоугольные геоцентрические координаты, то это равенство означает, что три рассматриваемые положения светила находятся в плоскости, проходящей через центр Земли, а потому видимые положения светила, определяемые направляющими косинусами (λ, μ, ν) , ..., находятся на большом круге.

Итак, определитель D равен нулю тогда и только тогда, когда три видимые положения светила лежат на одном большом круге.

Рассмотрим решение уравнений (11.1) при условии $D=0$. Здесь могут представиться следующие случаи:

Первый случай. Определители (11.3) не все равны нулю. Если бы две из величин U, U_1, U_2 были равны нулю, то третья также была бы равна нулю в силу (11.1). Таким образом, по крайней мере одна из величин U_1, U_2 не равна нулю.

Поэтому, подставляя в первое уравнение (11.1) выражения (§ 4)

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}, \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3},$$

получим уравнение

$$0 = -n_1^0 U_1 + U - n_2^0 U_2 - (c_1 U_1 + c_2 U_2) r^{-3}, \quad (11.4)$$

позволяющее найти r .

Второе из уравнений (11.1) даст ρ .

Второй случай. $U=U_1=U_2=0$. В этом случае первое из уравнений (11.1) обращается в тождество, и вычисление ρ при помощи трех взятых наблюдений становится невозможным. Посмотрим, когда этот случай может встретиться.

Предположим сначала, что не все миноры

$$\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, \quad \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 \quad (11.5)$$

определителя (11.2) равны нулю. В таком случае равенство $U_1=0$, написанное в форме

$$\begin{vmatrix} X_1 & \rho_1 \lambda_1 & \rho_2 \lambda_2 \\ Y_1 & \rho_1 \mu_1 & \rho_2 \mu_2 \\ Z_1 & \rho_1 \nu_1 & \rho_2 \nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

будет означать, что геоцентрическое положение Солнца в первый момент находится в той проходящей через центр Земли плоскости, в которой лежат все три положения светила. Аналогично интерпретируются равенства $U=0$ и $U_2=0$. Таким образом, в этом случае большой круг небесной сферы, на котором лежат видимые положения светила, заключает соответствующие положения Солнца, т. е. совпадает с эклипстикой.

Если миноры (11.5) равны нулю, то это дает

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2},$$

а потому $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ (случай $\lambda_1 = -\lambda_2$, $\mu_1 = -\mu_2$, $\nu_1 = -\nu_2$, как не представляющий практического интереса, отбрасываем), т. е. видимые положения светила для крайних моментов совпадают. В этом случае можно, если не все миноры

$$\mu_1\nu - \mu\nu_1, \quad \nu_1\lambda - \nu\lambda_1, \quad \lambda_1\mu - \lambda\mu_1$$

равны нулю, составить уравнение, аналогичное (11.4), и вычислить r_1 и ρ_1 , после чего из основных уравнений найдем ρ_2 . Наконец, если и эти миноры равны нулю, то все три геоцентрические положения светила совпадают (случай диаметрально противоположных положений опять исключаем), и мы бессильны найти орбиту из таких наблюдений.

Таким образом, вычисление орбиты по трем наблюдениям полностью невозможно в двух случаях:

- 1) когда все три наблюденные положения светила совпадают;
- 2) когда три наблюденные положения светила лежат на эклиптике.

Первый из этих случаев для реальных наблюдений не может иметь места, а во втором случае для нахождения орбиты необходимо иметь, как мы уже видели, четыре наблюдения.

Не только тогда, когда наблюденные положения светила близки к эклиптике, но и во всех тех случаях, когда определитель D очень мал, следует вычислять орбиту не по трем, а по четырем наблюдениям. Но тогда уравнение (11.4) представляет только теоретический интерес, так как вследствие малости c_1 и c_2 не позволяет находить r с достаточной точностью*).

*) О вычислении орбиты по четырем наблюдениям см. § 1 гл. X.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

§ 1. Общие соображения

Вычисление орбиты вновь открытой кометы почти всегда выполняется сначала в предположении, что комета движется по параболе. У значительного большинства комет часть орбиты, охватываемая наблюдениями, весьма мало отличается от параболы; поэтому неточность, вызываемая этим предположением, оказывается ничтожной по сравнению с той, которая обусловлена ошибками наблюдений.

Если даже действительная орбита кометы имеет эксцентриситет, заметно отличающийся от единицы, предварительная параболическая орбита может быть весьма полезна для вычисления эфемериды, достаточно точной, чтобы обеспечить продолжение наблюдений. Такая орбита может быть также полезна для вычисления в дальнейшем эллиптической орбиты: значения отношений площадей треугольников n_1 и n_2 , полученные при помощи параболической орбиты, могут быть взяты здесь для первого приближения. Такие значения, вычисленные по формулам

$$n_1 = \frac{r \sin(v_2 - v)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)}; \quad n_2 = \frac{r \sin(v - v_1)}{r_2 \sin(v_2 - v_1)},$$

где радиусы-векторы и истинные аномалии найдены при помощи предварительной параболической орбиты, будут гораздо ближе к истине, нежели обычно употребляемые для первого приближения значения

$$n_1 = n_1^0 + c_1 r^{-3}; \quad n_2 = n_2^0 + c_2 r^{-3},$$

даваемые формулами (6.5) гл. VIII.

Кроме того, наличие предварительной параболической орбиты и вычисленной при ее помощи эфемериды позволяет выбрать наиболее надежные наблюдения или даже составить нормальные места (гл. XI).

За последние годы были открыты две кометы, имеющие типичные для малых планет эксцентриситеты (для кометы Швас-

сманна — Вахманна I и для кометы Отерма эксцентриситеты равны соответственно 0,136 и 0,143) и несколько комет с эксцентриситетами, близкими к 0,4 и 0,5. Но такие случаи, когда параболическая орбита оказывается сразу же непригодной для представления наблюдений, встречаются сравнительно редко.

Между тем вычисление орбиты в предположении, что эксцентриситет равен единице, имеет существенные преимущества. Здесь приходится находить из шести уравнений, даваемых тремя наблюдениями, не шесть, а только пять неизвестных. Благодаря этому обстоятельству, т. е. неполному использованию уравнений, наблюдения, непригодные для вычисления орбиты общего вида (без фиксированной заранее величины эксцентриситета), могут быть вполне пригодными для получения хорошей параболической орбиты. Особенно важно то, что для вычисления параболической орбиты могут быть взяты наблюдения, разделенные очень малыми интервалами времени (равными, например, 1—2 суткам). Применение общего метода, изложенного в предыдущей главе, здесь невозможно, так как определитель D практически равен нулю, между тем вычисление параболической орбиты оказывается вполне возможным. Вычисление орбиты по очень близким наблюдениям приходится делать потому, что для вновь открытой кометы (обычно очень слабой и быстро движущейся) весьма важно как можно скорее дать эфемериду, обеспечивающую возможность дальнейших наблюдений *).

§ 2. Основные уравнения. Первое приближение

Как и раньше, обозначим через (α_1, δ_1) , (α, δ) и (α_2, δ_2) прямые восхождения и склонения кометы, соответствующие моментам наблюдений t_1 , t и t_2 ($t_1 < t < t_2$), и положим

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1, \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1, \quad \nu_1 = \sin \delta_1,$$

и аналогично (λ, μ, ν) , $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ для моментов t и t_2 .

Через (X_1, Y_1, Z_1) , (X, Y, Z) , (X_2, Y_2, Z_2) обозначим координаты Солнца в моменты наблюдений.

Условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через центр Солнца, приводит, как мы уже знаем, к таким уравнениям (§ 3 гл. VIII):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 n_1 \rho_1 - \lambda \rho + \lambda_2 n_2 \rho_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ \mu_1 n_1 \rho_1 - \mu \rho + \mu_2 n_2 \rho_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ \nu_1 n_1 \rho_1 - \nu \rho + \nu_2 n_2 \rho_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

*) Метод определения орбиты, годный для всех значений эксцентриситета, предложен Мультоном [1901]. (Прим. ред.)

где ρ_1 , ρ , ρ_2 — геоцентрические (или топоцентрические) расстояния кометы, а n_1 и n_2 — отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами:

$$n_1 = \frac{[rr_2]}{[r_1r_2]}; \quad n_2 = \frac{[r_1r]}{[r_1r_2]}.$$

Исключение ρ из уравнений (2.1) дает три соотношения между ρ_1 и ρ_2 . Например, исключая ρ из первого и второго уравнений, получим

$$\begin{aligned} (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2)n_2\rho_2 + (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)n_1\rho_1 &= \\ &= -(\lambda Y - \mu X) + (\lambda Y_1 - \mu X_1)n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2)n_2. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам будет нужно только одно из этих уравнений. Выбранное уравнение мы представим в таком виде:

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \quad (2.2)$$

где

$$M = K \frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3, \quad (2.3)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} K &= -\frac{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}, & L_1 &= \frac{\lambda Y_1 - \mu X_1}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}; \\ L_2 &= -\frac{\lambda Y - \mu X}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}; & L_3 &= \frac{\lambda Y_2 - \mu X_2}{\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Если бы коэффициенты M и m уравнения (2.2) были известны, то для каждого значения ρ_1 мы могли бы вычислить ρ_2 , а следовательно, и гелиоцентрические координаты

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

для моментов двух крайних наблюдений, после чего известные формулы

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

дали бы соответствующие значения r_1 , r_2 и s .

Таким образом, при помощи уравнения Эйлера

$$6\tau = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \quad (2.7)$$

мы могли бы найти промежуток времени $\tau = k(t_2 - t_1)$, соответствующий выбранному нами значению ρ_1 . Варьируя значение ρ_1 до тех пор, пока значение τ , даваемое равенством (2.7), не совпадет со значением, полученным из наблюдений, мы найдем ρ_1 ,

а следовательно, и ρ_2 ; попутно будут найдены гелиоцентрические координаты (2.5), позволяющие легко вычислить элементы орбиты § 5 гл. V.

Поскольку коэффициенты M и m содержат неизвестные величины n_1 и n_2 , задача может быть решена только последовательными приближениями.

Легко видеть (§ 5 гл. VIII), что выражения

$$\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda\mu_2 - \mu\lambda_2$$

являются малыми величинами первого порядка. Поэтому, как показывают формулы (2.4), ошибки порядка h в n_1 и n_2 дадут в M ошибку тоже порядка h , а в m — ошибку порядка $h - 1$.

Взяв самые простые приближенные значения

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau},$$

имеющие ошибки второго порядка (§ 2 гл. VIII), мы уже получим, следовательно, коэффициенты уравнения (2.2) с точностью, достаточной для первого приближения.

При выполнении вычислений уравнение (2.7) следует брать в форме (§ 12 гл. V)

$$\theta_0(2\tau)^2 - s^2(r_1 + r_2) = 0, \quad (2.8)$$

чтобы избежать потери точности, связанной с вычислением первой части равенства (2.7) при малых значениях хорды s .

§ 3. Второе приближение

Для второго приближения нужно перевычислить коэффициенты уравнения (2.2), взяв более точные значения n_1 и n_2 .

Так как в результате первого приближения гелиоцентрические координаты получены с ошибками первого порядка малости, то нет надобности употреблять точные формулы (§ 6 гл. VIII) для вычисления n_1 и n_2 . Здесь могут быть употреблены гораздо более удобные приближенные формулы, дающие эти величины с ошибками четвертого порядка, т. е. с точностью, вполне достаточной для второго приближения.

Для вывода таких формул обратимся к разложениям (2.6) гл. VIII. Взяв в них члены до третьего порядка включительно, получим

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \frac{1}{6}(\tau^2 - \tau_1^2)r^{-3} + \frac{1}{4}\tau_2(\tau\tau_2 - \tau_1^2)r^{-4}r' + \dots \right], \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \frac{1}{6}(\tau^2 - \tau_2^2)r^{-3} - \frac{1}{4}\tau_1(\tau\tau_1 - \tau_2)r^{-4}r' + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Входящие сюда величины r и r' легко выразить через r_1 и r_2 , непосредственно получаемые в процессе первого приближения. В самом деле, разложение в ряд Тэйлора дает

$$r_1 = r - \tau_2 r' + \dots; \quad r_2 = r + \tau_1 r' + \dots;$$

откуда

$$r' = \frac{r_2 - r_1}{\tau} + \dots; \quad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2} \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau} (r_2 - r_1) + \dots$$

Таким образом, с достаточной для наших целей точностью,

$$r^{-3} = \frac{8}{(r_1 + r_2)^3} + 24 \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots,$$

$$r^{-4} r' = \frac{16}{\tau} \frac{r_2 - r_1}{(r_1 + r_2)^4} + \dots$$

Подставив эти выражения в (3.1) и положив

$$\xi = \frac{4}{3} (r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3 (r_2 - r_1) (r_1 + r_2)^{-4},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \xi (\tau^2 - \tau_1^2) + \xi \eta \frac{\tau_1^2 \tau_2}{\tau} \right], \\ n_2 &= \frac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \xi (\tau^2 - \tau_2^2) - \xi \eta \frac{\tau_1 \tau_2^2}{\tau} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Эти приближенные выражения, имеющие ошибки четвертого порядка, носят название формул Опольцера [1870], хотя они были найдены и использованы Энке [1831] раньше Опольцера.

Из (3.2) легко получаем с той же точностью выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \tau_1 \xi \left[\tau \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) + \tau_1 \eta \right], \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \tau_1 \xi \left[\tau \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2} \right) - \tau_2 \eta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

фигурирующие в коэффициентах (2.3) основного уравнения.

Вторым приближением заканчивается обычно уточнение коэффициентов M и m уравнения (2.2). Если второе приближение оказывается недостаточным для хорошего представления наблюдений, то дальнейшее улучшение гелиоцентрических координат следует производить способом вариации отношения геоцентрических расстояний (§ 6 *).

*) О влиянии неточности коэффициентов M и m на представление наблюдений см. Б. Стрёмгрен [1929]. (Прим. ред.)

Примечание. Для второго приближения вместо формул Опольцера можно пользоваться также формулами Гиббса, ошибки которых, в случае равноотстоящих наблюдений, будут пятого порядка (§ 7 гл. VIII).

При употреблении формул Гиббса надо знать не только r_1 и r_2 (получаемые в ходе первого приближения), но и r . Чтобы получить эту величину с достаточной для наших целей точностью, проще всего воспользоваться следующим приближенным соотношением

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau} r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau} r_2^2 - \frac{\tau_1 \tau_2}{r}, \quad (3.4)$$

дающим r с ошибкой третьего порядка.

Соотношение (3.4) может быть получено из выведенной нами (§ 7 гл. VIII) общей зависимости между тремя значениями X_1, X, X_2 некоторой функции и соответствующими значениями X_1'', X'', X_2'' ее второй производной. Применяв эту зависимость к функции $X=r^2$ и заметив, что

$$(r^2)'' = 2(r^{-1} - a^{-1}),$$

получим

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = 2(\tau_1 B_1 r_1^{-1} + \tau B r^{-1} + \tau_2 B_2 r_2^{-1}) - \tau \tau_1 \tau_2 a^{-1}, \quad (3.5)$$

где B_1, B, B_2 даются равенствами (7.1) гл. VIII.

Если в правой части равенства (3.5), имеющей ошибку пятого порядка, положить $r_1 = r_2 = r$, то получим соотношение

$$\tau_1 r_1^2 - \tau r^2 + \tau_2 r_2^2 = \tau \tau_1 \tau_2 (r^{-1} - a^{-1}), \quad (3.6)$$

погрешность которого четвертого порядка.

Для случая параболического движения отсюда получаем равенство (3.4). Заметим, что в правой части этого равенства можно положить, не изменяя порядка точности, $r = r_1$ или $r = r_2$.

§ 4. Сопоставление формул для вычисления параболической орбиты

Для моментов наблюдений t_1, t, t_2 ($t_1 < t < t_2$) даны геоцентрические (или топоцентрические) координаты кометы

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha, \delta), \quad (\alpha_2, \delta_2)$$

и Солнца

$$(X_1, Y_1, Z_1), \quad (X, Y, Z), \quad (X_2, Y_2, Z_2).$$

Все эти координаты должны быть отнесены к одному и тому же экватору и равноденствию.

От сферических координат переходим к соответствующим направляющим косинусам:

$$\lambda_1 = \cos \delta_1 \cos \alpha_1; \quad \mu_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_1; \quad \nu_1 = \sin \delta_1$$

и аналогично для $(\lambda, \mu, \nu), (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

Контроль:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = 1; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 = 1.$$

Из уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2) n_2 \rho_2 &= -(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1) n_1 \rho_1 - (\lambda Y - \mu X) + \\ &\quad + (\lambda Y_1 - \mu X_1) n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2) n_2, \\ (\lambda\nu_2 - \nu\lambda_2) n_2 \rho_2 &= -(\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1) n_1 \rho_1 - (\lambda Z - \nu X) + \\ &\quad + (\lambda Z_1 - \nu X_1) n_1 + (\lambda Z_2 - \nu X_2) n_2, \\ (\mu\nu_2 - \nu\mu_2) n_2 \rho_2 &= -(\mu\nu_1 - \nu\mu_1) n_1 \rho_1 - (\mu Z - \nu Y) + \\ &\quad + (\mu Z_1 - \nu Y_1) n_1 + (\mu Z_2 - \nu Y_2) n_2 \end{aligned}$$

выбираем то, у которого коэффициент при ρ_2 наибольший по абсолютной величине. Избранное уравнение представляем в форме

$$\rho_2 = M\rho_1 + m, \quad (\text{A})$$

где

$$M = K \frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3.$$

Первое приближение

Принимаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{t_2 - t}{t - t_1}; \quad \frac{1}{n_2} = \frac{t_2 - t_1}{t - t_1}$$

и вычисляем соответствующие значения M и m .

Для каждого значения ρ_1 находим ρ_2 и гелиоцентрические координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1; & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1; & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1; & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2. \end{aligned}$$

Затем вычисляем радиусы-векторы и хорду

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ s^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \end{aligned}$$

и найденные значения подставляем в

$$f(\rho_1) = \theta_0 (2\tau)^2 - s^2 (r_1 + r_2),$$

где

$$2\tau = 2k(t_2 - t_1),$$

$$2k = 0,034\,40420, \quad \lg 2k = 8,536\,6114_{-10},$$

а θ_0 берется из таблицы IX по аргументу

$$c = \frac{s^2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

При логарифмическом вычислении полагаем

$$f(\rho_1) = \lg [\theta_0 (2\tau)^2] - \lg [s^2 (r_1 + r_2)].$$

Варьируем ρ_1 до тех пор, пока не получится

$$f(\rho_1) = 0.$$

Кроме обычного способа пропорциональных частей, для достижения этой цели можно применить интерполяционную формулу Ньютона. По мере того, как будем получать значения функции $f(\rho_1)$ для различных значений ρ_1 , будем составлять таблицу приведенных разностей:

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 = \rho' & f(\rho_1) = f' & [f' f'''] \\ = \rho'' & = f'' & [f' f'' f'''], \\ = \rho''' & = f''' & [f'' f''' f''''], \end{array}$$

где

$$[f' f'''] = \frac{f'' - f'}{\rho'' - \rho'}; \quad [f'' f'''] = \frac{f''' - f''}{\rho''' - \rho''}; \quad [f' f'' f'''] = \frac{[f'' f'''] - [f' f''']}{\rho''' - \rho'}.$$

После того как вычислены f' и f'' для двух каких-либо значений $\rho_1 = \rho'$ и ρ'' , следующее значение ρ_1 находим по способу пропорциональных частей, который дает

$$\rho''' = \rho'' - \frac{f''}{[f' f''']}.$$

После трех проб полагаем $\rho_1 = \rho''' + x$ и применяем интерполяционную формулу Ньютона

$$f(\rho_1) = f''' + (\rho_1 - \rho''') [f'' f'''] + (\rho_1 - \rho''') (\rho_1 - \rho'') [f' f'' f'''].$$

Полагая $f(\rho_1) = 0$, для нахождения x будем иметь такое уравнение:

$$0 = f''' + x \{ [f'' f'''] + (\rho''' - \rho'') [f' f'' f'''] \} + x^2 [f' f'' f'''].$$

Этот процесс можно было бы продолжить и дальше, но больше четырех проб делать обычно не приходится.

Примечание. Вместо того, чтобы при каждой пробе вычислять гелиоцентрические координаты, можно было бы выразить r_1 , r_2 и s непосредственно через ρ_1 и ρ_2 .

Подставляя выражения (2.5) в формулы (2.6), получим

$$\left. \begin{array}{l} r_1^2 = (\rho_1 + C_1)^2 + S_1^2, \\ r_2^2 = (\rho_2 + C_2)^2 + S_2^2, \\ s^2 = r_1^2 + r_2^2 + D_1 \rho_1 + D_2 \rho_2 - E \rho_1 \rho_2 - G, \end{array} \right\} \quad (B)$$

где

$$\begin{array}{ll} C_1 = -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1); & D_1 = 2(\lambda_1 X_2 + \mu_1 Y_2 + \nu_1 Z_2), \\ C_2 = -(\lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 + \nu_2 Z_2); & D_2 = 2(\lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1), \\ S_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - C_1^2; & E = 2(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2), \\ S_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - C_2^2; & G = 2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2). \end{array}$$

Второе приближение

При помощи значений ρ_1, ρ_2 , полученных в первом приближении, и значения ρ , найденного линейным интерполированием,

$$\rho = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \rho_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \rho_2,$$

исправляем моменты наблюдений за абберационное время (если, конечно, они не были исправлены раньше; в этом случае только проверяем ранее принятые поправки):

$$t_1^0 = t_1 - L\rho_1; \quad t^0 = t - L\rho; \quad t_2^0 = t_2 - L\rho_2,$$

$$L = 0,0057756; \quad \lg L = 7,761597_{-10}.$$

Затем вычисляем

$$\tau = k(t_2^0 - t_1^0); \quad \tau_1 = k(t_2^0 - t^0); \quad \tau_2 = k(t^0 - t_1^0),$$

$$k = 0,01720210; \quad \lg k = 8,2355814_{-10},$$

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \tau_1 \xi \left[\tau \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) + \tau_1 \eta \right], \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \tau_1 \xi \left[\tau \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2} \right) - \tau_2 \eta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Эти значения подставляем в формулы (А) и с новыми M и m повторяем вычисление ρ_1 и ρ_2 .

При третьем и следующих приближениях (если бы таковые понадобились) можно пользоваться точными формулами

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \frac{\eta}{\eta_1}, \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \frac{\eta}{\eta_2},$$

где η, η_1 и η_2 находятся (§ 8 гл. V) по аргументам

$$\mu = \frac{4\tau^2}{(r_1 + r_2)^3}; \quad \mu_1 = \frac{4\tau_1^2}{(r + r_2)^3}; \quad \mu_2 = \frac{4\tau_2^2}{(r_1 + r)^3}.$$

При этом кроме r_1 и r_2 нужно еще будет знать r . С достаточной точностью r можно найти из следующего приближенного уравнения (3.4):

$$r^2 = \frac{\tau_1}{\tau} r_1^2 + \frac{\tau_2}{\tau} r_2^2 - \frac{\tau_1 \tau_2}{r}. \quad (C)$$

На практике вместо третьего приближения обычно прибегают к способу варьирования M (§ 4 гл. XI). Варьирование M применяется иногда и вместо второго приближения.

Примечание. Для второго приближения можно пользоваться, вместо формул (B), формулами Гиббса (§ 7 гл. VIII). Для нахождения r служит соотношение (C), в правой части которого можно положить $r=r_1$ или $r=r_2$.

Представление среднего наблюдения

Чтобы убедиться в том, что полученные геоцентрические расстояния достаточно точны, и что взятые наблюдения действительно могут быть представлены параболической орбитой, вычисляем гелиоцентрические координаты кометы для момента среднего наблюдения

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2,$$

$$y = n_1 y_1 + n_2 y_2,$$

$$z = n_1 z_1 + n_2 z_2.$$

Затем из уравнений

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = x + X,$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y,$$

$$\rho \sin \delta = z + Z$$

находим α и δ .

Если получатся значительные разности α (набл.) — α (выч.) и δ (набл.) — δ (выч.), то нужно еще убедиться, что эти разности не являются следствием вычислительных ошибок. Для этого с вычисленными значениями α и δ находим коэффициенты K, L_1, L_2, L_3 формул (A); если вычисления верны, то должны получиться исходные значения этих коэффициентов.

Вычисление элементов

Используя гелиоцентрические координаты, полученные в последнем приближении, находим

$$\sigma = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) r_1^{-2}.$$

Контроль:

$$2\sigma = 1 + (r_2^2 - s^2) r_1^{-2}.$$

После этого вычисляем

$$x_0 = x_2 - \sigma x_1; \quad y_0 = y_2 - \sigma y_1; \quad z_0 = z_2 - \sigma z_1;$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \quad (r_0 > 0);$$

$$\operatorname{tg} 2f = \frac{r_1 r_0}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2} = \frac{r_0}{\sigma r_1}.$$

Контроль:

$$\sin f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s+r_1-r_2)(s-r_1+r_2)}{r_1 r_2}}$$

Затем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 = \operatorname{ctg} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f,$$

$$v_2 = v_1 + 2f,$$

$$q = r_1 \cos^2 \frac{1}{2} v_1 = r_2 \cos^2 \frac{1}{2} v_2,$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_1^3 \right); \quad \sigma_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1;$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_2 + \frac{1}{3} \sigma_2^3 \right); \quad \sigma_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2.$$

B_1 и B_2 могут быть найдены по таблице V;

$$T = t_1^0 - q^{3/2} B_1 = t_2^0 - q^{3/2} B_2.$$

Вычисление векторных элементов:

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ y_1 & y_0 \\ z_1 & z_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +r_1^{-1} \cos v_1 & +r_1^{-1} \sin v_1 \\ -r_0^{-1} \sin v_1 & +r_0^{-1} \cos v_1 \end{vmatrix}$$

и величин

$$m_x = qP_x; \quad m_y = qP_y; \quad m_z = qP_z,$$

$$n_x = 2qQ_x; \quad n_y = 2qQ_y; \quad n_z = 2qQ_z.$$

Контроль:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = q^2; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 4q^2,$$

$$m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z = 0.$$

Относительно вычисления эклиптических элементов Ω , i , ω см. формулы (1.11) гл. V.

Представление наблюдений

Момент наблюдения t исправляем за планетную аберрацию

$$t^0 = t - L\rho.$$

По аргументу

$$B = q^{-3/2} (t^0 - T)$$

находим σ (таблица V). Геоцентрические координаты кометы вычисляем по формулам

$$\begin{aligned}\rho \cos \delta \cos \alpha &= m_x (1 - \sigma^2) + n_x \sigma + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= m_y (1 - \sigma^2) + n_y \sigma + Y, \\ \rho \sin \delta &= m_z (1 - \sigma^2) + n_z \sigma + Z.\end{aligned}$$

Координаты Солнца X , Y , Z берутся из эфемерид для момента t .

§ 5. Пример вычисления параболической орбиты

Возьмем следующие наблюдения кометы 1909I (Daniel), которыми пользовался Лойшнер [1913] для иллюстрации данной им модификации метода Лапласа:

Место наблюдения	1909	Gr. M. T.	$\alpha(1909,0)$	$\delta(1909,0)$
Nice	Июнь	16,5306	25° 28' 38"	+29° 58' 25"
Lick	>	18,9809	27 12 29	+33 26 22
Lick	>	21,9659	29 27 51	+37 25 17

Местное звездное время каждого наблюдения и приведения координат Солнца к месту наблюдения (§ 1 гл. VII), выраженные в единицах шестого знака, таковы:

Июнь	Местное зв. вр.	ΔX	ΔY	ΔZ
16	18 ^h 51 ^m ,8	-7	+30	-29
18	21 14,1	-25	+23	-26
21	21 4,3	-24	+24	-26

Придав эти поправки к взятым из эфемерид геоцентрическим координатам Солнца и вычислив направляющие косинусы, будем иметь следующие исходные данные для вычисления орбиты:

	t_1	t	t_2
λ	+0,782 03	+0,742 15	+0,691 46
μ	+0,372 62	+0,381 54	+0,390 64
ν	+0,499 60	+0,551 06	+0,607 67
X	+0,085 427	+0,044 017	-0,006 496
Y	+0,928 905	+0,931 489	+0,932 506
Z	+0,402 916	+0,404 045	+0,404 487

Так как в настоящем случае

$$\begin{aligned}\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2 &= +0,026 094; & \lambda\nu_2 - \nu\lambda_2 &= +0,069 946; \\ \mu\nu_2 - \nu\mu_2 &= +0,016 584,\end{aligned}$$

то берем второе уравнение из числа указанных в § 4 и представляем его в таком виде:

$$\rho_2 = 0,86019 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + 3,6021 \frac{n_1}{n_2} - 3,9403 \frac{1}{n_2} + 4,3429. \quad (A)$$

Приготовим формулы для вычисления r_1 , r_2 и s :

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (\rho_1 - 0,614\ 23)^2 + 0,655\ 22, \\ r_2^2 &= (\rho_2 - 0,605\ 58)^2 + 0,666\ 50, \\ s^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 1,088\ 94\rho_1 + 1,333\ 55\rho_2 - 1,979\ 79\rho_1\rho_2 - 2,05726. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Первое приближение

$$\begin{aligned} t_2 - t &= 2,9850, \\ t - t_1 &= 2,4503, \quad \frac{n_1}{n_2} = 1,2182; \quad \frac{1}{n_2} = 2,2182, \\ t_2 - t_1 &= 5,4353, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1,0479\rho_1 - 0,0094, \\ (2\tau)^2 &= 0,034\ 970. \end{aligned} \quad (A')$$

ρ_1	1	0,8	1,02
ρ_2	1,0385	0,8289	1,0595
$\rho_1 + C_1$	0,385 77	0,185 77	0,405 77
$\rho_2 + C_2$	0,432 92	0,223 32	0,453 92
r_1^2	0,804 04	0,689 73	0,819 87
r_2^2	0,853 92	0,716 37	0,872 54
s^2	0,018 52	0,012 53	0,019 24
r_1	0,896 68	0,830 50	0,905 47
r_2	0,924 68	0,846 39	0,934 10
$r_1 + r_2$	1,820 76	1,676 89	1,839 57
$(r_1 + r_2)^2$	3,315 17	2,811 93	3,384 02
c	0,005 587	0,004 456	0,005 683
θ_0	1,000 47	1,000 37	1,000 47
$\theta_0 (2\tau)^2$	0,034 99	0,034 98	0,034 99
$s^2 (r_1 + r_2)$	0,033 72	0,021 01	0,035 37
$f(\rho_1)$	+0,001 27	+0,013 97	-0,000 38

Два первых значения ρ_1 взяты наудачу. Третье вычислено так:

$$\rho_1 = 1 + 0,2 \frac{0,00127}{0,01270} = 1,02.$$

Дальнейшее уточнение ρ_1 нецелесообразно — лучше перейти ко второму приближению.

Второе приближение

$$\begin{aligned} -L\rho_1 &= -0,0059, & t_1^0 &= 16,5247, & \tau_1 &= 0,051\ 347, \\ -L\rho &= -0,0060, & t^0 &= 18,9749, & \tau_2 &= 0,042\ 149, \\ -L\rho_2 &= -0,0061, & t_2^0 &= 21,9598, & \tau &= 0,093\ 495, \\ & & & & (2\tau)^2 &= 0,034\ 965. \end{aligned}$$

Формулы (В) в § 4 дают

$$\frac{n_1}{n_2} = 1,21803, \quad \frac{1}{n_2} = 2,21469.$$

Сообразно с этим во втором приближении ρ_2 через ρ_1 выражается так:

$$\rho_2 = 1,0477\rho_1 + 0,0038. \quad (A'')$$

Повторяем вычисление геоцентрических расстояний (схема вычисления та же, что и в первом приближении, поэтому приводим ее ниже в сокращенном виде).

После того как сделана первая проба $\rho_1 = 1,02$, новое значение ρ_1 находим, исходя из предположения, что отношение изменений ρ_1 и $f(\rho_1)$ имеет ту же величину, что и в первом приближении, т. е.

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta f} = \frac{1,02 - 1,00}{-0,00038 - 0,00127} = -12,1.$$

Это дает

$$\rho_1 = 1,02 - 0,00615 \times 12,1 = 0,9453.$$

Для третьей пробы берем

$$\rho_1 = 0,9453 + 0,00003 \times 12,1 = 0,9457.$$

Третья проба (которую можно было бы и не делать, ибо три единицы последнего знака лежат в пределах вероятного накопления ошибок вычисления) наглядно показывает, что геоцентрические расстояния находятся только с тремя надежными десятичными знаками. Несмотря на это, дальнейшие вычисления надо продолжать с пятью знаками, если мы хотим, чтобы полученные элементы представляли наблюдения с точностью до 1".

ρ_1	1,02	0,9453	0,9457
ρ_2	1,0725	0,9942	0,9946
r_1^2	0,81987	0,76483	0,76509
r_2^2	0,88451	0,81753	0,81784
s^2	0,02228	0,01965	0,01965
r_1	0,90547	0,87455	0,87469
r_2	0,94048	0,90417	0,90435
c	0,006539	0,006211	0,006209
θ_0	1,00055	1,00052	1,00052
$\theta_0 (2\tau)^2$	0,03498	0,03498	0,03498
$s^2 (r_1 + r_2)$	0,04113	0,03495	0,03496
$f(\rho_1)$	-0,00615	+0,00003	+0,00002

Представление среднего места. Прежде всего находим гелиоцентрические координаты

x_1	+0,654 14	x_2	+0,694 22	x	+0,673 22
y_1	-0,576 52	y_2	-0,543 98	y	-0,562 70
z_1	+0,069 56	z_2	+0,199 90	z	+0,128 52
r_1^2	0,765 11	r_2^2	0,817 82		

Посмотрим, как эти координаты представляют среднее наблюдение:

$\rho \cos \delta \cos \alpha$	+0,717 24	α	27°,2113	ρ	0,966 46
$\rho \cos \delta \sin \alpha$	+0,368 79	δ	+33,4384	λ	+0,742 13
$\rho \sin \delta$	+0,532 56	α	27°12'41"	μ	+0,381 59
$\operatorname{tg} \alpha$	+0,514 18	δ	+33°26'18"	ν	+0,551 04
$\cos \alpha$	+0,889 33	$\Delta \alpha$	-12"		
$\rho \cos \delta$	+0,806 49	$\Delta \delta$	+4"		
$\operatorname{tg} \delta$	+0,660 34				
$\cos \delta$	+0,834 48				

Для того чтобы убедиться, что полученные разности $\Delta \alpha$, $\Delta \delta$ не являются результатом ошибок в вычислениях с полученными значениями λ , μ , ν , находим коэффициенты уравнения (А) § 4. Получим

$$\rho_2 = 0,86010 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + 3,6019 \frac{n_1}{n_2} - 3,9401 \frac{1}{n_2} + 4,3427.$$

Коэффициенты этого уравнения вполне совпадают с коэффициентами нашего исходного уравнения (А) в пределах точности пятизначного вычисления, ибо величина

$$K = \frac{0,06016}{0,06995} = 0,8600$$

имеет только четыре верных знака*). Пятый знак мы писали только ради однообразия.

Вычисление элементов

$\sum x_1 x_2$	+0,781 64	$(r_1 r_0)^2$	0,014 761	s	0,140 18
σ	+1,021 60	$r_1 r_0$	0,121 51	r_1	0,874 69
x_0	+0,025 95	$\operatorname{tg} 2f$	0,155 46	r_2	0,904 35
y_0	+0,044 99	$2f$	8°,8365	$s + r_1 - r_2$	0,110 52
		f	4,4182	$s - r_1 + r_2$	0,169 84
z_0	+0,128 84	r_0	0,138 91	Числ.	0,018 771
r_0^2	0,019 297			Знам.	0,791 03
					0,023 730
				$2 \sin f$	0,154 045
				$\sin f$	0,077 02
				f	4°,4173

*) Отличие от предыдущего значения на 0,0001 объясняется тем, что при промежуточных операциях сохранялся «запасной» знак.

r_1/r_2	0,967 20	$\cos \frac{1}{2} v_1$	0,984 84
$\sqrt{r_1/r_2}$	0,983 46	$\cos \frac{1}{2} v_2$	0,968 55
$\cos f$	0,997 03	$\cos^2 \frac{1}{2} v_1$	0,969 91
$\cos f - \sqrt{r_1/r_2}$	0,013 57	$\cos^2 \frac{1}{2} v_2$	0,938 09
$\sin f$	0,077 04		
σ_1	+0,176 15	q {	0,848 37 0,848 36
$\frac{1}{2} v_1$	9°,990	\sqrt{q}	0,921 06
v_1	+19,980	$q\sqrt{q}$	0,781 39
v_2	+28,816		
$\frac{1}{2} v_2$	14,408	$2q$	1,696 73
σ_2	+0,256 91	$-B_1 q \sqrt{q}$	-11,4328
B_1	14,6314	$-B_2 q \sqrt{q}$	-16,8671
B_2	21,5860	T {	5,0919 5,0927
$\sin v_1$	0,341 69	$\cos v_1$	0,939 81
$+r_1^{-1} \cos v_1$	+1,074 45	$+r_1^{-1} \sin v_1$	+0,390 64
$-r_0^{-1} \sin v_1$	-2,459 79	$+r_0^{-1} \cos v_1$	+6,765 61
P_x	+0,639 01	Q_x	+0,431 10
P_y	-0,730 11	Q_y	+0,079 17
P_z	-0,242 18	Q_z	+0,898 85
$\sin e$	0,397 97	$\cos e$	0,917 40
$\sin i \sin \omega$	+0,068 39	$\sin \Omega$	-0,800 32
$\sin i \cos \omega$	+0,793 10	$\cos \Omega$	+0,599 61
$\operatorname{tg} \omega$	0,086 23	Ω	306°,842
ω	+4°,9284		
$\cos \omega$	0,996 30	$\cos i$	0,605 25
$\sin \omega$	0,065 90	$\sin i$	0,796 05

Сопоставление полученных результатов

Элементы:

$$T = 1909 \text{ июнь } 5,0923,$$

$$q = 0,848 37,$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 4^\circ,928, \\ \Omega &= 306^\circ,842, \\ i &= 52^\circ,753 \end{aligned} \right\} 1909,0.$$

Формулы для вычисления эфемериды:

$$\left. \begin{aligned} x &= +0,542\ 12(1 - \sigma^2) + 0,731\ 46\ \sigma, \\ y &= -0,619\ 40(1 - \sigma^2) + 0,134\ 33\ \sigma, \\ z &= -0,205\ 46(1 - \sigma^2) + 1,525\ 11\ \sigma \end{aligned} \right\} 1909,0.$$

Чтобы иметь окончательный контроль, следует еще вычислить по этим формулам гелиоцентрические координаты для момента среднего наблюдения.

Примечание I. В рассмотренном нами примере $D = +0,000\ 058$; если принять во внимание обычную точность кометных наблюдений, то в этой величине и первую значащую цифру нельзя считать вполне надежной. Таким образом, вычисление орбиты общим методом, изложенным в предыдущей главе, не может здесь дать сколько-нибудь надежных результатов. Но для вычисления параболической орбиты взятые наблюдения оказались вполне пригодными.

Примечание II. В рассмотренном нами примере коэффициент m уравнения (A) оказался в первом приближении равным $-0,0094$, а во втором равным $+0,0038$. Это показывает, что мы только выиграли бы в точности, если бы в первом приближении положили $m = 0$.

Дело в том, что коэффициент m , имеющий в первом приближении ошибку первого порядка, сам является величиной первого порядка. В этом легко убедиться при помощи выражений (2.3) и (2.4), если заметить, что

$$X_1 = X - \tau_2 X' + \dots; \quad X_2 = X + \tau_1 X' + \dots$$

и аналогично для двух других координат.

§ 6. Другой метод вычисления параболической орбиты

В методе вычисления параболической орбиты, изложенном в предыдущих параграфах, геоцентрические расстояния кометы находились при помощи уравнений (2.2) и (2.7). Первое из них имеет, как мы знаем, совершенно общий характер, а второе выражает условие параболичности орбиты.

Но чтобы выразить это условие, вместо уравнения Эйлера (2.7) можно взять [Субботин, 1959] соотношение

$$9\tau^2 = 2(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f)(r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^2, \quad (6.1)$$

полученное в § 8 гл. V. Оно в такой же мере специфично для параболического движения, как и уравнение Эйлера.

Положив

$$\kappa = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f; \quad R = r_1 + r_2 - \kappa, \quad (6.2)$$

соотношение (6.1) можно представить в форме

$$18\tau^2 = R(2R + 3\kappa)^2. \quad (6.3)$$

Решение уравнения (2.2), т. е. уравнения

$$\rho_2 = M\rho_1 + m \quad (6.4)$$

совместно с уравнением (6.3) относительно ρ_1 и ρ_2 выполняется не менее удобно, чем решение уравнения (2.2) совместно с уравнением Эйлера, приведенным к виду (2.8). Но соотношение (6.3)

имеет то преимущество перед уравнением Эйлера, что не требует вспомогательных таблиц.

Для выражения величин (6.2) через ρ_1 и ρ_2 служат формулы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1, & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1, & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1, & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2, \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ \kappa^2 &= 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Для вычисления r_1, r_2 можно, конечно, пользоваться выражениями (В), указанными в предыдущем параграфе, и аналогичным выражением

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = A \rho_1 \rho_2 + B_1 \rho_1 + B_2 \rho_2 + D$$

для вычисления κ . Однако в обычно встречающихся на практике случаях непосредственное применение формул (6.5) представляется более удобным.

Покажем, как изложенный метод применяется в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе. Во втором приближении мы получили уравнение (6.4) в таком виде:

$$\rho_2 = 1,0477 \rho_1 + 0,0038,$$

причем

$$\tau = 0,093495; \quad 18\tau^2 = 0,15734.$$

Значения ρ_1 и ρ_2 в первых двух пробах берем те же, что и в предыдущем параграфе

ρ_1	1,02	0,9453	0,94584
ρ_2	1,07245	0,99419	0,99476
x_1	+0,71224	+0,65383	+0,65425
y_1	-0,54883	-0,57667	-0,57647
z_1	+0,10668	+0,06936	+0,06963
x_2	+0,74805	+0,69394	+0,69433
y_2	-0,51356	-0,54414	-0,54391
z_2	+0,24721	+0,19965	+0,20000
r_1^2	0,81988	0,76484	0,76521
r_2^2	0,88444	0,81750	0,81793
$\sum x_1 x_2$	0,84102	0,78136	0,78174
r_1	0,90547	0,87455	0,87476
r_2	0,94045	0,90416	0,90439
$r_1 r_2$	0,85155	0,79073	0,79113
κ^2	3,38514	3,14418	3,14574
κ	1,83988	1,77318	1,77362
R	0,00604	0,00553	0,00554
$2R + 3\kappa$	5,53172	5,33060	5,33194
$R(\dots)^2$	0,1848	0,1571	0,1575
f	-0,0275	+0,0002	-0,0002

Через f обозначена разность между левой и правой частями равенства (6.3).

Значение ρ_1 для третьей пробы было найдено путем линейного интерполирования. Впрочем, в настоящем случае значение $\rho_1 = 0,9453$ можно считать окончательным, так как четвертый знак этой величины может быть найден лишь приблизительно. Третья проба хорошо демонстрирует это обстоятельство.

§ 7. Уравнение Ольберса

Исключение ρ из уравнений (2.1) дает два независимых уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= K \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3, \\ \rho_2 &= K' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L'_1 \frac{n_1}{n_2} + L'_2 \frac{1}{n_2} + L'_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Мы употребляли для нахождения геоцентрических расстояний только одно из этих уравнений, но можно воспользоваться любой комбинацией этих двух уравнений.

Исключим из уравнений (7.1) $1/n_2$. Это даст соотношение вида

$$\rho_2 = K'' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L''_1 \frac{n_1}{n_2} + L''_3.$$

Такое соотношение имеет место не только для кометы, но и для всяких трех точек, лежащих в плоскости, проходящей через центр Солнца, и на прямых, представляющих геоцентрические направления на комету. В частности, это соотношение справедливо и для Земли. Поэтому, обозначая через N_1 и N_2 отношения площадей треугольников, заключенных между радиусами-векторами Земли, получим

$$0 = L''_1 \frac{N_1}{N_2} + L''_3,$$

ибо для Земли $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Вычитая это равенство из предыдущего, получим

$$\rho_2 = K'' \frac{n_1}{n_2} \rho_1 + L''_1 \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2} \right).$$

Но легко видеть (§ 2 гл. VIII), что

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{\tau(\tau_2 - \tau_1)}{6r^3} + \dots \right], \quad (7.2)$$

и аналогично

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{\tau(\tau_2 - \tau_1)}{6R^3} + \dots \right].$$

Таким образом, делая ошибку второго порядка относительно промежутков времени между наблюдениями, мы можем положить

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

Это дает уравнение

$$\rho_2 = M\rho_1, \quad \text{где} \quad M = K'' \frac{\tau_1}{\tau_2}. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) введено в употребление Ольберсом (1797) и носит его имя.

В общем случае это уравнение имеет, так же как и каждое из уравнений (7.1), если в них положить

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad \frac{1}{n_2} = \frac{\tau}{\tau_2},$$

ошибку первого порядка, поскольку порядок величин L_1, L'_1, L_2, L'_2 и L''_2 равен -1 . Но в случае равных интервалов времени уравнение (7.3) имеет, как легко видеть, ошибку второго порядка. В самом деле, формула (7.2) показывает, что отбрасываемая в уравнении Ольберса величина первого порядка, равная

$$\frac{\tau_1 \tau (\tau_2 - \tau_1)}{6\tau_2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) L''_1,$$

в случае $\tau_2 = \tau_1$ обращается в нуль.

Условию равенства интервалов времени между наблюдениями почти всегда можно удовлетворить, так как кометы в первые дни после открытия наблюдаются обычно весьма усердно.

Таким образом, уравнение Ольберса уже в первом приближении может дать такую точность, которая является во многих случаях вполне достаточной при вычислении эфемериды, обеспечивающей продолжение наблюдений.

Недостатком уравнения (7.3) является то, что коэффициент K'' вычисляется вообще с несколько бóльшей потерей точности, нежели коэффициенты K и K' уравнений (7.1); иногда потеря точности может быть столь значительной, что K'' становится практически неопределенным. В то же время для коэффициента K мы всегда можем выбрать наиболее подходящую из величин

$$-\frac{\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu}{\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu}; \quad -\frac{\lambda\nu_1 - \lambda_1\nu}{\lambda\nu_2 - \lambda_2\nu}; \quad -\frac{\mu\nu_1 - \mu_1\nu}{\mu\nu_2 - \mu_2\nu}. \quad (7.4)$$

Если бы знаменатели всех этих трех дробей оказались слишком близкими к нулю, то можно было бы воспользоваться уравнением вида

$$\rho_1 = K^{-1}\rho_2 + l.$$

Изложенный в §§ 2 и 3 метод становится неприменимым только в том случае, когда числители и знаменатели всех дробей (7.4) равны нулю. Но, как легко видеть (см. § 11, гл. VIII), в этом случае все три наблюдаемых положения кометы совпадали бы. Такой случай, или хотя бы близкий к нему, не может иметь места в действительности.

§ 8. О решении основной системы уравнений

Вычисление параболической орбиты основано, как мы видели, на решении системы уравнений (2.2), (2.5), (2.6) и (2.7) относительно ρ_1 . Для этого приходится решать тем или иным интерполяционным методом уравнение

$$f(\rho_1) = 0, \quad (8.1)$$

левую часть которого мы легко можем вычислить для любого значения ρ_1 (см. § 4).

Построение графика функции $f(\rho_1)$ в интересующей нас области изменения ρ_1 позволяет судить и о числе корней уравнения (8.1) и о точности, с которой эти корни могут быть найдены. Эта точность будет тем меньше, чем ближе к нулю тот угол, под которым кривая, представляющая функцию $f(\rho_1)$, пересекает ось абсцисс.

В подавляющем большинстве случаев уравнение (8.1) имеет только один положительный корень, но в некоторых, правда, весьма редких, случаях это уравнение имеет три положительных подходящих по величине корня. Сообразно с этим получаются три параболические орбиты, одинаково удовлетворительно представляющие три наблюдения, употребленные для вычисления орбиты. Только представление четвертого наблюдения позволяет в подобных случаях узнать, по какой из полученных (существенно различных) орбит движется комета. Такой случай впервые встретился для кометы 1882 II, а затем — для кометы 1910 I, особенно привлекшей внимание к возможности получения нескольких параболических орбит, одинаково хорошо удовлетворяющих трем наблюдениям кометы.

Для исследования вопроса о числе положительных корней уравнения (8.1) это уравнение заменяют приближенным уравнением, указанным еще Лежандром [1806].

Чтобы получить уравнение Лежандра, в уравнении Эйлера, приведенном к виду (2.8), положим

$$\theta_0 = 1, \quad r_1 + r_2 = 2r.$$

Это даст

$$rs^2 = 2\tau^2, \quad (8.2)$$

где

$$r^2 = (\rho + C)^2 + S^2, \quad (8.3)$$

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z); \quad S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - C^2.$$

Что же касается s^2 , то на основании (2.5) и (2.6) имеем

$$s^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - E\rho_1\rho_2 + 2F_1\rho_1 + 2F_2\rho_2 + H. \quad (8.4)$$

если положить

$$E = 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2);$$

$$F_1 = \lambda_1(X_2 - X_1) + \mu_1(Y_2 - Y_1) + \nu_1(Z_2 - Z_1),$$

$$G = 2(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2);$$

$$F_2 = \lambda_2(X_1 - X_2) + \mu_2(Y_1 - Y_2) + \nu_2(Z_1 - Z_2),$$

$$H = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - G.$$

С тою же точностью, какая была принята в соотношении (8.2), мы можем величину m в уравнении (2.2) взять равной нулю и положить

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\rho.$$

Тогда будем иметь

$$\rho_1 = \frac{2\rho}{1+M}, \quad \rho_2 = \frac{2M\rho}{1+M}$$

и равенство (8.4) можно будет написать так:

$$s^2 = [(\rho + \Gamma)^2 + \Sigma^2] \frac{4(1 - EM + M^2)}{(1+M)^2},$$

где

$$2\Gamma = \frac{(1+M)(F_1 + F_2M)}{1 - EM + M^2}; \quad 4\Sigma^2 = \frac{H(1+M)^2}{1 - EM + M^2} - 4\Gamma^2.$$

Таким образом, уравнение (8.2) окончательно принимает форму

$$r\sigma^2 = c^2, \quad (8.5)$$

где

$$\sigma^2 = (\rho + \Gamma)^2 + \Sigma^2; \quad c^2 = \frac{\tau^2(1+M)^2}{2(1 - EM + M^2)},$$

а r дается равенством (8.3).

Уравнение (8.5) было использовано Лежандром для нахождения ρ . Подробная дискуссия этого уравнения, выполненная Т. Оппольцером [1882] и рядом других авторов, показала, что это уравнение имеет один либо три положительных корня. Критерии для различения этих случаев слишком сложны и применять их при вычислении орбит было бы нецелесообразно. Но они подтверждают, что случай трех положительных корней является исключительно редким и что этот случай к тому же всегда

связан с малой точностью получаемых результатов. А это уже само по себе делает необходимым привлечение дальнейших наблюдений.

Т. Банахевич [1928] указал следующий графический прием для нахождения положительных корней уравнения (8.5). Взяв прямоугольную систему координат, построим точки $A(-C, S)$ и $B(-\Gamma, \Sigma)$. Решение уравнения (8.5) приводится к нахождению на оси абсцисс такой точки $P(\rho, 0)$, для которой расстояния $AP=r$ и $BP=\sigma$ удовлетворяют соотношению (8.5). При помощи проб легко получить все положения точки P , удовлетворяющие этому условию.

Зная достаточно приближенное значение корня уравнения (8.5), легко получить со всею нужной точностью соответствующий корень уравнения (8.1).

§ 9. Формулы Банахевича для вычисления элементов орбиты

Для вычисления элементов орбиты по положениям кометы $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соответствующим двум моментам, t_1 и t_2 , вместо формул, указанных в § 4, можно употребить ниже следующие формулы, предложенные Т. Банахевичем [1932].

Прежде всего вычисляем радиусы-векторы и хорду $P_1P_2=s$:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Затем находим вспомогательные углы:

$$\sin \beta = \frac{r_2 - r_1}{s}; \quad \sin \gamma = \frac{s}{r_1 + r_2}. \quad (9.1)$$

Обозначая через σ_1 и σ_2 значения параболического параметра, соответствующие моментам t_1 и t_2 , получим

$$r_1 = q(1 + \sigma_1^2); \quad r_2 = q(1 + \sigma_2^2).$$

Так как орбитальные координаты точек P_1 и P_2 равны

$$\xi_1 = q(1 - \sigma_1^2); \quad \eta_1 = 2q\sigma_1; \quad \xi_2 = q(1 - \sigma_2^2); \quad \eta_2 = 2q\sigma_2, \quad (9.2)$$

то

$$s^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = q^2(\sigma_2 - \sigma_1)^2 [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4].$$

Следовательно,

$$\sin \beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4}}, \\ \sin \gamma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4}}{2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \cos \gamma = \frac{2 + 2\sigma_1\sigma_2}{2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) &= \operatorname{tg} \beta, \\ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) &= \sec \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Итак, формулы (9.1) и (9.3) дают σ_1 и σ_2 . Затем находим перигельное расстояние:

$$q = r_1/(1 + \sigma_1^2) = r_2/(1 + \sigma_2^2) \quad (9.4)$$

и время прохождения через перигелий:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_1^3 \right); & B_2 &= \frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma_2 + \frac{1}{3} \sigma_2^3 \right), \\ T &= t_1 - q^{3/2} B_1 = t_2 - q^{3/2} B_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Для вычисления B_1 и B_2 служит таблица V.

Обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из фокуса S на прямую P_1P_2 , и рассмотрим три вектора:

$$SP_1 = r_1, \quad SP_2 = r_2, \quad SH = H.$$

Очевидно,

$$H = m_1 r_1 + m_2 r_2. \quad (9.6)$$

Чтобы найти величины m_1 и m_2 , связанные соотношением

$$m_1 + m_2 = 1,$$

умножим равенство (9.6) скалярно на вектор

$$s = r_2 - r_1.$$

Замечая, что

$$s \cdot H = 0, \quad r_1 \cdot r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - s^2),$$

получим

$$m_1 = \frac{1}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2s^2}; \quad m_2 = \frac{1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2s^2}.$$

Если еще учесть (9.1), равенство (9.6) принимает вид

$$2H = r_1 + r_2 - (r_2 - r_1) \sin \beta \operatorname{cosec} \gamma. \quad (9.7)$$

Обозначим через H_ξ , H_η проекции высоты SH на орбитальные координатные оси. Пользуясь выражениями (9.2) для проекций векторов r_1 и r_2 на эти оси, легко убедиться, что

$$\left. \begin{aligned} 2H_\xi &= (r_1 + r_2) \cos \gamma \cos^2 \beta, \\ 2H_\eta &= (r_1 + r_2) \cos \gamma \cos \beta \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

откуда

$$2H = (r_1 + r_2) \cos \gamma \cos \beta. \quad (9.9)$$

Для вектора s , перпендикулярного к H , очевидно, имеем

$$s_{\xi} = -s \sin \beta; \quad s_{\eta} = +s \cos \beta. \quad (9.10)$$

Переходя теперь, пользуясь векторными элементами P и Q , к компонентам H и s по экваториальным осям координат, получим

$$\begin{aligned} H_x &= H_{\xi} P_x + H_{\eta} Q_x; \dots, \\ s_x &= s_{\xi} P_x + s_{\eta} Q_x; \dots \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (9.8), (9.9) и (9.10), будем иметь

$$P_x = \frac{H_x}{H} \cos \beta - \frac{s_x}{s} \sin \beta; \quad Q_x = \frac{H_x}{H} \sin \beta + \frac{s_x}{s} \cos \beta,$$

.....

Так как

$$2H_x = x_1 + x_2 - (x_2 - x_1) \sin \beta \operatorname{cosec} \gamma; \quad s_x = x_2 - x_1; \dots,$$

то окончательные формулы, служащие для вычисления векторных элементов, можно представить следующим образом:

$$A = [(r_1 + r_2) \cos \gamma]^{-1}; \quad B = A \operatorname{tg} \beta;$$

$$C = s^{-1} (\sec \gamma \sin \beta + \sin \beta),$$

$$D = s^{-1} (\sec \gamma \sin \beta - \cos \beta),$$

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 + y_2 & y_1 - y_2 \\ z_1 + z_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

В заключение укажем еще формулу

$$\sqrt{2q} = \sqrt{r_1 + r_2} \cos \beta \cos \frac{1}{2} \gamma,$$

которая может иногда оказаться полезной.

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ

§ 1. Вычисление орбиты по четырем наблюдениям

Мы уже видели (§ 11 гл. VIII), что в том случае, когда вновь открытое светило движется в плоскости, образующей небольшой угол с плоскостью эклиптики, орбиту приходится вычислять по четырем наблюдениям. Чтобы узнать, имеет ли место этот случай, достаточно сопоставить склонения светила со склонениями Солнца для тех же прямых восхождений. Вычисление орбиты по четырем наблюдениям следует рекомендовать и в тех случаях, когда нельзя воспользоваться тремя наблюдениями, разделенными приблизительно равными промежутками времени. Употребление четырех наблюдений вместо трех существенно увеличивает во всех таких случаях точность получаемой орбиты, между тем как вычислительная работа увеличивается лишь немного*).

Обозначим через t_1, t, t', t_2 (где $t_1 < t < t' < t_2$) моменты четырех выбранных наблюдений и такими же индексами будем отмечать соответствующие этим моментам величины.

Связь между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами светила дается равенствами (сохраняем обозначения двух предыдущих глав)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1; & x &= \lambda \rho - X; & x' &= \lambda' \rho' - X'; & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Условие нахождения трех точек (x_1, y_1, z_1) , (x, y, z) , (x_2, y_2, z_2) в плоскости, проходящей через начало координат,

* Из работ, в которых излагается определение орбит по четырем наблюдениям, укажем трактат Баушингера [1928], а также статью Фогеля [1895]. (Прим. ред.)

выражается равенствами (§ 2 гл. VIII)

$$n_1 x_1 - x + n_2 x_2 = 0,$$

$$n_1 y_1 - y + n_2 y_2 = 0,$$

$$n_1 z_1 - z + n_2 z_2 = 0.$$

Подставив сюда выражения (1.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 n_1 \lambda_1 - \rho \lambda + \rho_2 n_2 \lambda_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ \rho_1 n_1 \mu_1 - \rho \mu + \rho_2 n_2 \mu_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ \rho_1 n_1 \nu_1 - \rho \nu + \rho_2 n_2 \nu_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Исключение из этих уравнений ρ дает следующие зависимости между ρ_1 и ρ_2 :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu) n_2 \rho_2 &= -(\lambda \mu_1 - \lambda_1 \mu) n_1 \rho_1 - (\lambda Y - \mu X) + \\ &\quad + (\lambda Y_1 - \mu X_1) n_1 + (\lambda Y_2 - \mu X_2) n_2; \\ (\lambda \nu_2 - \lambda_2 \nu) n_2 \rho_2 &= -(\lambda \nu_1 - \lambda_1 \nu) n_1 \rho_1 - (\lambda Z - \nu X) + \\ &\quad + (\lambda Z_1 - \nu X_1) n_1 + (\lambda Z_2 - \nu X_2) n_2; \\ (\mu \nu_2 - \mu_2 \nu) n_2 \rho_2 &= -(\mu \nu_1 - \mu_1 \nu) n_1 \rho_1 - (\mu Z - \nu Y) + \\ &\quad + (\mu Z_1 - \nu Y_1) n_1 + (\mu Z_2 - \nu Y_2) n_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Из уравнений (1.3) выбираем то, в котором абсолютная величина левой части наибольшая, и представляем его в форме

$$\rho_2 = M \rho_1 + m, \quad (1.4)$$

где

$$M = K \frac{n_1}{n_2}; \quad m = L_1 \frac{n_1}{n_2} + L_2 \frac{1}{n_2} + L_3. \quad (1.5)$$

Заметим, что вместо вычисления K, L_1, L_2, L_3 при помощи выражений, даваемых равенствами (1.3), часто предпочитают выполнять исключение ρ из (1.2) численно.

Точно так же условие нахождения в одной плоскости начала координат и положений светила в моменты t_1, t', t_2 приводит к уравнениям, получающимся из (1.3) заменой $(\lambda, \mu, \nu), (X, Y, Z)$ на $(\lambda', \mu', \nu'), (X', Y', Z')$. Из этих уравнений выбираем опять то, в котором абсолютная величина левой части самая большая, и представляем его в форме

$$\rho_2 = M' \rho_1 + m', \quad (1.6)$$

где

$$M' = K' \frac{n'_1}{n'_2}; \quad m' = L'_1 \frac{n'_1}{n'_2} + L'_2 \frac{1}{n'_2} + L'_3. \quad (1.7)$$

Чтобы воспользоваться уравнениями (1.4) и (1.6) для нахождения ρ_1 и ρ_2 , нужно взять достаточно приближенные значения

для n_1, n_2, n'_1, n'_2 . Очевидно, здесь наиболее удобными являются формулы Оппольцера, выражающие отношения площадей треугольников через радиусы-векторы r_1 и r_2 двух крайних положений светила. Эти формулы дают (§ 3 гл. IX)

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\tau_1}{\tau_2} - \xi \left[\tau \tau_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 \right) - \tau_1^2 \eta \right], \\ \frac{1}{n_2} &= \frac{\tau}{\tau_2} - \xi \left[\tau \tau_1 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2} \right) - \tau_1 \tau_2 \eta \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= k(t_2 - t); \quad \tau_2 = k(t - t_1); \quad \tau = k(t_2 - t_1), \\ k &= 0,017\,202\,099, \quad \lg k = 8,235\,5814_{-10}, \\ \xi &= \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Выражения для n'_1/n'_2 и $1/n'_2$ получаются из (1.8) путем замены τ_1 и τ_2 через

$$\tau'_1 = k(t_2 - t'); \quad \tau'_2 = k(t' - t_1).$$

Подстановка выражений (1.8) и им аналогичных в равенства (1.5) и (1.7) дает

$$\left. \begin{aligned} M &= G + G_1 \xi + G_2 \xi \eta; & m &= H + H_1 \xi + H_2 \xi \eta, \\ M' &= G' + G'_1 \xi + G'_2 \xi \eta; & m' &= H' + H'_1 \xi + H'_2 \xi \eta. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Эти равенства показывают, что уравнения (1.4), (1.6) содержат, в пределах принятой нами точности, еще не известные ξ и η . Но соотношения (1.1) дают

$$r_1^2 = (\rho_1 + C_1)^2 + S_1^2; \quad r_2^2 = (\rho_2 + C_2)^2 + S_2^2, \quad (1.11)$$

где положено

$$\begin{aligned} C_1 &= -(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1); & C_2 &= -(\lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 + \nu_2 Z_2), \\ R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2; & R_2^2 &= X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2, \\ S_1^2 &= R_1^2 - C_1^2; & S_2^2 &= R_2^2 - C_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, присоединив к уравнениям (1.4), (1.6) еще равенства (1.9) и (1.11), мы получим систему шести уравнений с шестью неизвестными $\rho_1, \rho_2, \xi, \eta, r_1, r_2$.

Решение этой системы последовательными приближениями выполняется очень просто.

Для малой планеты в первом приближении можно взять $r_1 = r_2 = 2,7$, что дает

$$\xi = 0,008, \quad \eta = 0.$$

Вычислив с этими значениями коэффициенты (1.10) уравнений (1.4) и (1.6), имеем

$$\rho_1 = \frac{m' - m}{M - M'}; \quad \rho_2 = M\rho_1 + m = M'\rho_1 + m'.$$

Формулы (1.11) дадут новые значения r_1, r_2 , что позволит получить более точные значения величин (1.9), а следовательно, и более точные значения ρ_1 и ρ_2 . Этот процесс очень быстро сходится.

Для кометы исходные значения ξ, η можно найти при помощи той параболической орбиты, которая в таких случаях обычно имеется.

После нахождения ρ_1 и ρ_2 с двумя-тремя верными десятичными знаками следует исправить моменты наблюдений за абerrационное время и только после этого переходить к окончательному приближению.

Абerrационное время для двух крайних наблюдений равно

$$L\rho_1, L\rho_2 \quad (L=0^d,005\ 7756).$$

Для двух промежуточных моментов его можно найти с достаточной точностью при помощи интерполирования:

$$L\rho = L\rho_1 + \frac{\tau_2}{\tau} (L\rho_2 - L\rho_1); \quad L\rho' = L\rho_1 + \frac{\tau_2'}{\tau} (L\rho_2 - L\rho_1).$$

Исправленные моменты наблюдений даются формулами

$$t_1^* = t_1 - L\rho_1; \quad t^* = t - L\rho; \quad t'^* = t' - L\rho'; \quad t_2^* = t_2 - L\rho_2.$$

Получив окончательные значения ρ_1 и ρ_2 , вычисляем гелиоцентрические координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1; & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1; & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1; & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2, \end{aligned}$$

и переходим к нахождению элементов орбиты (§ 9, гл. V).

Для контроля всей проделанной работы следует при помощи вычисленной орбиты представить два средних наблюдения. Эти наблюдения не участвуют непосредственно в вычислении элементов, а употребляются только для нахождения ρ_1 и ρ_2 . Поэтому представление их дает гораздо более глубокий контроль, нежели представление крайних наблюдений. Но здесь надо учитывать, что каждое из этих наблюдений было использовано для получения орбиты лишь частично, поскольку нами было взято только одно из уравнений (1.3) или им аналогичных для второго среднего момента. Поэтому, если вычисленные для среднего момента значения α и δ отличаются от наблюдаемых значений больше,

чем это вызывается неизбежными округлениями, надо с вычисленными значениями α и δ найти коэффициенты K, L_1, \dots , или K', L'_1, \dots , взятого для вычислений уравнения (1.4) или (1.6). Если вычисления сделаны правильно, то новые значения этих коэффициентов должны совпадать с прежними, полученными при помощи наблюдаемых значений α и δ .

Если вычисленные значения α и δ хорошо воспроизводят исходные значения коэффициентов $K, L_1, \dots, K', L'_1, \dots$, но существенно отличаются от наблюдаемых значений, то это может быть либо следствием ошибок наблюдений, либо следствием недостаточной точности формул Оппольцера, употребленных для вычисления отношений площадей треугольников. Конечно, в подобном случае можно было бы выполнить еще одно приближение, взяв для n_1, n_2, n'_1, n'_2 значения, даваемые формулами Гаусса (§ 6 гл. VIII). Но это потребовало бы слишком длинных вычислений. Проще попробовать улучшить полученную орбиту способом вариации геоцентрических расстояний (§ 2 гл. X), что выгодно еще и в том отношении, что позволяет легко использовать дополнительные наблюдения.

§ 2. Пример вычисления орбиты по четырем наблюдениям

Возьмем следующие наблюдения планеты 1931 TU, полученные на Симеизской обсерватории:

	1931	Всем. вр.	α (1931,0)	δ (1931,0)
Октябрь	10	1 ^h 04 ^m .5	2 ^h 08 ^m 49 ^s .07	+2° 21' 05".3
»	14	23 24,2	2 05 25,60	+1 55 16,4
Ноябрь	6	20 06,0	1 48 33,30	+0 21 05,2
»	12	20 23,5	1 44 41,62	+0 08 01,3

Сопоставление склонений планеты со склонениями Солнца, взятыми для тех же прямых восхождений, показывает, что планета движется в плоскости, образующей достаточно большой угол с плоскостью эклиптики. Но вследствие неудачного распределения наблюдений ожидать хороших результатов от орбиты, вычисленной по трем из этих наблюдений, не приходится. Целесообразнее вычислить орбиту по всем четырем наблюдениям.

Направляющие косинусы и координаты Солнца (топоцентрические) таковы:

	t_1	t	t'	t_2
λ	+0,845 440	+0,853 465	+0,889 888	+0,897 460
μ	+0,532 494	+0,520 072	+0,456 138	+0,441 089
ν	+0,041 029	+0,033 525	+0,006 134	+0,002 333
X	-0,961 058	-0,933 173	-0,719 582	-0,642 907
Y	-0,248 893	-0,322 551	-0,625 216	-0,690 256
Z	-0,107 973	-0,139 926	-0,271 206	-0,299 417

Из числа уравнений (1.3) в данном случае для обоих средних наблюдений оказывается наиболее выгодным первое. Получаем следующие основные уравнения*):

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= 0,163\ 64 \frac{n_1}{n_2} \rho_1 - 3,183\ 05 \frac{n_1}{n_2} + 2,326\ 18 \frac{1}{n_2} + 2,821\ 48, \\ \rho_2 &= 5,237\ 03 \frac{n_1'}{n_2'} \rho_1 - 12,874\ 75 \frac{n_1'}{n_2'} - 13,542\ 92 \frac{1}{n_2'} + 19,054\ 73. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= (\rho_1 + 0,949\ 481)^2 + 0,095\ 724, \\ r_2^2 &= (\rho_2 + 0,882\ 146)^2 + 0,201\ 251. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Переходим к вычислению приближенных значений ρ_1 , ρ_2 . Принимая $\xi = 0,008$, $\eta = 0$, при помощи формул (1.8), (1.5) и (1.7) находим

$$\begin{aligned} M &= +0,9565, & m &= +0,1229, \\ M' &= +1,1349, & m' &= -0,1933, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho_1 = 1,772, \quad \rho_2 = 1,818.$$

Соответствующие значения

$$r_1 = 2,739, \quad r_2 = 2,737$$

дают

$$\xi = 0,00812, \quad \eta = -0,0011.$$

Так как эти значения весьма близки к исходным, то нет надобности перевычислять ρ_1 , ρ_2 . Находим абберрационное время и исправленные моменты:

$$\begin{aligned} L\rho_1 &= 0,010\ 22, & t_1^* &= 10,034\ 57, & t_2^* - t_1^* &= 28,874\ 28, \\ L\rho &= 0,010\ 26, & t^* &= 14,964\ 88, & t^* - t_1^* &= 4,930\ 31, \\ L\rho' &= 0,010\ 44, & t'^* &= 37,827\ 06, & t_2^* - t'^* &= 6,012\ 10, \\ L\rho_2 &= 0,010\ 49, & t_2^* &= 43,839\ 16, & t'^* - t_1^* &= 27,792\ 49, \\ & & & & \underline{t_2^* - t_1^*} &= 33,804\ 59. \end{aligned}$$

С этими значениями исправленных за абберацию промежутков времени вычисляем практически окончательные значения коэффициентов в формулах (1.8) и аналогичных

*) В некоторых случаях ради однообразия удерживаются заведомо нереальные цифры.

формулах для второго среднего наблюдения:

τ_1	0,496 6983,	τ'_1	0,103 4207,
τ_2	0,084 8117,	τ'_2	0,478 0892,
τ	0,581 5100,	τ'	0,581 5099,
τ_1/τ_2	5,856 483,	τ'_1/τ'_2	0,216 3209,
τ/τ_2	6,856 482,	τ'/τ'_2	1,216 3209,
$\tau_1\tau$	0,288 8350,	$\tau'_1\tau'$	0,060 1402.

Таким образом, находим

$$\begin{aligned} n_1/n_2 &= 5,856 483 - \xi (1,402 722 - 0,246 71\eta), \\ 1/n_2 &= 6,856 482 - \xi (2,269 227 - 0,042 13\eta), \\ n'_1/n'_2 &= 0,216 3209 + \xi (0,047 131 + 0,010 70\eta), \\ 1/n'_2 &= 1,216 3209 - \xi (0,133 290 - 0,049 44\eta). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (2.1) дает

$$\rho_2 = M\rho_1 + m; \quad \rho_2 = M'\rho_1 + m', \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} M &= +0,958 35 - \xi (0,2295 - 0,040\eta), \\ m &= +0,129 41 - \xi (0,8137 + 0,687\eta), \\ M' &= +1,132 88 + \xi (0,2468 + 0,056\eta), \\ m' &= -0,20288 + \xi (1,1983 - 0,807\eta). \end{aligned}$$

Теперь переходим к решению уравнений (2.2), (2.3) и

$$\xi = \frac{4}{3}(r_1 + r_2)^{-3}; \quad \eta = 3(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^{-1}$$

относительно ρ_1 , ρ_2 , r_1 , r_2 , ξ , η . Решение этой системы легко выполняется при помощи итерации относительно неизвестных ξ и η . Начинаем с тех значений, которые были получены в первом приближении:

ξ	0,008 12	0,008 127	0,008 130
η	-0,0011	-0,001 147	-0,001 152
M	0,956 49	0,956 484	0,956 484
M'	1,134 88	1,134 885	1,134 886
$M - M'$	-0,178 39	-0,178 401	-0,178 402
m	0,122 81	0,122 803	0,122 801
m'	-0,193 15	-0,193 134	-0,193 130
$m' - m$	-0,315 96	-0,315 937	-0,315 931
ρ_1	1,771 18	1,770 937	1,770 894
ρ_2	1,816 93	1,816 676	1,816 633
r_1^2	7,497 720	7,496 398	
r_2^2	7,486 262	7,484 891	
r_1	2,738 196	2,737 955	
r_2	2,736 103	2,735 853	
$r_2 - r_1$	-0,002 093	-0,002 102	
$r_1 + r_2$	5,474 299	5,473 808	
$(r_1 + r_2)^{-1}$	0,182 672	0,182 688	
$(r_1 + r_2)^{-3}$	0,006 0956	0,006 0972	

Заметим, что можно было бы удовольствоваться значениями ρ_1 и ρ_2 , полученными во втором столбце. К полной точности в решении рассматриваемой системы можно не стремиться, поскольку лежащие в основе формулы (1.8) являются лишь приближенными.

Получив значения ρ_1 и ρ_2 , которые можно считать окончательными, вычисляем соответствующие им гелиоцентрические координаты и переходим к вычислению элементов орбиты, для чего служат способы, подробно изученные в гл. V.

§ 3. Вычисление круговой орбиты

Для вычисления орбиты малой планеты надо иметь по крайней мере три наблюдения, притом еще достаточно благоприятно расположенных. Однако и в том случае, когда имеются вообще только два наблюдения, или когда нельзя подобрать три наблюдения, подходящие для нахождения эллиптической орбиты, все же бывает возможно получить некоторые ценные сведения о движении планеты.

В такого рода случаях обычно вычисляют круговую орбиту. Хотя строго по круговой орбите не движется ни одна планета, тем не менее в подавляющем большинстве встречающихся на практике случаев круговая орбита представляет движение планеты в течение 1—2 месяцев с точностью, вполне достаточной для получения дальнейших наблюдений. Это объясняется как тем, что эксцентриситеты орбит малых планет чаще всего не велики (средняя величина эксцентриситета равна 0,15), так и тем, что малые планеты вследствие их слабости открываются преимущественно вблизи перигелия, т. е. в такой части орбиты, которая особенно хорошо может быть заменена дугой окружности.

Круговую орбиту вычисляют не только для получения эфемериды, обеспечивающей возможность получения дальнейших наблюдений. Если для вновь открытой планеты за всю оппозицию удалось получить только два наблюдения, то вычисление круговой орбиты, дающей обычно достаточно надежные значения элементов Ω и i , нередко позволяет отождествить эту планету с одной из открытых ранее и затем потерянных планет.

Круговая орбита определяется четырьмя элементами: помимо Ω , i и a (радиус орбиты), нужно еще иметь аргумент широты u_0 для некоторого определенного момента t_0 .

Пусть даны два наблюдения планеты: t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2 . Введя, как всегда, вместо прямых восхождений и склонений направляющие косинусы

$$\lambda_i = \cos \delta_i \cos \alpha_i; \quad \mu_i = \cos \delta_i \sin \alpha_i; \quad \nu_i = \sin \delta_i \quad (i = 1, 2)$$

будем иметь для гелиоцентрических координат планеты выражения:

$$x_i = \lambda_i \rho_i - X_i; \quad y_i = \mu_i \rho_i - Y_i; \quad z_i = \nu_i \rho_i - Z_i, \quad (3.1)$$

где через X_i, Y_i, Z_i обозначены прямоугольные экваториальные координаты Солнца в момент t_i .

Так как согласно нашему предположению планета движется по окружности радиуса a , то

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = a^2,$$

или, на основании (3.1),

$$\rho_i^2 + 2C_i \rho_i + R_i^2 = a^2,$$

где

$$C_i = -(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i); \quad R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2. \quad (3.2)$$

Таким образом, полагая

$$S_i^2 = R_i^2 - C_i^2, \quad (3.3)$$

будем иметь

$$\rho_i = \sqrt{a^2 - S_i^2} - C_i \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$

Положение планеты в орбите будем определять углом ν , отсчитываемым от некоторой точки орбиты, которая будет фиксирована в дальнейшем. Обозначим значения этого угла в моменты наблюдений через ν_1 и ν_2 . Дуга $\nu_2 - \nu_1 = 2f$ между радиусами-векторами планеты дается формулой

$$a^2 \cos 2f = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Поскольку дуга $2f$ обычно очень мала, эту формулу следует заменить такой:

$$\sin^2 f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \quad (3.5)$$

или же такой:

$$4a^2 \sin^2 f = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (3.6)$$

Итак, взяв любое значение a , мы можем вычислить при помощи формул (3.2), (3.3) и (3.4) соответствующие значения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 , после чего формулы (3.1) и (3.5) дадут угол f . Это значение f , полученное чисто геометрическим путем, мы назовем геометрическим и обозначим через f_g .

С другой стороны, формулы эллиптического движения показывают, что движение по кругу происходит равномерно с угловой скоростью, равной $ka^{-3/2}$. Таким образом, должно иметь место равенство

$$\nu_2 - \nu_1 = ka^{-3/2} (t_2 - t_1).$$

Это дает для угла f значение

$$f_d = \frac{1}{2} ka^{-3/2} (t_2 - t_1); \quad \frac{1}{2} k = 0^\circ, 492\ 80, \quad (3.7)$$

которое мы назовем динамическим.

Круговая орбита, удовлетворяющая взятым наблюдениям, получится при том значении a , которое удовлетворяет уравнению

$$f(a^2) = 0, \quad (3.8)$$

где $f(a^2) = f_g - f_d$.

Решение уравнения (3.8), левая часть которого легко вычисляется для любого значения a^2 , выполняется проще всего повторным линейным интерполированием. Вычисление выражения (3.7) облегчается применением таблицы XII.

После нахождения радиуса орбиты a вычисляем среднее суточное движение по формулам

$$n = 2f/(t_2 - t_1); \quad n = ka^{-3/2} \quad (k = 3548'', 2)$$

(причем согласие этих значений служит хорошим контролем), и переходим к вычислению элементов, определяющих положение орбиты в пространстве. Так как у круговой орбиты нет перигелия, то за P и Q примем векторы, направленные в те точки орбиты, в которых $v=0$ и $v=90^\circ$. Это дает ($A_x = aP_x$; $B_x = aQ_x$, ...)

$$x_1 = A_x \cos v_1 + B_x \sin v_1; \quad x_2 = A_x \cos v_2 + B_x \sin v_2$$

и аналогичные равенства для двух других координат. Таким образом,

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) = A_x \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f + B_x \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \cos f,$$

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -A_x \sin \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f + B_x \cos \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \sin f.$$

Условимся выбрать начало счета углов v так, чтобы было

$$\frac{1}{2}(v_2 + v_1) = 0,$$

т. е., иначе говоря, будем считать этот угол от радиуса вектора планеты, соответствующего моменту $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Тогда для вычисления векторных элементов будем иметь следующие простые формулы:

$$\left. \begin{aligned} 2A_x &= (x_2 + x_1) \sec f; & 2B_x &= (x_2 - x_1) \operatorname{cosec} f, \\ 2A_y &= (y_2 + y_1) \sec f; & 2B_y &= (y_2 - y_1) \operatorname{cosec} f, \\ 2A_z &= (z_2 + z_1) \sec f; & 2B_z &= (z_2 - z_1) \operatorname{cosec} f. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Для контроля пользуемся, как всегда, соотношениями

$$\begin{aligned} A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= 0; \\ A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 &= a^2; \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = a^2. \end{aligned}$$

Представление наблюдений

Для того чтобы вычислить α и δ , соответствующие моменту t , служат формулы

$$\begin{aligned} v &= n(t - t_0), \\ \rho \cos \delta \cos \alpha &= A_x \cos v + B_x \sin v + X, \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= A_y \cos v + B_y \sin v + Y, \\ \rho \sin \delta &= A_z \cos v + B_z \sin v + Z. \end{aligned}$$

Вычисление эклиптических элементов

С точки зрения возможного отождествления вновь открытой планеты с уже известными представляет интерес вычисление элементов i , Ω , определяющих положение плоскости орбиты относительно эклиптики. Для этого служат формулы (1.10), (1.11) из § 1 гл. V, которые можно здесь написать так:

$$\left. \begin{aligned} a \sin i \sin \omega &= A_x \cos \varepsilon - A_y \sin \varepsilon, \\ a \sin i \cos \omega &= B_x \cos \varepsilon - B_y \sin \varepsilon, \\ a \sin \Omega &= (A_y \cos \omega - B_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ a \cos \Omega &= A_x \cos \omega - B_x \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Здесь ω — расстояние от узла до той точки орбиты, от которой отсчитываются углы v . Таким образом, ω есть не что иное, как аргумент широты u_0 в момент t_0 .

Примечание I. При вычислении круговой орбиты поправками за параллакс и за аберрацию обычно пренебрегают. Учет аберрации не требует, впрочем, сколько-нибудь заметного увеличения работы.

Примечание II. Практика вычисления круговых орбит показала, что уравнению (3.8) не всегда можно удовлетворить положительным значением a^2 . Таким образом, два наблюдения малой планеты в некоторых случаях не могут быть представлены круговой орбитой.

Чтобы получить критерий, позволяющий непосредственно по наблюдениям судить о возможности круговой орбиты, Тиссеран [1895] заменил трансцендентное уравнение (3.8) приближенным алгебраическим уравнением. Для этого он предположил, что интервал между наблюдениями бесконечно мал, и что орбита Земли круговая. Полученный им критерий, будучи приближенным, не решает до конца вопрос о возможности круговой орбиты. С другой стороны, этот критерий мало удобен, так как требует перехода от экваториальных координат планеты к эклиптическим. По этим причинам он не представляет практического интереса. Подробно этот вопрос был рассмотрен М. А. Вильевым [1919].

§ 4. Пример вычисления круговой орбиты

Для открытой в Симензской обсерватории планеты 1931 TP были получены следующие наблюдения:

1931	Всем. вр.	α (1931,0)	δ (1931,0)
Октябрь 11	23 ^h 32 ^m ,6	27° 01' 01"	+10° 13' 46"
Ноябрь 10	19 08,3	20 15 00	+ 7 31 56

Подготовительные вычисления ведем в два столбца, соответственно каждому моменту наблюдения:

	t_1	t_2	
Октябрь	11,9810	41,7974	$t_2 - t_1 = 29^d,8164$
α	27°,034	20°,250	$\frac{1}{2} k (t_2 - t_1) =$
δ	+10°,229	+7°,532	$= 14°,6935$
$\cos \alpha$	+0,890 74	+0,938 19	
$\sin \alpha$	+0,454 52	+0,346 12	
$\cos \delta$	+0,984 11	+0,991 37	
λ	+0,876 59	+0,930 09	
μ	+0,447 30	+0,343 13	
ν	+0,177 58	+0,131 08	
$\sum \lambda^2$	1,000 02	0,999 99	
X	-0,950 91	-0,669 90	
Y	-0,278 04	-0,668 86	
Z	-0,120 60	-0,290 12	
R^2	0,996 08	0,980 31	
C	+0,979 34	+0,890 60	
S^2	0,036 97	0,187 14	

После этого переходим к решению уравнения (3.8) относительно a^2 . Вычисления располагаем следующим образом:

a^2	6,0	7,0	5,085	5,182 04
$a^2 - S_1^2$	5,963 03	6,963 03	5,048 03	5,145 07
$\sqrt{\quad}$	2,441 93	2,638 76	2,246 78	2,268 27
$i^2 - S_2^2$	5,812 86	6,812 86	4,897 86	4,994 90
$\sqrt{\quad}$	2,410 99	2,610 15	2,213 11	2,234 93
ρ_1	1,462 59	1,659 42	1,267 44	1,288 93
ρ_2	1,520 39	1,719 55	1,322 51	1,344 33
x_1	+2,233 00	+2,405 54	+2,061 94	+2,080 77
y_1	+0,932 26	+1,020 30	+0,844 97	+0,854 58
z_1	+0,380 33	+0,415 28	+0,345 67	+0,349 49
x_2	+2,084 00	+2,269 24	+1,899 95	+1,920 25
y_2	+1,190 55	+1,258 89	+1,122 65	+1,130 14
z_2	+0,489 41	+0,515 52	+0,463 47	+0,466 33

$\sum x_1 x_2$	+5,949 61	+6,957 28	5,026 40	5,124 37
	0,495 801	0,496 948	0,494 238	0,494 436
$\sin^2 f_g$	0,004 199	0,003 052	0,005 762	0,005 564
$\sin f_g^2$	0,064 800	0,055 245	0,075 908	0,074 592
f_g	3°,715	3°,167	4°,353	4°,278
a^{-2}	0,260 85	0,232 37	0,295 31	0,291 155
f_d	3°,833	3°,414	4°,339	4°,278
$f(a^2)$	-0°,118	-0°,247	+0°,014	0,000

После того как вычислены первые два столбца для взятых наудачу значений a^2 , следующее значение $a^2 = 6,0 + x$ находим при помощи пропорции

$$\frac{x}{1,0} = \frac{-0,118}{-0,247 + 0,118},$$

дающей $a^2 = 5,085$. После третьей пробы, вычисленной с этим значением, полагаем $a^2 = 5,085 + x$ и находим x из пропорции

$$\frac{x}{0,915} = \frac{0,014}{0,132}.$$

Это дает $a^2 = 5,18204$. Четвертый столбец показывает, что это значение a^2 является окончательным, следовательно, $a = 2,27641$, а потому

$$n = k'' a^{-3/2} = 1033'',08,$$

что находится в полном согласии с величиной

$$n = \frac{2f}{t_2 - t_1} = 0°,28696 = 1033'',06.$$

Вычисление остальных элементов располагаем следующим образом:

$\frac{1}{2} \sec f$	0,501 40	$\frac{1}{2} \operatorname{cosec} f$	6,7028
$x_2 + x_1$	+4,0010	$x_2 - x_1$	-0,160 52
$y_2 + y_1$	+1,9847	$y_2 - y_1$	+0,275 56
$z_2 + z_1$	+0,8158	$z_2 - z_1$	+0,116 84
A_x	+2,0061	B_x	-1,0759
A_y	+0,9951	B_y	+1,8470
A_z	+0,4090	B_z	+0,7832

Контроль:

$$\sum A_x B_x = -0,0001; \quad \sum A_x^2 = 5,1819; \quad \sum B_x^2 = 5,1824.$$

Переходим к представлению исходных наблюдений, что дает полный контроль всей проделанной работы (остаются непроконтролируемыми лишь координаты Солнца). Для вычисления

угла v служит формула

$$v = 0^{\circ},28696(t - t_0), \quad t_0 = 26^d,8892$$

t	11 ^d ,9810	41 ^d ,7974
$t - t_0$	-14,9 ^m 82	+14,9082
v	-4 ^m ,278	+4 ^m ,278
$\cos v$	+0,9721	+
$\sin v$	-0,07460	+
$\rho \cos \delta \cos \alpha$	+1,1299	+1,2503
$\rho \cos \delta \sin \alpha$	+0,5765	+0,4612
$\rho \sin \delta$	+0,2288	+0,1762
$\operatorname{tg} \alpha$	+0,5102	+0,3689
$\rho \cos \delta$	1,2685	1,3327
$\operatorname{tg} \delta$	+0,1804	+0,1322
α	27 ^m ,032	20,250
δ	+10,227	+7,532
$\Delta \alpha$ (o - c)	+0,002	0,000
$\Delta \delta$ (o - c)	+0,002	0,000

Поскольку вычисление A , B и представление наблюдений выполнено только с четырьмя знаками, согласие между вычисленными и исходными значениями координат следует считать полным.

Остается вычислить элементы Ω и i , представляющие интерес с точки зрения возможности отождествления вновь открытой планеты с одной из ранее наблюдававшихся. Элемент $\omega = \omega_0$ здесь не представляет интереса, так как для вычисления эфемериды служат величины A_x, \dots, B_z . Поэтому формулы (3.10) можно заменить следующими:

$$a^2 \sin i \sin \Omega = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$a^2 \sin i \cos \Omega = (A_x B_z - A_z B_x) \cos \varepsilon + (A_y B_x - A_x B_y) \sin \varepsilon.$$

Таким образом, имеем

$a^2 \sin i \sin \Omega$	+0,0239	$\cos \varepsilon$	0,9174
$a^2 \sin i \cos \Omega$	-0,0553	$\sin \varepsilon$	0,3979
$\operatorname{tg} \Omega$	-0,432	$A_x B_z - A_z B_x$	+2,0112
$a^2 \sin i$	0,0508	$A_y B_x - A_x B_y$	-4,7759
$\sin i$	0,0098		
Ω	156 ^m ,64		
i	0 ^m ,56		

Примечание. Радиус орбиты мы нашли, решая уравнение (3.8) относительно a^2 . Это дало $a = 2,2764$. Если это уравнение решать относительно a , то получается $a = 2,2774$. Таким образом, вычисление с четырьмя десятичными знаками было бы здесь вполне достаточным.

§ 5. Вычисление эллиптической орбиты по двум наблюдениям

В тех случаях, когда по двум рассматриваемым наблюдениям вычисление круговой орбиты оказывается невозможным, а других наблюдений нет, можно использовать эти два наблюдения для вычисления эллиптической орбиты, подчиненной некоторым дополнительным условиям. Такого рода эллиптическая орбита может служить в течение некоторого времени для получения достаточно удовлетворительной эфемериды, но для суждения о действительном движении планеты она дает не больше, чем круговая орбита.

Два дополнительных условия, которые приходится налагать здесь на эллиптическую орбиту, могут быть выбраны различно. Вьясяля, предложивший употребление такого рода эллиптических орбит, подчиняет их двум условиям: момент прохождения через перигелий совпадает с моментом второго наблюдения; геоцентрическое расстояние планеты в момент второго наблюдения имеет некоторую произвольно выбранную, в известных пределах, величину. Способ Вьясяля будет указан дальше (§ 16 гл. XIII). Он подробно излагается в учебниках А. Я. и Б. А. Орловых [1940] и А. Д. Дубяго [1949]. Другой способ, в котором для устранения неопределенности задачи фиксируется эксцентриситет эллиптической орбиты и предполагается, что момент прохождения через перигелий находится по середине между моментами наблюдений, был предложен Б. А. Орловым [1939]. Этот способ может быть представлен в следующем виде, являющимся естественным обобщением изложенного в § 3 способа нахождения круговой орбиты.

Обозначим через $(r, -v, -E, -M)$ и (r, v, E, M) радиусы-векторы и аномалии в моменты двух рассматриваемых наблюдений. Сохраняя в остальном обозначения, принятые в § 3, получим

$$\rho_1 = \sqrt{r^2 - S_1^2} - C_1; \quad \rho_2 = \sqrt{r^2 - S_2^2} - C_2, \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1; & y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1; & z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1, \\ x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2; & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2; & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\sin^2 v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \quad (5.3)$$

С другой стороны, формулы эллиптического движения дают

$$a = \frac{r(1 + e \cos v)}{1 - e^2}; \quad \sin E = \frac{r \sin v}{a \sqrt{1 - e^2}}; \quad M = E - e \sin E. \quad (5.4)$$

Так как для эксцентриситета принято некоторое фиксированное значение (например, $e=0,15$ или $e=0,20$), то формулы

(5.1)—(5.4) позволяют для любого значения r вычислить соответствующее значение M . Полученное таким образом значение средней аномалии назовем геометрическим и обозначим через M_g .

С другой стороны, средняя аномалия дается равенством

$$M = \frac{1}{2} k (t_2 - t_1) a^{-3/2}; \quad \left(\frac{1}{2} k = 0,49280 \right). \quad (5.5)$$

Это значение можно назвать динамическим и обозначить через M_d .

Задача приводится, таким образом, к решению уравнения

$$f(r) = M_g - M_d = 0$$

относительно r . Для первых двух проб можно взять $r=2,3$ и $r=2,6$. Применение линейного интерполирования быстро приводит к цели.

Получив окончательное значение r , а следовательно, и величин (5.2), мы можем вычислить направляющие косинусы по формулам, аналогичным формулам (3.9), а именно,

$$P_x = M(x_2 + x_1); \quad P_y = M(y_2 + y_1); \quad P_z = M(z_2 + z_1),$$

$$Q_x = N(x_2 - x_1); \quad Q_y = N(y_2 - y_1); \quad Q_z = N(z_2 - z_1),$$

где

$$M = (2r \cos v)^{-1}; \quad N = (2r \sin v)^{-1}.$$

Переход к элементам i , Ω , ω , если они нужны, выполняется как обычно.

В заключение заметим, что для $e=0,15$ формулы (5.4) имеют такой вид:

$$a = 1,02302 r (1 + 0,15 \cos v), \quad a \sin E = 1,01144 r \sin v,$$

$$M = E - 8^\circ,5944 \sin E;$$

если же взять $e=0,20$, то

$$a = 1,04167 r (1 + 0,20 \cos v), \quad a \sin E = 1,02062 r \sin v,$$

$$M = E - 11^\circ,4592 \sin E.$$

В то время как круговая орбита вычисляется с 4—5 десятичными знаками, здесь лучше употреблять 5—6 знаков.

УЛУЧШЕНИЕ ОРБИТ**§ 1. Вводные замечания**

Изучение движения небесных тел имеет своей ближайшей целью получение их орбит с возможно большею точностью. Так как каждая орбита определяется шестью элементами (т. е. шестью постоянными, вводимыми интегрированием уравнений движения), то задача приводится к нахождению вероятнейших значений этих элементов при помощи возможно большего количества наблюдений, охватывающих возможно больший промежуток времени. Чем больше использовано наблюдений, тем больше можно рассчитывать на уменьшение влияния их случайных ошибок на окончательный результат. С другой стороны, точность, с которой получается большая полуось a (или перигельное расстояние q — в случае параболического движения) пропорциональна промежутку времени, охватываемому наблюдениями.

Таким образом, улучшение орбит является постоянной, и притом весьма существенной, частью работы по изучению движения всех небесных тел. Но особенно часто улучшение орбит приходится выполнять для недавно открытых малых планет и комет.

Изучение движения малых планет и комет всегда начинается с вычисления предварительной орбиты. Для этого используются, как мы видели, 3—4 наблюдения, разделенные небольшими промежутками времени.

Полученная таким образом орбита не может обладать большой точностью. Будучи основана на минимально необходимом количестве наблюдений, она целиком включает их ошибки. А искажения орбиты, вносимые ошибками наблюдений, тем больше, чем меньше промежутки времени между наблюдениями. Поэтому сразу же возникает необходимость в улучшении предварительной орбиты.

Задача улучшения предварительной орбиты при помощи использования дальнейших наблюдений решается последователь-

ными приближениями, причем на отдельных этапах применяются различные методы.

Предварительная орбита используется прежде всего для контроля имеющихся наблюдений. Сравнение наблюденных положений светила с эфемеридой, вычисленной при помощи этой орбиты, позволяет обнаружить и удалить наблюдения, содержащие грубые ошибки, а также соединить близкие по времени наблюдения в нормальные места (§ 2), что в большинстве случаев существенно сокращает дальнейшую работу.

Улучшение орбиты производится сначала упрощенными методами при помощи небольшого числа выбранных соответствующим образом наблюдений. Чем больший интервал времени охватывают взятые наблюдения, тем надежнее получаются элементы орбиты. Применяемые здесь упрощенные методы будут подробно рассмотрены в § 3—6. Их основой является нахождение линейным интерполированием геоцентрических расстояний для двух моментов, или других величин, также вполне определяющих орбиту.

После того как получена орбита, дающая настолько малые разности между наблюденными и вычисленными значениями координат, что квадратами этих разностей можно пренебречь, применяется дифференциальный метод исправления элементов орбиты, называемый также методом вариации элементов. Этот метод позволяет полностью использовать все имеющиеся наблюдения и получить наиболее вероятную орбиту, соответствующую этим наблюдениям.

В эпоху логарифмической вычислительной техники методом вариации элементов пользовались лишь на завершающем этапе работы — для получения наиболее точной (т. е. наиболее вероятной) орбиты при помощи всей совокупности имеющихся наблюдений. Это было связано с тем, что решение систем условных уравнений при помощи логарифмов являлось весьма трудоемкой операцией. Но распространение арифмометров, существенно облегчивших применение способа наименьших квадратов, изменило положение дела. Вариация элементов стала все чаще и чаще применяться и для повторных, предварительных исправлений элементов, а не только для получения окончательной орбиты. Методом вариации элементов стали пользоваться и для исправления орбит, дающих еще настолько большие разности между наблюденными и вычисленными значениями координат, что квадратами этих разностей нельзя пренебрегать. В таких случаях повторное применение метода вариации элементов приводит сначала к орбите, для которой указанные разности можно трактовать как дифференциалы, а затем и к окончательной орбите. Употребление счетно-аналитических, а затем электронных вычислительных машин еще больше расширило область

применения дифференциального метода исправления орбит. Специальные методы предварительного исправления орбит, например, метод вариации геоцентрических расстояний, являются мало подходящими для больших вычислительных машин.

Для дифференциального исправления орбит малых планет и комет было предложено много различных методов, отличающихся между собой как выбором исправляемых элементов, так и способом вычисления коэффициентов условных уравнений. Но из этих методов в настоящее время применяются лишь весьма немногие. Изложением их мы и ограничимся.

Вычисление коэффициентов условных уравнений и решение этих уравнений по способу наименьших квадратов не представляют никаких принципиальных трудностей и не нуждаются в иллюстрировании примерами. Иначе дело обстоит с другими частями работы. Подготовка наблюдений, критический анализ расхождений между положениями светила, даваемыми подлежащей исправлению орбитой, и наблюдениями, распределение весов в случае неравноточных наблюдений, анализ полученных поправок элементов — все это требует известной опытности. Большую пользу здесь может принести изучение тех многочисленных и разнообразных примеров исправления орбит, которые в изобилии имеются в астрономических журналах и трудах обсерваторий.

§ 2. Подготовка наблюдений. Нормальные места

Первым этапом работы по улучшению орбиты является сравнение вычисленной при помощи этой орбиты эфемериды со всеми используемыми наблюдениями. Здесь со всей тщательностью должны быть учтены поправки за параллакс, абберацию, прецессию и нутацию, рассмотренные в гл. VII.

Если вычисления ведутся с большой точностью, то моменты наблюдений, публикуемые всегда во всемирном времени, следует предварительно редуцировать на эфемеридное время. Не следует забывать, что эфемериды вычисляются для моментов, выраженных в эфемеридном времени.

Наблюденные положения светила иногда могут быть улучшены. При опубликовании наблюдений обычно указывается, к каким звездам сравнения отнесено положение светила и из какого каталога взяты положения этих звезд. Если есть возможность получить для звезд сравнения более точные положения (из других каталогов, или учитывая собственные движения, или путем специальных наблюдений), то тем самым можно уточнить наблюденные координаты светила.

После того как для всех наблюдений получены разности $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ между наблюденными и вычисленными значениями коор-

динат, можно судить о качестве наблюдений. Резкий скачок в этих разностях по отношению к соседним наблюдениям указывает на сомнительное или прямо ошибочное наблюдение. В таких случаях приходится решать, должно ли это наблюдение быть отброшено, или его следует ввести в вычисления с уменьшенным весом.

Если имеется ряд изолированных наблюдений, разделенных значительными промежутками времени, так что трудно решить, является ли изменение $\Delta\alpha$ (или $\Delta\delta$) следствием ошибки наблюдения или же производится естественным изменением этой величины с течением времени, то можно составить приведенные разности первого порядка

$$(\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1)/(t_2 - t_1); \quad (\Delta\alpha_3 - \Delta\alpha_2)/(t_2 - t_1); \quad \dots,$$

где через $\Delta\alpha_i$ обозначена разность, соответствующая моменту t_i . При безошибочных наблюдениях эти приведенные разности (изменяющиеся с течением времени значительно медленнее, нежели первоначальные разности $\Delta\alpha_i$) не должны обнаруживать скачков.

Составление разностей $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ между наблюденными и вычисленными значениями координат позволяет не только удалить подозрительные наблюдения и выбрать более благонадежные, но и составить так называемые нормальные места.

Предположим, что разность $\Delta\alpha$ между действительным прямым восхождением светила и вычисленным является аналитической функцией времени t , и потому может быть разложена в степенной ряд

$$\Delta\alpha = a + b(t - t_0) + c(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.1)$$

Пусть наблюдения для ряда близких моментов t_1, t_2, \dots, t_n дали нам значения этой разности $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \dots, \Delta\alpha_n$. Если эти величины не обнаруживают систематического хода или если их систематическое изменение может считаться пропорциональным времени (в чем можно убедиться, составив приведенные разности), то, отбрасывая члены второго и высших порядков, мы можем положить

$$\Delta\alpha_i = a + b(t_i - t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\Delta\alpha_1 + \dots + \Delta\alpha_n = na + b(t_1 + \dots + t_n - nt_0).$$

За момент t_0 , который до сих пор оставался произвольным, возьмем

$$t_0 = \frac{1}{n}(t_1 + \dots + t_n).$$

Это даст

$$a = \frac{1}{n}(\Delta\alpha_1 + \dots + \Delta\alpha_n).$$

Но a есть не что иное, как разность между действительным и вычисленным прямым восхождением для момента t_0 . Поэтому, вычислив для момента t_0 прямое восхождение при помощи исходной системы элементов и придав к нему a , получим то прямое восхождение, которое должны были бы давать для этого момента наблюдения. Все сказанное одинаково применимо и к склонениям. Таким образом, приходим к следующему правилу:

Если n наблюдений, произведенных в моменты t_i ($i=1, \dots, n$), дают разности $\Delta\alpha_i, \Delta\delta_i$, не обнаруживающие систематического хода или же имеющие ход, пропорциональный времени, то эти n наблюдений можно заменить одним фиктивным наблюдением (нормальным местом). Для этого вычисляем для момента

$$t_0 = \frac{1}{n}(t_1 + \dots + t_n)$$

прямое восхождение и склонение светила и прибавляем к ним поправки

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \Delta\alpha_i; \quad \frac{1}{n} \sum_1^n \Delta\delta_i.$$

Как известно из теории ошибок, мы можем рассчитывать, что случайная ошибка полученного этим путем фиктивного наблюдения в \sqrt{n} раз меньше случайной ошибки каждого из n взятых наблюдений.

Иногда может оказаться целесообразным учитывать в формуле (2.1) и третий член. Составление нормального места становится несколько сложнее, но зато открывается возможность объединения большего числа наблюдений в одно нормальное место.

Можно также производить сглаживание $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$, входящих в нормальное место, графически. Неудобством графического способа является некоторый неизбежный здесь произвол.

§ 3. Метод вариации геоцентрических расстояний

Одним из наиболее употребительных методов улучшения элементов орбиты при помощи небольшого числа наблюдений является метод вариации геоцентрических расстояний, заключающийся в следующем.

Выберем два надежных наблюдения (или два нормальных места) t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2 , достаточно далеко отстоящие одно от другого. При помощи исходной системы элементов вычислим геоцентрические расстояния ρ_1 и ρ_2 для моментов t_1 и t_2 . При помощи геоцентрических положений

$$t_1(\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad t_2(\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \quad (3.1)$$

вычисляем соответствующие гелиоцентрические координаты

$$x_1 = \rho_1 \cos \delta_1 \cos \alpha_1 - X_1; \quad y_1 = \rho_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1 - Y_1; \quad z_1 = \rho_1 \sin \delta_1 - Z_1,$$

$$x_2 = \rho_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 - X_2; \quad y_2 = \rho_2 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 - Y_2; \quad z_2 = \rho_2 \sin \delta_2 - Z_2,$$

после чего находим элементы орбиты (будем обозначать их через E^I), пользуясь формулами гл. V. Эти элементы будут совершенно точно представлять два исходных наблюдения, как бы ошибочны ни были взятые значения ρ_1 и ρ_2 . Наша задача заключается в том, чтобы подходящим варьированием ρ_1 и ρ_2 получить систему элементов, хорошо представляющую другие наблюдения.

Взяв некоторые небольшие величины $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$, вычислим при помощи геоцентрических положений

$$(\rho_1 + \Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad (\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \quad (3.2)$$

систему элементов E^{II} , а при помощи положений

$$(\rho_1, \alpha_1, \delta_1); \quad (\rho_2 + \Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \quad (3.3)$$

— систему элементов E^{III} .

Выберем, далее, еще несколько наблюдений t_i, α_i, δ_i и для моментов t_i вычислим прямые восхождения и склонения при помощи всех трех систем элементов E^I, E^{II}, E^{III} ; получим соответственно $\alpha_i^I, \delta_i^I; \alpha_i^{II}, \delta_i^{II}$ и $\alpha_i^{III}, \delta_i^{III}$.

Обозначая через $\rho_1 + x \cdot \Delta\rho_1$ и $\rho_2 + y \cdot \Delta\rho_2$ те значения геоцентрических расстояний, для которых получаются как раз наблюдаемые значения α_i, δ_i координат светила, будем иметь

$$\alpha_i = \varphi_i(\rho_1 + x \Delta\rho_1, \rho_2 + y \Delta\rho_2),$$

$$\delta_i = \psi_i(\rho_1 + x \Delta\rho_1, \rho_2 + y \Delta\rho_2),$$

ибо α_i, δ_i являются функциями геоцентрических расстояний, взятых для двух основных наблюдений (3.1).

Принимая во внимание малость вариаций $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$, мы можем написать

$$\alpha_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_1} \Delta\rho_1 \cdot x + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_2} \Delta\rho_2 \cdot y$$

и, аналогично,

$$\alpha_i^I = \varphi_i(\rho_1, \rho_2),$$

$$\alpha_i^{II} = \varphi_i(\rho_1 + \Delta\rho_1, \rho_2) = \alpha_i^I + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_1} \Delta\rho_1,$$

$$\alpha_i^{III} = \varphi_i(\rho_1, \rho_2 + \Delta\rho_2) = \alpha_i^I + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_2} \Delta\rho_2.$$

При помощи этих равенств и аналогичных для δ , окончательно получим такие уравнения для нахождения x и y :

$$(\alpha_i^{II} - \alpha_i^I)x + (\alpha_i^{III} - \alpha_i^I)y = \alpha_i - \alpha_i^I,$$

$$(\delta_i^{II} - \delta_i^I)x + (\delta_i^{III} - \delta_i^I)y = \delta_i - \delta_i^I.$$

Решение этих уравнений по способу наименьших квадратов даст наиболее вероятные значения x и y . После этого при помощи геоцентрических положений

$$(\rho_1 + x\Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1), (\rho_2 + y\Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2) \quad (3.4)$$

находим улучшенную систему элементов E .

Таким образом, для каждой пары геоцентрических положений (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4) мы должны вычислить соответствующие гелиоцентрические координаты, и затем вычислить элементы орбиты.

Сопоставление употребляемых для этого формул было сделано в гл. V. Для представления наблюдений при помощи полученных систем элементов E^I, E^{II}, E^{III} служат методы, указанные в гл. IV.

Что касается размеров вариаций $\Delta\rho_1, \Delta\rho_2$, то обычно они берутся равными 0,001.

Примечание. При употреблении метода вариации геоцентрических расстояний прибегают к следующему весьма удобному и весьма надежному способу контролирования производимой вычислительной работы. Берут еще одну пару геоцентрических положений, а именно,

$$(\rho_1 + \Delta\rho_1, \alpha_1, \delta_1), (\rho_2 + \Delta\rho_2, \alpha_2, \delta_2), \quad (3.5)$$

и ведут для них вычисление элементов и представление наблюдений параллельно с соответственными вычислениями для положений (3.1), (3.2) и (3.3).

Обозначая через E^{IV} и $\alpha_i^{IV}, \delta_i^{IV}$ элементы и координаты, соответствующие гипотезе (3.5), мы должны, очевидно, иметь для каждого элемента равенство

$$E - E^{III} = E^{II} - E^I$$

и точно так же для координат

$$\alpha_i^{IV} - \alpha_i^{III} = \alpha_i^{II} - \alpha_i^I,$$

$$\delta_i^{IV} - \delta_i^{III} = \delta_i^{II} - \delta_i^I.$$

Выполнение этих равенств (справедливых также и для всех промежуточных величин) будет свидетельствовать не только о верности вычислений, но и о допустимости основного предположения, на котором построен весь метод: изменения координат α_i , δ_i пропорциональны изменениям геоцентрических расстояний основных положений (3.1).

§ 4. Улучшение орбит малых планет

В настоящее время вновь открытая малая планета не привлекает к себе особого внимания наблюдателей, так что в первую оппозицию редко набирается больше 5—6 наблюдений. При таких условиях не только нет возможности составить нормальные места, но и контроль наблюдений способом, указанным в § 2, может быть не всегда осуществим. С другой стороны, промежуток времени, охватываемый наблюдениями, редко превышает 2—2½ месяца, так что не приходится рассчитывать на получение особенно точной орбиты.

Принимая все это во внимание, обычно довольствуются вычислением орбиты по трем наблюдениям (если наклон мал, то по четырем), но выбирают наиболее надежные и далеко отстоящие друг от друга наблюдения. Только в редких случаях прибегают к вариации геоцентрических расстояний.

После того как планета наблюдалась в двух-трех соседних оппозициях, применяют метод вариации геоцентрических расстояний. При этом все наблюдения одной оппозиции соединяются в одно или два нормальных места. Поскольку при таком улучшении орбиты пренебрегают возмущениями, нельзя рассчитывать на представление наблюдений с большой точностью. Дальнейшее улучшение орбиты производится уже с учетом возмущений от Юпитера, причем употребляется главным образом метод вариации элементов, который будет изложен дальше.

В тех случаях, когда имеется в виду лишь обеспечить наблюдение малой планеты в ближайшие оппозиции, нередко прибегают к эмпирическому исправлению средней аномалии. Опыт показывает, что из всех элементов, получаемых из наблюдений, охватывающих небольшую часть орбиты, наименее надежным является среднее суточное движение. Поэтому, когда мы констатируем разницу между наблюденным и вычисленным положением планеты, эта разница зависит главным образом от неверно найденной величины средней аномалии. Принимая это во внимание, поступаем следующим образом:

Пусть для соседней оппозиции наблюдения дали положение планеты α^0 , δ^0 , тогда как наши исходные элементы дают для этого же момента α^c , δ^c . Оставляя все элементы без изменения, дадим M приращение ΔM (например, $\Delta M = 1^\circ$) и снова вычислим координаты планеты; получим α^v , δ^v .

Обозначим через $x\Delta M$ то приращение, которое надо придать M , чтобы получить наблюдаемые координаты. Так как α и δ для рассматриваемого момента являются функциями M , то будем иметь

$$\begin{aligned}\alpha^o &= \varphi(M + x\Delta M), & \delta^o &= \psi(M + x\Delta M), \\ \alpha^c &= \varphi(M), & \delta^c &= \psi(M), \\ \alpha^v &= \varphi(M + \Delta M), & \delta^v &= \psi(M + \Delta M).\end{aligned}$$

Разлагая эти функции по степеням малых приращений и отбрасывая члены выше первой степени, получим для нахождения x два уравнения:

$$\alpha^o - \alpha^c = x(\alpha^v - \alpha^c); \quad \delta^o - \delta^c = x(\delta^v - \delta^c).$$

Если эти уравнения дают достаточно согласующиеся значения для x , то это доказывает допустимость сделанных нами гипотез. Разделив полученную поправку $x\Delta M$ на соответствующий промежуток времени, получим эмпирическую поправку среднего суточного движения.

§ 5. Улучшение параболической орбиты

Первая орбита для вновь открытой кометы вычисляется почти всегда как параболическая. По мере получения дальнейших наблюдений элементы этой параболической орбиты уточняют, оставляя сначала эксцентриситет равным единице. Для этого служит метод вариации отношения двух геоцентрических расстояний, заключающийся в следующем.

Выберем два наблюдения (или два нормальные места) t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2 , по возможности далеко отстоящие одно от другого, и некоторое число других наблюдений t_i, α_i, δ_i .

Для каждого значения отношения

$$M = \rho_2/\rho_1 \quad (5.1)$$

мы можем найти (в предположении, что орбита параболическая) соответствующие значения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 , а следовательно, и элементов орбиты. Вычислив, далее, с этими элементами координаты комет α_i^c, δ_i^c для момента t_i , получим разности

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_i^c; \quad \Delta\delta_i = \delta_i - \delta_i^c$$

между наблюдаемыми и вычисленными значениями координат, соответствующие взятому значению M .

Таким образом,

$$\Delta\alpha_i = \varphi_i(M); \quad \Delta\delta_i = \psi_i(M), \quad (5.2)$$

и задача приводится к нахождению такого значения M , при котором величины (5.2) наиболее близки к нулю. Такое значение M даст параболическую орбиту, точно представляющую наблюдения в моменты t_1 , t_2 и наилучшим образом согласующуюся с наблюдениями в моменты t_i .

Искомое значение M легко находится интерполированием. Пусть M^I есть значение M , даваемое предварительной орбитой, а $\Delta\alpha_i^I$, $\Delta\delta_i^I$ — соответствующие значения функций (5.2). Пусть для

$$M = M^{II} = M^I + \Delta M$$

эти функции равны $\Delta\alpha_i^{II}$, $\Delta\delta_i^{II}$, так что (отбрасывая члены второго порядка)

$$\Delta\alpha_i^{II} = \Delta\alpha_i^I + \frac{\partial\varphi_i}{\partial M} \Delta M; \quad \Delta\delta_i^{II} = \Delta\delta_i^I + \frac{\partial\psi_i}{\partial M} \Delta M.$$

Искомое значение M мы можем представить в форме

$$M = M^I + x\Delta M, \quad (5.3)$$

что дает для нахождения x уравнения

$$\varphi_i(M^I + x\Delta M) = 0; \quad \psi_i(M^I + x\Delta M) = 0,$$

или

$$\Delta\alpha_i^I + x(\Delta\alpha_i^{II} - \Delta\alpha_i^I) = 0; \quad \Delta\delta_i^I + x(\Delta\delta_i^{II} - \Delta\delta_i^I) = 0. \quad (5.4)$$

Получив из этих уравнений вероятнейшее значение x , мы можем найти, при помощи соответствующей величины (5.3), улучшенную параболическую орбиту.

Убедиться в законности применения линейного интерполирования, лежащего в основе уравнений (5.4), можно следующим образом. Обозначим через E^I , E^{II} и E значения какого-либо элемента (или какой-нибудь промежуточной величины), соответствующие значениям

$$M^I; \quad M^I + \Delta M; \quad M^I + x\Delta M$$

величины M . Критерием законности отбрасывания членов второго порядка является выполнение равенства

$$E - E^I = x(E^{II} - E^I).$$

Если окажется, что вариации ΔM и $x\Delta M$ слишком велики и линейное интерполирование не может дать достаточно точного результата, указанное вычисление надо повторить, взяв другое значение для M^I .

В заключение напомним формулы, по которым здесь производится вычисление. Для нахождения геоцентрических расстояний ρ_1 и ρ_2 , соответствующих принятому значению M , можно

воспользоваться уравнениями (6.2), (6.3), (7.3), (6.5) гл. IX:

$$\left. \begin{aligned}
 & \rho_2 = M\rho_1, \\
 x_1 &= \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 &= \lambda_2\rho_2 - X_2, \\
 y_1 &= \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 &= \mu_2\rho_2 - Y_2, \\
 z_1 &= \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 &= \nu_2\rho_2 - Z_2, \\
 r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\
 & \kappa^2 = 2(r_1r_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2), \\
 & R = r_1 + r_2 - \kappa; \quad 18\tau^2 = R(2R + 3\kappa)^2,
 \end{aligned} \right\} (5.5)$$

где

$$\tau = 0,017\,202\,099(t_2 - t_1).$$

Три последние из равенств (5.5) могут быть заменены такими (§ 2 гл. IX):

$$\begin{aligned}
 s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\
 \theta_0(2\tau)^2 &= s^2(r_1 + r_2).
 \end{aligned}$$

Входящая сюда величина θ_0 берется из таблицы IX по аргументу

$$c = s^2(r_1 + r_2)^{-2}.$$

С полученными в последнем приближении значениями геоцентрических координат (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) элементы орбиты вычисляются по формулам, указанным выше (§ 4 или § 8 гл. IX).

§ 6. Непараболические кометные орбиты

Непараболические кометные орбиты можно разделить с точки зрения вычисления орбит на две группы.

Первую группу составляют короткопериодические кометы. У них эксцентриситет настолько отличается от единицы, что применение указанного в предыдущем параграфе метода сразу обнаружит, что движение кометы не может быть представлено параболической орбитой. В случаях такого рода либо применяют метод вариации геоцентрических расстояний, либо вычисляют орбиту по трем нормальным местам, разделенным по возможности большими интервалами времени. В этом последнем случае для первого приближения берут значения отношений пло-

щадей треугольников, даваемые предварительной параболической орбитой.

Вторую группу составляют кометные орбиты с эксцентриситетами хотя и очень мало, но все же заметно отличающимися от единицы. В этих случаях движение кометы обычно может быть представлено параболической орбитой настолько удовлетворительно, что отличие эксцентриситета от единицы можно учитывать лишь на заключительных стадиях работы. Метод вариации геоцентрических расстояний становится здесь малоудобным, и для перехода от параболической орбиты к близкой к ней эллиптической или гиперболической орбите предпочитают пользоваться следующим методом.

*Метод вариации большой полуоси
и одного геоцентрического расстояния*

Возьмем два вполне надежные основные наблюдения t_1, α_1, δ_1 и t_2, α_2, δ_2 , разделенные по возможности большим интервалом времени, и несколько других наблюдений t_i, α_i, δ_i .

При помощи имеющейся параболической орбиты вычислим геоцентрическое расстояние $\rho_1 = \rho'_1$ для момента первого из основных наблюдений. Затем найдем из уравнений (5.5) соответствующее значение ρ_2 для момента второго основного наблюдения. Элементы параболической орбиты, вычисленной при помощи этих значений ρ'_1 и ρ'_2 , обозначим через E' .

Вычислим, далее, вторую параболическую орбиту, взяв для момента первого основного наблюдения геоцентрическое расстояние

$$\rho_1'' = \rho'_1 + \Delta\rho_1,$$

где $\Delta\rho_1$ — некоторое выбранное нами приращение (чаще всего берется $\pm 0,001$). Соответствующее значение ρ_2'' получается, как и в предыдущем случае, решением системы (5.5). Элементы этой орбиты обозначим через E'' .

Положив для краткости

$$1/4a = \tilde{a},$$

где a — большая полуось орбиты, мы можем сказать, что для двух вычисленных нами орбит $\tilde{a} = 0$.

Вычислим теперь третью орбиту, взяв для первого геоцентрического расстояния такое же значение ρ'_1 , как и для первой орбиты, но положив $\tilde{a} = \Delta\tilde{a}$, где $\Delta\tilde{a}$ — небольшая величина, равная например $+0,002$, или $+0,001$. Соответствующее значение

$\rho_2 = \rho_2'''$ найдем, решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \rho_1 - X_1; & x_2 &= \lambda_2 \rho_2 - X_2, \\ y_1 &= \mu_1 \rho_1 - Y_1; & y_2 &= \mu_2 \rho_2 - Y_2, \\ z_1 &= \nu_1 \rho_1 - Z_1; & z_2 &= \nu_2 \rho_2 - Z_2, \\ r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; & r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \\ s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \\ \sqrt{8}(t_2 - t_1) &= (r_1 + r_2 + s)^{3/2} V(\zeta) \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} V(\zeta'), \\ \zeta &= \tilde{a}(r_1 + r_2 + s); & \zeta' &= \tilde{a}(r_1 + r_2 - s), \\ \sqrt{8} &= 2,828\ 4271, \end{aligned} \right\} (6.1)$$

причем значения функции $V(\zeta)$ берутся из таблицы VIIa или VIIb.

Система (6.1) отличается от системы (5.5) только тем, что входящее в нее уравнение Эйлера заменено уравнением Ламберта (§ 13 гл. V). Решение системы (6.1) выполняется, как всегда в таких случаях, интерполированием, которое существенно облегчается тем, что искомая величина ρ_2''' мало отличается от ρ_2' .

Элементы третьей орбиты, полученной при помощи геоцентрических расстояний $\rho_1 = \rho_1'$, $\rho_2 = \rho_2'''$, обозначим через E''' .

Для каждой из трех вычисленных орбит найдем соответствующие разности $\Delta\alpha_i'$, $\Delta\alpha_i''$, $\Delta\alpha_i'''$ и $\Delta\delta_i'$, $\Delta\delta_i''$, $\Delta\delta_i'''$ между наблюдаемыми и вычисленными координатами в моменты t_i .

Так как

$$\Delta\alpha_i = \varphi_i(\rho_i, \tilde{a}); \quad \Delta\delta_i = \psi_i(\rho_i, \tilde{a}), \quad (6.2)$$

то будем иметь

$$\Delta\alpha_i'' = \varphi_i(\rho_i', 0); \quad \Delta\alpha_i''' = \varphi_i(\rho_i' + \Delta\rho_i, 0),$$

$$\Delta\alpha_i''' = \varphi_i(\rho_i', \Delta\tilde{a})$$

и аналогично для склонений.

Отсюда, пренебрегая вторыми степенями приращений $\Delta\rho_i$ и $\Delta\tilde{a}$, получим:

$$\Delta\alpha_i'' = \Delta\alpha_i' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_i} \Delta\rho_i; \quad \Delta\alpha_i''' = \Delta\alpha_i' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\tilde{a}} \Delta\tilde{a}.$$

Если через

$$\rho_i = \rho_i' + x\Delta\rho_i; \quad \tilde{a} = y\Delta\tilde{a} \quad (6.3)$$

обозначить искомые значения неизвестных ρ_1 и \bar{a} , обращающие в нуль разности (6.2), то с той же точностью получим

$$\begin{aligned}x(\Delta\alpha'_i - \Delta\alpha''_i) + y(\Delta\alpha'_i - \Delta\alpha'''_i) &= \Delta\alpha'_i, \\x(\Delta\delta'_i - \Delta\delta''_i) + y(\Delta\delta'_i - \Delta\delta'''_i) &= \Delta\delta'_i.\end{aligned}$$

Решение этих уравнений даст наиболее вероятные значения x , y , а следовательно, и ρ_1 , \bar{a} .

Удобный и надежный контроль дает сравнение элементов E' , E'' , E''' (а также любых промежуточных величин, служащих для их получения) с элементами E орбиты, непосредственно вычисляемой со значениями (6.3). Если вычисления выполнены правильно, то должны выполняться равенства

$$E - E' = x(E'' - E') + y(E''' - E').$$

Выполнение этих равенств является также критерием применимости линейного интерполирования при взятых приращенных неизвестных величин.

Вычисление элементов выполняется здесь особенно просто, так как большая полуось известна (§ 13 гл. V).

§ 7. Метод вариации элементов

Дифференциальный метод, или, иначе, метод вариации элементов, употребляется для нахождения такой орбиты, которая удовлетворяла бы наилучшим образом всей совокупности имеющихся наблюдений. В приближенных методах, изученных в предыдущих параграфах, искомая орбита была связана дополнительным условием: она должна была совершенно точно представлять два наблюдения, принятые за основные. Дифференциальный метод позволяет находить орбиту без такого условия, произвольно выделяющего два наблюдения среди всех остальных.

Наилучшей орбитой считается вероятнейшая орбита, т. е. такая, для которой сумма квадратов отклонений вычисленных положений светила от наблюдаемых имеет минимальную величину.

Обозначим через E_1, E_2, \dots, E_6 элементы орбиты, уже настолько близкие к истинным, что вычисленные с этими элементами координаты светила α^c, δ^c отличаются от наблюдаемых координат α^o, δ^o на малые величины

$$d\alpha = \alpha^o - \alpha^c; \quad d\delta = \delta^o - \delta^c,$$

квадратами которых можно пренебречь.

Обозначим, далее, через $E_1 + dE_1, \dots, E_6 + dE_6$, вероятнейшие элементы, а через α, δ — координаты, соответствующие этим элементам.

Условие, которым определяются вероятнейшие элементы, может быть написано так:

$$\sum \{ \cos^2 \delta (\alpha - \alpha^0)^2 + (\delta - \delta^0)^2 \} = \text{Minimum}, \quad (7.1)$$

потому что стоящая под знаком суммы величина есть квадрат расстояния на сфере между положениями (α, δ) и (α^0, δ^0) .

Полагая

$$\alpha^c = f(E_1, E_2, \dots, E_6),$$

получим

$$\alpha - \alpha^c = \frac{\partial f}{\partial E_1} dE_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial E_6} dE_6,$$

$$\alpha - \alpha^0 = \alpha - \alpha^c - (\alpha^0 - \alpha^c) = \frac{\partial \alpha}{\partial E_1} dE_1 + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial E_6} dE_6 - d\alpha.$$

Отсюда ясно, что условие (7.1) будет соблюдено, если мы найдем dE_1, \dots, dE_6 из уравнений (написанных для всех рассматриваемых наблюдений)

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial E_1} dE_1 + \dots + \cos \delta \frac{\partial \alpha}{\partial E_6} dE_6 &= \cos \delta d\alpha, \\ \frac{\partial \delta}{\partial E_1} dE_1 + \dots + \frac{\partial \delta}{\partial E_6} dE_6 &= d\delta \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

таким образом, чтобы сумма квадратов остающихся невязок была бы минимальна. Иначе говоря, вероятнейшие поправки элементов мы получим, решая уравнения (7.2) по способу наименьших квадратов.

Задача приводится, таким образом, прежде всего к вычислению коэффициентов уравнений (7.2), т. е. к нахождению производных сферических координат α и δ по всем элементам. Это вычисление распадается на два этапа.

Дифференцируя формулы

$$\rho \cos \delta \cos \alpha = x + X,$$

$$\rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y,$$

$$\rho \sin \delta = z + Z$$

по элементам орбиты (считая, следовательно, t постоянным), получим

$$\cos \delta \cos \alpha d\rho - \rho \cos \delta \sin \alpha d\alpha - \rho \sin \delta \cos \alpha d\delta = dx,$$

$$\cos \delta \sin \alpha d\rho + \rho \cos \delta \cos \alpha d\alpha - \rho \sin \delta \sin \alpha d\delta = dy,$$

$$\sin \delta d\rho + \rho \cos \delta d\delta = dz,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta d\alpha &= -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy, \\ \rho d\delta &= -\sin \delta \cos \alpha dx - \sin \delta \sin \alpha dy + \cos \delta dz, \\ d\rho &= \cos \delta \cos \alpha dx + \cos \delta \sin \alpha dy + \sin \delta dz. \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Для дальнейших вычислений эти уравнения удобно представить в матричной форме ($\tilde{\rho} = \rho^{-1}$):

$$\begin{vmatrix} -\tilde{\rho} \sin \alpha & +\tilde{\rho} \cos \alpha & 0 \\ -\tilde{\rho} \sin \delta \cos \alpha & -\tilde{\rho} \sin \delta \sin \alpha & +\tilde{\rho} \cos \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix}. \quad (7.4)$$

Обозначим через

$$x_{E_i} = \frac{\partial x}{\partial E_i}; \quad y_{E_i} = \frac{\partial y}{\partial E_i}; \quad z_{E_i} = \frac{\partial z}{\partial E_i} \quad (7.5)$$

частные производные гелиоцентрических координат по элементам. Тогда

$$dx = \sum x_{E_i} dE_i; \dots,$$

или, в матричной форме,

$$\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{E_1} \dots x_{E_6} \\ y_{E_1} \dots y_{E_6} \\ z_{E_1} \dots z_{E_6} \end{vmatrix} \{dE_1, dE_2, \dots, dE_6\}, \quad (7.6)$$

где символом $\{\dots\}$ обозначена, как обычно, одностолбцовая матрица.

Подстановка выражения (7.6) в уравнения (7.4), выполняемая всегда численно, дает искомые условные уравнения

$$\begin{vmatrix} (\alpha, 1) (\alpha, 2) \dots (\alpha, 6) \\ (\delta, 1) (\delta, 2) \dots (\delta, 6) \end{vmatrix} \{dE_1, \dots, dE_6\} = \begin{vmatrix} \cos \delta d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix}, \quad (7.7)$$

где (α, i) , (δ, i) означают коэффициенты при dE_i .

Уравнения (7.7), составленные для всех рассматриваемых наблюдений (или нормальных мест), решаются способом наименьших квадратов. Это дает вероятнейшие значения искомых поправок dE_1, \dots, dE_6 и их средние ошибки.

Первый этап работы по составлению уравнений (7.7) заключается в вычислении для каждого наблюдения коэффициентов уравнений (7.4). Это выполняется весьма просто. Второй этап — вычисление восемнадцати частных производных (7.5) — представляет значительно более сложную задачу.

При вычислении этих производных удобно разделить элементы орбиты на две группы: на элементы внутренние и внешние. Внутренними элементами будем называть те,

которые определяют движение по орбите, т. е. a , e , M_0 для эллиптического движения и q , T для движения параболического. Внешними элементами будем называть элементы Ω , i , ω (или им эквивалентные), определяющие положение орбиты относительно избранной координатной системы.

§ 8. Производные координат по внешним элементам

Положение орбиты в пространстве может определяться либо эллиптическими элементами Ω , i , ω , либо экваториальными элементами Ω' , i' , ω' .

Чтобы найти производные x , y , z по экваториальным элементам, заметим, что перемещение орбиты из положения с элементами Ω' , i' , ω' в положение, соответствующее элементам $\Omega' + d\Omega'$, $i' + di'$, $\omega' + d\omega'$, можно рассматривать как результат бесконечно малого поворота вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат S . Обозначим через $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$ проекции вектора вращения на оси координат. Изменения координат точки x , y , z орбиты, вызванные этим вращением, даются, как известно, формулами

$$\left. \begin{aligned} dx &= z d\psi_y - y d\psi_z, \\ dy &= x d\psi_z - z d\psi_x, \\ dz &= y d\psi_x - x d\psi_y. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Подстановка этих выражений (совместно с дифференциалами x , y , z по другим элементам) в равенства (7.4) даст условные уравнения, позволяющие найти компоненты вращения $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$. Остается показать, как от этих компонентов перейти к искомым величинам $d\Omega'$, di' , $d\omega'$.

Обозначим через SN положительное направление линии узлов, а через $S\xi$ — положительное направление нормали к плоскости орбиты.

Рассматриваемое нами вращение плоскости орбиты можно, очевидно, получить в результате трех вращений: поворота на угол $d\Omega'$ вокруг оси Sz , поворота на угол di' вокруг SN , и поворота на угол $d\omega'$ вокруг $S\xi$. Поэтому

$$\begin{aligned} d\psi_x &= d\Omega' \cos(xSz) + di' \cos(xSN) + d\omega' \cos(xS\xi), \\ d\psi_y &= d\Omega' \cos(ySz) + di' \cos(ySN) + d\omega' \cos(yS\xi), \\ d\psi_z &= d\Omega' \cos(zSz) + di' \cos(zSN) + d\omega' \cos(zS\xi). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos(xS\xi) &= R_x = + \sin i' \sin \Omega', \\ \cos(yS\xi) &= R_y = - \sin i' \cos \Omega', \\ \cos(zS\xi) &= R_z = + \cos i', \end{aligned}$$

то эти равенства дают

$$\left. \begin{aligned} d\psi_x &= di' \cos \Omega' + d\omega' \sin i' \sin \Omega', \\ d\psi_y &= di' \sin \Omega' - d\omega' \sin i' \cos \Omega', \\ d\psi_z &= d\Omega' + d\omega' \cos i', \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \sin i' d\omega' &= d\psi_x \sin \Omega' - d\psi_y \cos \Omega', \\ di' &= d\psi_x \cos \Omega' + d\psi_y \sin \Omega', \\ d\Omega' &= d\psi_z - d\omega' \cos i'. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Для получения соответствующих поправок $d\Omega$, di , $d\omega$ эклиптических элементов проще всего поступить следующим образом. Рассмотрим наряду с экваториальной координатной системой $Sxyz$ еще эклиптическую гелиоцентрическую систему $S\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Так как эта система получается из экваториальной поворотом вокруг оси Sx на угол ε , то проекции вектора вращения на эклиптические координатные оси равны

$$\left. \begin{aligned} d\psi_{\bar{x}} &= d\psi_x, \\ d\psi_{\bar{y}} &= +d\psi_y \cos \varepsilon + d\psi_z \sin \varepsilon, \\ d\psi_{\bar{z}} &= -d\psi_y \sin \varepsilon + d\psi_z \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

После того как по этим формулам вычислены эклиптические компоненты вектора вращения, формулы

$$\left. \begin{aligned} \sin i d\omega &= d\psi_{\bar{x}} \sin \Omega - d\psi_{\bar{y}} \cos \Omega, \\ di &= d\psi_{\bar{x}} \cos \Omega + d\psi_{\bar{y}} \sin \Omega, \\ d\Omega &= d\psi_{\bar{z}} - d\omega \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

аналогичные (8.3), дадут искомые поправки эклиптических элементов.

В том случае, когда наклон орбиты мал, последние соотношения полезно дополнить еще таким:

$$d\pi = d(\Omega + \omega) = d\psi_z + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i d\omega. \quad (8.6)$$

Примечание 1. Проекции вектора вращения на экваториальные оси координат были введены в употребление Эккертом и Брауэром [1937]. До этого вместо них употреблялись проекции dp , dq , ds вектора вращения на орбитальные оси координат. Очевидно,

$$\left\| \begin{array}{l} dp \\ dq \\ ds \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{lll} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} d\psi_x \\ d\psi_y \\ d\psi_z \end{array} \right\|, \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned} di &= dp \cos \omega - dq \sin \omega, \\ \sin i d\Omega &= dp \sin \omega + dq \cos \omega, \\ d\omega + \cos i d\Omega &= ds. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Для того чтобы ввести dp , dq , ds в условные уравнения (7.7), служат формулы

$$\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_y z - P_z y & Q_y z - Q_z y & R_y z - R_z y \\ P_z x - P_x z & Q_z x - Q_x z & R_z x - R_x z \\ P_x y - P_y x & Q_x y - Q_y x & R_x y - R_y x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dp \\ dq \\ ds \end{vmatrix}, \quad (8.9)$$

непосредственно вытекающие из (8.1) и (8.7).

Формулы (8.9) значительно сложнее, чем (8.1). Однако применение их может быть выгоднее в тех случаях, когда средние ошибки для dp , dq , ds получаются существенно меньшими, нежели для $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$.

Можно так же, как было отмечено Н. С. Самойловой-Яхонтовой [1944], ввести в условные уравнения непосредственно искомые поправки $d\Omega$, di , $d\omega$. Для этого нужно из соотношений (8.1), (8.2) и (8.5) исключить $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$, $d\psi_{\bar{x}}$, $d\psi_{\bar{y}}$, $d\psi_{\bar{z}}$. Это дает

$$\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\Omega \\ di \\ d\omega \end{vmatrix}, \quad (8.10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -z \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon; & a_{12} &= N_y z - N_z y; & a_{13} &= R_y z - R_z y, \\ a_{21} &= x \cos \varepsilon; & a_{22} &= N_z x - N_x z; & a_{23} &= R_z x - R_x z, \\ a_{31} &= x \sin \varepsilon; & a_{32} &= N_x y - N_y x; & a_{33} &= R_x y - R_y x. \end{aligned}$$

причем

$$N_x = \cos \Omega; \quad N_y = \sin \Omega \cos \varepsilon; \quad N_z = \cos \Omega \sin \varepsilon.$$

Примечание II. Т. Банахевич [1925] дал формулы, позволяющие по компонентам вектора вращения dp , dq , ds (или $d\psi_x$, $d\psi_y$, $d\psi_z$) находить непосредственно новые компоненты векторных элементов P , Q , R , минуя вычисление новых значений элементов. В том случае, когда квадратом вектора вращения можно пренебречь, эти формулы принимают вид

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -ds & +dq \\ +ds & 1 & -dp \\ -dq & +dp & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x^0 & Q_x^0 & R_x^0 \\ P_y^0 & Q_y^0 & R_y^0 \\ P_z^0 & Q_z^0 & R_z^0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & +d\psi_z & -d\psi_y \\ -d\psi_z & 1 & +d\psi_x \\ +d\psi_y & -d\psi_x & 1 \end{vmatrix},$$

где через P_x^0, \dots, R_z^0 обозначены старые значения направляющих косинусов, а через P_x, \dots, R_z — новые значения, соответствующие исправленным элементам.

§ 9. Производные координат по внутренним элементам. Случай эллиптической орбиты

Наиболее простые и удобные выражения для производных экваториальных координат x , y , z по внутренним элементам получаются, если для каждого рассматриваемого момента считать известными не только x , y , z , но и их производные по времени \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . Этот путь был указан Эккертом и Брауэром [1937].

Обратимся к основным формулам эллиптического движения. Прежде всего заметим, что из соотношения

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

связывающего t и M , вытекает

$$\dot{x} = n \frac{\partial x}{\partial M}; \quad \dot{y} = n \frac{\partial y}{\partial M}; \quad \dot{z} = n \frac{\partial z}{\partial M},$$

где через \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} обозначены производные координат по t .

Отсюда, обозначая через $\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)$, ... частные производные, взятые по n , фигурирующему в координатах явно (а не через посредство a), получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) = \frac{\dot{x}}{n} (t - t_0); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right) = \frac{\dot{y}}{n} (t - t_0); \quad \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right) = \frac{\dot{z}}{n} (t - t_0), \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial M_0} = \frac{\dot{x}}{n}; \quad \frac{\partial y}{\partial M_0} = \frac{\dot{y}}{n}; \quad \frac{\partial z}{\partial M_0} = \frac{\dot{z}}{n}. \quad (9.2)$$

Переходя к нахождению частных производных от координат по a , заметим, что x , y , z зависят от a двояко: с одной стороны, они пропорциональны r , а следовательно, и a , с другой стороны — координаты зависят от n , связанного с a соотношением

$$n = ka^{-3/2},$$

дающим

$$\frac{dn}{da} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} + \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right) \frac{dn}{da}.$$

Пользуясь равенствами (9.1), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial x}{\partial a} &= x - \frac{3}{2} \dot{x} (t - t_0), \\ a \frac{\partial y}{\partial a} &= y - \frac{3}{2} \dot{y} (t - t_0), \\ a \frac{\partial z}{\partial a} &= z - \frac{3}{2} \dot{z} (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Остается найти производные по эксцентриситету. Равенство

$$x = aP_x(\cos E - e) + aQ_x \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (9.4)$$

дает

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -aP_x - \frac{ae}{\sqrt{1 - e^2}} Q_x \sin E + \frac{\partial x}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial e}.$$

Но

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial E} \dot{E}; \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a}{r} \sin E; \quad \dot{E} = \frac{na}{r}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -aP_x - \frac{ae}{\sqrt{1 - e^2}} Q_x \sin E + \frac{\dot{x}}{n} \sin E.$$

С другой стороны, из равенства

$$r = a(1 - e \cos E)$$

выводим

$$\dot{r} = ae \sin E \cdot \dot{E} = \frac{nea^2}{r} \sin E.$$

Исключая при помощи этого соотношения $\sin E$, получим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -A_x - \left(\frac{e}{1 - e^2} B_x - \frac{\dot{x}}{n} \right) \frac{r\dot{r}}{nea^2}, \quad (9.5)$$

где, как обычно, положено

$$A_x = aP_x; \quad B_x = a\sqrt{1 - e^2} Q_x.$$

Чтобы исключить из соотношения (9.5) эти величины, выражение (9.4) и его производную по t напомним так:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x(\cos E - e) + B_x \sin E, \\ \dot{x} &= \left(-A_x \sin E + B_x \cos E \right) \frac{na}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

отсюда

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{ax}{r} \cos E - \frac{\dot{x}}{n} \sin E, \\ B_x &= \frac{ax}{r} \sin E + \frac{\dot{x}}{n} (\cos E - e) \end{aligned}$$

и потому, подставив эти значения в (9.5), получим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = -\frac{ax}{r} \left[\cos E + \frac{e}{1 - e^2} \sin^2 E \right] + \frac{\dot{x}}{n} \left[2 - \frac{e}{1 - e^2} (\cos E - e) \right] \frac{r\dot{r}}{nea^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial e} = e^{-1} \mathcal{E} x + e^{-1} \mathcal{E}' \dot{x}, \quad (9.7)$$

где, как легко видеть,

$$e^{-1}\mathcal{E} = -\frac{(1-e^2)\cos E + e\sin^2 E}{(1-e^2)(1-e\cos E)} = \frac{r+p-2a}{ep}$$

$$e^{-1}\mathcal{E}' = \frac{2-e^2-e\cos E}{n(1-e^2)} \frac{r\dot{r}}{nea^2},$$

откуда

$$\mathcal{E} = 1 + \frac{r}{p} - \frac{2}{1-e^2}; \quad \mathcal{E}' = k^{-2}arr \left(1 + \frac{r}{p}\right), \quad (9.8)$$

$$k^{-2} = 3379,381; \quad \lg k^{-2} = 3,528\ 8371.$$

Соотношение

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$$

служит для вычисления $r\dot{r}$.

§ 10. Продолжение. Случай параболической орбиты

При исправлении кометной орбиты методом вариации элементов могут встретиться три случая. Если исправляемая орбита — эллиптическая с умеренным эксцентриситетом, как это имеет место для короткопериодических комет, то применяются формулы предыдущего параграфа. Другой, особенно часто встречающийся случай, это тот, когда параболическая орбита настолько хорошо представляет наблюдения, что ее можно положить в основу вычисления окончательной орбиты. Наконец, в третьем случае, встречающемся при изучении движения долгопериодических комет, эксцентриситет хотя и близок к единице, но не настолько, чтобы можно было пренебречь квадратом разности $e-1$ и за исправляемую орбиту взять параболическую.

В этом параграфе мы рассмотрим второй случай, когда при помощи исходной орбиты с внутренними элементами $T, q, e=1$ ищется орбита с вероятнейшими значениями всех шести элементов. Задача приводится, таким образом, к нахождению значений частных производных x, y, z по T, q, e при $e=1$.

В рассматриваемом случае можно воспользоваться формулами (4.6), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) гл. IV:

$$x = P_x\xi + Q_x\eta; \quad y = P_y\xi + Q_y\eta; \quad z = P_z\xi + Q_z\eta, \quad (10.1)$$

$$\xi = q(1-\sigma^2); \quad \eta = kq\sqrt{1+eU(\zeta)}\sigma, \quad (10.2)$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2}(1-e)\sigma^2,$$

а σ определяется уравнением

$$\sigma U(\zeta) + \sigma^3 V(\zeta) = B, \quad (10.8)$$

в котором

$$B = q^{-3/2}(t - T) \quad (10.4)$$

$$U(\zeta) = \frac{V\sqrt{2}}{k} \left(1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{8}\zeta^2 - \dots \right),$$

$$V(\zeta) = \frac{V\sqrt{2}}{k} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\zeta + \frac{3}{56}\zeta^2 + \dots \right).$$

Проще всего выражаются производные по T . Равенство (10.4) показывает, что

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\dot{x}; \quad \frac{\partial y}{\partial T} = -\dot{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial T} = -\dot{z}. \quad (10.5)$$

При вычислении производных по q надо учесть, что x, y, z , с одной стороны, пропорциональны q , а с другой — зависят от q через посредство B . Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{x}{q} + \frac{\partial x}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial q}.$$

Но

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \dot{x}q^{3/2}; \quad \frac{\partial B}{\partial q} = -\frac{3}{2}q^{-5/2}(t - T),$$

поэтому окончательно

$$\left. \begin{aligned} q \frac{\partial x}{\partial q} &= x - \frac{3}{2} \dot{x}(t - T), \\ q \frac{\partial y}{\partial q} &= y - \frac{3}{2} \dot{y}(t - T), \\ q \frac{\partial z}{\partial q} &= z - \frac{3}{2} \dot{z}(t - T). \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Выражения производных (10.5) и (10.6) не зависят от величины e . Частные производные по e , к которым мы теперь переходим, будем вычислять только для частного значения $e=1$.

Дифференцирование уравнения (10.3) дает

$$[U(\zeta) + 3\sigma^2 V(\zeta)] \frac{\partial \sigma}{\partial e} + \sigma \frac{\partial U(\zeta)}{\partial e} + \sigma^3 \frac{\partial V(\zeta)}{\partial e} = 0,$$

откуда, полагая $e=1$ и принимая во внимание, что производные

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial e} = U'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial e}; \quad \frac{\partial V(\zeta)}{\partial e} = V'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial e}$$

при этом значении e равны соответственно

$$\frac{V\sqrt{2}}{k} \frac{1}{4} \sigma_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{V\sqrt{2}}{k} \frac{1}{20} \sigma_0^2,$$

получим

$$(1 + \sigma_0^2) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial e} \right)_0 + \frac{1}{4} \sigma_0^3 - \frac{1}{20} \sigma_0^5 = 0. \quad (10.7)$$

Здесь через σ_0 и $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial e}\right)_0$ обозначены σ и $\frac{\partial \sigma}{\partial e}$ для $e=1$, так что

$$\sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{v}{2},$$

где v — истинная аномалия параболического движения.

Обратимся теперь к формулам (10.1) и (10.2). Прежде всего имеем

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \left(\frac{\partial x}{\partial e}\right) + \frac{\partial x}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial e}. \quad (10.8)$$

Обозначенная через $\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)$ производная берется по e , фигурирующему в указанных формулах явно, а не через посредство σ . Поэтому

$$\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right) = Q_x \left(\frac{\partial \eta}{\partial e}\right) = \frac{1}{2} kqQ_x [(1+e)^{-1/2} U(\zeta) \sigma - (1+e)^{1/2} U'(\zeta) \sigma^3],$$

откуда, при $e=1$,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right) = \frac{1}{2} qQ_x (\sigma_0 + \sigma_0^3) = \frac{1}{2} \sigma_0 r Q_x, \quad (10.9)$$

потому что (§ 4 гл. IV)

$$r = q(1 + e\sigma^2).$$

Остается вычислить входящую в равенство (10.8) производную $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$. Так как

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \dot{\sigma},$$

а из уравнения (10.3) имеем

$$(1 + \sigma_0^2) \dot{\sigma}_0 = \frac{k}{\sqrt{2}} q^{-3/2},$$

то при $e=1$ окончательно получим

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\sqrt{2}}{k} q^{3/2} (1 + \sigma_0^2) \dot{x}. \quad (10.10)$$

Пользуясь равенствами (10.7), (10.9) и (10.10), из формулы (10.8) получим следующее выражение искомой производной по эксцентриситету (для $e=1$):

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{1}{2} \sigma r Q_x + \frac{\sqrt{2}}{20k} q^{3/2} \sigma^3 (\sigma^2 - 5) \dot{x}, \quad (10.11)$$

причем через σ здесь обозначена величина, соответствующая исправляемой параболической орбите, т. е. получаемая из

уравнения

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\sigma + \frac{1}{3} \sigma^3 \right) = q^{-3/2} (t - T). \quad (10.12)$$

Из формул (10.1) легко найти, что

$$Q_x = \frac{\xi \dot{x} - \dot{\xi} x}{\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta}.$$

Так как для параболического движения

$$\xi = q(1 - \sigma^2); \quad \eta = 2q\sigma,$$

то это дает

$$Q_x = \frac{\sigma}{r} x + \frac{\sqrt{q}}{k\sqrt{2}} (1 - \sigma^2) \dot{x}.$$

Подстановка этого выражения в равенство (10.11) приводит к следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= \frac{1}{2} \sigma^2 x + \frac{\sqrt{2}}{4k} q^{3/2} \sigma \left(1 - \sigma^2 - \frac{4}{5} \sigma^4 \right) \dot{x}, \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= \frac{1}{2} \sigma^2 y + \frac{\sqrt{2}}{4k} q^{3/2} \sigma \left(1 - \sigma^2 - \frac{4}{5} \sigma^4 \right) \dot{y}, \\ \frac{\partial z}{\partial e} &= \frac{1}{2} \sigma^2 z + \frac{\sqrt{2}}{4k} q^{3/2} \sigma \left(1 - \sigma^2 - \frac{4}{5} \sigma^4 \right) \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4k} = 20,55292; \quad \lg \frac{\sqrt{2}}{4k} = 1,3128736.$$

Формулы (10.5), (10.6) и (10.13) полностью решают поставленную задачу.

Примечание. Формулы этого параграфа, распространяющие метод Эккерта и Брауэра на случай исправления параболической орбиты, были даны М. Ф. Субботиным [1941]. Д. К. Куликов [1951] дал другой вывод этих формул и предложил следующую модификацию выражений (10.13).

Равенство (10.12) показывает, что

$$\frac{\sqrt{2}}{4k} q^{3/2} \sigma = \frac{3}{2} \frac{t - T}{2\sigma^2 + 6}.$$

Подстановка этого выражения в (10.13) после выделения в правых частях выражений (10.6) дает следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= Lx - K \left[x - \frac{3}{2} \dot{x} (t - T) \right], \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= Ly - K \left[y - \frac{3}{2} \dot{y} (t - T) \right], \\ \frac{\partial z}{\partial e} &= Lz - K \left[z - \frac{3}{2} \dot{z} (t - T) \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

где

$$L = \frac{\sigma' + 10\sigma^2 + 5}{10\sigma^2 + 30}, \quad K = \frac{4\sigma' + 5\sigma^2 - 5}{10\sigma^2 + 30}.$$

Указанная работа содержит таблицы, дающие L и K с шестью десятичными знаками по аргументу

$$\lambda = q^{-2}r^2 = (1 + \sigma^2)^2$$

для $\lambda = 1$ (0,01) 10 (0,1) 100 (1) 1000.

§ 11. Продолжение. Орбиты с эксцентриситетами, очень близкими к единице

В начале § 10 было указано, что при исправлении кометных орбит могут встретиться три различных случая. Нам остается рассмотреть последний из них. Он характеризуется тем, что величина $e - 1$ настолько мала, что формулы, выведенные в § 9, становятся неудобными или даже неприменимыми; но, с другой стороны, эта величина еще не настолько мала, чтобы ее квадратом можно было пренебречь и употребить формулы предыдущего параграфа. Такой случай встречается при улучшении орбит долгопериодических комет; он может также встретиться, хотя и крайне редко, при исправлении гиперболической орбиты.

В этом случае за исправляемые внутренние элементы вместо M_0 , a и e выгоднее принять T , $q = a(1 - e)$ и константу энергии $h = -a^{-1}$.

Такой выбор исправляемых элементов особенно удобен для эллиптических орбит, так как он позволяет наиболее надежно судить о границах неопределенности периода обращения, что здесь представляет особый интерес. С другой стороны, константа энергии столь же хорошо характеризует род орбиты, как и эксцентриситет. Величина эксцентриситета, к тому же, удобно вычисляется по формуле

$$e = 1 + qh. \tag{11.1}$$

Обозначим через ∂x ту часть дифференциала dx , которая берется по внутренним элементам. Тогда

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T} dT + \frac{\partial x}{\partial q} dq + \frac{\partial x}{\partial h} dh. \tag{11.2}$$

Так как координаты кометы являются функциями разности $t - T$, то

$$\frac{\partial x}{\partial T} = -\dot{x}; \quad \frac{\partial y}{\partial T} = -\dot{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial T} = -\dot{z}. \tag{11.3}$$

Для вычисления других производных, входящих в выражение (11.2), заметим, что в случае, когда за внутренние элементы орбиты принимаются T , a и e , имеем

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial T} dT + \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial e} de.$$

Поэтому, пользуясь выражениями (9.3), (9.7) и (9.8), а также учитывая, что

$$da = a^2 dh; \quad de = h dq + q dh,$$

будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial q} = Qx + Q'\dot{x}; \quad \frac{\partial x}{\partial h} = Hx + H'\dot{x}, \quad (11.4)$$

где

$$Q = \frac{1 + e^2 + hr}{ep}; \quad Q' = -\frac{r\dot{r}(r+p)}{k^2 ep}, \quad (11.5)$$

$$H = \frac{r-q}{e(1+e)}; \quad H' = -\frac{3}{2}a(t-T) - aqQ'. \quad (11.6)$$

В рассматриваемом нами случае, когда эксцентриситет близок к единице, а абсолютная величина a очень велика, коэффициенты Q , Q' и H находятся по этим формулам без затруднений, но выражение для H' должно быть заменено другим, более удобным для вычислений.

Обратимся для этого к формулам, данным в § 4 гл. IV. Полученное там соотношение (4.7) показывает, что уравнение Кеплера можно представить в такой форме:

$$a(t-T) = \sqrt{2}k^{-1}a^{5/2}(1-e)^{3/2}[\sigma \cos g + \sigma^3 G(g)], \quad (11.7)$$

где

$$g = \frac{1}{2}E; \quad \sigma = \frac{\sqrt{2} \sin g}{\sqrt{1-e}}; \quad G(g) = \frac{2g - \sin 2g}{4 \sin^3 g}.$$

С другой стороны, из формулы (4.15) гл. IV легко вывести равенство

$$arr' = kea^{3/2} \sin E = \sqrt{2}kea^{3/2}\sigma(1-e)^{1/2}(1-\zeta)^{1/2}, \quad (11.8)$$

где

$$\zeta = \sin^2 g = \frac{1}{2}(1-e)\sigma^2.$$

Подстановка выражений (11.7) и (11.8) в формулы (11.5) и (11.6) для H' дает

$$H' = maq^{3/2} \left[\frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1+e} \sqrt{1-\zeta} - 3\sigma^3 G(g) \right],$$

где для краткости положено

$$m = 1/\sqrt{2}k.$$

Учитывая, что $G(0) = 1/3$, это выражение напомним так:

$$H' = H'_0 + H'_1,$$

где

$$H'_0 = maq^{3/2} \left(\frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1+e} - \sigma^3 \right) = mq^{5/2} \frac{\sigma - \sigma^3}{1+e},$$

$$H'_1 = maq^{3/2} \left\{ \frac{\sigma - e\sigma + 2e\sigma^3}{1+e} (\sqrt{1-\zeta} - 1) - \sigma^3 [3G(g) - 1] \right\}.$$

Введем функцию $T(\zeta)$, определяемую равенством

$$3G(g) - 1 = 2\sqrt{2k\zeta}T(\zeta) = \sqrt{2k}(1-e)\sigma^2T(\zeta), \quad (11.9)$$

и заметим, что

$$\sqrt{1-\zeta} - 1 = \frac{-\zeta}{1+\sqrt{1-\zeta}} = -\frac{(1-e)\sigma^2}{2(1+\sqrt{1-\zeta})}.$$

Тогда

$$H'_1 = -q^{5/2}\sigma \left[\frac{m}{2+2e} \frac{(1-e)\sigma^2 - 2e\sigma^4}{1+\sqrt{1-\zeta}} + \sigma^4 T(\zeta) \right].$$

Таким образом, для вычисления коэффициента H' окончательно имеем такую формулу:

$$H' = q^{5/2}\sigma \left[\frac{m}{1+e} \left(1 - \sigma^2 - \frac{\zeta + e\sigma^4}{1+\sqrt{1-\zeta}} \right) - \sigma^4 T(\zeta) \right], \quad (11.10)$$

$$m = 41,105\,8431; \quad \lg m = 1,613\,9036,$$

вполне удобную при значениях эксцентриситета, сколь угодно близких к единице.

Полезно отметить, что соотношение (11.8) позволяет представить выражение (11.5) для Q' в такой форме:

$$Q' = -2m\sigma q^{1/2} \sqrt{1-\zeta} \left(\frac{r}{p} + 1 \right). \quad (11.11)$$

Итак, для рассматриваемого момента t нужно прежде всего решить уравнение (11.7), приведенное (§ 4 гл. IV) к виду (4.11), относительно σ . Это даст и величину ζ . По формулам (11.5), (11.6), (11.10) и (11.11) найдем Q , Q' , H , H' , после чего равенства (11.4) дадут искомые производные координат по элементам.

Таблица XII дает значения функции $T(\zeta)$, фигурирующей в формуле (11.10), с шестью десятичными знаками для $\zeta = -0,200(0,001)0,200$.

Можно показать [Субботин, 1959], что

$$T(\zeta) = \frac{3m}{2} \sum_0^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{\zeta^n}{2n+5}.$$

Эта работа содержит таблицу, дающую функцию $T(\zeta)$ с семью десятичными знаками.

Легко видеть, что

$$V(\zeta) = \frac{2}{3} m + \frac{4}{3} \zeta T(\zeta),$$

где через $V(\zeta)$ обозначена функция, рассматривавшаяся нами ранее (§ 4 гл. IV и § 13 гл. V).

Примечание. Выведенные в этом параграфе общие формулы удобно применять и в том случае, когда исправляемая орбита параболическая.

Полагая $e=1$, $h=0$, $\zeta=0$, $p=2q$ и учитывая, что $T(0) = \frac{3}{20} m$, получим:

$$\left. \begin{aligned} Q &= q^{-1}; & H &= \frac{1}{2}(r - q), \\ Q' &= -k^2 r \dot{r} \left(\frac{r}{p} + 1 \right) = -2m\sigma \sqrt{q} \left(\frac{r}{p} + 1 \right), \\ H' &= \frac{1}{2} m \sigma q^2 \sqrt{q} \left(1 - \sigma^2 - \frac{4}{5} \sigma^4 \right), \\ 2m &= 82,211\ 6863; & \frac{1}{2} m &= 20,552\ 9216. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Здесь σ берется из таблицы V или вычисляется при помощи таблицы VI.

Когда найдены исправленные значения q и h , формула (11.1) даст эксцентриситет. Если $h < 0$, то соотношение

$$P = 365,256\ 8983 (-h)^{-1/2}$$

даст период обращения, выраженный в средних солнечных сутках.

§ 12. Составление условных уравнений

Исправление орбиты методом вариации элементов начинается с вычисления (при помощи взятой для исправления орбиты) эфемериды для промежутка времени, охватываемого наблюдениями. В тех случаях, когда стремятся к получению возможно более точных результатов, например, при вычислении окончательной орбиты кометы, гелиоцентрические координаты x , y , z вычисляются с учетом возмущений. Вычисление этих координат и переход от них к геоцентрическим координатам ρ , α , δ выполняется обычно с семью десятичными знаками.

Полученная таким образом эфемерида сравнивается с наблюдениями. Здесь необходим учет разности между эфемеридным временем, которое является аргументом эфемериды, и всемирным временем, в котором даются моменты наблюдений.

Сравнение эфемериды с наблюдениями, подробно рассмотренное в гл. VII, дает возможность заметить и удалить ошибочные наблюдения, а также заменить более или менее значительные группы наблюдений соответствующими им нормальными местами (§ 2). В результате этой части работы для каждого наблюдения (или нормального места) будем иметь разности «наблюдение — вычисление», иначе говоря, величины

$$\cos \delta \cdot d\alpha = \cos \delta \cdot (\alpha^o - \alpha^c); \quad d\delta = \delta^o - \delta^c, \quad (12.1)$$

являющиеся правыми частями уравнений (7.4), т. е. «первых промежуточных уравнений».

Уравнения (7.4) выписываются в форме таблицы (или двух таблиц, отдельно для α и δ):

$$\begin{array}{ccc} dx & dy & dz \\ \left. \begin{array}{l} -\tilde{\rho} \sin \alpha \\ -\tilde{\rho} \sin \delta \cos \alpha \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \tilde{\rho} \cos \alpha \\ -\tilde{\rho} \sin \delta \sin \alpha \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} 0 = \cos \delta da, \\ \tilde{\rho} \cos \delta = d\delta. \end{array} \right\} \quad (12.2) \end{array}$$

При вычислении коэффициентов этих уравнений α и δ можно взять равными либо α^o , δ^o , либо α^c , δ^c , либо некоторым средним между ними (округленным) значениям. Свободные члены, т. е. величины (12.1), выражаются обычно в секундах дуги.

Следующим этапом работы является составление «вторых промежуточных уравнений», т. е. уравнений (7.6), которые также записываются в табличной форме:

$$\begin{array}{cccc} dE_1 & dE_2 & \dots & dE_s \\ \left. \begin{array}{l} dx = x_{E_1} \\ dy = y_{E_1} \\ dz = z_{E_1} \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x_{E_2} \\ y_{E_2} \\ z_{E_2} \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x_{E_s} \\ y_{E_s} \\ z_{E_s} \end{array} \right\} \quad (12.3) \end{array}$$

Чтобы вычислить коэффициенты этих уравнений, нужно сначала найти для момента каждого нормального места (или отдельного наблюдения) величины x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} .

Так как в процессе вычисления эфемериды уже получены таблицы, содержащие каждую из координат x , y , z для равноотстоящих моментов времени $t_k = t_0 + k\omega$, где ω — шаг эфемериды, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то x , y , z находятся интерполированием.

Для этого применяется обычно формула Бесселя

$$f(t_0 + n\omega) = f_0 + n^2 f_{1/2} + B_2 f_{1/2}^2 + B_3 f_{1/2}^3 + \dots, \quad (12.4)$$

в которой

$$B_2 = \frac{1}{2} n(n-1); \quad B_3 = \frac{1}{6} n(n-1)\left(n - \frac{1}{2}\right);$$

$$B_4 = \frac{1}{24} (n+1)n(n-1)(n-2);$$

$$B_5 = \frac{1}{120} (n+1)n(n-1)(n-2)\left(n - \frac{1}{2}\right); \dots,$$

причем за t_0 берется такой момент эфемериды, чтобы n удовлетворяло неравенству $0 < n < 1$.

Дифференцирование формулы (12.2) по n дает

$$\omega f'(t_0 + n\omega) = f_{1/2}^1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) f_{1/2}^2 + B_3^1 f_{1/2}^3 + \dots, \quad (12.5)$$

где

$$B_3^1 = \frac{1}{12}(6n^2 - 6n + 1); \quad B_4^1 = \frac{1}{12}(2n^3 - 3n^2 - n + 1);$$

$$B_5^1 = \frac{1}{120}(5n^4 - 10n^3 + 5n - 1); \dots$$

Эта формула служит для вычисления производных \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} .

Таблицы XIII и XIV дают коэффициенты формул (12.4) и (12.5) для $n=0,00(0,01)1,00$.

Имеются специальные сборники таблиц коэффициентов интерполяционных формул [Интерполяционные таблицы, 1956], [Кармазина и Курочкина, 1956], в которых шаг равен 0,001 или даже 0,0001.

Для вычисления производных координат иногда могут быть с успехом применены некоторые специальные приемы [Самойлова-Яхонтова, 1944], [Ханина, 1955].

Закончив вычисление коэффициентов вторых промежуточных уравнений (12.3), подставляем полученные выражения dx , dy , dz в первые промежуточные уравнения (12.2). Это даст для каждого нормального места два условных уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1 \quad dE_2 \quad \dots \quad dE_6}{(\alpha, 1) (\alpha, 2) \dots (\alpha, 6) = \cos \delta d\alpha, \\ (\delta, 1) (\delta, 2) \dots (\delta, 6) = d\delta. \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Выбор подлежащих исправлению элементов, а следовательно, и неизвестных dE_1, \dots, dE_6 , может быть сделан различно, вследствие чего вторые промежуточные уравнения (12.3) могут иметь различный вид.

Что касается внешних элементов, то чаще всего полагают

$$dE_1 = d\psi_x; \quad dE_2 = d\psi_y; \quad dE_3 = d\psi_z$$

и для вычисления поправок $d\omega$, di , $d\Omega$ пользуются формулами (8.4) и (8.5).

Иногда может оказаться более удобным положить непосредственно

$$dE_1 = d\Omega; \quad dE_2 = di; \quad dE_3 = d\omega$$

и воспользоваться для вычисления производных формулами (8.10).

В отношении выбора внутренних элементов приходится различать три случая.

Если исправляется эллиптическая орбита умеренного эксцентриситета, то можно положить

$$dE_4 = dM_0; \quad dE_5 = a^{-1} da; \quad dE_6 = e^{-1} de.$$

Тогда в уравнениях (12.3) будем иметь на основании (9.2), (9.3) и (9.7)

$$x_{E_4} = \frac{\dot{x}}{n}; \quad x_{E_5} = x - \frac{3}{2} \dot{x}(t - t_0); \quad x_{E_6} = \mathcal{E}x + \mathcal{E}'\dot{x}$$

и аналогичные выражения для двух других координат. Коэффициенты \mathcal{E} и \mathcal{E}' даются формулами (9.8).

Если эксцентриситет исправляемой орбиты близок к единице, то следует положить

$$dE_4 = dT; \quad dE_5 = dq; \quad dE_6 = dh. \quad (12.7)$$

Тогда

$$x_{E_4} = -\dot{x}; \quad x_{E_5} = Qx + Q'\dot{x}; \quad x_{E_6} = Hx + H'\dot{x},$$

где Q и Q' даются равенствами (11.5) и (11.11); H и H' — равенствами (11.6) и (11.10).

После того как найдены поправки dq и dh к исходным значениям q и h , эксцентриситет исправленной орбиты вычисляется по формуле

$$e = 1 + (q + dq)(h + dh). \quad (12.8)$$

Наконец, в том случае, когда эксцентриситет исправляемой орбиты равен единице, можно применить один из двух следующих способов.

Можно взять те же элементы (12.7), как и в предыдущем случае, но для вычисления коэффициентов Q , Q' , H и H' воспользоваться формулами (11.12). После того как будут найдены поправки dq и dh , эксцентриситет окончательной орбиты получим по формуле (12.8), учитывая, что исходное значение h равно нулю.

С другой стороны, можно использовать метод, данный в § 10. В этом случае полагаем

$$dE_4 = dT, \quad dE_5 = q^{-1} dq, \quad dE_6 = de.$$

Таким образом, на основании (10.6),

$$x_{E_5} = x - \frac{3}{2}(t - T)\dot{x}; \quad \dots,$$

а для вычисления остальных коэффициентов служат формулы (10.5) и (10.13).

§ 13. Подготовка и выверка условных уравнений

Прежде чем переходить к решению условных уравнений по способу наименьших квадратов, выполняют некоторые подготовительные операции.

Если имеются основания считать, что нормальные места (или наблюдения), послужившие для составления условных уравнений, имеют различную точность, то каждое условное уравнение умножают на квадратный корень из его веса.

Назначение весов представляет довольно ответственную операцию, требующую учета многих обстоятельств. Здесь можно ограничиться лишь немногими общими указаниями, так как только изучение конкретных случаев вычисления окончательных орбит может дать более детальное представление об этом вопросе.

В XIX столетии обычно поступали чисто формально — вес нормального места, а следовательно, и получаемых из него условных уравнений принимался пропорциональным числу наблюдений, послуживших для составления этого нормального места. Но точность нормального места может зависеть не только от числа наблюдений, но и от других причин, например, от вида кометы, иногда очень быстро меняющегося. Кроме того, в случае неравномерного распределения наблюдений такой способ назначения весов может дать слишком большие преимущества одним частям орбиты перед другими и тем исказить окончательный результат. Учитывая все это, теперь веса назначают в более слабой зависимости от числа наблюдений. Например, всем нормальным местам, основанным на 1—4 наблюдениях, дают вес равный единице; нормальным местам, основанным на пяти и большем числе наблюдений, — вес, равный двум, или равный $2,25 = (1,5)^2$. Нередко все нормальные места берутся с одинаковым весом. Тогда умножение на квадратный корень из веса отпадает совсем.

Следующая операция заключается в приведении условных уравнений к так называемой численной однородности, т. е. к такому виду, когда все коэффициенты условных уравнений и их свободные члены не превышают по абсолютной величине единицы. Это может быть сделано следующим образом.

Обозначим через B наибольшую из абсолютных величин свободных членов условных уравнений, а через D_k — наибольшую абсолютную величину коэффициентов при неизвестной dE_k (после того как условные уравнения были уже умножены на квадратные корни из весов). Разделим столбец коэффициентов при dE_k на D_k , а все свободные члены на B . Это даст нам

уравнения, определяющие новые неизвестные

$$x_k = B^{-1} D_k dE_k \quad (k = 1, \dots, 6) \quad (13.1)$$

в таком виде:

$$\sum d_{ik} x_k = l_i, \quad (13.2)$$

где

$$|d_{ik}| \leq 1; \quad |l_i| \leq 1.$$

Численная однородность позволяет вести дальнейшие вычисления (составление нормальных уравнений) с фиксированным числом десятичных знаков.

После того как система (13.2) будет решена, формулы (13.1) дадут значения первоначальных неизвестных dE_k .

Вместо точных значений D_k и B достаточно взять грубо приближенные значения этих величин, например, ближайšie к ним степени 10.

Рассмотрим теперь вопрос о контроле работы по составлению условных уравнений, чему должно быть уделено особенное внимание, так как сделанные тут ошибки легко могут остаться незамеченными.

Большое внимание должно быть также уделено сравнению наблюдений с эфемеридой и вычислению всех вводимых здесь поправок и составлению нормальных мест, чтобы обеспечить безошибочность величин (12.1). Вычисление коэффициентов условных уравнений контролируется полностью обычно лишь по окончании всей работы, когда решение нормальных уравнений дало поправки dE_k . Этот контроль заключается в следующем.

Подставив в левые части условных уравнений найденные значения поправок dE_k , получим вместо стоящих в правых частях величин (12.1) некоторые другие величины $\cos \delta \cdot d\alpha^*$, $d\delta^*$, отличающиеся от (12.1) на остающиеся невязки соответствующих уравнений. С другой стороны, те же самые величины $\cos \delta \cdot d\alpha^*$, $d\delta^*$ можно найти, вычислив положение светила для момента каждого нормального места при помощи исправленных элементов $E_1 + dE_1, \dots, E_6 + dE_6$. Совпадение значений $\cos \delta \cdot d\alpha^*$ и $d\delta^*$, вычисленных этими двумя различными путями, служит контролем правильности коэффициентов условных уравнений.

Иногда для проверки коэффициентов условных уравнений на более раннем этапе работы ту же самую операцию проделывают, дав dE_1, \dots, dE_6 некоторые произвольные значения.

Заметим, что совпадение значений $\cos \delta d\alpha^*$, $d\delta^*$, вычисленных при помощи условных уравнений и непосредственно — при помощи окончательных значений элементов, служит еще доказательством законности применения дифференциальных формул, т. е. законности отбрасывания членов второго порядка.

§ 14. Составление нормальных уравнений

Условные уравнения (12.6) в их окончательной форме, т. е. после умножения на корень квадратный из веса и приведения к численной однородности, приняли вид (13.2). Задача приводится, таким образом, к нахождению неизвестных x_i из уравнений вида

$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{im}x_m = l_i \quad (14.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; n > m).$$

Поскольку в этой системе число уравнения превышает число неизвестных, ей нельзя удовлетворить (по крайней мере в общем случае) с полной точностью. Может идти речь только о нахождении таких значений неизвестных x_h , которые удовлетворяют уравнениям (14.1) лишь приближенно; иначе говоря, дают

$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{im}x_m = l_i + v_i, \quad (14.2)$$

где через v_1, v_2, \dots, v_n обозначены остающиеся невязки.

Соотношения (14.2) можно рассматривать как систему уравнений, которым должны совершенно точно удовлетворять $n+m$ неизвестных x_h и v_i . Такая система имеет в общем случае ∞^m решений. Но решение уравнений (14.2) становится, как сейчас увидим, вполне однозначным, если подчинить его дополнительному условию, носящему название принципа наименьших квадратов.

В соответствии с этим принципом будем искать решение, для которого величина

$$\Phi = \sum_1^n v_i^2 \quad (14.3)$$

имеет наименьшее значение.

Рассматривая Φ как функцию x_1, \dots, x_m , определяемую равенством (14.2) и (14.3), мы видим, что искомое решение должно удовлетворять условиям

$$\sum_1^n v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_h} = \sum_1^n d_{ih} v_i = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m). \quad (14.4)$$

Подставив сюда значения v_i , даваемые равенствами (14.2), получим для x_h следующие уравнения:

$$a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hm}x_m = a_{h0} \quad (h = 1, \dots, m), \quad (14.5)$$

где

$$a_{hk} = \sum_1^n d_{ih} d_{ik}; \quad a_{h0} = \sum_1^n d_{ih} l_i. \quad (14.6)$$

Равенства (14.6) показывают, что

$$a_{hh} = \sum_1^n d_{ih}^2; \quad a_{hk} = a_{kh}. \quad (14.7)$$

Таким образом, среди m^2 коэффициентов уравнений (14.5) имеется только $\frac{1}{2}m(m+1)$ различных, причем все диагональные коэффициенты a_{hh} положительны.

Во всех случаях, представляющих практический интерес, ранг матрицы $\|d_{ih}\|$, составленной из коэффициентов условных уравнений (14.1), равен m . Вследствие этого квадратичная форма, соответствующая симметричной матрице $\|a_{hk}\|$, будет положительно определенной, поскольку эту форму можно представить как сумму квадратов левых частей условных уравнений (14.1), а ранг этой системы равен числу неизвестных. Отсюда следует, как известно из теории матриц, что все главные миноры определителя $|a_{hk}|$ положительны. В частности,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, m).$$

Матрица $\|a_{hk}\|$, обладающая этим свойством, называется положительно определенной.

Систему уравнений вида (14.5), коэффициенты которой образуют симметричную, положительно определенную матрицу, будем называть нормальной системой.

После того как решение нормальных уравнений (14.5) даст x_1, \dots, x_m , соотношения (14.2) позволят вычислить величины v_1, \dots, v_n , носящие название невязок условных уравнений.

Составление нормальных уравнений, выполняемое при помощи формул (14.6), обязательно должно быть проконтролировано.

Для этого составляют суммы

$$s_i = \sum_1^m d_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

коэффициентов каждого из уравнений (14.1) и вычисляют величины

$$a_{sh} = \sum_1^n d_{ih}s_i; \quad a_{s0} = \sum_1^n l_i s_i,$$

аналогичные (14.6). Тогда

$$a_{sh} = \sum_1^m a_{hk}; \quad a_{s0} = \sum_1^m a_{k0}.$$

Иначе говоря, почленное сложение уравнений (14.5) должно дать уравнение

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sm}x_m = a_{s0}. \quad (14.8)$$

Это уравнение называется суммовым уравнением.

§ 15. Решение нормальных уравнений. Метод исключения

Для решения нормальных уравнений можно, конечно, использовать любые методы решения систем линейных уравнений, как прямые, дающие неизвестные сразу с требуемой точностью, так и различные методы последовательных приближений *).

Но в условиях, имеющих место в задачах теоретической астрономии, когда число неизвестных невелико ($m=6$ или лишь не намного больше), а кроме неизвестных, должны быть вычислены и их средние ошибки, наиболее удобными оказываются методы, излагаемые в этом и следующем параграфах.

Когда в начале XIX в. метод наименьших квадратов был введен в астрономическую практику, нормальные уравнения стали решать способом последовательного исключения неизвестных — самым простым в теоретическом отношении. Этот метод был подробно изложен Гауссом с учетом особенностей нормальных систем, вследствие чего его нередко называют методом (или алгоритмом) Гаусса. Он заключается в следующем.

Напишем систему (14.5) в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= a_{10}, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= a_{20}, \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m &= a_{m0}. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Чтобы исключить x_1 , первое из этих уравнений представим в форме

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = c_{10}, \quad (15.2)$$

где

$$c_{1k} = a_{1k}/a_{11} \quad (k=0, 2, \dots, m).$$

Умножим (15.2) на первые коэффициенты $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$ остальных уравнений (15.1) и вычтем из этих уравнений. Полагая

$$\begin{aligned} (ik. 1) &= a_{ik} - a_{i1}c_{1k} \\ (i &= 2, 3, \dots, m; k = 0, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (15.3)$$

*) Из авторов, которые особенно подробно рассматривают решение систем линейных уравнений (как общего вида, так и нормальных), укажем В. Н. Фаддееву [1950], Двайера [1951], Е. Г. Ларченко [1956] и Кунца [1957].

получим

$$\left. \begin{aligned} (22.1) x_2 + (23.1) x_3 + \dots + (2m.1) x_m &= (20.1), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (m2.1) x_2 + (m3.1) x_3 + \dots + (mm.1) x_m &= (m0.1). \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

К этой системе применяем тот же прием. Вычислив величины

$$c_{2k} = (2k.1)/(22.1); \quad (k = 0, 3, \dots, m) \quad (15.5)$$

и положив

$$(ik.2) = (ik.1) + (i2.1) c_{2k} \quad (15.6)$$

$$(i = 3, 4, \dots, m; k = 0, 3, \dots, m),$$

вместо системы (15.4) будем иметь уравнение

$$x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2m}x_m = c_{20}$$

и систему

$$\left. \begin{aligned} (33.2) x_3 + \dots + (3m.2) x_m &= (30.2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (m3.2) x_3 + \dots + (mm.2) x_m &= (m0.2). \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Продолжая этот процесс, мы получим в конце концов вместо системы (15.1) систему с треугольной матрицей

$$\left. \begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1m}x_m &= c_{10}, \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2m}x_m &= c_{20}, \\ x_3 + \dots + c_{3m}x_m &= c_{30}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m &= c_{m0}, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

легко разрешимую относительно $x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1$.

Так как $a_{ik} = a_{ki}$, то, как легко убедиться,

$$(ik. h) = (ki. h). \quad (15.9)$$

Поэтому в каждой из систем (15.4), (15.7), ... коэффициенты образуют симметричную матрицу. Таким образом, приходится вычислять лишь немногим более половины этих коэффициентов. Можно доказать, что

$$(kk. h) > 0,$$

вследствие чего указанный процесс исключения неизвестных всегда выполним.

Чтобы иметь систематический контроль всех этапов работы, к уравнениям (15.1) присоединяют их суммовое уравнение (14.8), получаемое путем почленного сложения уравнений (15.1). Это уравнение имеет вид

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sm}x_m = a_{s0}, \quad (15.10)$$

где s является уже не числом, а символом суммы.

не записывать промежуточные величины), но и уменьшает влияние ошибок округления на конечный результат.

Излагаемую здесь модификацию метода исключения, получившуюся в результате стремления использовать преимущества, даваемые операцией накопления, будем называть компактной формой метода исключения*).

Метод исключения заключается в переходе от заданной системы (15.1) к системе (15.8). Промежуточные же системы (15.4), (15.7), ... сами по себе нам не нужны. Вот это обстоятельство и позволяет сделать вычисления более компактными.

Рассматриваемую нормальную систему возьмем опять в форме

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= a_{10}, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= a_{20}, \\ \dots &\dots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= a_{m0}, \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

но для величин, получаемых в процессе исключения, будем пользоваться следующими сокращенными обозначениями:

$$b_{ik} = a_{ik} = a_{h1}; \quad b_{ih} = (ik \cdot i - 1) = (ki \cdot i - 1).$$

Тогда формулы (15.2), (15.5), ... можно будет объединить в одну

$$c_{ik} = b_{ik}/b_{ii}. \quad (16.2)$$

С другой стороны, соотношения (15.3), (15.6), ... примут вид

$$\begin{aligned} (ik.1) &= a_{ik} - b_{1i}c_{1k}, \\ (ik.2) &= (ik.1) - b_{2i}c_{2k}, \\ &\dots \\ (ik.h) &= (ik.h-1) - b_{hi}c_{hk}. \end{aligned}$$

Почленное сложение этих равенств дает

$$(ik.h) = a_{ik} - b_{1i}c_{1k} - b_{2i}c_{2k} - \dots - b_{hi}c_{hk}.$$

Отсюда, полагая $h=i-1$, находим

$$b_{ik} = a_{ik} - b_{1i}c_{1k} - b_{2i}c_{2k} - \dots - b_{i-1,i}c_{i-1,k}. \quad (16.3)$$

Формулы (16.2) и (16.3) позволяют найти все величины b_{ik} и c_{ik} . Присоединив к нормальным уравнениям (16.1) их суммовое

*) К этому методу пришли различными путями, вследствие чего он известен под несколькими названиями: модернизированный метод Гаусса, метод матриц, метод компактной схемы, метод Крута.

Относящиеся сюда работы указаны в монографии Андерсена [1955], в статье С. Г. Маковера [1956], а также в уже упомянутых (стр. 326) книгах.

уравнение (15.10), мы и здесь будем иметь постоянный контроль.

Укажем со всеми подробностями выполняемые операции.

Первый этап:

$$b_{1k} = a_{1k}; \quad c_{1k} = b_{1k} b_{11}^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m, 0; s). \quad (16.4)$$

Контроль:

$$c_{1s} = \sum_1^m c_{1k}.$$

Второй этап:

$$b_{2k} = a_{2k} - b_{1k} c_{12}; \quad c_{2k} = b_{2k} b_{22}^{-1} \quad (k = 2, 3, \dots, m, 0; s). \quad (16.5)$$

Контроль:

$$c_{2s} = \sum_2^m c_{2k}.$$

Третий этап:

$$b_{3k} = a_{3k} - b_{1k} c_{13} - b_{2k} c_{23}; \quad c_{3k} = b_{3k} b_{33}^{-1} \quad (16.6)$$

$$(k = 3, 4, \dots, m, 0; s).$$

Контроль:

$$c_{3s} = \sum_3^m c_{3k}.$$

Продолжая таким образом, мы найдем коэффициенты уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1m}x_m &= c_{10}, \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2m}x_m &= c_{20}, \\ x_3 + \dots + c_{3m}x_m &= c_{30}, \\ \dots & \\ x_m &= c_{m0} \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

служащих для последовательного вычисления неизвестных x_{m-1}, \dots, x_2, x_1 . Каждая из этих величин получается при помощи одной операции накопления.

Одно из возможных расположений вычислений указано (для случая $m=4$) в столбцах (1), (2), (3), (4), (0) прилагаемой схемы. В столбце (S) помещены величины c_{1s}, c_{2s}, \dots , служащие для контроля соответствующих строк. Последняя строка столбцов (1), (2), (3), (4) содержит значения неизвестных, полученные по формулам (16.7).

Величины b_{ik} лучше писать на отдельном листе, как указано в схеме. Перегибая этот лист по вертикальным линиям и прикладывая его столбцы к соответствующим столбцам основного листа, будем иметь наиболее удобное расположение тех чисел, которые приходится перемножать в формулах (16.5), (16.6), ...

Схема решения нормальных уравнений и вычисления обратной матрицы
(компактная форма метода исключения)

(1)	(2)	(3)	(4)	(0)	(I)	(II)	(III)	(IV)	(S)	(Σ)
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	1	0	0	0	a_{1S}	$a_{1\Sigma}$
.	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	0	1	0	0	a_{2S}	$a_{2\Sigma}$
.	.	a_{33}	a_{34}	a_{30}	0	0	1	0	a_{3S}	$a_{3\Sigma}$
.	.	.	a_{44}	a_{40}	0	0	0	1	a_{4S}	$a_{4\Sigma}$
1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{10}	c_{11}	0	0	0	c_{1S}	$c_{1\Sigma}$
0	1	c_{23}	c_{24}	c_{20}	c_{21}	c_{211}	0	0	c_{2S}	$c_{2\Sigma}$
0	0	1	c_{34}	c_{30}	c_{31}	c_{311}	c_{3111}	0	c_{3S}	$c_{3\Sigma}$
0	0	0	1	c_{40}	c_{41}	c_{411}	c_{4111}	c_{41V}	c_{4S}	$c_{4\Sigma}$
x_1	x_2	x_3	x_4							

q_{11}	0	0	0
q_{21}	q_{22}	0	0
q_{31}	q_{32}	q_{33}	0
q_{41}	q_{42}	q_{43}	q_{44}
x_1	x_2	x_3	x_4

(1)	(2)	(3)	(4)
b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
0	b_{22}	b_{23}	b_{24}
0	0	b_{33}	b_{34}
0	0	0	b_{44}
b_{11}^{-1}	b_{22}^{-1}	b_{33}^{-1}	b_{44}^{-1}

Вычисление обратной матрицы

Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

есть матрица коэффициентов рассматриваемой нами системы (16.1).

Так как определитель A не равен нулю, то существует обратная матрица

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mm} \end{vmatrix}, \quad (16.8)$$

удовлетворяющая условию

$$AQ = QA = E, \quad (16.9)$$

где через E обозначена единичная матрица:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Равенство (16.9) эквивалентно m системам уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} q_{1i} + a_{12} q_{2i} + \dots + a_{1m} q_{mi} &= \delta_{1i}, \\ a_{21} q_{1i} + a_{22} q_{2i} + \dots + a_{2m} q_{mi} &= \delta_{2i}, \\ \dots & \dots \\ a_{m1} q_{1i} + a_{m2} q_{2i} + \dots + a_{mm} q_{mi} &= \delta_{mi} \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

где $\delta_{ki} = 1$, если $k = i$; $\delta_{ki} = 0$, если $k \neq i$.

Каждая из систем (16.10) отличается от рассматриваемой системы нормальных уравнений (16.1) только свободными членами. Это обстоятельство очень упрощает решение систем (16.10). Это решение показано в столбцах (1), ..., (IV) нашей схемы для случая, когда $m = 4$.

В первых четырех строках этих столбцов выписаны свободные члены δ_{ki} . Выполнение над ними операций (16.4), (16.5), (16.6), ... позволяет заполнить следующие четыре строки. После этого уравнения (16.7), в которых правые части c_{10}, c_{20}, \dots за-

меняются соответственно на c_{11} , c_{21} , ..., потом на c_{111} , c_{211} , ... и т. д., дадут элементы Q .

Так как матрица Q , очевидно, тоже симметрична, то ее элементы, лежащие выше главной диагонали, можно не вычислять.

Столбец (Σ) служит для контроля. В его первых четырех строках находятся суммы всех свободных членов, так что

$$a_{i\Sigma} = a_{i0} + 1.$$

Выполнение над $a_{i\Sigma}$ таких же операций, как над a_{i0} , дает следующие элементы этого столбца. Контролем служит выполнение равенств

$$\begin{array}{cccc} c_{10} + c_{11} + 0 & + 0 & + 0 & = c_{1\Sigma}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{40} + c_{41} + c_{411} + c_{4111} + c_{411V} & = & c_{4\Sigma}. \end{array}$$

Систему (16.1) можно написать так:

$$A \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}\}, \quad (16.11)$$

где символом $\{\dots\}$ обозначена матрица, состоящая из одного столбца (вектор).

Умножив обе части этого равенства на $Q = A^{-1}$, получим

$$\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = Q \{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}\}.$$

Вычисленные таким образом значения неизвестных помещены в схеме (стр. 331) под матрицей Q . Совпадение их со значениями, найденными по формулам (16.7), дает очень полезный контроль всей проделанной работы.

Примечание. Если положить

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1m} & b_{2m} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

то вследствие соотношения (16.3) будем иметь

$$A = BC. \quad (16.12)$$

Таким образом, умножив соотношение (16.11) на B^{-1} и положив

$$B^{-1} \{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}\} = \{c_{10}, c_{20}, \dots, c_{m0}\},$$

будем иметь

$$C \{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{c_{10}, c_{20}, \dots, c_{m0}\},$$

т. е. получим систему (16.7).

Это показывает, что метод исключения эквивалентен разложению матрицы рассматриваемой системы на произведение двух треугольных матриц указанного вида. Заметим, что на дополнительном листе схемы помещена не матрица B , а транспонированная ей,

§ 17. Метод Банахеви́ча

Решение системы нормальных уравнений можно сделать еще более компактным в отношении записи. Для этого нужно, как было указано Т. Банахеви́чем в 1938 г., разложить матрицу A этой системы на произведение двух взаимно транспонированных треугольных матриц.

Покажем, что всегда можно найти матрицу

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{mm} \end{vmatrix}, \quad (17.1)$$

удовлетворяющую условию $R'R=A$, где через

$$R' = \begin{vmatrix} r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1m} & r_{2m} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix}$$

обозначена транспонированная матрица.

Правило умножения показывает, что элементы искомой матрицы (17.1) определяются условиями:

$$a_{ik} = r_{1i}r_{1k} + r_{2i}r_{2k} + \dots + r_{ii}r_{ik} \quad (i \leq k). \quad (17.2)$$

Легко видеть, что соотношения (17.2) позволяют найти все величины r_{ik} . В самом деле, полагая $i=1$, будем иметь

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad r_{1k} = r_{11}^{-1}a_{1k}. \quad (17.3)$$

после чего, полагая в формулах

$$\left. \begin{aligned} r_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - (r_{1i}^2 + r_{2i}^2 + \dots + r_{i-1,i}^2)}, \\ r_{ik} &= r_{ii}^{-1}(a_{ik} - r_{1i}r_{1k} - r_{2i}r_{2k} - \dots - r_{i-1,i}r_{i-1,k}); \quad i < k \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

последовательно $i=2, 3, \dots, m$, найдем все остальные r_{ik} .

Чтобы иметь контроль производимых операций, составляем суммы

$$a_{is} = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im}$$

строк матрицы A и вычисляем по формуле (17.4) соответствующие r_{is} . Тогда, как легко видеть,

$$r_{is} = r_{ii} + r_{i,i+1} + \dots + r_{i,m}.$$

Найдя матрицу R , мы можем нормальную систему (16.10) написать так:

$$R'R\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{a_{10}, a_{20}, \dots, a_{m0}\}.$$

Умножим обе части этого равенства на R^{-1} . Положив

$$R^{-1}\{a_{10}, \dots, a_{m0}\} = \{r_{10}, \dots, r_{m0}\},$$

окончательно получим систему

$$R\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \{r_{10}, r_{20}, \dots, r_{m0}\},$$

дающую x_m, x_{m-1}, \dots, x_1 .

Для нахождения обратной матрицы поступаем так же, как было указано в предыдущем параграфе, т. е. повторно решаем рассматриваемую систему, заменив свободные члены a_{k0} через $a_{kI} = \delta_{k1}$, потом через $a_{kII} = \delta_{k2}$ и т. д.

Расположение вычислений показано в прилагаемой схеме для случая $m=4$. Контроль осуществляется при заполнении каждой строки при помощи сумм, помещенных в столбцах (S) и (Σ). По окончании вычисления обратной матрицы находятся контрольные значения неизвестных, помещенные в схеме под обратной матрицей.

Схема решения нормальных уравнений и вычисления обратной матрицы
(метод Банахевица)

(1)	(2)	(3)	(4)	(0)	(I)	(II)	(III)	(IV)	(S)	(Σ)
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{10}	1	0	0	0	a_{1s}	$a_{1\Sigma}$
.	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{20}	0	1	0	0	a_{2s}	$a_{2\Sigma}$
.	.	a_{33}	a_{34}	a_{30}	0	0	1	0	a_{3s}	$a_{3\Sigma}$
.	.	.	a_{44}	a_{40}	0	0	0	1	a_{4s}	$a_{4\Sigma}$
r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{10}	r_{1I}	r_{1II}	r_{1III}	r_{1IV}	r_{1s}	$r_{1\Sigma}$
0	r_{22}	r_{23}	r_{24}	r_{20}	r_{2I}	r_{2II}	r_{2III}	r_{2IV}	r_{2s}	$r_{2\Sigma}$
0	0	r_{33}	r_{34}	r_{30}	r_{3I}	r_{3II}	r_{3III}	r_{3IV}	r_{3s}	$r_{3\Sigma}$
0	0	0	r_{44}	r_{40}	r_{4I}	r_{4II}	r_{4III}	r_{4IV}	r_{4s}	$r_{4\Sigma}$
r_{11}^{-1}	r_{22}^{-1}	r_{33}^{-1}	r_{44}^{-1}		q_{11}	.	.	.		
x_1	x_2	x_3	x_4		q_{21}	q_{22}	.	.		
					q_{31}	q_{32}	q_{33}	.		
					q_{41}	q_{42}	q_{43}	q_{44}		
					x_1	x_2	x_3	x_4		

§ 18. Средние ошибки неизвестных. Заключительный контроль

Подстановка найденных значений неизвестных в условные уравнения (14.1) дает остающиеся невязки

$$v_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \dots + d_{im}x_m - l_i, \quad (18.1)$$

служащие для вычисления средней ошибки единицы веса по хорошо известной формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{(vv)}{n-m}}, \quad (18.2)$$

где

$$(vv) = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2. \quad (18.3)$$

Средняя ошибка неизвестной x_k вычисляется по формуле

$$\mu_k = \mu \sqrt{q_{k,k}}, \quad (18.4)$$

где $q_{k,k}$ — соответствующий диагональный элемент обратной матрицы (16.8).

В астрономических работах обычно довольствуются той оценкой точности результатов, которая дается средними ошибками (18.4). Эта оценка тем надежнее, чем больше разность $n-m$.

Полезно напомнить, что границы, в которых заключается квадрат средней ошибки (18.2), даются приближенным выражением

$$\mu^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-m}} \right),$$

которое тем точнее, чем больше $n-m$ и чем ближе закон распределения ошибок к нормальному.

Вопрос о вероятностной оценке точности результатов, получаемых по методу наименьших квадратов, с наибольшей полнотой и строгостью рассмотрен в книге Ю. В. Линника [1958].

Вычисление суммы квадратов невязок, входящей в формулу (18.2), выполняется всегда двумя различными способами, что дает очень хороший заключительный контроль всей проделанной работы.

Первый способ состоит в применении формул (18.1) и (18.3). Для вывода формулы, служащей для второго способа, помножим равенство (18.1) на v_i и просуммируем. Это даст

$$(vv) = - \sum_1^n l_i v_i + \sum_1^n (x_1 d_{i1} v_i + \dots + x_m d_{im} v_i).$$

Так как вторая сумма справа равна нулю на основании равенств (14.4), то

$$(vv) = - \sum_1^n l_i v_i.$$

С другой стороны, умножив величины (18.1) на l_i и просуммировав, получим

$$\sum_1^n l_i v_i = -(ll) + \sum_1^n (x_1 d_{i1} l_i + \dots + x_m d_{im} l_i),$$

где

$$(ll) = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2.$$

Таким образом, пользуясь обозначениями (14.6), получаем следующую контрольную формулу:

$$(vv) = (ll) - (a_{10}x_1 + \dots + a_{m0}x_m). \quad (18.5)$$

Коэффициентами при неизвестных здесь служат свободные члены нормальных уравнений, вследствие чего это равенство, будучи написано в форме

$$a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + \dots + a_{m0}x_m = (ll) - (vv),$$

как бы завершает с точки зрения симметрии систему нормальных уравнений.

Формула (18.5) может быть представлена в другом виде. Если равенства (16.7) помножить по порядку на $b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}$ и почленно сложить, то слева получится (в силу соотношения (16.3) при $k=0$) величина, стоящая в (18.5) в скобках. Поэтому

$$(vv) = (ll) - (b_{10}c_{10} + b_{20}c_{20} + \dots + b_{m0}c_{m0}). \quad (18.6)$$

Эта формула является иногда полезным дополнением к формуле (18.5).

Средняя ошибка функции неизвестных. Нередко приходится после решения условных уравнений по способу наименьших квадратов вычислять значение некоторой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ полученных значений неизвестных и находить среднюю ошибку этого значения.

Так как независимыми результатами измерений являются величины l_i , стоящие в правых частях условных уравнений (14.1), то нужно прежде всего выразить F в функции l_i . Тогда, по известной формуле, получим

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial l_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial l_n} \right)^2 \right], \quad (18.7)$$

где через μ обозначена средняя ошибка каждой из величин l_i .

Можно показать (на этом мы не будем останавливаться), что выражение (18.7) приводится к виду

$$\mu_F^2 = \mu^2 \left[\begin{array}{l} q_{11}F_1^2 + 2q_{12}F_1F_2 + 2q_{13}F_1F_3 + \dots + \\ + q_{22}F_2^2 + 2q_{23}F_2F_3 + \dots + \\ + q_{33}F_3^2 + \dots + \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right] \quad (18.8)$$

Через F_1, \dots, F_m здесь обозначены частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

а через q_{ik} — элементы обратной матрицы (16.8).

Примером применения формулы (18.8) может служить вычисление средних ошибок величин ω, i, Ω , найденных при помощи соотношений (8.4) и (8.5), после того как найдены средние ошибки входящих в условные уравнения неизвестных $d\psi_x, d\psi_y, d\psi_z$.

§ 19. Случай, когда определитель системы нормальных уравнений близок к нулю

Использованные для составления условных уравнений наблюдения могут оказаться недостаточными для надежного вычисления всех неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m . Аналитически это выразится в том, что определитель системы нормальных уравнений будет близок к нулю, так что по крайней мере одно из этих уравнений будет мало отличаться от линейной комбинации остальных уравнений.

Определитель нормальной системы обозначим через Δ . Близость Δ к нулю обнаружится в процессе решения системы нормальных уравнений в том, что среди делителей окажутся числа, близкие к нулю. Такими делителями в развернутой форме метода исключения (§ 15) являются величины

$$(11.0) = a_{11}, (22.1), (33.2), \dots, (mm. m-1). \quad (19.1)$$

В компактной форме метода исключения (§ 16) делителями служат величины

$$b_{11}, b_{22}, \dots, b_{mm}, \quad (19.2)$$

а в методе Банахевица (§ 17) — величины

$$r_{11}, r_{22}, \dots, r_{mm}. \quad (19.3)$$

Делители (19.1) и (19.2) для нормальной системы всегда положительны. Но так как вычисление производится с ограничен-

ным числом десятичных знаков, накопление ошибок округления может привести к тому, что среди этих делителей окажутся отрицательные числа. По той же причине, если определитель Δ близок к нулю, среди чисел (19.3) могут оказаться чисто мнимые с абсолютной величиной, близкой к нулю.

Соотношение (16.12) показывает, что

$$\Delta = b_{11}b_{22} \dots b_{mm},$$

откуда, по определению величин b_{ik} ,

$$\Delta = (11.0) (22.1) \dots (mm.m - 1),$$

а из определения матрицы (17.1) непосредственно вытекает, что

$$\Delta = r_{11}^2 r_{22}^2 \dots r_{mm}^2.$$

Отсюда ясно, что определитель Δ в том и только в том случае близок к нулю, когда один из делителей близок к нулю.

Поскольку вычисления производятся всегда с ограниченным, заранее фиксированным числом десятичных знаков, весьма важно расположить неизвестные так, чтобы делители, близкие к нулю, появились возможно позже. Тогда вызываемое ими понижение точности отразится на минимальном числе неизвестных. В этом отношении большое преимущество имеет развернутая форма метода исключения, позволяющая на каждом этапе исключения выбирать наиболее целесообразным образом исключаемую неизвестную. При употреблении методов, изложенных в § 16 и 17, может понадобиться уточнение полученных значений неизвестных при помощи одного из способов последовательных приближений, или повторение решения нормальных уравнений с другим порядком неизвестных. В этом последнем случае выгодно при окончательном решении расположить неизвестные в порядке возрастания чисел

$$q_{11}, q_{22}, \dots, q_{mm},$$

т. е. в порядке убывания веса.

Однако в большинстве случаев внимательное рассмотрение нормальных уравнений позволяет заранее узнать, какая неизвестная (или группа неизвестных) получится с наименьшей точностью. Такая неизвестная должна быть поставлена на последнее место.

Часто применяется следующий прием, позволяющий оценить надежность значений тех неизвестных, которые получаются с наименьшей точностью.

Допустим, что очень близкий к нулю делитель получился после того, как выполнено исключение неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m . Тогда проделанные вычисления можно использовать для

представления этих неизвестных в виде линейных функций x_{m-1} и x_m . Далее можно поступать двояко.

Можно давать неизвестным x_{m-1} , x_m различные подходящие значения, вычислять соответствующие x_1, x_2, \dots, x_{m-2} и смотреть, как при этом меняется сумма квадратов остающихся невязок, вычисляемая по формуле (18.5). Чем меньше будет эта сумма, тем лучше будут, с точки зрения принципа наименьших квадратов, соответствующие значения x_{m-1} и x_m .

С другой стороны, можно искать вероятнейшие значения x_{m-1} и x_m . Для этого подставляют найденные выражения x_1, \dots, x_{m-2} через x_{m-1} , x_m в условные уравнения и полученные таким образом новые условные уравнения с двумя неизвестными решают по способу наименьших квадратов.

Первый способ применяется обычно в тех случаях, когда плохо определяемой оказывается только одна неизвестная. Если же таких неизвестных имеется две или больше, то удобнее и надежнее второй способ.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРБИТ ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД**§ 1. Предварительные замечания**

Закон тяготения в его современной форме позволил с исчерпывающей полнотой объяснить все движения, происходящие в солнечной системе. Изучение движений двойных звезд дало возможность сделать дальнейший шаг и непосредственно убедиться, что этот закон имеет место в гораздо более обширных областях Космоса.

Конечно, та точность, с которой в настоящее время может быть установлена применимость закона тяготения к объяснению движений двойных звезд, еще весьма далека от точности, достижимой при изучении движений тел солнечной системы. Но эта точность все время увеличивается по мере возрастания промежутков времени, охватываемых наблюдениями, а также вследствие улучшения техники наблюдений.

Вопрос об использовании движения двойных звезд для доказательства универсальности закона Ньютона привел, как уже было упомянуто (§ 4, гл. I), к решению некоторых механических задач, поставленных Бертраном. Из полученных результатов следует, что для доказательства того, что движения двойных звезд вытекают из закона тяготения, достаточно было бы показать, что наблюдаемая траектория спутника является коническим сечением. Однако такое доказательство было бы весьма грубым, поскольку форма траектории может быть установлена лишь с очень небольшой точностью. При этом доказательстве мы используем лишь координаты спутника, измеряемые с очень невысокой относительной точностью, и не используем моменты наблюдений, известные нам практически совершенно точно. Гораздо более убедительное доказательство мы получаем, изучая изменение координат спутника с течением времени. Для этого на основании закона Ньютона вычисляется относительная орбита спутника, после чего его положения в этой орбите сравниваются со всей совокупностью наблюдений.

Вычисление орбит двойных звезд очень важно для астрономии и по другим причинам. Эти звезды являются весьма важной и характерной частью окружающего нас звездного мира. Достаточно напомнить, что визуально-двойных звезд известно около 40 000, между тем открытие их возможно только в ближайших окрестностях солнечной системы. В то время, как для всех звезд среднее расстояние увеличивается при переходе от первой величины к девятой в 15 раз, для визуально-двойных звезд имеет место увеличение только в полтора раза. Отсюда можно заключить, что известные нам визуально-двойные звезды находятся внутри сферы с радиусом, не превышающим 300 световых лет. Так как число звезд внутри такой сферы порядка 140 000, то приходим к выводу, что визуально-двойные звезды составляют около 30% общего числа звезд. Прямой подсчет показывает, что среди звезд ярче 6,5 величины визуально-двойных известно свыше 11%, а среди звезд до девятой величины уже открытые визуально-двойные составляют около 7%.

Изучение движения двойных звезд открывает единственный в настоящее время путь для нахождения масс и плотностей звезд. Зная орбиту, описываемую спутником вокруг главной звезды, и параллакс, можно найти сумму их масс.

В самом деле, обозначим через m_0 и m_1 массы компонент (масса Солнца принята за единицу), через P — период обращения, выраженный в сидерических годах, через a — большую полуось орбиты, выраженную в секундах дуги. Большая полуось, выраженная в астрономических единицах, равна a/p , если через p обозначить годичный параллакс двойной звезды.

Третий закон Кеплера (§ 10, гл. III) дает

$$f(m_0 + m_1)P^2 = 4\pi^2 a^3 p^{-3},$$

где через f обозначена постоянная тяготения в принятой системе единиц.

В той же системе единиц для системы Солнце — Земля этот закон дает

$$f(1 + m) = 4\pi^2,$$

если через m обозначить сумму масс Земли и Луны.

Таким образом, исключая f и пренебрегая m , как величиной в данном случае исчезающе малой, будем иметь

$$m_0 + m_1 = a^3 P^{-2} p^{-3}. \quad (1.1)$$

Эта формула решает поставленную задачу. Но она дает сумму масс с удовлетворительной точностью только для немногих звезд, имеющих наибольший параллакс.

Соотношение (1.1), написанное в форме

$$p = aP^{-2/3} (m_0 + m_1)^{-1/3}$$

часто применяют для решения обратной задачи, т. е. для нахождения параллакса по сумме масс компонент двойной звезды. Такие параллаксы, основанные на более или менее гипотетическом значении суммы $m_0 + m_1$, получили название динамических.

Первоначально динамические параллаксы вычисляли, принимая среднее значение $m_0 + m_1 = 2$. Открытие Эддингтоном соотношения «масса — светимость» позволило пользоваться гораздо более точным значением суммы масс. Это сделало динамические параллаксы сравнимыми по точности с тригонометрическими. Ценность этого метода увеличивается еще и тем обстоятельством, что для многих двойных звезд, у которых наблюдения охватывают еще недостаточно большую часть орбиты для надежного вычисления каждого из элементов a и P в отдельности, величина a^3P^{-2} все же может быть получена с удовлетворительной точностью.

В тех случаях, когда наблюдения позволяют найти движение каждой компоненты относительно соседних звезд, становятся известными орбиты каждой компоненты относительно центра инерции системы, движущегося прямолинейно и равномерно. Так как расстояния компонент от центра инерции обратно пропорциональны их массам, то в этих случаях может быть найдена не только сумма масс, но и масса каждой компоненты в отдельности.

Мы ограничимся рассмотрением способов вычисления орбит только визуально-двойных звезд. Эти способы непосредственно связаны с изучаемыми в теоретической астрономии вопросами. Между тем методы нахождения орбит спектрально-двойных и затменно-двойных звезд тесно связаны с методикой астрофизических наблюдений, а иногда и с учетом различных физических факторов. Их целесообразнее поэтому изучать в астрофизике *).

§ 2. О наблюдениях визуально-двойных звезд

Рассмотрим, прежде всего, тот наблюдательный материал, который используется при вычислении орбиты визуально-двойной звезды.

Наблюдения дают координаты, определяющие положение спутника (т. е. более слабой компоненты) относительно главной (т. е. более яркой) звезды. Обычно применяемыми координатами являются угловое расстояние спутника от главной звезды и позиционный угол этого расстояния. Эти величины будем

*) Вопросы, относящиеся к изучению движения двойных звезд, весьма обстоятельно рассмотрены в известной монографии Эйткена [1935], содержащей много литературных указаний. Укажем также статью Г. А. Шайна [1936].

в дальнейшем обозначать через ρ и θ . Напомним, что θ считается от дуги круга склонений, соединяющего главную звезду с северным полюсом, против часовой стрелки, если смотреть из центра небесной сферы; счет ведется от 0° до 360° .

Если через $\Delta\rho$ и $\Delta\theta$ обозначить абсолютные погрешности ρ и θ , то относительные погрешности по этим координатам будут равны $\Delta\rho/\rho$ и $\rho\Delta\theta/\rho = \Delta\theta$ (в радианах). Важно отметить, что эти относительные ошибки (как случайные, так и систематические), могут быть весьма велики. Для лучших рядов наблюдений они бывают порядка нескольких процентов. Как общее правило, расстояния менее точны, нежели позиционные углы. В тех случаях, когда ρ лишь немного превосходит разрешающую силу инструмента, ошибки в ρ иногда доходят до 25%.

Вычисление орбиты двойной звезды приходится всегда начинать с тщательного анализа наблюдений с целью освобождения их, по мере возможности, от систематических ошибок. Здесь нет надобности останавливаться на методах нахождения этих ошибок, так как изучение этих методов неотделимо от изучения многочисленных примеров, содержащихся в литературе по вычислению орбит отдельных двойных звезд. Хорошим введением в изучение этих вопросов может служить работа Экенберга [1945].

Редукция наблюдений

Наблюдения двойных звезд не приходится освобождать от дифференциального влияния рефракции, аберрации и нутации: для столь тесных объектов влияние этих факторов на обе компоненты может считаться совершенно одинаковым. Но влияние прецессии, растущее пропорционально времени, может заметно изменять позиционный угол. Поэтому позиционные углы должны быть всегда приведены к некоторой общей эпохе.

Пусть α и δ — координаты двойной звезды, а $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ — разности прямых восхождений и склонений ее компонент, так что

$$\Delta\delta = \rho \cos \theta, \quad \cos \delta \cdot \Delta\alpha = \rho \sin \theta.$$

Прецессия меняет склонение за один год на
 $+20'',047 \cos \alpha = +0^\circ,00557 \cos \alpha$.

Соответствующее изменение позиционного угла, которое обозначим через $d\theta$, определяется, очевидно, равенством

$$-0^\circ,00557 \sin \alpha \Delta\alpha = -\rho \sin \theta d\theta,$$

дающим

$$d\theta = +0^\circ,00557 \sin \alpha \sec \delta.$$

Таким образом, если через θ и θ_0 обозначить значения позиционного угла, отнесенные соответственно к положениям

экватора в моменты t и t_0 , то

$$\theta = \theta_0 + 0^\circ,00557 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0),$$

где промежуток времени $t - t_0$ должен быть выражен в годах.

Большое собственное движение по прямому восхождению тоже может оказать заметное влияние на позиционный угол. Вместо точного вычисления соответствующей поправки обычно довольствуются применением формулы

$$\theta = \theta_0 + \mu_\alpha^0 \sin \delta (t - t_0),$$

где μ_α^0 есть собственное движение двойной звезды по прямому восхождению, выраженное в градусах *).

Движение двойной звезды по лучу зрения, изменяющее ее параллакс, делает не вполне сравнимыми расстояния компонент, измеренные в различные эпохи.

Пусть ρ и ρ_0 будут расстояниями, фактически измеренными в моменты t и t_0 . Пусть, далее, ρ' есть расстояние между компонентами в момент t , но соответствующее величине параллакса в момент t_0 . Значение ρ' , уже вполне сравнимое с ρ_0 , дается формулой

$$(\rho' - \rho)/\rho = +0,00000102 p'' V (t - t_0),$$

где p'' — параллакс, а V км/сек — лучевая скорость двойной звезды; $(t - t_0)$ лет — соответствующий промежуток времени.

§ 3. Элементы орбиты. Вычисление эфемериды

Орбита двойной звезды определяется семью элементами. Кроме шести постоянных, вводимых интегрированием уравнений движения задачи двух тел, здесь приходится находить из наблюдений еще и сумму масс компонент, входящую в уравнения движения (§ 1 гл. III).

Удобнее, однако, за седьмой элемент взять не сумму масс $m_0 + m_1$, а период обращения P . Эти две величины связаны между собой соотношением (1.1), содержащим параллакс двойной звезды.

Вместо P (выражаемого всегда в сидерических годах) часто употребляется среднее годовое движение спутника, выраженное в градусах:

$$n = 360^\circ/P. \quad (3.1)$$

*) Для точного вычисления этой поправки нужно полное значение орбиты, включая и знак наклона. Эти вопросы подробно рассмотрены Флетчером [1931] и Виет-Кнудсенем [1953].

В процессе вычисления орбиты применяется также среднее годовое движение, выраженное в радианах. Оно вычисляется по формуле

$$\mu = 2\pi/P. \quad (3.2)$$

Мы ограничиваемся случаем, когда движение спутника происходит по эллипсу. Для некоторых двойных звезд пройденную до настоящего времени дугу орбиты можно представить, со всею желаемой точностью, параболическим или гиперболическим движением [Виет-Кнудсен, 1953].

За внутренние элементы орбиты мы примем большую полуось a (выраженную в секундах дуги), эксцентриситет e и время прохождения через периастр T . Остальные три элемента Ω , i

и ω , фиксирующие положение орбиты в пространстве, определяются следующим образом.

Пусть (рис. 17) спутник B движется вокруг главной звезды A по орбите $N'BN$ в направлении, указанном стрелкой. Пусть, далее, AT есть направление луча зрения, соединяющего звезду A с Землей. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную к прямой AT . На эту плоскость (касательную к небесной

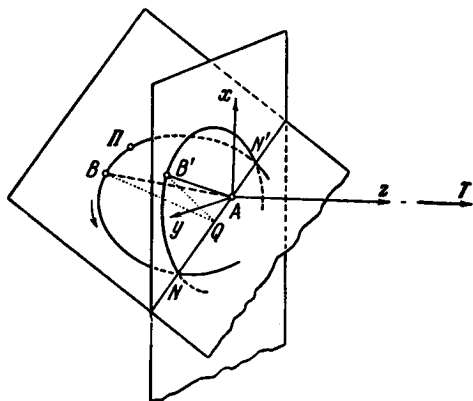


Рис. 17.

сфере) спроектируем истинную орбиту $N'BN$; это даст видимую орбиту $N'B'N$. Наблюдаемое положение спутника определяется расстоянием $AB' = \rho$ и позиционным углом $\angle BAB' = \theta$, отсчитываемым против часовой стрелки (если смотреть из T) от проекции Ax направленной к северу дуги круга склонения.

Прямая NN' , соединяющая точки N и N' , в которых пересекаются истинная и видимая орбиты, называется линией узлов. Та из точек N и N' , позиционный угол которой не превышает 180° , называется узлом, а позиционный угол этой точки называется позиционным углом узла и обозначается через Ω .

Угол между плоскостями орбит истинной и видимой называется наклоном орбиты и обозначается через i . Условимся считать

$$0^\circ \leq i < 90^\circ$$

в случае прямого движения (когда θ возрастает с возрастанием t), и

$$90^\circ < i \leq 180^\circ$$

в случае обратного движения *).

Последним элементом, окончательно фиксирующим положение орбиты, является угол $NA\Pi$, дающий угловое расстояние периастра Π от узла. Этот угол, отсчитываемый в направлении движения спутника от 0° до 360° , обозначается через ω и называется расстоянием периастра от узла или аргументом периастра.

Обозначим через r радиус-вектор AB , а через v — истинную аномалию, т. е. угол между лучами $A\Pi$ и AB , считааемый в направлении движения спутника. Если из точки B опустить перпендикуляр BQ на линию узлов, то прямая $B'Q$ будет также перпендикулярна к этой линии. Отсюда следует, что

$$AQ = AB \cos QAB = +r \cos(\omega + v),$$

$$AQ = AB' \cos QAB' = \rho \cos(\Omega - \theta),$$

а также

$$BQ = AB \sin QAB = -r \sin(\omega + v),$$

$$B'Q = AB' \sin QAB' = \rho \sin(\Omega - \theta) = BQ \cos i.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin(\theta - \Omega) &= r \sin(\omega + v) \cos i, \\ \rho \cos(\theta - \Omega) &= r \cos(\omega + v). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Зная элементы орбиты P , a , e , T , Ω , i , ω , можно вычислить видимые координаты спутника для момента t следующим образом: сначала по формулам

$$\left. \begin{aligned} n &= 360^\circ/P; & M &= n(t - T), \\ M &= E - e \sin E; & r &= a(1 - e \cos E), \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

находят r и v , после чего соотношения (3.3) дают ρ и θ .

*) Наряду с таким способом отсчитывать угол i , вошедшим в употребление сравнительно недавно (1926), встречается и прежний способ: угол i берется в интервале $(0^\circ, +90^\circ)$, если в узле спутник удаляется от наблюдателя, и в интервале $(-90^\circ, 0^\circ)$, если он в этой точке движется к наблюдателю. При таком условии среднее годовое движение n приходится считать положительным в случае прямого движения спутника и отрицательным, в случае обратного движения.

Так как знак определенного этим условием наклона может быть найден только при помощи измерения лучевой скорости, то определенное таким образом значение i , вычисленное из одних позиционных наблюдений, сопровождается двойным знаком \pm .

Промежуток времени $t - T$ должен быть выражен в годах. На практике этот промежуток, так же как и период P , выражают в юлианских годах, а не в сидерических.

При наличии вспомогательных таблиц, дающих v по аргументам M и e (§ 2 гл. IV), можно обойтись без вычисления E . Если таблицы не дают радиус-вектор, то его можно вычислить по формуле

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Векторные элементы

Вместо полярных орбитальных координат r и v часто употребляют соответствующие им прямоугольные орбитальные координаты.

Редуцированные прямоугольные координаты, определяемые для эллиптического движения равенствами

$$X = \frac{r}{a} \cos v = \cos E - e; \quad Y = \frac{r}{a} \sin v = \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (3.5)$$

а для параболического равенствами

$$X = \frac{r}{q} \cos v; \quad Y = \frac{r}{q} \sin v,$$

можно брать с нужной для двойных звезд точностью из таблиц Иннеса [1927] и таблиц Финзена [1936].

Эти координаты связаны с видимыми прямоугольными координатами

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (3.6)$$

равенствами вида

$$x = AX + FY; \quad y = BX + GY. \quad (3.7)$$

Чтобы найти входящие сюда коэффициенты, достаточно написать соотношения (3.3) при помощи равенств (3.5) и (3.6), в такой форме:

$$y \cos \Omega - x \sin \Omega = aX \sin \omega \cos i + aY \cos \omega \cos i,$$

$$y \sin \Omega + x \cos \Omega = aX \cos \omega - aY \sin \omega.$$

Приведя эти равенства к виду (3.7), получим

$$\left. \begin{aligned} A &= a(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\ B &= a(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\ F &= a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ G &= a(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Легко видеть, какой геометрический смысл имеют векторы $\{A, B\}$ и $\{F, G\}$. Нужно только заметить, что точка видимой орбиты, имеющая координаты

$$A(1 - e), \quad B(1 - e),$$

является проекцией периастра, а точка с координатами

$$F(1 - e^2), \quad G(1 - e^2)$$

— проекцией той точки истинной орбиты, для которой $v=90^\circ$.

Величины A, B, F, G , с успехом заменяющие при вычислении эфемериды элементы a, Ω, i, ω , могут рассматриваться как векторные элементы орбиты. Их теперь часто публикуют вместе с обычными элементами (или вместо них) под именем постоянных Тиле — Иннеса (см. § 6).

Картинная плоскость Axy (см. рис. 17), к которой относят элементы Ω, i и ω , имеет для системы двойной звезды совершенно случайный характер, что лишает эти элементы того интереса, который они имеют для тел солнечной системы. С другой стороны, двумерная характеристика видимой орбиты, даваемая векторными элементами, не менее наглядна, чем трехмерная характеристика, даваемая элементами a, Ω, i, ω .

Для перехода от векторных элементов к обычным могут служить следующие, легко выводимые из (3.8), формулы:

$$\left. \begin{aligned} B + F &= 2a \sin^2 \frac{i}{2} \sin(\Omega - \omega), \\ A - G &= 2a \sin^2 \frac{i}{2} \cos(\Omega - \omega), \\ B - F &= 2a \cos^2 \frac{i}{2} \sin(\Omega + \omega), \\ A + G &= 2a \cos^2 \frac{i}{2} \cos(\Omega + \omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Нетрудно также видеть, что

$$AG - BF = a^2 \cos i, \quad (3.10)$$

$$A^2 + B^2 + F^2 + G^2 = a^2(1 + \cos^2 i). \quad (3.11)$$

Полагая

$$A^2 + B^2 + F^2 + G^2 = 2R; \quad AG - BF = S,$$

из двух последних соотношений получим

$$a^2 = R + \sqrt{(R+S)(R-S)}. \quad (3.12)$$

В дальнейшем нам понадобится еще выражение удвоенной секторной скорости видимого движения. Если эту величину обозначить через c , то

$$c = C \cos i,$$

где C — удвоенная секторная скорость движения по истинной орбите. Так как

$$C = 2\pi ab/P = \mu a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

то из формулы (3.10) следует, что

$$c = \mu (AG - BF) \sqrt{1 - e^2}. \quad (3.13)$$

§ 4. Видимая орбита

Видимая орбита есть ортогональная проекция истинной орбиты на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения. Так как ортогональная проекция конического сечения есть также коническое сечение, то видимая орбита всегда является коническим сечением. В том случае, когда истинная орбита есть эллипс, видимая орбита будет также эллипсом.

Время обращения по видимой орбите, очевидно, равно времени обращения по истинной орбите. Поэтому сопоставление моментов времени, для которых позиционный угол принимает одинаковые значения, дает возможность найти P . Такой способ применим, однако, только для двойных звезд с небольшим периодом обращения.

Проекция каждого диаметра истинной орбиты есть диаметр видимой орбиты. Поэтому центр видимой орбиты есть проекция центра истинной орбиты. Таким образом, соединив центр видимой орбиты с главной звездой, получим проекцию большой оси истинной орбиты, а следовательно, и проекцию периастра. Сравнение позиционного угла проекции периастра с данными наблюдений позволяет найти момент T прохождения через периастр.

Эксцентриситет e истинной орбиты есть отношение расстояния между центром и фокусом к большой полуоси. Так как отношение этих отрезков равно отношению их проекций, то e равно отношению расстояния главной звезды от центра видимой орбиты к половине диаметра, проходящего через главную звезду.

На других предложениях, устанавливающих связь между видимой орбитой и истинной и используемых в графических методах нахождения элементов, останавливаться не будем.

Так как закон площадей имеет место для проекции движения на любую плоскость, то видимое движение спутника подчиняется закону

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const} = c. \quad (4.1)$$

Изучение движения двойной звезды обычно начинается с построения видимой орбиты. В методах нахождения орбит, носящих общее название геометрических, все элементы, кроме P и T , получаются при помощи видимой орбиты. Но и при

употреблении других методов предварительное построение видимой орбиты может быть очень полезно, так как дает возможность судить о качестве наблюдений и о достаточности имеющихся наблюдений для получения орбиты.

Наблюдения дают ряд точек (x_1, y_1) , $(x_2, y_2), \dots$, лежащих на видимой орбите. Построив эти точки, можно попытаться провести эллипс так, чтобы расстояния между этим эллипсом и точками, представляющими наблюдения, были по возможности малы.

С другой стороны, можно исходить из уравнения видимой орбиты. Это уравнение можно взять в форме

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1 = 0, \quad (4.2)$$

так как свободный член не может быть равным нулю, поскольку видимая орбита не проходит через главную звезду. Для нахождения пяти коэффициентов этого уравнения можно использовать все имеющиеся точки (x_1, y_1) , $(x_2, y_2), \dots$.

Оба эти способа, являющиеся наиболее прямыми, оказались практически несостоятельными благодаря малой точности наблюдений. В этих чисто геометрических способах совсем не используются ни моменты t_1, t_2, \dots , т. е. наиболее точные данные наблюдений, ни закон площадей (4.1).

Простейшим из применяемых на практике способов получения видимой орбиты является следующий. На плоскости Axy строятся точки, соответствующие наблюдениям (или нормальным местам). Через эти точки проводят достаточно правдоподобный эллипс. Затем проверяют, насколько этот эллипс удовлетворяет закону площадей. Для этого измеряют при помощи планметра площади надлежаще выбранных секторов и сравнивают их с соответствующими промежутками времени. Пользуясь результатами таких сравнений, меняют форму и положение эллипса до тех пор, пока не будет достигнуто возможно лучшее соблюдение закона площадей.

Способ Джона Гершеля (1833). Строят кривую, дающую позиционный угол θ как функцию времени. С этой кривой, тщательно сглаженной, снимают значения t , соответствующие равноотстоящим значениям θ . Полученная таблица позволяет найти значения $dt/d\theta$, соответствующие ряду значений θ . Формула (4.1) дает

$$\rho = \sqrt{c dt/d\theta}. \quad (4.3)$$

Взяв для c произвольное значение, мы можем вычислить относительные значения ρ , соответствующие только что указанным значениям θ . Нанеся на чертеж полученные таким образом точки (θ, ρ) , получим кривую, удовлетворяющую закону

площадей. Последовательными пробами надо изменить эту кривую так, чтобы она стала эллипсом.

Сравнение наблюдаемых и относительных расстояний позволяет найти масштаб этих последних.

Способ Гершеля особенно выгоден в тех случаях, когда измерения ρ заметно уступают в точности измерениям θ , как это имеет место для многих старинных рядов наблюдений, или для особенно тесных пар.

Способ Тиле (1866). Если соотношение (4.1) разрешить относительно $d\theta$ и проинтегрировать, то получим

$$\theta - \theta_1 = c \int_{t_1}^t \rho^{-2} dt. \quad (4.4)$$

Построим кривую, откладывая t по оси абсцисс и ρ^{-2} по оси ординат. Интегрирование этой кривой между двумя значениями t , для которых известны θ , даст постоянные θ_1 и c , входящие в формулу (4.4). После этого надо вычислить по формуле (4.4) значения θ , соответствующие моментам наблюдений, и сопоставить их с наблюдаемыми значениями θ . Добившись, путем проб, достаточного совпадения, мы будем иметь видимую орбиту, подчиняющуюся закону площадей.

Поскольку интегрирование эмпирической функции выполняется с меньшей относительной ошибкой, нежели дифференцирование, способ Тиле имеет известные преимущества перед способом Гершеля.

После того как одним из только что указанных способов построена видимая орбита (целиком или в значительной части), можно найти коэффициенты ее уравнения (4.2). Для этого нужно измерить координаты достаточного числа точек видимой орбиты и решить соответствующую систему линейных уравнений.

Учитывая небольшую точность произведенных построений, здесь редко прибегают к способу наименьших квадратов. Очень часто довольствуются следующим приемом (предложенным С. П. Глазенапом в 1889 г.), сокращающим вычисления до минимума. Обозначим через x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения кривой (4.2) с осью x . Так как эти величины удовлетворяют уравнению

$$a_{20}x^2 + 2a_{10}x - 1 = 0,$$

то

$$a_{20} = \frac{-1}{x_1 x_2}; \quad 2a_{10} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$$

Подобно этому

$$a_{02} = \frac{-1}{y_1 y_2}; \quad 2a_{01} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2},$$

если через y_1 и y_2 обозначить ординаты точек пересечения с осью y .

Для вычисления пятого коэффициента нужно в формулу

$$-2a_{11} = \frac{a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1}{xy}$$

подставить координаты одной или нескольких точек, выбранных на наиболее надежных участках видимой орбиты. Конечно, эти точки надо брать так, чтобы абсолютная величина произведения xy была по возможности больше.

Нахождение прямолинейной видимой орбиты было подробно изучено Арендом [1959].

§ 5. Метод Ковальского

Методы вычисления орбит двойных звезд делятся на *геометрические* и *динамические*.

В геометрических методах пять геометрических элементов получаются при помощи предварительно найденной видимой орбиты. Таким образом, в этих методах для нахождения всех элементов, кроме P и T , непосредственно используется лишь то свойство движения, что траектория спутника есть коническое сечение.

В динамических методах видимая орбита не используется, но для нахождения всех элементов широко используются, с самого начала, все свойства движения.

Геометрические методы впервые были предложены Джоном Гершелем в 1833 г., Вилларсо (Y. Villarceau) в 1849 г. и М. А. Ковальским в 1872 г. Графические способы для получения истинной орбиты по видимой дали Клинкерфюс (W. Klinkerfues) в 1877 г. и Цвирс (H. Zwiers) в 1896 г. Наиболее употребительными в настоящее время являются метод Ковальского *) и метод Цвирса.

Формулы, выражающие пять геометрических элементов истинной орбиты через коэффициенты уравнения

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1 = 0 \quad (5.1)$$

видимой орбиты, в методе Ковальского получаются следующим образом.

В системе координат $Axyz$ (см. рис. 17) уравнение (5.1) изображает эллиптический цилиндр с образующими, параллельными

*) Работа, в которой был опубликован (без вывода формул) этот метод, была переиздана [Ковальский, 1951] с обстоятельными комментариями Д. Я. Мартынова, содержащими также историю опубликования и распространения этого метода.

лучу зрения Az . Истинная орбита есть пересечение этого цилиндра плоскостью NBN' .

Рассмотрим, с другой стороны, орбитальную систему координат, в которой ось $A\xi$ направлена в периастр, ось $A\eta$ в точку орбиты, для которой $v=90^\circ$, а ось $A\zeta$ по нормали к плоскости NBN' . В этой системе истинная орбита представляется уравнениями $\zeta=0$ и

$$(ae + \xi)^2 a^{-2} + \eta^2 b^{-2} = 1. \quad (5.2)$$

Чтобы установить зависимость между координатами систем $Axyz$ и $A\xi\eta\zeta$, преобразуем первую систему во вторую рядом элементарных вращений. Вращение триэдра $Axyz$ около оси Az на угол Ω даст триэдр $Ax'y'z'$, у которого ось Ax' совпадает с линией узлов AN . Повернув триэдр $Ax'y'z'$ около оси Ax' на угол i , мы получим триэдр $Ax''y''z''$, у которого плоскость $Ax''y''$ совпадает с плоскостью истинной орбиты. Если, наконец, повернуть триэдр $Ax''y''z''$ около оси Az'' на угол ω , то получим триэдр $A\xi\eta\zeta$. Очевидно,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \Omega - y' \sin \Omega, \\ y &= x' \sin \Omega + y' \cos \Omega, \\ z &= z' \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x' &= x'', \\ y' &= y'' \cos i - z'' \sin i, \\ z' &= y'' \sin i + z'' \cos i, \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i + z'' \sin \Omega \sin i, \\ y &= x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i - z'' \cos \Omega \sin i. \end{aligned}$$

Если эти выражения подставить в уравнение (5.1) и положить $z''=0$, то получим уравнение истинной орбиты, отнесенное к осям $Ax''y''$:

$$\begin{aligned} a_{20}(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)^2 + a_{02}(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i)^2 + \\ + 2a_{11}(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i)(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) + \\ + 2a_{10}(x'' \cos \Omega - y'' \sin \Omega \cos i) + \\ + 2a_{01}(x'' \sin \Omega + y'' \cos \Omega \cos i) - 1 = 0. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Но координатная система $Ax''y''z''$ получается из системы $A\xi\eta\zeta$ поворотом около оси $A\zeta$ на угол $-\omega$, поэтому

$$\begin{aligned} \xi &= x'' \cos \omega + y'' \sin \omega, \\ \eta &= -x'' \sin \omega + y'' \cos \omega. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (5.2), получим уравнение истинной орбиты в системе $Ax''y''$:

$$a^{-2}(x'' \cos \omega + y'' \sin \omega + ae)^2 + b^{-2}(-x'' \sin \omega + y'' \cos \omega)^2 = 1.$$

Это уравнение может отличаться от (5.3) лишь постоянным множителем. Обозначив этот множитель через κ , напишем, что коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это даст

$$a_{20} \cos^2 \Omega + a_{02} \sin^2 \Omega + a_{11} \sin 2\Omega = \kappa(a^{-2} \cos^2 \omega + b^{-2} \sin^2 \omega), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 i (a_{20} \sin^2 \Omega + a_{02} \cos^2 \Omega - a_{11} \sin 2\Omega) = \\ = \kappa(a^{-2} \sin^2 \omega + b^{-2} \cos^2 \omega), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \cos i (-a_{20} \sin 2\Omega + a_{02} \sin 2\Omega + 2a_{11} \cos 2\Omega) = \\ = \kappa(a^{-2} - b^{-2}) \sin 2\omega. \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$a_{01} \sin \Omega + a_{10} \cos \Omega = \kappa ea^{-1} \cos \omega, \quad (5.7)$$

$$\cos i (a_{01} \cos \Omega - a_{10} \sin \Omega) = \kappa ea^{-1} \sin \omega, \quad (5.8)$$

$$1 = \kappa(1 - e^2). \quad (5.9)$$

Из этих шести соотношений надо исключить κ и найти a , e , Ω , i , ω .

Заметим, прежде всего, что введение параметра p вместо большой полуоси a позволяет, учитывая (5.9), представить правые части равенств (5.4)–(5.8) в таком виде:

$$\kappa(a^{-2} \cos^2 \omega + b^{-2} \sin^2 \omega) = p^{-2} - e^2 p^{-2} \cos^2 \omega,$$

$$\kappa(a^{-2} \sin^2 \omega + b^{-2} \cos^2 \omega) = p^{-2} - e^2 p^{-2} \sin^2 \omega,$$

$$\kappa(a^{-2} - b^{-2}) \sin 2\omega = -e^2 p^{-2} \sin 2\omega,$$

$$\kappa ea^{-1} = ep^{-1}.$$

Почленное перемножение равенств (5.7) и (5.8) дает

$$\cos i (a_{01}^2 \sin 2\Omega - a_{10}^2 \sin 2\Omega + 2a_{01}a_{10} \cos 2\Omega) = e^2 p^{-2} \sin 2\omega.$$

Сложив это равенство с (5.6), получим

$$(a_{02} - a_{20} + a_{01}^2 - a_{10}^2) \sin 2\Omega + 2(a_{11} + a_{01}a_{10}) \cos 2\Omega = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2N}{M-L}. \quad (5.10)$$

где

$$L = a_{02} + a_{01}^2; \quad M = a_{20} + a_{10}^2; \quad N = a_{11} + a_{01}a_{10}. \quad (5.11)$$

Теперь легко найти i . В самом деле, почленное вычитание равенств (5.4) и (5.5) дает

$$a_{02} \sin^2 \Omega + a_{20} \cos^2 \Omega + a_{11} \sin 2\Omega - \\ - \cos^2 i (a_{02} \cos^2 \Omega + a_{20} \sin^2 \Omega - a_{11} \sin 2\Omega) = -e^2 p^{-2} \cos 2\omega.$$

С другой стороны, если уравнения (5.7) и (5.8) возвести почленно в квадрат и вычесть одно из другого, то это даст

$$(a_{01} \sin \Omega + a_{10} \cos \Omega)^2 - \cos^2 i (a_{01} \cos \Omega - a_{10} \sin \Omega)^2 = e^2 p^{-2} \cos 2\omega.$$

Сложение двух последних равенств, исключаяющее ω , дает

$$\cos^2 i = \frac{L \sin^2 \Omega + M \cos^2 \Omega + N \sin 2\Omega}{L \cos^2 \Omega + M \sin^2 \Omega - N \sin 2\Omega}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}^2 i = \frac{(L - M) \cos 2\Omega - 2N \sin 2\Omega}{L \sin^2 \Omega + M \cos^2 \Omega + N \sin 2\Omega}, \quad (5.12)$$

$$1 + \sec^2 i = \frac{L + M}{L \sin^2 \Omega + M \cos^2 \Omega + N \sin 2\Omega}. \quad (5.13)$$

Наиболее удобные формулы для вычисления Ω и i получим, связав это вычисление с одновременным нахождением p .

Если уравнение (5.8), возведенное предварительно в квадрат, прибавить почленно к уравнению (5.5), то получим

$$p^{-2} = \cos^2 i (L \cos^2 \Omega + M \sin^2 \Omega - N \sin 2\Omega),$$

или

$$p^{-2} = L \sin^2 \Omega + M \cos^2 \Omega + N \sin 2\Omega. \quad (5.14)$$

Составляя это равенство с (5.12), находим

$$p^{-2} \operatorname{tg}^2 i = (L - M) \cos 2\Omega - 2N \sin 2\Omega,$$

что, совместно с (5.10), дает

$$\left. \begin{aligned} p^{-2} \operatorname{tg}^2 i \sin 2\Omega &= -2N, \\ p^{-2} \operatorname{tg}^2 i \cos 2\Omega &= L - M. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Эти уравнения вполне однозначно определяют Ω и одновременно дают $p^{-2} \operatorname{tg}^2 i$.

Вместо того, чтобы вычислять p по формуле (5.14), можно воспользоваться значительно более простым выражением. В самом деле, равенства (5.13) и (5.14) дают

$$p^{-2} (1 + \sec^2 i) = L + M,$$

откуда

$$2p^{-2} = L + M - p^{-2} \operatorname{tg}^2 i \quad (5.16)$$

Найдя отсюда p^{-2} , мы будем знать и $\operatorname{tg}^2 i$. Угол i однозначно определится условием:

$$\begin{aligned} 0 \leq i < 90^\circ, & \text{ если позиционные углы возрастают;} \\ 90^\circ < i \leq 180^\circ, & \text{ если позиционные углы убывают.} \end{aligned}$$

Мы нашли, таким образом, элементы Ω , i , p . Уравнения (5.7) и (5.8), которые можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} ep^{-1} \sin \omega &= (a_{01} \cos \Omega - a_{10} \sin \Omega) \cos i, \\ ep^{-1} \cos \omega &= a_{01} \sin \Omega + a_{10} \cos \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

позволяют найти e и ω .

Чтобы найти P и T , возьмем несколько наиболее надежных наблюдений позиционных углов (t_k, θ_k) . По вытекающей из (3.3) формуле

$$\operatorname{tg}(v_k + \omega) = \operatorname{tg}(\theta_k - \Omega) \sec i, \quad (5.18)$$

где $v_k + \omega$ и $\theta_k - \Omega$ находятся всегда в одном и том же квадранте, вычисляем соответствующие истинные аномалии v_k . Это позволяет найти для тех же моментов средние аномалии:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_k = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_k; \quad M_k = E_k - e \sin E_k. \quad (5.19)$$

Поскольку $M = n(t - T)$, каждое наблюдение дает возможность написать условное уравнение

$$nt_k - nT = M_k.$$

Решение этих уравнений дает $n = 360^\circ/P$ и nT .

Для вычисления последнего элемента — большой полуоси a — можно было бы воспользоваться соотношением $p = a(1 - e^2)$. Но для получения возможно более надежного значения этого весьма важного элемента поступают обычно иначе.

Выберем ряд наблюдений (t_k, ρ_k, θ_k) , дающих наиболее надежные значения расстояний ρ_k . Вычислив по формулам (3.3) соответствующие орбитальные координаты r_k, v_k , получим ряд значений большой полуоси:

$$a = r_k (1 + e \cos v_k) (1 - e^2)^{-1},$$

что позволяет найти наиболее вероятное значение a .

§ 6. Метод Тиле — Иннеса

Среди динамических методов одним из наиболее часто применяемых является метод Тиле — Иннеса. Основные идеи этого метода были даны Тиле (Т. N. Thiele) в 1883 г. Но он вошел в употребление лишь после 1926 г., когда Иннес (R. T. A. Innes) придал ему более удобную форму. Постоянные Тиле — Иннеса

(§ 3) были введены в употребление одновременно с этим методом.

Видимая орбита используется здесь для получения: во-первых, величины c , т. е. удвоенной секторной скорости видимого движения; во-вторых, трех возможно более надежных нормальных мест (t_g, x_g, y_g) , где $g=1, 2, 3$.

Промежутки времени между нормальными местами должны быть, конечно, достаточно велики, однако не в ущерб точности выбранных нормальных мест. Чем больше будет площадь треугольника, образованного точками (x_g, y_g) , тем лучше.

Пусть Δ_{gh} есть удвоенная площадь треугольника, образованного главной звездой и положениями спутника в моменты t_g и t_h . Формулы (3.7), дающие

$$x_g = AX_g + FY_g; \quad y_g = BX_g + GY_g. \quad (6.1)$$

показывают, что

$$\Delta_{gh} = x_g y_h - x_h y_g = (AG - BF)(X_g Y_h - X_h Y_g).$$

Легко видеть, что

$$X_g Y_h - X_h Y_g = \sqrt{1 - e^2} [\sin(E_h - E_g) - e(\sin E_h - \sin E_g)],$$

а так как, на основании (3.13),

$$(AG - BF) \sqrt{1 - e^2} = c\mu^{-1},$$

то

$$\Delta_{gh} = c\mu^{-1} [\sin(E_h - E_g) - e(\sin E_h - \sin E_g)]. \quad (6.2)$$

Пользуясь уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = \mu(t - T), \quad (6.3)$$

эту формулу можно написать так:

$$\Delta_{gh} = c\mu^{-1} [\sin(E_h - E_g) - (E_h - E_g) + \mu(t_h - t_g)]. \quad (6.4)$$

Положим

$$u = E_2 - E_1; \quad v = E_3 - E_2.$$

Формула (6.4) позволяет составить следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} t_2 - t_1 - \Delta_{12}c^{-1} &= \mu^{-1}(u - \sin u), \\ t_3 - t_2 - \Delta_{23}c^{-1} &= \mu^{-1}(v - \sin v), \\ t_3 - t_1 - \Delta_{13}c^{-1} &= \mu^{-1}[u + v - \sin(u + v)], \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

из которых можно найти три неизвестные величины μ^{-1} , u , v .

Чтобы вычислить эксцентрические аномалии, заметим прежде всего, что очевидная комбинация уравнений (6.5) дает

$$\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13} = c\mu^{-1} [\sin u + \sin v - \sin(u + v)]. \quad (6.6)$$

С другой стороны, формула (6.2) показывает, после некоторых выкладок, что

$$\begin{aligned} \Delta_{23} \sin u - \Delta_{12} \sin v &= c\mu^{-1} e \sin E_2 [\sin u + \sin v - \sin(u+v)], \\ \Delta_{23} \cos u + \Delta_{12} \cos v - \Delta_{13} &= c\mu^{-1} e \cos E_2 [\sin u + \sin v - \sin(u+v)]. \end{aligned}$$

Если эти равенства разделить почленно на равенство (6.6), то получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} e \sin E_2 &= Q (\Delta_{23} \sin u - \Delta_{12} \sin v), \\ e \cos E_2 &= Q (\Delta_{23} \cos u + \Delta_{12} \cos v + \Delta_{13}), \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

где

$$Q = (\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13})^{-1}, \quad (6.8)$$

позволяющие найти e , E_2 , а следовательно, и

$$E_1 = E_2 - u; \quad E_3 = E_2 + v.$$

После этого уравнение (6.3) даст три значения для T . Достаточно хорошее совпадение этих значений контролирует проделанную работу.

Этим заканчивается вычисление динамических элементов μ , T и e . Заметим, что

$$n = 57^\circ, 2958\mu; \quad P = 2\pi/\mu = 360^\circ/n.$$

Чтобы найти векторные элементы A , B , F и G , нужно вычислить редуцированные орбитальные координаты для двух моментов наблюдений, например, t_1 и t_3 , и воспользоваться уравнениями (6.1). Переход к обычным элементам выполняется по формулам (3.9).

Решение основной системы (6.5) надо начинать с получения приближенного значения μ . Если наблюдения охватывают период обращения, то легко получить весьма приближенное значение P , а следовательно, и μ . В противном случае приходится начинать, выбрав какое-либо правдоподобное значение μ . С этим значением из двух первых уравнений (6.5) находят (пользуясь таблицей функции $\arcs x = x - \sin x$) значения u и v ; если их сумма не совпадает со значением $u+v$, даваемым третьим уравнением, то принятое значение μ соответствующим образом меняют.

Когда наблюдения позиционных углов позволяют найти вполне надежное значение P , а следовательно, и μ , уравнения (6.5) бывает выгодно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} \mu(t_2 - t_1) - \Delta_{12}\mu c^{-1} &= u - \sin u, \\ \mu(t_3 - t_2) - \Delta_{23}\mu c^{-1} &= v - \sin v, \\ \mu(t_3 - t_1) - \Delta_{13}\mu c^{-1} &= u + v - \sin(u+v) \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

и решать относительно s , u и v . Особенно важно идти этим путем в тех случаях, когда наблюдения из-за наличия в них ошибок плохо удовлетворяют закону площадей.

Встречается на практике и такой случай, когда μ и s найдены из предварительной дискуссии наблюдений с большей точностью, чем могут дать уравнения (6.9). В этом случае из уравнений (6.9) находят u , v и $u+v$, а получающуюся между этими величинами невязку распределяют поровну.

Опыт показывает, что метод Ковальского (или другие геометрические методы) следует предпочесть в тех случаях, когда наблюдения покрывают достаточно равномерно всю (или почти всю) орбиту. Но если между дугами орбиты, хорошо покрытыми наблюдениями, имеются значительные разрывы, то построение видимой орбиты может содержать слишком много произвола. В таких случаях метод Тиле — Иннеса является более надежным.

В заключение укажем работы Аренда [1941] и Домманже [1959], в которых рассматриваются математические вопросы, связанные с методом Тиле — Иннеса.

§ 7. Особые случаи вычисления орбиты двойной звезды

При нахождении орбиты двойной звезды иногда приходится прибегать к специальным приемам, учитывающим особенности рассматриваемого конкретного случая.

Если видимая орбита очень вытянута (что всегда имеет место, если i близко к 90°), вычисление элементов должно по возможности базироваться только на расстояниях. В предельном случае, при $i=90^\circ$ позиционные углы (принимающие скачкообразно только два значения, отличающиеся на 180°) непосредственно дают элементы Ω и i , но не могут быть использованы для нахождения остальных элементов. Наоборот, если видимая орбита широко открыта, то расстояния имеют, вообще говоря, меньшее значение, нежели позиционные углы.

В течение долгого времени наибольшее внимание привлекали пары с быстрым орбитальным движением. Эти пары принадлежат, за редкими исключениями, к числу весьма тесных, наблюдения которых обременены особенно большими относительными ошибками. Применение к таким парам обычных методов приводит к надежным результатам лишь в тех случаях, когда наблюдения охватывают не менее половины орбиты. Вследствие этого вычисление орбит для звезд, у которых спутник описал только небольшую дугу, и имеющих периоды во много сотен лет, до недавнего времени не привлекало внимания. Между тем вычисление орбит в этих случаях, иначе говоря, вычисление орбит по наблюдениям, покрывающим небольшую дугу, весьма

желательно хотя бы ради статистических исследований, столь важных для звездной астрономии и космогонии.

С другой стороны, вычисление этих орбит не является делом безнадежным, так как небольшая величина наблюдаемой дуги компенсируется во многих случаях значительно большей точностью наблюдений, поскольку рассматриваемые пары не являются очень тесными. Конечно, нельзя ожидать, чтобы при небольшой наблюдаемой дуге получились вполне точные элементы. Поэтому наибольший интерес имеют такие методы, которые в самом процессе получения элементов дают представление об их точности. Методы, недавно предложенные Экенбергом [1945] и Рабе [1951] удовлетворяют этому условию.

Ограничимся изложением метода Экенберга. Лежащие в основе его идеи могут быть использованы и в других, аналогичных случаях.

Сущность этого метода заключается в вычислении ряда эфемерид для различных систем элементов и в сравнении этих эфемерид с наблюдениями. Выбирается та система элементов, которая дает наилучшее согласие.

Чтобы сделать применение этой идеи достаточно удобным, Экенберг вычислил таблицы, дающие редуцированный позиционный угол

$$\theta_0 = \theta - \Omega,$$

определяемый формулой

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} (\vartheta + \omega) \cos i \quad (7.1)$$

в функции четырех аргументов:

$$e = 0,0(0,1)0,7; \quad i = 0^\circ(15^\circ)75^\circ; \quad \omega = 0^\circ(15^\circ)90^\circ; \quad M = 0^\circ(10^\circ)360^\circ.$$

При помощи имеющихся наблюдений нужно получить, если это возможно, значение P , хотя бы грубо приближенное. Если наблюдения оказываются для этого недостаточными, берут несколько правдоподобных значений P и сравнивают даваемые ими результаты.

С выбранным значением P и произвольно взятым T' вычисляют

$$M' = n(t - T'); \quad n = 360^\circ/P \quad (7.2)$$

для моментов наблюдений. Это дает возможность построить диаграмму (M', θ) , откладывая M' по оси абсцисс, а θ — по оси ординат. На этой диаграмме нет надобности проводить интерполирующую кривую — нужно только изобразить оси координат и все наблюдения.

После этого при помощи указанных выше таблиц строятся пучки эфемеридных кривых. Взяв фиксированные значения e и i , откладываем, для нескольких значений ω , по оси абсцисс M ,

а по оси ординат — взятые из таблиц значения θ_0 . Таким образом, для каждого ω получим особую кривую.

На такой пучок кривых накладываем диаграмму (M', θ) , начерченную на прозрачной бумаге. Наложение надо сделать так, чтобы оси были строго параллельны.

Так как

$$M = n(t - T)$$

то M и M' отличаются между собой на постоянную величину. Ординаты θ и θ_0 тоже отличаются только на постоянную величину. Поэтому, передвигая диаграмму (M', θ) по диаграмме (M, θ_0) так, чтобы оси координат оставались параллельными, мы должны получить наложение точек θ на эфемеридную кривую, если значения e , i и ω выбраны правильно. Измерив расстояние между осями абсцисс, получим Ω . Расстояние между осями ординат даст $n(T - T')$, а следовательно, и T . Путем последовательных проб находится та эфемеридная кривая, которая наилучшим образом представляет наблюдаемые позиционные углы. Вместе с тем будут найдены все элементы, кроме большой полуоси. Вычисление большой полуоси выполняется способом, указанным в § 5.

Заметим, что в случае обратного движения (когда $i > 90^\circ$) нужно входить в таблицы с аргументом $180^\circ - i$, а формулу (7.2) заменить такой:

$$M' = -n(t - T').$$

Формула (7.1) показывает, как надо пользоваться таблицами для построения кривых, если $\omega > 90^\circ$.

Если бы оказалось целесообразным искать элементы с большей точностью, чем дают эфемеридные кривые, построенные по таблицам Экенберга, то можно вычислить положение спутника для нескольких систем элементов, близких к найденным, и найти сумму квадратов отклонений от наблюдений для каждой такой системы. Систему элементов, для которой сумма квадратов отклонений окажется наименьшей, можно считать наилучшей.

Изложенный метод базируется целиком на позиционных углах. Это делает его мало пригодным в тех случаях, когда видимая орбита представляет собой сильно вытянутый эллипс. Достоинством метода является представляемая им возможность оценить степень надежности полученных элементов.

§ 8. Исправление орбит двойных звезд

Если орбита двойной звезды не дает вполне удовлетворительного представления наблюдений, то ее подвергают полному или частичному исправлению. Применяемые для этого методы дифференциального исправления имеют различную форму, в за-

висимости от того, какие употребляются элементы и какие имеются вспомогательные таблицы.

Пусть исправляются элементы a , φ , n , T , Ω , i , ω . Приращения этих элементов связаны с приращениями координат соотношениями

$$\Delta\Omega + \theta_i \Delta i + \theta_\omega \Delta\omega + \theta_\varphi \Delta\varphi + \theta_\tau \Delta\tau + \theta_n \Delta n = \Delta\theta, \quad (8.1)$$

$$\rho_a \Delta a + \rho_i \Delta i + \rho_\omega \Delta\omega + \rho_\varphi \Delta\varphi + \rho_\tau \Delta\tau + \rho_n \Delta n = \Delta\rho, \quad (8.2)$$

где положено

$$\Delta\tau = -n \Delta T.$$

Входящие сюда частные производные θ и ρ по элементам легко находятся дифференцированием формул (3.3) и (3.4). Ниже мы приведем окончательные результаты, представленные в удобном для вычислений виде.

Поправки $\Delta\Omega$, Δi , $\Delta\omega$, $\Delta\varphi$ и $\Delta\tau$, так же как $\Delta\theta$, будем считать выраженными в градусах; Δn — в градусах, деленных на год; Δa и $\Delta\rho$ — в секундах дуги.

Подставив в правые части (8.1) и (8.2) разности «наблюдение — вычисление» для всех нормальных мест и решив полученную совокупность уравнений по способу наименьших квадратов, найдем вероятнейшие поправки элементов. Но здесь следует учесть, что точность измерения θ убывает вместе с ρ . Поэтому уравнения (8.1) умножают предварительно на

$$v = \rho''/57.3, \quad (8.3)$$

так что искомые поправки элементов определяются условием

$$\sum (v \Delta\theta)^2 + \sum (\Delta\rho)^2 = \text{minimum}. \quad (8.4)$$

Уравнения (8.2) используют значительно меньше, чем (8.1). Уравнения (8.2) употребляются, главным образом, для не очень тесных пар и для тех нормальных мест, для которых ρ достаточно велико; во всех остальных случаях ограничиваются уравнениями (8.1).

Для вычисления коэффициентов уравнения (8.1), уже умноженного на (8.3), могут быть употреблены следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= (2 + e \sin i) \sin E; & e &= \sin \varphi, \\ \lambda &= -v \operatorname{tg} i \sin(\theta - \Omega) \cos(\varphi + \omega), \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} v\theta_\Omega &= v; & v\theta_i &= \lambda; & v\theta_\omega &= v \cos i \left(\frac{r}{\rho}\right)^2, \\ v\theta_\varphi &= v\theta_\omega \kappa \frac{a}{r}; & v\theta_\tau &= -v\theta_\omega \cos \varphi \left(\frac{a}{r}\right)^2, \\ v\theta_n &= -v\theta_\tau (t - T). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

При употреблении тех же вспомогательных величин (8.5) коэффициенты уравнения (8.2) выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} \rho_a &= \frac{\rho}{a}; \quad \rho_l = \lambda \operatorname{tg}(\theta - \Omega), \\ \rho_\omega &= \lambda \sin i; \quad \rho_\varphi = \frac{a}{r} [\kappa \rho_\omega - v \cos \varphi \cos v], \\ \rho_\tau &= - \left(\frac{a}{r} \right)^2 [\rho_\omega \cos \varphi + v \sin \varphi \sin E], \\ \rho_n &= - \rho_\tau (t - T). \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Таблицы прямоугольных орбитальных координат X и Y позволяют вычислить коэффициенты уравнения (8.1) следующим образом. Прежде всего по аргументам e и

$$M = n(t - T)$$

из таблиц находим как X , Y , так и их частные производные по каждому из аргументов. Затем находим v и $\theta - \Omega$:

$$\operatorname{tg} v = Y/X; \quad \operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \operatorname{tg}(v + \omega) \cos i$$

и вспомогательные величины

$$\begin{aligned} g &= \cos(\theta - \Omega) \sin i, \\ l &= \frac{\cos v}{X} = \frac{\sin v}{Y}, \\ h &= -l \sin v; \quad k = +l \cos v. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \theta_l &= -g \sin(\theta - \Omega) \sec i; \\ \theta_\omega &= (1 - g^2) \sec i, \\ \theta_e &= 57,3 \theta_\omega (hX_e + kY_e), \\ \theta_\tau &= 57,3 \theta_\omega (hX_M + kY_M), \\ \theta_n &= \theta_\tau (t - T). \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

При употреблении векторных элементов уравнения (8.1) и (8.2) заменяются, очевидно, такими:

$$\left. \begin{aligned} X \Delta A + Y \Delta F + P_x \Delta e + Q_x \Delta \tau + R_x \Delta n &= \Delta x, \\ X \Delta B + Y \Delta G + P_y \Delta e + Q_y \Delta \tau + R_y \Delta n &= \Delta y, \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

где

$$\begin{aligned} P_x &= AX_e + FY_e; & P_y &= BX_e + GY_e, \\ Q_x &= AX_M + FY_M; & Q_y &= BX_M + GY_M, \\ R_x &= (t - T) Q_x; & R_y &= (t - T) Q_y. \end{aligned}$$

В некоторых случаях для вычисления частных производных X и Y могут оказаться полезными следующие легко выводимые формулы:

$$\begin{aligned} X_e &= -1 - SY^2; & Y_e &= SXY, \\ X_M &= -0,017453 \sqrt{1 - e^2} SY, \\ Y_M &= +0,017453 (1 - e^2)^{3/2} S(X + e), \end{aligned}$$

где

$$S = 1/(1 - e^2) (1 - e^2 - eX),$$

причем M выражено в градусах.

В заключение заметим, что анализ даваемых рассматриваемой системой элементов невязок с наблюдениями часто позволяет очень просто выполнить частичное исправление элементов. Так, например, если сдвиг кривой (t, θ) параллельно оси ординат заметно улучшает представление наблюдений, то величина этого сдвига дает $\Delta\Omega$. Сдвиг этой же кривой параллельно оси абсцисс, улучшающий представление наблюдений, дает ΔT . Среднее арифметическое из $\Delta\rho$ позволяет судить о поправке Δa .

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТ В ИХ ИСТОРИЧЕСКОМ РАЗВИТИИ

§ 1. Проблема кометных орбит. Метод Ньютона *)

С задачей вычисления орбиты небесного тела в нашем теперешнем понимании астрономы впервые встретились лишь в XVI в., когда было окончательно доказано, что кометы являются небесными телами, и возник, таким образом, вопрос о нахождении их орбит.

То, что кометы не могут быть атмосферными явлениями, как учил Аристотель, было открыто Иоганном Мюллером (Региомонтаном). Его измерения и вычисления показали, что расстояние до кометы 1472 года было во много раз больше, чем до Луны: суточный параллакс кометы оказался неощутимым, тогда как для Луны он равен $57'$. Еще более убедительно отсутствие суточного параллакса было установлено Тихо Браге у кометы, наблюдавшейся в 1577 г.

Нахождение орбит Луны и планет, выполнявшееся Птоломеем, Коперником и Кеплером, происходило в совершенно других условиях. Здесь имелась возможность выбирать из огромного количества наблюдений наиболее подходящие для вычисления каждого элемента в отдельности, или даже производить специальные наблюдения. Среднее суточное движение — элемент орбиты, особенно важный для нахождения всех других — тут можно было найти сразу с очень большой точностью из сопоставления наблюдений, разделенных многовековыми промежутками времени. Совсем иначе дело обстояло в случае комет, где приходилось довольствоваться наблюдениями, охватывавшими лишь небольшую часть орбиты.

Первая попытка найти орбиту кометы была сделана Тихо Браге. Он пытался представить движение кометы 1577 года сначала геоцентрической круговой орбитой (проходимой с перемен-

*) Обстоятельное изложение истории определения орбит комет можно найти в статье Дубяго [1943]. (Прим. ред.)

ной скоростью), а затем гелиоцентрической круговой орбитой. Не добившись успеха, Тихо Браге высказал предположение, что «комета наша совершает не тот вполне круговой относительно Солнца путь, о котором речь шла до сих пор, а несколько продолговатый, наподобие фигуры, которую обычно зовут яйцевидной».

Несколько более удачной была попытка Кеплера. Отвергнув возможность движения комет по эллипсам, поскольку они не возвращаются периодически, Кеплер пытался представить их гелиоцентрическое движение прямолинейными траекториями, проходимыми с переменной скоростью. Эта попытка имела некоторый успех, что объясняется небольшой кривизной параболической орбиты вдали от перигелия. Опираясь на такие представления, Кеплер дал способ нахождения кометных орбит и применил его к кометам, наблюдавшимся в 1607 и 1618 годах. Гевелий нашел этим способом орбиты еще десяти комет. Им же было высказано предположение, что кометы могут двигаться по параболам и гиперболам. Однако он не дошел до мысли поместить Солнце в фокусе этих конических сечений. В 1681 г. Дёрфель, говоря о комете 1680 года, привлекшей всеобщее внимание своей яркостью и огромным хвостом, высказал предположение, «не является ли линия движения этой (и других) комет такой параболой, фокус которой надо поместить в центре Солнца».

Открытие закона тяготения положило конец эпохе такого рода эмпирических поисков и позволило установить точные законы движения комет. Нахождение их орбит стало чисто математической задачей вычисления элементов орбиты при помощи достаточного числа наблюдений.

В том наиболее обычном случае, когда кометную орбиту можно считать параболической, число неизвестных элементов равно пяти. Вследствие этого три наблюдения, необходимые для решения задачи, содержат уже избыточные данные, что существенно упрощает решение. Однако и в таком виде задача представляла не малые трудности и ее решение имеет длинную и поучительную историю.

Ньютон указал два различных способа решения этой задачи. Первый из них основан на использовании часовых изменений геоцентрических координат. Он является как бы первообразом метода, развитого впоследствии Лапласом (§ 4). Но в то время как Лаплас пользуется первыми и вторыми производными геоцентрических координат, Ньютон выводит из наблюдений только величины, эквивалентные первой и второй производным долготы и первой производной широты; вместо второй производной широты он пользуется величиной скорости кометы, получая эту скорость при помощи интеграла энергии. Ньютон ограничился

изложением лишь основ этого метода и не довел его до удобоприменимой на практике формы. Поэтому с именем Ньютона связывают обычно только второй из указанных им методов, который он развил полностью и пояснил примерами. Этот метод был использован, как уже отмечалось (§ 6 гл. I), для нахождения орбит многих комет. Метод был дан Ньютоном в геометрической форме, в виде пяти лемм, а все более сложные вычисления заменены в нем графическими построениями. Одна из лемм устанавливает зависимость между геоцентрическими расстояниями кометы в моменты двух крайних наблюдений. Лемма дает эту зависимость хотя и приближенно, но не менее точно, чем уравнение Ольберса (§ 7 гл. IX).

Другая лемма является геометрическим выражением уравнения Эйлера (§ 11 гл. V), лежащего в основе как метода Ольберса, так и всех его позднейших модификаций.

В 1839 г. Плантамур представил метод Ньютона в аналитической форме. Но особенно глубокий анализ этого метода был дан А. Н. Крыловым [1911, 1925], показавшим, что по своим основным идеям этот метод близок к современным и может дать, несмотря на полуграфический характер, достаточную для практических целей точность.

В течение первой половины XVIII в. было сделано много попыток улучшить метод Ньютона (Грегори в 1717 г.; Бугер в 1733 г.; Ж. Кассини в 1740 г.; Шэзо в 1744 г.; Баркер в 1757 г.), но они не дали полезных результатов. Кометные орбиты в течение всего XVIII столетия нередко вычислялись так называемым «методом ложных положений», представлявшим собой не что иное, как рудиментарную форму метода вариации геоцентрических расстояний (§ 3 гл. XI). Распространению этого метода особенно способствовали знаменитые учебники астрономии Лакайля (пять изданий: 1746, 1755, 1761, 1764, 1780) и Лаланда (три издания: 1764, 1771, 1792).

§ 2. Работы Эйлера и Ламберта

Путь к дальнейшему прогрессу в создании методов вычисления орбит был открыт книгой Эйлера «Теория движения планет и комет, содержащая удобный метод для нахождения из немногих наблюдений как планетных, так и кометных орбит. С приложением вычислений, дающих истинный путь кометы, наблюдавшейся в 1680 и 1681 годах, а также той, которая была видна недавно» [Эйлер, 1743].

Здесь впервые задача двух тел была рассмотрена аналитически и притом со значительной полнотой. Так, для случая движения по орбите, эксцентриситет которой близок к единице, Эйлер дал разложения орбитальных координат по степеням

величины

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} E = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v.$$

Эти разложения употребляются иногда и теперь [Оппольцер, 1882; Дубяго, 1949].

Эйлер ставил задачу вычисления орбиты во всей общности, без каких-либо предположений относительно ее эксцентриситета. Эту новую и гораздо более трудную задачу он расчленяет на ряд вспомогательных, среди которых отметим две следующие.

Первую из них Эйлер формулирует так: «По двум данным радиусам-векторам, углу между ними и промежутку времени, в течение которого планета или комета этот угол описывает, найти параметр орбиты и, тем самым, всю орбиту. Угол предполагается небольшой.»

Полное решение этой основной задачи, полученное впоследствии Гауссом [1809], было дано выше (§§ 6, 7 гл. V). Эйлер нашел лишь приближенное решение, даваемое формулой

$$\sqrt{p} = \left(\frac{r_1 r_2}{\tau} + \frac{\tau}{6\sqrt{r_1 r_2}} \right) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad (2.1)$$

и достаточно точное лишь для небольших значений угла $\vartheta_2 - \vartheta_1$ между радиусами-векторами.

Вторая вспомогательная задача, решенная Эйлером также только приближенно, такова: «Даны два близкие положения планеты или кометы и соответствующий промежуток времени; требуется найти промежуточное положение для заданного момента времени». Здесь идет речь о получении зависимостей между координатами трех положений светила, движущегося по законам Кеплера (§ 2 гл. VIII). Эйлер подчеркивает, что найденное им решение тем ближе к истине, чем ближе промежуточный момент к середине между крайними. Полученные здесь Эйлером результаты явились одной из основ методов, данных позднее Ламбертом и Ольберсом.

Для решения завершающей задачи: «По немногим наблюдениям кометы найти ее истинную орбиту», Эйлер предлагает, взяв три близкие, по возможности равноотстоящие, наблюдения, найти орбиту, приняв некоторое правдоподобное значение геоцентрического расстояния. Это значение нужно затем варьировать до тех пор, пока орбита не будет представлять четвертое наблюдение. Это четвертое наблюдение Эйлер рекомендует взять возможно дальше от трех исходных. Если вместо четвертого наблюдения добиваться точного представления среднего наблюдения (два крайних, по которым вычисляются элементы орбиты, представляются всегда вполне точно), то получаем способ вычисления орбиты по трем наблюдениям, вполне удовлетвори-

тельный в тех пределах, в которых можно удовлетвориться точностью формулы (2.1).

Этим способом могла бы быть очень быстро получена вполне удовлетворительная орбита Цереры по ее первым наблюдениям в 1801 г., если бы работа Эйлера не была к этому времени совершенно забыта. Такая судьба метода Эйлера была, однако, вполне естественна, поскольку автор не придал этому методу удобную для применения форму, а его собственные попытки использовать метод для нахождения орбит комет 1680 и 1742 годов были мало удачны. Более того, сам Эйлер, вычисляя впоследствии орбиту кометы 1769 г., не воспользовался этим методом.

Выдающееся значение в развитии рассматриваемой нами области науки имели две работы Ж. Ламберта, опубликованные в 1761 и 1771 годах [Ламберт, 1902].

В противоположность Эйлеру, занимавшемуся только общим случаем вычисления орбиты, Ламберт начал с изучения более простой задачи нахождения параболической орбиты. Он поставил себе целью не столько дать вполне подготовленный для практического применения способ решения, сколько осветить теоретическую сторону этой задачи, используя возможно полнее свойства конических сечений. Наиболее важным результатом было открытие фундаментального значения теоремы Эйлера, как средства выражения параболичности орбиты.

Полученная Ламбертом чисто геометрическим путем формула для площади фокального сектора конического сечения позволила ему дать новое доказательство теоремы Эйлера и обобщить эту теорему на случай произвольного конического сечения *).

Работы Ламберта по-новому осветили также и общую задачу нахождения орбиты по трем наблюдениям. Он первый четко разделил эту задачу на две: на получение первого приближения и на переход от этого приближенного решения к точному. Из доказанных Ламбертом геометрических теорем о кривизне видимого пути светила вытекает алгебраическое уравнение, дающее приближенное значение геоцентрического расстояния в момент среднего наблюдения. Он выразил эту кривизну через кривизну земной орбиты и кривизну орбиты светила. Но кривизна орбиты зависит от радиуса-вектора. Таким образом, выведя кривизну видимого пути из наблюдений и зная радиус-вектор земной орбиты, можно получить уравнение, связывающее радиус-вектор и геоцентрическое расстояние светила в момент среднего наблюдения. Такое уравнение вскоре было действительно получено Лагранжем (§ 3), но другим, уже чисто аналитическим путем.

* По поводу этой теоремы см. Крылов [1935]. (Прим. ред.)

Заметим, что геометрический метод Ламберта, облакавшего все свои результаты в форму теорем, не мог способствовать дальнейшему прогрессу в решении задачи. Настоящим продолжателем Эйлера, впервые использовавшим здесь мощные аналитические методы, прямо ведущие к цели, был Лагранж.

§ 3. Работа Лагранжа 1778 г.

Внимание Лагранжа было привлечено к проблеме нахождения орбит комет в 1777 г., когда Берлинская Академия наук, по инициативе входивших в ее состав Лагранжа и Ламберта, предложила эту проблему как тему на соискание премии. Ни одна из представленных на премию работ не содержала чего-либо нового, но уже в следующем году Лагранж опубликовал два весьма важных мемуара на эту тему, завершенных через пять лет третьим [Лагранж, 1778—1783]. В первом мемуаре он дал подробный разбор способов, предложенных Ньютоном, Эйлером и Ламбертом, во втором — изложил свой метод, дающий, по существу, полное решение задачи.

Воспроизведем основные этапы данного Лагранжем решения, заменив только его обозначения теми, которые употреблялись выше. Заметим, что Лагранж пользуется гелиоцентрическими эклиптическими координатами x_c, y_c, z_c . Но ничто не мешает нам считать эти координаты экваториальными.

Лагранж исходил из формул

$$x = P_x \xi + Q_x \eta; \quad y = P_y \xi + Q_y \eta; \quad z = P_z \xi + Q_z \eta, \quad (3.1)$$

выражающих гелиоцентрические координаты через орбитальные ξ, η .

Применив эти соотношения к трем моментам наблюдений t_1, t, t_2 и исключив направляющие косинусы, он получает соотношения

$$\left. \begin{aligned} Nx_1 - Mx + Lx_2 &= 0, \\ Ny_1 - My + Ly_2 &= 0, \\ Nz_1 - Mz + Lz_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$L = \xi\eta_1 - \xi_1\eta; \quad M = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2; \quad N = \xi_2\eta - \xi\eta_2.$$

При помощи дифференциальных уравнений

$$\xi'' = -\xi r^{-3}; \quad \eta'' = -\eta r^{-3} \quad (3.3)$$

(штрихами обозначены производные по $\theta = kt$) Лагранж получает разложения

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi F_1 + \xi' G_1; & \xi_2 &= \xi F_2 + \xi' G_2, \\ \eta_1 &= \eta F_1 + \eta' G_1; & \eta_2 &= \eta F_2 + \eta' G_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3} \tau_2^2 + \dots; & G_1 &= -\tau_2 + \frac{1}{6} r^{-3} \tau_2^3 + \dots, \\ F_2 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3} \tau_1^2 + \dots; & G_2 &= +\tau_1 - \frac{1}{6} r^{-3} \tau_1^3 - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

аналогичные использованным нами выше (§ 2 гл. VIII). Это ему дает (третьи степени интервалов времени он без всякой надобности отбрасывает)

$$n_1 = \frac{N}{M} = \frac{\tau_1}{\tau} \left(1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3} \right); \quad n_2 = \frac{L}{M} = \frac{\tau_2}{\tau} \left(1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3} \right). \quad (3.6)$$

Эти выражения менее точны (при неравных интервалах времени), нежели употребленные нами в первом приближении выражения (§ 4 гл. VIII), которые можно представить так:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{6r^3} \left(\frac{\tau}{\tau_1} + 1 \right) \right]; \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \left[1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{6r^3} \left(\frac{\tau}{\tau_2} + 1 \right) \right]. \quad (3.7)$$

Если здесь положить в членах второго порядка

$$\frac{\tau}{\tau_1} + 1 = \frac{\tau}{\tau_2} + 1 = 3,$$

то получим выражения (3.6).

После того как в соотношениях (3.2) гелиоцентрические координаты выражены через геоцентрические расстояния ρ_1 , ρ , ρ_2 и величины ρ_1 и ρ_2 исключены, получается уравнение (§ 6 гл. VIII)

$$\rho = P - Qr^{-3}, \quad (3.8)$$

служащее для нахождения ρ .

Стремясь упростить вычисление коэффициентов P и Q , Лагранж предлагает воспользоваться тем обстоятельством, что Земля движется вокруг Солнца приблизительно по законам Кеплера. Это позволяет (§ 8 гл. VIII) заменить уравнение (3.8) более простым, но менее точным уравнением

$$\rho = Q(R^{-3} - r^{-3}). \quad (3.9)$$

Заметим, что это уравнение совпадает, по существу, с тем, которое можно было бы вывести из теоремы Ламберта о кривизне видимой орбиты (§ 2). Коэффициент Q приблизительно пропорционален этой кривизне.

Формулы (3.6) позволили Лагранжу решить задачу нахождения геоцентрических расстояний в первом приближении; иначе говоря, для бесконечно малых интервалов времени. Далее он указывает, что точное решение этой задачи, а следовательно, и вычисление орбиты, эквивалентно нахождению точных значе-

ний n_1 и n_2 . Но этот последний вопрос он рассматривает в мемуаре 1778 г. только для случая параболической орбиты.

В предположении, что комета движется по параболе, Лагранж приводит вычисление n_1 и n_2 к нахождению отношения площади сектора к площади треугольника. Способ, который он дает для вычисления этого последнего отношения, идентичен со способом, предложенным Энке в 1833 г. и употребляемым в настоящее время (§ 8 гл. V).

§ 4. Метод Лагранжа 1783 г. и его дальнейшее развитие

Обратимся теперь к третьему мемуару, опубликованному Лагранжем в 1783 г. Здесь он ставит себе целью, по его собственным словам, не столько дать новое решение «кометной проблемы», сколько упростить и обобщить решение, изложенное во втором мемуаре 1778 г.

Вместо того, чтобы выражать координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 для двух крайних моментов через r, r', \dots формулами (3.1) и (3.4), на этот раз он употребляет использованные нами выше (§ 2, гл. VIII) выражения

$$x_1 = xF_1 + x'G_1; \quad x_2 = xF_2 + x'G_2; \quad \dots, \quad (4.1)$$

где коэффициенты даются теми же самыми формулами (3.5).

Он показывает, далее, что все производные r , входящие в формулы (3.5), можно выразить через r, r' и r'' .

В самом деле, равенство

$$rr' = xx' + yy' + zz'$$

даёт

$$(rr')' = xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Отсюда, пользуясь уравнениями движения и интегралом энергии, получаем

$$(rr')' = r^{-1} - a^{-1}.$$

Дифференцирование этого равенства даёт для радиуса-вектора уравнение третьего порядка

$$(rr')'' = -r^{-2}r',$$

не содержащее a ; отсюда и вытекает справедливость высказанного утверждения.

За основные величины, через которые выражаются все производные r , Лагранж принимает

$$p = r^{-1}r'; \quad q = r^{-2}(rr')'.$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{1}{2} r^{-3} \tau_2^2 - \frac{1}{2} r^{-3} p \tau_2^3 + \frac{1}{8} r^{-3} \left(q - 5p^2 + \frac{1}{3} r^{-3} \right) \tau_2^4 + \\ &\quad + \frac{1}{8} r^{-3} (3pq + pr^{-3} - 7p^3) \tau_2^5 - \dots, \\ G_1 &= -\tau_2 + \frac{1}{6} r^{-3} \tau_2^3 + \frac{1}{4} r^{-3} p \tau_2^4 - \\ &\quad - \frac{1}{8} r^{-3} \left(\frac{3}{5} q - 3p^2 + \frac{1}{15} r^{-3} \right) \tau_2^5 - \dots \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Выражения для F_2 , G_2 получаются заменой здесь τ_2 через $-\tau_1$.

Получение точных значений n_1 и n_2 , выражающихся (§ 2, гл. VIII) через F_1 , G_1 , F_2 , G_2 , приводится, таким образом, к нахождению r , p и q . Для этих величин Лагранж дает уравнения, достаточно удобно решаемые последовательными приближениями.

Мемуар заканчивается выводом формул для вычисления элементов. Для нахождения a , e и истинной аномалии v Лагранж предлагает пользоваться формулами

$$\begin{aligned} a^{-1} &= r^{-1} - r^2 q; & a(1 - e^2) &= r + r^4 (q - p^2), \\ e \cos v &= r^3 (q - p^2). \end{aligned}$$

Две последние формулы можно заменить формулами (2.5) главы V, одинаково удобными при всех значениях эксцентриситета.

Таков метод, предложенный Лагранжем для нахождения орбиты по трем наблюдениям. В теоретическом отношении он решает задачу не менее полно, нежели метод, разработанный Гауссом в связи с открытием Цереры, и так широко применявшийся в течение всего XIX в. Но Лагранж, никогда не вычисливший ни одного примера, не довел свой метод до формы, непосредственно пригодной для вычисления — практика, как это сделал с таким искусством Гаусс, в результате чего метод Лагранжа, хотя и изложенный еще раз в 1787 г. в его знаменитой «Аналитической механике», надолго остался вне поля зрения астрономов.

Только через 100 лет И. А. Востоков [1888], по-видимому впервые, обратил внимание на достоинства этого метода. Он придал ему форму, удобную для вычисления и показал примерами, что он не уступает по своей эффективности методу Гаусса. Но работа Востокова не привлекла внимания и метод Лагранжа не употреблялся до 1911 г., когда Шарлье вновь указал на его полную практическую пригодность. Это привело к появлению нескольких вариантов метода Лагранжа, среди которых наиболее

интересными и наиболее разработанными являются метод Мультона [1914] и метод Вилькенса [1919], изложенный также Штракке [1929].

В этих методах полностью сохраняются основные идеи метода Лагранжа: промежуточными неизвестными, служащими потом для вычисления элементов, являются гелиоцентрические координаты x, y, z и их производные x', y', z' ; последовательные приближения осуществляются при помощи вычисления дополнительных членов в разложениях вида (4.2).

Особого упоминания заслуживает метод, предложенный Андуайе в 1918 г. [Андуайе, 1918 и 1923; Субботин, 1941]. Этот метод, так же как и метод Востокова, отличается от только что указанных тем, что последовательные приближения проводятся не при помощи рядов, а при помощи замкнутых выражений, как это имеет место в методе Гаусса. Методы Востокова и Андуайе занимают, таким образом, промежуточное положение между методом, данным Лагранжем в 1783 г., и методом Гаусса (§ 5), или методом, изложенным в гл. VIII (история которого будет дана в § 7).

§ 5. Работа Дю-Сежура. Метод Ольберса

Начиная свой третий мемуар, рассмотренный в предыдущем параграфе, Лагранж отмечает, что его исследования по этому предмету, опубликованные в 1778 г., явились причиной появления работ Дю-Сежура и Лапласа, представленных Парижской Академии наук соответственно в 1779 и 1780 годах.

Принципиально новый метод решения проблемы нахождения орбит, предложенный Лапласом, мы рассмотрим дальше (§ 11), а сейчас обратимся к мемуару Дю-Сежура, непосредственно примыкающему к работам Лагранжа. В этом мемуаре излагается два различных метода вычисления параболической орбиты.

Сущность первого метода заключается в следующем. Если из уравнений (3.2) гл. VIII, выражающих условие нахождения трех гелиоцентрических положений кометы в плоскости, проходящей через Солнце, исключить n_1 и n_2 , то получим уравнение вида

$$D\rho\rho_1\rho_2 + \mathcal{E}\rho_1\rho_2 + \mathcal{E}_1\rho\rho_1 + \mathcal{E}_2\rho\rho_2 + F\rho + F_1\rho_1 + F_2\rho_2 + G = 0. \quad (5.1)$$

К этому уравнению, коэффициенты которого могут быть вычислены со всею точностью, допускаемую точностью наблюдений, Дю-Сежур присоединяет приближенные уравнения

$$\rho_1 = M_1\rho; \quad \rho_2 = M_2\rho. \quad (5.2)$$

Так как в уравнении (5.1) можно принять $G=0$ (ср. § 8 гл. VIII), то задача вычисления геоцентрических расстояний оказывается приведенной к решению уравнения вида

$$S_0\rho^2 + S_1\rho + S_2 = 0. \quad (5.3)$$

Но легко видеть, что при небольших интервалах времени между наблюдениями коэффициенты уравнения (5.3) имеют очень небольшое число значащих цифр. Этот метод мог давать, таким образом, удовлетворительные результаты лишь в тех случаях, когда коэффициенты M_1 и M_2 уравнений (5.2) удавалось находить (при помощи дополнительных наблюдений) с высокой точностью. Для вычисления орбиты только по трем наблюдениям такой метод совершенно не пригоден. Причиной этого в конечном счете является то, что в уравнении (5.1), на котором он базируется, недостаточно используются свойства силы, производящей движение: это уравнение имеет место для любой центральной силы.

В конце своего мемуара Дю-Сежур указал другой метод, предназначенный уже не для решения задачи в общем виде, а для вычисления только параболических орбит. В то время как его первый метод представляет сейчас лишь исторический интерес, этот метод дал практически полное решение задачи вычисления параболической орбиты, сохранившее все свое значение и до настоящего времени. Тем более представляется удивительным, что сам Дю-Сежур, так гордившийся своим первым методом, не уделил второму методу должного внимания. Все многочисленные кометные орбиты, вычисленные как в рассматриваемом мемуаре, так и в последующих работах Дю-Сежура, были получены при помощи первого метода, ценою огромных вычислений. В результате этого второй метод был совершенно забыт и лишь спустя 17 лет вновь найден Ольберсом, притом в менее совершенном виде.

Второй метод Дю-Сежура заключается в совместном решении уравнения

$$\rho_2 = M\rho_1, \quad (5.4)$$

связывающего геоцентрические расстояния в моменты двух крайних наблюдений, и уравнения Эйлера, которому он придал (в наших обозначениях) вид

$$s^2 = \frac{4k^2 (t_2 - t_1)^2}{r_1 + r_2} \zeta^2, \quad (5.5)$$

где в первом приближении можно положить $\zeta=1$, а r_1 , r_2 и s легко выражаются через ρ_1 и ρ_2 (§ 2, гл. IX).

Соотношением вида (5.4) пользовались еще Ньютон и Ламберт. Дю-Сежур получил его как следствие уравнений Лагран-

жа (3.2), чем была вскрыта истинная природа этого соотношения, затемнявшаяся ранее сложными геометрическими выводами.

В 1797 г. Вильгельм Ольберс напечатал свое ставшее знаменитым «Сочинение о простейшем и удобнейшем методе вычисления орбиты кометы» [Ольберс, 1864]. Оно начинается подробным разбором всех способов нахождения параболической орбиты, предложенных до Лагранжа, а также первого метода Дю-Сежура. Работы Лагранжа и Лапласа здесь только упомянуты, а второй метод Дю-Сежура не упомянут вовсе. После этого Ольберс переходит к изложению своего метода и пояснению его тщательно проделанным во всех деталях вычислением орбиты кометы 1769 г.

Метод Ольберса является, по существу, не чем иным, как методом Ламберта, представленным в аналитической форме и тщательно приспособленным к нуждам астронома-вычислителя. Заслуга Ольберса была в том, что он впервые подошел к проблеме вычисления орбит не как к задаче абстрактно-математической с абсолютно точными исходными данными, а как к задаче чисто практической, требующей тщательного учета реальной точности этих данных.

Это обстоятельство больше всего способствовало тому, что его сочинение сразу сделалось настольной книгой астрономов и так тщательно изучалось в течение всего XIX в.

От второго метода Дю-Сежура метод Ольберса отличается в двух отношениях. Во-первых, вместо простого аналитического вывода уравнения (5.4) мы находим у Ольберса снова геометрический вывод, закрывающий возможность уточнения этого уравнения последовательными приближениями. Во-вторых, вместо формы (5.5) уравнения Эйлера Ольберс употребляет это уравнение в его первоначальной форме

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}, \quad (5.6)$$

что ведет в случае малых промежутков времени к такой потере точности, которая не является неизбежной.

Все эти недостатки первоначальной формы метода Ольберса были впоследствии исправлены. Замена уравнения (5.6) соотношением (5.5) была сделана Энке [1831]. Таким образом, «метод Ольберса» уже стал вполне идентичен с совершенно забытым методом Дю-Сежура.

Выявление роли Дю-Сежура является заслугой киевского астронома В. И. Фабрициуса (1845—1895), внесшего здесь полную ясность [Фабрициус, 1883]. Другим киевским астрономом, Р. Ф. Фогелем (1859—1920), была выяснена идентичность сущности первоначальной формы метода Ольберса с методом Ламберта [Фогель, 1894].

Работа Фогеля вызвала попытку заменить название «метод Ольберса» на «метод Ламберта — Ольберса» [Баушингер, 1928]. Однако, как мы только что видели, для такой замены нет достаточных оснований. Название «метод Ольберса» является, конечно, условным, но оно напоминает о том, что Ольберс первый ясно понял все значение этого метода, как кратчайшего и удобнейшего пути для нахождения приближенной параболической орбиты. И Ламберт и Дю-Сежур были далеки от такого понимания.

Значительным улучшением метода, приведением к его современной форме, был переход от сферических эклиптических координат к прямоугольным экваториальным координатам, позволивший заменить тригонометрические формулы гораздо более удобными (особенно при машинном вычислении) алгебраическими. Этот переход совершился одновременно и в решении общей задачи вычисления орбит (§ 7).

§ 6. Метод Гаусса

Появление метода Гаусса для решения общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям, тесно связанное с открытием малых планет, представляет один из наиболее эффективных и наиболее известных эпизодов в истории астрономии. Напоминать его здесь нет надобности. Но для нас важно отметить, что создание и разработка этого метода происходили в условиях, глубоко отличных от того, что имело место в других случаях. Ведь Гаусс создавал и усовершенствовал свой метод в неразрывной связи с попытками дать орбиты первых четырех малых планет — Цереры, Паллады, Юноны и Весты (открытых соответственно в 1801, 1802, 1804 и 1807 гг.). Его метод принимал поэтому свою окончательную форму лишь по мере того, как каждый этап испытывался на практике.

Только после такой многолетней работы Гаусс опубликовал свое знаменитое сочинение «Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям» [Гаусс, 1809], с таким нетерпением ожидавшееся его современниками.

Сочинение Гаусса, как бы уже заранее апробированное теми успешными предвычислениями эфемерид малых планет, которое он опубликовал в течение ряда лет, было встречено с восторгом и сразу стало настольной книгой астрономов. Оно оставалось таковой многие десятилетия. Даже в начале XX в. в некоторых университетах тщательное изучение трактата Гаусса еще считалось необходимым при подготовке специалиста в области теоретической астрономии.

Помимо заслуг Гаусса в решении общей задачи вычисления орбиты по трем наблюдениям (вычисление параболической ор-

биты он не рассматривает, отсылая читателя к сочинению Ольберса), два обстоятельства явились причиной исключительного авторитета его трактата. Гаусс впервые так подробно и так тщательно рассмотрел все вопросы, связанные с невозмущенным движением светил, что отпадала надобность пользоваться какими-либо другими сочинениями. С другой стороны, его книга явилась первым (и на многие десятилетия единственным) руководством по тому, что теперь получило название вычислительной техники. Здесь было подробно рассмотрено влияние ошибок исходных данных на результат, сравнительная точность различных формул, служащих для вычисления одной и той же величины, и другие аналогичные вопросы. Более того, для решения многих задач Гаусс дает не только формулы, но и тщательно продуманные вычислительные схемы. Не преувеличивая, можно сказать, что именно благодаря книге Гаусса искусство вычислять впервые получило широкое распространение.

Излагая свой метод вычисления орбит, Гаусс нигде не указывает, что здесь было сделано его предшественниками. Это привело к распространению, даже среди специалистов, не говоря уже о широких кругах астрономов, взгляда на метод, излагаемый в *Theoria motus*, как на создание одного Гаусса, а на работы его предшественников — как на мало успешные попытки решить задачу, столь блестяще решенную Гауссом. Однако такое представление совершенно не соответствует действительности.

Оно возникло потому, что работы Лагранжа не были достаточно известны астрономам и имели чуждый для них характер. А с другой стороны, метод Гаусса по своей внешней форме глубоко отличался от метода Лагранжа.

Но если обратиться к существу дела, то легко видеть, какая тесная связь существует между этими методами. Лагранж получает свое основное уравнение, имеющее в наших обозначениях вид

$$D\rho = U - n_1 U_1 - n_2 U_2, \quad (6.1)$$

в чисто алгебраической форме, поскольку он пользуется прямоугольными координатами и направляющими косинусами. Гаусс получает эту основную зависимость между геоцентрическим расстоянием ρ и отношениями n_1 и n_2 площадей треугольников в тригонометрической форме. В соответствии с привычками астрономов того времени, он пользуется полярными эклиптическими координатами и находит уравнение, эквивалентное (6.1), при помощи геометрических построений и сферической тригонометрии, совершенно не пользуясь методами аналитической геометрии.

С другой стороны, за основные неизвестные Лагранж принимает, как мы видели выше, отношения n_1 и n_2 , тогда как Гаусс

вводит вместо них величины

$$P = n_2/n_1; \quad Q = 2r^3(n_1 + n_2 - 1). \quad (6.2)$$

В первом приближении Гаусс берет

$$P = \tau_2/\tau_1; \quad Q = \tau_1\tau_2,$$

иначе говоря, он здесь пользуется теми же значениями (3.6) отношений площадей треугольников, как и Лагранж. Таким образом, первое приближение в способе Гаусса, по существу, идентично с первым приближением в способе Лагранжа, а потому дает такую же точность.

Отметим, что с чисто практической точки зрения можно считать, что хорошее первое приближение уже решает задачу, ибо переход от него к точной орбите легко может быть осуществлен способом вариации геоцентрических расстояний, или способом дифференциального исправления элементов. Оба эти способа широко использовались еще Эйлером.

Таким образом, когда были открыты первые малые планеты, способ Лагранжа мог полностью обеспечить успешное вычисление их орбит. Но работы Лагранжа — «геометра», как тогда называли математиков, — были слишком далеки даже по своему внешнему виду от того, к чему привыкли астрономы. В них решение задачи не доводилось до вычислительных рецептов, поясненных примерами. Неудивительно поэтому, что эти работы остались вне поля зрения астрономов.

Но если в отношении первого приближения было достаточно придать уже существующему решению удобный для вычислений и соответствующий привычкам астрономов вид, то в отношении точного решения задачи Гаусс пошел совершенно иным путем, нежели Лагранж.

Для получения во втором и следующих приближениях более точных значений n_1 и n_2 Лагранж предлагал пользоваться бесконечными рядами (4.2). Гаусс дал для этого гораздо более совершенный и в теоретическом и в практическом отношении способ. Этот способ, основанный на замечательном методе нахождения отношения площади сектора к площади треугольника (§ 7 гл. V), был изложен выше (§ 6 гл. VIII).

Способ Лагранжа основан на использовании столь общего приема, как разложения в степенные ряды. Так как эти ряды здесь весьма сложны, то судить о числе членов, которые нужно принять во внимание, можно только по их убыванию. С каждым новым приближением быстро возрастает не только число членов, подлежащих вычислению, но и их сложность. Напротив, способ Гаусса является превосходным примером искуснейшего использования специфических свойств эллиптического движения. В нем вычисление ведется по замкнутым формулам и притом, что

особенно важно в практическом отношении, по одним и тем же во всех приближениях. Употребление все время одних и тех же формул не только существенно облегчает вычисление, но и делает его гораздо более надежным, предохраняя от ошибок.

Указанная выше идентичность сущности первого приближения в способах Гаусса и Лагранжа была ясно понята еще В. И. Фабрициусом [1887], но стала более широко известной лишь в начале XX в., когда пробудился интерес к работам Лагранжа, остававшимся так долго забытыми (§ 4).

§ 7. Дальнейшее развитие метода Гаусса

После вычисления орбит четырех первых малых планет, выполненного самим Гауссом, метод Гаусса долго не имел новых применений, поскольку пятая малая планета (Астреа) была открыта лишь в 1845 г. Последовавшие затем все более и более многочисленные открытия малых планет дали много новых и разнообразных случаев для практического испытания этого метода. И уже очень скоро не без удивления заметили, что в метод, который все привыкли считать вершиной совершенства, могут быть внесены полезные изменения.

Энке [1852], отметив, что «математическое изящество, достигнутое Гауссом путем применения геометрических способов, несколько затрудняет употребление метода на практике», дал значительно более прямой вывод основных уравнений. Этот вывод, приближающийся к выводу, данному Лагранжем, освободил метод от излишних промежуточных величин, что способствовало и большей ясности изложения и удобству применения. Среди других улучшений, введенных Энке, особенно следует отметить замену формул (3.6) для отношений площадей треугольников, которые Гаусс без изменения взял у Лагранжа, формулами (3.7). Такая замена, не усложняя заметно вычислений, делает первое приближение более точным, что иногда чувствительно сокращает работу, так как уменьшает число приближений.

Предложенная Энке форма метода сразу вошла во всеобщее употребление. На Берлинской обсерватории, сделавшейся во время директорства Энке главным центром по вычислению орбит и эфемерид малых планет, метод получил некоторые дальнейшие улучшения, опубликованные Титъеном [1877]. В такой именно форме метод Гаусса вошел в широко распространенные монографии и применялся при логарифмическом вычислении до недавнего времени. Можно отметить, что в этой окончательной форме метода Гаусса за основные неизвестные принимаются не величины (6.2), введенные Гауссом, а отношения n_1 и n_2 площадей треугольников, чем делается еще один шаг назад к методу Лагранжа.

Освобождение от ненужного усложнения, вызываемого введением величин (6.2), было еще раньше Титъена осуществлено Клинкерфюсом [1871]. В его замечательной во многих отношениях книге было сделано еще одно важное нововведение — переход от эклиптических координат к экваториальным.

Выгода употребления при вычислении орбиты экваториальной координатной системы стала вполне реальной благодаря тому, что начиная с 1835 г. Берлинский астрономический ежегодник, ради удобства вычисления эфемерид малых планет и комет, стал давать прямоугольные экваториальные координаты Солнца. Однако традиция пользоваться исключительно эклиптическими координатами была окончательно преодолена лишь в двадцатых и тридцатых годах нашего века под влиянием широкого распространения арифмометров. Хотя применение экваториальных координат имеет несомненные преимущества и при логарифмическом вычислении, как это справедливо отмечал Клинкерфюс, а еще раньше (1862) Гюльден, но решающее значение здесь имело стремление максимально использовать возможности арифмометрического вычисления.

Введение прямоугольных экваториальных координат вместо полярных эклиптических окончательно привело к замене сложных тригонометрических формул, ведущих свое начало от Гаусса, теми простыми алгебраическими формулами, которыми пользовался Лагранж. В то время как у Лагранжа основные уравнения (3.2) являются следствием уравнений (3.1), дающих параметрическое представление плоскости, проходящей через начало координат, у Гаусса соответствующие уравнения получаются как следствие тригонометрических тождеств

$$\sin(C - B) \frac{\sin}{\cos} \} A - \sin(C - A) \frac{\sin}{\cos} \} B + \sin(B - A) \frac{\sin}{\cos} \} C = 0$$

и выражений координат планеты через элементы (§ 5 гл. IV).

Таким образом, в результате всех этих улучшений рассматриваемый метод стал в отношении основных формул (связывающих геоцентрические расстояния светила с отношениями n_1 и n_2 площадей треугольников) и всего первого приближения тождественным с методом Лагранжа (§ 4). Что же касается второго и дальнейших приближений, то здесь полностью сохранился созданный Гауссом способ, основанный на вычислении отношений площадей секторов к площадям треугольников (§ 6 гл. VIII). Только для второго приближения этот способ может быть с выгодой заменен применением формул Гиббса (§ 7 гл. VIII).

Все это показывает, что метод вычисления орбит по трем наблюдениям, изложенный в гл. VIII и являющийся в настоящее время наиболее употребительным, по всей справедливости может быть назван методом Лагранжа — Гаусса.

Из дальнейших улучшений*), касающихся уже лишь деталей, нужно упомянуть предложенный Мертоном [1925] способ для вычисления элементов орбиты по двум гелиоцентрическим положениям и параметру (§ 3 гл. V). При арифмометрическом вычислении этот способ несколько удобнее употреблявшегося раньше (§ 4, гл. V).

Что касается внешней стороны метода Лагранжа — Гаусса, следует отметить еще одну попытку несколько сократить вычисления. Было предложено находить из основных уравнений непосредственно гелиоцентрические координаты, нужные для вычисления элементов орбиты, вместо того, чтобы пользоваться геоцентрическими расстояниями как промежуточными неизвестными.

Если, например, за основные неизвестные принять координаты x_1, x, x_2 , то после исключения из соотношений

$$x = \lambda\rho - X; \quad y = \mu\rho - Y; \quad z = \nu\rho - Z; \dots \quad (7.1)$$

геоцентрических расстояний получим

$$\left. \begin{aligned} y &= px - a; & y_1 &= p_1x_1 - a_1; & y_2 &= p_2x_2 - a_2, \\ z &= qx - b; & z_1 &= q_1x_1 - b_1; & z_2 &= q_2x_2 - b_2, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

где коэффициенты даются формулами вида

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tg} \alpha; & a &= Y - pX, \\ q &= \sec \alpha \operatorname{tg} \delta; & b &= Z - qX, \dots \end{aligned}$$

Подстановка выражений (7.2) в основные уравнения (3.2), написанные в их обычной форме, дает

$$\left. \begin{aligned} n_1x_1 - x + n_2x_2 &= 0, \\ p_1n_1x_1 - px + p_2n_2x_2 &= n_1a_1 - a + n_2a_2, \\ q_1n_1x_1 - qx + q_2n_2x_2 &= n_1b_1 - b + n_2b_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Отсюда, исключая x_1, x_2 и пользуясь приближенными выражениями для n_1 и n_2 , получим уравнение

$$x = A + Br^{-3}. \quad (7.4)$$

Присоединив к нему соотношение

$$r^2 = Cx^2 - 2Dx + \mathcal{E}, \quad (7.5)$$

легко выводимое из (7.1), будем иметь возможность найти x и r .

После того как решена система (7.4), (7.5), заменяющая здесь уравнения Лагранжа, соотношения (7.3) дадут x_1, x_2 , а формулы (7.2) — все остальные координаты.

*) Упрощающие модификации различных методов определения орбит дают Тиссеран [1899] и Калландро [1902]. (Прим. ред.)

Конечно, соотношения (7.2) и (7.3) несколько проще, нежели употребляемые в обычной форме метода Лагранжа — Гаусса. Но, с другой стороны, коэффициенты уравнения (7.5) сложнее, и нужна еще дополнительная работа для нахождения геоцентрических расстояний, необходимых для вычисления поправок за абберационное время. Принимая во внимание еще и потерю симметрии, приходится признать, что указанный путь едва ли имеет заметные преимущества перед общепринятым, по крайней мере, если число приближений (как это почти всегда бывает на практике) не превышает двух.

Идея сократить вычисления путем употребления гелиоцентрических координат в качестве основных неизвестных была использована в методе Вилькенса [1919], с большой обстоятельностью изложенном Штракке [1929]. Сопоставление формул для такой модификации метода Лагранжа — Гаусса впервые дал Стойко [1933].

Метод, названный нами методом Лагранжа — Гаусса, является наиболее прямым развитием идей этих ученых. Но на почве этих же идей было создано еще несколько методов. Методы Фабрициуса и Харцера будут подробно изложены в двух следующих параграфах. Здесь мы укажем сущность некоторых методов, хотя и не вошедших в практику, но представляющих теоретический интерес.

Оппольцер [1870, 1882] предложил увеличить точность первого приближения путем замены формул (3.7) для n_1 и n_2 , введенных в употребление Энке, более точными формулами, выражающими эти величины через радиусы-векторы r_1 и r_2 (§ 3 гл. IX). В развитом им методе вместо двух уравнений Лагранжа приходится решать систему четырех уравнений с неизвестными ρ_1, ρ_2, r_1, r_2 . Достигаемый этим путем выигрыш в точности не компенсирует, однако, значительного усложнения вычислений, даже в тех случаях, когда метод Оппольцера позволяет ограничиться только одним приближением.

То же самое можно сказать и о методе Гиббса [1888], в котором для нахождения геоцентрических расстояний применяются данные Гиббсом формулы для n_1 и n_2 (§ 7 гл. VIII). Здесь приходится решать еще более сложную систему уравнений. Другим недостатком этого метода является невозможность исправления полученных значений геоцентрических расстояний последовательными приближениями, если точность формул Гиббса окажется недостаточной.

Эти недостатки были в известной степени устранены в работах В. И. Фабрициуса [1891; 1893], Р. Ф. Фогеля [1891; 1892] и Фришауфа [1905], но и в такой улучшенной форме метод не получил распространения.

Сравнение всех этих методов дает Харцер [1901]. Его весьма обстоятельная работа содержит и некоторые другие варианты, а также изучение вопроса о влиянии ошибок наблюдений на точность получаемых геоцентрических расстояний. Интересные соображения о сравнительных достоинствах различных методов содержат также работы Кона [1918] и Стойко [1931 а; 1931 б].

§ 8. Метод Фабрициуса

Наиболее существенной особенностью метода Гаусса, по сравнению с методом Лагранжа, было приведение задачи к решению системы двух уравнений вида

$$P = F_1(P, Q), \quad Q = F_2(P, Q), \quad (8.1)$$

правые части которых вычисляются по замкнутым формулам. Лагранж, как мы видели, употреблял для нахождения эквивалентных величин n_1 и n_2 бесконечные ряды.

Когда в 1877 г. Титъен улучшил метод Гаусса введением величин n_1 и n_2 вместо P и Q , задача была приведена, по существу, к решению системы уравнений вида

$$n_1 = f_1(n_1, n_2), \quad n_2 = f_2(n_1, n_2), \quad (8.2)$$

правые части которых имеют замкнутые выражения.

Это обстоятельство было особенно отчетливо выявлено в интересной модификации метода Гаусса, предложенной в том же году В. И. Фабрициусом [1877]. Метод Фабрициуса был изложен в хорошо известном трактате Баушингера [1906 и 1928], но, по-видимому, на практике не применялся.

Дадим рабочие формулы этого, во многих отношениях интересного метода, не останавливаясь на подробностях их вывода.

Основу метода составляет решение уравнений (8.2), которые можно написать, удерживая все прежние обозначения, так:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau} \frac{\eta}{\eta_1}; \quad n_2 = \frac{\tau_2}{\tau} \frac{\eta}{\eta_2}. \quad (8.3)$$

Чтобы решить эти уравнения способом итераций или каким-либо иным, нужно иметь возможность вычислять их правые части для выбранных значений n_1 , n_2 . Для этого можно воспользоваться следующими формулами.

Прежде всего, выведенные в гл. VIII уравнения (3.5), (3.7) и одно из уравнений (3.2) дают формулы вида

$$\left. \begin{aligned} \rho &= a + a_1 n_1 + a_2 n_2, \\ n_1 \rho_1 &= a' + a'_1 n_1 + a'_2 n_2 + b' \rho, \\ n_2 \rho_2 &= a'' + a''_1 n_1 + a''_2 n_2 + b'' \rho + b''_1 \rho_1, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

позволяющие находить значения ρ , ρ_1 , ρ_2 , соответствующие принятым значениям n_1 и n_2 .

После этого по формулам

$$x = \lambda\rho - X; \quad y = \mu\rho - Y; \quad z = \nu\rho - Z$$

и им аналогичным вычисляются гелиоцентрические координаты светила в моменты t , t_1 и t_2 , что дает соответствующие радиусы-векторы r , r_1 , r_2 .

Далее, следуя пути, указанному в § 9, гл. VIII, мы можем сразу найти величины η , η_1 , η_2 . Таким образом, заканчивается вычисление тех значений правых частей уравнений (8.3), которые соответствуют исходным значениям n_1 и n_2 .

Фабрициус показал, что можно избежать вычисления величины η , поступая следующим образом.

После того как найдены r , r_1 , r_2 , η_1 и η_2 , вычисляем вспомогательные величины

$$\begin{aligned} 2\sigma &= n_1 r_1 + r + n_2 r_2, \\ A &= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_1}{\tau_1} + \frac{\eta_2}{\tau_2} \right) \sqrt{2\sigma(\sigma - n_1 r_1)(\sigma - n_2 r_2)}, \\ N &= A \mp \sqrt{A^2 - 2A}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Здесь верхний или нижний знак берется в зависимости от того, меньше или больше 180° гелиоцентрическая дуга, пройденная светилом за время от t_1 до t_2 .

При помощи величины N уравнения (8.3) могут быть представлены в форме

$$n_1 = \frac{N}{\tau_1 \eta_2 + \tau_2 \eta_1} \tau_1 \eta_2; \quad n_2 = \frac{N}{\tau_1 \eta_2 + \tau_2 \eta_1} \tau_2 \eta_1, \quad (8.6)$$

уже не содержащей η .

Чтобы получить для решения этих уравнений исходные значения n_1 и n_2 , Фабрициус предлагает следующий способ.

Первое из уравнений (8.4) можно написать так:

$$\rho = a + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(n_1 + n_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(n_1 - n_2), \quad (8.7)$$

где разность $a_1 - a_2$ есть, как легко видеть, величина первого порядка малости.

Выведенные нами формулы (§ 2, гл. VIII) дают, если ограничиться членами третьего порядка,

$$n_1 + n_2 = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3} - \frac{r'}{2r^4} \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2) + \dots, \quad (8.8)$$

$$n_1 - n_2 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} \left[1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{6r^3} - \frac{r'}{2r^4} \tau_1 \tau_2 + \dots \right]. \quad (8.9)$$

Выражение (8.9) подставим в (8.7). Отбросив получившиеся при этом члены третьего порядка, будем иметь

$$\rho = a + \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau} + a_m(n_1 + n_2), \quad (8.10)$$

где

$$a_m = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Формулы (8.6) показывают, что $n_1 + n_2 = N$. Поэтому после подстановки выражения (8.10) в соотношение

$$r^2 = (\rho + C)^2 + R^2 - C^2,$$

получим следующую зависимость между величинами r и N :

$$r^2 = (K + a_m N)^2 + S^2, \quad (8.11)$$

где

$$K = C + a + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2\tau}(a_1 - a_2); \quad S^2 = R^2 - C^2.$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением

$$N = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}, \quad (8.12)$$

вытекающим из (8.8), даст величины r и N , после чего формулы

$$\eta_1 = 1 + \frac{\tau_1^2}{6r^3}; \quad \eta_2 = 1 + \frac{\tau_2^2}{6r^3}, \quad (8.13)$$

и (8.6) позволят вычислить n_1 и n_2 с такой же точностью.

Решение системы уравнений (8.11) и (8.12) заменяет здесь решение уравнений Лагранжа.

В последующих приближениях решать эту систему уже не нужно. Благодаря этому обстоятельству метод Фабрициуса может иметь некоторые преимущества перед методом Лагранжа — Гаусса. Эти преимущества, однако, не велики, так как повторное решение уравнений Лагранжа в быстро сходящихся приближениях представляет собой очень небольшую добавочную работу.

§ 9. Метод Харцера

Среди методов вычисления орбит, примыкающих к основным идеям Лагранжа и Гаусса, метод Харцера [1913 и 1918] отличается тем, что в нем первым этапом является нахождение круговой орбиты, по возможности хорошо представляющей все три наблюдения.

К первому из уравнений (8.4), т. е.

$$\rho = a + a_1 n_1 + a_2 n_2, \quad (9.1)$$

где (§ 3 гл. VIII)

$$a = D^{-1}U; \quad a_1 = -D^{-1}U_1; \quad a_2 = -D^{-1}U_2,$$

присоединим соотношение

$$r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2, \quad (9.2)$$

дающее

$$\rho = -C + \sqrt{r^2 - S^2},$$

где

$$C = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z) = R \cos \psi,$$

$$S^2 = R^2 - C^2 = R^2 \sin^2 \psi.$$

После исключения ρ получим уравнение

$$F(r) = 0, \quad (9.3)$$

где

$$F(r) = C + a - \sqrt{r^2 - S^2} + a_1 n_1 + a_2 n_2.$$

Решение этого уравнения выполняется сначала в предположении, что орбита круговая, так что $r_1 = r_2 = r$.

Для круговой орбиты отношения площадей секторов к площадям соответствующих треугольников, входящие в формулы Гаусса

$$n_1 = n_1^0 \eta_1 / \eta_1; \quad n_2 = n_2^0 \eta_1 / \eta_2, \quad (9.4)$$

выражаются, как нетрудно видеть, следующим образом:

$$\eta = \frac{w}{\sin w}; \quad \eta_1 = \frac{w_1}{\sin w_1}; \quad \eta_2 = \frac{w_2}{\sin w_2}, \quad (9.5)$$

причем

$$w = \tau r^{-3/2}; \quad w_1 = \tau_1 r^{-3/2}; \quad w_2 = \tau_2 r^{-3/2}. \quad (9.6)$$

Решение уравнения (9.3) с этими значениями n_1 и n_2 легко выполняется любым интерполяционным методом. За исходное значение можно взять $r = 2,0$ или $2,5$.

С полученными в процессе решения значениями n_1 и n_2 , соответствующими корню уравнения (9.3), вычисляются ρ_1 и ρ_2 , для чего служат обычные формулы (3.2) гл. VIII.

Затем по формулам, аналогичным (9.2), находятся r_1 и r_2 .

Для вычисления более точных значений n_1 и n_2 Харцер предлагает пользоваться формулами (9.4) и (9.5), но на этот раз брать

$$\left. \begin{aligned} w &= \tau \left[\frac{1}{2} (u_1 + u_2) - \frac{\tau}{5\tau_1\tau_2} u_0 \right]^{1/2}, \\ w_1 &= \tau_1 \left[\frac{1}{2} (u + u_2) - \frac{\tau_1}{5\tau\tau_2} u_0 \right]^{1/2}, \\ w_2 &= \tau_2 \left[\frac{1}{2} (u + u_1) - \frac{\tau_2}{5\tau\tau_1} u_0 \right]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

где

$$u = r^{-3}; \quad u_1 = r_1^{-3}; \quad u_2 = r_2^{-3},$$

$$u_0 = \tau_1 u_1 - \tau u + \tau_2 u_2.$$

Харцер показал, что приближенные формулы (9.5), (9.7) для отношений η , η_1 , η_2 дают всю нужную на практике точность, если эксцентриситет малой планеты невелик, а промежуток времени $t_2 - t_1$ не превосходит 2—3 месяцев.

Применение формул (9.5) существенно облегчается таблицами функции $(\sin x)/x$ или $x/\sin x$. Таблицы Хайаши [1930] дают первую из этих функций с восемью десятичными знаками для $x=0(0,01) 10(0,1) 20(1) 100$. Таблицы Рейнолдса [1957] дают ее с девятью знаками для $x=0(0,001) 49,999$.

Если точность, даваемая выражениями (9.7), при дальнейших приближениях окажется недостаточной, то величины η , η_1 , η_2 можно вычислить по обычным формулам (§ 9 гл. VIII).

Для приближенного вычисления отношений η , η_1 , η_2 при помощи выражений (9.5) можно вместо формул Харцера (9.7) взять более простые:

$$\omega = \tau (r_1 r_2)^{-3/4}; \quad \omega_1 = \tau_1 (r r_2)^{-3/4}; \quad \omega_2 = \tau_2 (r r_1)^{-3/4}, \quad (9.8)$$

указанные Г. М. Баженовым [1947; 1949]. Но область их применимости значительно меньше. При эксцентриситете $e=0,3$ формулы Харцера дают шестизначную точность, если гелиоцентрическая дуга не превосходит 25° , тогда как формулы (9.5) и (9.8) дают такую же точность только для дуги, не превосходящей $4^\circ, 2$.

§ 10. Практическая эффективность рассмотренных методов

Мы уже видели, какой исключительный авторитет сразу приобрела *Theoria motus* Гаусса. Следствием этого явилась не только недооценка заслуг его предшественников, но и преувеличенное представление о возможностях данного им метода. Метод Гаусса стал часто рассматриваться как полное, вполне универсальное решение задачи нахождения орбиты по трем наблюдениям.

В самом деле, единственное ограничение общности этого метода, ясно указанное самим Гауссом (и присущее всем предлагавшимся ранее методам), заключалось в достаточной малости интервалов времени между наблюдениями. Но такое ограничение не может считаться сколько-нибудь существенным, поскольку все методы нахождения орбиты по трем наблюдениям нужны только для вычисления предварительной орбиты. Поэтому в реально встречающихся на практике случаях их приходится применять лишь к близким между собою наблюдениям.

Но является ли метод Гаусса вполне общим в пределах этого вытекающего из существа дела ограничения? Какие интервалы времени здесь надо считать достаточно малыми? Эти вопросы долго оставались без сколько-нибудь обоснованного теоретически ответа, хотя эмпирически было найдено, что для малых планет интервал в несколько десятков дней является вполне допустимым, тогда как для комет метод Гаусса очень редко дает удовлетворительные результаты, даже при самых малых интервалах времени.

Говоря об эффективности метода нахождения орбиты, необходимо различать два совершенно разных вопроса — эффективность первого приближения и удобство перехода от первого приближения к точному решению задачи.

Глубокий анализ метода Гаусса мы находим впервые в замечательной во многих отношениях работе В. И. Фабрициуса [1887]. Здесь были указаны случаи, когда получение первого приближения при помощи способа, общего методам Лагранжа и Гаусса, становится или совсем невозможным или крайне ненадежным. Фабрициус пришел к заключению, что на метод Гаусса «надо смотреть как на частный прием, дающий надежные результаты только для той группы небесных тел (малых планет), открытие которых служило поводом для появления в свет *Theoria motus*». Еще бóльшую ясность внесла здесь работа Мультона [1914], в которой первое приближение было исследовано в его лагранжевой, чисто алгебраической форме. Таким образом, было установлено, что успех первого приближения в методе Лагранжа — Гаусса связан прежде всего с достаточной малостью гелиоцентрического движения светила. Но, с другой стороны, это движение не должно быть столь малó, чтобы неизбежные ошибки наблюдений могли существенно исказить кривизну видимой траектории светила. Другое условие, весьма способствующее успеху первого приближения, заключается в существенном превышении радиусов-векторов светила в моменты наблюдений радиусов-векторов Земли.

Что касается второй части задачи — перехода от первого приближения к точной орбите, то путь, указанный Гауссом, обеспечивает здесь всегда полную эффективность решения. После всех улучшений, внесенных в способ Гаусса, этот путь заключается, как мы видели, в решении системы уравнений вида

$$n_1 = f_1(n_1, n_2); \quad n_2 = f_2(n_1, n_2), \quad (10.1)$$

правые части которых вычисляются в каждом приближении при помощи одних и тех же замкнутых формул.

Вычисление правых частей уравнений (10.1) может быть выполнено как по улучшенным формулам Гаусса (§ 9, гл. VIII), так и по формулам Фабрициуса (§ 8). В большинстве случаев

приближенные формулы Харцера (§ 9) также дают всю нужную на практике точность и могут служить для сокращения вычислений.

Нередко под методом Гаусса разумеют не только применение указанных им формул к вычислению правых частей уравнений (10.1), но и решение этих уравнений методом итерации. Это неверно с исторической точки зрения, поскольку сам Гаусс указывал на целесообразность решения соответствующих уравнений (8.1) интерполяционными методами в тех случаях, когда последовательные итерации сходятся недостаточно быстро.

Но и по существу дела, включение того или иного частного способа решения уравнений как неотъемлемой принадлежности определенного метода нахождения орбит является нецелесообразным. Задачей такого метода является составление уравнений, а выбор наиболее эффективного способа их решения — это уже вопрос вычислительной математики.

Все это показывает, что исследование сходимости итерационного процесса для уравнений (10.1) не представляет практического интереса. Помимо работ, уже указанных выше (§ 6, гл. VIII), условия этой сходимости рассматривались еще в работах Буцериуса [1950—1953], представившего правые части уравнений (10.1) в интегральной форме. Применение общей теории интегральных уравнений позволило Буцериусу получить новый алгоритм для нахождения n_1 и n_2 , не претендующий, впрочем, на практические преимущества по сравнению с указанными выше [Штумпф, 1959]. Этим путем Буцериус получил следующее достаточное условие: сходимость итерационного процесса имеет место, если интервал времени между крайними наблюдениями (выраженный в сутках) удовлетворяет неравенству

$$t_2 - t_1 \leq 179 h^{3/2},$$

где через h обозначена длина перпендикуляра, опущенного из Солнца на хорду, соединяющую положения светила в моменты t_1 и t_2 .

Все сказанное здесь относительно получения точного решения по методу Гаусса относится, конечно, и к процессу получения точного решения по методам Фабрициуса и Харцера.

§ 11. Метод Лапласа

Внимание Лапласа к задаче нахождения орбит комет было привлечено, как он сам отмечает, работами Лагранжа и Дю-Сежура, опубликованными в 1778 и 1779 гг. Но развитый им метод [Лаплас, 1780] строится совсем на другом основании. В то время как все его предшественники решали задачу при помощи свойств движения, выражаемых первыми интегралами, Лаплас

исходит непосредственно из дифференциальных уравнений движения. Поэтому метод Лапласа и все его модификации называют иногда прямыми методами вычисления орбит.

Возможность прямого использования дифференциальных уравнений движения для нахождения гелиоцентрических координат светила была указана еще Ньютоном (§ 1). Но намеченный им план решения задачи не является, как показал Лаплас, вполне правильным.

Сущность метода Лапласа может быть представлена следующим образом.

Основные соотношения между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами

$$\lambda\rho = x + X; \quad \mu\rho = y + Y; \quad \nu\rho = z + Z, \quad (11.1)$$

будучи дважды продифференцированы по переменному $\theta = kt$, дают

$$\lambda''\rho + 2\lambda'\rho' + \lambda\rho'' = x'' + X''; \dots$$

Если отсюда исключить x'' , ... при помощи уравнений движения

$$x'' = -xr^{-3}; \dots \quad (11.2)$$

и присоединить вытекающую из (11.1) зависимость между ρ и r , то получим следующую основную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda''\rho + 2\lambda'\rho' + \lambda\rho'' &= (X - \lambda\rho)r^{-3} + X'' \\ \mu''\rho + 2\mu'\rho' + \mu\rho'' &= (Y - \mu\rho)r^{-3} + Y'' \\ \nu''\rho + 2\nu'\rho' + \nu\rho'' &= (Z - \nu\rho)r^{-3} + Z'' \\ r^2 &= \rho^2 + 2C\rho + R^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Величины λ , λ' , λ'' , μ , ..., ν'' могут быть найдены из наблюдений, а X'' , Y'' , Z'' — из теории движения Земли. Поэтому уравнения (11.3) позволяют найти r , ρ и ρ' . Вычислив затем при помощи соотношений (11.1) и вытекающих из них равенств

$$\lambda'\rho + \lambda\rho' = x' + X', \dots \quad (11.4)$$

координаты x , y , z и их производные x' , y' , z' для рассматриваемого момента времени, мы получим возможность легко найти элементы орбиты.

Если в соотношениях (11.1), а следовательно, и вытекающих из них (11.3) и (11.4), координаты $\lambda\rho$, ..., X , ... считать геоцентрическими, то производные X' , X'' , ... легко могут быть получены со всей нужной точностью из данных ежегодника.

Задача приводится, таким образом, к нахождению из наблюдений девяти величин λ , μ , ν , λ' , ..., λ'' , ..., соответствующих некоторому моменту θ . Это можно сделать, используя получен-

ные из наблюдений геоцентрические направляющие косинусы λ_h, μ_h, ν_h для трех и более моментов θ_h ($h=0, 1, 2, \dots$).

Такая возможность получать исходные величины при помощи произвольно большого числа наблюдений, ослабляя тем самым влияние их случайных ошибок, рассматривалась как особое преимущество метода Лапласа. Однако это преимущество не имеет в действительности практического значения. Целесообразнее вычислить сначала орбиту по трем наблюдениям, а затем улучшать ее при помощи остальных. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением случая, когда используются три наблюдения, — единственного, представляющего практический интерес.

Пусть для функции $f(\theta)$ известны частные значения $f_1=f(\theta_1)$, $f_0=f(\theta_0)$, $f_2=f(\theta_2)$, причем $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$.

Значение этой функции и ее производных для аргумента θ , близкого к θ_0 , удобно находить по формуле

$$f(\theta) = f_0 + (\theta - \theta_0)[f'_{0f_1}] + (\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1)[f'_{0f_1f_2}], \quad (11.5)$$

где

$$[f'_{0f_1}] = \frac{f_1 - f_0}{\theta_1 - \theta_0}; \quad [f'_{1f_2}] = \frac{f_2 - f_1}{\theta_2 - \theta_1}; \quad [f'_{0f_1f_2}] = \frac{[f'_{1f_2}] - [f'_{0f_1}]}{\theta_2 - \theta_0}.$$

В частности, полагая $\theta = \theta_0$, будем иметь

$$f'(\theta_0) = \frac{\tau_1^2(f_0 - f_1) + \tau_2^2(f_2 - f_0)}{\tau_1\tau_2}; \quad \frac{1}{2} f''(\theta_0) = \frac{\tau_1 f_1 - \tau_0 + \tau_2 f_2}{\tau_1\tau_2}, \quad (11.6)$$

где, как обычно,

$$\tau = \theta_2 - \theta_1; \quad \tau_1 = \theta_2 - \theta_0; \quad \tau_2 = \theta_0 - \theta_1.$$

Вычислив по этим формулам производные $\lambda', \lambda'', \dots$ для момента среднего наблюдения, мы будем иметь все, что нужно для решения уравнений (11.3) и вычисления элементов орбиты. Полученная орбита будет совершенно точно представлять, вообще говоря, только среднее наблюдение. На представлении крайних наблюдений скажутся ошибки, делаемые нами при употреблении приближенной формулы (11.5). Переход от приближенной орбиты, даваемой решением системы (11.3), к орбите, точно представляющей все три наблюдения, уже выходит за рамки метода Лапласа. Такой переход может быть выполнен или способом Гаусса, или любым способом дифференциального исправления полученной орбиты. Некоторые специальные методы, предложенные для этой цели, будут рассмотрены в следующих параграфах.

Заметим, что Лаплас предложил для вычисления вторых производных X'' , ... пользоваться соотношениями

$$X'' = -XR^{-3}; \dots, \quad (11.7)$$

аналогичными (11.2). Этим путем несколько сокращаются вычисления, но без всякой необходимости теряется точность и создаются дополнительные трудности с учетом барицентрического параллакса, поскольку уравнения (11.7) имеют место не для геоцентрических координат, а для таких, начало которых находится в барицентре системы Земля — Луна. Необходимый здесь учет барицентрического параллакса (так же как и топоцентрического) может быть строго выполнен лишь в процессе последовательных приближений, когда уже получены достаточно точные значения геоцентрических расстояний. Если же не прибегать к помощи уравнений (11.7), то учет параллаксов, как увидим ниже (§ 15), может быть существенно упрощен.

Пуанкаре [1906] указал, как можно в случае неравноотстоящих наблюдений повысить точность метода Лапласа без заметного усложнения вычислений. Для этого нужно только за момент, к которому относятся основные уравнения (11.3), взять не момент t_0 среднего наблюдения, а момент

$$t = \frac{1}{3}(t_1 + t_0 + t_2), \quad (11.8)$$

являющийся средним арифметическим из моментов наблюдений.

В самом деле, главную часть ошибки интерполяционной формулы (11.5) составляет член третьей степени, который, очевидно, равен $\frac{1}{6} f'''(\theta_0) \Pi$, где для краткости положено

$$\Pi = (\theta - \theta_0)(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2).$$

Таким образом, ошибки значений $f'(\theta)$ и $f''(\theta)$, вычисленных по формуле (11.5), можно считать равными приблизительно $\frac{1}{6} f'''(\theta_0) \Pi'$ и $\frac{1}{6} f'''(\theta_0) \Pi''$. Но в интересующем нас случае, когда момент θ не выходит за пределы интервала, охватываемого наблюдениями, Π' есть величина второго порядка, а Π'' — первого, причем

$$\Pi' = 2(3\theta - \theta_0 - \theta_1 - \theta_2).$$

Если же формулу (11.5) применить не к моменту t_0 , а к моменту (11.8), то это вызовет дополнительные (зависящие от интерполирования) ошибки третьего порядка в величинах λ , μ , ν , но зато в λ'' , μ'' , ν'' мы будем иметь ошибки не первого порядка, а второго, поскольку в этом случае Π'' обращается в нуль. Первые производные λ' , μ' , ν' будут получаться в обоих случаях с ошибками второго порядка. Значение ρ , получаемое при решении системы (11.3), будет в этом случае на один порядок точнее (в общем случае неравноотстоящих наблюдений), нежели в первоначальной форме метода Лапласа.

Из уравнений (11.3) исключим ρ' и ρ'' . Полагая

$$\left. \begin{aligned} A &= \mu\nu' - \nu\mu'; & B &= \nu\lambda' - \lambda\nu'; & C &= \lambda\mu' - \mu\lambda', \\ E &= A\lambda'' + B\mu'' + C\nu'', \\ V &= AX + BY + CZ, \\ V'' &= AX'' + BY'' + CZ'', \\ P &= V''E^{-1}; & Q &= -VE^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

получим

$$\rho = P - Qr^{-3}; \quad r^2 = \rho^2 + 2C\rho + R^2. \quad (11.10)$$

Здесь непосредственно видно влияние ошибок исходных данных на точность получаемых значений ρ и r .

Примечание. Направляющие косинусы и их производные должны удовлетворять соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1; & \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' &= 0, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + \lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Для вычисления производных направляющих косинусов можно пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= -\alpha' \cos \delta \sin \alpha - \delta' \sin \delta \cos \alpha, \\ \mu' &= \alpha' \cos \delta \cos \alpha - \delta' \sin \delta \sin \alpha, \\ \nu' &= \delta' \cos \delta, \\ \lambda'' &= -\alpha'' \cos \delta \sin \alpha - \delta'' \sin \delta \cos \alpha + 2\alpha'\delta' \sin \delta \sin \alpha - \\ &\quad - (\alpha'^2 + \delta'^2) \cos \delta \cos \alpha, \\ \mu'' &= \alpha'' \cos \delta \cos \alpha - \delta'' \sin \delta \sin \alpha - 2\alpha'\delta' \sin \delta \cos \alpha - \\ &\quad - (\alpha'^2 + \delta'^2) \cos \delta \sin \alpha, \\ \nu'' &= \delta'' \cos \delta - \delta'^2 \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

В этом случае формулу (11.6) придется применять для вычисления производных только двух величин α и δ . Конечно, этот способ неприменим, если видимый путь светила проходит вблизи полюса экватора.

§ 12. Точность метода Лапласа

Для сравнения точности, даваемой методом Лапласа, с тем, что дают рассмотренные раньше методы, проще всего преобразовать метод Лапласа так, чтобы он давал непосредственно геоцентрические расстояния в моменты наблюдения.

Для этого из соотношений (11.1), написанных для всех трех моментов, составим следующие комбинации:

$$\frac{\tau_1 \lambda_1 \rho_1 - \tau \lambda \rho + \tau_2 \lambda_2 \rho_2}{\tau_1 \tau_2} = \frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau_1 \tau_2} + \frac{\tau_1 X_1 - \tau X + \tau_2 X_2}{\tau_1 \tau_2}.$$

Соотношения (11.6) и (11.2) показывают, что с принятой нами точностью можно положить

$$\frac{\tau_1 x_1 - \tau x + \tau_2 x_2}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{2} x'' = -\frac{1}{2} x r^{-3} = \frac{1}{2} (X - \lambda \rho) r^{-3},$$

вследствие чего предыдущие равенства могут быть переписаны так:

$$n_1^0 \lambda_1 \rho_1 - \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}\right) \lambda \rho + n_2^0 \lambda_2 \rho_2 = n_1^0 X_1 - \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}\right) X + n_2^0 X_2,$$

где, как всегда, $n_1^0 = \tau_1/\tau$; $n_2^0 = \tau_2/\tau$.

Это показывает, что метод Лапласа эквивалентен нахождению геоцентрических расстояний из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n_1 \lambda_1 \rho_1 - \lambda \rho + n_2 \lambda_2 \rho_2 &= n_1 X_1 - X + n_2 X_2, \\ n_1 \mu_1 \rho_1 - \mu \rho + n_2 \mu_2 \rho_2 &= n_1 Y_1 - Y + n_2 Y_2, \\ n_1 \nu_1 \rho_1 - \nu \rho + n_2 \nu_2 \rho_2 &= n_1 Z_1 - Z + n_2 Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

в которых

$$n_1 = n_1^0 \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}\right)^{-1}; \quad n_2 = n_2^0 \left(1 - \frac{\tau_1 \tau_2}{2r^3}\right)^{-1}. \quad (12.2)$$

Значения (12.2) тождественны, в границах принятой точности, с теми значениями (3.6), которые были употреблены в первом приближении Лагранжем и, вслед за ним, Гауссом. Таким образом, метод Лапласа дает в первом приближении геоцентрические расстояния с той же точностью, как и эти методы. Но он дает в случае неравных интервалов времени между наблюдениями меньшую точность, нежели метод Лагранжа — Гаусса, основанный на формулах (3.7).

Н. Стойко [1931 а] подробно изучил точность, даваемую первыми приближениями всех этих методов. В другой работе [Стойко, 1931 б] он сравнил различные методы с точки зрения объема требуемых ими вычислений. Эти вопросы были изучены также Херриком [1940], пришедшим к несколько иным выводам.

§ 13. Работы Чаллиса и Виллярсо

Метод Лапласа является с теоретической стороны наиболее прямым решением задачи о нахождении планетных и кометных орбит. Было сделано много попыток придать ему форму, достаточно удобную и для практического применения. Как первый и

притом весьма существенный результат, достигнутый в этом направлении, мы можем рассматривать метод, предложенный Чаллисом в 1848 г. [Чаллис, 1849]. Автор правильно считает, что его метод «в принципе похож на метод Лапласа и может быть рассматриваем как обобщение этого последнего».

За промежуточные неизвестные Чаллис принимает не геоцентрическое расстояние ρ_0 в момент среднего наблюдения и его производную ρ'_0 , а гелиоцентрические координаты и компоненты скорости $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$ в этот момент. Пользуясь дифференциальными уравнениями движения, он выражает через эти неизвестные гелиоцентрические координаты светила в моменты двух крайних наблюдений (ср. § 12 гл. III). При помощи известных из наблюдений прямых восхождений и склонений в моменты трех наблюдений отсюда легко получить уравнения, решающие задачу. Надобность в предварительном вычислении первых и вторых производных сферических координат светила здесь, таким образом, отпадает.

В первом приближении полученные уравнения решают, отбрасывая третьи и высшие производные x''', y''', \dots . В последующих приближениях для этих производных берутся все более и более точные значения, получаемые при помощи дифференцирования уравнений движения.

Мемуар Чаллиса содержит важные нововведения, получившие распространение лишь много позже. Так, он едва ли не первый заменил эклиптические координаты экваториальными и стал применять способ учета параллакса путем перехода от геоцентрических координат Солнца к топоцентрическим. Но, может быть, именно вследствие всех этих новшеств метод Чаллиса не вошел в употребление, несмотря на то, что его эффективность была хорошо показана подробно изложенным примером.

Насколько незаслуженно был забыт метод Чаллиса, показывает появление метода Вилькенса [1919], который отличается от него (и не всегда удачно) только второстепенными деталями. Между тем метод Вилькенса был помещен в широко распространенной монографии [Штракке, 1929].

Обратимся теперь к обширному мемуару Виллярсо [1857], написанному в форме подробного руководства для вычисления орбит. Излагаемый Виллярсо метод, как в общем случае, так и в случае параболической орбиты, по существу, совпадает с методом Лапласа (имя которого не упомянуто). Но форма, в которой этот метод здесь представлен, имеет ясный отпечаток влияния Гаусса.

Особое преимущество своего метода Виллярсо видит в возможности базировать вычисление предварительной орбиты на

произвольно большом числе наблюдений. Излагая интерполяционные методы вычисления производных сферических координат, он использует многочисленные работы Коши, который в 1846—1848 гг. много занимался математическими вопросами, связанными с задачами теоретической астрономии [Коши, 1897].

Вопрос об учете параллакса и аберрации, едва затронутый Лапласом, Виллярсо рассмотрел весьма обстоятельно, следуя Гауссу. Но он почти ничего не прибавил к способу, предложенному Лапласом для перехода от первого приближения к более точной орбите. Этот способ заключался в нахождении таких поправок к принятым значениям сферических координат в начальный момент и их первых и вторых производных, которые по возможности уменьшают расхождения между вычисленными и наблюдаемыми положениями светила, причем коэффициенты соответствующих условных уравнений находятся численно при помощи варьирования шести неизвестных величин.

Метод Виллярсо в течение некоторого времени употреблялся французскими астрономами, но вытеснить методы Гаусса и Ольберса он не мог и был вскоре оставлен.

§ 14. Работы Харцера и Лойшнера

Новая попытка улучшить метод Лапласа так, чтобы он мог получить широкое распространение, была сделана Харцером [1896]. Вместо эклиптических координат, применявшихся Лапласом и Виллярсо, Харцер пользуется, подобно Чаллису, экваториальными координатами и за исходные величины принимает α , $\text{tg } \delta$ и их производные α' , $(\text{tg } \delta)'$, α'' , $(\text{tg } \delta)''$ для некоторого начального момента. Исходные значения этих шести величин он находит при помощи пяти наблюдений, путем вычисления коэффициентов разложений

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 + f_1\theta + f_2\theta^2 + f_3\theta^3 + f_4\theta^4,$$

$$\text{tg } \delta(\theta) = \text{tg } \delta_0 + g_1\theta + g_2\theta^2 + g_3\theta^3 + g_4\theta^4,$$

где

$$\theta = k(t - t_0).$$

Полученные исходные значения позволяют, путем решения уравнений, совпадающих по существу с (11.3), найти сокращенное геоцентрическое расстояние $\sigma = \rho \cos \delta$ и его производную σ' . В этом заключается первое приближение, только по форме отличающееся от лапласова. Но дальнейшее уточнение Харцер проводит иначе. Он ищет поправки Δx , Δy , Δz , $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, которые нужно придать гелиоцентрическому положению светила и его скорости в начальный момент для достижения наилучшего согласия с пятью взятыми за основу наблюдениями. Эти поправки

получаются посредством решения десяти условных уравнений методом Коши. Для коэффициентов условных уравнений Харцер дает достаточно простые аналитические выражения. Он пользуется для этого разложениями Лагранжа (4.1), (4.2). Такой путь представляется гораздо более удобным, нежели тот, которому следовали Лаплас и Виллярсо.

Дальнейшим развитием идеи Харцера об использовании лагранжевых разложений функций F и G явился предложенный Лойшнером метод [Лойшнер, 1913]. В нем число используемых наблюдений ограничивается тремя, а за неизвестные, подлежащие вычислению во втором и следующих приближениях, принимаются величины ρ_0 , x'_0 , y'_0 , z'_0 для момента среднего наблюдения. Эти четыре неизвестных находятся из условия точного представления прямых восхождений и склонений для двух крайних наблюдений.

Такая замена трех неизвестных

$$\Delta x_0 = \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \Delta \rho_0; \quad \Delta y_0 = \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \Delta \rho_0; \quad \Delta z_0 = \sin \delta_0 \Delta \rho_0$$

одной неизвестной $\Delta \rho_0$ существенно сокращает работу. Для вычисления коэффициентов линейных уравнений, дающих неизвестные $\Delta \rho_0$, $\Delta x'_0$, $\Delta y'_0$, $\Delta z'_0$, Лойшнер применяет формулы, аналогичные использованным Харцером. Но он отмечает, что в формулах

$$x = Fx_0 + Gx'_0; \quad y = Fy_0 + Gy'_0; \quad \dots, \quad (14.1)$$

вместо разложений функций F и G по степеням интервала времени можно, когда такие разложения недостаточно быстро сходятся, пользоваться конечными выражениями

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 - \frac{2a}{r_0} \sin^2 g; & g &= \frac{1}{2}(E - E_0), \\ G &= k(t - t_0) - a^{3/2}(2g - \sin 2g) = \\ &= a^{1/2}r_0 \sin 2g + 2ar_0' \sin^2 g. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Эти формулы были введены в употребление Кюнертотом [1879] в связи с решением аналогичной задачи.

Формулы (14.2) в методе Лапласа соответствуют формулам для вычисления отношения площадей сектора и треугольника в методе Гаусса.

Можно, впрочем, отметить, что действительная надобность в замене разложений Лагранжа замкнутыми формулами (14.2) возникает лишь в условиях, которые при вычислении предварительной орбиты практически не встречаются.

Лойшнер, развивший этот метод еще в 1902 г., ввел его в употребление на Студенческой обсерватории Калифорнийского университета (Беркли), где вычислялось много орбит. Благодаря

его энергии рассматриваемый метод (иногда называемый методом Лапласа — Лойшнера) привлек к себе внимание. Он был очень подробно изложен Бухгольцем в дополнении к изданию 1912 г. широко распространенного руководства [Клинкерфюс, 1871], Пикаром [1913], Крауфордом [1930] и Виллиамсом [1934].

Разработанный Штумпфом «Краткий метод нахождения орбит из трех или большего числа наблюдений» [Штумпф, 1931] можно рассматривать как завершающий этап этого направления в развитии основной идеи Лапласа. Этот метод, подобно уже упомянутому методу Вилькенса (§ 13), по существу, мало отличается от развитого Чаллисом. Но для вычисления функций F и G , входящих в формулы (14.1), Штумпф дает более удобные формулы. Он выражает эти функции через величины

$$\mu = 1/r^3; \quad \sigma_1 = r'/r; \quad \sigma_2 = r''/r,$$

для вычисления которых служат формулы

$$\sigma_1 = (xx' + yy' + zz')r^{-2}; \quad \omega^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \\ \sigma_2 = \omega^2 r^{-2} - \mu - \sigma_1^2.$$

Нахождение коэффициентов разложений существенно облегчается небольшими вспомогательными таблицами.

Было сделано много попыток показать, что метод Лапласа — Лойшнера имеет практические преимущества перед современными формами методов, связанных с именами Лагранжа, Ольберса и Гаусса. Однако тщательный разбор этого вопроса [Кон, 1918; Стойко, 1931; Херрик, 1940] привел скорее к обратному заключению. Вариант метода Лапласа, разработанный Чаллисом, Вилькенсом и Штумпфом, такому подробному изучению не подвергался.

§ 15. Метод фиктивных положений

Обзор, сделанный в двух последних параграфах, показывает, что первое приближение в методе Лапласа оставалось в дальнейшем без существенных изменений. Все усилия позднейших авторов были направлены на усовершенствование перехода от приближенного решения к точному.

Еще одно решение этой задачи, весьма простое и, по-видимому, весьма эффективное, было дано А. Данжоном [1951, 1952—1953], который назвал предложенный им вариант метода Лапласа *методом фиктивных положений*.

При вычислении орбиты по методу Лапласа на основе трех наблюдений t_h , α_h , δ_h , где $h=0, 1, 2$, для первого приближения используется матрица

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ \delta, & \delta', & \delta'' \end{vmatrix}, \quad (15.1)$$

содержащая сферические координаты и их производные для некоторого момента t .

Элементы матрицы (15.1) получаются из наблюдаемых величин t_h, α_h, δ_h при помощи приближенной формулы (11.5), а потому имеют более или менее значительные погрешности.

Таким образом, хотя применяемые в методе Лапласа соотношения (11.12), (11.3), (11.1) и (11.4) являются вполне строгими (так же как и формулы, служащие для вычисления элементов орбиты по x, y, z, x', y', z'), орбита будет приближенной и не будет точно представлять три исходные наблюдения.

Во всех рассмотренных нами выше вариантах метода Лапласа матрица (15.1) служит для получения только первого приближения. Чтобы найти более точную орбиту, производится улучшение промежуточных величин: либо x, y, z, x', y', z' , либо ρ, x', y', z' .

А. Данжон предложил идти другим путем: искать такую матрицу (названную им фиктивным положением)

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_* & \alpha'_* & \alpha''_* \\ \delta_* & \delta'_* & \delta''_* \end{array} \right\|, \quad (15.2)$$

которая, после применения к ней метода Лапласа, дала бы точное представление всех трех положений.

Пусть орбита, основанная на матрице (15.1), дает для моментов t_h положения (α_h^c, δ_h^c) , отличающиеся на

$$\Delta\alpha_h = \alpha_h - \alpha_h^c; \quad \Delta\delta_h = \delta_h - \delta_h^c$$

от исходных положений.

Если вычислить для второго приближения матрицу (15.2) при помощи положений

$$\alpha_h + \Delta\alpha_h, \quad \delta_h + \Delta\delta_h \quad (h = 0, 1, 2), \quad (15.3)$$

соответствующих моментам t_h (исправленным, если нужно, за планетную аберрацию), то соответствующая (15.2) орбита даст вычисленные положения, отличающиеся от вычисленных в первом приближении (α_h^c, δ_h^c) приблизительно настолько же, насколько исходные положения (15.3) второго приближения отличаются от исходных положений (α_h, δ_h) первого приближения.

Таким образом, можно ожидать, что вычисленные в конце второго приближения координаты светила будут мало отличаться от

$$\alpha_h^c + \Delta\alpha_h = \alpha_h; \quad \delta_h^c + \Delta\delta_h = \delta_h,$$

т. е. будут гораздо ближе к наблюдаемым, нежели α_h^c, δ_h^c .

Второе приближение может оказаться недостаточным. Тогда полученные в конце этого приближения разности между наблюдаемыми и вычисленными значениями координат надо использовать для составления нового фиктивного положения, аналогичного (15.2), и снова воспользоваться формулами метода Лапласа.

Число последовательных приближений, необходимое для достижения определенной точности, здесь будет, вообще говоря, несколько больше, нежели в методе Лагранжа — Гаусса. Но неоспоримым преимуществом метода Лапласа—Данжона является крайняя простота применяемых формул. Это делает рассматриваемый метод весьма пригодным для машинного вычисления, где число последовательных приближений, выполняемых по одним и тем же формулам, не имеет сколько-нибудь существенного значения.

Изложенный метод является теоретически наиболее простым из всех методов вычисления орбит и, несомненно, заслуживает испытания на практике. Поэтому остановимся на некоторых особенностях его применения.

Для вычисления первых и вторых производных сферических координат α , δ и координат Солнца X , Y , Z в том случае, когда за основной момент берется момент среднего наблюдения, служат формулы (11.6). Эти формулы можно представить в следующем, иногда более удобном виде:

$$\left. \begin{aligned} f'(\theta_0) &= \frac{\tau_2}{\tau\tau_1}(f_2 - f_0) + \frac{\tau_1}{\tau\tau_2}(f_0 - f_1), \\ \frac{1}{2}f''(\theta_0) &= \frac{1}{\tau\tau_1}(f_2 - f_0) - \frac{1}{\tau\tau_2}(f_0 - f_1). \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Если промежутки времени между наблюдениями весьма значительно между собой отличаются, то может оказаться выгодным прибегнуть к указанному Пуанкаре приему (§ 11).

Если за основной момент взять

$$t_* = \frac{1}{3}(t_1 + t_0 + t_2), \quad (15.5)$$

и положить

$$\theta_h = k(t_h - t_*),$$

то для нахождения величин f_* , f'_* , f''_* соответствующих моменту (15.5), будем иметь уравнения

$$f_h = f_* + f'_*\theta_h + \frac{1}{2}f''_*\theta_h^2 \quad (h = 0, 1, 2).$$

Решение этих уравнений дается формулами

$$q_1 = (f_0 - f_1)/(\theta_0 - \theta_1); \quad q_2 = (f_2 - f_0)/(\theta_2 - \theta_0),$$

$$\frac{1}{2} f''_* = (q_2 - q_1)/(\theta_2 - \theta_1), \quad (15.6)$$

$$f'_* = q_1 - \frac{1}{2} f''_*(\theta_0 + \theta_1) = q_2 - \frac{1}{2} f''_*(\theta_0 + \theta_2),$$

$$f_* = f_h - f'_*\theta_h - f''_*\theta_h^2; \quad h = 0, 1, 2.$$

Аберрация учитывается как обычно: при помощи геоцентрических расстояний, полученных в первом приближении, исправляются моменты наблюдений. Но на учете параллакса необходимо остановиться подробнее.

Основой всякого метода вычисления орбиты являются соотношения

$$\lambda_h \rho_h = x_h + X_h; \quad \mu_h \rho_h = y_h + Y_h; \quad \nu_h \rho_h = z_h + Z_h, \quad (15.7)$$

связывающие гелиоцентрические координаты светила с координатами светила, отнесенными к соответствующему месту наблюдения — действительному или фиктивному. В вариантах метода Лапласа, данных большинством авторов, за фиктивное место каждого наблюдения принимается положение барицентра системы Земля — Луна в момент этого наблюдения. Так поступает и Данжон. Этот путь имеет то преимущество, что позволяет пользоваться соотношениями (11.7), но он связан с необходимостью вычислять барицентрические значения λ_h , μ_h , ν_h и барицентрические координаты Солнца для ряда равноотстоящих моментов с целью получения X_h , Y_h , Z_h , X'_h , Y'_h , Z'_h .

Другой способ учета параллакса заключается в употреблении в соотношениях (15.7) топоцентрических координат светила и Солнца, как это теперь всегда делается в методах, базирующихся на идеях Лагранжа и Гаусса. Возможность применения этого способа в методе Лапласа была показана Чаллисом [1849], а затем Вьясяля [1924]. В методе фиктивных положений он может быть применен следующим образом.

Пусть в каждом из соотношений (15.7) координаты $\lambda_h \rho_h$, $\mu_h \rho_h$, ... и X_h , ... являются топоцентрическими, т. е. отнесены к положению наблюдателя в момент t_h .

Для применения метода Лапласа нужно составить следующие уравнения (§ 11):

$$\lambda \rho = x + X; \dots, \quad (15.8)$$

$$\lambda' \rho + \lambda \rho' = x' + X'; \dots, \quad (15.9)$$

$$\lambda'' \rho + 2\lambda' \rho' + \lambda \rho'' = (X - \rho \lambda) r^{-3} + X''; \dots \quad (15.10)$$

Это требует вычисления величин α , α' , α'' , δ , δ' , δ'' и X , X' , X'' , ..., соответствующих некоторому выбранному нами моменту t , и применения формул (11.12).

Чтобы получить, например, X , X' , X'' , мы должны воспользоваться формулами (15.4) или (15.6), т. е. соединить положения, которые занимали наблюдатели в моменты t_1 , t_0 , t_2 , некоторой плавной кривой. Столь же условный характер имеют и производные направляющих косинусов, которые для нас существуют только в указанные три момента. Но все вычисляемые по интерполяционным формулам (15.4) или (15.6) величины будут всегда связаны соотношениями (15.8), (15.9), (15.10).

Итерации, составляющие метод фиктивных положений, будут закончены получением элементов, удовлетворяющих равенствам (15.7), т. е. полностью учитывающих параллакс.

В заключение заметим, что для улучшения полученной орбиты при помощи произвольно большого числа наблюдений Данжон предложил варьировать элементы матрицы вида (15.1), полученной в результате вычисления орбиты по трем наблюдениям. Такой способ аналогичен способу вариации геоцентрических расстояний (§ 3 гл. XI), но является более строгим, так как не требует придания бесконечно большого веса двум основным наблюдениям.

§ 16. Метод Вьясяля

В XIX в. много усилий было затрачено на создание таких методов вычисления орбит, которые давали бы сразу возможно большее приближение. Это достигалось ценою неизбежного усложнения применяемых формул. За последние десятилетия стала преобладать противоположная тенденция: возможно упростить формулы, не опасаясь увеличения числа их повторного применения. Одним из наиболее удачных осуществлений этой идеи является метод, предложенный Вьясяля [1940].

Пусть (α_1, δ_1) , (α, δ) , (α_2, δ_2) координаты светила в моменты t_1 , t , t_2 ($t_1 < t < t_2$).

Приняв для геоцентрического расстояния ρ в момент среднего наблюдения какое-либо подходящее значение, найдем соответствующие значения величин

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \cos \alpha - X; \\ y &= \rho \cos \delta \sin \alpha - Y; \\ z &= \rho \sin \delta - Z; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Это позволяет вычислить

$$F_h = 1 - a_2 \theta_h^2 + \Delta F_h; \quad G_h = \theta_h - b_3 \theta_h^3 + \Delta G_h. \quad (16.2)$$

где

$$a_2 = \frac{1}{2} r^{-3}; \quad b_3 = \frac{1}{3} a_2; \quad \theta_h = k(t_h - t); \quad h = 1, 2, \quad (16.3)$$

а поправки ΔF_h , ΔG_h в первом приближении принимаются равными нулю.

Из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_h &= \rho_h \cos \delta_h \cos \alpha_h - X_h, \\ y_h &= \rho_h \cos \delta_h \sin \alpha_h - Y_h, \\ z_h &= \rho_h \sin \delta_h - Z_h, \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

соответствующих двум крайним наблюдениям, исключаем геоцентрические расстояния. Это дает

$$y_h + Y_h = \operatorname{tg} \alpha_h (x_h + X_h), \quad h = 1, 2.$$

Подставив в эти равенства выражения

$$x_h = xF_h + x'G_h; \quad y_h = yF_h + y'G_h, \quad (16.5)$$

получим два уравнения, позволяющие вычислить производные x' и y' . Решение этих уравнений можно представить так:

$$x' = \frac{A_2 - A_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}; \quad y' = A_h + x' \operatorname{tg} \alpha_h, \quad (16.6)$$

где

$$A_h = F_h G_h^{-1} (x \operatorname{tg} \alpha_h - y) + G_h^{-1} (X_h \operatorname{tg} \alpha_h - Y_h).$$

При помощи полученных значений (16.6) равенства (16.4) и (16.5) позволяют найти геоцентрические расстояния ρ_h :

$$\left. \begin{aligned} \rho_h &= \sec \delta_h \sec \alpha_h (xF_h + x'G_h + X_h), \\ \rho_h &= \sec \delta_h \operatorname{cosec} \alpha_h (yF_h + y'G_h + Y_h). \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

Воспользуемся теперь последними из соотношений (16.4) и (16.5) для нахождения производной z' . Тогда получим два значения:

$$(z')_h = G_h^{-1} (\rho_h \sin \delta_h - F_h z - Z_h). \quad (16.8)$$

Разность этих значений будет некоторой функцией ρ :

$$f(\rho) = (z')_2 - (z')_1.$$

Задача приводится к нахождению такого значения ρ , при котором

$$f(\rho) = 0. \quad (16.9)$$

Решение этого уравнения выполняется обычными интерполяционными приемами.

Когда получено достаточно точное значение ρ , то в формулах (16.2) учитываются члены высших порядков, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_h &= a_3 \theta_h^3 + a_4 \theta_h^4 + \dots, \\ \Delta G_h &= b_4 \theta_h^4 + b_5 \theta_h^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16.10)$$

Входящие в них коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' + zz'; & c_1 &= rr'/r^2, \\ w^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2; & c_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{w^2}{r^2} - 2a_2 - c_1^2 \right), \\ a_3 &= c_1 a_2; & b_4 &= \frac{1}{2} a_3, \\ a_4 &= a_2 \left(\frac{1}{2} b_3 + c_2 - c_1^2 \right); & b_5 &= \frac{1}{5} (3a_4 - a_2 b_3), \\ a_5 &= -c_1 (2c_1 a_3 + 3a_4); & b_6 &= \frac{2}{3} a_5 + b_3 b_4, \\ a_6 &= -c_1 (c_2 a_3 + c_1 a_4 + 2a_5) - 2c_2 a_4 - b_3 b_5, \\ b_7 &= \frac{1}{7} (5a_6 + 3a_2 b_5 - a_3 b_4 - a_4 b_3). \end{aligned}$$

Количество принимаемых во внимание членов зависит, конечно, от величины интервалов θ_h .

В более поздней работе [Вяйсяля и Отерма, 1951] разложения (16.10) были даны до членов десятого порядка, причем для многих коэффициентов были указаны контрольные формулы. Столь большое число членов в этих разложениях, ненужное при вычислении орбиты в нормальных условиях, может оказаться полезным для вычисления эфемериды при помощи формул (16.5) и (16.2). Такой способ получения эфемериды, не требующий нахождения элементов, иногда очень удобен, даже если в разложениях (16.10) приходится брать большое число членов.

В первом приближении, когда каждое из разложений (16.2) ограничено двумя первыми членами, уравнение (16.9) можно легко представить в явном виде. Выполнив нужное для этого исключение промежуточных величин, мы получим уравнение (3.8), т. е. улучшенную форму уравнения Лагранжа. Таким образом, метод Вяйсяля можно рассматривать как упрощенный вариант метода Лагранжа.

Рассматриваемый метод, подобно другим вариантам метода Лагранжа, открывает удобный путь для получения параболической орбиты без использования теоремы Эйлера. В самом деле, если формула

$$a^{-1} = 2r^{-1} - w^2, \quad (16.11)$$

служащая здесь для нахождения большой полуоси, даст для a^{-1} величину, близкую к нулю, то дальнейшее уточнение ρ можно вести так, чтобы удовлетворить не уравнению (16.9), а уравнению

$$r\omega^2 = 2.$$

Указанные формулы весьма пригодны и для получения эллиптической «перигелийной» орбиты, определяемой двумя условиями: $r' = 0$ и $a > r$.

Такая орбита, находимая при помощи двух наблюдений, может с успехом заменить круговую орбиту (§ 5 гл. X).

Пусть имеем два наблюдения: $t(\alpha, \delta)$ и $t_1(\alpha_1, \delta_1)$. Введем сокращенные геоцентрические расстояния

$$\sigma = \rho \cos \delta, \quad \sigma_1 = \rho_1 \cos \delta_1 \quad (16.12)$$

и, приняв некоторое правдоподобное значение для σ , вычислим

$$x = \sigma \cos \alpha - X; \quad y = \sigma \sin \alpha - Y; \quad z = \sigma \operatorname{tg} \delta - Z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\theta_1 = k(t_1 - t); \quad a_2 = \frac{1}{2} r^{-3}; \quad b_3 = \frac{1}{3} a_2,$$

$$F_1 = 1 - a_2 \theta_1^2; \quad G_1 = \theta_1 - b_3 \theta_1^3.$$

Соотношения (16.4) и (16.5) дают

$$F_1 x + G x' = \sigma_1 \cos \alpha_1 - X_1,$$

$$F_1 y + G y' = \sigma_1 \sin \alpha_1 - Y_1,$$

$$F_1 z + G z' = \sigma_1 \operatorname{tg} \delta_1 - Z_1.$$

Умножив эти равенства соответственно на x , y , z , сложив их почленно и учтя, что

$$r r' = x x' + y y' + z z', \quad (16.13)$$

получим

$$\sigma_1 = \frac{F_1 r^2 + x X_1 + y Y_1 + z Z_1}{x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 + z \operatorname{tg} \delta_1}.$$

Это дает возможность найти x' , y' , z' :

$$G x' = \sigma_1 \cos \alpha_1 - F_1 x - X_1,$$

$$G y' = \sigma_1 \sin \alpha_1 - F_1 y - Y_1,$$

$$G z' = \sigma_1 \operatorname{tg} \delta_1 - F_1 z - Z_1.$$

Для контроля можно воспользоваться соотношением (16.13).

Вычисление большой полуоси по формуле (16.11) должно дать величину, не на много превосходящую r , поскольку желательно иметь орбиту с небольшим эксцентриситетом. Если это не имеет места, то принятое значение σ надо соответствующим образом изменить.

Если варьированием σ достичь выполнения условия

$$r\omega^2 = 1,$$

то получится круговая орбита.

Заметим, что Вьясяля пользуется сокращенными расстояниями (16.12) не только в случае нахождения перигелийной орбиты, но и в общем случае, когда это дает несколько меньшее сокращение вычислений.

Метод Вьясяля, отличающийся исключительной простотой применяемых формул, был широко испробован на практике. Все многочисленные орбиты, вычисленные, начиная с 1935 г., на обсерватории в Турку, были получены этим методом.

§ 17. Заключительные замечания

В предыдущих параграфах, говоря о методах вычислений планетных и кометных орбит, мы рассматривали почти исключительно только первую часть задачи — нахождение или гелиоцентрических координат для моментов наблюдений или гелиоцентрического положения и скорости для некоторого фиксированного момента. История второй части задачи, т. е. перехода от только что указанных величин к элементам орбиты, гораздо короче. Способы, которые были предложены для этой цели Эйлером и Гауссом, подверглись в дальнейшем лишь небольшим изменениям. Замечания, сделанные по этому поводу выше (§ 7), можно дополнить указанием на работу Херглота [1906], содержащую довольно полный исторический обзор, и на библиографию, собранную Штракке [1928] и Г. М. Баженовым [1952].

Сделанный нами обзор методов решения первой части задачи имел своей целью не только дать достаточно полную картину их развития, но и изложить некоторые из них со всей полнотой, необходимой для практического применения.

Этот обзор показывает, что для вычисления орбит мы имеем в результате столь многочисленных усилий немало разнообразных путей, среди которых ясно намечаются три основных направления.

Первое из этих направлений, связываемое обычно с именем Лапласа, но намеченное еще Ньютоном, заключается в непосредственном использовании дифференциальных уравнений движения. Второй путь, подробно развитый Лагранжем, заключается в использовании решений этих дифференциальных уравнений при помощи рядов, расположенных по степеням интервалов времени. Наконец, третий путь получения точных гелиоцентрических положений светила был указан Гауссом. Он заключается в использовании решений дифференциальных уравнений не в виде рядов, а в замкнутой форме. Некоторые из предложенных

методов занимают как бы промежуточное положение между этими основными путями решения задачи.

Вопрос о наилучшем методе вычисления орбиты может иметь смысл лишь при учете всех особенностей рассматриваемого конкретного случая, включая как технические средства, так и привычки вычислителя. Поэтому знакомство с указанными выше методами представляет не только исторический интерес, но имеет и практическое значение. Такое знакомство позволяет, особенно в трудных или необычных случаях, проявить надлежащую гибкость в выборе наиболее эффективного пути *).

Рассмотренные нами методы пригодны не только для вычисления планетных и кометных орбит. В предыдущей главе были подробно изложены те формы, которые эти методы получили в применении к вычислению орбит визуальных двойных звезд. Мы не будем рассматривать аналогичную задачу о нахождении орбиты спутника планеты. Такая задача встречается крайне редко, а кроме того, каждый новый случай, с которым здесь приходилось иметь дело, требовал индивидуального подхода. Один из вариантов решения этой задачи излагает Баушингер [1928].

Изложенные методы могут быть применены, с надлежащими изменениями, и для нахождения орбит искусственных спутников Земли. Остановимся на некоторых особенностях, имеющих здесь место.

Исходная приближенная орбита искусственного спутника обычно находится с достаточной точностью при помощи геоцентрического положения и скорости спутника в момент выхода его на орбиту. Наблюдения, дающие топоцентрические прямые восхождения и склонения, служат для получения более точных оскулирующих орбит в последующие моменты. Для этого применяются обычные методы дифференциального исправления элементов (§ 7 гл. XI). Дело немного осложняется только тем, что приходится учитывать вековые изменения большой полуоси, долготы узла и аргумента перигелия, вызываемые торможением атмосферы и несферичностью Земли. Это увеличивает число неизвестных в условных уравнениях, так как влияние торможения приходится, во всяком случае, учитывать эмпирически. Вековые движения узла и перигея, зависящие целиком от несферичности Земли, могут также находиться из условных уравнений, если движение спутника изучается с целью получения параметров, характеризующих несферичность гравитационного поля Земли. В других случаях, например, когда элементы орбиты нужны для получения эфемерид, для этих вековых движений берутся их теоретические значения.

* Работы по определению орбит планет и комет, появившиеся до 1900 г., довольно полно указаны в статье Радо [1899]. Литературу с 1900 по 1928 годы можно найти в книге Штракке [1929]. (Прим. ред.)

Специфической особенностью многих наблюдений искусственных спутников является недостаточная точность фиксации моментов наблюдений, не позволяющая полностью использовать точность, достигнутую в измерении угловых координат. Эта особенность связана с очень быстрым видимым движением искусственных спутников, превышающим иногда 2° за 1 сек времени.

Тогда как для планет и комет моменты наблюдений мы можем считать абсолютно точными и приходится учитывать возможную неточность лишь угловых координат, для искусственных спутников моменты наблюдений мы часто вынуждены считать лишь приближенными. Таким образом, моменты наблюдений здесь должны быть использованы лишь в минимально необходимой степени. Соответствующие этому условию изменения в составлении условных уравнений были подробно изучены в работе Д. К. Куликова и Ю. В. Батракова [1960]. Это позволило авторам с большой полнотой осветить вопрос об использовании таких наблюдений для геодезических целей, т. е. для получения связи между референц-эллипсоидами различных областей земной поверхности и нахождения положения центров этих референц-эллипсоидов относительно центра инерции Земли.

Задача вычисления совершенно неизвестной орбиты искусственного спутника по нескольким наблюдениям может встретиться лишь в исключительных случаях. Вычисление орбиты (как невозмущенной, так и возмущенной) по трем наблюдениям было рассмотрено Бриггсом и Слоуи [1959]. Вопрос о вычислении орбиты по наблюдениям с грубо известными моментами был рассмотрен Ю. В. Батраковым [1960], детально изучившим вычисление орбиты по четырем наблюдениям при условии, что два наблюдения имеют точные моменты, а на моменты двух других полагаться нельзя. В случае, когда все моменты известны только приближенно, для вычисления орбиты нужно иметь по крайней мере шесть наблюдений.

В недалеком будущем могут встретиться еще задачи, связанные с нахождением орбит искусственных спутников Венеры и Марса. Оптические наблюдения таких спутников будут неосуществимы при помощи самых больших современных рефлекторов. Наблюдения с Земли радиопередатчиков, установленных на таких спутниках, не дадут достаточной точности в угловых координатах. Таким образом, единственная открывающаяся здесь возможность при современных технических средствах, это использование эффекта Доплера. Если на спутнике будет установлен передатчик с достаточно хорошей стабилизацией частоты, то это может дать нужную точность. Для вычисления орбиты можно будет применить способы, разработанные для спектрально-двойных звезд.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Г Л А В А XIV

ЗАДАЧА НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения задачи и их первые интегралы

Задача нескольких тел заключается в изучении движения конечного числа материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона.

Обозначим через m_0, m_1, \dots, m_{n-1} массы рассматриваемых материальных точек. Пусть вектор ρ_i с компонентами ξ_i, η_i, ζ_i определяет положение точки m_i относительно точки O некоторой инерциальной системы отсчета. Через r_{ij} обозначим расстояние между точками m_i и m_j так, что

$$r_{ij} = |\rho_j - \rho_i| = [(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2]^{1/2}.$$

Притяжение, испытываемое точкой m_i со стороны точки m_j , по величине равно $k^2 m_i m_j / r_{ij}^2$, а по направлению совпадает с вектором $\rho_j - \rho_i$. Поэтому дифференциальные уравнения движения рассматриваемых точек напишутся следующим образом:

$$m_i \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} = k^2 \sum_0^{n-1} {}^{(i)} m_i m_j \frac{\rho_j - \rho_i}{r_{ij}^3}. \quad (1.1)$$

Знаком $\sum_0^{n-1} {}^{(i)}$ обозначено суммирование от $j=0$ до $j=n-1$ с пропуском значения $j=i$.

В координатной форме уравнения (1.1) имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_0^{n-1} {}^{(i)} m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_0^{n-1} {}^{(i)} m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_0^{n-1} {}^{(i)} m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{r_{ij}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Если положить

$$U = k^2 S \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (1.3)$$

где символом S обозначена сумма, в которой каждая комбинация индексов i и j встречается один и только один раз, причем комбинации $i=j$ исключаются, то уравнения (1.2) можно написать так:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}; \quad m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}; \quad m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \quad (1.4)$$

Выражение (1.3) является, таким образом, силовой функцией рассматриваемого движения. Оно было введено в употребление Лагранжем в 1773 г.

Рассматриваемая нами система находится под действием одних только внутренних сил. Эти силы, на основании третьего закона Ньютона, попарно равны и противоположно направлены. Таким образом, их сумма и результирующий момент относительно любой точки, неизменно связанной с инерциальной системой отсчета, равны нулю. Поэтому из уравнений (1.1) следует

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} = 0; \quad \sum_0^{n-1} m_i \rho_i \times \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} = 0.$$

Отсюда, после интегрирования, находим

$$\sum_0^{n-1} m_i \frac{d \rho_i}{dt} = a; \quad \sum_0^{n-1} m_i \rho_i = at + b, \quad (1.5)$$

$$\sum_0^{n-1} m_i \left(\rho_i \times \frac{d \rho_i}{dt} \right) = c, \quad (1.6)$$

где a , b и c — постоянные векторы, определяемые начальными условиями, т. е. положениями и скоростями точек системы для некоторого момента времени.

Если равенства (1.5) написать в координатной форме, то получим

$$\sum_0^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = a_\xi; \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = a_\eta; \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = a_\zeta, \quad (1.7)$$

$$\sum_0^{n-1} m_i \xi_i = a_\xi t + b_\xi; \quad \sum_0^{n-1} m_i \eta_i = a_\eta t + b_\eta; \quad \sum_0^{n-1} m_i \zeta_i = a_\zeta t + b_\zeta, \quad (1.8)$$

где a_ξ , a_η , a_ζ и b_ξ , b_η , b_ζ — компоненты векторов a и b . Это дает шесть первых интегралов уравнений (1.2).

Обозначив через X, Y, Z координаты центра инерции, а через $M = m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1}$ сумму масс, равенства (1.8) можно написать так:

$$MX = a_{\xi}t + b_{\xi}; \quad MY = a_{\eta}t + b_{\eta}; \quad MZ = a_{\zeta}t + b_{\zeta}. \quad (1.9)$$

Интегралы (1.7) и (1.8), показывающие, что центр инерции системы движется прямолинейно и равномерно, носят название интегралов движения центра инерции. Их называют также интегралами сохранения импульса (или количества движения).

Равенство (1.6), будучи написано в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{n-1} m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c_{\xi}, \\ \sum_0^{n-1} m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c_{\eta}, \\ \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

дает три первых интеграла уравнений (1.2). Эти интегралы называются интегралами сохранения вращательного импульса (или момента количества движения). Каждое из выражений, стоящих в равенстве (1.6) в скобках, является удвоенной секторной скоростью соответствующей массы. Таким образом, интегралы (1.10) выражают постоянство взвешенного среднего секторных скоростей точек системы. Поэтому их называют также интегралами площадей.

Если от системы координат $O\xi\eta\zeta$ перейти к новой системе $O\xi'\eta'\zeta'$, для которой ось $O\xi'$ совпадает с вектором \mathbf{c} , то в интегралах (1.10), написанных в этой новой системе, будем иметь

$$c_{\xi'} = 0, \quad c_{\eta'} = 0, \quad c_{\zeta'} = |\mathbf{c}| = c.$$

Таким образом, новая координатная плоскость $\zeta' = 0$ обладает тем свойством, что взвешенное среднее секторных скоростей проекций точек m_i на эту плоскость является наибольшим. Эта плоскость перпендикулярна к вектору \mathbf{c} , а потому в силу (1.10) она вполне определяется начальными условиями движения, если только вектор \mathbf{c} не равен нулю. Ее называют неизменной плоскостью системы по отношению к точке O . При изменении начала координат O величины (1.10) изменяются, а следовательно, изменяется и положение неизменной плоскости.

Девять первых интегралов (1.7), (1.8) и (1.10) являются следствиями законов сохранения количества движения и количества вращения, которым подчиняется каждая замкнутая система материальных точек. Так как рассматриваемая нами система

консервативна (поскольку существует однозначная силовая функция, не зависящая от времени), то она подчиняется еще закону сохранения механической энергии. Поскольку энергия — величина скалярная, это дает только один первый интеграл. Чтобы его найти, надо умножить уравнения (1.4) соответственно на $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$ и почленно сложить. Это дает

$$\sum_0^{n-1} m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \frac{dU}{dt},$$

откуда, интегрируя и обозначая через

$$T = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$$

кинетическую энергию системы, получим интеграл энергии

$$T - U = h. \quad (1.11)$$

Постоянная интегрирования h называется постоянной энергии. Движения системы, для которых h имеет одно и то же значение, называются изоэнергетическими.

Так как потенциальная энергия рассматриваемой системы равна $-U$, то равенство (1.11), в силу которого полная энергия $H = T - U$ остается в каждом движении постоянной, выражает закон сохранения энергии.

Если начало координат перенести в центр инерции системы, то вид уравнений (1.2) не изменится. Не изменится, следовательно, и форма первых интегралов, но постоянные интегрирования изменятся. Соответствующее значение h будем называть барицентрической постоянной энергии. Неизменную плоскость, соответствующую этому случаю, будем называть барицентрической неизменной плоскостью или плоскостью Лапласа. Она была открыта в 1789 г. Лапласом, отметившим преимущества ее в качестве основной координатной плоскости при изучении планетных движений.

Итак, самые общие теоремы механики дают для задачи нескольких тел, выражаемой уравнениями (1.2), десять первых интегралов. Уже из самого происхождения этих интегралов видно, что они, имея место для весьма широких классов механических систем, не связаны с какими-либо специфическими свойствами закона Ньютона. Эти интегралы не дают, таким образом, возможности проникнуть сколько-нибудь глубоко в сущность рассматриваемой задачи.

В 1887 г. Брунс доказал, что даже в случае задачи трех тел всякий первый интеграл, алгебраический относительно координат,

нат ξ_i , η_i , ζ_i и их производных $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, является следствием указанных десяти интегралов *). Этот результат вскрыл причину безуспешности столь многочисленных попыток продвинуть дальше решение задачи нескольких тел путем нахождения новых интегралов.

Решение задачи n тел, эквивалентное интегрированию системы (1.2) порядка $6n$, при помощи найденных нами интегралов приводится к интегрированию системы порядка $6n-10$. Порядок системы может быть понижен еще на две единицы, но после интегрирования полученной системы порядка $6n-12$ для полного решения задачи нужно будет выполнить еще две квадратуры.

В самом деле, воспользовавшись тем, что дифференциальные уравнения содержат время только в форме дифференциала dt , мы можем исключить из них dt . Это даст систему порядка $6n-11$ и выражение dt через координаты. После того как система порядка $6n-11$ будет решена, квадратура выражения для dt даст зависимость между временем и координатами.

Понижение порядка системы еще на одну единицу основывается на полном использовании того обстоятельства, что силы зависят исключительно от взаимных расстояний движущихся точек.

Чтобы удобнее использовать указанное свойство нашей системы, перейдем к обобщенным координатам, причем одну из координат выберем следующим образом. Через какую-либо точку системы, например, m_0 , проведем неподвижную прямую, а через эту прямую — плоскость, проходящую через какую-нибудь другую точку системы. Азимут этой плоскости, отсчитываемый от произвольного неподвижного направления, обозначим через φ и примем за одну из обобщенных координат.

Движение всей системы будет, следовательно, определяться координатой φ и координатами, фиксирующими положение системы относительно движущейся плоскости, имеющей азимут φ .

Покажем, что координата φ является циклической, т. е. что уравнения Лагранжа включают только производную $\dot{\varphi}$, но не φ .

Неподвижную прямую, проведенную нами через точку m_0 , примем за ось z ; ось x расположим во вращающейся плоскости. Если через x_k , y_k , z_k обозначить координаты точки m_k в этой

*) Пуанкаре (1889) и Пенлеве (1897) обобщили эти результаты, доказав отсутствие значительно более широких классов первых интегралов.

Исследования Брунса и Пуанкаре подробно изложены Уиттекером [1937]. Нужно, однако, иметь в виду, что во всех этих работах массы рассматриваются не как фиксированные величины, а как переменные параметры; координаты тел предполагаются аналитическими функциями масс [Винтер, 1941].

вращающейся системе осей, то компоненты скорости точки m_k будут

$$\dot{x}_k - \dot{\varphi}y_k, \dot{y}_k + \dot{\varphi}x_k, \dot{z}_k.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы, определяемая равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k [(\dot{x}_k - \dot{\varphi}y_k)^2 + (\dot{y}_k + \dot{\varphi}x_k)^2 + \dot{z}_k^2]$$

будет зависеть только от $\dot{\varphi}$, но не от φ , точно так же, как и кинетический потенциал

$$L = T + U.$$

Поэтому соответствующее φ уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

дает

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}$$

Это равенство позволяет исключить $\dot{\varphi}$ из остальных уравнений движения. После того как полученная таким образом система уравнений будет проинтегрирована и будет известно движение наших материальных точек относительно вращающейся плоскости, останется найти угол φ , дающий положение этой плоскости. Так как последнее равенство дает $\dot{\varphi}$ в функции остальных координат, то угол φ найдется при помощи одной квадратуры.

Операцию исключения из уравнений движения азимута можно для краткости назвать исключением узлов, так как она является, по существу, обобщением свойства, получившего название исключения узлов в задаче трех тел (см. § 5).

Итак, при помощи десяти элементарных интегралов, исключения времени и исключения узлов, решение задачи n тел приводится к интегрированию системы порядка $6n-12$ и двум квадратурам.

Это понижение порядка дает полное решение задачи двух тел. Здесь одна из заключительных квадратур дает абсолютную ориентацию орбиты, а другая дает уравнение Кеплера, являющееся выражением времени через координаты.

То, что решение задачи трех тел может быть приведено к интегрированию системы шестого порядка, было впервые показано Лагранжем в 1772 г. В 1842 г. Якоби выяснил, что источником этой редукции является то обстоятельство, что силы зависят только от взаимных расстояний.

Подробные сведения по вопросам редукции задачи нескольких тел, а также литературные указания дают Марколонго [1919], Уиттекер [1937] и Хагихара [1944].

§ 2. Движение солнечной системы

Интегралы сохранения импульса (1.7) используются для нахождения движения Солнца относительно центра инерции определенной группы звезд, включающей и само Солнце.

Так как центр инерции такой группы звезд мы можем считать неподвижным, то для рассматриваемой группы тел $a_{\xi} = a_{\eta} = a_{\zeta} = 0$. Следовательно,

$$\sum_0^{n-1} m_i \dot{\xi}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\eta}_i = 0, \quad \sum_0^{n-1} m_i \dot{\zeta}_i = 0.$$

Относя индекс 0 к Солнцу и полагая

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0,$$

получим

$$M \dot{\xi}_0 + \sum_1^{n-1} m_i \dot{x}_i = 0, \dots$$

Эти уравнения дают возможность найти скорость $\{\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0\}$ солнечной системы относительно центра инерции выбранной группы звезд. В этом заключается метод, предложенный Бравэ (А. Bravais) в 1843 г. Успешное применение этого метода стало, однако, возможным лишь в XX в., когда были получены достаточные сведения относительно лучевых скоростей и масс звезд. До этого сведения о движении солнечной системы получались лишь при помощи чисто геометрических способов, основанных на использовании одних только собственных движений звезд.

Относительно центра инерции ярких звезд (приблизительно до 6-й величины), для которых имеются наиболее полные данные, солнечная система движется в направлении, определяемом прямым восхождением 270° и склонением $+30^\circ$, со скоростью $19,5 \text{ км/сек}$.

§ 3. Плоскость Лапласа

Интегралы площадей (1.10) и вытекающее из них существование неизменной плоскости были открыты Лапласом в 1789 г.

Он указал также на возможность использования барицентрической неизменной плоскости (получившей название плоскости Лапласа) в качестве основной координатной плоскости при изучении движений тел солнечной системы за очень большие промежутки времени. Плоскости эклиптики и экватора, являющиеся

основными в обычно употребляемых координатных системах, непрерывно меняют свое положение. Для того чтобы использовать современные наблюдения через несколько тысяч лет, придется учесть перемещение этих плоскостей за очень большой промежуток времени, что неизбежно повлечет потерю точности. Фиксация современной экваториальной (или эклиптической) координатной системы при помощи отнесенных к ней положений звезд тоже не позволит, по причине сложности движений звезд, совершенно точно связать эту координатную систему с той, к которой будут отнесены наблюдения через тысячи лет. Наоборот, координатная система, базирующаяся на плоскости Лапласа, должна, казалось бы, быть свободной от такого недостатка, поскольку эта плоскость сохраняет неизменное положение.

Ближайшее рассмотрение показывает, однако, что употребление плоскости Лапласа в качестве основной связано со своими трудностями, как практическими, так и принципиальными.

Обозначим через (x_i, y_i, z_i) барицентрические координаты тела, имеющего массу m_i . Тогда

$$\xi_i = X + x_i, \quad \eta_i = Y + y_i, \quad \zeta_i = Z + z_i.$$

Формулы (1.9) показывают, что дифференциальные уравнения, определяющие новые координаты, имеют такой же вид, как уравнения (1.2). Отсюда следует, что и интегралы будут иметь такой же вид. Поэтому компоненты вращательного импульса системы в барицентрическом движении будут иметь вид

$$c_x = \sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), \dots, \quad (3.1)$$

аналогичный (1.10).

Формулы (3.1), заключающие лишь относительные координаты, могут служить для вычисления величин c_x, c_y, c_z , определяющих положение плоскости Лапласа. Но совершенно строгое применение этих формул требует распространения суммирования в правых частях на все материальные частицы, из которых состоит солнечная система. Так как это практически невозможно, то формулы (3.1) приходится заменить другими.

Будем рассматривать солнечную систему как совокупность не отдельных частиц, а некоторого числа твердых тел. Обозначим через m массу одного из таких тел, через I — момент инерции, а через $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ — угловую скорость вращения. Пусть, далее, x, y, z — барицентрические координаты центра инерции этого тела.

В таком случае вместо формул (3.1) будем иметь

$$c_x = \sum I \omega_x + \sum m (y \dot{z} - z \dot{y}), \dots, \quad (3.2)$$

где суммирование распространяется на все тела, составляющие солнечную систему.

Первые суммы в правых частях этих формул, обусловленные вращением небесных тел около их осей, нам известны недостаточно. Поэтому эти суммы приходится рассматривать как постоянные и, вместо «динамической плоскости Лапласа», определяемой формулами (3.1), пользоваться «астрономической плоскостью Лапласа», положение которой определяется величинами

$$c'_x = \sum m (yz - zy), \dots \quad (3.3)$$

Астрономическая плоскость Лапласа была бы неподвижна в пространстве только в том случае, если бы все тела, составляющие солнечную систему, были абсолютно тверды и имели бы строго сферическую структуру. Так как это не имеет места, то поступательные и вращательные движения тел солнечной системы оказываются взаимно зависимыми. Например, вращение Земли зависит от движения Луны и Солнца (прецессия и нутация), и обратно, на движение этих тел влияет отклонение Земли от строго сферической структуры, а следовательно, и ее вращение. Более того, поскольку небесные тела не являются абсолютно твердыми, деформации их, вызываемые взаимным притяжением, приводят к преобразованию механической энергии в другие виды энергии.

В результате, положение астрономической плоскости Лапласа не остается строго постоянным, причем ее перемещения не могут быть строго учтены. Все это показывает, что базирующаяся на ней координатная система не имеет преимуществ перед общеупотребительной с точки зрения строгого сопоставления современных наблюдений небесных тел с теми, которые будут получены через десятки и сотни тысяч лет.

Однако плоскость Лапласа имеет весьма большое значение в вопросах, связанных с изучением структуры и эволюции солнечной системы. Эта плоскость, положение которой не могло значительно меняться в течение очень больших интервалов времени, сохраняет много ценных сведений о прошлом солнечной системы.

По вычислениям Клеменса и Брауэра [1955] положение астрономической плоскости Лапласа относительно эклиптики и равноденствия 1950,0 определяется элементами

$$\Omega = 107^\circ 13' 47'' ,6; \quad I = 1^\circ 39' 13'' ,96,$$

если для масс планет взять значения Ньюкома, принятые в астрономических ежегодниках.

Эти элементы принимают значения

$$\Omega = 107^\circ 13',3 \pm 2',1; \quad I = 1^\circ 38' 49'' \pm 22'',$$

если для масс взять наиболее надежные значения и учесть средние ошибки этих значений.

§ 4. Первая форма уравнений относительного движения

Во всех применениях, которые задача нескольких тел находит в теоретической астрономии, представляют интерес не абсолютные координаты (т. е. координаты по отношению к любой инерциальной системе), а координаты относительные, определяющие взаимное расположение движущихся тел. В зависимости от характера проблемы относительные координаты могут быть выбраны различно. Одной из важнейших форм относительных координат является следующая.

Возьмем новую систему координат, начало которой находится в точке с массой m_0 , а оси — параллельны осям рассматривавшейся выше системы. Если новые координаты точки m_i обозначить через x_i, y_i, z_i , то

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \quad \eta_i = \eta_0 + y_i, \quad \zeta_i = \zeta_0 + z_i. \quad (4.1)$$

Уравнения (1.2) дают

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = k^2 \sum_0^{n-1(i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} = -k^2 m_0 \frac{x_i}{r_{0i}^3} + k^2 \sum_0^{n-1(0, i)} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3},$$

$$\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = k^2 \sum_0^{n-1(0)} m_j \frac{x_j - x_0}{r_{0j}^3} = k^2 m_i \frac{x_i}{r_{0i}^3} + k^2 \sum_0^{n-1(0, i)} m_j \frac{x_j}{r_{0j}^3},$$

где у каждого знака суммы сверху показано, какие значения индексов пропускаются при суммировании.

Положив для краткости $r_{0i} = r_i$ и вычтя второе равенство из первого, получим

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + k^2 \sum_0^{n-1(0, i)} m_j \left(\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right),$$

причем

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \quad r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2.$$

Эти уравнения, совместно с аналогичными для двух других координат, определяют движение точек m_1, m_2, \dots, m_{n-1} относительно точки m_0 .

Полагая

$$R_i = k^2 \sum_1^{n-1(i)} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right), \quad (4.2)$$

полученные уравнения можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_i}{dt^2} + k^2(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2y_i}{dt^2} + k^2(m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \frac{d^2z_i}{dt^2} + k^2(m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Если массы всех тел, за исключением m_0 и m_i , равны нулю, то $R_i=0$ и уравнения (4.3) обращаются в уравнения задачи двух тел (§ 2 гл. III). Так как кеплерово движение, имеющее место в задаче двух тел, принято называть невозмущенным, а всякое отклонение от такого движения — возмущением, то функция R_i , наличие которой вызывает возмущение, получила название пертурбационной функции. Производные R_i по координатам точки m_i дают компоненты ускорения, испытываемого телом m_i в его относительном движении со стороны всех других тел, за исключением тела m_0 , принятого за начало координат.

Уравнения (4.3) широко применяются в астрономии. Так как они являются основой теории движения планет, то их иногда называют планетной формой уравнений относительного движения. При изучении гелиоцентрического движения планет за центральное тело принимают Солнце. В этом случае каждая пертурбационная функция (4.2) очень мала, так как она состоит из членов, имеющих множителями планетные массы; следовательно, правые части уравнений (4.3) будут весьма малы, и их влияние действительно целесообразно рассматривать как возмущения.

Система (4.3) порядка $6n-6$ может рассматриваться как результат исключения при помощи интегралов (1.7) и (1.8) из системы (1.2) порядка $6n$ шести величин $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$. Если известны постоянные интегрирования, входящие в (1.7) и (1.8), то после разрешения системы (4.3) могут быть найдены и абсолютные координаты. Действительно, подстановка выражений (4.1) в равенства (1.8) дает

$$M\xi_0 + \sum_1^{n-1} m_i x_i = a_i t + b_i, \dots, \quad (4.4)$$

откуда можно найти ξ_0, η_0, ζ_0 , после чего соотношения (4.1) дадут абсолютные координаты всех остальных точек.

Уравнения (4.3) имеют четыре алгебраических первых интеграла, легко получаемых из соотношений (1.10) и (1.11) при помощи подстановки (4.1) и последующего исключения ξ_0, η_0, ζ_0 при помощи равенств (4.4).

§ 5. Вторая форма уравнений относительного движения

Указанная в предыдущем параграфе форма уравнений относительного движения в некоторых случаях неудобна тем, что содержит особую для каждого тела пертурбационную функцию R_i . Поэтому иногда пользуются другой формой, основанной на следующем выборе относительных координат:

1) через первую точку m_0 проводим оси координат, параллельные неподвижным осям, и положение m_1 определяем в этой системе координатами x_1, y_1, z_1 ;

2) через центр инерции G_1 точек m_0 и m_1 проводим оси, параллельные предыдущим, и положение m_2 определяем относительно этих осей координатами x_2, y_2, z_2 ;

3) положение m_3 определяем координатами x_3, y_3, z_3 относительно системы осей, параллельных предыдущим и имеющим начало в центре инерции G_2 точек m_0, m_1, m_2 и т. д.

Таким образом, каждая последующая точка m_{i+1} относится к центру инерции G_i всех предыдущих точек m_0, m_1, \dots, m_i .

Обозначим через X_i, Y_i, Z_i координаты точки G_i , так что

$$M_i X_i = m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + \dots + m_i \xi_i,$$

где

$$M_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i.$$

По определению,

$$x_i = \xi_i - X_{i-1},$$

откуда

$$M_i x_i = M_{i-1} \xi_i - (m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + \dots + m_{i-1} \xi_{i-1}). \quad (5.1)$$

Чтобы выразить старые координаты ξ, η, ζ через новые x, y, z , заметим прежде всего, что

$$M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1} = m_i \xi_i,$$

или

$$M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1} = (M_i - M_{i-1}) \xi_i. \quad (5.2)$$

Следовательно,

$$M_i (\xi_{i+1} - x_{i+1}) - M_{i-1} (\xi_i - x_i) = (M_i - M_{i-1}) \xi_i,$$

откуда

$$\xi_{i+1} - \xi_i = x_{i+1} - M_{i-1} M_i^{-1} x_i.$$

Складывая почленно эти равенства для последовательных значений индекса, получим

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= x_1, \\ \xi_{i+1} - \xi_0 &= x_{i+1} + \frac{m_i x_i}{M_i} + \frac{m_{i-1} x_{i-1}}{M_{i-1}} + \dots + \frac{m_1 x_1}{M_1}. \end{aligned} \right\} (5.3)$$

Перейдем теперь к составлению дифференциальных уравнений движения в новых координатах.

Дифференцируя дважды равенство (5.1) и пользуясь уравнениями (1.4), получим

$$M_{i-1} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U}{\partial \xi_0} - \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \dots - \frac{\partial U}{\partial \xi_{i-1}}. \quad (5.4)$$

С другой стороны имеем, на основании соотношения (5.1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_0}{M_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_0}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_0}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_1}{M_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_1}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_1}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_2}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_2}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, \\ &\dots \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_{n-1}} &= \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} &= \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{M_{i-1}}{M_i} \frac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \dots - \frac{M_{i-1}}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}, \\ \sum_0^{i-1} \frac{\partial U}{\partial \xi_k} &= -\frac{M_{i-1}}{M_{i-1}} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{M_{i-1}}{M_i} \frac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \dots - \frac{M_{i-1}}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (5.4), окончательно будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (5.5)$$

где

$$\mu_i = \frac{m_i M_{i-1}}{M_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Равенства (5.3) позволяют выразить силовую функцию U через новые относительные координаты.

При теоретических исследованиях уравнения (5.4) часто оказываются более удобными, нежели уравнения (4.3), рассмотренные в предыдущем параграфе. Это связано прежде всего с возможностью непосредственного преобразования уравнений (5.5) в каноническую систему. Действительно, положив

$$\left. \begin{aligned} q_{3i-2} &= x_i; & q_{3i-1} &= y_i; & q_{3i} &= z_i, \\ p_{3i-2} &= \mu_i \dot{q}_{3i-2}; & p_{3i-1} &= \mu_i \dot{q}_{3i-1}; & p_{3i} &= \mu_i \dot{q}_{3i} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$),

получим

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (5.7)$$

где

$$H = \sum_1^{n-1} \frac{1}{2\mu_i} (p_{3i-2}^2 + p_{3i-1}^2 + p_{3i}^2) - U.$$

Помимо теоретических исследований уравнения (5.5) или (5.7) находят также широкое применение в теории движения спутников и при изучении движений в системах кратных звезд. Например, в теории движения Луны удобно за тело m_0 принять Землю, за m_1 — Луну, за m_2 — Солнце. Движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна мы можем считать эллиптическим (§ 2, гл. XXI), следовательно, нахождение x_2, y_2, z_2 сводится к решению задачи двух тел, чем существенно упрощается нахождение геоцентрических координат Луны x_1, y_1, z_1 , приводящееся к интегрированию системы шестого порядка.

Рассмотренные в этом параграфе относительные координаты, введенные впервые Якоби в 1842 г., носят название *якобиевых* или *канонических*. Уравнения движения в этих координатах (5.5) иногда называют *симметричной* (а также — *спутниковой* или *звездной*) формой уравнений относительного движения.

В заключение покажем, что для уравнений (5.5) интегралы площадей и интеграл энергии имеют ту же форму, как и для уравнений абсолютного движения, рассмотренных в § 1.

Равенство (5.2) после замены ξ_i через $x_i + X_{i-1}$ дает

$$m_i x_i = M_i (X_i - X_{i-1}).$$

Возведем почленно в квадрат это равенство и равенство (5.2). Это даст

$$m_i^2 x_i^2 = M_i^2 X_i^2 - 2X_i X_{i-1} + X_{i-1}^2,$$

$$m_i^2 \xi_i^2 = M_i^2 X_i^2 - 2M_i M_{i-1} X_i X_{i-1} + M_{i-1}^2 X_{i-1}^2,$$

откуда после исключения произведения $X_i X_{i-1}$

$$m_i (\xi_i^2 - M_{i-1} M_i^{-1} x_i^2) = M_i X_i^2 - M_{i-1} X_{i-1}^2.$$

Суммирование от $i=1$ до $i=n-1$ дает

$$\sum_1^{n-1} m_i \xi_i^2 = \sum_1^{n-1} m_i M_{i-1} M_i^{-1} x_i^2 + M_{n-1} X_{n-1}^2 - M_0 X_0^2$$

или, поскольку $M_0 = m_0$, $X_0 = \xi_0$, $M_{n-1} = M$, $X_{n-1} = X$,

$$\sum_0^{n-1} m_i \xi_i^2 = \sum_1^{n-1} \mu_i x_i^2 + M X^2.$$

Сложив это равенство с аналогичными, написанными для других координат, будем иметь следующее интересное

соотношение:

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \sum_1^{n-1} \mu_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + M (X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Полученное соотношение является следствием линейных и однородных зависимостей, существующих между старыми координатами ξ, η, ζ и новыми x, y, z . Если бы исходные зависимости были предварительно продифференцированы по времени, то мы получили бы равенство

$$\sum_0^{n-1} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2).$$

Отсюда следует, что интеграл энергии для уравнений (5.5) имеет ту же самую форму

$$\frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h',$$

как и интеграл (1.11) для уравнений (1.4).

Легко проверяемое тождество

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = \sum_1^{n-1} \mu_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) + M (X \dot{Y} - Y \dot{X})$$

показывает, что интегралы площадей имеют здесь в силу соотношений (1.9) и (1.10) ту же самую форму как и для уравнений (1.2), а именно,

$$\sum_1^{n-1} \mu_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \gamma_x, \dots \quad (5.8)$$

Примечание. Интересным следствием интегралов (5.8) является найденная Якоби «теорема исключения узлов».

Плоскость орбиты, описываемой телом m_1 относительно m_0 , и плоскость орбиты, описываемой m_2 по отношению к центру инерции m_0 и m_1 , пересекаются по прямой, параллельной плоскости Лапласа.

В самом деле, плоскость первой из этих орбит проходит через начало координат m_0 , точку x_1, y_1, z_1 , и бесконечно близкую к ней точку $x_1 + \dot{x}_1 dt, y_1 + \dot{y}_1 dt, z_1 + \dot{z}_1 dt$. Поэтому уравнение этой плоскости можно написать так:

$$x(y_1 \dot{z}_1 - z_1 \dot{y}_1) + y(z_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{z}_1) + z(x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) = 0. \quad (5.9)$$

Точно так же найдем, что уравнение плоскости орбиты, описываемой m_2 относительно центра инерции m_0 и m_1 , имеет вид

$$x(y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2) + y(z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2) + z(x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = 0. \quad (5.10)$$

После умножения этих уравнений соответственно на μ_1 и μ_2 сложим их почленно. На основании (5.8) это даст

$$\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z = 0,$$

т. е. уравнение плоскости, параллельной плоскости Лапласа.

Таким образом, прямая пересечения плоскостей (5.9) и (5.10) действительно параллельна плоскости Лапласа.

§ 6. Формула Лагранжа — Якоби

Так как силовая функция U , определяемая формулой (1.3), является однородной функцией (-1) -го порядка от координат, то по известной теореме Эйлера

$$\sum \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U. \quad (6.1)$$

Следовательно, умножив уравнения (1.4) соответственно на ξ_i , η_i , ζ_i , сложив их почленно и просуммировав результат от $i=0$ до $i=n-1$, получим

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = -U.$$

Это равенство сложим с интегралом энергии (1.11), умноженным предварительно на 2. Это даст

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \dots + \dot{\xi}_i^2 + \dots) = U + 2h,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\xi}_i + \eta_i \dot{\eta}_i + \zeta_i \dot{\zeta}_i) = U + 2h,$$

или, наконец,

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 2U + 4h. \quad (6.2)$$

Стоящая здесь сумма

$$J = \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$$

есть момент инерции нашей системы относительно начала координат.

Разность между J и величиной

$$J_0 = M(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

где $M = \sum m_i$, а через X , Y , Z обозначены координаты центра инерции, может быть выражена через квадраты взаимных расстояний точек системы.

В самом деле, возьмем следующее очевидное тождество:

$$\sum_j m_j \sum_i m_i \xi_i^2 = \sum_i m_i^2 \xi_i^2 + S m_i m_j (\xi_i^2 + \xi_j^2),$$

где буквой S обозначено суммирование, при котором каждая комбинация индексов берется только один раз и случай $i=j$ исключается.

С другой стороны,

$$(\sum m_i \xi_i)^2 = \sum m_i^2 \xi_i^2 + 2 S m_i m_j \xi_i \xi_j,$$

а вычитание этого равенства из предыдущего дает

$$M \sum m_i \xi_i^2 - (\sum m_i \xi_i)^2 = S m_i m_j (\xi_j - \xi_i)^2. \quad (6.3)$$

Сложив это тождество с двумя аналогичными для η и ζ , и учитывая, что

$$\sum m_i \xi_i = MX; \quad \sum m_i \eta_i = MY; \quad \sum m_i \zeta_i = MZ,$$

получим искомый результат:

$$MJ = MJ_0 + R^2,$$

где

$$R^2 = S m_i m_j r_{ij}^2. \quad (6.4)$$

Подстановка этого выражения для J в равенство (6.2) дает, если учесть (1.9),

$$\frac{d^2(R^2)}{dt^2} = 2MU + 4Mh_0. \quad (6.5)$$

Через h_0 здесь обозначена новая постоянная, определяемая равенством

$$2Mh_0 = 2Mh - a_\xi^2 - a_\eta^2 - a_\zeta^2. \quad (6.6)$$

Если за начало координат принять центр инерции, то $X=Y=Z=0$, а потому $J_0=0$; $a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$; $h = h_0$.

Таким образом, h_0 есть барицентрическая постоянная энергии.

Формулу (6.2), так же как и эквивалентную ей формулу (6.5), будем называть формулой Лагранжа—Якоби. Она является обобщением уже встречавшейся нам в задаче двух тел формулы (§ 3 гл. IX; § 4 гл. XIII):

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2k^2 (m_0 + m_1) (r^{-1} - a^{-1}).$$

Для случаев двух и трех тел формулы (6.2) и (6.5) были даны в 1772 г. Лагранжем. В 1842 г. Якоби обобщил эти формулы на случай произвольного числа тел и показал, что из них могут быть получены некоторые общие заключения относительно

характера движения. Результаты Якоби, в несколько уточненном виде, заключаются в следующем.

Движение системы материальных точек будем называть устойчивым (по Якоби), если расстояния r_{ij} между телами имеют конечную верхнюю границу.

Двукратное интегрирование равенства (6.5) дает

$$R^2 = R_0^2 + Qt + 2M \int_0^t \int_0^t (U + 2h_0) dt^2, \quad (6.7)$$

где через R_0^2 и Q обозначены постоянные интегрирования.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если бы существовало такое τ , что для всех $t > \tau$ имело бы место неравенство

$$U + 2h_0 \geq \varepsilon,$$

то, как следует из (6.7), величина R^2 стремилась бы к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ и система не могла бы быть устойчивой. Таким образом, мы можем утверждать, что для каждой устойчивой системы и любых τ и $\varepsilon > 0$ существует такое $t > \tau$, при котором

$$U + 2h_0 < \varepsilon.$$

Так как $U > 0$, то отсюда следует, что при $h_0 > 0$, т. е. для положительных значений барицентрической постоянной энергии система неустойчива. При $h_0 \leq 0$ могут иметь место как устойчивые, так и неустойчивые движения. В этом можно убедиться при помощи частных случаев движений в задачах двух и трех тел.

С другой стороны, соотношение (6.7) показывает, что для всех $t > \tau$ не может иметь место неравенство

$$U + 2h_0 \leq -\varepsilon.$$

В противном случае правая часть (6.7) стала бы отрицательной при достаточно больших значениях t .

Итак, если система устойчива, то для любых значений τ и $\varepsilon > 0$ существует такое $t > \tau$, при котором

$$|U + 2h_0| < \varepsilon.$$

Так как потенциальная энергия системы равна $-U$, то полученный результат можно выразить так: если движение системы устойчиво, то потенциальная энергия неограниченное число раз принимает значения сколь угодно близкие к удвоенной барицентрической постоянной энергии.

§ 7. Теорема вириала

В механике системы материальных точек вириалом называется выражение

$$-\sum m_i (\xi_i F_{\xi}^i + \eta_i F_{\eta}^i + \zeta_i F_{\zeta}^i),$$

где через $\{m_i F_{\xi}^i, m_i F_{\eta}^i, m_i F_{\zeta}^i\}$ обозначена сила, действующая на точку $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$, масса которой равна m_i .

В рассматриваемом нами случае движения под действием тяготения это выражение в силу (6.1) равно силовой функции U . Поэтому формула Лагранжа — Якоби может здесь служить для вычисления вириала.

Положив для краткости

$$W(t) = \sum m_i (\xi_i \dot{\xi}_i + \eta_i \dot{\eta}_i + \zeta_i \dot{\zeta}_i),$$

проинтегрировав равенство (6.2) от нуля до t и разделив полученное выражение на t , будем иметь

$$\frac{1}{t} [W(t) - W(0)] = \bar{U} + 2h, \quad (7.1)$$

где через

$$\bar{U} = \frac{1}{t} \int_0^t U dt$$

обозначена средняя величина силовой функции (или вириала) на рассматриваемом интервале времени.

Если движение устойчиво и, следовательно, координаты и скорости заключены в конечных интервалах, то при $t \rightarrow \infty$ левая часть равенства (7.1) стремится к нулю.

Поэтому для достаточно больших интервалов времени соотношение (7.1) можно заменить таким:

$$\bar{U} = -2h.$$

Отсюда, учитывая интеграл энергии (1.11), имеем

$$\bar{U} = 2\bar{T}, \quad (7.2)$$

где через \bar{T} обозначено среднее значение кинетической энергии.

Равенство (7.2) называется теоремой вириала.

Г. Ф. Хильми [1950] показал, что эта теорема может быть заменена следующим, более определенным утверждением:

Если движение системы устойчиво и если потенциальная энергия $-U$ этой системы такова, что

$$|U - A| < \eta \quad (7.3)$$

для всех $t > \tau$, где A , η и τ — некоторые постоянные числа, то для всех $t > \tau$ имеют место неравенства

$$|U + 2h_0| < 2\eta; |2T - U| < 2\eta. \quad (7.4)$$

Второе из этих неравенств является очевидным следствием первого и интеграла энергии, написанного в форме

$$2T - U = U + 2h_0.$$

Чтобы доказать первое из неравенств (7.4) заметим, что тождества

$$U + 2h_0 = U - A + A + 2h_0,$$

$$A + 2h_0 = A - U + U + 2h_0$$

позволяют написать, учитывая (7.3), такие неравенства:

$$|U + 2h_0| < |A + 2h_0| + \eta, \quad (7.5)$$

$$|A + 2h_0| < |U + 2h_0| + \eta. \quad (7.6)$$

В предыдущем параграфе мы видели, что для любых значений τ и $\varepsilon > 0$ существует такое $t' > \tau$, что

$$|U(t') + 2h_0| < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (7.6) следует, что

$$|A + 2h_0| < \varepsilon + \eta.$$

Так как левая часть есть фиксированное число, а ε — произвольное положительное число, то необходимо должно быть

$$|A + 2h_0| < \eta.$$

Это неравенство, совместно с (7.5), доказывает справедливость первого из неравенств (7.4), а тем самым и всей теоремы.

§ 8. Формулы Сундмана

Покажем прежде всего, что интеграл энергии позволяет выразить силовую функцию U через величины v_{ij} , определяемые соотношениями

$$v_{ij}^2 = (\dot{\xi}_i - \dot{\xi}_j)^2 + (\dot{\eta}_i - \dot{\eta}_j)^2 + (\dot{\zeta}_i - \dot{\zeta}_j)^2.$$

В самом деле, тождество (6.3), использованное нами при выводе формулы Лагранжа — Якоби, позволяет написать

$$M \sum m_i \dot{\xi}_i^2 - (\sum m_i \dot{\xi}_i)^2 = S m_i m_j (\dot{\xi}_i - \dot{\xi}_j)^2.$$

Сложив такие равенства для всех трех координат и приняв во внимание интегралы (1.7), получим

$$2MT - a_{\xi}^2 - a_{\eta}^2 - a_{\zeta}^2 = S m_i m_j v_{ij}^2.$$

Исключив отсюда T при помощи интеграла (1.11), будем иметь

$$Sm_i m_j v_{ij}^2 = 2MU + 2Mh_0, \quad (8.1)$$

где через h_0 обозначена барицентрическая постоянная энергии, определяемая равенством (6.6).

Очевидно, v_{ij} есть абсолютная величина скорости точки m_j относительно m_i . Разложим эту скорость на две компоненты: одну, направленную по вектору, идущему от m_i к m_j и равную, очевидно, \dot{r}_{ij} ; другую — перпендикулярную к этому вектору. Обозначив вторую компоненту через n_{ij} , будем иметь

$$v_{ij}^2 = \dot{r}_{ij}^2 + n_{ij}^2.$$

Таким образом, соотношение (8.1) дает

$$Sm_i m_j \dot{r}_{ij}^2 = 2MU + 2Mh_0 - Sm_i m_j n_{ij}^2. \quad (8.2)$$

С другой стороны, известное тождество Лагранжа для произведения двух сумм квадратов позволяет написать

$$S[(\sqrt{m_i m_j} r_{ij})^2] S[(\sqrt{m_i m_j} \dot{r}_{ij})^2] = (Sm_i m_j r_{ij} \dot{r}_{ij})^2 + N,$$

где

$$N = SS[m_i m_j m_k m_h (r_{ij} \dot{r}_{kh} - r_{kh} \dot{r}_{ij})^2],$$

причем последняя сумма распространяется на все возможные различные комбинации пар индексов (i, j) и (k, h) .

При помощи равенства (6.4) и полученного из него дифференцированием соотношения

$$R\dot{R} = Sm_i m_j r_{ij} \dot{r}_{ij},$$

это тождество можно написать так:

$$S[(\sqrt{m_i m_j} \dot{r}_{ij})^2] = \dot{R}^2 + NR^{-2}.$$

Сопоставление этого равенства с (8.2) дает

$$\dot{R}^2 = 2MU - P + 2Mh_0, \quad (8.3)$$

где для краткости положено

$$P = Sm_i m_j n_{ij}^2 + NR^{-2}.$$

Обратимся теперь к формуле (6.5). Написав ее в развернутом виде

$$R\ddot{R} + \dot{R}^2 = MU + 2Mh_0 \quad (8.4)$$

и исключив постоянную h_0 при помощи соотношения (8.3), окончательно получим

$$R\ddot{R} + MU = P. \quad (8.5)$$

С другой стороны, исключение U из (8.3) и (8.4) дает

$$\dot{R}^2 + 2R\ddot{R} = P + 2Mh_0. \quad (8.6)$$

Формулы (8.5) и (8.6) были даны Сундманом, широко их использовавшим при изучении столкновений в задаче трех тел [Сундман, 1912]. При этом в отношении сложной по своему составу функции P оказалось достаточным учитывать лишь то, что эта функция не может быть отрицательной.

§ 9. Об общем решении задачи нескольких тел

Задача нескольких тел была поставлена во всей своей общности сразу после открытия закона тяготения, но решение этой задачи с самого начала натолкнулось на непреодолимые трудности. Тем не менее попытки хотя бы только приблизиться к ее решению никогда не прекращались, причем каждая эпоха по своему понимала, что следует разуметь под решением.

В течение первых полутора столетия усилия были направлены в сторону формального интегрирования уравнений движения. Результаты, эквивалентные десяти интегралам, рассмотренным в § 1, были открыты еще в первой половине XVIII в. В 1777 г. Лагранж придал этим интегралам применяемую теперь форму. Ему было также, по существу, известно, что источником первых девяти из этих интегралов является инвариантность уравнений движения относительно группы преобразования координат, выражаемого формулой

$$\rho'_i = \Omega \rho_i + at + b, \quad (9.1)$$

где через a и b обозначены постоянные векторы, а через Ω — постоянная ортогональная матрица с равным единице определителем. Выражение (9.1) содержит девять произвольных постоянных.

Дальнейшее понижение порядка системы дифференциальных уравнений на две единицы ценою введения двух последующих квадратур (§ 1) принадлежит также, по сути дела, Лагранжу. Этим исчерпывается все, что могло быть достигнуто на пути формального интегрирования в отношении общего случая задачи нескольких тел.

Но уже в середине XVIII в. стали понимать бесплодность этого пути для решения астрономических проблем и необходимость создания специальных методов, позволяющих разрешать с нужною точностью те частные случаи задачи нескольких тел, с которыми мы встречаемся в солнечной системе. Так, еще в своих первых работах по теории движения Луны Эйлер подчеркивал, что если бы и были найдены новые первые интегралы, то

они, несомненно, были бы слишком сложны и не принесли бы пользы.

В мемуаре, опубликованном в 1763 г., Эйлер дал метод численного интегрирования уравнений движения и указал, что этот метод является единственным, позволяющим решать любой случай задачи нескольких тел. С другой стороны, в ряде мемуаров он начал изучение некоторых весьма частных случаев, а именно: случая прямолинейного движения в задаче трех тел; случая бесконечно малой массы одного из трех тел (ограниченная задача трех тел); движения в поле тяготения двух неподвижных центров. Эйлер полагал, что изучение надлежало бы выбранных частных случаев лучше всего поможет осветить трудности, стоящие на пути общего решения задачи.

Создание во второй половине XIX в. аналитической теории дифференциальных уравнений позволило иначе поставить вопрос об общем решении задачи нескольких тел. Под таким решением теперь стали понимать изучение свойств аналитических функций, выражающих зависимость координат от времени.

Если начальные значения координат при $t=t_0$ таковы, что все расстояния r_{ij} между телами отличны от нуля, то правые части уравнений (1.2) являются голоморфными функциями в окрестности начальных значений. Поэтому согласно основной теореме Коши будет существовать решение, соответствующее этим начальным значениям, причем в этом решении координаты будут аналитическими функциями t в окрестности точки t_0 .

Предположим теперь, что при выбранных нами начальных условиях соударения невозможны для всех вещественных значений t . В таком случае будет существовать полоса шириною $2h$ (где $h > 0$), симметричная относительно вещественной оси комплексной t -плоскости, внутри которой все взаимные расстояния r_{ij} между телами отличны от нуля.

Решение, найденное в окрестности точки t_0 , может быть вычислено в любой точке этой полосы при помощи аналитического продолжения. Такой путь требует, однако, весьма громоздких вычислений. Пуанкаре указал (1884) другой способ достижения той же цели, основанный на преобразовании

$$t = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad (9.2)$$

отображающем рассматриваемую полосу плоскости t на круг $|\tau| < 1$ плоскости нового переменного τ .

Координаты ξ_i, η_i, ζ_i всех тел будут в рассматриваемом нами случае голоморфными функциями τ в области $|\tau| < 1$, а потому могут быть разложены в степенные ряды, сходящиеся в этой области. Так как вещественной оси плоскости t в силу (9.2) соответствует отрезок $-1 < \tau < +1$ плоскости τ , то полученные

степенные ряды представляют координаты для всех вещественных значений времени.

Таким образом, если сделанное нами предположение об отсутствии в рассматриваемом движении соударений в вещественные моменты времени справедливо, то задача аналитического представления этого движения может считаться решенной.

Но у нас нет возможности судить по начальным условиям движения, выполняется или нет сделанное предположение. Попытки получить соответствующие критерии в простейшем случае, когда рассматривается задача трех тел, были сделаны Бискончини в 1905 г. и Блоком в 1909 г. Однако полученные ими результаты далеко не решают вопроса.

§ 10. Об общем решении задачи трех тел

Проблема аналитического представления движения для случая задачи трех тел была решена Сундманом [1912] при помощи метода регуляризации вещественных соударений. Укажем вкратце полученные им результаты, не останавливаясь на доказательствах.

Прежде всего доказывается теорема:

Если при $t \rightarrow t_1$ наименьшее из взаимных расстояний r_{01} , r_{12} , r_{20} между телами стремится к нулю, то либо все три расстояния стремятся к нулю, либо одно из них стремится к нулю, а два другие стремятся к одной и той же конечной величине.

В первом случае мы имеем в момент t_1 тройной удар, во втором случае — парное соударение. Признак отсутствия тройного удара дается теоремой:

Если барицентрический вращательный импульс неравен нулю (иначе говоря, если рассматриваемое движение имеет плоскость Лапласа), то можно указать такое $\alpha > 0$, что по крайней мере два из расстояний r_{ij} будут всегда больше α .

Таким образом, тройной удар возможен только в случае несуществования плоскости Лапласа.

Изучение парных соударений, начатое Леви-Чивита и Бискончини, было завершено Сундманом. Ему удалось доказать следующее основное предложение (выдвинутое Бискончини в качестве гипотезы):

Если в момент t_1 происходит соударение двух тел, то при $t \rightarrow t_1$ вектор, соединяющий эти тела, стремится к определенному предельному положению, а его угловая скорость к нулю.

Можно показать, далее, что расстояние r между соударяющимися телами убывает в достаточно малом интервале $[t_1 - \varepsilon, t_1]$, где $\varepsilon > 0$, монотонно, а величина скорости при $t \rightarrow t_1$ стремится к бесконечности как $r^{-1/2}$.

Перейдем теперь к регуляризации парных соударений, позволяющей дать аналитическое продолжение решения дифференциальных уравнений после такого соударения.

Относительное положение трех тел будем определять (§ 5) координатами x, y, z точки m_1 в системе, имеющей начало в m_0 , и координатами ξ, η, ζ точки m_2 по отношению к осям, имеющим начало в центре инерции точек m_0 и m_1 .

Пусть в интервале $[t_0, t_1)$ соударений нет, а в момент t_1 происходит соударение тел m_0 и m_1 . Введя вместо t новую независимую переменную

$$u = \int_{t_0}^t r_{01}^{-1} dt; \quad r_{01} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (10.1)$$

и положив

$$u_1 = \int_{t_0}^{t_1} r_{01}^{-1} dt,$$

можно показать, что правые части дифференциальных уравнений, дающих $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ в функции u , остаются голоморфными и в точке $u = u_1$.

Таким образом, каждая из этих координат может быть разложена в силу основной теоремы Коши в сходящийся ряд по целым положительным степеням разности $u - u_1$. Вычисление показывает, что начальные члены этих рядов таковы:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(u - u_1)^2 + \dots; & \xi &= \xi_1 + \alpha(u - u_1)^3 + \dots, \\ y &= b(u - u_1)^2 + \dots; & \eta &= \eta_1 + \beta(u - u_1)^3 + \dots, \\ z &= c(u - u_1)^2 + \dots; & \zeta &= \zeta_1 + \gamma(u - u_1)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Подстановка этих выражений в (10.1) дает (если единицы выбраны так, что $k^2 = 1$):

$$\left. \begin{aligned} r_{01} &= \frac{1}{2}(m_0 + m_1)(u - u_1)^2 + \dots, \\ t &= t_1 + \frac{1}{6}(m_0 + m_1)(u - u_1)^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Ряды (10.2) и (10.3) остаются сходящимися и при $u > u_1$, т. е. при $t > t_1$. Они дают, следовательно, аналитическое продолжение движения (понимаемого как решение дифференциальных уравнений) после удара. В этом смысле говорят, что подстановка (10.1) регуляризирует рассматриваемое соударение.

Сопоставление (10.2) и (10.3) показывает, что вблизи момента соударения координаты разлагаются в ряды по целым положительным степеням $(t - t_1)^{1/3}$.

Сундман показал, далее, что промежутки времени между двумя последовательными парными соударениями имеют существенно положительную нижнюю границу. Отсюда следует, что в каждом конечном интервале времени может быть лишь конечное число парных соударений.

Поэтому, исключив из рассмотрения тот случай, когда плоскость Лапласа не существует (и, следовательно, возможны тройные соударения), мы можем дать аналитическое продолжение движения от начального момента t_0 до любого другого момента.

Переменную u , позволяющую регуляризовать парное соударение (т. е. осуществить аналитическое продолжение движения после момента удара), приходится выбирать различно в зависимости от того, какое из взаимных расстояний r_{ij} стремится к нулю. Таким образом, для различных интервалов времени движение приходится представлять различными формулами.

Сундман показал, что переменная ω , определяемая равенствами

$$dt = \Gamma d\omega; \quad \omega(0) = 0, \quad (10.4)$$

где

$$\Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_{01}}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_{12}}{l}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_{20}}{l}}\right),$$

причем через l обозначена некоторая постоянная положительная величина, позволяющая регуляризовать движение во всем интервале $-\infty < t < +\infty$.

Отметим прежде всего, что каждому конечному, вещественному значению t соответствует также конечное и вещественное значение ω . Из (10.1) и (10.4) имеем

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r}{\Gamma},$$

где правая часть остается конечной при $r \equiv r_{01} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что ω стремится к конечному пределу, когда u стремится к значению u_1 , соответствующему моменту удара t_1 . Таким образом, переменная ω остается конечной для всех конечных значений t , какие бы парные соударения ни происходили.

С другой стороны, так как $0 \leq \Gamma < 1$, то $|t| < |\omega|$, как это видно из равенств (10.4). Поэтому t остается также конечным для всех конечных значений ω .

Все это показывает, что ω и t одновременно стремятся как к $+\infty$, так и к $-\infty$.

Установив, таким образом, общий характер переменной ω , можно доказать, что координаты трех тел, их взаимные расстоя-

ния и время являются регулярными функциями ω в полосе, ограниченной двумя прямыми, параллельными вещественной оси и симметрично расположенными относительно этой оси. Обозначив ширину этой полосы через $2h$ и применив подстановку Пуанкаре (9.2) в форме

$$\omega = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad (10.5)$$

найдем, что все только что указанные величины разлагаются в ряды по целым положительным степеням τ , сходящиеся при $|\tau| < 1$.

Таким путем доказывается знаменитая теорема Сундмана:

Пусть в задаче трех тел начальные условия движения таковы, что существует плоскость Лапласа. Тогда можно найти такие постоянные l и h , что координаты тел, их взаимные расстояния и время t будут голоморфными функциями τ в области $|\tau| < 1$, где τ определяется соотношениями (10.4) и (10.5).

Эта теорема решает, в указанном выше смысле, задачу трех тел. Но такое решение имеет лишь математический интерес и не может быть использовано при изучении астрономических вопросов. Единые формулы, охватывающие все столь разнообразные случаи движения, какие могут иметь место в задаче трех тел, совсем не подходят для изучения каждого конкретного случая в отдельности. Аналогичное явление имеет место даже в несравненно более простом случае задачи двух тел: здесь тоже можно было бы дать формулы, охватывающие все возможные случаи движения; но предпочитают, как мы видели выше, пользоваться для каждого вида движения своими специфическими формулами.

Малая пригодность единых всеобъемлющих формул для изучения конкретных случаев движения выражается, между прочим, в крайне медленной сходимости рядов Сундмана. Примером может служить следующий расчет [Белорицкий, 1933], относящийся к случаю лагранжева движения (§ 1 гл. XV), когда положения и скорости тел в начальный момент $t=0$ таковы, что рассматриваемые тела во все время движения образуют равносторонний треугольник. Предположим, далее, что массы тел равны и что единица времени выбрана так, что постоянная тяготения равна единице. При этих предположениях, для вычисления координат для момента $t=1$ (т. е. через 58,132... суток после начального момента) с ошибкой, не превышающей 10%, в рядах Сундмана надо взять число членов, превосходящее 10^{80000} .

Если массы не равны, то придется, при тех же условиях, взять еще большее число членов.

Небесномеханическая «задача трех тел» является, очевидно, лишь приближением к проблеме движения трех тел конечного размера, стоящей перед нами в действительности. Вообще говоря, изучение упрощенной, приближенной проблемы может быть интересно для естествознания лишь тогда, когда оно остается в границах, в которых упрощенная проблема остается еще достаточно близкой к реальной. А только что указанная трактовка соударений этому условию явно не удовлетворяет. Но, несмотря на это, теория регуляризации соударений оказалась полезной и для решения чисто астрономических задач, так как подстановки вида (10.1) помогли ускорить сходимость рядов, представляющих координаты небесных тел.

Другой путь для получения общего решения задачи трех тел (в случае, когда существует плоскость Лапласа) был указан Г. А. Мерманом [1958]. В данном им решении координаты трех тел и время получаются в форме рядов Миттаг-Леффлера, члены которых являются полиномами от переменной ω , определяемой соотношениями (10.4). Эти ряды сходятся для всех вещественных значений ω , а потому представляют решение задачи трех тел для $t \in (-\infty, +\infty)$.

Решение Г. А. Мермана является эффективным в том смысле, что указан способ для последовательного получения членов рассматриваемых рядов и дана оценка погрешности, делаемой при замене бесконечных рядов конечным числом их членов.

Различные модификации рядов Миттаг-Леффлера, сходящихся для любого вещественного момента времени и представляющих общее решение задачи трех тел, изучались численными методами В. А. Брумбергом [1963].

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ**§ 1. Случаи, в которых задача трех тел приводится к задаче двух тел**

Известно несколько частных случаев задачи трех тел, разрешаемых до конца элементарными средствами. Один такой случай совершенно очевиден: если массы двух тел бесконечно малы, то изучение движения приводится к решению двух отдельных задач двух тел. В этом параграфе будет показано, что возможны и другие случаи, когда относительные движения происходят по кеплеровым орбитам, а потому задача трех тел легко разрешается до конца. Несмотря на свой весьма специальный характер, эти случаи представляют большой интерес; опираясь на такой частный случай, мы имеем возможность довольно глубоко изучить значительную область смежных движений, среди которых встречаются и имеющие непосредственное астрономическое применение.

Изучая в задаче трех тел коллинеарные движения (т. е. такие, в которых три тела всегда остаются на одной прямой), Эйлер показал (в 1767 и 1770 гг.), что при любых массах возможно коллинеарное движение, в котором каждое тело описывает по отношению к каждому другому телу кеплерову орбиту. Так как три массы можно расположить на прямой тремя различными способами, то в общем случае (когда среди масс нет равных) существует три движения такого рода. Эти движения будем называть эйлеровыми случаями задачи трех тел.

Можно показать, что в эйлеровых случаях движение происходит так, что конфигурация трех тел остается все время подобной самой себе. Общий вопрос о нахождении всех движений, в которых отношения расстояний между телами остаются неизменными, был решен Лагранжем в 1772 г. Оказалось, что, кроме только что указанных эйлеровых случаев, имеется еще два таких движения. В этих новых случаях, получивших название лагранжевых, три тела образуют всегда равносторонний

треугольник, причем движение их относительно общего центра инерции, а также по отношению друг к другу происходит также по кеплеровым орбитам.

Рассмотрим задачу о нахождении всех тех случаев, когда относительные движения происходят по кеплеровым орбитам. Решение этой задачи должно дать нам, на основании только что сказанного, все движения, найденные Эйлером и Лагранжем. Мы увидим, что других решений эта задача, поставленная и решенная К. Штумпфом [1951], не имеет.

Взаимное положение трех тел, имеющих массы m , m' , m'' , будем определять векторами r_0 , r_1 и r_2 , как это показано на рис. 18. Очевидно,

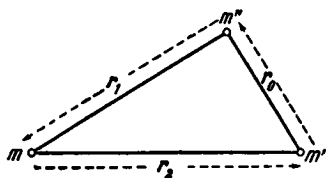


Рис. 18.

$$r_0 + r_1 + r_2 = 0. \quad (1.1)$$

Уравнения относительного движения (§ 4 гл. XIV) дают

$$\frac{d^2 r_2}{dt^2} = -k^2(m + m') \frac{r_2}{r_2^3} + k^2 m'' \left(\frac{r_0}{r_0^3} + \frac{r_1}{r_1^3} \right) \quad (1.2)$$

и два аналогичных уравнения, получающихся из (1.2) циклической перестановкой индексов.

Так как каждое из трех относительных движений, представляемых векторами r_0 , r_1 , r_2 , по условию должно быть кеплеровым, то уравнение (1.2) и ему аналогичные должны быть тождественны с такими:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = -k^2 h_i \frac{r_i}{r_i^3} \quad (i=0, 1, 2), \quad (1.3)$$

где через h_0 , h_1 , h_2 обозначены не зависящие от времени величины.

Иначе говоря, должны иметь место тождества

$$(m + m' - h_2) \frac{r_2}{r_2^3} - m'' \left(\frac{r_0}{r_0^3} + \frac{r_1}{r_1^3} \right) = 0, \dots$$

Учитывая (1.1), их можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} r_0 \left(\frac{m''}{r_0^3} + \frac{m + m' - h_2}{r_2^3} \right) + r_1 \left(\frac{m''}{r_1^3} + \frac{m + m' - h_2}{r_2^3} \right) &= 0, \\ r_1 \left(\frac{m}{r_1^3} + \frac{m' + m'' - h_0}{r_0^3} \right) + r_2 \left(\frac{m}{r_2^3} + \frac{m' + m'' - h_0}{r_0^3} \right) &= 0, \\ r_2 \left(\frac{m'}{r_2^3} + \frac{m'' + m - h_1}{r_1^3} \right) + r_0 \left(\frac{m'}{r_0^3} + \frac{m'' + m - h_1}{r_1^3} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Такие равенства могут иметь место только в двух случаях: 1) если векторы r_i коллинеарны, и 2) если коэффициенты, стоящие в них при этих векторах, равны нулю.

Рассмотрим первый случай, т. е. предположим, что массы находятся на одной прямой. Из трех возможных расположений возьмем то, когда тело с массой m' лежит между двумя другими, так что $r_1 = r_2 + r_0$. Положив

$$r_0 = zr_2; \quad r_1 = (1+z)r_2, \quad (1.5)$$

из соотношений (1.4) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= m' + m'' - m \frac{z^3(2+z)}{(1+z)^2}, \\ h_1 &= m'' + m + m'(1+z)^2(1+z^{-2}), \\ h_2 &= m + m' - m'' \frac{1+2z}{z^2(1+z)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Так как h_i — постоянные величины, то эти равенства показывают, что z — тоже величина постоянная. Иначе говоря, все движения, происходящие по кеплеровым орбитам, таковы, что конфигурация трех масс остается подобной себе самой.

Чтобы найти z , подставим выражения (1.5) в уравнения (1.3). Это дает

$$h_0 = z^3 h_2; \quad (1+z)^3 h_0 = z^3 h_1.$$

Исключение величин h_i при помощи (1.6) из любого из этих соотношений приводит к одному и тому же уравнению для z :

$$(m + m')z^5 + (3m + 2m')z^4 + (3m + m')z^3 - (m' + 3m'')z^2 - (2m' + 3m'')z - m' - m'' = 0. \quad (1.7)$$

Последовательность коэффициентов уравнения (1.7) имеет только одну переменную знака; уравнение имеет поэтому согласно теореме Декарта один и только один положительный корень.

Итак, расположив тела на одной прямой на расстояниях, удовлетворяющих условиям (1.5), где z — положительный корень уравнения (1.7), и придав им начальные скорости, подчиненные условиям

$$\frac{dr_0}{dt} = -\frac{z}{1+z} \frac{dr_1}{dt} = z \frac{dr_2}{dt},$$

мы получим кеплеровы движения, определяемые уравнениями (1.3), в которых h_i имеют значения (1.6).

Расположив те же самые массы в порядке m', m, m'' , или в порядке m, m'', m' , получим для них еще два эйлеровых движения. Соответствующие значения z , определяющие отношения взаимных расстояний, найдем из уравнений, получаемых путем надлежащей перестановки индексов в (1.7).

Обратимся теперь к другому возможному случаю: предположим, что векторы r_i , удовлетворяющие соотношениям (1.4), не коллинеарны. Существование этих соотношений возможно тогда лишь при условии равенства нулю шести величин, стоящих в скобках. Это дает

$$\frac{m + m' - h_2}{r_2^3} = -\frac{m''}{r_0^3} = -\frac{m''}{r_1^3}; \dots$$

Отсюда

$$r_0 = r_1 = r_2; \quad h_0 = h_1 = h_2 = m + m' + m''.$$

Иначе говоря, движущиеся массы должны всегда находиться в вершинах равностороннего треугольника.

Масса m'' может быть помещена по отношению к массам m и m' двумя различными способами так, чтобы получился равносторонний треугольник. Поэтому можно сказать, что мы имеем два таких случая, когда три тела описывают в своем относительном движении кеплеровы орбиты, образуя все время равносторонний треугольник. Эти движения называются, как уже было сказано, лагранжевыми случаями задачи трех тел.

Заметим, что три эйлеровых случая и два лагранжевых очень часто называются пятью лагранжевыми случаями задачи трех тел. Такое наименование возникло потому, что указанные выше работы Эйлера (не упомянутые Лагранжем) были полностью забыты до самого недавнего времени. Встречающееся иногда в литературе наименование этих частных случаев задачи трех тел лапласовыми еще менее оправдано. Оно возникло потому, что Лаплас [1799—1825], излагая этот вопрос, не упомянул ни Эйлера, ни Лагранжа.

На доказательстве того, что эти пять случаев являются единственными, в которых расстояния между телами сохраняют постоянные отношения, мы не будем останавливаться*).

§ 2. Планетоидная задача трех тел

Из частных случаев задачи трех тел, имеющих непосредственные астрономические приложения, одним из наиболее важных является тот, когда одна из масс настолько мала, что не производит заметного влияния на движение двух других. Этот случай мы назовем планетоидной задачей трех тел**).

Таким образом, в планетоидной задаче рассматривается движение тела, имеющего «бесконечно малую» массу, в поле тяготения двух тел с конечными массами, совершающих относитель-

*) Относительно теории таких решений задачи трех тел и связанных с ней вопросов см.: М. Ф. Субботин [1937], Винтнер [1941], Хамель [1949].

**) Его называли иногда эллиптической ограниченной задачей трех тел, но такое название нельзя считать удачным.

ное движение по кеплеровым орбитам. Только частный случай этой задачи, в котором относительное движение происходит по круговым орбитам и который носит название *ограниченной задачи трех тел*, изучен достаточно глубоко. Ограниченная задача будет нами рассмотрена в следующих параграфах, а сейчас посмотрим, что дают эйлеровы и лагранжевы случаи для общей планетоидной задачи.

Имея в виду астрономические применения, массу m_1 тела S будем считать очень большой (Солнце), массу m_2 тела J будем считать очень малой (планета). Исчезающе малую массу тела P , не оказывающего заметного влияния на движение двух других тел, обозначим через m_0 . Расстояние SJ , т. е. радиус-вектор планеты, обозначим через r , а расстояния SP и JP — через r_1 и r_2 .

Найдем те положения, находясь в которых P может совершать эйлеровы движения. Полагая в уравнении (1.7) $m = m_1$, $m' = m_0$, $m'' = m_2$ и пренебрегая m_0 , получим

$$m_1 z^5 + 3m_1 z^4 + 3m_1 z^3 - 3m_2 z^2 - 3m_2 z - m_2 = 0.$$

Так как $m_1 > 1000m_2$, то нужный нам положительный корень этого уравнения очень мал. Поэтому в первом приближении уравнение можно заменить таким: $3m_1 z^3 - m_2 = 0$, что дает

$$z = \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{1/3}. \quad (2.1)$$

Положим

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad \nu = \left(\frac{1}{3} \mu \right)^{1/3}. \quad (2.2)$$

Так как соотношения (1.5) в принятых сейчас обозначениях дают $r = (1+z)r_1$, то после уточнения значения z окончательно будем иметь

$$r_1 = r \left(1 - \nu + \frac{1}{3} \nu^2 + \frac{1}{9} \nu^3 + \dots \right). \quad (2.3)$$

Точку, которая находится на радиусе-векторе планеты на таком расстоянии от Солнца, будем называть *первым центром либрации* и обозначать через L_1 (рис. 19). Результаты

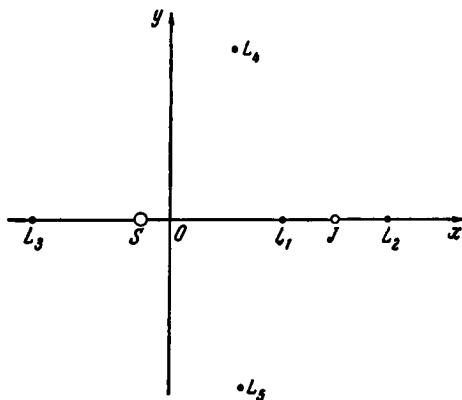


Рис. 19.

предыдущего параграфа показывают, что бесконечно малая масса, будучи помещена в эту точку с надлежащей начальной скоростью, будет двигаться вокруг центра инерции O тел S и J по кеплеровой орбите. С другой стороны, при некоторых небольших отклонениях от этих начальных условий бесконечно малая масса может совершать вокруг L_1 колебательные (иначе говоря, либрационные) движения. Это будет показано дальше (§ 8).

Если в уравнении (1.7) положить $m = m_1$, $m' = m_2$, $m'' = m_0 = 0$, т. е. считать, что планета J расположена между S и P , то будем иметь

$$(m_1 + m_2)z^5 + (3m_1 + 2m_2)z^4 + (3m_1 + m_2)z^3 - m_2z^2 - 2m_2z - m_2 = 0.$$

Таким образом, в первом приближении для z можно взять то же самое значение (2.1). Уточнив это значение и учтя, что в рассматриваемом сейчас случае соотношения (1.5) дают $r_1 = (1+z)r$, для расстояния от Солнца второго центра либрации L_2 получим

$$r_1 = r \left(1 + v + \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{9}v^3 + \dots \right). \quad (2.4)$$

В третьем случае коллинеарного движения, когда Солнце S находится между планетоидом P и планетой J , имеем $r = zr_1$, причем z определяется уравнением

$$f(z) = 0,$$

где

$$f(z) = m_1z^5 + 2m_1z^4 + m_1z^3 - (m_1 + 3m_2)z^2 - (2m_1 + 3m_2)z - (m_1 + m_2).$$

Положительный корень этого уравнения мало отличается от единицы. Уточняя это приближенное значение по правилу Ньютона, получим

$$z = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 + \frac{7m_2}{12m_1 - 9m_2} = 1 + \frac{7}{12}\mu + \dots$$

Дальнейшее уточнение величины z дает следующее значение радиуса-вектора третьего центра либрации L_3 :

$$r_1 = r \left(1 - \frac{7}{12}\mu - \frac{1127}{20736}\mu^3 - \frac{1127}{20736}\mu^4 + \dots \right). \quad (2.5)$$

Положения коллинеарных центров либрации для всех больших планет (кроме Плутона, масса которого недостаточно хорошо известна) указаны в прилагаемой табличке, дающей расстояния этих точек от Солнца, выраженные в частях радиуса-вектора соответствующей планеты.

Положение коллинеарных центров либрации

	L_1	L_2	L_3
Меркурий	0,9966	1,0034	1—0,000 000 07
Венера	0,9907	1,0093	1—0,000 001 43
Земля	0,9899	1,0101	1—0,000 001 78
Марс	0,9952	1,0048	1—0,000 000 19
Юпитер	0,9332	1,0698	1—0,000 557
Сатурн	0,9550	1,0464	1—0,000 167
Уран	0,9758	1,0246	1—0,000 026
Нептун	0,9743	1,0261	1—0,000 030

Интересно отметить, что у всех планет спутники находятся значительно ближе, нежели центры либрации L_1 и L_2 . Так, например, расстояние от Земли до Луны в четыре раза меньше, чем расстояния до этих центров.

Лагранжевы движения, рассмотренные в предыдущем параграфе, дают два соответствующих частных решения планетоидной задачи. В этих частных решениях исчезающе малая масса должна находиться в одной из точек L_4 или L_5 , образующих равносторонние треугольники с конечными массами S и J . Точки L_4 и L_5 , которые также могут быть центрами либрационного движения (§ 9), будем называть **тригональными центрами либрации***.

В указанной на рис. 19 координатной системе положение этих точек определяется координатами

$$x = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)r, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}r, \quad (2.6)$$

где верхний знак соответствует точке L_4 , а нижний — точке L_5 .

Вопрос об устойчивости лагранжевых движений при произвольных значениях масс m_0 , m_1 , m_2 был изучен А. М. Ляпуновым в 1889 г. [Ляпунов, 1954; стр. 327—401]. Важнейший из полученных им результатов заключается в следующем.

Для устойчивости движения прежде всего необходимо, чтобы подобные конические сечения, по которым движутся рассматриваемые массы m_0 , m_1 , m_2 , все время образующие равносторонний треугольник, были эллипсами. Обращаясь к случаю эллиптического движения, обозначим через e величину эксцентриситета трех подобных эллипсов, описываемых массами в их движении относительно общего центра инерции.

Пусть, далее,

$$\lambda = 3 \frac{m_0 m_1 + m_1 m_2 + m_2 m_0}{(m_0 + m_1 + m_2)^2},$$

а через α , β и γ обозначим некоторые положительные функции e , стремящиеся к нулю вместе с e .

* От греческого слова «тригонос» — треугольник. Про светило, отстоящее от другого на 60° , в древности и в средние века говорили, что оно находится по отношению к этому последнему в тригональном положении.

В таком случае движение устойчиво, если при $e < e'$, где e' достаточно малая величина, выполняется одно из двух следующих условий:

$$\lambda < \frac{1}{12} - \alpha \quad \text{или} \quad \frac{1}{12} + \beta < \lambda < \frac{1}{9} + \gamma; \quad (2.7)$$

очо неустойчиво, если ни одно из этих условий не выполняется.

В частном случае, для ограниченной задачи, когда $m_0 = 0$, $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, и следовательно,

$$\lambda = 3\mu(1 - \mu), \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

условия (2.7) приводятся к одному:

$$\mu(1 - \mu) < \frac{1}{27}.$$

Отсюда следует, что в ограниченной задаче трех тел при $\mu < 0,03852\dots$ центры либрации L_4 и L_5 являются положениями устойчивого относительного равновесия.

§ 3. Ограниченная задача трех тел.

Интеграл Якоби

Обратимся теперь к более подробному изучению ограниченной задачи трех тел. Она заключается, как уже было сказано, в следующем:

требуется найти движение тела P с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами S и J , имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции.

С такого рода задач мы встречаемся, например, когда изучаем движение планетоида или кометы под влиянием притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера считаем в первом приближении круговой.

Точно так же движение Луны можно в первом приближении рассматривать как частный случай ограниченной задачи. Но при этом приходится пренебрегать не только эксцентриситетом земной орбиты и притяжением всех других планет, но и массой Луны, т. е. тем притяжением, которое она производит на Землю и Солнце.

Обозначим через m_1 и m_2 массы тел S и J . Не ограничивая общности, мы можем всегда считать, что $m_1 \geq m_2$.

За начало координат примем общий центр инерции O ; плоскость, в которой происходит движение тел S и J , возьмем за плоскость xy ; наконец, прямую SOJ возьмем за ось Ox . Координаты точек S и J в такой системе координат мы можем, очевидно, обозначить через $(-d_1, 0, 0)$ и $(d_2, 0, 0)$, где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Обозначим, далее, через n постоянную угловую скорость, с которой прямая SOJ вращается вокруг точки O . По третьему закону Кеплера

$$n^2(d_1 + d_2)^3 = k^2(m_1 + m_2), \quad (3.1)$$

так как $d_1 + d_2$ есть большая полуось орбиты, описываемой одним из тел S и J относительно другого под влиянием взаимного притяжения.

Положительное направление оси Oy выберем так, чтобы n было положительным числом.

Пусть x, y, z будут координаты точки P . Так как координатная система вращается с угловой скоростью n вокруг оси z , то компоненты абсолютной скорости этой точки равны

$$\dot{x} - ny, \quad \dot{y} + nx, \quad \dot{z}.$$

Поэтому, обозначая через m_0 массу точки P , для кинетической энергии этой точки будем иметь следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} m_0 [(\dot{x} - ny)^2 + (\dot{y} + nx)^2 + \dot{z}^2].$$

Уравнения Лагранжа в применении к этому случаю дают

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = U_x; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = U_y; \quad \ddot{z} = U_z,$$

где через U обозначена функция сил, действующих на точку P , разделенная на m_0 .

В рассматриваемом нами случае, когда точка P движется под влиянием притяжения точек S и J , имеем

$$U = k^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right).$$

Поэтому, полагая

$$\Omega = \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + k^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right), \quad (3.2)$$

окончательно уравнения движения в ограниченной задаче трех тел напомним следующим образом:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \Omega_x; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \Omega_y; \quad \ddot{z} = \Omega_z. \quad (3.3)$$

Умножая эти уравнения на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , складывая их и интегрируя, получим соотношение

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - C, \quad (3.4)$$

где C — произвольная постоянная. Это соотношение известно как интеграл Якоби. Постоянную C будем называть постоянной Якоби.

Интеграл (3.4) был открыт Якоби в 1836 г. Применение его к выяснению некоторых общих свойств относительного движения, излагаемое в следующем параграфе, было указано значительно позднее [Хилл, 1878].

§ 4. Поверхности нулевой скорости

Если через v обозначить скорость точки P относительно нашей подвижной координатной системы, то интеграл Якоби (3.4) можно написать так:

$$v^2 = 2\Omega - C.$$

Это соотношение дает, следовательно, возможность найти величину относительной скорости v в каждой точке нашего вращающегося пространства для всех движений, характеризуемых данной величиной C .

Обратно, если C и v заданы, то это равенство определяет геометрическое место тех точек вращающегося пространства, в которых может находиться тело P .

Рассмотрим всю совокупность движений тела P , совместных с некоторой фиксированной величиной постоянной C . Очевидно, эти движения возможны только в тех местах пространства, в которых $2\Omega - C \geq 0$, так как относительная скорость v не может быть мнимой. Поэтому поверхность

$$2\Omega - C = 0 \quad (4.1)$$

является границей, отделяющей те области пространства, в которых вещественные движения, соответствующие выбранному значению C , возможны, от областей, где такие движения невозможны.

Такая поверхность может существовать, очевидно, лишь при положительных значениях постоянной C .

Поверхность (4.1) называется поверхностью нулевой скорости, так как во всех ее точках $v=0$.

Нашей ближайшей задачей является изучение формы поверхности нулевой скорости при различных значениях C .

Прежде всего, условимся выбирать единицы длины и времени так, чтобы было

$$SJ = d_1 + d_2 = 1; \quad k = 1,$$

и следовательно, на основании (3.1),

$$n^2 = m_1 + m_2.$$

В таком случае, учитывая выражение (3.2), мы можем уравнение (4.1) написать следующим образом:

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} = C, \quad (4.2)$$

где

$$r_1 = [(x + d_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}; \quad r_2 = [(x - d_2)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

Поверхность, представляемая этим уравнением, очевидно, симметрична как относительно плоскости $z=0$, так и относительно плоскости $y=0$.

Предположим сначала, что C очень большое число. В этом случае поверхность (4.2) состоит из трех отдельных поверхностей. В самом деле, левая часть уравнения (4.2) может быть очень большой только в точках, в которых хотя бы один из трех членов этой части принимает очень большие значения.

В точках, в которых $x^2 + y^2$ очень велико, второй и третий члены уравнения (4.2) очень малы, так что это уравнение можно написать так:

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) = C - \varepsilon, \quad (4.3)$$

где ε очень малая по сравнению с C положительная величина, принимающая наибольшие значения в плоскости xy и стремящаяся к нулю вместе с $|z|$.

Таким образом, поверхность (4.3), которую можно для краткости назвать квазицилиндром, лежит внутри цилиндра

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) = C$$

и асимптотически к нему приближается.

Если r_1 близко к нулю, то первый и третий члены левой части уравнения (4.2) очень малы. Это уравнение имеет, следовательно, вид

$$r_1 = \frac{2m_1}{C - \varepsilon_1}, \quad (4.4)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ и очень мало по сравнению с C .

Уравнение (4.4) представляет замкнутую поверхность, заключающую точку S . При $C \rightarrow \infty$ эта поверхность обращается в пределе в сферу бесконечно малого радиуса с центром в S . Назовем ее квазисферой.

Легко видеть, что квазисфера (4.4) целиком заключает внутри себя сферу $r_1 = 2m_1/C$, причем больше всего она удаляется от этой сферы в плоскости xy , а особенно — в направлении к точке J . Она имеет таким образом грушевидную форму.

Третью часть поверхности нулевой скорости образует аналогичная квазисфера

$$r_2 = \frac{2m_2}{C - \varepsilon_2}, \quad (4.5)$$

окружающая точку J и вытянутая по направлению к точке S .

На рис. 20, 21 и 22 кривые, отмеченные буквой C' , представляют сечения координатными плоскостями поверхности нулевой скорости в только что рассмотренном случае, когда постоянная Якоби C очень велика.

Посмотрим теперь, как будет меняться форма этой поверхности при уменьшении C . Так как квазисферы (4.4) и (4.5)

будут при этом увеличиваться, а квазицилиндр (4.3) будет делаться более узким, то при некоторых значениях $C=C_1$, $C=C_2$ и $C=C_3$ каждая пара этих поверхностей будет иметь общую точку. При дальнейшем уменьшении C произойдет слияние соответствующих поверхностей в одну (двуполостную).

На рис. 20 и 21 показана форма поверхности (4.1) для значения $C=C_1$, при котором появляется общая точка у поверхностей (4.4) и (4.5), и для значения $C=C_3$, при котором поверхности (4.3) и (4.4) имеют общую точку. Показана также форма поверхности (4.1) при таком значении C'' постоянной Якоби, при котором три рассматриваемые поверхности обратились уже в одну двуполостную. При дальнейшем уменьшении C полости этой поверхности уходят на бесконечность.

Те точки пространства *Охуз*, в которых начинается слияние отдельных частей поверхности нулевой скорости, являются, очевидно, особыми точками этой поверхности. Этим обстоятельством мы и воспользуемся в следующем параграфе для нахождения координат таких точек.

Поверхность (4.1) отделяет те области пространства *Охуз*, в которых движение возможно, от тех областей, в которых движение невозможно. Вне квазицилиндра (4.3) и внутри квази-

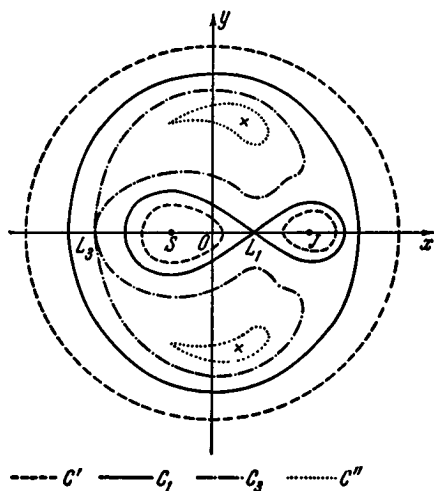


Рис. 20.

сфер (4.4) и (4.5) мы имеем $v^2 > 0$, а потому движение возможно. При уменьшении C область возможных движений будет расширяться и при достаточно малых значениях C она будет заключать всю плоскость xy . Так, при $C=C''$ движения будут невозможны на плоскости xy лишь внутри пунктирных кривых (рис. 20), которые при дальнейшем уменьшении C будут сжиматься, обратятся в точки (указанные на рис. 20 крестиками), а затем совсем исчезнут. После этого поверхность (4.1) разделится на две не имеющие общих точек части, одна из которых будет находиться выше плоскости xy , а другая — ниже.

Точки плоскости xy , в которые стягиваются кривые C'' (рис. 20) при дальнейшем уменьшении постоянной Якоби, также являются особыми точками поверхности (4.1).

Изучение поверхностей нулевой скорости, притом не только качественное, но и количественное, было выполнено Хиллом в его фундаментальной работе по теории движения Луны [Хилл, 1878].

В этой работе Хилл указал весьма интересное применение полученных результатов к вопросу об устойчивости движения Луны. Если ее движение уподобить движению бесконечно малой массы в ограниченной задаче трех тел, то мы будем иметь здесь первый из разобранных случаев, когда поверхность нулевой скорости состоит из квазицилиндра и двух квазисфер.

Расстояния от Земли до ближайшей и до наиболее удаленной из точек окружающей Землю квазисферы равны соответственно 104,4 и 109,7 экваториального радиуса Земли. Между тем расстояние Луны от Земли в настоящее время колеблется (благодаря эллиптичности ее орбиты) от 56,96 до 63,58 земных радиусов.

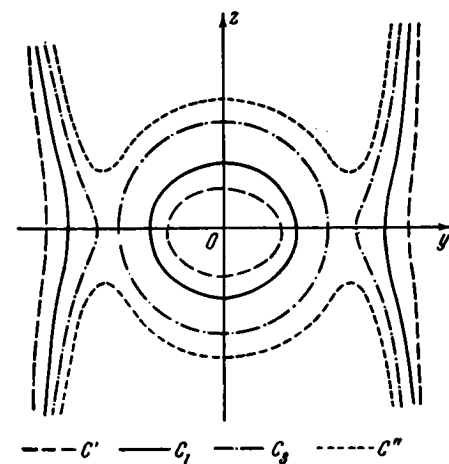


Рис. 22.

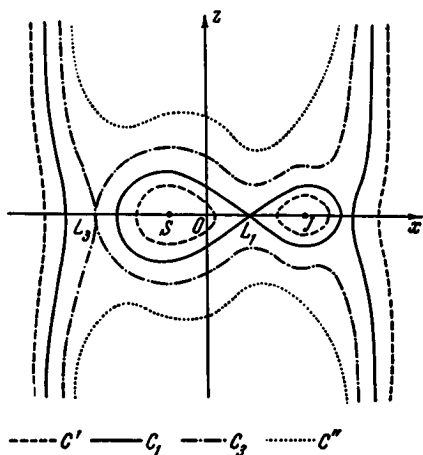


Рис. 21.

Таким образом, Луна находится глубоко внутри квазисферы, окружающей Землю, и не может выйти из этой квазисферы. Неучтенные здесь массы Луны, эксцентриситет земной орбиты и планетные возмущения не могут изменить основной характер этого результата — существование верхней границы геоцентрического радиуса-вектора Луны. Поэтому, если оставаться в области динамики точечных

масс (пренебрегая, например, приливными деформациями) и предполагать неизменность общего характера солнечной системы, устойчивость движения Луны можно считать доказанной.

Аналогичное исследование устойчивости движения спутников Юпитера было выполнено В. Ф. Проскуриным [1950]. Оказалось, что движения спутников VIII и IX определенно неустойчивы, для спутников XI и XII устойчивость весьма сомнительна, тогда как движение остальных спутников вполне «устойчиво по Хиллу».

§ 5. Особые точки поверхностей нулевой скорости

Особые точки поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

определяются, как известно, уравнениями

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0,$$

которые должны быть решены совместно с уравнением поверхности.

Для поверхностей нулевой скорости, уравнение которых имеет вид

$$2\Omega - C = 0, \quad (5.1)$$

где

$$2\Omega = (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2}, \quad (5.2)$$

$$r_1 = [(x + d_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}; \quad r_2 = [(x - d_2)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

особые точки даются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &\equiv (m_1 + m_2)x - \frac{m_1(x + d_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(x - d_2)}{r_2^3} = 0, \\ \Omega_y &\equiv (m_1 + m_2)y - \frac{m_1 y}{r_1^3} - \frac{m_2 y}{r_2^3} = 0, \\ \Omega_z &\equiv -\frac{m_1 z}{r_1^3} - \frac{m_2 z}{r_2^3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

После того как из уравнений (5.3) найдены координаты особых точек, равенство (5.1) даст возможность вычислить соответствующие значения C .

Легко видеть, какой механический смысл имеют особые точки поверхности нулевой скорости. Обращаясь к уравнениям (3.3) движения тела P и сопоставляя их с равенствами (5.3), мы видим, что в каждой такой точке не только

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0,$$

но и

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

Поэтому тело P , очутившись в особой точке и имея соответствующее значение постоянной Якоби, будет иметь и скорость

и ускорение равными нулю, а потому навсегда останется в этой точке.

Итак, особые точки поверхности (5.1) являются положениями относительного равновесия тела P ; в этих точках тело может находиться в равновесии относительно нашей вращающейся системы координат.

При нахождении тела P в особой точке расстояния между тремя телами S , J и P сохраняют, очевидно, постоянные отношения. Поэтому рассматриваемые особые точки являются не чем иным, как центрами либрации, изученными в § 1.

Обратимся теперь к вычислению координат центров либрации и вычислению соответствующих значений постоянной Якоби.

Последнее из уравнений (5.3) дает $z=0$, откуда следует, что все центры либрации лежат в плоскости xy .

Если предположить, что $y \neq 0$, то второе из уравнений (5.3) даст

$$m_1 + m_2 - m_1 r_1^{-3} - m_2 r_2^{-3} = 0. \quad (5.4)$$

Умножив это равенство на x и вычитая результат из первого уравнения (5.3), получим

$$-m_1 d_1 r_1^{-3} + m_2 d_2 r_2^{-3} = 0.$$

Так как

$$-m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0,$$

то отсюда следует, что $r_1 = r_2$. Поэтому, как показывает соотношение (5.4), $r_1 = r_2 = 1$; иначе говоря, треугольник SJP должен быть равносторонним.

Итак, рассматриваемые особые точки совпадают с тригональными центрами либрации L_4 и L_5 (§ 2). Координаты этих центров даются равенствами

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = 0.$$

Чтобы узнать, имеет ли функция 2Ω в этих точках экстремум, воспользуемся равенством

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (m_1 + m_2)(x^2 + y^2 + z^2) + m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (5.5)$$

в справедливости которого легко убедиться, если заметить, что

$$d_1 = m_2 / (m_1 + m_2), \quad d_2 = m_1 / (m_1 + m_2).$$

Это равенство позволяет написать выражение (5.2) следующим образом:

$$2\Omega = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_1 r_1^{-1} + 2m_2 r_2^{-1} - (m_1 + m_2) z^2 - m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}. \quad (5.6)$$

или

$$2\Omega = C_4 - (m_1 + m_2)z^2 + m_1(r_1 - 1)^2(1 + 2r_1^{-1}) + m_2(r_2 - 1)^2(1 + 2r_2^{-1}). \quad (5.7)$$

где через

$$C_4 = 3(m_1 + m_2) - m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$$

обозначена величина постоянной C в точках L_4 и L_5 .

Отсюда ясно, что в общем случае функция Ω не имеет в точках L_4 и L_5 экстремума, но если рассматривать плоскую ограниченную проблему трех тел ($z=0$), то она имеет в этих точках минимум.

Обратимся теперь к решению системы (5.3) в предположении, что $y=0$. В этом случае искомые особые точки лежат на оси Ox и их абсциссы даются уравнением

$$(m_1 + m_2)x - m_1 \frac{x + d_1}{|x + d_1|^3} - m_2 \frac{x - d_2}{|x - d_2|^3} = 0. \quad (5.8)$$

Изменение знака левой части показывает, что это уравнение имеет три вещественных корня — по одному в каждом из интервалов $(-\infty, -d_1)$, $(-d_1, d_2)$, $(d_2, +\infty)$. Соответствующие этим корням особые точки поверхности нулевой скорости совпадают, как легко видеть, с центрами либрации L_3, L_1, L_2 , рассмотренными в § 2. В самом деле, вычислим расстояния r_1, r_2 и значения постоянной C для каждой из этих точек. Так как r_1 и r_2 зависят только от отношения масс m_2/m_1 , то положим опять

$$\mu = m_2/(m_1 + m_2), \quad 1 - \mu = m_1/(m_1 + m_2)$$

(что дает $d_1 = \mu$, $d_2 = 1 - \mu$) и будем рассматривать r_1 и r_2 как функции μ . В силу сделанного выше предположения, что $m_2 < m_1$, достаточно изучить эти функции в интервале $0 \leq \mu \leq 0,5$.

Для центра либрации L_1 мы имеем $-d_1 < x < d_2$ и потому

$$r_1 = x + d_1, \quad r_2 = -x + d_2, \quad r_1 = 1 - r_2.$$

Введя в уравнение (5.8) в качестве неизвестной r_2 , после всех упрощений получим

$$r_2^5 - (3 - \mu)r_2^4 + (3 - 2\mu)r_2^3 - \mu r_2^2 + 2\mu r_2 - \mu = 0. \quad (5.9)$$

Интересующий нас корень этого уравнения, находящийся в интервале $(0,1)$, легко разложить в ряд по степеням μ . С этой целью уравнению (5.9) придадим такой вид:

$$r_2^3 = \mu \frac{1 - 3r_2 + r_2^2 + 2r_2^3 - r_2^4}{3 - 3r_2 + r_2^2}.$$

Разлагая правую часть в ряд и извлекая из обеих частей кубический корень, получим

$$r_2 = v \left(1 - \frac{1}{3} r_2 - \frac{2}{9} r_2^2 + \dots \right),$$

где

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \mu}.$$

Применение метода итерации к уравнению, представленному в такой форме, очень быстро дает искомое разложение:

$$r_2 = v - \frac{1}{3} v^2 - \frac{1}{9} v^3 - \dots$$

Обратимся теперь к центру либрации L_2 , для которого $d_2 < x < +\infty$, и, следовательно,

$$r_1 = x + d_1, \quad r_2 = x - d_2, \quad r_1 = 1 + r_2.$$

Здесь уравнение (5.8) может быть приведено к виду

$$r_2^5 + (3 - \mu) r_2^4 + (3 - 2\mu) r_2^3 - \mu r_2^2 - 2\mu r_2 - \mu = 0. \quad (5.10)$$

Для единственного положительного корня этого уравнения только что примененный прием дает следующее разложение:

$$r_2 = v + \frac{1}{3} v^2 - \frac{1}{9} v^3 + \dots$$

Рассмотрим, наконец, центр либрации L_3 , для которого $-\infty < x < -d_1$, и потому

$$r_1 = -x - d_1, \quad r_2 = -x + d_2, \quad r_1 = r_2 - 1.$$

Если за неизвестную принять r_1 , то уравнение (5.8) напишется так:

$$r_1^5 + (\mu + 2) r_1^4 + (2\mu + 1) r_1^3 + (\mu - 1) r_1^2 + (2\mu - 2) r_1 + \mu - 1 = 0. \quad (5.11)$$

При $\mu = 0$ это уравнение дает $r_1 = 1$. Способом неопределенных коэффициентов или методом итерации окончательно получим

$$r_1 = 1 - \frac{7}{12} \mu - \frac{1127}{20736} \mu^3 - \frac{1127}{20736} \mu^4 - \dots$$

Для вычисления постоянной Якоби можно воспользоваться формулой

$$C = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_1 r_1^{-1} + 2m_2 r_2^{-1} - m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1},$$

легко получаемой из (5.1) и (5.6).

Приближенные значения этой постоянной, соответствующие точкам L_1 , L_2 и L_3 , таковы:

$$C_1 = m_1 (3 + 9v^2 - v^3 + \dots),$$

$$C_2 = m_1 (3 + 9v^2 - 5v^3 + \dots),$$

$$C_3 = m_1 \left(3 + 4\mu + \frac{191}{48} \mu^2 + \dots \right).$$

Приводимая здесь таблица дает представление об изменении положения центров либрации и соответствующих им значений постоянной Якоби при изменении μ .

μ	Точка L_1		Точка L_2		Точка L_3	
	r_1	C_1/m_1	r_1	C_2/m_1	r_1	C_3/m_1
0,00	1,0000	3,000	1,0000	3,000	1,0000	3,000
,01	0,8581	3,200	1,1568	3,186	0,9942	3,040
,02	0,8235	3,319	1,2001	3,292	0,9883	3,082
,03	0,7996	3,421	1,2312	3,379	0,9825	3,124
,04	0,7809	3,513	1,2564	3,458	0,9767	3,167
,05	0,7652	3,600	1,2781	3,531	0,9708	3,210
0,10	0,7090	3,997	1,3597	3,852	0,9416	3,444
,20	0,6381	4,756	1,4710	4,440	0,8828	3,997
,30	0,5861	5,600	1,5567	5,081	0,8232	4,702
,40	0,5416	6,635	1,6308	5,865	0,7620	5,632
0,50	0,5000	8,000	1,6984	6,914	0,6984	6,914

На рис. 23 изображены сечения плоскостью $z=0$ нескольких поверхностей нулевой скорости вблизи центров либрации L_1 и L_2 для случая $\mu=0,0009539$, соответствующего отношению масс Юпитера и Солнца.

Приведенные на этом рисунке кривые соответствуют ниже-следующим значениям постоянной Якоби:

Кривая 1 . . . $C = 3,04260$

» 2 . . . $C = 3,04132$

» 3 . . . $C = 3,04007$

» 4 . . . $C = 3,03632$

Кривая 5 . . . $C = 3,03007$

» 6 . . . $C = 3,02007$

» 7 . . . $C = 3,01007$

Центрам либрации L_4 и L_5 (не помещившимся на чертеже) соответствует значение $C=3,00286$.

Примечание 1. Обозначим биполярные координаты центра либрации L_k через $(r_1^{(k)}, r_2^{(k)})$.

Легко видеть, что для $0 < \mu < 0,5$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \mu < r_2^{(1)} < \mu^{1/3}, \\ \mu^{2/3} < r_2^{(2)} < \mu^{1/3}, \\ (1 - \mu)^{2/3} < r_1^{(3)} < (1 - \mu)^{1/3}. \end{aligned}$$

Действительно, чтобы доказать, например, второе из этих неравенств, достаточно заметить, что левая часть уравнения (5.10), которым определяется $r_2^{(2)}$, для $r_2 = \mu^{2/3}$ и $r_2 = \mu^{1/3}$ обращается соответственно в

$$\mu(\mu - 1)[\mu^{4/3} + \mu^{2/3}(2 - \mu) - 2\mu + 1] \text{ и } \mu(1 - \mu)(\mu^{1/3} + 2),$$

но при $0 < \mu < 0,5$ первая из этих величин отрицательна, а вторая — положительна.

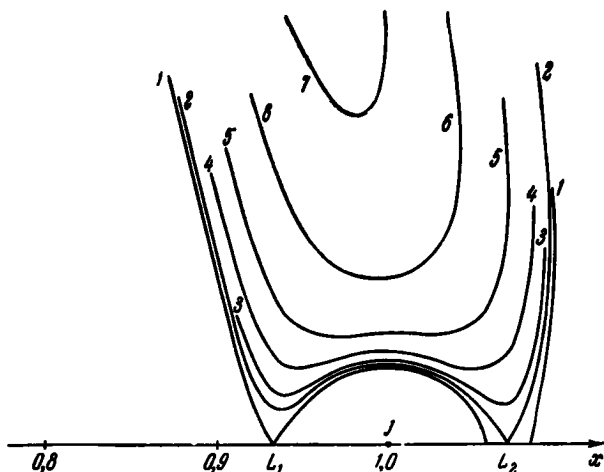


Рис. 23.

Примечание II. Функция Ω не имеет в точках L_1, L_2, L_3 экстремума. В самом деле, выражения вторых производных этой функции (см. § 8) показывают, что в каждой из этих точек

$$\Omega''_{xx} > 0, \quad \Omega''_{xx}\Omega''_{yy} - \Omega''_{xy}^2 < 0,$$

что и доказывает отсутствие экстремума.

§ 6. Критерий Тиссерана

Интеграл Якоби был использован при решении вопроса о тождественности вновь открытой периодической кометы с кометой ранее наблюдавшейся. Такой вопрос далеко не всегда может быть решен путем простого сравнения элементов орбит, так как

в случае прохождения кометы вблизи одной из больших планет ее орбита может измениться до неузнаваемости.

Конечно, вопрос всегда может быть решен путем вычисления возмущений одной из рассматриваемых комет за промежутки времени, отделяющий ее появление от появления другой кометы. Но такое вычисление требует немало труда, так что производить его имеет смысл лишь при наличии шансов на успешное отождествление.

Большие изменения элементов, придающие орбите заметно другой характер, происходили всегда при прохождении кометы очень близко от Юпитера, когда комета оказывалась внутри его сферы действия (§ 6 гл. XVIII). Именно за короткое время (не превышающее нескольких месяцев) пребывания кометы внутри сферы действия Юпитера и происходят те большие изменения элементов, по сравнению с которыми возмущения, производимые остальными планетами, уже не имеют существенного значения.

С другой стороны, прохождения кометы через сферы действия других планет столь мало вероятны, что не наблюдались еще ни разу.

Все это показывает, что движение комет с интересующей нас точки зрения можно уподобить, если пренебречь эксцентриситетом Юпитера, движению бесконечно малой массы в ограниченной задаче трех тел.

Таким образом, координаты кометы (x, y, z) должны удовлетворять, каковы бы ни были ее возмущения со стороны Юпитера, соотношению (3.4), которое (несколько меняя обозначения) можно написать так:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n'^2(x^2 + y^2) + 2k^2\left(\frac{1}{r} + \frac{m'}{\rho}\right) - C. \quad (6.1)$$

Здесь n' есть среднее суточное движение Юпитера, r и ρ — расстояния кометы от Солнца и Юпитера. Масса Солнца принята за единицу, а через m' обозначена масса Юпитера.

Отсюда получается следующее необходимое условие тождественности двух комет: две наблюдавшиеся в разное время кометы могут оказаться тождественными только в том случае, когда вычисленные для них постоянные Якоби достаточно мало отличаются между собой.

При вычислении C по формуле (6.1) надо взять координаты x, y, z и скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ относительно вращающейся системы осей с центром в O для любого момента времени. Чтобы упростить эти вычисления, перейдем к гелиоцентрической системе координат $S\xi\eta\zeta$ с неизменным направлением осей, в которой ось $S\xi$ параллельна оси Oz .

Если время t считать от того момента, когда ось Ox совпадает с $S\xi$, то формулы перехода напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} x + d_1 &= +\xi \cos n't + \eta \sin n't, \\ y &= -\xi \sin n't + \eta \cos n't, \\ z &= +\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где через d_1 обозначено расстояние SO .

Следовательно,

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2d_1(\xi \cos n't + \eta \sin n't) + d_1^2,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n'^2(\xi^2 + \eta^2) - 2n'(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}).$$

В новой координатной системе уравнение (6.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2n'(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) &= 2k^2\left(\frac{1}{r} + \frac{m'}{\rho}\right) - \\ &- 2n'^2 d_1(\xi \cos n't + \eta \sin n't) + n'^2 d_1^2 - C. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если через a, p, e, i, \dots обозначить оскулирующие элементы кометы в ее движении относительно Солнца, то

$$\begin{aligned} \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} &= k\sqrt{p} \cos i, \\ \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 &= k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Следствие этого последнее равенство дает

$$\Gamma = a^{-1} + 2n'k^{-1}\sqrt{p} \cos i + \delta,$$

где

$$\Gamma = Ck^{-2}, \quad (6.4)$$

$$\delta = n'^2 k^{-2} d_1^2 + 2m'\rho^{-1} - 2n'^2 k^{-2}(\xi \cos n't + \eta \sin n't).$$

Обозначив через $a' = SJ$ большую полуось орбиты Юпитера, так что

$$n'^2 = k^2(1 + m')a'^{-3}; \quad d_1 = \frac{m'a'}{1 + m'},$$

окончательно будем иметь

$$\Gamma = a^{-1} + 2\sqrt{(1 + m')a'^{-3}}\sqrt{p} \cos i + \delta, \quad (6.5)$$

$$\delta = \frac{m'^2}{(1 + m')a'} + \frac{2m'}{\rho} - \frac{2m'}{a'^2}(\xi \cos n't + \eta \sin n't). \quad (6.6)$$

Формула (6.5) применяется для вычисления величины Γ , эквивалентной постоянной Якоби, в такой момент t , когда комета

наблюдается, т. е. находится недалеко от Солнца. В этом случае ξ и η — величины малые, тогда как ρ мало отличается от a' . Поскольку, далее,

$$m' = 0,000954786, \quad a' = 5,203, \quad (6.7)$$

величиной δ пренебрегают и ограничиваются вычислением величины

$$\Gamma = a^{-1} + 0,16860 \sqrt{p} \cos i, \quad (6.8)$$

носящей название инварианта кометы.

Таким образом, вместо постоянной Якоби, определяемой равенством (6.1), можно пользоваться инвариантом (6.8).

Достаточная близость инвариантов двух комет является необходимым (но, очевидно, недостаточным) условием тождественности этих комет.

В этом заключается критерий Тиссерана [1896], указанный им в 1889 г. и несколько уточненный Калландро [1892].

Следует заметить, что вычисления по формулам (6.5) или (6.8) можно сделать несколько более точными, если наклон кометной орбиты i взять относительно плоскости орбиты Юпитера, а не относительно плоскости эклиптики. Можно также учесть малую величину δ , что не требует большого труда.

§ 7. Применение ограниченной задачи к изучению движения комет

Окончательная орбита неперiodической (или долгопериодической) кометы, полученная из всей совокупности наблюдений, представляет собой оскулирующую орбиту для одного из тех моментов, когда комета находилась в центральной области солнечной системы, ограниченной, примерно, орбитой Марса.

Приблизительно для 70% наблюдавшихся до настоящего времени комет такие оскулирующие орбиты оказались практически параболическими или даже слегка гиперболическими ($1 < e < 1,002$). Для решения вопроса о принадлежности этих комет (а также тех, эксцентриситеты которых лишь немного меньше единицы) к солнечной системе нужно найти форму орбит, по которым они двигались на столь еще большом расстоянии от Солнца, что всю солнечную систему можно принимать за одну материальную точку. Орбиту кометы, удовлетворяющую этому условию, мы будем называть входной орбитой. Аналогично, выходной орбитой будем называть орбиту, по которой комета движется, уйдя на такое расстояние от солнечной системы, что притяжение солнечной системы становится эквивалентным притяжению материальной точки.

Вычисление входных орбит, начатое Трэнном в 1894 г., было организовано в широком масштабе Э. Стрёмгренем в 1898 г., а затем продолжено многими исследователями. В настоящее время оно выполнено практически для всех комет, имеющих достаточно надежные исходные орбиты.

Полученные результаты можно найти в работах М. А. Дирикса [1956] и И. В. Галибиной [1958]. Они показывают, что из 26 комет, для которых могла быть найдена надежная входная орбита, только у трех комет она получилась гиперболической. Однако и в этих трех случаях гиперболичность орбиты не может считаться вполне установленной, так как возможная погрешность полученного эксцентриситета того же порядка, как и его отклонение от единицы. Во всяком случае, решение вопроса о происхождении кометы, у которой эксцентриситет окончательной орбиты близок к единице, может быть получено лишь путем выяснения формы входной орбиты.

Форма орбиты определяется знаком большой полуоси. Обозначим через $a_{-\infty}$ большую полуось входной орбиты и положим

$$\Delta_1 = 1/a_{-\infty} - 1/a,$$

где a — большая полуось окончательной орбиты кометы.

Если величины Δ_1 для тех 26 комет, для которых получены наиболее надежные входные орбиты, трактовать как случайные, то в среднем получается

$$\Delta_1 = +0,000571 \pm 0,000050. \quad (7.1)$$

Таким образом, у рассматриваемой группы комет орбиты становятся в среднем, если можно так выразиться, «более гиперболическими», когда эти кометы попадают во внутренние области солнечной системы.

Если для известных в настоящее время выходных орбит [Галибина, 1958] вычислить аналогичную величину

$$\Delta_2 = 1/a - 1/a_{\infty},$$

то получим

$$\Delta_2 = -0,000473 \pm 0,000106. \quad (7.2)$$

Свойства входных и выходных орбит, выражаемые полученными значениями Δ_1 и Δ_2 , могут быть выведены из интеграла Якоби при помощи следующего приема, примененного Синдингом [1948] для изучения входных орбит.

В предыдущем параграфе, введя гелиоцентрическую координатную систему $S\xi\eta\zeta$ с неизменными направлениями осей, мы получили интеграл Якоби в форме (6.3). Если взять барицентрическую систему $S\xi_0\eta_0\zeta_0$ с теми же направлениями осей, то формулы преобразования будут отличаться от (6.2) только тем, что в них будет $d_1=0$. Таким образом, в этой системе вместо (6.3)

будем иметь

$$\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 - 2n' (\xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0) = 2k^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{m'}{\rho} \right) - C.$$

Если через a_0 , p_0 , i_0 , ... обозначить элементы барицентрической оскулирующей орбиты, а через r_0 — барицентрический радиус-вектор, то

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2 &= k^2 (1 + m') \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0} \right), \\ \xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0 &= k \sqrt{1 + m'} \sqrt{p_0} \cos i_0. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в предыдущее равенство и применим его к положению кометы на очень большом расстоянии от Солнца, когда r , r_0 и ρ весьма велики. Введя опять величины (6.4), будем иметь

$$\frac{1}{1 + m'} \Gamma = \frac{1}{a_0} + \frac{2}{a'^{3/2}} \sqrt{p_0} \cos i_0.$$

Если из этого равенства вычтуть почленно (6.5) и положить

$$\Delta = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}, \quad (7.3)$$

то получим

$$\Delta = \frac{-m'}{1 + m'} \Gamma - \frac{2}{a'^{3/2}} [\sqrt{p_0} \cos i_0 - \sqrt{(1 + m') p} \cos i] + \delta.$$

Так как при переходе от одной кометы к другой изменения первых двух членов этого выражения носят случайный характер, то можно считать, что среднее значение Δ равно среднему значению третьего члена, т. е. величины δ , определяемой формулой (6.6).

Учитывая (6.2), выражение (6.6) можно написать так:

$$\delta = \frac{m'^2}{(1 + m') a'} + \frac{2m'}{\rho} - \frac{2m'}{a'^2} (x + d_1).$$

Но из треугольника SJP , в котором $SJ = a'$, $SP = r$, $PJ = \rho$, а проекция SP на SJ равна $x + d_1$, имеем

$$2a' (x + d_1) = r^2 + a'^2 - \rho^2.$$

Поэтому предыдущее выражение можно заменить таким:

$$\delta = \frac{-m'}{(1 + m') a'} + \frac{2m'}{\rho} - \frac{m'}{a'^3} (r^2 - \rho^2).$$

Стоящие здесь значения r и ρ соответствуют той области солнечной системы, в которой кометы наблюдаются. Таким образом, для вычисления среднего значения δ , равного среднему значе-

нию Δ_m разности (7.3), можно взять $r=1$, $\rho=a'$. Это дает

$$\Delta_m = \frac{2m' + 3m'^2}{1 + m'} \frac{1}{a'} - \frac{m'}{a'^3}. \quad (7.4)$$

Подставив сюда значения (6.7), соответствующие Юпитеру, получим

$$\Delta_m = 0,000\ 3604.$$

Для значений

$$m' = 0,000\ 28558, \quad a' = 9,539,$$

соответствующих Сатурну, мы имели бы

$$\Delta_m = 0,000\ 0596.$$

Если считать допустимым простое сложение величин, соответствующих двум планетам, то окончательно получается

$$\Delta_m = 0,000\ 420.$$

Такое значение достаточно хорошо согласуется со значениями (7.1) и (7.2), полученными для действительно наблюдавшихся комет.

§ 8. Движение вблизи коллинеарных центров либрации

Обратимся к уравнениям (3.3) движения бесконечно малой массы P , имеющим вид

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \Omega_x; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \Omega_y; \quad \ddot{z} = \Omega_z. \quad (8.1)$$

Выбрав единицы так, чтобы было

$$k^2 = 1, \quad n^2 = m_1 + m_2 = 1,$$

и положив

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu,$$

будем иметь

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (8.2)$$

Чтобы изучить движение в области центра либрации $L_h(a_h, b_h, c_h)$, положим

$$x = a_h + \xi, \quad y = b_h + \eta, \quad z = c_h + \zeta. \quad (8.3)$$

Функция (8.2) в точках L_h голоморфна. Поэтому, разлагая правые части уравнений (8.1) по степеням малых величин ξ, η, ζ

и учитывая условия (5.3), определяющие точки L_h , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi\Omega_{a_h a_h}^2 + \eta\Omega_{a_h b_h}^2 + \zeta\Omega_{a_h c_h}^2, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi\Omega_{b_h a_h}^2 + \eta\Omega_{b_h b_h}^2 + \zeta\Omega_{b_h c_h}^2, \\ \ddot{\zeta} &= \xi\Omega_{c_h a_h}^2 + \eta\Omega_{c_h b_h}^2 + \zeta\Omega_{c_h c_h}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

поскольку вторыми степенями ξ , η , ζ здесь можно пренебречь.

Для коллинеарных центров либрации L_1 , L_2 , L_3 мы имеем $b_h = c_h = 0$, чем существенно упрощается вычисление вторых производных функции (8.2). Система (8.4) в этом случае принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= (1 + 2A_h)\xi, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= (1 - A_h)\eta, \\ \ddot{\zeta} &= -A_h\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

где

$$A_h = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3},$$

причем ($h = 1, 2, 3$):

$$r_1 = |a_h + \mu|; \quad r_2 = |a_h - 1 + \mu|.$$

Последнее из уравнений (8.5) независимо от двух первых. Так как $A_h > 0$, то оно дает

$$\zeta = C_1 \cos \sqrt{A_h} t + C_2 \sin \sqrt{A_h} t, \quad (8.6)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Частные решения двух первых уравнений ищем в форме

$$\xi = H \cos(\lambda t + \beta); \quad \eta = qH \sin(\lambda t + \beta).$$

Это дает для нахождения входящих сюда параметров такие уравнения

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 + 1 + 2A_h + 2\lambda q &= 0, \\ 2\lambda + (\lambda^2 + 1 - A_h)q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Легко убедиться, что получаемое отсюда характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \lambda^2(A_h - 2) + (1 + 2A_h)(1 - A_h) = 0 \quad (8.8)$$

имеет для каждого из центров либрации L_1 , L_2 и L_3 два вещественных и два чисто мнимых корня.

В самом деле, легко показать, что величина

$$1 - A_h = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \quad (8.9)$$

в каждой из этих точек отрицательна.

Для точки L_1 это очевидно, так как

$$r_1 < 1, \quad r_2 < 1.$$

Для точки L_2 уравнение (5.10) дает

$$\mu = \frac{r_2^5 + 3r_2^4 + 3r_2^3}{r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1}.$$

Подставив это выражение в формулу (8.9) и учтя, что в рассматриваемом случае

$$r_1 = 1 + r_2,$$

получим

$$1 - A_2 = \frac{(r_2^3 - 1)(r_2^2 + 3r_2 + 3)}{(r_2 + 1)(r_2^4 + 2r_2^3 + r_2^2 + 2r_2 + 1)}.$$

Но эта величина отрицательна, так как здесь $r_2 < 1$.

Для точки L_3 можно аналогичным образом использовать уравнение (5.11). Впрочем, этот случай можно привести к предыдущему, если μ и r_2 заменить через $1-\mu$ и r_1 .

Итак, действительно, уравнение (8.8), рассматриваемое как квадратное относительно λ^2 , имеет один положительный корень и один отрицательный. Таким образом, корни этого уравнения для каждого из центров либрации L_1, L_2, L_3 имеют вид $\pm\lambda', \pm\lambda''i$, где λ' и λ'' — вещественные величины.

Вещественным корням $\pm\lambda'$ соответствует частное решение

$$\xi = H \cos(\lambda' t + \beta); \quad \eta = qH \sin(\lambda' t + \beta), \quad (8.10)$$

содержащие две произвольные постоянные H и β . Величина q находится из уравнений (8.7).

Исключение t из равенств (8.10) дает

$$q^2 \xi^2 + \eta^2 = q^2 H^2.$$

Таким образом, движения, соответствующие частным решениям (8.10), происходят по эллипсам различных размеров, но одной и той же формы. Легко убедиться, что для всех трех коллинеарных центров либрации $q > 1$, вследствие чего эксцентриситет каждого эллипса равен $e = \sqrt{1 - q^{-2}}$, а большая ось перпендикулярна к оси абсцисс, т. е. к прямой, на которой расположены конечные массы.

Прилагаемая таблица дает отношение осей q и эксцентриситет e рассматриваемых эллипсов для трех значений отношения масс тел S и J ; третье из этих значений соответствует системе Земля — Солнце. Из этой таблицы видно, как мало зависит форма бесконечно малых орбит (8.10) от отношения масс.

Наличие у характеристического уравнения (8.8) мнимых корней показывает, что все коллинеарные центры либрации являются неустойчивыми положениями относительного равновесия. В частности, бесконечно малые периодические орбиты (8.10) неустойчивы.

Форма бесконечно малых эллиптических орбит вокруг коллинеарных центров либрации

		L_1		L_2		L_3	
m_2/m_1	μ	q	e	q	e	q	e
1	0,5	4,387	0,974	2,221	0,893	2,221	0,893
0,1	0,090909	3,988	0,968	2,659	0,929	2,015	0,869
1 : 330000	0,000003	3,227	0,951	3,187	0,951	2,000	0,867

Дальнейшие сведения о движении вблизи коллинеарных центров либрации можно найти у Шарлье [1907]. Доказано существование в области этих центров периодических орбит конечного размера [Мультон, 1920].

§ 9. Движение вблизи тригональных центров либрации

Обратимся теперь к изучению движения в области тригональных центров либрации L_4 и L_5 , положение которых дается формулами (§ 5):

$$a_h = \frac{1}{2} - \mu; \quad b_h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_h = 0,$$

где $h = 4, 5$.

Уравнения движения (8.4) в этом случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= R\xi + S\eta; & \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= S\xi + T\eta, \\ \dot{\xi} &= -\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где

$$R = \frac{3}{4}; \quad S = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu); \quad T = \frac{9}{4}.$$

Общий интеграл последнего из уравнений (9.1)

$$\zeta = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, показывает, что тело P совершает периодические колебания с периодом 2π относительно плоскости xy . Период этого колебания совпадает с периодом обращения конечных масс S и J вокруг центра инерции.

Если положить

$$F = R\xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2,$$

то первым двум из уравнений (9.1) можно придать следующую форму:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{1}{2}F_{\xi}; \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{1}{2}F_{\eta}. \quad (9.2)$$

Отсюда сразу вытекает наличие первого интеграла

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = F - C.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности, кривые нулевой скорости являются конические сечения

$$R\xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2 = C \quad (9.3)$$

с центром в точке либрации.

Приведем уравнение (9.3) к каноническому виду

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 = C.$$

Для этого нужно, как известно, повернуть координатные оси на угол θ , определяемый формулой

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2S}{R-T} = \mp \sqrt{3} (1 - 2\mu).$$

Новые координаты выразятся при этом через старые формулами

$$\xi_1 = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta; \quad \eta_1 = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta,$$

а коэффициенты A и B найдутся как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} R - \omega & S \\ S & T - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

или, в развернутом виде,

$$\omega^2 - 3\omega + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \quad (9.4)$$

В новых координатах уравнения (9.2) будут иметь более простую форму:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 - 2\dot{\eta}_1 &= \frac{1}{2}F_{\xi_1} = A\xi_1, \\ \ddot{\eta}_1 + 2\dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2}F_{\eta_1} = B\eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Если решение этих уравнений искать в форме

$$\xi_1 = H \cos(\lambda t + \beta); \quad \eta_1 = qH \sin(\lambda t + \beta),$$

то для нахождения входящих сюда параметров будем иметь соотношения

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 + A + 2\lambda q &= 0, \\ 2\lambda + (\lambda^2 + B)q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Таким образом, частота λ определяется уравнением

$$\lambda^4 + \lambda^2(A + B - 4) + AB = 0,$$

которое на основании (9.4) можно написать так:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \quad (9.7)$$

Если корни этого уравнения обозначить через $\pm\lambda'$ и $\pm\lambda''$, то соответствующие частные решения уравнений (9.5) будут

$$\xi_1 = H' \cos(\lambda' t + \beta'); \quad \eta_1 = q' H' \sin(\lambda' t + \beta'), \quad (9.8)$$

$$\xi_1 = H'' \cos(\lambda'' t + \beta''); \quad \eta_1 = q'' H'' \sin(\lambda'' t + \beta''). \quad (9.9)$$

Здесь H' , β' , H'' , β'' являются произвольными постоянными, а q' и q'' определяются уравнениями (9.6).

Таким образом, всякое движение тела P , достаточно близкое к точкам либрации L_4 и L_5 , складывается из движений (9.8) и (9.9). Характер этого движения определяется характером корней уравнения (9.7), т. е. величин

$$\lambda' = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{M} \right]^{1/2}; \quad \lambda'' = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{M} \right]^{1/2},$$

где

$$M = 1 - 27\mu(1 - \mu).$$

Величина M обращается в нуль для $\mu = \mu_0$, где

$$\mu_0 = \frac{1}{18} (9 - \sqrt{69}) = 0,038520896 \dots$$

и для $\mu = 1 - \mu_0$.

Таким образом, в интервалах $(0, \mu_0)$ и $(1 - \mu_0, 1)$ корни уравнения (9.7) вещественны, а потому движение, определяемое формулами (9.8) и (9.9), устойчиво.

Если же $\mu_0 < \mu < 1 - \mu_0$, то λ' и λ'' являются комплексными числами и движение неустойчиво. Если, наконец, $\mu = \mu_0$ или $\mu = 1 - \mu_0$, то $\lambda' = \lambda''$. В этом случае, наряду с движением по эллипсу, даваемым формулами (9.8) или (9.9), уравнения (9.5)

будут иметь еще частное решение

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= K(t - t_0) \sin \frac{t - t_0}{\sqrt{2}}, \\ \eta_1 &= K(\sqrt{2} - 1) \left[(t - t_0) \cos \frac{t - t_0}{\sqrt{2}} + \sin \frac{t - t_0}{\sqrt{2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

содержащее произвольные постоянные K и t_0 . Таким образом, при $\mu = \mu_0$ и при $\mu = 1 - \mu_0$ движение также неустойчиво.

Прилагаемая таблица содержит величины, характеризующие те два эллиптические движения (9.8) и (9.9), из которых складывается всякое движение в области центров либрации L_4 и L_5 , если $0 \leq \mu < \mu_0$. При $\mu = \mu_0$ происходит слияние этих двух эллиптических движений в одно и появление неперидического движения (9.10).

Из таблицы видно, что чем меньше μ , тем более точно большие оси рассматриваемых эллипсов направлены по касательной к окружности, описываемой телом J вокруг S .

Параметры, характеризующие движение в области центров либрации L_4 и L_5

μ	$\mp \theta$	λ'	$-q'$	λ''	$-q''$
0,000	30°,000	1,00000	0,50000	0,00000	0,00000
0,004	29,900	0,98607	0,49760	0,16630	0,11018
0,008	29,799	0,97119	0,49485	0,23831	0,15686
0,012	29,697	0,95513	0,49165	0,29618	0,19353
0,016	29,593	0,93761	0,48793	0,34769	0,22542
0,020	29,489	0,91819	0,48348	0,39614	0,25458
0,024	29,382	0,89618	0,47804	0,44370	0,28233
0,028	29,275	0,87033	0,47109	0,49247	0,30973
0,032	29,166	0,83801	0,46160	0,54565	0,33825
0,036	29,056	0,79088	0,44616	0,61197	0,37152
μ_0	28,986	0,70711	0,41421	0,70711	0,41421

Дальнейшие сведения относительно бесконечно малых орбит вблизи тригональных центров либрации можно найти в книгах, указанных в конце предыдущего параграфа, а также в статье Пламмера [1932]. Периодические орбиты конечного размера, охватывающие эти центры, изучались Мультином [1920] при помощи метода малого параметра, а затем Ю. А. Рябовым [1952], использовавшим метод Ляпунова. Эти методы позволили доказать существование семейств периодических орбит.

Для нахождения изолированных периодических орбит с успехом использовалось и численное интегрирование (см. § 16).

§ 10. Движение вблизи конечных масс

Точки S и J , в которых находятся конечные массы, являются особыми точками функции Ω , фигурирующей в уравнениях (8.2). Изучение движения бесконечно малой массы P вблизи S и J является поэтому гораздо более сложной задачей, нежели изучение ее движения вблизи центров либрации.

Мы ограничимся рассмотрением лишь одного специального случая этой задачи, имеющего непосредственное применение при изучении движения спутников планет.

Массы тел S (Солнце) и J (планета) обозначим, как и раньше, соответственно через m_1 и m_2 . Расстояние SJ обозначим через a . За начало координатной системы примем теперь не барицентр системы, а точку J . Прямая JS , служащая осью абсцисс, будет вращаться в плоскости Jxy с постоянной угловой скоростью n' , определяемой равенством

$$n'^2 a^3 = k^2 (m_1 + m_2). \quad (10.1)$$

Уравнения движения бесконечно малой массы P , с координатами x, y, z , имеют вид (ср. § 3):

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} = \Omega_x; \quad \ddot{y} + 2n'\dot{x} = \Omega_y; \quad \ddot{z} = \Omega_z, \quad (10.2)$$

где

$$\Omega = k^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) + \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2), \quad (10.3)$$

причем

$$r_1 = (x - a)^2 + y^2 + z^2; \quad r_2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

В рассматриваемом нами случае $r_2 \ll a$, поэтому в разложении

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{r_2^2}{a^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{r_2^2}{a^3} + \frac{3}{2} \frac{x^2}{a^3} + \dots$$

мы можем ограничиться четырьмя написанными членами.

Таким образом, учитывая (10.1), окончательно будем иметь

$$\Omega = n'^2 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) + \frac{k^2 m_2}{r_2}. \quad (10.4)$$

Переход от (10.3) к (10.4) есть не что иное, как переход к пределу, когда величины a и m_1 , связанные соотношением (10.1) стремятся к бесконечности.

Подстановка выражения (10.4) в уравнения (10.2) дает

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} - 3n'^2 x + k^2 m_2 x r_2^{-3} &= 0, \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} + k^2 m_2 y r_2^{-3} &= 0, \\ \ddot{z} + n'^2 z + k^2 m_2 z r_2^{-3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Чтобы стандартизировать период обращения спутника, целесообразно ввести в эти уравнения параметр n , полагая

$$\tau = (n - n')(t - t_0).$$

Тогда уравнения движения примут следующую окончательную форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} - 3m^2x + \kappa x r^{-3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \kappa y r^{-3} &= 0, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + m^2z + \kappa z r^{-3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

где

$$m = \frac{n'}{n - n'}; \quad \kappa = \frac{k^2 m_2}{(n - n')^2}; \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Механическую задачу, соответствующую уравнениям (10.5) или (10.6), мы будем называть задачей Хилла. Решения этой задачи, являющейся предельным случаем (иначе говоря, случаем вырождения) ограниченной задачи трех тел, дают промежуточные орбиты, т. е. такие орбиты, в которых уже учтена какая-то часть возмущающего действия Солнца на спутник. Такого рода орбиты во многих случаях являются более выгодным исходным приближением при изучении движения спутника, нежели кеплеров эллипс. Частное решение уравнений (10.6), найденное Хиллом [1878], явилось основой наиболее совершенной теории движения Луны. Это решение мы рассмотрим подробно в следующих параграфах.

Легко видеть, что для уравнений (10.5) интеграл Якоби имеет вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n'^2(3x^2 - z^2) + 2k^2 m_2 r^{-1} - C.$$

Таким образом, поверхность нулевой скорости дается здесь уравнением

$$n'^2(3x^2 - z^2) + 2k^2 m_2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = C.$$

Хагихара [1952] использовал это уравнение (в случае плоской задачи Хилла, когда $z=0$) для изучения устойчивости (по Хиллу) всех спутников солнечной системы.

Примечание. Если масса спутника P составляет заметную долю массы планеты J , то под m_2 следует понимать сумму масс планеты и спутника. Так поступают, например, при изучении движения Луны.

§ 11. Преобразование уравнений

Чтобы облегчить решение уравнений (10.6) способом неопределенных коэффициентов, Хилл подверг эти уравнения следующим преобразованиям.

Введем, прежде всего, вместо неизвестных x и y комплексные величины

$$u = x + yi, \quad s = x - yi.$$

Это позволит заменить первые два из уравнений (10.6) такими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2} + 2mi \frac{du}{d\tau} + \frac{\kappa u}{r^3} - \frac{3}{2} m^2 (u + s) &= 0, \\ \frac{d^2s}{d\tau^2} - 2mi \frac{ds}{d\tau} + \frac{\kappa s}{r^3} - \frac{3}{2} m^2 (u + s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Введем, далее, новую независимую переменную

$$\zeta = \exp(\tau i).$$

Так как

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} \frac{d}{d\zeta} = i\zeta \frac{d}{d\zeta},$$

то, пользуясь оператором

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta},$$

мы получим уравнения (10.6) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} D^2u + 2mDu + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \kappa ur^{-3} &= 0, \\ D^2s - 2mDs + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \kappa sr^{-3} &= 0, \\ D^2z - m^2z - \kappa zr^{-3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где $r^2 = us + z^2$.

Для уравнений (10.6) интеграл Якоби имеет такой вид:

$$\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = m^2 (3x^2 - z^2) + \frac{2\kappa}{r} - C,$$

или, после введения новых переменных,

$$Du \cdot Ds + (Dz)^2 + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 - m^2 z^2 + \frac{2\kappa}{r} = C. \quad (11.3)$$

Это соотношение позволяет дать для случая плоской задачи Хилла уравнения, не содержащие членов с r^{-3} , весьма затрудняющих применение способа неопределенных коэффициентов.

В самом деле, если равенства (11.2) умножить по порядку на s , u , $2z$ и почленно сложить, то получим

$$sD^2u + uD^2s + 2zD^2z - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{3}{2}m^2(u+s)^2 - 2m^2z^2 - \frac{2\kappa}{r} = 0.$$

Почленное прибавление к этому уравнению соотношения (11.3) дает первое из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D^2(us + z^2) - Du \cdot Ds - (Dz)^2 - 2m(uDs - sDu) + \\ + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 - 3m^2z^2 = C, \\ D(uDs - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0. \end{aligned} \right\} (11.4)$$

Второе из этих уравнений получается, если уравнения (11.2) умножить соответственно на $-s$, $+u$, 0 и сложить.

В случае плоской задачи Хилла, когда $z=0$, уравнения (11.4) позволяют найти неизвестные u и s . Полученное решение будет заключать постоянную C , не фигурирующую в исходных уравнениях (11.2). Но если это решение подставить в интеграл (11.3), принимающий здесь вид

$$Du \cdot Ds + \frac{3}{4}m^2(u+s)^2 + \frac{2\kappa}{\sqrt{us}} = C, \quad (11.5)$$

то получим соотношение между κ и C , позволяющее исключить C .

§ 12. Периодические орбиты Хилла

В случае плоской задачи уравнения (10.6) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \kappa x r^{-3} = 3m^2 x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \kappa y r^{-3} = 0, \end{aligned} \right\} (12.1)$$

где

$$\tau = (n - n')(t - t_0); \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Каждое периодическое решение этих уравнений, имеющее период 2π , дает периодическое движение спутника (относительно употребляемой нами вращающейся системы осей) с периодом $2\pi/(n-n')$. Иначе говоря, среднее синодическое движение спутника, соответствующее такому решению, будет равно $n-n'$. А так как n' есть среднее сидерическое планетоцентрическое движение Солнца, то введенная нами (§ 10) постоянная n есть среднее сидерическое (планетоцентрическое) движение спутника.

Следуя Хиллу, будем искать периодические, с периодом 2π , решения системы (12.1) в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos \tau + A_3 \cos 3\tau + A_5 \cos 5\tau + \dots, \\ y &= A'_1 \sin \tau + A'_3 \sin 3\tau + A'_5 \sin 5\tau + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Соответствующие им траектории симметричны относительно каждой из осей координат и пересекают обе оси под прямым углом.

После перехода к переменным u , s и ζ равенства (12.2) дают

$$u = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (A_{2k+1} + A'_{2k+1}) \zeta^{2k+1} + \frac{1}{2} (A_{2k+1} - A'_{2k+1}) \zeta^{-2k-1} \right\},$$

$$s = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (A_{2k+1} - A'_{2k+1}) \zeta^{2k+1} + \frac{1}{2} (A_{2k+1} + A'_{2k+1}) \zeta^{-2k-1} \right\}.$$

Положив

$$A_{2k+1} = a(a_k + a_{-k-1}); \quad A'_{2k+1} = a(a_k - a_{-k-1}),$$

будем иметь

$$u = a \sum a_k \zeta^{2k+1}; \quad s = a \sum a_{-k-1} \zeta^{2k+1}, \quad (12.3)$$

где индекс k принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значение общего множителя a мы определим условием $a_0 = 1$.

Для нахождения u и s уравнения (11.4) дают

$$\left. \begin{aligned} D^2(us) - Du \cdot Ds - 2m(uDs - sDu) + \frac{9}{4} m^2 (u+s)^2 &= C, \\ D(uDs - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{4} m^2 (u^2 - s^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Чтобы облегчить подстановку разложений (12.3) в соотношения (12.4), вычислим предварительно входящие в них отдельные выражения. Легко видеть, что

$$us = a^2 \sum_k a_k \zeta^{2k+1} \sum_h a_{-h-1} \zeta^{2h+1} = a^2 \sum_i \sum_k a_k a_{k-i} \zeta^{2i}.$$

Индексы как здесь, так и в дальнейшем принимают все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким же путем

$$u^2 = a^2 \sum_i \sum_k a_k a_{i-k-1} \zeta^{2i}; \quad s^2 = a^2 \sum_i \sum_k a_{-k-1} a_{k-i} \zeta^{2i}.$$

Равенства

$$Du = a \sum_k (2k+1) a_k \zeta^{2k+1}; \quad Ds = a \sum_k (2k+1) a_{-k-1} \zeta^{2k+1}$$

дают

$$Du \cdot Ds = a^2 \sum_i \sum_k (2k+1)(2i-2k-1) a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

$$uDs - sDu = 2a^2 \sum_i \sum_k (i-2k-1) a_k a_{k-i} \zeta^{2i},$$

наконец,

$$D^2(us) = a^2 \sum_i \sum_k 4i^2 a_k a_{k-i} \zeta^{2i}.$$

Подставив эти выражения в уравнения (12.4) и приравняв коэффициенты при ζ^{2i} , получим такие зависимости между коэффициентами рядов (12.3):

$$\left. \begin{aligned} \sum_k \left[4i^2 + (2k+1)(2k-2i+1) + 4(2k-i+1)m + \frac{9}{2}m^2 \right] \times \\ \times a_k a_{k-i} + \frac{9}{4}m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} + a_{-i-k-1}) = 0, \\ 4i \sum_k (2k-i+1+m) a_k a_{k-i} - \\ - \frac{3}{2}m^2 \sum_k a_k (a_{i-k-1} - a_{-i-k-1}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Заметим, что при $i=0$ первое из этих соотношений должно быть заменено таким:

$$\sum_k \left[(2k+1)^2 + 4(2k+1)m + \frac{9}{2}m^2 \right] a_k^2 + \frac{9}{2}m^2 \sum_k a_k a_{-k-1} = a^{-2}C, \quad (12.6)$$

тогда как второе обращается в тождество.

Задача нахождения периодического решения вида (12.2) приводится, таким образом, к нахождению коэффициентов a_k из уравнений (12.5).

§ 13. Вычисление коэффициентов

Для каждого неравного нулю значения индекса i уравнения (12.5), определяющие коэффициенты, могут быть заменены одним уравнением.

В самом деле, если эти уравнения почленно сложить, помножив их предварительно сначала на $+2$ и $+3$, а затем на $+2$

и -3 , то получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_k [8k^2 - 8(4i-1)k + 20i^2 - 16i + 2 + \\ + 4(4k-5i+2)m + 9m^2] a_k a_{k-i} + 9m^2 \sum_k a_k a_{i-k-1} = 0, \\ \sum_k [8k^2 + 8(2i+1)k - 4i^2 + 8i + 2 + \\ + 4(4k+i+2)m + 9m^2] a_k a_{k-i} + 9m^2 \sum_k a_k a_{i-k-1} = 0. \end{aligned} \right\} (13.1)$$

Легко видеть, что каждое из этих двух уравнений является следствием другого. Так, например, если в первом заменить k и i через $k-i$ и $-i$, то получим второе.

Покажем, следуя Хиллу, что при достаточно малых значениях m уравнения (13.1) имеют решение, в котором коэффициент a_i есть малая величина порядка $|m|^{2i}$.

Начнем с выделения в уравнениях (13.1) членов, содержащих $a_0 a_{-i}$ и $a_0 a_i$. В первом уравнении эти члены, получающиеся при $k=0$ и $k=i$, таковы:

$$[20i^2 - 16i + 2 - 4(5i-2)m + 9m^2] a_0 a_{-i} + \\ + [-4i^2 - 8i + 2 - (4i-8)m + 9m^2] a_0 a_i,$$

а во втором —

$$[-4i^2 + 8i + 2 + (4i+8)m + 9m^2] a_0 a_{-i} + \\ + [20i^2 + 16i + 2 + 4(5i+2)m + 9m^2] a_0 a_i.$$

Чтобы исключить член с произведением $a_0 a_{-i}$, умножим первое из уравнений (13.1) на

$$-4i^2 + 8i + 2 + (4i+8)m + 9m^2,$$

второе на

$$-[20i^2 - 16i + 2 - 4(5i-2)m + 9m^2]$$

и сложим полученные равенства. Результат можно написать так:

$$\sum \{[i, k] a_k a_{k-i} + [i] a_k a_{i-k-1} + (i) a_k a_{-i-k-1}\} = 0, \quad (13.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [i, k] &= -\frac{k}{i} \frac{(4i-4)k + 4i^2 + 4i - 2 - 4(k-i+1)m + m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ [i] &= -\frac{3m^2}{16i^2} \frac{4i^2 - 8i - 2 - (4i+8)m - 9m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}, \\ (i) &= -\frac{3m^2}{16i^2} \frac{20i^2 - 16i + 2 - (20i-8)m + 9m^2}{8i^2 - 2 - 4m + m^2}. \end{aligned} \right\} (13.3)$$

Поскольку

$$[i, i] = -1; \quad [i, 0] = 0,$$

а величины $[i]$ и (i) — второго порядка относительно параметра m , форма (13.2), к которой мы привели уравнения (12.5), является наиболее удобной для нахождения коэффициентов a_i последовательными приближениями.

В первом приближении, сохраняя лишь члены самой низкой степени относительно m , будем иметь ($a_0 = 1$):

$$a_1 = [1] a_0 a_0,$$

$$a_{-1} = (-1) a_0 a_0,$$

$$a_2 = [2](a_0 a_1 + a_1 a_0) + [2, 1] a_1 a_{-1},$$

$$a_{-2} = (-2)(a_0 a_1 + a_1 a_0) + [-2, -1] a_1 a_{-1},$$

$$a_3 = [3](a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [3, 1] a_1 a_{-2} + [3, 2] a_2 a_{-1},$$

$$a_{-3} = (-3)(a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) + [-3, -1] a_{-1} a_2 + [-3, -2] a_{-2} a_1,$$

.....

Отсюда мы получим последовательно приближенные значения всех коэффициентов, причем для a_i получится величина порядка $|m|^{2i+1}$, имеющая ошибку по меньшей мере порядка $|m|^{2i+4}$.

Для второго приближения возьмем более точные соотношения:

$$a_1 = [1](a_0 a_0 + 2a_{-1} a_1) + (1)(a_{-1}^2 + 2a_0 a_{-2}) +$$

$$+ [1, -1] a_{-1} a_{-2} + [1, 2] a_2 a_1,$$

.....

В правые части подставляем (для тех коэффициентов, для которых еще не получено второе приближение) значения, найденные в первом приближении.

Второе приближение даст a_i с ошибкой по меньшей мере порядка $|m|^{2i+8}$.

При небольших значениях $|m|$ этот процесс позволяет очень просто вычислить коэффициенты a_i с любой степенью точности и, таким образом, получить периодическое решение (12.2) в форме быстро сходящегося ряда.

§ 14. Ряды Хилла

Чтобы получить общие выражения коэффициентов a_i в функции параметра m , заметим, что величины $[i, k]$, $[i]$, (i) , определяемые формулами (13.3), являются рациональными функциями m со знаменателями

$$8i^2 - 2 - 4m + m^2.$$

Отсюда следует, что в результате последовательных приближений a_i получится в форме двойного ряда вида

$$a_i = M_0 + \frac{M_1}{6-4m+m^2} + \frac{M_2}{(6-4m+m^2)^2} + \dots + \left. \begin{array}{l} + \frac{N_1}{30-4m+m^2} + \frac{N_2}{(30-4m+m^2)^2} + \dots + \\ + \dots \dots \dots \end{array} \right\} (14.1)$$

Легко видеть, что каждая из величин $M_0, M_1, \dots, N_1, N_2, \dots$ получится в форме двучлена вида

$$Am^h + Bm^{h+1}$$

с рациональными коэффициентами A и B .

Разложив члены ряда (14.1) по степеням m , Хилл получил следующие окончательные формулы [Хилл, 1878]:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{2^2 \cdot 3} m^4 + \frac{11}{2^2 \cdot 3^2} m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3} m^6 - \\ &\quad - \frac{1010521}{2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5} m^7 - \frac{18445871}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2} m^8 - \frac{2114557853}{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3} m^9 - \dots \\ a_{-1} &= -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{2^2 \cdot 3^2} m^4 - \frac{14}{3^3} m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4} m^6 + \\ &\quad + \frac{3574153}{2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5} m^7 + \frac{55218889}{2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^2} m^8 + \frac{13620153029}{2^{12} \cdot 3^7 \cdot 5^3} m^9 + \dots \\ a_2 &= \frac{25}{2^8} m^4 + \frac{803}{2^7 \cdot 3 \cdot 5} m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^6 + \frac{897599}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3} m^7 + \\ &\quad + \frac{237203647}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5^4} m^8 - \frac{44461407673}{2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7} m^9 + \dots \\ a_{-2} &= \frac{23}{2^7 \cdot 5} m^5 + \frac{299}{2^8 \cdot 3 \cdot 5^2} m^6 + \frac{56339}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3} m^7 + \\ &\quad + \frac{79400351}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5^4} m^8 + \frac{8085846833}{2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7} m^9 + \dots \\ a_3 &= \frac{833}{2^{12} \cdot 3} m^6 + \frac{27943}{2^{11} \cdot 5 \cdot 7} m^7 + \frac{12275527}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} m^8 + \\ &\quad + \frac{27409853579}{2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3} m^9 + \dots \\ a_{-3} &= \frac{1}{2^6 \cdot 3} m^6 + \frac{71}{2^7 \cdot 3 \cdot 5} m^7 + \frac{46951}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} m^8 + \frac{14086643}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2} m^9 + \dots \\ a_4 &= \frac{3537}{2^{16}} m^8 + \frac{111809667}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2} m^9 + \dots \\ a_{-4} &= \frac{23}{2^{11} \cdot 3} m^8 + \frac{1576553}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 7^2} m^9 + \dots \end{aligned}$$

Вопрос о сходимости этих рядов впервые был рассмотрен А. М. Ляпуновым в 1896 г. Он показал [Ляпунов, 1954], что ряды Хилла сходятся, если $|m| \leq 1/7$. Усовершенствование метода Ляпунова позволило Г. А. Мерману [1952] доказать сходимость рядов Хилла для $|m| \leq 0,18$. Другой метод изучения сходимости этих рядов был разработан в 1925 г. Винтнером, показавшим, что эти ряды сходятся при $|m| \leq 1/12$. Развитие идей Винтнера позволило М. С. Петровской дать общий метод для нахождения радиуса сходимости рядов, представляющих периодические решения, зависящие от малого параметра. Применение этого метода обнаружило, что ряды Хилла сходятся при $m \leq 0,21$ [Петровская, 1958].

Чтобы закончить нахождение коэффициентов периодического решения (12.2), нам остается найти общий множитель a , выделенный в разложениях (12.3). Для этого надо взять одно из неоднородных относительно u и s уравнений. Воспользуемся первым из уравнений (11.2). При $z=0$ это уравнение можно написать так:

$$(D^2 + 2mD + \frac{3}{2}m^2)u + \frac{3}{2}m^2s = \kappa u (us)^{-3/2}.$$

Подставив сюда разложения (12.3), получим

$$a \sum_k \left[(2k+1)^2 + 2m(2k+1) + \frac{3}{2}m^2 \right] a_k \zeta^{2k+1} + \\ + \frac{3}{2}m^2 a \sum_k a_k \zeta^{-2k-1} = \kappa u (us)^{-3/2}, \quad (14.2)$$

потому что

$$s = a \sum_k a_{-k-1} \zeta^{2k+1} = a \sum_k a_{k-1} \zeta^{-2k+1} = a \sum_k a_k \zeta^{-2k-1}.$$

При $\zeta=1$ соотношение (14.2) дает

$$\sum_k [(2k+1+m)^2 + 2m^2] a_k = \kappa a^{-3} \left(\sum_k a_k \right)^{-2}. \quad (14.3)$$

После подстановки найденных значений a_k окончательно получим

$$\kappa a^{-3} = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2 + \dots \quad (14.4)$$

В теории движения Луны этому соотношению придают другую форму. Так как

$$\kappa = \frac{k^2 m_2}{(n-n')^2}; \quad \frac{n}{n-n'} = 1 + m$$

(где за m_2 в этом случае берется сумма масс Земли и Луны), то

$$\kappa = k^2 m_2 (1+m)^2 n^{-2} = (1+m)^2 a^3, \quad (14.5)$$

где через a обозначена большая полуось лунной орбиты, определяемая соотношением

$$n^2 a^3 = k^2 m_2.$$

Подстановка (14.5) в соотношение (14.4) позволяет придать ему следующую форму:

$$a = a \left(1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \frac{45\,293}{41\,472} m^6 - \right. \\ \left. - \frac{8761}{6912} m^7 - \frac{4\,967\,441}{7\,962\,624} m^8 + \frac{14\,829\,273}{39\,813\,120} m^9 + \dots \right). \quad (14.6)$$

Таким образом, форма рассматриваемой нами периодической орбиты зависит только от одного параметра m . Но размеры этой орбиты зависят и от κ .

Выведенные в этом параграфе ряды менее удобны для вычисления a_i и a , нежели указанный в предыдущем параграфе способ численного нахождения a_i и вычисление a при помощи соотношения (14.3). Но доказательство сходимости этих рядов завершает доказательство существования периодических решений рассматриваемого вида. С другой стороны, эти ряды позволяют, по крайней мере для небольших значений m , изучить изменение формы орбиты в зависимости от изменения этого параметра [Хилл, 1878; Пуанкаре, 1892; Шарлье, 1907; Мультион, 1920].

Периодическая орбита Хилла часто называется вариационной орбитой (или вариационной кривой), что связано с той ролью, которую эта орбита играет в теории движения Луны. Приняв эту орбиту за первое приближение, мы тем самым учитываем одно из самых больших возмущений, производимых Солнцем в движении Луны, а именно — вариацию.

§ 15. Периодические решения задачи трех тел

Частные случаи задачи трех тел, открытые Эйлером и Лагранжем, были первым примером периодических решений этой задачи, т. е. таких решений, в которых все величины, определяющие взаимное расположение тел, являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом.

Но эти пять случаев являются элементарными, не открывающими дальнейших перспектив, поскольку в каждом из них все движения происходят по законам Кеплера. Рассмотренная нами в последних параграфах периодическая орбита Хилла была первым случаем принципиально нового типа движения в задаче трех тел, движения несравненно более сложного, нежели движения, встречающиеся в задаче двух тел, но тем не менее вполне известного для всех значений времени, поскольку оно является периодическим.

Открытый Хиллом случай периодического движения явился отправным пунктом весьма важных исследований Пуанкаре [1892], который создал общие методы для нахождения и изучения уже целых классов периодических, а также некоторых других, близких к ним, решений дифференциальных уравнений.

В основе этих исследований лежит способ нахождения периодических решений, получивший название метода Пуанкаре, или метода малого параметра. Идея этого способа заключается в следующем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n; \mu) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (15.1)$$

правые части которых являются аналитическими функциями независимой переменной t , неизвестных x_s и параметра μ . Допустим, далее, что X_s являются периодическими, с периодом T , функциями t и что уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n; 0), \quad (15.2)$$

получающиеся из (15.1) при $\mu=0$, имеют периодическое, с тем же периодом T , решение

$$x_s = \varphi_s(t), \quad (15.3)$$

так что

$$\varphi_s(t+T) = \varphi_s(t)$$

при всех значениях t .

Считая $|\mu|$ малой величиной, будем искать решение системы (15.1), определяемое начальными условиями

$$t=0, \quad x_s = \varphi_s(0) + \beta_s$$

и имеющее тот же период T . Такое решение

$$x_s = \Phi_s(t, \mu, \beta_1, \dots, \beta_n) \quad (15.4)$$

должно, следовательно, удовлетворять условиям

$$\Phi_s(T, \mu, \beta_1, \dots, \beta_n) - \Phi_s(0, \mu, \beta_1, \dots, \beta_n) = 0. \quad (15.5)$$

Пуанкаре показал, что уравнения (15.5) позволяют, по крайней мере в общем случае, найти β_s в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням μ и сходящихся для достаточно малых значений $|\mu|$. Этим доказывается существование такого периодического решения (15.4) уравнений (15.1), в котором x_s являются аналитическими функциями μ и которое при $\mu=0$ обращается в решение (15.3) системы (15.2).

По отношению к этому периодическому решению система (15.2) носит название порождающей, а решение (15.3) — порождающего решения.

Пуанкаре подробно исследовал условия, при которых периодическому решению порождающей системы соответствует периодическое решение основной системы. Он указал случаи, когда таких решений может быть несколько или даже бесчисленное множество. В дальнейшем теория периодических решений получила широкое развитие, как один из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений [Малкин, 1956].

Вернемся к задаче трех тел. Рассмотрим движение двух планет с массами m и m' вокруг Солнца, масса которого принята за единицу. Положив

$$m = \mu d, \quad m' = \mu d', \quad (15.6)$$

где d и d' надлежащим образом выбранные положительные числа, мы будем иметь в дифференциальных уравнениях движения параметр μ , который можно считать малым (порядка планетных масс).

При $\mu = 0$ эти уравнения будут состоять из двух независимых систем, каждая из которых даст кеплерово движение одной из планет. Рассмотрим сначала тот случай, когда эти невозмущенные движения планет происходят по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, и обозначим через n и n' средние движения планет ($n > n'$).

За начало счета времени t примем момент одного из соединений двух планет, так что при $t=0$ их долготы будут равны. Через промежуток времени

$$T = \frac{2\pi}{n - n'}$$

долготы изменятся соответственно на

$$\frac{2\pi n}{n - n'} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi n'}{n - n'},$$

вследствие чего разность долгот станет равной 2π . Таким образом, снова будет иметь место соединение, но вся система окажется повернутой на угол $n'T$ по сравнению со своим первоначальным положением. Поэтому если движение отнести к гелиоцентрической системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью n' , то движение системы при $\mu = 0$ будет периодическим с периодом T .

Пуанкаре доказал, что при достаточно малых значениях $|\mu|$ также будут существовать периодические решения с тем же самым периодом T . Он назвал их периодическими решениями первого типа (de la première sorte) задачи трех тел.

Когда одна из величин d и d' в равенствах (15.6) бесконечно мала по сравнению с другой, мы имеем плоскую ограниченную

задачу. Вычисление орбит первого типа в этом случае значительно упрощается. Оно еще более упрощается в том предельном случае, который был изучен Хиллом (§ 10). Периодическая орбита Хилла может рассматриваться, таким образом, как один из простейших примеров периодических орбит первого типа.

Все случаи периодического движения, получающегося из сочетания тех невозмущенных движений двух планет, которые имеют место при $\mu=0$, можно разделить на два класса. К первому отнесем те, в которых по истечении периода T вся система оказывается повернутой на некоторый угол, ко второму — те, в которых подобное вращение не имеет места, так что по истечении времени T не только взаимные расстояния, но и долготы планет принимают прежние значения.

Пример порождающего решения, относящегося к первому классу, мы только что имели. Обратимся теперь к случаям, когда берется порождающее решение второго класса.

Предположим, что движения планет происходят по неподвижным эллипсам, лежащим в одной плоскости.

Движение всей системы будет периодическим, если средние движения планет соизмеримы, так что

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q}, \quad (15.7)$$

где p и q целые, взаимно простые числа.

В самом деле, по истечении времени

$$T = \frac{2\pi p}{n} = \frac{2\pi q}{n'},$$

за которое одна планета совершит p оборотов, а другая — q оборотов, система вернется в свое первоначальное положение.

Чтобы доказать, что это периодическое решение, имеющее место при $\mu=0$, является порождающим для решения с тем же периодом T , существующим при значениях μ , отличных от нуля, пришлось на невозмущенные орбиты планет наложить, помимо (15.7), еще следующие дополнительные условия:

1° Долготы перигелиев π и π' должны удовлетворять одному из равенств:

$$\pi - \pi' = 0, \quad \pi - \pi' = 180^\circ. \quad (15.8)$$

2° Средние аномалии эпохи M_0 и M'_0 должны быть связаны соотношением

$$qM_0 - pM'_0 = k \cdot 180^\circ,$$

где k — целое число.

3° Эксцентриситеты e и e' должны удовлетворять некоторому уравнению вида

$$f(e, e', m, m', p, q) = 0. \quad (15.9)$$

Периодические решения, существующие при μ , не равном нулю, когда все эти условия выполняются, носят название периодических решений второго типа.

В частном случае, когда $m=0$, движения, соответствующие решениям второго типа, отличаются от невозмущенного движения лишь наличием векового члена в средней долготе, иначе говоря, изменением среднего движения, вычисленного по формуле

$$n = ka^{-3/2},$$

на некоторую постоянную величину.

Этот частный случай был подробно изучен в 1902 г. Хиллом [Хилл, 1907], исследовавшим уравнение (15.9) при различных значениях p и q . Фактическое построение периодических решений было выполнено Хиллом аналитическими методами для малых значений эксцентриситетов и численным интегрированием уравнений для больших значений.

Периодическими и решениями третьего типа Пуанкаре назвал те, которые порождаются такими невозмущенными эллиптическими движениями, у которых n и n' также удовлетворяют условию (15.7), но которые происходят в различных плоскостях. Пуанкаре показал, что при подчинении невозмущенных движений надлежащим дополнительным условиям и в этом случае возможны периодические решения с тем же периодом, как у порождающего решения. Периодические решения третьего типа были подробно изучены Цейпелем [1904].

Существенное дополнение к исследованиям Пуанкаре было сделано Шварцшильдом [1898; 1903]. Он нашел новые периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел, отличающиеся от периодических решений второго типа тем, что их периоды не совпадают с периодом T порождающего решения, а равны $T + \Delta T$, где ΔT — аналитическая функция μ , обращающаяся в нуль при $\mu=0$. Таким образом, в периодических решениях Шварцшильда линия апсид оскулирующего эллипса имеет вековое движение, тогда как в решениях Пуанкаре она может отклоняться от линии апсид возмущающей планеты лишь на величины порядка возмущающей массы m' . Это делает решения Шварцшильда более пригодными для изучения движения малых планет, нежели решения Пуанкаре.

Обстоятельное изложение теорий Пуанкаре и Шварцшильда можно найти, помимо уже указанных работ, в монографиях Шарлье [1907], Хаппеля [1941] и Зигеля [1956].

Решения Шварцшильда были обобщены на случай пространственной ограниченной задачи трех тел [Батраков, 1955а] и на случай общей задачи трех тел [Батраков, 1955б]. Найденные Ю. В. Батраковым решения, допускающие вековое движение ли-

нии узлов, заключают как частные случаи периодические решения Пуанкаре третьего типа.

Новый класс периодических решений для ограниченной задачи трех тел и для задачи Хилла был найден Г. А. Мерманом [1952]. Решения Мермана отличаются от рассмотренных выбором порождающего решения и практически заключают четыре произвольных параметра из шести входящих в общее решение. За такие параметры могут быть приняты начальные значения следующих элементов орбиты планетоида: большой полуоси, эксцентриситета, наклона плоскости орбиты, средней аномалии эпохи.

Вопрос о существовании предельно периодических решений плоской ограниченной задачи трех тел был окончательно выяснен Г. А. Мерманом. Его монография [Мерман, 1961] заключает подробный разбор всей истории этого вопроса*).

§ 16. Применения периодических решений

Первое периодическое решение задачи трех тел, не приводящееся к комбинации кеплеровых движений, было найдено в процессе решения конкретной астрономической задачи. Этим решением была, как мы видели, вариационная орбита Хилла, так хорошо воспроизводящая одно из наибольших возмущений в движении Луны. Именно поэтому использование вариационной орбиты в качестве промежуточной позволило создать столь совершенную теорию движения Луны.

Много работ было посвящено попыткам использовать аналогичным образом периодические решения Пуанкаре и Шварцшильда для изучения движения тех малых планет, средние

* За последние годы в теории квазипериодических решений (то есть представимых почти периодическими функциями с конечным числом частот) уравнений небесной механики был достигнут значительный прогресс, основанный на использовании замеченной Колмогоровым [Колмогоров, 1954] быстрой сходимости процесса последовательных канонических преобразований. В работе Арнольда [1963] доказано существование квазипериодических решений в общей задаче n тел для малых значений эксцентриситетов и наклонов; эти решения соответствуют эллиптическим решениям невозмущенной задачи.

Вероятность того, что наугад взятым начальным значениям полуосей, наклонов и эксцентриситетов отвечают квазипериодические решения Арнольда, стремится к единице, если возмущение стремится к нулю.

Оказалось возможным также доказать существование квазипериодических движений с неполным набором частот (меньшим числа степеней свободы) и, в частности, квазипериодических движений первого типа, для которых порождающими являются круговые движения с несонмеримыми периодами ([Мельников, 1965], [Jeffrys W. H., Moser I., 1966], [Красинский, 1968a]).

В работе [Красинского 1968b] разработан метод, дающий возможность изучать окрестность квазипериодических решений указанных выше типов и, в качестве следствия, показано, что в такой окрестности существует бесконечное множество других квазипериодических решений. (Прим. ред.)

движения которых близки к соизмеримости со средним движением Юпитера. Такие планеты испытывают весьма значительные возмущения, вычисление которых обычными методами сопряжено с исключительными трудностями. Использование соответствующих периодических решений открыло здесь новые возможности.

Вероятность того, что малая планета движется в точности по периодической орбите, равна, конечно, нулю. Но может случиться, что начальные условия движения планеты достаточно мало отличаются от тех, которые соответствуют периодическому решению.

В этом случае периодическое решение может быть принято за промежуточную орбиту, иначе говоря, за первое приближение. Для получения решения, представляющего движение планеты более точно, Пуанкаре указал следующий путь.

Пусть движение планеты определяется уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \dots, x_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (16.1)$$

а равенства

$$x_s = \varphi_s(t) \quad (16.2)$$

представляют рассматриваемое периодическое решение.

В таком случае движение планеты может быть представлено равенствами

$$x_s = \varphi_s(t) + \xi_s, \quad (16.3)$$

где ξ_s — малые величины.

Подставив (16.2) в (16.1) и ограничившись первыми степенями ξ_s , получим

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \xi_k. \quad (16.4)$$

Эти соотношения, дающие приближенные значения ξ_s , Пуанкаре назвал уравнениями в вариациях. В рассматриваемом нами случае, когда решение (16.2) периодическое, уравнения в вариациях представляют собой систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Если точность, даваемая уравнениями (16.4), недостаточна, то указанный прием можно повторить, приняв (16.3) за исходное решение. Другой путь повышения точности заключается в присоединении к правым частям уравнений (16.4) свободных членов, приближенно учитывающих влияние членов высших степеней.

Изложенный метод позволил построить аналитические теории, приближенно представляющие движение малых планет Гильды (соизмеримость 2:3) и Гекубы (соизмеримость 1:2) на значительных интервалах времени [Чеботарев, 1951; Пиус, 1961].

Исходные периодические орбиты (типа Шварцшильда) были получены при помощи численного интегрирования уравнений движения. Таким путем гораздо легче найти периодические решения с нужной точностью, нежели аналитическими методами, развитыми Пуанкаре и Шварцшильдом. Для интервалов времени, не превышающих нескольких десятков лет, оказалось возможным без существенного ущерба для точности заменить в уравнениях в вариациях периодические коэффициенты их средними значениями. В этом случае нахождение вариаций ξ_s , определяемых системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, выполняется совсем просто.

В качестве основы для построения точных теорий движения планет периодические решения задачи трех тел использованы в работе В. А. Брумберга [1966].

§ 17. Финальные движения в задаче трех тел

Классификация движений, имеющих место в задаче трех тел, представляет весьма сложную проблему, изучение которой еще только едва начинается. Некоторая законченность была достигнута лишь в отношении так называемых финальных движений и т. е. тех предельных видов, к которым движения стремятся при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

Работы Шази (J. Chazy), создавшего в 1922—1932 гг. основы теории финальных движений, показали, что каждое такое движение (продолжающееся до бесконечности, иначе говоря, не заканчивающееся тройным соударением) необходимо принадлежит к одному из следующих семи видов.

I. *Движения гиперболические*, в которых все три расстояния между телами становятся бесконечно большими величинами первого порядка относительно времени.

В этом случае каждая из шести координат, определяющих относительное положение трех тел, может быть представлена (для достаточно больших значений $|t|$) в форме

$$ct + c' \ln t + c_0 + P\left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}\right), \quad (17.1)$$

где c, c', c_0 — постоянные величины, а через $P(x, y)$ обозначена функция, голоморфная в точке $(0, 0)$.

II. *Движения гиперболо-параболические*, в которых два из расстояний между телами суть бесконечно большие величины первого порядка, а третье расстояние есть величина порядка $2/3$.

В этом случае координаты одного из тел относительно одного из двух других представляются рядами вида

$$c_1 t^{1/3} + c_2 t^{2/3} + t^{2/3} P\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\ln t}{t}\right), \quad (17.2)$$

тогда как координаты третьего тела относительно центра инерции первых двух представляются выражениями вида (17.1).

III. *Движения гиперболо-эллиптические*, в которых два из расстояний между телами суть бесконечно большие величины первого порядка, тогда как третье расстояние остается ограниченным.

IV. *Движения параболо-параболические*, в которых все три расстояния при достаточно больших значениях $|t|$ имеют вид (17.2).

V. *Движения параболо-эллиптические*, в которых одно из расстояний между телами остается конечным, а два другие становятся бесконечно большими вида (17.2).

VI. *Движения ограниченные*, когда все три расстояния между телами имеют верхнюю границу.

VII. *Движения осциллирующие*, в которых для сколь угодно отдаленных моментов времени три расстояния между телами ограничены, а для других также сколь угодно отдаленных моментов два из этих расстояний произвольно велики.

Обозначим, как и раньше (§ 6, гл. XIV) через h_0 барицентрическую постоянную энергии.

Шази показал, что:

1° если $h_0 < 0$, то финальное движение может быть только вида III, V, VI или VII.

2° если $h_0 = 0$, то финальное движение будет, вообще говоря, вида III, но при надлежащих дополнительных ограничениях может принадлежать к виду IV.

3° если $h_0 > 0$, то движение принадлежит к одному из видов I, II или III.

В первых пяти из указанных видов движений задача трех тел распадается в пределе на две задачи двух тел, чем существенно упрощается изучение движения. Примеры движений этих пяти видов могут быть легко построены. Примерами движений вида VI могут служить периодические решения задачи трех тел. Вопрос о существовании движений вида VII в работах Шази остался открытым. Только недавно удалось доказать их существование [Ситников, 1960].

До сих пор мы рассматривали отдельно движения при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$. Вопрос о возможных сочетаниях в одной траектории различных видов движения для этих интервалов времени, только намеченный в работах Шази, за последние десять лет стал предметом многочисленных исследований. Это явилось неожиданным результатом работ совсем в иной области науки, а именно, результатом попыток О. Ю. Шмидта сделать явления захвата при тесных сближениях трех космических тел основанием космогонической гипотезы, объясняющей и происхождение двойных звезд и происхождение планет (из захваченной Солн-

цем части космического пылевого облака). Вскоре было замечено, что такого рода попытки находятся в противоречии с результатами Шази о невозможности захвата, т. е. превращения движения гиперболического при $t \rightarrow -\infty$ в движение гиперболо-эллиптическое при $t \rightarrow +\infty$. Чтобы опровергнуть результаты Шази, О. Ю. Шмидт построил в 1947 г. при помощи численного интегрирования пример движения, в котором имеет место захват. Однако этот пример не был вполне убедителен: характер движения для $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ определялся в нем, так сказать, интуитивно, поскольку численное интегрирование нельзя продолжать до бесконечности. Необходимое дополнение было сделано в 1948 г. Г. Ф. Хильми, который дал критерии, позволяющие установить гиперболичность движения на одном конце интервала интегрирования и гиперболо-эллиптичность — на другом. Значительно более сильные критерии были найдены в 1953 и 1955 гг. Г. А. Мерманом. Они позволили не только умножить число примеров захвата, но и доказать, что вероятность захвата больше нуля. В работе Г. А. Мермана и Н. Г. Кочиной для частного случая плоской ограниченной задачи была выяснена (в первом приближении) та область фазового пространства, в которой захват имеет место.

Были даны также доказательства возможности (и положительной вероятности) захвата, не связанные с вычислением траекторий [Ситников, 1953; Алексеев, 1956; Сибахара, 1961а].

Так как дифференциальные уравнения движения не меняются при замене t на $-t$, то из каждой траектории захвата можно получить траекторию разрыва, т. е. такую, которая является гиперболо-эллиптической при $t \rightarrow -\infty$ и гиперболической при $t \rightarrow +\infty$.

Тщательный анализ работ Шази привел к заключению, что данное им доказательство невозможности захвата при $h_0 < 0$ (точнее, невозможности для одной и той же траектории быть ограниченной или осциллирующей при $t \rightarrow -\infty$ и быть гиперболо-эллиптической при $t \rightarrow +\infty$), по существу, правильно, хотя и нуждается в некоторых дополнениях. Что же касается опровергнутого доказательства невозможности захвата при $h_0 \geq 0$ (т. е. невозможности для гиперболического движения при $t \rightarrow -\infty$ перейти в гиперболо-эллиптическое при $t \rightarrow +\infty$), оказалось, что недосмотр Шази заключался в представлении этих двух движений одними и теми же рядами, тогда как ряды, служащие для представления каждого из этих движений, сходятся только для достаточно больших значений t и не могут служить для изучения свойств всей траектории [Мерман, 1954].

Удалось также доказать возможность обмена, т. е. существование траекторий, являющихся гиперболо-эллиптическими как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$, но с разными парами тел,

находящихся на конечном расстоянии [Алексеев, 1956; Сибахара, 1961b].

Наконец, оказалось возможным доказать существование осциллирующих траекторий, вдоль которых два взаимных расстояния могут становиться сколь угодно большими как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$, хотя и не стремятся к бесконечности [Ситников, 1960].

При переходе от задачи трех тел к задаче n тел обобщением вопросов захвата и разрыва являются вопросы образования и рассеивания устойчивых подсистем, состоящих из m тел ($m < n$). Такого рода вопросы изучались Г. Ф. Хильми [1951; 1958]*).

*) Изложение современного состояния вопроса об устойчивости движения в задаче трех тел можно найти в монографии Хагихара [1957]. (Прим. ред.)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Теорема Пуанкаре

В теории возмущенного движения часто приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений, содержащих, кроме независимой переменной t и неизвестных x, y, \dots , еще параметр μ , значения которого можно считать близкими к нулю.

Ограничившись для упрощения письма случаем двух неизвестных, такую систему мы можем взять в форме

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = G(t, x, y, \mu). \quad (1.1)$$

Правые части этих уравнений будем считать голоморфными функциями x, y, μ и непрерывными функциями t в некотором замкнутом интервале $[0, T]$.

Пусть при $\mu=0$ система (1.1) имеет решение $x_0(t), y_0(t)$, определяемое начальными условиями $t=0, x_0=\alpha, y_0=\beta$, причем это решение непрерывно в интервале $[0, T]$. Во многих задачах приходится рассматривать решение $x(t), y(t)$ системы (1.1), определяемое теми же начальными условиями, но для значений μ , отличных от нуля.

Пуанкаре [1892] доказал, что при указанных предположениях такое решение существует и может быть представлено рядами

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots, \\ y(t) &= y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

сходящимися при достаточно малых значениях $|\mu|$, каково бы ни было $t \in [0, T]$. Коэффициенты рядов (1.2) должны, очевидно, удовлетворять условиям

$$x_n(0) = 0, \quad y_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

Введем в уравнения (1.1) новые неизвестные:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - x_0 = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \\ y' &= y - y_0 = \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Это даст уравнения

$$\frac{dx'}{dt} = f(t, x', y', \mu), \quad \frac{dy'}{dt} = g(t, x', y', \mu), \quad (1.5)$$

правые части которых являются голоморфными функциями x' , y' , μ в области точки $(0, 0, 0)$, каким бы ни было $t \in [0, T]$, причем

$$f(t, 0, 0, 0) = 0, \quad g(t, 0, 0, 0) = 0.$$

Хорошо известные свойства аналитических функций позволяют утверждать, что при каждом значении t существуют такие положительные числа m , a , b , c (вообще говоря, зависящие от t), что функция

$$h = \frac{m}{(1 - ax')(1 - by')(1 - c\mu)} - m$$

является мажорантой правых частей уравнений (1.5) по аргументам x' , y' , μ . Это значит, что в точке $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$ при избранном значении t имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^{l+k+l} f}{\partial x'^l \partial y'^k \partial \mu^l} \right| \leq \frac{\partial^{l+k+l} h}{\partial x'^l \partial y'^k \partial \mu^l}, \quad \left| \frac{\partial^{l+k+l} g}{\partial x'^l \partial y'^k \partial \mu^l} \right| \leq \frac{\partial^{l+k+l} h}{\partial x'^l \partial y'^k \partial \mu^l}$$

для всех неотрицательных значений l , k , l .

Совокупность этих неравенств запишем символически так:

$$f \ll h, \quad g \ll h, \quad (\arg \cdot x', y', \mu).$$

Наибольшее из значений, принимаемых m для $t \in [0, T]$, обозначим через M , а наибольшее из значений a , b , c — через A . Легко убедиться, что функция

$$H(x', y', \mu) = MA(x' + y' + \mu) \frac{1 + A(x' + y' + \mu)}{1 - A(x' + y' + \mu)}$$

является мажорантой для h , а потому

$$f \ll H, \quad g \ll H, \quad (\arg \cdot x', y', \mu) \quad (1.6)$$

для всех $t \in [0, T]$.

Обратимся теперь к нахождению решений (1.4) уравнений (1.5), удовлетворяющих начальным условиям $t=0$, $x'=0$, $y'=0$.

Одновременно будем рассматривать решение мажорирующей системы

$$\frac{dX}{dt} = H(X, Y, \mu), \quad \frac{dY}{dt} = H(X, Y, \mu), \quad (1.7)$$

удовлетворяющее начальным условиям $t=0$, $X=0$, $Y=0$. Это решение можно представить, как будет дальше показано, ряда-

ми, аналогичными (1.4), а именно:

$$\left. \begin{aligned} X &= \mu X_1 + \mu^2 X_2 + \dots, \\ Y &= \mu Y_1 + \mu^2 Y_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Коэффициенты $X_1=Y_1$, $X_2=Y_2$, ... этих рядов равны нулю при $t=0$.

Подставим ряды (1.4) в уравнения (1.5) и разложим полученные выражения по степеням μ . Приравняв члены, имеющие множителем μ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x'} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y'} y_1 + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x'} x_1 + \frac{\partial g}{\partial y'} y_1 + \frac{\partial g}{\partial \mu}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

в правых частях которых положено $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$. Эти уравнения, совместно с начальными условиями $x_1(0)=0$, $y_1(0)=0$, позволяют найти функции $x_1(t)$, $y_1(t)$.

Для нахождения следующих коэффициентов $x_2(t)$, $y_2(t)$ будем иметь, приравняв члены, содержащие μ^2 , аналогичные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x'} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y'} y_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} x_1 y_1 + \dots, \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x'} x_2 + \frac{\partial g}{\partial y'} y_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} x_1^2 + \dots \end{aligned}$$

В правых частях этих уравнений должна быть сделана подстановка $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$, а для x_1 и y_1 взяты значения, полученные из уравнений (1.9).

Поступая таким образом дальше, мы найдем последовательно все коэффициенты x_n , y_n разложений (1.2). Так как, по условию,

$$x(0) = x_0(0) = \alpha, \quad y(0) = y_0(0) = \beta,$$

то начальные условия, фиксирующие эти коэффициенты, будут выражаться равенствами (1.3).

Для вычисления коэффициентов X_1 , Y_1 ; X_2 , Y_2 , ... рядов (1.8) мы можем применить тот же прием. Вместо уравнений (1.9) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial X} X_1 + \frac{\partial H}{\partial Y} Y_1 + \frac{\partial H}{\partial \mu}, \\ \frac{dY_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial X} X_1 + \frac{\partial H}{\partial Y} Y_1 + \frac{\partial H}{\partial \mu} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

и аналогичные начальные условия $X_1(0)=0$, $Y_1(0)=0$.

Сопоставляя (1.9) и (1.10) и учитывая (1.6), приходим к заключению, что для $t=0$ имеют место неравенства

$$\left| \frac{dx_1}{dt} \right| < \frac{dX_1}{dt}, \quad \left| \frac{dy_1}{dt} \right| < \frac{dY_1}{dt}. \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что при возрастании t в некотором интервале мы будем иметь

$$|x_1| < X_1, \quad |y_1| < Y_1. \quad (1.12)$$

Но из неравенств (1.12) и (1.6) будут снова вытекать неравенства (1.11), а значит, и (1.12), при дальнейшем увеличении t . Таким образом, неравенства (1.12) должны иметь место во всем интервале $[0, T]$. Точно так же убеждаемся в справедливости, для всего интервала $[0, T]$, неравенств

$$|x_n| < X_n, \quad |y_n| < Y_n.$$

Покажем теперь, выполнив решение уравнений (1.7) при помощи элементарных функций, что ряды (1.8) сходятся для достаточно малых значений μ . Положив

$$A(X + Y + \mu) = z,$$

что дает

$$X = Y = (z - A\mu)/2A, \quad (1.13)$$

мы можем заменить уравнения (1.7) таким:

$$\frac{dz}{dt} = 2MAz \frac{1+z}{1-z}.$$

Решение этого уравнения, соответствующее нашим начальным условиям, можно написать так:

$$\frac{z}{(1+z)^2} = \frac{A\mu\tau}{(1+A\mu)^2}, \quad (1.14)$$

где

$$\tau = \exp(2MA t).$$

Функция $z(\mu)$, определяемая равенством (1.14), очевидно, голоморфна в точке $\mu=0$ при любом положительном значении t , а потому разлагается, так же как и функции (1.13), в сходящийся ряд по целым положительным степеням μ .

Чтобы оценить величину радиуса сходимости, заменим уравнение (1.14) таким:

$$z = 1 - \frac{1}{2v} - \frac{1}{2v} \sqrt{1 - 4v},$$

где

$$v = A\mu\tau(1 + A\mu)^{-2}.$$

Отсюда ясно, что сходимость рассматриваемых рядов будет иметь место лишь при $v < 1/4$, иначе говоря, при значениях μ , не

превосходящих

$$\mu_1(t) = (2\tau - 1 - 2\sqrt{\tau^2 - \tau}) A^{-1} = A^{-1} \left(\frac{1}{4} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{8} \frac{1}{\tau^2} + \dots \right).$$

Так как эта функция монотонно убывает от $\mu_1(0)$ до $\mu_1(T)$, то ряды (1.8), а следовательно, и (1.2), будут сходиться при $\mu < \mu_1(T)$ для всех $t \in [0, T]$.

Теорема Пуанкаре о существовании решения, представимого рядами (1.2), полностью доказана. Заметим, что изложенное доказательство дает эффективный метод для получения рассматриваемого решения. Нужно прежде всего решить однородную систему, соответствующую линейным уравнениям (1.9), после чего функции $x_1(t)$, $y_1(t)$ найдутся при помощи квадратур. Нахождение $x_2(t)$, $y_2(t)$ и всех последующих коэффициентов ряда (1.2) потребует также лишь выполнения квадратур.

Однородная система, решение которой позволяет свести вычисление всех коэффициентов рядов (1.2) к квадратурам, т. е.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x'} \xi + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x'} \xi + \frac{\partial g}{\partial y'} \eta, \quad (1.15)$$

является, очевидно, уравнениями в вариациях (§ 16, гл. XV) для системы (1.5) по отношению к решению $x'=0$, $y'=0$, имеющему место при $\mu=0$.

Если известно общее решение $x'(t, C_1, C_2)$, $y'(t, C_1, C_2)$ уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = f(t, x', y', 0); \quad \frac{dy'}{dt} = g(t, x', y', 0),$$

то выражения

$$\xi_i = \frac{\partial x'}{\partial C_i}; \quad \eta_i = \frac{\partial y'}{\partial C_i} \quad (i = 1, 2)$$

дадут, как легко видеть, частные, линейно независимые решения системы (1.15). Таким образом, будет известно общее решение уравнений в вариациях и нахождение всех коэффициентов $x_n(t)$, $y_n(t)$ приведет к выполнению квадратур.

Изложенное доказательство делает очевидной применимость теоремы Пуанкаре для систем любого порядка, заключающих произвольное число параметров.

§ 2. Решение уравнений возмущенного движения способом последовательных приближений

В предыдущем параграфе мы рассматривали дифференциальные уравнения, заключающие параметры (которые всегда можно считать малыми) весьма общим образом. При изучении возмущенного движения малые параметры входят в дифферен-

циальные уравнения так, что для получения разложений вида (1.2) могут быть применены некоторые специальные способы, более удобные, нежели изложенный в предыдущем параграфе.

Если, например, возмущенное движение изучается при помощи прямолинейных координат, то массы возмущающих тел, являющиеся здесь малыми параметрами, входят лишь множителем членов, составляющих правые части уравнений (§ 4, гл. XIV). Мы увидим, далее, что употребляя вместо координат надлежащим образом выбранные величины a, e, \dots , мы будем иметь для нахождения этих величин уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m' A'(t, a, e, \dots) + m'' A''(t, a, e, \dots) + \dots, \\ \frac{de}{dt} &= m' E'(t, a, e, \dots) + m'' E''(t, a, e, \dots) + \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где через m', m'', \dots обозначены малые параметры.

В этом случае исходное решение, получающееся при $m' = m'' = \dots = 0$, имеет вид

$$a = a_0, \quad e = e_0, \quad \dots, \quad (2.2)$$

где за постоянные интегрирования a_0, e_0, \dots взяты значения a, e, \dots при $t = t_0$.

Подставив значения (2.2) в правые части уравнений (2.1), получим

$$a = a_0 + \delta_1 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e; \quad \dots, \quad (2.3)$$

где

$$\delta_1 a = \int_{t_0}^t [m' A'(a_0, e_0, \dots) + m'' A''(a_0, e_0, \dots) + \dots] dt; \quad \dots$$

Если значения (2.3), отличающиеся от точных значений на величины второго порядка относительно параметров m', m'', \dots , подставить в правые части уравнений (2.1) и ограничиться членами второго порядка, то после интегрирования будем иметь

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e; \quad \dots, \quad (2.4)$$

где

$$\delta_2 a = \int_{t_0}^t \left[m' \left(\frac{\partial A'}{\partial a} \delta_1 a + \frac{\partial A'}{\partial e} \delta_1 e + \dots \right) + \dots \right] dt; \quad \dots$$

Повторение этого приема даст разложения

$$a = a_0 + \sum \delta_n a; \quad e = e_0 + \sum \delta_n e; \quad \dots, \quad (2.5)$$

в которых через $\delta_n a, \delta_n e, \dots$ обозначены члены n -й степени относительно m', m'', \dots

Теорема Пуанкаре показывает, что ряды (2.5) сходятся для достаточно малых значений параметров m' , m'' , ..., если t находится внутри замкнутого интервала, заключающего t_0 , в котором правые части уравнений (2.1) непрерывны.

Указанный прием нахождения первых приближений (2.3), (2.4), ... широко использовался в небесной механике начиная еще с середины XVIII столетия. Но обоснование этого приема как разложения искомого решения по степеням малых параметров было впервые дано теоремой Пуанкаре. Доказательство, данное Пуанкаре, открыло, кроме того, путь для оценки точности получаемых результатов.

§ 3. Мгновенные элементы

Рассмотрим движение тела P , имеющего массу m , относительно центрального тела S , масса которого принята за единицу, под действием их взаимного притяжения.

Примем S за начало прямолинейной инерциальной координатной системы, а через k^2 обозначим произведение постоянной тяготения на сумму масс. Уравнения движения напишутся так (§ 1 гл. III):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + k^2 x r^{-3} &= 0, \\ \ddot{y} + k^2 y r^{-3} &= 0, \\ \ddot{z} + k^2 z r^{-3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Если, кроме притяжения центрального тела на P , действует еще некоторая сила (mF_x , mF_y , mF_z), то вместо (3.1) мы будем иметь такие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + k^2 x r^{-3} &= F_x, \\ \ddot{y} + k^2 y r^{-3} &= F_y, \\ \ddot{z} + k^2 z r^{-3} &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Движение, определяемое уравнениями (3.1), называется невозмущенным, или кеплеровым, тогда как движение, соответствующее уравнениям (3.2), носит название возмущенного движения.

Общее решение уравнения (3.1) нам известно. Его можно написать в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, e_1, \dots, e_6), \\ y &= f_2(t, e_1, \dots, e_6), \\ z &= f_3(t, e_1, \dots, e_6), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где через e_1, \dots, e_6 обозначены элементы орбиты.

Решение уравнений (3.2) можно искать в той же самой форме (3.3), считая элементы не постоянными, а надлежащим образом выбранными функциями времени. Полученные таким образом элементы $e_1(t)$, ..., $e_6(t)$ носят название мгновенных. Совокупность этих элементов дает мгновенную орбиту тела P для момента t . Знание мгновенной орбиты позволяет вычислять координаты P для любого момента t по формулам кеплерова движения (3.3).

Подстановка выражений (3.3) в уравнения (3.2) дает три уравнения, которым должны удовлетворять шесть функций $e_i(t)$. Таким образом, мгновенные элементы определяются не однозначно. Их можно подчинить еще трем дополнительным условиям. Наиболее важный для нас выбор этих дополнительных условий, делающий элементы вполне определенными, будет указан в следующем параграфе.

Если возмущающее ускорение $(F_x, F_y, F_z)'$ является суммой величин, имеющих множителями малые параметры m', m'', \dots , и, следовательно, обращается в нуль вместе с этими параметрами, то для нахождения мгновенных элементов может быть использован прием, изложенный в предыдущем параграфе.

§ 4. Оскулирующие элементы

Для невозмущенного движения элементы e_i сохраняют постоянные значения, поэтому формулы (3.3) в этом случае дают

$$\dot{x} = \partial f_1 / \partial t; \quad \dot{y} = \partial f_2 / \partial t; \quad \dot{z} = \partial f_3 / \partial t. \quad (4.1)$$

Если мгновенные элементы $e_i(t)$ подчинить дополнительным условиям

$$\sum_1^6 \frac{\partial f_k}{\partial e_i} \frac{de_i}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4.2)$$

то те же самые формулы (4.1) будут служить для вычисления скорости и в возмущенном движении. Такие мгновенные элементы, однозначно определяемые равенствами (3.3) и (4.1), получили название оскулирующих. Их можно определить следующим образом:

Оскулирующими элементами для момента t называются такие элементы $e_i(t)$, которые дают положение и скорость для этого момента по формулам невозмущенного движения.

Орбита, определяемая оскулирующими элементами в какой-либо момент t , называется оскулирующей орбитой для этого момента времени, а t — моментом или эпохой оскуляции. Таким образом, оскулирующая орбита в момент t это

та кеплерова орбита, которая соответствует положению и скорости тела P в этот момент. Она может быть вычислена для любого момента времени, каково бы ни было движение тела P , если мы знаем положение и скорость тела P в рассматриваемый момент, а также массу этого тела. Для этого служат методы, изученные в гл. V.

Хотя оскулирующими элементами можно пользоваться при изучении какого угодно движения, но наиболее полезным этот метод является в тех случаях, когда возмущающее ускорение F мало по сравнению с притяжением центрального тела.

Чтобы сравнить действительное движение с введенным нами фиктивным движением по оскулирующей орбите, напомним уравнения (3.2) рассматриваемого возмущенного движения следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -k^2 x r^{-3} + F_x; \dots \quad (4.3)$$

Если обозначить через x' , y' , z' координаты фиктивной точки P' , движущейся по оскулирующей орбите, то соответствующие уравнения (3.1) можно написать так:

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x}'; \quad \frac{d\dot{x}'}{dt} = -k^2 x' r'^{-3}; \dots \quad (4.4)$$

В момент оскуляции t , по определению, имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= x', & y &= y', & z &= z', & r &= r', \\ \dot{x} &= \dot{x}', & \dot{y} &= \dot{y}', & \dot{z} &= \dot{z}', \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

а потому, на основании (4.3) и (4.4),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt}; & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt}; & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt}; \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{d\dot{x}'}{dt} + F_x; & \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{d\dot{y}'}{dt} + F_y; & \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{d\dot{z}'}{dt} + F_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Координаты точек P и P' в момент $t + \Delta t$, достаточно близкий к t , могут быть найдены по формуле Тэйлора:

$$x(t + \Delta t) = x + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots,$$

$$x'(t + \Delta t) = x' + \frac{dx'}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x'}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

Отсюда, учитывая (4.3) — (4.5), получим

$$x(t + \Delta t) - x'(t + \Delta t) = \frac{1}{2} F_x (\Delta t)^2 + \dots$$

Таким образом, расстояние $P'P$ есть величина порядка произведения возмущающего ускорения на квадрат промежутка времени Δt . Во многих случаях смещение $P'P$ оказывается настолько малым, что им можно пренебречь.

Например, взяв оскулирующую орбиту для момента, лежащего в середине охватываемого наблюдениями промежутка времени, нередко можно ею представить движение малой планеты или кометы в течение нескольких недель (или даже месяцев) с погрешностью, исчезающе малой по сравнению с ошибками наблюдений.

§ 5. Нахождение оскулирующих элементов

Чтобы получить дифференциальные уравнения, дающие оскулирующие элементы, достаточно в уравнениях (4.3) выполнить подстановку, определяемую формулами (3.3) и (4.1). Эта подстановка

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, e_1, \dots, e_6), \dots \\ \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t, e_1, \dots, e_6), \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

вводит вместо неизвестных $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$ новые неизвестные e_1, \dots, e_6 .

Форма зависимостей (5.1) между старыми и новыми неизвестными подсказывается формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= f_1(t, e_1, \dots, e_6), \dots \\ \dot{x}' &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t, e_1, \dots, e_6), \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

дающими общее решение уравнений (4.4) соответствующего невозмущенного движения. Введение оскулирующих элементов является, таким образом, применением общего метода вариации произвольных постоянных, созданного Эйлером.

Прямая подстановка выражений (5.1) в уравнения (4.3) приводит к очень сложным вычислениям. Мы изберем другой путь, основанный на использовании интегралов системы (4.4).

Такой интеграл в самом общем случае имеет вид

$$\Psi(e_1, \dots, e_6, x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', t) = 0, \quad (5.3)$$

где e_1, \dots, e_6 — постоянные интегрирования, принятые нами за элементы орбиты.

Соотношение (5.3) есть следствие соотношений (5.2), имеющих тот же вид, что и (5.1). Поэтому между координатами возмущенного движения и оскулирующими элементами $e_1(t), \dots$

..., $e_6(t)$ существует такое же соотношение:

$$\Psi(e_1, \dots, e_6, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \quad (5.4)$$

Дифференцирование соотношений (5.3) и (5.4) дает

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}'} \frac{d\dot{x}'}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (5.6)$$

Но в момент t имеют место равенства (4.5) и (4.6), а оскулирующие элементы равны постоянным элементам рассматриваемого нами невозмущенного движения. Поэтому, вычитая почленно (5.5) из (5.6), получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial e_6} \frac{de_6}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} F_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} F_y + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{z}} F_z = 0. \quad (5.7)$$

Итак, всякое соотношение вида (5.4) между оскулирующими элементами, координатами и их производными дает соответствующее соотношение (5.7) между оскулирующими элементами и компонентами возмущающего ускорения.

Заметим, что величины x, \dot{x}, \dots , входящие в (5.7), можно исключить при помощи соотношений (5.1).

Переход от (5.4) к (5.7) является той основной операцией, которая, будучи применена к шести независимым соотношениям вида (5.4), даст нам шесть дифференциальных уравнений, вполне определяющих оскулирующие элементы.

§ 6. Уравнения Эйлера

Рассмотрим случай, когда за элементы e_1, \dots, e_6 , рассматривавшиеся нами в предыдущем параграфе, приняты обычные кеплеровы элементы $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$.

Здесь мы можем непосредственно использовать хорошо известные интегралы задачи двух тел, изученные в гл. III. Производство выкладок разделим на следующие этапы.

1. *Параметр, долгота узла и наклон орбиты.* За соотношение (5.4) примем каждый из интегралов площадей:

$$k \sqrt{p} \sin i \sin \Omega = y\dot{z} - z\dot{y},$$

$$k \sqrt{p} \sin i \cos \Omega = x\dot{z} - z\dot{x},$$

$$k \sqrt{p} \cos i = xy - yx.$$

Применение к ним операции перехода от (5.4) к (5.7) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \sin i \sin \Omega \frac{dp}{dt} + \sin i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \sin \Omega \frac{di}{dt} &= yF'_z - zF'_y, \\ \frac{1}{2p} \sin i \cos \Omega \frac{dp}{dt} - \sin i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \cos \Omega \frac{di}{dt} &= xF'_z - zF'_x, \\ \frac{1}{2p} \cos i \frac{dp}{dt} - \sin i \frac{di}{dt} &= xF'_y - yF'_x, \end{aligned}$$

где для краткости положено

$$F'_x = \frac{1}{k\sqrt{p}} F_x; \quad F'_y = \frac{1}{k\sqrt{p}} F_y; \quad F'_z = \frac{1}{k\sqrt{p}} F_z. \quad (6.1)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

то из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2pr [F'_x (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + \\ &\quad + F'_y (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) + F'_z \cos u \sin i], \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u [F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i], \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u [F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i]. \end{aligned}$$

Чтобы написать эти уравнения проще, введем в рассмотрение компоненты возмущающего ускорения по радиусу-вектору, по перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости орбиты, образующему с направлением движения угол, меньший 90° , и по нормали к плоскости орбиты. Обозначив эти компоненты соответственно через S , T , W и положив, аналогично (6.1),

$$S' = \frac{1}{k\sqrt{p}} S; \quad T' = \frac{1}{k\sqrt{p}} T; \quad W' = \frac{1}{k\sqrt{p}} W, \quad (6.3)$$

получим такие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} S' &= F'_x (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ &\quad + F'_y (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + F'_z \sin u \sin i, \\ T' &= F'_x (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + \\ &\quad + F'_y (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) + F'_z \cos u \sin i, \\ W' &= F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

В самом деле, коэффициенты F'_x , F'_y , F'_z в выражении S' равны, очевидно, величинам x/r , y/r , z/r , определяемым (6.2); что же касается соответствующих коэффициентов в выражении T' , то они получаются из этих величин заменой u через $u+90^\circ$.

Подстановка выражений (6.4) в полученные уравнения позволяет написать их следующим образом:

$$\frac{dp}{dt} = 2prT', \quad (6.5)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin u W', \quad (6.6)$$

$$\frac{di}{dt} = r \cos u W'. \quad (6.7)$$

2. *Большая полуось и эксцентриситет.* Применение указанной операции к интегралу энергии

$$k^2(2r^{-1} - a^{-1}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

дает

$$k^2 a^{-2} \frac{da}{dt} = 2\dot{x}F_x + 2\dot{y}F_y + 2\dot{z}F_z.$$

С другой стороны, если дифференцировать равенства (6.2) с учетом свойств оскулирующих элементов, то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}x/r + \dot{v}r(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i), \\ \dot{y} &= \dot{r}y/r + \dot{v}r(-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i), \\ \dot{z} &= \dot{r}z/r + \dot{v}r \cos u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

где

$$\dot{r} = \frac{k^2 \sin v}{\sqrt{p}}; \quad \dot{v} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}. \quad (6.9)$$

Принимая все это во внимание и используя соотношения (6.4), окончательно получим

$$\frac{da}{dt} = 2a^2 e \sin v S' + 2a^2 p r^{-1} T'. \quad (6.10)$$

Дифференцирование равенства

$$p = a(1 - e^2)$$

дает

$$2ae \frac{de}{dt} = (1 - e^2) \frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}.$$

Подставив сюда (6.5) и воспользовавшись соотношениями

$$r = a(1 - e \cos E); \quad pr^{-1} = 1 + e \cos v, \quad (6.11)$$

получим

$$\frac{de}{dt} = p \sin v S' + p (\cos v + \cos E) T'. \quad (6.12)$$

3. *Аргумент перигелия.* Первые два из соотношений (6.2) дают

$$r \cos u = x \cos \Omega + y \sin \Omega,$$

где $u = v + \omega$.

Чтобы правильно применить нашу операцию к этому равенству, нужно учитывать, что истинная аномалия v , зависящая не только от x, y, z , но и от $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, не может рассматриваться здесь как координата. Ее нужно рассматривать как некоторую функцию оскулирующих элементов и времени.

Поэтому, обозначив через $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ производную истинной аномалии, взятую только через посредство оскулирующих элементов, будем иметь

$$(-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \frac{d\Omega}{dt} = -r \sin u \left(\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dv}{dt} \right) \right).$$

Подстановка выражений (6.2) дает

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left(\frac{dv}{dt} \right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Чтобы найти $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, обратимся к первому из соотношений (6.9), которое напомним так:

$$\dot{r} \operatorname{ctg} v = \frac{k}{\sqrt{p}} e \cos v,$$

или

$$(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \operatorname{ctg} v = k \sqrt{p} - \frac{kr}{\sqrt{p}},$$

если учесть (6.11) и равенство

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

Применение к подготовленному таким образом соотношению нашей операции дает

$$S \operatorname{ctg} v - \frac{\dot{r}}{\sin^2 v} \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{k}{2r \sqrt{p}} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{dp}{dt}.$$

Отсюда, пользуясь (6.5), получим

$$e \left(\frac{dv}{dt} \right) = p \cos v S' - (r + p) \sin v T'.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$e \frac{d\omega}{dt} = - p \cos v S' + (r + p) \sin v T' - e \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \quad (6.13)$$

4. *Средняя аномалия эпохи.* Эксцентрическая и средняя аномалии зависят от времени как непосредственно, так и через посредство оскулирующих элементов. Обозначим через $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ производные, взятые через посредство оскулирующих элементов. В таком случае, равенства

$$M = E - e \sin E, \quad r = a(1 - e \cos E)$$

дадут

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM}{dt}\right) &= (1 - e \cos E) \left(\frac{dE}{dt}\right) - \sin E \frac{de}{dt}, \\ \frac{r}{a} \frac{da}{dt} - a \cos E \frac{de}{dt} + ae \sin E \left(\frac{dE}{dt}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Исключим отсюда $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ и в полученное равенство, представленное в форме $\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = \operatorname{ctg} v \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2 \sin v} \frac{da}{dt}$, подставим значения (6.10) и (6.12). Это даст:

$$\begin{aligned} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) &= (p \cos v - 2er) S' + \\ &+ \frac{p}{\sin v} (\cos^2 v + \cos v \cos E - 2) T'. \end{aligned}$$

Коэффициент при T' принимает неопределенный вид, если $v = 0$. Чтобы избежать этого неудобства, исключим эксцентрическую аномалию. Почленное перемножение равенств (6.11) дает

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}.$$

Следовательно,

$$\cos v \cos E = \frac{e \cos v + 1 - \sin^2 v}{1 + e \cos v} = 1 - \frac{r}{p} \sin^2 v.$$

Воспользовавшись этим соотношением, получим

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r + p) \sin v T']. \quad (6.14)$$

Обратимся теперь к равенству

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (6.15)$$

Дифференцирование его по времени дает

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{dn}{dt} + n.$$

Если же дифференцировать только через посредство оскулирующих элементов, получим

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0) \frac{dn}{dt}. \quad (6.16)$$

Таким образом,

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt} \right) + n.$$

Проинтегрировав последнее равенство от t_0 до t , будем иметь

$$M(t) = M(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dM}{dt} \right) dt + \int_{t_0}^t n dt. \quad (6.17)$$

Среднюю аномалию возмущенного движения мы можем, следовательно, вычислять как по формуле (6.15), так и по формуле (6.17). Входящий в эти формулы оскулирующий элемент $n(t)$ дается равенством

$$n = ka^{-3/2}.$$

Но иногда бывает удобнее пользоваться дифференциальным уравнением, дающим этот элемент непосредственно.

Так как

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{k}{a^2 \sqrt{a}} \frac{da}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt},$$

то это уравнение имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = -3nae \sin vS' - 3napr^{-1}T'. \quad (6.18)$$

Элемент $M_0(t)$, входящий в формулу (6.15), дается, как показывает равенство (6.16), уравнением

$$\frac{dM_0}{dt} = \left(\frac{dM}{dt} \right) - (t - t_0) \frac{dn}{dt},$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (6.14) и (6.18).

Это уравнение существенно отличается от всех остальных. Вследствие наличия множителя $t - t_0$, его правая часть может принимать большие значения, как бы малы ни были возмущающие ускорения. Применение способа последовательных приближений (§ 2) может сделаться затруднительным или даже невозможным.

Употребление формулы (6.17) свободно от этого недостатка. Введя новый элемент $\bar{M}_0(t)$, определяемый равенством

$$\bar{M}_0 = M(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dM}{dt} \right) dt, \quad (6.19)$$

формулу (6.17) можно написать так:

$$M = \bar{M}_0 + \int_{t_0}^t n dt. \quad (6.20)$$

Для нахождения нового элемента \bar{M}_0 служит дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r+p) \sin v T'], \quad (6.21)$$

являющееся следствием соотношений (6.19) и (6.14).

Так как на практике пользуются всегда соотношениями (6.20) и (6.21), то можно вместо \bar{M}_0 писать просто M_0 . Поскольку формула (6.15) в теории возмущенного движения не употребляется, это не может привести к недоразумениям.

Итак, задача нахождения оскулирующих элементов приводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2a^2 (e \sin v S' + pr^{-1} T'), \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p (\cos v + \cos E) T', \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u W', \\ \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W', \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} [-p \cos v S' + (r+p) \sin v T'] - \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{dM_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(p \cos v - 2er) S' - (r+p) \sin v T']. \end{aligned} \right\} (6.22)$$

Когда эта система решена, средняя аномалия M вычисляется по формулам

$$n = ka^{-3/2}; \quad M = M_0 + \int_{t_0}^t n dt, \quad (6.23)$$

после чего координаты тела P находятся по обычным формулам эллиптического движения.

Уравнения (6.22), устанавливающие зависимость между оскулирующими элементами, их производными и компонентами возмущающего ускорения, будем называть уравнениями Эйлера. Для такого названия имеются гораздо более веские основания, нежели для употребляемого иногда наименования их уравнениями Гаусса (см. § 16).

§ 7. Другие формы уравнений Эйлера

Если наклон орбиты мал, то вместо элементов ω и M_0 удобнее пользоваться другими.

Вместо ω введем долготу перигелия π , определяемую равенством

$$\pi = \Omega + \omega. \quad (7.1)$$

Соотношение (6.13) дает

$$e \frac{d\pi}{dt} = 2e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - p \cos vS' + (r+p) \sin vT' \quad (7.2)$$

или, учитывая (6.6),

$$e \frac{d\pi}{dt} = e \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W' - p \cos vS' + (r+p) \sin vT'. \quad (7.3)$$

Введем, далее, среднюю долготу в орбите λ , определяемую равенством

$$\lambda = \pi + M = \Omega + \omega + M$$

и обычно называемую просто средней долготой.

На основании (6.23) имеем

$$\lambda = \varepsilon + \int_{i_0}^i n dt, \quad (7.4)$$

где

$$\varepsilon = \pi + M_0 \quad (7.5)$$

есть средняя долгота эпохи.

Соотношения (6.21) и (7.3) дают

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W' - 2 \sqrt{1-e^2} rS' + \\ + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} [-p \cos vS' + (r+p) \sin vT']. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом, заменив в системе (6.22) два последних уравнения на (7.3) и (7.6), мы устраним все трудности, связанные с малостью величины i . Только в уравнении для Ω останется в знаменателе малая величина $\sin i$, но это не создает действительных трудностей. В самом деле, при вычислении координат x , y , z долгота узла встречается лишь в виде выражений

$$\sin i \sin \Omega; \quad \sin i \cos \Omega,$$

как мы уже видели раньше (§ 9 гл. IV).

Если эксцентриситет e очень мал, то правые части двух последних из уравнений (6.22) будут иметь малые делители. Однако замена этих уравнений уравнениями (7.3) и (7.6) практически уничтожает возникающие отсюда трудности. Действительно, остающийся в уравнении (7.3) малый делитель e не снижает точность, с которой получают координаты x , y , z . Чтобы убедиться в этом, нужно только заметить, что истинная долгота в орбите

$$\omega = \pi + v$$

и радиус-вектор r выражаются через среднюю долготу λ следующим образом (§§ 5 и 6 гл. VI)

$$w = \lambda + 2e \sin(\lambda - \pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(\lambda - \pi) + \dots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos(\lambda - \pi) - \frac{1}{2} e^2 \cos 2(\lambda - \pi) + \dots$$

Отсюда ясно, что положение светила зависит, по существу, не от π , а от

$$e \sin \pi; \quad e \cos \pi; \quad e^2 \sin 2\pi; \dots$$

В тех случаях, когда желательно совсем избавиться от малого делителя, можно вместо переменных e и π пользоваться элементами Лагранжа:

$$h = e \sin \pi; \quad k = e \cos \pi.$$

Точно так же, чтобы избавиться от малого делителя $\sin i$ в четвертом из уравнений (6.22), можно вместо i и Ω ввести элементы Лагранжа:

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega; \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega.$$

Примечание. В некоторых случаях может оказаться более удобным вместо компонент S и T возмущающего ускорения рассматривать компоненты, направленные по касательной и по нормали. Это имеет место, например, при изучении возмущений, вызываемых сопротивлением среды.

Обозначим через \mathfrak{Z} компоненту возмущающего ускорения по направлению касательной, считаемую положительной, когда она действует в сторону движения; через \mathfrak{N} обозначим компоненту по нормали, считаемую положительной, когда она направлена в сторону вогнутости траектории.

Легко убедиться, что

$$S(1 + 2e \cos v + e^2)^{1/2} = e \sin v \mathfrak{Z} - (1 + e \cos v) \mathfrak{N},$$

$$T(1 + 2e \cos v + e^2)^{1/2} = (1 + e \cos v) \mathfrak{Z} + e \sin v \mathfrak{N}.$$

Пользуясь этими соотношениями, легко представить два первых из уравнений (6.22), а также (7.2) и (7.6), в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a(2a-r)}{rV} \mathfrak{Z}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2(e+\cos v)}{V} \mathfrak{Z} - \frac{r \sin v}{aV} \mathfrak{N}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{2 \sin v}{eV} \mathfrak{Z} + \frac{1}{e} \left(2 + \frac{r \cos v}{ae} \right) \mathfrak{N} + \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2\sqrt{1-e^2}}{V} \left(\frac{e \sin v}{1+e \cos v} \mathfrak{Z} - \mathfrak{N} \right) + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\pi}{dt} + \\ &\quad + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \right\} (7.7)$$

Здесь через

$$V = k \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

обозначена абсолютная величина скорости.

§ 8. Уравнения Лагранжа

При выводе уравнений Эйлера мы не накладывали никаких ограничений на возмущающее ускорение F . Теперь мы обратимся к тому частному случаю, наиболее важному с точки зрения астрономических приложений, когда возмущающее ускорение вызывается силой, имеющей потенциал. В этом случае существует такая функция R , что

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (8.1)$$

Эту функцию R будем называть пертурбационной функцией, обобщая, таким образом, данное раньше определение (§ 4 гл. XIV).

Покажем, что уравнения Эйлера можно преобразовать так, чтобы в них вместо компонент возмущающего ускорения входили частные производные функции R по элементам.

Для любого элемента a имеет место равенство вида

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a},$$

или, учитывая (8.1) и (6.1),

$$\frac{1}{k\sqrt{p}} \frac{\partial R}{\partial a} = F'_x \frac{\partial x}{\partial a} + F'_y \frac{\partial y}{\partial a} + F'_z \frac{\partial z}{\partial a}. \quad (8.2)$$

Чтобы выразить F'_x , F'_y , F'_z через S' , T' , W' , можно воспользоваться соотношениями (6.4) или следующими:

$$F'_x = S' (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ + T' (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + W' \sin \Omega \sin i,$$

$$F'_y = S' (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ + T' (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) - W' \cos \Omega \sin i,$$

$$F'_z = S' \sin u \sin i + T' \cos u \sin i + W' \cos i,$$

которые легко получаются тем же путем, как и соотношения (6.4).

Переходим к нахождению производных x, y, z по элементам. Сначала за элементы примем $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$. Так как

$$\begin{aligned}x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\z &= r \sin u \sin i,\end{aligned}$$

где $u = v + \omega$, то производные координат по i, Ω и ω находятся сразу, так же как и производные x, y, z по промежуточным величинам r и v .

Производные r и v по a, e и M_0 даются, как легко видеть, равенствами

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}; & \frac{\partial v}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos v; & \frac{\partial v}{\partial e} &= \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right) a \sin v, \\ \frac{\partial r}{\partial M_0} &= \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin v; & \frac{\partial v}{\partial M_0} &= \frac{\partial v}{\partial M} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}.\end{aligned}\right\} \quad (8.3)$$

Подстановка полученных выражений в формулы вида (8.2) без труда приводит к равенствам

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial a} &= k \sqrt{p} a^{-1} r S', \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{ka}{\sqrt{p}} [-p \cos v S' + (r+p) \sin v T'], \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= k \sqrt{p} r \sin u W', \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= k \sqrt{p} [\cos i r T' - \sin i r \cos u W'], \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= k \sqrt{p} r T', \\ \frac{\partial R}{\partial M_0} &= ka^{3/2} (e \sin v S' + pr^{-1} T').\end{aligned}$$

Вместо константы k в эти соотношения можно ввести величину

$$n = ka^{-3/2}.$$

Тогда они примут вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial a} &= na^2 \sqrt{1-e^2} rS', \\
 \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} [-p \cos vS' + (r+p) \sin vT'], \\
 \frac{\partial R}{\partial i} &= na^2 \sqrt{1-e^2} r \sin u W', \\
 \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= na^2 \sqrt{1-e^2} (\cos irT' - \sin ir \cos u W'), \\
 \frac{\partial R}{\partial \omega} &= na^2 \sqrt{1-e^2} rT', \\
 \frac{\partial R}{\partial M_0} &= na^3 (e \sin vS' + pr^{-1}T').
 \end{aligned} \right\} (8.4)$$

Исключение при помощи этих шести равенств трех величин S' , T' , W' из уравнений Эйлера выполняется практически однозначно, так как в (6.22) и (8.4) входят одинаковые комбинации исключаемых величин. Использование этих комбинаций отличается от всякого другого пути исключения S' , T' , W' тем, что одновременно исключаются величины r и v , зависящие явно от времени. В результате получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}.
 \end{aligned} \right\} (8.5)$$

Обратимся теперь к весьма важному для астрономии случаю, когда вместо элементов ω и M_0 употребляются элементы π и ε . Соотношения (7.1) и (7.5) показывают, что для получения соответствующих уравнений надо в уравнениях (8.5) сделать подстановку:

$$\pi = \Omega^* + \omega; \quad \varepsilon = \Omega^* + \omega + M_0; \quad \Omega = \Omega^*,$$

где через Ω^* обозначен элемент, фигурирующий в (8.5).

Эти равенства дают

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega^*} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Подставив все эти выражения в (8.5), получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

После того как решение этой системы даст оскулирующие элементы a, e, \dots, ε , вычисление координат тела P производится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \varepsilon + \int_{t_0}^i n dt; \quad E - e \sin E = \lambda - \pi, \\ r &= a(1 - e \cos E); \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ u &= v + \pi - \Omega, \\ x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Уравнения (8.6), а также эквивалентные им уравнения (8.5), мы будем называть уравнениями Лагранжа.

Полезно отметить следующие свойства уравнений Лагранжа:

1. Время входит в эти уравнения только через посредство производных пертурбационной функции R .

2. Элементы орбиты разделяются на две группы: к одной относятся a, e, i , к другой Ω, π, ε . Дифференциальные уравнения

для элементов одной из этих групп содержат частные производные R только по элементам другой группы.

3. Обозначим через α и β два элемента, принадлежащие различным группам. Если уравнение для $d\alpha/dt$ содержит $\partial R/\partial\beta$, то уравнение для $d\beta/dt$ содержит $\partial R/\partial\alpha$, причем коэффициенты $\partial R/\partial\alpha$ и $\partial R/\partial\beta$ в этих уравнениях равны по величине и противоположны по знаку.

Примечание. Пертурбационная функция R выражается через элементы a, e, \dots, ε при помощи формул (8.7). Важно помнить, что при вычислении производной $\partial R/\partial a$, входящей в уравнения (8.5) и (8.6), дифференцирование должно производиться только по тому a , которое фигурирует в равенствах (8.7) явно. Зависимость r, x, y, z от a через посредство величины

$$n = ka^{-3/2} \quad (8.8)$$

при этом не учитывается. Именно так были получены равенства (8.3), лежащие в основе вывода уравнений (8.5) и (8.6).

Такой способ дифференцирования был введен (§ 6) для того, чтобы избежать появления множителя t в правых частях уравнений. Освобождение от этого множителя получается за счет введения квадратуры, фигурирующей в формулах (8.7).

Положив

$$\rho = \int_0^t n dt$$

и используя (8.8), будем иметь

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt}.$$

Таким образом, для вычисления средней долготы можно пользоваться формулами

$$\lambda = \varepsilon + \rho; \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (8.9)$$

широко применяемыми при изучении движения планет.

§ 9. Специальные формы уравнений Лагранжа

Если эксцентриситет e близок к нулю, то у некоторых из коэффициентов в правых частях уравнений Лагранжа появляется малый делитель.

Это имеет место, прежде всего, во вторых уравнениях каждой из систем (8.5) и (8.6). Здесь, впрочем, это не вызывает никаких осложнений. Достаточно принять за неизвестную величину квадрат эксцентриситета, чтобы малый делитель исчез.

Несколько сложнее обстоит дело с предпоследним уравнением в каждой из этих систем, а именно, уравнением, дающим $d\pi/dt$. Здесь малый делитель неустраним. Он является следствием того, что долгота перигелия становится неопределенной, если эксцентриситет стремится к нулю. Но, как мы уже видели (§ 7), возникающая от этого делителя неточность в величине π не отражается на точности, с какой получаются координаты планеты.

В некоторых специальных вопросах может оказаться целесообразным заменить элементы e и π другими, находимыми с одинаковой точностью, как бы мал ни был эксцентриситет орбиты. Таким свойством обладают, например, элементы

$$h = e \sin \pi; \quad k = e \cos \pi, \quad (9.1)$$

введенные Лагранжем при изучении вековых возмущений планет.

Так как

$$\frac{dh}{dt} = \sin \pi \frac{de}{dt} + k \frac{d\pi}{dt}; \quad \frac{dk}{dt} = \cos \pi \frac{de}{dt} - h \frac{d\pi}{dt},$$

то, пользуясь уравнениями (8.6) и замечая, что

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \sin \pi \frac{\partial R}{\partial h} + \cos \pi \frac{\partial R}{\partial k}; \quad \frac{\partial R}{\partial \pi} = k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) + \frac{k \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \left(-\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \right\} (9.2)$$

где

$$e^2 = h^2 + k^2.$$

Заменив этими уравнениями второе и пятое из уравнений (8.6), будем иметь систему, свободную от малых делителей.

Для орбит, у которых наклон i близок к нулю, в правых частях уравнений для di/dt и $d\Omega/dt$ системы (8.6) появляется малый делитель $\sin i$. В дальнейшем мы убедимся, что это обстоятельство не снижает точность, с которой получаются координаты планеты. Но в некоторых случаях вместо элементов i и Ω бывает выгоднее ввести такие, для которых уравнения свободны от указанного недостатка. Можно взять, например, элементы

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega; \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega, \quad (9.3)$$

введенные Лагранжем и использованные им при изучении вековых возмущений планет.

Равенства (9.3) дают

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= q \frac{d\Omega}{dt} + p \sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= -p \frac{d\Omega}{dt} + q \sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt}, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \sec i \operatorname{cosec} i \left(p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= q \frac{\partial R}{\partial p} - p \frac{\partial R}{\partial q}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (8.6), окончательно будем иметь такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{-\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Так как

$$\begin{aligned} \sec i &= (1 + p^2 + q^2)^{1/2}, \\ \frac{1}{2} \sec^2 \frac{i}{2} &= 1/[1 + (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}], \end{aligned}$$

то коэффициенты уравнений (9.4) легко могут быть выражены через новые элементы p и q .

§ 10. Возмущенное движение планет

Уравнения Лагранжа были широко использованы в работах Леверрье и Гайо (§ 2 гл. II) для изучения возмущенного движения планет.

Для сокращения письма будем предполагать, что имеются только две планеты. Массы их обозначим через m и m' , а элементы через a, e, \dots и a', e', \dots .

Сказанное в предыдущих параграфах показывает, что движение рассматриваемых планет относительно Солнца будет известно, если будет решена следующая система двенадцатого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \dots, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}; \dots, \\ \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'a'} \frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'}; \dots, \quad \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i'}{n'a'^2 \sqrt{1-e'^2}} \frac{\partial R'}{\partial i'}; \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Входящие сюда пертурбационные функции даются равенствами (§ 4 гл. XIV):

$$\left. \begin{aligned} R &= k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \\ R' &= k^2 m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

где

$$\Delta = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}.$$

Координаты планет выражаются через время t и элементы формулами (8.7) и им аналогичными для другой планеты.

Легко видеть, что R и R' зависят только от взаимного расположения орбит, но не от их положения относительно основной координатной плоскости. В самом деле, если угол между радиусами-векторами r и r' обозначить через H , то

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right); \quad R' = k^2 m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos H}{r^2} \right), \quad (10.3)$$

причем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H.$$

Отсюда ясно, что R и R' зависят только от r , r' и H .

Рассмотренный нами в § 2 метод последовательных приближений, основанный здесь на малости масс m и m' , позволяет получить решение системы (10.1) в форме рядов

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots, \\ e &= e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \dots, \\ a' &= a'_0 + \delta_1 a' + \delta_2 a' + \dots, \\ e' &= e'_0 + \delta_1 e' + \delta_2 e' + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

расположенных по целым положительным степеням m и m' . Через $a_0, e_0, \dots, a'_0, e'_0, \dots$ здесь обозначены постоянные интегрирования, представляющие значения оскулирующих элементов в некоторый момент времени. Не ограничивая общности, можно считать, что это тот момент, когда $t=0$. Через $\delta_n a, \delta_n e, \dots, \delta_n a', \dots$ в выражениях (10.4) обозначены совокупности членов n -й степени относительно m и m' . Эти величины носят название возмущений n -го порядка.

Значения

$$a = a_0, \quad e = e_0, \quad \dots, \quad a' = a'_0, \quad \dots,$$

получаемые из (10.4) при $m=0, m'=0$, подставим в правые части уравнений (10.1). Учитывая сказанное выше относительно

зависимости величин R и R' от времени и элементов орбит, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m' f(t, a_0, e_0, \dots, a'_0, \dots), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{da'}{dt} &= m f_1(t, a_0, e_0, \dots, a'_0, \dots), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Интегрирование этих равенств дает

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + m' \int_0^t f(t, a_0, e_0, \dots) dt = a_0 + \delta_1 a, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

т. е. позволяет найти возмущения первого порядка.

Полученные в первом приближении значения элементов (10.5) подставим в правые части уравнений (10.1). Ограничиваясь членами второго порядка относительно масс, мы будем иметь уравнения вида

$$\frac{da}{dt} = m' f(t, a_0, \dots) + m' \frac{\partial f}{\partial a_0} \delta_1 a + \dots + m' \frac{\partial f}{\partial a'_0} \delta_1 a' + \dots,$$

откуда после интегрирования получим

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e; \dots,$$

т. е. найдем возмущения второго порядка. Продолжая этот процесс, мы можем получить любое число членов в разложениях (10.4).

§ 11. Классификация возмущений

Чтобы фактически выполнить интегрирования в формулах (10.5) и им аналогичных для возмущений высших порядков, необходимо пертурбационные функции (10.2) представить в виде явных функций времени. Это возможно, лишь прибегнув к разложению их в бесконечные ряды. Весьма важный для астрономических приложений вопрос о разложении пертурбационной функции в ряд мы рассмотрим подробнее потом, а сейчас ограничимся лишь немногими замечаниями.

Так как координаты каждой планеты являются периодическими функциями соответствующей средней аномалии M и M' , имеющими период 2π , то пертурбационные функции R и R' являются 2π -периодическими функциями M и M' . Если орбиты рассматриваемых планет не пересекаются (так что $\Delta \neq 0$), то эти функции удовлетворяют условиям Дирихле. Следовательно, они

могут быть разложены в двойные ряды Фурье вида

$$R = \sum N_{j, j'} \cos(jM + j'M' + B_{j, j'}),$$

$$R' = \sum N'_{j, j'} \cos(jM + j'M' + B'_{j, j'}),$$

где j, j' — целые числа, принимающие все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

В главе VI мы видели, что радиус-вектор и истинная аномалия разлагаются в ряды по целым положительным степеням эксцентриситета. Пользуясь этими рядами, можно показать, что коэффициенты N и N' в только что написанных рядах тоже разлагаются по целым и положительным степеням эксцентриситетов. С другой стороны, будет показано, что пертурбационная функция, а следовательно, и каждый из коэффициентов N и N' разлагаются по целым и положительным степеням величины

$$v = \sin^2 \frac{J}{2},$$

где через J обозначен угол между плоскостями орбит рассматриваемых планет. Таким образом, каждая из функций R и R' может быть представлена в виде пятикратной суммы выражений вида

$$Ae^{\alpha}e'^{\alpha'}v^{\beta} \cos(jM + j'M' + B) \quad \left. \vphantom{Ae^{\alpha}e'^{\alpha'}v^{\beta} \cos(jM + j'M' + B)} \right\} \quad (11.1)$$

$(\alpha, \alpha', \beta = 0, 1, 2, \dots; j, j' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

где коэффициенты A , имеющие множителем либо m' , либо m , зависят только от больших полуосей a и a' . Величины B зависят только от $i, i', \Omega, \Omega', \pi, \pi'$.

Учитывая, что

$$M = nt + \varepsilon - \pi; \quad M' = n't + \varepsilon' - \pi',$$

приходим к заключению, что правые части уравнений (10.1) являются суммами членов вида

$$Ae^{\alpha}e'^{\alpha'}v^{\beta} \cos D, \quad (11.2)$$

где

$$D = j(nt + \varepsilon) + j'(n't + \varepsilon') + C,$$

а C зависит от тех же элементов, что и величина B в выражении (11.1).

Представив таким путем правые части уравнений (10.1) в виде явных функций времени, мы можем перейти к вычислению возмущений различных порядков.

Подстановка выражений (11.2) в уравнения (10.5) дает возмущения первого порядка каждого элемента в виде суммы

членов одного из следующих двух типов, а именно:

$$A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} v_0^\beta \frac{\cos D_0}{jn_0 + j'n'_0}, \quad (11.3)$$

где

$$D_0 = j(n_0 t + \varepsilon_0) + j'(n'_0 t + \varepsilon'_0) + C_0,$$

если $jn_0 + j'n'_0 \neq 0$, и

$$t A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} v_0^\beta \cos(j\varepsilon_0 + j'\varepsilon'_0 + C_0), \quad (11.4)$$

если $jn_0 + j'n'_0 = 0$. Но в средней долготе будут еще, как показывают равенства (8.9), члены вида

$$A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} v_0^\beta \frac{\cos D_0}{(jn_0 + j'n'_0)^2}. \quad (11.5)$$

Нетрудно убедиться, что при вычислении возмущений не только первого, но и второго, третьего и всех дальнейших порядков, могут получиться лишь члены вида

$$t^p A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} v_0^\beta \frac{\cos(\kappa t + j\varepsilon_0 + j'\varepsilon'_0 + C_0)}{\kappa^q \kappa_1^{q_1} \dots}, \quad (11.6)$$

где

$$\kappa = jn_0 + j'n'_0; \quad \kappa_1 = j_1 n_0 + j'_1 n'_0; \quad \dots$$

Как сумма всех полученных членов, так и каждый из членов (11.6) в отдельности называются возмущениями (или неравенствами) соответствующего элемента.

Если $p=0$, то возмущение (11.6) называется периодическим. Когда $p \geq 1$, оно называется вековым, если $\kappa=0$, и смешанным, если $\kappa \neq 0$.

Для оценки важности отдельных возмущений употребляется несколько характеристик.

Такой характеристикой является прежде всего порядок возмущения, равный сумме степеней возмущающих масс m и m' , являющихся множителями, входящими в величину A_0 . Чем ниже порядок, тем больше (при прочих равных условиях) влияние рассматриваемого возмущения.

Другой характеристикой служит степень возмущения. Так называется сумма $\alpha + \alpha' + \beta$ показателей e_0, e_0', v_0 . Если эти величины достаточно малы, то возрастание степени сопровождается значительным убыванием влияния возмущения (11.6).

Если средние движения n_0 и n'_0 близки к соизмеримости, то некоторые из делителей κ, κ_1, \dots выражения (11.6) будут очень малы. Практически приходится, как увидим ниже (§ 12), рассматривать только один такой делитель. Здесь важной характе-

ристикой становится степень этого делителя. Мы обозначим ее через q . Чем больше q , тем больше, при прочих равных условиях, соответствующее возмущение.

Наконец, число p также может существенно влиять на величину возмущения (11.6), особенно при больших промежутках времени.

Пуанкаре показал, что наибольший интерес с точки зрения оценки важности отдельных возмущений имеют, помимо порядка n , еще две характеристики: разность $n - p$, которую он назвал рангом возмущения, и разность $n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q$, которую он назвал классом возмущения. В дальнейшем будет показано, что каждая из этих величин не может быть отрицательной.

Для не очень больших промежутков времени важнейшими являются возмущения наиболее низких порядков, прежде всего первого порядка.

Для более значительных интервалов времени величина возмущения может уже зависеть от его класса, а для очень больших интервалов времени влияние возмущения лучше всего соответствует его рангу. К этим вопросам мы еще вернемся.

Примечание. Андуайе [1926] пользовался несколько иной терминологией. Он назвал рангом возмущения степень времени p , а классом — сумму степеней $p + q$. Но эта попытка изменить введенную Пуанкаре [1905] терминологию не имела последователей.

§ 12. Периодические возмущения

При изучении движения планет приходится иметь дело главным образом с периодическими возмущениями первого порядка. Эти возмущения для всех элементов имеют, как мы видели (§ 11), такой вид:

$$Ae_0^{\alpha} e_0^{\alpha'} v_0^{\beta} \frac{\cos(\kappa t + E)}{\kappa}, \quad (12.1)$$

где $\kappa = jn_0 + j'n'_0$. Но в средней долготе, вычисляемой по формулам (8.9), могут быть еще члены вида

$$Ae_0^{\alpha} e_0^{\alpha'} v_0^{\beta} \frac{\cos(\kappa t + E)}{\kappa^2}. \quad (12.2)$$

В зависимости от величины периода $2\pi/\kappa$, рассматриваемые возмущения делятся на долгопериодические, для которых этот период во много раз превосходит периоды $2\pi/n_0$ и $2\pi/n'_0$ рассматриваемых планет, и на короткопериодические, для которых эти три периода являются величинами одного порядка.

Если период возмущения очень короткий, то частота κ велика, а это уменьшает амплитуду соответствующих возмущений (12.1) или (12.2).

Наоборот, для долгопериодических возмущений частота κ очень мала и амплитуды возмущений в элементах, а особенно в средней долготе, могут стать весьма велики. Это придает вычислению долгопериодических возмущений особую важность.

В принципе всегда существуют возмущения сколь угодно большого периода, так как всегда можно подобрать такие целые числа j и j' , для которых величина κ сколь угодно близка к нулю. Но количество долгопериодических членов, которые приходится рассматривать, на практике оказывается весьма ограниченным вследствие некоторых свойств, присущих коэффициентам разложения пертурбационной функции в тригонометрический ряд. Мы увидим (§ 5 гл. XVII), что всегда имеет место соотношение

$$\alpha + \alpha' + \beta = |j + j'| + \text{четное число}; \quad (12.3)$$

иначе говоря, степень возмущения либо равна $|j + j'|$, либо превосходит эту величину на четное число.

Отсюда следует, что долгопериодический член может иметь заметную амплитуду лишь в том случае, когда j и j' имеют небольшие по абсолютной величине значения. Чтобы найти такие значения j и j' , проще всего воспользоваться разложением отношения n_0/n'_0 в цепную дробь.

С долгопериодическими возмущениями астрономам впервые пришлось встретиться при попытке объяснить движения Юпитера и Сатурна их взаимным притяжением. Если за начальный момент принять 1,0 января 1900 г., то в этом случае для Юпитера и Сатурна

$$n_0 = 299'', 1283, \quad n'_0 = 120'', 4547.$$

Соответствующая цепная дробь

$$\frac{n_0}{n'_0} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{14 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

дает подходящие дроби

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{72}{29}, \quad \frac{149}{60}, \dots$$

которым соответствуют делители

$$\begin{aligned} n_0 - 2n'_0 &= +58'', 2189, \\ 2n_0 - 5n'_0 &= -4,0169, \\ 29n_0 - 72n'_0 &= +1,9823, \\ &\dots \end{aligned}$$

Первый из этих делителей нельзя считать малым, так как он равен приблизительно $\frac{1}{5} n_0$ или $\frac{1}{2} n'_0$. Однако соответствующие ему возмущения, имеющие в силу соотношения (12.3) степени 1, 3, 5, ..., оказывают весьма заметное влияние на движение планет.

Следующий делитель $2n_0 - 5n'_0$, равный приблизительно $\frac{1}{75} n_0$ или $\frac{1}{30} n'_0$, уже приходится считать малым. Соответствующие ему возмущения имеют период около 880 лет и степени, равные 3, 5, 7, ... Они особенно чувствительны в долготе Сатурна, где они производят колебания с амплитудой, входящей до $50'$. Колебания в долготе Юпитера доходят до $20'$.

Заметим, что долгопериодические возмущения $\delta\rho$ и $\delta\rho'$, вызываемые в средних долготах

$$\lambda = \varepsilon + \rho, \quad \lambda' = \varepsilon' + \rho'$$

двух планет их взаимным притяжением, связаны соотношением

$$m \sqrt{a} \delta\rho = -m' \sqrt{a'} \delta\rho',$$

найденным Лапласом [1799].

Третий из указанных выше делителей, а именно $29n_0 - 72n'_0$, еще меньше. Но степень соответствующих ему возмущений не меньше, чем $|29 - 72| = 43$, что делает их совершенно незаметными. Еще в большей мере это относится к дальнейшим делителям.

С другой стороны, если бы эксцентриситеты рассматриваемых планет и угол между плоскостями их орбит были бы велики, так что амплитуды соответствующих неравенств были бы заметными величинами, то эти неравенства можно было бы включить в вековые возмущения. Для этого нужно тригонометрические функции в выражениях (12.1) и (12.2) разложить по степеням κt .

В только что рассмотренном случае, когда $\kappa = 29n_0 - 72n'_0 = 1''$, 9823, период равен 1800 годам. Поэтому для обычно встречающихся в астрономических исследованиях промежутков времени, не превышающих 200—300 лет, замена таких долгопериодических членов полиномами не вызывает неудобств.

Примечание. Легко убедиться, что при изучении движения двух планет под действием их взаимного притяжения приходится всегда иметь дело не больше чем с одним малым делителем.

В самом деле, малый делитель может быть только в том случае, когда одно из первых неполных частных цепной дроби

$$\frac{n_0}{n'_0} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}$$

сравнительно велико. Если α_k есть это неполное частное, то малый делитель дается подходящей дробью

$$\frac{P_k}{Q_k} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \dots} + \frac{1}{\alpha_{k-1}}$$

и равен $Q_k n_0 - P_k n'_0$. Но благодаря большой величине α_k у следующей подходящей дроби, равной, как известно,

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\alpha_k P_k + P_{k-1}}{\alpha_k Q_k + Q_{k-1}},$$

числитель и знаменатель будут выражаться столь большими числами, что соответствующий делитель уже не придется принимать во внимание.

§ 13. Вековые возмущения

Вековые возмущения первого порядка, имеющие вид (11.4), получаются от тех членов пертурбационной функции, в которых аргумент тригонометрической функции не зависит от времени. Совокупность таких членов пертурбационной функции носит название ее вековой части.

Если средние движения n_0 и n'_0 рассматриваемых планет несоизмеримы, то равенство

$$j n_0 + j' n'_0 = 0$$

возможно лишь, когда $j = j' = 0$. В этом случае вековая часть пертурбационной функции состоит только из одного члена, причем этот член не зависит, как показывает выражение (11.4), от ϵ_0 и ϵ'_0 . Поэтому, обозначив через $[R]$ и $[R']$ вековые части рассматриваемых пертурбационных функций, мы будем иметь

$$\frac{\partial [R]}{\partial \epsilon_0} = 0; \quad \frac{\partial [R']}{\partial \epsilon'_0} = 0. \quad (13.1)$$

Обозначим, далее, вековые возмущения первого порядка элементов $a, e, \dots, a', e', \dots$ через $[a], [e], \dots, [a'], [e'], \dots$

Уравнения (10.1) показывают, что из (13.1) следует

$$\frac{d[a]}{dt} = 0; \quad \frac{d[a']}{dt} = 0.$$

Иначе говоря, большие полуоси планетных орбит не имеют вековых возмущений первого порядка. Равенство (8.8) позволяет утверждать то же самое и относительно средних движений планет.

Полученный результат, очевидно, не зависит от числа взаимодействующих планет, что позволяет формулировать следующий весьма важный результат:

Теорема Лапласа — Лагранжа. Если средние движения планет несоизмеримы, то большие полуоси и средние движения не имеют вековых возмущений первого порядка.

Эта теорема была установлена в 1773 г. Лапласом с точностью до вторых степеней эксцентриситетов. Во всей общности ее доказал в 1776 г. Лагранж, нашедший уравнения (10.1) для больших полуосей.

Теорема Лапласа — Лагранжа вызвала большой интерес, так как ее связывали с вопросом об устойчивости солнечной системы. Поэтому было сделано много попыток распространить ее и на возмущения высших порядков. В 1809 г. Пуассону удалось показать, что возмущения второго порядка больших полуосей также не содержат вековых членов, хотя среди этих возмущений имеются смешанные члены вида $At \cos(kt + C)$. Доказательство теоремы Пуассона будет дано ниже (§ 14 гл. XX).

Дальнейший шаг был сделан румынским математиком Спиру Харету (Spîru C. Haretu), доказавшим в 1878 г. наличие в возмущениях больших полуосей вековых членов третьего порядка. Его работа, полностью опубликованная в 1885 г., вызвала интерес, но вследствие обширности и сложности выкладок была встречена с некоторым недоверием. Однако никто не решался заняться проверкой этих выкладок.

Попытка выяснить вопрос путем нахождения численного значения векового возмущения большой полуоси Сатурна, производимого действием Юпитера, была сделана в 1889 г. греческим астрономом Эгинитисом (D. Eginitis). Вычислив эти возмущения с точностью до третьих степеней масс, он нашел, что

$$a = a_0 - 0,000\ 000\ 000\ 100\ 196t + P, \quad (13.2)$$

где a_0 — значение большой полуоси в начальный момент времени, а через P обозначена совокупность периодических и смешанных членов.

Аналогичная попытка была сделана Гайо [1904], обнаружившим некоторые ошибки в выкладках Спиру Харету. Для нахождения возмущений первого, второго, третьего и частично четвертого порядка, испытываемых Сатурном со стороны Юпитера, Гайо применил интерполяционные методы. Это дало для большой полуоси Сатурна выражение вида

$$a = a_0 - 0,0099t + P,$$

совсем не похожее на (13.2). Таким образом, даже в этом случае, когда вследствие большой массы Юпитера и относительной

близости планет возмущения особенно велики, не удалось поставить вне сомнения наличие вековых возмущений третьего порядка в большой полуоси.

В последние годы этот вопрос был всесторонне изучен в работах Меффруа, которому удалось не только установить реальное существование вековых возмущений третьего порядка у больших полуосей планетных орбит, но и дать аналитическое выражение этих возмущений [Меффруа, 1958].

Вековые возмущения больших полуосей, а также эксцентриситетов и наклонов планетных орбит сразу привлекли к себе большое внимание. В отсутствии вековых возмущений больших полуосей Лаплас видел гарантию неизменности солнечной системы. Эта точка зрения была воспринята и широко распространена популярными сочинениями. Между тем еще Лагранж указывал на то, что наличие вековых членов в рядах, представляющих решение дифференциальных уравнений, не обязательно влечет неустойчивость (точнее, неограниченность) этого решения. Так, если функция $\sin(mat)$, где m — малый параметр, a — произвольный числовой коэффициент, представляет решение дифференциального уравнения, то нахождение этого решения в виде ряда, расположенного по степеням m , даст

$$mat - \frac{1}{6} m^3 a^3 t^3 + \dots$$

Мы получим, таким образом, вековые члены, хотя решение выражается периодической функцией времени.

Нужно также помнить, что законность решения, получаемого способом последовательных приближений, основанным на малости планетных масс, доказана лишь для ограниченного интервала времени (§ 1). Поэтому нельзя основывать на этом решении какие-либо заключения относительно движения для неограниченно большого интервала времени.

Теорема Лапласа — Лагранжа и теорема Пуассона не могут служить, таким образом, основой для каких-либо высказываний относительно отдаленного прошлого или отдаленного будущего солнечной системы. Но эти теоремы весьма важны в другом отношении: отсутствие сколько-нибудь заметных вековых возмущений у больших полуосей планетных орбит весьма существенно облегчает создание аналитических теорий их движения.

Что касается вековых возмущений прочих элементов, то тут приходится встречаться в основном с двумя проблемами.

Если движение планет изучается на протяжении небольших промежутков времени (не превосходящих, например, 10—20 столетий), то можно ограничиться, за весьма немногими исключениями, вычислением вековых возмущений первого порядка. Но эти возмущения нужно вычислить с гораздо большей точностью

(учитывая более высокие степени эксцентриситетов и наклонов), нежели все остальные. Для этого употребляется метод Гаусса, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

С другой стороны, если нас интересуют изменения конфигурации солнечной системы на протяжении многих тысячелетий, то главный интерес представляют возмущения нулевого ранга. Лагранж показал, что их можно вычислить отдельно, если ограничиться в разложении пертурбационной функции вторыми степенями эксцентриситетов и наклонов планетных орбит (гл. XX).

§ 14. Метод Гаусса для вычисления вековых возмущений

В 1814 г. Гаусс [1818] предложил особый метод для вычисления вековых возмущений первого порядка. Этот метод отличается от рассмотренных в предыдущих параграфах тем, что не требует разложения пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов и наклонов орбит. Это делает его одинаково применимым при любых эксцентриситетах и наклонах. Им пользуются, например, для кометных орбит или орбит метеорных потоков. Но и в случае обычных планетных орбит нередко прибегают к этому методу, так как он дает вековые возмущения первого порядка совершенно точно, а это позволяет ограничиться в разложении пертурбационной функции только членами, необходимыми для нахождения периодических возмущений (которые вычисляются всегда с меньшим числом десятичных знаков, нежели вековые).

Метод Гаусса основан на использовании уравнений возмущенного движения, выведенных нами в §§ 6 и 7. Эти уравнения можно, учитывая (6.3) и замечая, что

$$k \sqrt{p} = na^2 \sqrt{1 - e^2}, \quad (14.1)$$

написать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} (e \sin vS + pr^{-1}T), \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin vS + (\cos v + \cos E) T], \\ \frac{dt}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} r \cos u W, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} r \sin u W, \\ e \frac{d\pi}{dt} &= 2e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left[\cos vS - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin vT \right], \\ \frac{de}{dt} &= 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\pi}{dt} - \frac{2}{na^2} rS. \end{aligned} \right\} (14.2)$$

Полезно отметить, что в этих уравнениях не фигурирует явно масса m возмущаемого тела, тогда как в уравнениях (6.22), (7.3) и (7.6) эта масса фигурировала через посредство k , которое мы условились (§ 3) писать везде вместо $k\sqrt{1+m}$, где k — гауссова константа. Такое значение k имеет место и в равенстве (14.1), тогда как во всем дальнейшем под k будем разуметь гауссову константу.

В рассматриваемом нами случае возмущающее ускорение есть градиент пертурбационной функции R . Поэтому

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad T = \frac{\partial R}{\partial r_p}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial r_n}, \quad (14.3)$$

где производные берутся по радиусу-вектору r , по перпендикуляру к нему r_p (в сторону движения), и по нормали r_n к плоскости орбиты.

Поскольку речь идет о возмущениях первого порядка, мы можем вычислять их от каждой возмущающей планеты в отдельности, а затем сложить результаты. Таким образом, мы можем ограничиться случаем, когда

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

где x' , y' , z' и m' — координаты и масса рассматриваемой возмущающей планеты, а через Δ обозначено расстояние между планетами.

Положим

$$R = R_0 - R_1,$$

где

$$R_0 = k^2 m' \Delta^{-1}; \quad R_1 = k^2 m' (xx' + yy' + zz') r'^{-3}. \quad (14.4)$$

Функция R_0 , соответствующая прямому действию возмущающей планеты на возмущаемую, называется главной частью пертурбационной функции. Функция R_1 , происходящая от взаимодействия возмущающей планеты и Солнца, носит название второй части пертурбационной функции.

Предполагая, как всегда, несоизмеримость средних движений, покажем, что при вычислении вековых возмущений первого порядка пертурбационную функцию можно заменить ее главной частью.

Это утверждение является очевидным следствием такой теоремы:

разложение второй части пертурбационной функции по кратным средних аномалий не содержит членов, не зависящих от средней аномалии возмущающей планеты.

В самом деле, пусть

$$R_1 = \sum N \cos(jM + j'M' + B)$$

есть разложение второй части по кратным средним аномалий. Совокупность членов этого разложения, не зависящих от M' , дается, учитывая (14.4), выражением

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1 dM' = \frac{k^2 m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} (xx' + yy' + zz') r'^{-3} dM'.$$

Но легко видеть, что каждый из трех стоящих в правой части интегралов равен нулю. Действительно, так как движение возмущающей планеты мы можем здесь считать эллиптическим, то

$$\int_0^{2\pi} x' r'^{-3} dM' = \frac{-1}{k^2(1+m)} \int_0^{2\pi} \frac{d^2 x'}{dt^2} dM' = 0,$$

и аналогично для двух других интегралов. Теорема доказана.

Итак, выражение (14.3) мы можем заменить, если вычисляются только вековые возмущения, следующими:

$$S = k^2 m' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial r}; \quad T = k^2 m' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial r_p}; \quad W = k^2 m' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial r_n}. \quad (14.5)$$

Заметим теперь, что каждое из уравнений (14.2) мы можем написать в форме

$$\frac{de}{dt} = [e] + \sum A_{j, j'} \cos(jM + j'M' + Q_{j, j'}),$$

где через $[e]$ обозначен член, не зависящий от M и M' , дающий после интегрирования вековое возмущение соответствующего элемента.

Очевидно,

$$[e] = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{de}{dt} dM dM'.$$

Подставив сюда выражения (14.2) и заметив, что коэффициенты при S , T , W в этих выражениях зависят только от M , получим

$$[e] = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi a} \int_0^{2\pi} [\sin v S_0 + (\cos v + \cos E) T_0] dM, \quad (14.6)$$

где

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S dM'; \quad T_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T dM'; \quad W_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W dM'.$$

При помощи равенств (14.5) эти выражения можно представить в следующем виде:

$$S_0 = \frac{\partial}{\partial r} V; \quad T_0 = \frac{\partial}{\partial r_p} V; \quad W_0 = \frac{\partial}{\partial r_n} V, \quad (14.7)$$

где

$$V = \frac{k^2 m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dM'}{\Delta}. \quad (14.8)$$

Эти величины имеют, как показал Гаусс, весьма простую механическую интерпретацию. В самом деле, представим себе, что масса m' возмущающей планеты распределена вдоль ее орбиты таким образом, что на каждый линейный элемент приходится элемент массы dm' , пропорциональный площади фокального сектора, опирающегося на этот линейный элемент. Обозначив через dt время, в течение которого планета проходит рассматриваемый элемент орбиты, а через P' период ее обращения, будем иметь, на основании второго закона Кеплера,

$$\frac{dm'}{m'} = \frac{dt}{P'} = \frac{n' dt}{n' P'} = \frac{dM'}{2\pi}.$$

Поэтому выражение (14.8) можно заменить таким:

$$V = k^2 \int \frac{dm'}{\Delta}, \quad (14.9)$$

где интегрирование производится вдоль всей орбиты.

Материальное эллиптическое кольцо с только что указанным распределением массы принято называть гауссовым кольцом. Выражение (14.9) есть, очевидно, потенциал гауссова кольца, а величины (14.7) представляют компоненты притяжения, производимого этим кольцом на материальную точку, масса которой равна единице.

Задача о вычислении притяжения гауссова кольца, получившая название задачи Гаусса, приводится к нахождению интегралов

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \int \frac{x - x'}{\Delta^3} dm'; \quad \dots \quad (14.10)$$

Гаусс показал, что величины (14.10) можно выразить через эллиптические интегралы первого и второго рода, а это дает возможность находить их для любой точки пространства.

Переход от компонент притяжения (14.10) к нужным нам компонентам (14.7) производится по формулам (6.4).

Дав, таким образом, способ находить величины S_0 , T_0 , W_0 в любой точке пространства, можно перейти к вычислению вековых возмущений по формулам вида (14.6). Стоящие в этих формулах интегралы от функций вида

$$\Phi(M) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin v S_0 + (\cos v + \cos E) T_0]$$

находятся численно.

Обозначим через $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ значения такой функции, соответствующие значениям $M=0, \frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1)\frac{2\pi}{k}$. Подстановка этих значений в разложение

$$\Phi(M) = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \dots \\ \dots + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \dots,$$

и почленное сложение полученных равенств дает

$$\frac{1}{k} \sum_0^{k-1} \Phi_i = a_0 + a_k + a_{2k} + a_{3k} + \dots$$

Таким образом, искомая величина

$$[e] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(M) dM$$

находится по формуле

$$[e] = \frac{1}{k} \sum_0^{k-1} \Phi_i \quad (14.11)$$

с ошибкой порядка a_k .

Можно показать, что a_k есть величина степени $k-1$ относительно e, e', v . Поэтому формула (14.11) дает все вековые члены до $(k-1)$ -й степени включительно.

Равенство $[a]=0$, вытекающее из теоремы Лапласа—Лагранжа, служит хорошим контролем.

Иногда предпочитают в интегралах (14.6) заменить переменную M эксцентрической аномалией, что делается при помощи соотношения

$$dM = (1 - e \cos E) dE = (r/a) dE.$$

Это несколько упрощает вычисления. Кроме того, при значительной величине эксцентриситета точки, соответствующие равноотстоящим значениям E , располагаются на орбите гораздо более равномерно, нежели точки, соответствующие равноотстоящим значениям M . Нужно, однако, заметить, что преимущество более равномерного распределения выбираемых на орбите точек не было доказано. При таком распределении части орбиты, проходимые быстро, получают такой же вес, как и проходимые медленно.

Излагая свой метод, Гаусс ограничился принципиальной стороной дела и не развил его достаточно подробно. Поэтому не удивительно, что этот метод в течение долгого времени почти не применялся. В 1882 г. Хилл впервые дал этот метод в детально разработанной и вполне приспособленной к вычислениям форме и этим ввел его в употребление. Новое решение основной задачи о вычислении притяжения, производимого гауссовым кольцом, было дано Альфаном (G. H. Halphen) в 1886 г. Это решение было затем усовершенствовано Хиллом и некоторыми другими авторами. Практическая сторона дела особенно подробно была рассмотрена Н. Н. Горячевым [1937]. Более подробные библиографические указания по истории вопроса, нежели даваемые Н. Н. Горячевым, можно найти в статье Цейпеля [1912].

Все указанные нами формы метода Гаусса одинаково применимы, какова бы ни была форма орбиты возмущающей планеты. Но особенно часто приходится иметь дело с тем случаем, когда эксцентриситет этой орбиты очень мал, а притяжение нужно вычислить в точках, близких к ее плоскости. Соответствующие формулы, основанные на разложении потенциала гауссова кольца в ряды специального вида, были даны М. Ф. Субботиным [1941].

§ 15. Возмущенное движение спутников

В этой главе мы рассмотрели применение метода вариации элементов к изучению возмущенного движения в том случае, когда за исходное приближение берется невозмущенное движение, даваемое задачей двух тел. Такой путь быстро приводит к цели для большинства планет солнечной системы благодаря тому, что возмущающее ускорение весьма не велико по сравнению с действием Солнца. Так, например, возмущающее действие всех планет на Землю никогда не превосходит 7×10^{-5} притяжения Солнца. Наиболее трудным случаем среди больших планет является изучение возмущений, испытываемых Сатурном со стороны Юпитера. Возмущающее действие достигает здесь 0,004 притяжения Солнца. Этот случай находится уже близко к границе возможности применения рассматриваемого метода.

Но при изучении движения спутников встречаются случаи, когда изложенный метод становится в своей первоначальной форме недостаточно эффективным. Такой случай имеет место для Луны, для которой возмущающее действие Солнца составляет около 0,01 притяжения Земли. Здесь задача построения аналитической теории движения была удовлетворительно решена лишь при помощи других принципиально отличных методов (§ 1 гл. II).

Для изучения движения искусственных спутников Земли изложенный метод будет, конечно, недостаточен, когда придется изучать движение спутников, расстояния которых от Земли сравнимы с расстоянием Луны. Что же касается близких спутников, то для них возмущающее действие Луны не превосходит 10^{-6} притяжения Земли, а возмущающее действие Солнца приблизительно вдвое меньше. Таким образом, для этих спутников возмущения со стороны небесных тел находятся весьма просто. Гораздо более значительные отклонения от эллиптического движения вызываются здесь несферичностью Земли. Но происходящая от этой несферичности возмущающая сила даже для самых близких спутников не превосходит 0,002 притяжения, производящего эллиптическое движение, и быстро убывает с расстоянием. Поэтому и эти возмущения могут быть найдены изложенным выше (§ 10) методом, служащим для вычисления малых возмущений эллиптического движения.

В тех случаях, когда возмущения настолько значительны, что этот метод становится мало эффективным, может оказаться полезным метод, предложенный Пуассоном [1835] для изучения движения Луны (§ 1 гл. II).

В методе Пуассона за исходное приближение принимается не эллиптическое движение, определяемое постоянными элементами, а более сложное движение, включающее вековые возмущения элементов Ω , π и ϵ . Делается это следующим образом.

Введем вместо Ω , π , ϵ новые неизвестные $\Omega_1, \pi_1, \epsilon_1$, определяемые равенствами

$$\Omega = \Omega_1 + m'at; \quad \pi = \pi_1 + m'\beta t; \quad \epsilon = \epsilon_1 + m'\gamma t, \quad (15.1)$$

где m' — масса рассматриваемого возмущающего тела, а α, β, γ — некоторые числовые коэффициенты.

Так как координаты небесных тел можно рассматривать как функции их средних долгот

$$\lambda = \epsilon + \rho, \quad \lambda' = \epsilon' + \rho'$$

и оскулирующих элементов, то уравнения (10.1) можно написать так:

$$\frac{da}{dt} = m'A(\epsilon + \rho, a, e, \dots, \epsilon' + \rho', a', e', \dots),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = m'\Omega(\epsilon + \rho, a, e, \dots, \epsilon' + \rho', a', e', \dots),$$

$$\frac{d\pi}{dt} = m'\Pi(\epsilon + \rho, a, e, \dots, \epsilon' + \rho', a', e', \dots),$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = m'E(\epsilon + \rho, a, e, \dots, \epsilon' + \rho', a', e', \dots).$$

.....

Подставив сюда величины (15.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m'A(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m't, a, \dots), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{d\Omega_1}{dt} &= -m'a + m'\Omega(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m't, a, \dots), \\ \frac{d\pi_1}{dt} &= -m'\beta + m'\Pi(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m't, a, \dots), \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -m'\gamma + m'E(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m't, a, \dots), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

Решение уравнения (15.2) будем опять искать в форме рядов

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots, \\ \Omega_1 &= \Omega_0 + \delta_1 \Omega + \delta_2 \Omega + \dots, \\ \pi_1 &= \pi_0 + \delta_1 \pi + \delta_2 \pi + \dots, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

расположенных по возрастающим степеням m' .

Отличие будет заключаться прежде всего в том, что при разложении правых частей уравнений (15.2) в ряды мы будем дополнительные члены $m'\alpha t$, $m'\beta t$, $m'\gamma t$ оставлять в аргументах тригонометрических функций. Пертурбационная функция является, очевидно, периодической функцией (с периодом 2π) не только от λ и λ' , но и от Ω , Ω' , π , π' . Вследствие этого, правые части уравнений (15.2) разлагаются в ряды вида

$$\sum N \cos D,$$

где

$$D = j\lambda + j'\lambda' + h\Omega + h'\Omega' + k\pi + k'\pi'.$$

При вычислении возмущений первого порядка мы будем иметь, следовательно, квадратуры вида

$$\int N \cos D dt = \frac{N}{\nu} \sin D_0,$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= j(n_0 t + \varepsilon_0 + m'a t) + \dots + k'(\pi'_0 + m'\gamma t), \\ \nu &= j(n_0 + m'a) + j'(n'_0 + m'a') + \dots + k'm'\gamma'. \end{aligned}$$

Таким образом, в члены первого порядка здесь включается часть величин второго порядка, чем без существенного усложнения вычислений можно достичь сокращения числа приближений.

Другое отличие заключается в том, что неопределенные пока коэффициенты α , β , γ можно выбрать так, что дополнительные

члены в (15.1) будут представлять вековые возмущения первого порядка соответствующих элементов.

Изложенный способ весьма полезен не только при изучении движения спутников (у которых вековые возмущения часто весьма велики), но и при изучении движения планет. Учет вековых возмущений посредством соответствующего изменения аргументов периодических возмущений употребляется и здесь весьма часто.

§ 16. Исторические замечания

Идея рассматривать возмущенное движение Луны как эллиптическое с непрерывно изменяющимися элементами была широко использована еще Ньютоном. Именно этим путем им был получен ряд теорем, выражающих отдельные свойства движения. Как показал А. Н. Крылов [1915], третье примечание к теореме XVII первой книги *Principia* непосредственно приводит к простому выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов в той форме, которая была указана в § 6. Высказывалось даже мнение [Тиссеран, 1894], что уравнения, выведенные нами в § 6 и названные уравнениями Эйлера, были полностью известны Ньютону, но что он предпочел опубликовать лишь геометрические теоремы, выводимые как следствия этих уравнений в тех случаях, когда две из компонент S , T , W принимаются равными нулю.

Впервые систематическое применение метода вариации элементов для решения дифференциальных уравнений, определяющих движение Луны, было дано Эйлером [1753]. Используя интегралы площадей, он получил уравнения, выражающие производные элементов i , Ω и p через компоненты S , T , W возмущающего ускорения. Формула, эквивалентная интегралу энергии, дала ему аналогичное выражение для производной большой полуоси, а следовательно (§ 6), и эксцентриситета. Наконец, уравнение орбиты позволило получить выражение (хотя и не вполне верное) для производной расстояния перигелия от узла. Все эти уравнения, в сущности, только обозначениями отличаются от уравнений (6.5)—(6.7), (6.10) и (6.12). Но ни в указанной работе, ни в позднейших статьях, где он пытался применить тот же метод к изучению движения планет, Эйлеру не удалось получить в правильном виде последнее уравнение, эквивалентное равенствам (6.14) и (6.16). Получившиеся вследствие этого, а также от ошибок в вычислениях, мало удовлетворительные результаты настолько огорчили Эйлера, что он перестал заниматься дальнейшим развитием метода вариации элементов и обратился к поискам других путей [Субботин, 1958].

Вывод уравнений, определяющих оскулирующие элементы, был доведен до конца Лагранжем. В своих первых работах, опубликованных в 1762—1765 гг., Лагранж делает функциями времени только четыре элемента, оставляя постоянными большую полуось и момент прохождения через перигелий. Так поступал и Эйлер в некоторых из своих работ. Но в мемуаре, премированном Парижской Академией наук в 1778 г., Лагранжу удалось дать всю систему дифференциальных уравнений, определяющих шесть оскулирующих элементов. Нужно, впрочем, отметить, что производные элементов он здесь выразил не через компоненты S , T , W , как это делал Эйлер, а через производные пертурбационной функции по координатам. Этим совершенно ненужным предположением о существовании пертурбационной функции суживалась бы область применения полученных уравнений, если бы не сделанное позднее самим Лагранжем замечание, что вместо $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$, $\partial R/\partial z$ в полученные им уравнения можно подставить компоненты F_x , F_y , F_z любого возмущающего ускорения.

Уравнения Лагранжа в только что указанном виде были использованы для вычисления возмущений, производимых планетами в движении комет. Но когда Лагранж, а затем и Лаплас начали их применять для изучения различных свойств движения планет, стала постепенно выясняться целесообразность замены производных пертурбационной функции по координатам ее производными по элементам. Так, например, замена первого из уравнений (6.22) первым из уравнений (8.6) позволила сразу доказать теорему Лапласа — Лагранжа о равенстве нулю вековых возмущений больших полуосей (§ 13).

Уравнения, выражающие производные оскулирующих элементов через частные производные пертурбационной функции по элементам, были полностью получены лишь в 1808 г., когда Лагранж и Лаплас одновременно нашли последнее из этих уравнений. В связи с этим, Лагранжем была создана общая форма метода вариации произвольных постоянных, воспроизведенная им впоследствии в его «Аналитической механике». Эту общую форму метода можно найти во многих руководствах [Тиссеран, 1889; Субботин, 1937; Брауэр и Клеменс, 1961]. Но так как ее астрономические приложения исчерпываются в настоящее время лишь выводом уравнений, уже полученных нами в § 6 другим путем, то мы не будем ее излагать. Что касается случая консервативных возмущающих сил, рассмотренного нами в § 8, то прямой вывод соответствующих уравнений проще всего дается теорией канонических уравнений (гл. XIX).

Такова в основных чертах история получения дифференциальных уравнений, служащих для нахождения оскулирующих элементов.

Уравнения в форме Эйлера (§ 6), с дополнениями и исправлениями, вытекавшими из работ Лагранжа, были сначала использованы для вычисления кометных возмущений. Сам Эйлер, считавший численное интегрирование дифференциальных уравнений наиболее удобным и наиболее мощным методом изучения возмущенного движения, рекомендовал вычислять возмущения в прямоугольных координатах, так как «если возмущения велики, то лучше всего придерживаться самых простых формул» [Субботин, 1958]. Но эта идея Эйлера слишком опережала технические возможности его времени и была полностью реализована лишь в XX в.

В 1810—1814 годах Гаусс использовал уравнения Эйлера для вычисления возмущенных элементов Паллады, но опубликовал только результаты своих вычислений. Метод получил широкое распространение после того, как Энке подробно изложил его в Приложениях к Берлинскому астрономическому ежегоднику на 1837 и 1838 гг. Здесь же Энке опубликовал, с разрешения Гаусса, данные этим последним новые формулы для численного интегрирования, гораздо более совершенные, нежели употреблявшиеся раньше.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В РЯД

§ 1. Введение

При изучении возмущенного движения пертурбационную функцию всегда приходится представлять в виде бесконечного ряда. В этой главе мы рассмотрим разложения, применяемые при изучении движения планет.

В предыдущей главе мы видели, что при изучении возмущений, производимых в движении двух планет их взаимным притяжением, приходится рассматривать пертурбационные функции (§ 10 гл. XVI):

$$R_{0,1} = k^2 m' R; \quad R_{1,0} = k^2 m R', \quad (1.1)$$

где

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2}; \quad R' = \frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos H}{r^2},$$

причем

$$\Delta^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{-1/2}, \quad (1.2)$$

а через H обозначен угол между радиусами-векторами r и r' .

Чтобы можно было использовать уравнения Лагранжа (§ 8 гл. XVI) для нахождения оскулирующих элементов, нужно иметь выражение пертурбационной функции через элементы орбит рассматриваемых планет и время. Выражения r и r' через элементы орбит и время нам известны (гл. VI). Обратимся к нахождению в функции этих величин угла H .

Пусть (рис. 24) NP и $N'P'$ проекции на гелиоцентрическую небесную сферу орбит планет с массами m и m' , причем в точках N и N' находятся восходящие узлы этих орбит по отношению к эклиптике $\gamma NN'$, принятой за основную координатную плоскость. Пусть, далее, в точки Π и Π' проектируются перигелии, а в точки P и P' — положения планет в рассматриваемый момент. Через N_0 обозначим восходящий узел орбиты планеты m' относительно орбиты m , а через J — угол между плоскостями этих орбит.

Полагая

$$NN_0 = N; \quad N'N_0 = N',$$

и замечая, что

$$NN' = \Omega' - \Omega,$$

из треугольника $NN'N_0$, образованного тремя узлами, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin J \sin N &= \sin i' \sin (\Omega' - \Omega), \\ \sin J \cos N &= -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos (\Omega' - \Omega), \\ \cos J &= \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos (\Omega' - \Omega), \\ \sin J \sin N' &= \sin i \sin (\Omega' - \Omega), \\ \sin J \cos N' &= \cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos (\Omega' - \Omega). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Эти уравнения позволяют найти угол J и вспомогательные величины N, N' .

Полагая

$$\tau = \Omega + N; \quad \tau' = \Omega' + N', \quad (1.4)$$

будем иметь

$$w = \tau + W; \quad w' = \tau' + W', \quad (1.5)$$

где через

$$w = \pi + v; \quad w' = \pi' + v'$$

обозначены долготы рассматриваемых планет в их орбитах, а через W и W' обозначены долготы планет, отсчитываемые от точки N_0 . Таким образом,

$$W = \Pi + v; \quad W' = \Pi' + v', \quad (1.6)$$

где

$$\Pi = \pi - \tau; \quad \Pi' = \pi' - \tau' \quad (1.7)$$

— долготы перигелиев, отсчитываемые от точки N_0 .

Очевидно,

$$\cos H = \cos W \cos W' + \sin W \sin W' \cos J.$$

или

$$\cos H = \cos (W' - W) - 2v \sin W \sin W', \quad (1.8)$$

где

$$v = \sin^2 (J/2).$$

Рассмотрим сначала главную часть каждой из пертурбационных функций, т. е. величину (1.2). После подстановки выражения (1.8) ее можно представить так:

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} (1 + \beta)^{-1/2},$$

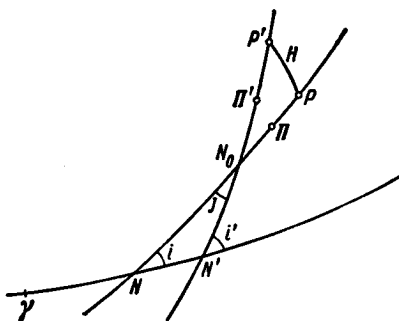


Рис. 24.

где

$$\Delta_0 = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(W' - W)]^{1/2}, \quad (1.9)$$

$$\beta = \frac{4vrr' \sin W \sin W'}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(W' - W)}. \quad (1.10)$$

В том случае, когда $|\beta| < 1$, формула бинома дает

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} = & \Delta_0^{-1} - rr' \Delta_0^{-3} \cdot 2v \sin W \sin W' + \\ & + r^2 r'^2 \Delta_0^{-5} \cdot 6v^2 \sin^2 W \sin^2 W' - \\ & - r^3 r'^3 \Delta_0^{-7} \cdot 20v^3 \sin^3 W \sin^3 W' + \\ & \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Вторые части пертурбационных функций (1.1), иначе говоря, величины

$$R_1 = \frac{r \cos H}{r'^2}; \quad R'_1 = \frac{r' \cos H}{r^2},$$

можно представить так:

$$\left. \begin{aligned} r' R_1 &= \frac{r}{r'} [(1 - v) \cos(W' - W) + v \cos(W' + W)], \\ r' R'_1 &= \left(\frac{r'}{r}\right)^2 [(1 - v) \cos(W' - W) + v \cos(W' + W)]. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Равенства (1.11) и (1.12) дают выражение пертурбационной функции через r , v , r' , v' . Остается заменить эти величины их выражениями через элементы и время, чтобы получить ту форму пертурбационной функции, которая обычно употребляется при изучении движения планет. Эта операция будет рассмотрена в следующих параграфах.

Примечание. Если исключить Плутона, то для каждой пары остальных больших планет будем иметь $|\beta| < 0,04$. В этом легко убедиться при помощи неравенства

$$|\beta| \leq \frac{4vrr'}{(r' - r)^2},$$

непосредственно вытекающего из (1.10).

Таким образом, во всех этих случаях ряд (1.11) сходится и притом настолько быстро, что можно удовольствоваться написанными нами членами.

Для Плутона и Нептуна условие $|\beta| < 1$ не соблюдается и ряд (1.11) расходится. Для Плутона и Урана он сходится, но очень медленно. Аналогичные случаи встречаются и при вычис-

лении возмущений некоторых малых планет от Юпитера и Марса.

Во всех таких случаях приходится пользоваться другими методами разложения пертурбационной функции.

§ 2. Вычисление вспомогательных величин

Для вычисления величин J , N , N' , характеризующих взаимное расположение орбит двух планет, вместо формул (1.3) можно пользоваться формулами Деламбра, выражающими три смежных элемента сферического треугольника через три других элемента. Эти формулы дают:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{N+N'}{2} &= \sin \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'+i}{2}, \\ \sin \frac{J}{2} \cos \frac{N+N'}{2} &= \cos \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'-i}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{N-N'}{2} &= \sin \frac{\Omega'-\Omega}{2} \cos \frac{i'+i}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{N-N'}{2} &= \cos \frac{\Omega'-\Omega}{2} \cos \frac{i'-i}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Если первые два из этих равенств умножить соответственно на $\cos \frac{1}{2}(\Omega'+\Omega)$ и $\sin \frac{1}{2}(\Omega'+\Omega)$, а затем сложить, то получим первое из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{\tau'+\tau}{2} &= \sin \frac{\Omega'+\Omega}{2} \cos \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'-i}{2} + \\ &+ \cos \frac{\Omega'+\Omega}{2} \sin \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'+i}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \cos \frac{\tau'+\tau}{2} &= \cos \frac{\Omega'+\Omega}{2} \cos \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'-i}{2} - \\ &- \sin \frac{\Omega'+\Omega}{2} \sin \frac{\Omega'-\Omega}{2} \sin \frac{i'+i}{2}, \end{aligned}$$

$$\cos \frac{J}{2} \sin \frac{\tau'-\tau}{2} = \frac{1}{2} \sin(\Omega'-\Omega) \left(\cos \frac{i'-i}{2} - \cos \frac{i'+i}{2} \right),$$

$$\cos \frac{J}{2} \cos \frac{\tau'-\tau}{2} = \sin^2 \frac{\Omega'-\Omega}{2} \cos \frac{i'+i}{2} + \cos^2 \frac{\Omega'-\Omega}{2} \cos \frac{i'-i}{2}.$$

Остальные соотношения получаются аналогично. Положим для краткости

$$A = \sin \frac{J}{2} \sec \frac{i}{2} \sec \frac{i'}{2}; \quad B = \cos \frac{J}{2} \sec \frac{i}{2} \sec \frac{i'}{2}. \quad (2.2)$$

Тогда, как легко видеть, предыдущие формулы можно заметить такими:

$$\left. \begin{aligned} A \sin \frac{\tau' + \tau}{2} &= \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \sin \Omega' - \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega, \\ A \cos \frac{\tau' + \tau}{2} &= \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \cos \Omega' - \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega, \\ B \sin \frac{\tau' - \tau}{2} &= \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin (\Omega' - \Omega), \\ B \cos \frac{\tau' - \tau}{2} &= 1 + \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos (\Omega' - \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Соотношения (2.3) и (2.2) часто более удобны для нахождения J , τ , τ' , нежели формулы (1.3) или (2.1), дополненные равенствами (1.4).

Последние два из соотношений (2.3) дают

$$\operatorname{tg} \frac{\tau' - \tau}{2} = \frac{\kappa \sin (\Omega' - \Omega)}{1 + \kappa \cos (\Omega' - \Omega)},$$

где

$$\kappa = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{i'}{2}.$$

Отсюда, пользуясь известным разложением, находим следующую полезную формулу:

$$\frac{1}{2}(\tau' - \tau) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \kappa^n \sin n(\Omega' - \Omega).$$

Таким образом, если i и i' можно рассматривать как малые величины первого порядка, то разность $\tau' - \tau$ является малой величиной второго порядка.

§ 3. Случай круговых орбит

Рассмотрим сначала ту часть разложения пертурбационной функции, которая не зависит от эксцентриситетов планетных орбит.

Если $e = e' = 0$, то

$$r = a; \quad \omega = \lambda; \quad r' = a'; \quad \omega' = \lambda',$$

где, как и раньше, через λ и λ' обозначены средние долготы в орбите. Соответствующие значения W и W' обозначим через

$$L = \lambda - \tau; \quad L' = \lambda' - \tau'. \quad (3.1)$$

Разложение (1.11) главной части пертурбационной функции принимает здесь вид

$$\Delta^{-1} = I - II + III - IV + \dots, \quad (3.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I &= \Delta_0^{-1} = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(L' - L)]^{-\frac{1}{2}}, \\ II &= aa' \Delta_0^{-3} \cdot 2v \sin L \sin L', \\ III &= (aa')^2 \Delta_0^{-5} \cdot 6v^2 \sin^2 L \sin^2 L', \\ IV &= (aa')^3 \Delta_0^{-7} \cdot 20v^3 \sin^3 L \sin^3 L', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Введем в рассмотрение отношение больших полуосей орбит

$$\alpha = a/a',$$

причем условимся выбирать всегда обозначения так, чтобы было $a < a'$ и, следовательно, $\alpha < 1$.

Начнем с разложения в тригонометрические ряды величин

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = a'^{-1} \alpha^{\frac{n-1}{2}} (1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$n = 1, 3, 5, 7, \dots \text{ и } S = L' - L.$$

Так как при $0 < \alpha < 1$ эти величины удовлетворяют условиям Дирихле, то мы можем положить

$$(1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iS, \quad (3.4)$$

где $b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}$.

Коэффициенты $b_n^{(i)}$ мы будем называть, следуя установившемуся обычаю, коэффициентами Лапласа.

Полагая, далее,

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)} \quad (3.5)$$

и условившись не обозначать пределы суммирования, когда оно производится от $-\infty$ до $+\infty$, будем иметь

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = (a')^{-1} \cdot \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L). \quad (3.6)$$

При подстановке рядов (3.6) в выражение (3.2) нам придется каждый из этих рядов умножать на одно из выражений

$$\begin{aligned} 2 \sin L \sin L' &= \cos(L' - L) - \cos(L' + L), \\ 8 \sin^2 L \sin^2 L' &= 2 - 2 \cos 2L - 2 \cos 2L' + \\ &\quad + \cos(2L' + 2L) + \cos(2L' - 2L), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
32 \sin^3 L \sin^3 L' = & 9 \cos(L' - L) - 9 \cos(L' + L) + \\
& + 3 \cos(3L + L') - 3 \cos(3L - L') + \\
& + 3 \cos(3L' + L) - 3 \cos(3L' - L) + \\
& + \cos(3L' - 3L) - 3 \cos(3L' + 3L), \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Таким образом, нам придется находить произведения вида

$$\begin{aligned}
\cos \beta \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = & \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + \beta] + \\
& + \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) - \beta].
\end{aligned}$$

Стоящие здесь справа суммы равны, так как они переходят одна в другую при замене i через $-i$. Поэтому

$$\cos \beta \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + \beta].$$

Пользуясь этой формулой, получим

$$\begin{aligned}
a' \Pi = & \frac{1}{2} v \sum c_3^{(i)} \cos (i+1)(L' - L) - \\
& - \frac{1}{2} v \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L],
\end{aligned}$$

или, заменяя в первой сумме $(i+1)$ через i ,

$$\begin{aligned}
a' \Pi = & \\
= & \frac{1}{2} v \sum c_3^{(i-1)} \cos i(L' - L) - \frac{1}{2} v \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L].
\end{aligned}$$

Вычислив таким же способом следующие величины (3.3), подставив полученные выражения в равенство (3.2) и сделав приведение подобных членов, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
a' \Delta^{-1} = & \frac{1}{2} \sum a' A_i \cos (iL' - iL) + \\
& + v \sum a' B_i \cos [(i+1)L' - (i-1)L] + \\
& + v^2 \sum a' C_i \cos [(i+2)L' - (i-2)L] + \\
& + v^3 \sum a' D_i \cos [(i+3)L' - (i-3)L] + \\
& + v^4 \sum a' E_i \cos [(i+4)L' - (i-4)L] + \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Коэффициенты стоящих здесь рядов даются формулами:

$$\begin{aligned}
 a'A_i &= c_3^{(i)} - \nu c_3^{(i-1)} + \frac{3}{4} \nu^2 (c_3^{(i-2)} + 2c_5^{(i)}) - \\
 &\quad - \frac{5}{8} \nu^3 (c_7^{(i-3)} + 9c_7^{(i-1)}) + \frac{35}{64} \nu^4 (c_9^{(i-4)} + 16c_9^{(i-2)} + 18c_9^{(i)}) - \dots, \\
 a'B_i &= \frac{1}{2} c_3^{(i)} - \frac{3}{4} \nu (c_5^{(i-1)} + c_5^{(i+1)}) + \frac{15}{16} \nu^2 (c_7^{(i-2)} + 3c_7^{(i)} + c_7^{(i+2)}) - \\
 &\quad - \frac{35}{32} \nu^3 (c_9^{(i-3)} + 6c_9^{(i-1)} + 6c_9^{(i+1)} + c_9^{(i+3)}) + \dots, \\
 a'C_i &= \frac{3}{8} c_5^{(i)} - \frac{15}{16} \nu (c_7^{(i-1)} + c_7^{(i+1)}) + \\
 &\quad + \frac{35}{64} \nu^2 (3c_9^{(i-2)} + 8c_9^{(i)} + 3c_9^{(i+2)}) - \dots, \\
 a'D_i &= \frac{5}{16} c_7^{(i)} - \frac{35}{32} \nu (c_9^{(i-1)} + c_9^{(i+1)}) + \dots, \\
 a'E_i &= \frac{35}{128} c_9^{(i)} - \dots
 \end{aligned}$$

Имея разложение (3.7) главной части каждой из пертурбационных функций (1.1), легко получить разложения полных выражений этих функций. В самом деле, для вторых частей пертурбационных функций выражения (1.12) в рассматриваемом случае дают

$$\left. \begin{aligned}
 a'R_1 &= \alpha (1 - \nu) \cos(L' - L) + \alpha \nu \cos(L' + L), \\
 a'R'_1 &= \alpha^{-2} (1 - \nu) \cos(L' - L) + \alpha^{-2} \nu \cos(L' + L).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Сопоставление этих выражений с разложением (3.7) показывает, что для получения разложения $a'R$ достаточно в равенстве (3.7) заменить

$$\left. \begin{aligned}
 a'A_1 &\text{ через } a'A_1 - \alpha(1 - \nu), \\
 a'A_{-1} &\text{ » } a'A_{-1} - \alpha(1 - \nu), \\
 a'B_0 &\text{ » } a'B_0 - \alpha,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

а чтобы получить $a'R'$, нужно в равенстве (3.7) заменить

$$\left. \begin{aligned}
 a'A_1 &\text{ через } a'A_1 - \alpha^{-2}(1 - \nu), \\
 a'A_{-1} &\text{ » } a'A_{-1} - \alpha^{-2}(1 - \nu), \\
 a'B_0 &\text{ » } a'B_0 - \alpha^{-2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Таким образом, для случая двух круговых орбит, плоскости которых образуют не слишком большой угол, задача разложения пертурбационных функций полностью решена. Для

фактического получения соответствующих рядов нужно только уметь вычислять величины (3.5), или, что то же самое, коэффициенты Лапласа для данного значения $\alpha = a/a'$. Этот вопрос будет рассмотрен в §§ 7 и 8.

§ 4. Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов

Формулы (1.11) и (1.12) показывают, что пертурбационную функцию R можно рассматривать как функцию четырех величин

$$r, r', W = \Pi + v, W' = \Pi' + v',$$

но по соображениям, которые будут сейчас ясны, нам удобнее представить эту функцию в таком виде:

$$R = F(\ln r, \ln r', W, W').$$

Положим

$$\ln r = \ln a + \rho, \quad \ln r' = \ln a' + \rho', \quad W = L + f, \quad W' = L' + f',$$

где через

$$f = v - M, \quad f' = v' - M'$$

обозначены уравнения центра для рассматриваемых планет.

Формулы (5.7) и (6.5) гл. VI позволяют легко получить следующие разложения по степеням эксцентриситета:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -e \cos M + e^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos 2M \right) + \\ &\quad + e^3 \left(\frac{3}{8} \cos M - \frac{17}{24} \cos 3M \right) + \dots, \\ f &= e \cdot 2 \sin M + e^2 \cdot \frac{5}{4} \sin 2M + \\ &\quad + e^3 \left(-\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots, \end{aligned} \right\} (4.1)$$

и аналогичные выражения для ρ' и f' .

Стоящая перед нами задача заключается в разложении функции

$$R = F(\ln a + \rho, \ln a' + \rho', L + f, L' + f') \quad (4.2)$$

по степеням e и e' , причем значение этой функции при $e = e' = 0$, т. е.

$$F(\ln a, \ln a', L, L') \quad (4.3)$$

дается разложением, найденным в предыдущем параграфе.

Начнем с разложения функции (4.2) по степеням ρ, ρ', f, f' . Для этого воспользуемся формулой Тэйлора:

$$\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v, \dots) = \exp\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \dots\right) \varphi(u, v, \dots).$$

Введя для сокращения письма символы

$$D = \frac{\partial}{\partial (\ln a)}; \quad D' = \frac{\partial}{\partial (\ln a')},$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L}; \quad D'_1 = \frac{\partial}{\partial L'},$$

получим

$$R = \exp(\rho D + \rho' D' + f D_1 + f' D'_1) F(\ln a, \ln a', L, L').$$

Так как $\exp(\rho D + \rho' D' + f D_1 + f' D'_1)$ есть произведение двух множителей

$$\exp(\rho D + f D_1) \quad \text{и} \quad \exp(\rho' D' + f' D'_1), \quad (4.4)$$

то рассмотрим символическое умножение функции (4.3) на каждый из этих множителей в отдельности.

Положив

$$\lambda = \exp(\sqrt{-1} L); \quad \lambda' = \exp(\sqrt{-1} L'),$$

мы можем функции (4.3), представляемой выражениями (3.7) и (3.8), придать форму

$$\sum H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'},$$

где через $H(s, s')$ обозначен ряд, расположенный по целым положительным степеням v . Суммирование по индексам s и s' производится от $-\infty$ до $+\infty$, причем сумма $s + s'$ в каждом члене есть четное не отрицательное число.

Общий член этого ряда

$$R^0 = H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \quad (4.5)$$

умножим на первый из символических множителей (4.4). Так как

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L} = \sqrt{-1} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

то

$$D_1 R^0 = \sqrt{-1} s R^0,$$

а потому

$$\exp(\rho D + f D_1) R^0 = \exp(\rho D + s f \sqrt{-1}) R^0. \quad (4.6)$$

Равенства (4.1) показывают, что

$$\exp(\rho D + s f \sqrt{-1}) = k_0 + k_1 e + k_2 e^2 + \dots, \quad (4.7)$$

где k_0, k_1, \dots функции D, s и M .

Если положить

$$\mu = \exp(\sqrt{-1} M),$$

то равенства (4.1) можно представить так:

$$\rho = -\frac{1}{2} e(\mu + \mu^{-1}) + \frac{1}{4} e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{3}{2} \mu^{-2} \right) + \dots,$$

$$f \sqrt{-1} = e(\mu - \mu^{-1}) + \frac{5}{8} e^2 (\mu^2 - \mu^{-2}) + \dots$$

Подставив эти выражения в равенство (4.7), получим

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= 1, \\ k_1 &= \Pi_1^1 \mu + \Pi_{-1}^1 \mu^{-1}, \\ k_2 &= \Pi_2^2 \mu^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2 \mu^{-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ k_n &= \Pi_n^n \mu^n + \Pi_{n-2}^n \mu^{n-2} + \dots + \Pi_{-n}^n \mu^{-n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Легко видеть, что $\Pi_r^n = \Pi_r^n(D, s)$, где $n=0, 1, 2, \dots, n - |r| = 0, 2, 4, \dots$, есть полином степени n относительно D и s . Эти полиномы мы будем называть *операторами Ньюкома*.

Таким образом, после умножения выражения (4.5) на (4.7) мы получим ряд, в котором член, содержащий e^n , будет иметь такой вид:

$$R_n^0 = e^n \sum_r P_r^n(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \mu^r, \quad (4.9)$$

где $r = n, n-2, n-4, \dots, -n$, причем для краткости положено

$$P_r^n = \Pi_r^n H(s, s').$$

Умножим теперь выражение (4.9) на второй из символических множителей (4.4). Это даст ряд, расположенный по степеням e' , в котором член с $(e')^{n'}$ будет

$$R_{n, n'}^0 = e^n (e')^{n'} \sum_r \sum_{r'} P_{r, r'}^{n, n'}(s, s') \lambda^s (\lambda')^{s'} \mu^r (\mu')^{r'},$$

где $r' = n', n'-2, \dots, -n'$. Здесь положено

$$P_{r, r'}^{n, n'}(s, s') = \Pi_r^n \Pi_{r'}^{n'} H(s, s'). \quad (4.10)$$

Таким образом, разложение пертурбационной функции получается окончательно в следующем виде:

$$R = \sum e^n (e')^{n'} P_{r, r'}^{n, n'}(s, s') \cos(sL + s'L' + rM + r'M'), \quad (4.11)$$

где n и n' меняются от 0 до $+\infty$, тогда как s, s', r, r' принимают целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем в каждом из членов

разложения величины $s+s'$, $n-|r|$, $n'-|r'|$ равны четным не отрицательным числам.

Выражение (4.10) можно представить в другой форме. Так как функция (4.3), даваемая разложениями (3.7) и (3.8), есть однородная функция a и a' , порядок которой равен -1 , то теорема Эйлера позволяет написать

$$a \frac{\partial F}{\partial a} + a' \frac{\partial F}{\partial a'} = -F$$

или

$$DF + D'F = -F.$$

Поэтому для рассматриваемых нами случаев имеет место символическое равенство

$$D + D' = -1.$$

Сообразно с этим можно положить

$$\Pi_r^{n, n'}(D', S') = \Pi_r^{n, n'}(-D - 1, s') = \Pi_0^{0, n'}(D, s')$$

и написать равенство (4.10) в следующем виде:

$$\Pi_r^{n, n'}(s, s') = \Pi_r^{n, n'}(D, s, s') H(s, s'), \quad (4.12)$$

где

$$\Pi_r^{n, n'}(D, s, s') = \Pi_r^n(D, s) \Pi_0^{0, n'}(D, s'). \quad (4.13)$$

Это соотношение показывает, что сложные операторы, входящие в окончательную формулу (4.12), получаются путем перемножения простых операторов.

Операторы (4.13), в которых $s+s'=2k$, называются операторами k -го класса. Эти операторы применяются к k -й строке формулы (3.7), в которую внесены изменения (3.9) и (3.10).

Когда все нужные операторы найдены, окончательное разложение пертурбационной функции легко получается по формулам (4.11) и (4.12). Для небольших значений индексов n , r , n' , r' вычисление операторов не представляет затруднений, но оно очень быстро усложняется при возрастании индексов. В этом случае как для нахождения операторов, так и для контроля используются многочисленные рекуррентные соотношения между операторами с различными индексами.

Наиболее полную таблицу готовых операторов, имеющих форму полиномов от D с численными коэффициентами, дает Ш. Г. Шараф [1955]. Здесь же, а также в статье Цейпеля [1912], можно найти подробные сведения о других работах, посвященных теории и применению операторов Ньюкома.

§ 5. Выражение пертурбационной функции через средние аномалии

Результаты двух предыдущих параграфов показывают, что пертурбационные функции, определяемые равенствами (1.1), могут быть разложены в ряды вида

$$R_{0,1} = \sum K e^h (e')^{h'} v^f \cos(sL + s'L' + rM + r'M'). \quad (5.1)$$

Здесь h, h', f принимают значения $0, 1, 2, \dots$, тогда как s, s', r, r' равны $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем сумма $s + s'$ есть четное число; наконец, разности $h - |r|, h' - |r'|, 2f - |s + s'|$ могут принимать лишь значения $0, 2, 4, \dots$.

Через K обозначены произведения $k^2 m'$ на функции больших полуосей a и a' , зависящие от целых чисел h, h', f, s, s', r, r' .

Так как

$$L = \Pi + M; \quad L' = \Pi' + M', \quad (5.2)$$

то ряд (5.1) можно представить так:

$$R_{0,1} = \sum K e^h (e')^{h'} v^f \cos(jM + j'M' + s\Pi + s'\Pi'), \quad (5.3)$$

где $j = s + r, j' = s' + r'$.

Весьма важное свойство членов этого разложения выражается следующей теоремой, на которую мы уже ссылались (§ 12 гл. XVI):

степень $h + h' + 2f$ какого-либо члена разложения (5.3) либо равна $|j + j'|$, либо превосходит эту величину на четное число.

Чтобы убедиться в этом, условимся обозначать через (2) любое из чисел $0, 2, 4, \dots$.

Тогда, как мы уже видели,

$$h = |r| + (2); \quad h' = |r'| + (2); \quad 2f = |s + s'| + (2),$$

и потому

$$h + h' + 2f = |r| + |r'| + |s + s'| + (2).$$

С другой стороны, легко проверить, что каковы бы ни были целые числа a, b, c , всегда имеет место равенство

$$|a| + |b| + |c| = |a + b + c| + (2).$$

Следовательно,

$$h + h' + 2f = |s + r + s' + r'| + (2),$$

что и доказывает теорему.

Разложение пертурбационной функции в форме (5.3) используется при нахождении планетных возмущений в координатах. Для нахождения планетных возмущений в элементах,

Леве́рье прида́л этому разложению другую форму. Вместо долгот L и L' , считае́мых от точки пересечения орбит, он ввел долготы в орбитах (удерживаем его обозначения):

$$l = nt + \varepsilon = L + \tau; \quad l' = n't + \varepsilon' = L' + \tau',$$

и по́ложил

$$\lambda = l + \tau' - \tau, \tag{5.4}$$

что дае́т

$$L = \lambda - \tau'; \quad L' = l' - \tau'. \tag{5.5}$$

С друго́й стороны, замеча́я, что

$$\pi = \tau + \Pi; \quad \pi' = \tau' + \Pi',$$

и по́ложив

$$\omega = \pi + \tau' - \tau = \Pi + \tau', \tag{5.6}$$

бу́дем име́ть

$$\Pi = \omega - \tau'; \quad \Pi' = \pi' - \tau'. \tag{5.7}$$

Из разложения (5.1) исклю́чим M и M' при помо́щи равенств (5.2) и в полу́ченный ряд подста́вим выра́жения (5.5) и (5.7). Это дае́т

$$R_{0,1} = \sum K e^h e'^{h'} v^j \cos(j\lambda + j'l' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'). \tag{5.8}$$

Ле́гко ви́деть, что числа $j, j', k, k', 2g$ связа́ны соотноше́нием

$$j + j' + k + k' - 2g = 0,$$

кото́рое являе́тся следствием неза́висимости функции (5.8) от нача́ла сче́та долгот.

Форма (5.8) разложения пертурбационной функции была испо́льзована Ле́веррье для построения теорий дви́жения большо́х планет. Он да́л разложение (5.8) в развернутом виде до членов се́дьмой степе́ни отно́сительно e, e' и J вклю́чительно [Ле́веррье, 1855]. Это разложение соде́ржит 469 членов. Бо́ке [1885] продо́лжил его до членов во́сьмой степе́ни вклю́чительно.

Метод, испо́льзованный в э́тих работах для разложения по степе́ням эксцентрисите́тов, подро́бно изложе́н Тиссе́раном [1889].

§ 6. Начальные члены разложения пертурбационной функции

Во мно́гих случаях бу́дет по́лезно име́ть первые члены разложения пертурбационной функции. Вы́полним по́этому опера́ции, указа́нные в пре́дыдущих пара́графах, огра́ничиваясь членами второ́й степе́ни. С тако́ю точно́стью разложение бы́ло полу́чено впервы́е Лагранже́м и Ла́пласом. Это позво́лило им ли́бо объ́яснить, ли́бо откры́ть некото́рые весьма суще́ственные особенност

движения тел солнечной системы, чего не мог сделать Эйлер, ограничивавшийся членами первой степени.

Выполнив указанные в § 4 операции для главной части первой из пертурбационных функций (1.1), мы получим, как легко проверить, следующее разложение:

$$\begin{aligned}
 k^2 m' \Delta^{-1} = k^2 m' (a')^{-1} \sum \left\{ \left[\frac{1}{2} c_1^{(i)} - \frac{1}{2} v c_3^{(i-1)} + \right. \right. \\
 + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) (-4i^2 + D + D^2) c_1^{(i)} \Big] \cos iS + \\
 + \frac{1}{2} e (-2i - D) c_1^{(i)} \cos (iS + M) + \\
 + \frac{1}{2} e' (2i + 1 + D) c_1^{(i)} \cos (iS + M') + \\
 + \frac{1}{8} e^2 [4i^2 - 5i + (4i - 3)D + D^2] c_1^{(i)} \cos (iS + 2M) + \\
 + \frac{1}{4} ee' (4i^2 + 2i - D - D^2) c_1^{(i)} \cos (iS - M + M') + \\
 + \frac{1}{4} ee' [-4i^2 - 2i - (4i + 1)D - D^2] c_1^{(i)} \cos (iS + M + M') + \\
 + \frac{1}{8} e'^2 [4i^2 + 9i + 4 + (4i + 5)D + D^2] c_1^{(i)} \cos (iS + 2M') + \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} v c_3^{(i-1)} \cos (iS + 2L) + \dots \right\}. \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Здесь для краткости положено

$$S = L' - L; \quad D = \frac{\partial}{\partial (\ln a)};$$

суммирование ведется по $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Хотя вторая часть каждой из функций (1.1) может быть учтена при помощи способа, указанного в конце § 3, представляет интерес иметь разложения этих частей в явной форме. Такие разложения могут быть легко получены из (6.1) при помощи следующих соображений.

Если эксцентриситеты e и e' равны нулю, то главная часть и вторая часть выражаются соответственно формулами (3.7) и (3.8). Сравнение этих формул показывает, что вторая часть функции $R_{0,1}$ получается из главной части, если в этой последней положить

$$c_1^{(1)} = c_1^{(-1)} = \alpha; \quad c_3^{(0)} = 2\alpha,$$

а все остальные величины $c_k^{(i)}$ заменить нулями. Учитывая это, из формулы (6.1) непосредственно находим для второй части

пертурбационной функции $R_{0,1}$ такое выражение:

$$\begin{aligned}
 k^2 m' r (r')^{-2} \cos H = & k^2 m' a'^{-1} \alpha \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e'^2 - \nu \right) \cos (L' - L) - \right. \\
 & - \frac{3}{2} e \cos (L' - \Pi) + \frac{1}{2} e \cos (L' - 2L + \Pi) + \\
 & + 2e' \cos (2L' - L - \Pi') + \\
 & + \frac{1}{8} e^2 \cos (L' + L - 2\Pi) + \frac{3}{8} e^2 \cos (L' - 3L + 2\Pi) + \\
 & + ee' \cos (2L' - 2L - \Pi' + \Pi) - 3ee' \cos (2L' - \Pi' - \Pi) + \\
 & + \frac{1}{8} e'^2 \cos (L' + L - 2\Pi') + \frac{27}{8} e'^2 \cos (3L' - L - 2\Pi') + \\
 & \left. + \nu \cos (L' + L) + \dots \right\}. \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

Точно так же второе из выражений (3.8) получается из (3.7), если положить

$$c_1^{(1)} = c_1^{(-1)} = \alpha^{-2}; \quad c_3^{(0)} = 2\alpha^{-2},$$

а все остальные $c_k^{(n)}$ равными нулю. Сообразно с этим, вторая часть пертурбационной функции $R_{1,0}$ разлагается в ряд:

$$\begin{aligned}
 k^2 m r' r^{-2} \cos H = & k^2 m a'^{-1} \alpha^{-2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e'^2 - \nu \right) \cos (L' - L) + \right. \\
 & + 2e \cos (L' - 2L + \Pi) - \\
 & - \frac{3}{2} e' \cos (L - \Pi') + \frac{1}{2} e' \cos (2L' - L - \Pi') + \\
 & + \frac{1}{8} e^2 \cos (L' + L - 2\Pi) + \frac{27}{8} e^2 \cos (L' - 3L + 2\Pi) + \\
 & + ee' \cos (2L' - 2L - \Pi' + \Pi) - 3ee' \cos (2L - \Pi' - \Pi) + \\
 & + \frac{1}{8} e'^2 \cos (L' + L - 2\Pi') + \frac{3}{8} e'^2 \cos (3L' - L - 2\Pi') + \\
 & \left. + \nu \cos (L' + L) + \dots \right\}. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Мы уже видели (§ 14 гл. XVI), что вековая часть пертурбационной функции, иначе говоря, совокупность членов, не зависящих от средних аномалий рассматриваемых планет, получается от разложения главной части этой функции. Невозможность появления вековых членов при разложении вторых частей усматривается и из того способа, которым получают выражения (6.2) и (6.3).

Таким образом, в принятых нами пределах точности вековая часть пертурбационной функции $R_{0,1}$ выражается так:

$$[R_{0,1}] = \frac{k^2 m'}{a'} \left[\frac{1}{2} c_1^{(0)} - \frac{1}{2} v c_3^{(1)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) (D + D^2) c_1^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} e e' (2 - D - D^2) c_1^{(1)} \cos (\Pi' - \Pi) \right]. \quad (6.4)$$

Это выражение можно представить в несколько ином виде. Так как

$$\Pi' - \Pi = (\pi' - \tau') - (\pi - \tau) = \pi' - \pi - (\tau' - \tau),$$

а разность $\tau' - \tau$ есть величина второго порядка относительно J , как это было показано в § 2, то в пределах принятой точности можно заменить $\cos (\Pi' - \Pi)$ через $\cos (\pi' - \pi)$.

С другой стороны, соотношение

$$2v = 2 \sin^2 \frac{J}{2} = 1 - \cos J = 1 - \cos i \cos i' - \sin i \sin i' \cos (\Omega' - \Omega),$$

или

$$2v = 2 \sin^2 \frac{i}{2} + 2 \sin^2 \frac{i'}{2} \cos i - \sin i \sin i' \cos (\Omega' - \Omega)$$

позволяет с принятой нами точностью заменить $2v$ через

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i' - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos (\Omega' - \Omega).$$

Таким образом, формулу (6.4) мы можем заменить такой:

$$[R_{0,1}] = k^2 m' \{ M_{0,1} + N_{0,1} [e^2 + e'^2 - \operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 i' + \\ + 2 \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos (\Omega' - \Omega)] - 2 P_{0,1} e e' \cos (\pi' - \pi) \}. \quad (6.5)$$

Через $M_{0,1}$, $N_{0,1}$, $P_{0,1}$ здесь обозначены коэффициенты, зависящие только от a и a' . Фигурная скобка в выражении (6.5) есть результат осреднения по времени величины Δ^{-1} , которая симметрична относительно рассматриваемых планет. Отсюда следует, что $M_{0,1}$, $N_{0,1}$, $P_{0,1}$ суть симметрические функции a и a' .

Так, например, из (3.4) и (3.5) следует, что

$$a'^{-1} c_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{(a a')^{\frac{n-1}{2}} \cos i S dS}{(a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos S)^{\frac{n}{2}}}$$

есть симметрическая функция a и a' .

Примечание. Если использовать разложения функций эллиптического движения, изученные в гл. VI, то легко получить для вторых частей пертурбационных функций разложения в триго-

нометрические ряды по кратным средним аномалий другого вида. В отличие от разложений, получаемых из (6.2) и (6.3), в этих разложениях мы будем иметь выражение общего члена. Он будет выражен через бесселевы функции эксцентриситетов.

§ 7. Вычисление коэффициентов Лапласа

При использовании рассмотренных в предыдущих параграфах разложений пертурбационной функции приходится вычислять функции $c_n^{(l)}$ отношения больших полуосей $\alpha = a/a'$. Эта задача приводится в силу формулы (3.5) к нахождению коэффициентов Лапласа, определяемых равенством

$$(1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(l)} \cos lS \quad (7.1)$$

и условием $b_n^{(-l)} = b_n^{(l)}$, для $n=1, 3, 5, \dots$.

Покажем, прежде всего, что величины $b_n^{(l)}$ могут быть вычислены при помощи степенных рядов.

Положив

$$z = \exp(S \sqrt{-1}),$$

будем иметь

$$1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1}) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1}).$$

Следовательно, равенство (7.1) можно заменить таким:

$$(1 - \alpha z)^{-\frac{n}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(l)} z^l. \quad (7.2)$$

Так как

$$(1 - \alpha z^{\pm 1})^{-\frac{n}{2}} = 1 + \frac{n}{2} \alpha z^{\pm 1} + \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4} \alpha^2 z^{\pm 2} + \dots,$$

то, приравняв коэффициенты при z^l , мы получим для $l \geq 0$ такое разложение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_n^{(l)} = & \frac{n(n+2) \dots (n+2l-2)}{2 \cdot 4 \dots (2l)} \alpha^l \left[1 + \frac{n}{2} \frac{n+2l}{2l+2} \alpha^2 + \right. \\ & \left. + \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4} \frac{(n+2l)(n+2l+2)}{(2l+2)(2l+4)} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В частности, при $l=0$ имеем

$$\frac{1}{2} b_n^{(0)} = 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{n(n+2)}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \dots \quad (7.4)$$

Ряд (7.3) сходится при $|\alpha| < 1$, но сходимость его достаточно быстрая лишь при малых значениях $|\alpha|$. Кроме того, быстрота сходимости убывает при возрастании n .

Другие, более выгодные в вычислительном отношении разложения дает теория гипергеометрических функций.

Если воспользоваться общепринятым обозначением гипергеометрического ряда

$$F(A, B, C; x) = 1 + \frac{AB}{1 \cdot C} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{1 \cdot 2 \cdot C(C+1)} x^2 + \dots \quad (7.5)$$

и символом

$$(k, i) = k(k+1) \dots (k+i-1) \quad (k, 0) = 1,$$

то формулу (7.3) можно написать так:

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{(n/2, i)}{(1, i)} \alpha^i F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1; \alpha^2\right). \quad (7.6)$$

Хорошо известное соотношение

$$F(A, B, C; x) = (1-x)^{-A} F\left(A, C-B, C; \frac{-x}{1-x}\right)$$

показывает, что

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{(n/2, i)}{(1, i)} \alpha^i (1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} F\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, i + 1; -p\right),$$

где

$$p = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Это дает ряд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_n^{(i)} = & \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2i)} \alpha^i (1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \left[1 + \frac{n}{2} \frac{n-2}{2i+2} p + \right. \\ & \left. + \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4} \frac{(n-2)(n-4)}{(2i+2)(2i+4)} p^2 + \dots \right] \quad (7.7) \end{aligned}$$

сходящийся при $|p| < 1$, иначе говоря, при

$$|\alpha| < 1/\sqrt{2} = 0,707 \dots$$

Другой путь для вычисления коэффициентов Лапласа открывает формула

$$b_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x)^{-\frac{n}{2}} \cos ix \, dx, \quad (7.8)$$

непосредственно вытекающая из равенства (7.1).

В таком виде эта формула неудобна для применения метода квадратур при сколько-нибудь значительных i , поскольку число колебаний подынтегральной функции в этих случаях велико. Но из нее могут быть получены другие, более удобные.

Легко проверяемое соотношение

$$\int_0^{\pi} \cos^p x \cos ix dx = \frac{p(p-1) \dots (p-i+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)} \int_0^{\pi} \cos^{p-i} x \sin^{2i} x dx$$

дает для каждой функции $f(t)$, разложимой в ряд

$$f(t) = \sum_0^{\infty} a_p t^p,$$

сходящийся при $|t| \leq 1$, формулу Якоби:

$$\int_0^{\pi} f(\cos x) \cos ix dx = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)} \int_0^{\pi} f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x dx.$$

Применив эту формулу к интегралу (7.8), получим

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)} \frac{2}{\pi} \alpha^i \int_0^{\pi} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x)^{-\frac{n}{2}-i} \sin^{2i} x dx. \quad (7.9)$$

Если воспользоваться преобразованием Ландена

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin x}{\cos x - \alpha},$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}}; \quad d\varphi = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} dx,$$

то из формулы (7.9) легко получить такую:

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)} \frac{2}{\pi} \alpha^i \times \\ \times \int_0^{\pi} \left[\frac{\alpha \cos \varphi + \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \alpha^2} \right]^{n-1} \frac{\sin^{2i} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7.10)$$

Применение формул квадратур к интегралам, стоящим в формуле (7.9) или (7.10), дает самый лучший способ для получения коэффициентов Лапласа во всех случаях, когда употребление небольшого числа первых членов рядов (7.3) и (7.7) не может обеспечить нужную точность.

Из формулы (7.10) легко получить соотношения

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{4}{\pi} F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.11)$$

$$b_1^{(1)} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{4}{\pi\alpha} \left[F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (7.12)$$

выражающие первые два коэффициента Лапласа через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Для нахождения этих последних существуют многочисленные таблицы [Лебедев и Федорова, 1956], а также весьма эффективные способы прямого вычисления. Флетчер [1938] дал таблицы коэффициентов $b_1^{(0)}$ и $b_1^{(1)}$ с одиннадцатью знаками до $\alpha=0,995$.

§ 8. Рекуррентные соотношения

Равенство (7.2), которое может служить для определения коэффициентов Лапласа, напомним так:

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum b_n^{(i)} z^i. \quad (8.1)$$

Соотношение

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} \sum i b_n^{(i)} z^{i-1},$$

получающееся дифференцированием равенства (8.1) по z , может быть написано в двух следующих формах:

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) \sum b_n^{(i)} z^i = [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})] \sum i b_n^{(i)} z^{i-1}, \quad (8.2)$$

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) \sum b_{n+2}^{(i)} z^i = \sum i b_n^{(i)} z^{i-1}. \quad (8.3)$$

Приравняв коэффициенты при z^{i-1} в обеих частях равенства (8.2), получим

$$(2i - n + 2) b_n^{(i+1)} = 2i(\alpha + \alpha^{-1}) b_n^{(i)} - (2i + n - 2) b_n^{(i-1)}. \quad (8.4)$$

Таким образом, если среди коэффициентов $b_n^{(i)}$, имеющих одинаковые нижние индексы, известны два с соседними верхними индексами, то последовательное применение соотношения (8.4) даст все остальные коэффициенты с тем же нижним индексом. Достаточно, например, непосредственно вычислить $b_n^{(0)}$ и $b_n^{(1)}$, чтобы найти при помощи (8.4) все $b_n^{(i)}$.

Обратимся теперь к выводу соотношений, связывающих $b_{n+2}^{(i)}$ и $b_n^{(i)}$. Приравняв коэффициенты при z^{i-1} в левой и правой частях равенства (8.3), будем иметь

$$\frac{1}{2} n \alpha (b_{n+2}^{(i-1)} - b_{n+2}^{(i+1)}) = i b_n^{(i)}. \quad (8.5)$$

С другой стороны, соотношение (8.1) после замены n через $n+2$ можно написать так:

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})] \sum b_{n+2}^{(i)} z^i = \sum b_n^{(i)} z^i,$$

откуда

$$(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - \alpha (b_{n+2}^{(i-1)} + b_{n+2}^{(i+1)}) = b_n^{(i)}. \quad (8.6)$$

Исключение $b_{n+2}^{(i-1)}$ из соотношений (8.5) и (8.6) дает:

$$n(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2\alpha b_{n+2}^{(i+1)} = (n + 2i) b_n^{(i)}. \quad (8.7)$$

Если из этих же соотношений исключить $b_{n+2}^{(i+1)}$, то получим

$$n(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2\alpha n b_{n+2}^{(i-1)} = (n - 2i) b_n^{(i)},$$

или, заменив i через $i + 1$,

$$n(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i+1)} - 2\alpha n b_{n+2}^{(i)} = (n - 2i - 2) b_n^{(i+1)}. \quad (8.8)$$

Соотношения (8.7) и (8.8) дают возможность, зная коэффициенты $b_n^{(0)}$, $b_n^{(1)}$, ..., находить $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, ... Выгодно, как заметил еще Лежандр, пользоваться следующими комбинациями этих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} n(1 - \alpha)^2 (b_{n+2}^{(i)} + b_{n+2}^{(i+1)}) &= (2i + n) b_n^{(i)} - (2i - n + 2) b_n^{(i+1)}, \\ n(1 + \alpha)^2 (b_{n+2}^{(i)} - b_{n+2}^{(i+1)}) &= (2i + n) b_n^{(i)} + (2i - n + 2) b_n^{(i+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Это позволяет находить неизвестные величины попарно: сначала $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, затем $b_{n+2}^{(1)}$, $b_{n+2}^{(2)}$ и т. д. Каждый коэффициент $b_{n+2}^{(i)}$ получается здесь дважды, что дает полезный контроль без заметного увеличения работы.

Для очень малых значений α применение соотношения (8.4) сопровождается прогрессивно возрастающей потерей точности. То же самое имеет место для соотношений (8.9), если α близко к единице.

Были предложены и другие пути использования зависимостей, имеющих место между коэффициентами Лапласа с различными индексами [Тиссеран, 1889; Цейпель, 1912].

§ 9. Производные коэффициентов Лапласа

Для разложения пертурбационной функции в ряд нужно знать не только коэффициенты Лапласа, но и их производные по α .

Эти производные могут быть получены путем почленного дифференцирования выражений (7.3) или (7.7). Однако сходимость получающихся при этом рядов оказывается в большинстве случаев недостаточно быстрой. Предпочитают поэтому пользоваться линейными соотношениями, связывающими величины

$$D^k b_n^{(i)} \quad (n = 1, 3, 5, \dots; k, i = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (9.1)$$

Такие соотношения легко получить при помощи дифференцирования по α равенства (8.1). Их можно найти у Леверрье [1855] и Тиссерана [1889]. Мы не будем на них останавливаться, поскольку в изложенном выше способе разложения пертурбационной функции вместо величин (9.1) употребляются величины

$$D^k c_n^{(l)} = \frac{d^k}{(d \ln \alpha)^k} \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(l)} \right). \quad (9.2)$$

Для нахождения величин (9.2) Ньюкомом был разработан следующий, весьма эффективный способ, основанный на использовании свойств гипергеометрических функций [Ньюком, 1891, 1895а].

Формула (7.6) показывает, что

$$c_n^{(l)} = 2 \frac{(n/2, i)}{(1, i)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i-1)} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1; \alpha^2\right). \quad (9.3)$$

Ньюком вводит в рассмотрение величины, определяемые более общим выражением

$$c_n^{i, j} = 2^{j+1} \left(\frac{n}{2}, j\right) \frac{(n/2, i+j)}{(1, i+j)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-1)} \times \\ \times F\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + i + j, i + j + 1; \alpha^2\right). \quad (9.4)$$

При $j=0$ это выражение обращается в (9.3).

Разложение гипергеометрической функции

$$F(A, B, C; x) = 1 + \frac{AB}{1 \cdot C} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{1 \cdot 2 \cdot C(C+1)} x^2 + \dots \quad (9.5)$$

показывает, что

$$\frac{d}{dx} F(A, B, C; x) = \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; x).$$

Следовательно,

$$DF(A, B, C; \alpha^2) = 2\alpha^2 \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; \alpha^2),$$

а потому, как легко убедиться,

$$Dc_n^{i, j} = \frac{1}{2}(n+2i+4j-1)c_n^{i, j} + c_n^{i, j+1}.$$

Применив к обеим частям этого равенства операцию D^k , будем иметь

$$D^{k+1}c_n^{i, j} = \frac{1}{2}(n+2i+4j-1)D^k c_n^{i, j} + D^k c_n^{i, j+1} \quad (9.6)$$

$$(n=1, 3, 5, \dots; i, j, k=0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом, зная величины $c_n^{i,j}$, мы можем найти сначала $Dc_n^{i,j}$, затем $D^2c_n^{i,j}$, и т. д. Этим самым станут известны и нужные нам величины (9.2).

Обратимся теперь к нахождению величин (9.4). Решение этой задачи разделим на три части.

Покажем, прежде всего, как, зная $c_n^{0,j}$, найти $c_n^{i,j}$ для $i=1, 2, \dots$.

Выражение (9.4) показывает, что

$$c_n^{i-1,j} = LF(A, B, C; \alpha^2);$$

$$c_n^{i,j} = L \frac{n+2i+2j-2}{2i+2j} \alpha F(A, B+1, C+1; \alpha^2),$$

$$c_n^{i+1,j} = L \frac{(n+2i+2j-2)(n+2i+2j)}{(2i+2j)(2i+2j+2)} \alpha^2 F(A, B+2, C+2; \alpha^2),$$

где выделен общий множитель

$$L = 2^{j+1} \left(\frac{n}{2}, j \right) \frac{(n/2, i+j-1)}{(1, i+j-1)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-3)}$$

и для краткости положено

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + i + j - 1; \quad C = i + j.$$

Воспользуемся теперь следующим свойством гипергеометрических функций, легко доказываемым при помощи ряда (9.5):

$$C(C+1)F(A, B, C; x) -$$

$$- (C+1)[C+(B-A+1)x]F(A, B+1, C+1; x) + \\ + (B+1)(C-A+1)x F(A, B+2, C+2; x) = 0.$$

Это даст

$$(2i+2j+n-2)\alpha c_n^{i-1,j} - 2(i+j+i\alpha^2)c_n^{i,j} + \\ + (2i-n+2)\alpha c_n^{i+1,j} = 0. \quad (9.7)$$

Введем вспомогательные величины

$$p_n^{i,j} = c_n^{i,j} / c_n^{i-1,j} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (9.8)$$

и положим

$$P_n^{i,j} = \frac{(2i+2j+n-2)\alpha}{2i(1+\alpha^2)+2j}; \quad Q_n^{i,j} = \frac{(2i-n+2)\alpha}{2i(1+\alpha^2)+2j}.$$

Тогда соотношение (9.7) можно будет представить в таком виде:

$$p_n^{i,j} = P_n^{i,j} / (1 - Q_n^{i,j} p_n^{i+1,j}). \quad (9.9)$$

Эта формула позволяет найти величину (9.8) для $i=k-1, k-2, \dots, 2, 1$, если она известна для $i=k$. Что же касается

вычисления этого отношения при $i=k$, то оно может быть выполнено при помощи следующей цепной дроби, непосредственно вытекающей из формулы (9.9), а именно:

$$p_n^{k,j} = \frac{P_k}{1 - \frac{Q_k P_{k+1}}{1 - \frac{Q_{k+1} P_{k+2}}{1 - \dots}}} \quad (9.10)$$

Здесь для краткости положено

$$P_k = P_n^{k,j}; \quad Q_k = Q_n^{k,j}.$$

Заметим, что

$$P_\infty = Q_\infty = \alpha/(1 + \alpha^2).$$

Итак, первая часть задачи, состоящая в нахождении отношений (9.8), решена.

Вторая часть задачи заключается в вычислении величин $c_1^{0,j}$. Так как величина

$$c_1^{0,0} = c_1^{(0)} = b_1^{(0)} \quad (9.11)$$

находится без затруднений при помощи формулы (7.4) или (7.11), то вопрос приводится к последовательному нахождению $c_1^{0,1}, c_1^{0,2}, \dots$. Это может быть сделано при помощи рекуррентного соотношения, которое мы сейчас выведем.

Общая формула (9.4) дает

$$c_n^{1,j} = MF(A, B, C; \alpha^2),$$

$$c_n^{1,j+1} = M(n+2j) \frac{n+2j+2}{2j+4} \alpha^2 F(A+1, B+1, C+1; \alpha^2),$$

$$c_n^{0,j+1} = M(n+2j) \alpha F(A+1, B, C; \alpha^2),$$

где выделен общий множитель

$$M = 2^{j+1} \left(\frac{n}{2}, j \right) \frac{(n/2, j+1)}{(1, j+1)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+4j+1)}$$

и положено

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + j + 1; \quad C = j + 2.$$

При помощи разложений (9.5) легко проверить, что

$$CF(A, B, C; x) - CF(A+1, B, C; x) + Bx F(A+1, B+1, C+1; x) = 0.$$

Поэтому

$$(n+2j) \alpha c_n^{1,j} - c_n^{0,j+1} + \alpha c_n^{1,j+1} = 0.$$

Пользуясь опять величинами (9.8), напомним это равенство в форме

$$c_1^{0,j+1} = \frac{(2j+1) \alpha p_1^{1,j} c_1^{0,j}}{1 - \alpha p_1^{1,j+1}}. \quad (9.12)$$

Так как величины (9.8) и (9.11) уже известны, то повторное применение соотношения (9.12) даст все величины $c_1^{0,1}, c_1^{0,2}, \dots$

Третья и последняя часть задачи заключается в нахождении $c_n^{0,j}$, где $n=3, 5, \dots$

Чтобы выразить эти величины через уже найденные, рассмотрим величины

$$c_n^{0,j} = NF(A, B, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{0,j} = N \left(\frac{n+2j}{n} \right)^2 \alpha F(A+1, B+1, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{1,j} = N \left(\frac{n+2j}{n} \right)^2 \frac{n+2j+2}{2j+2} \alpha^2 F(A+1, B+2, C+1; \alpha^2),$$

где

$$N = 2^{j+1} \left(\frac{n}{2}, j \right) \frac{(n/2, j)}{(1, j)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+4j-1)},$$

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + j; \quad C = j + 1.$$

Пользуясь зависимостью между гипергеометрическими функциями, выражаемой равенством

$$C(A-C+1)F(A, B, C; x) -$$

$$- C(A-C+1+Bx)F(A+1, B+1, C, x) +$$

$$+ (A+1)(A-C+1+Bx)F(A+1, B+2, C+1; x) = 0,$$

получим

$$(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j} - [n^2 + n(n+2j)\alpha^2] c_{n+2}^{0,j} + 2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{1,j} = 0,$$

откуда

$$c_{n+2}^{0,j} = \frac{(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j}}{n^2 + n(n+2j)\alpha^2 - 2n(n+j)\alpha p_{n+2}^{1,j}}. \quad (9.13)$$

Эта формула полностью решает задачу последовательного вычисления $c_3^{0,j}, c_5^{0,j}, \dots$ по уже найденным $c_1^{0,j}$.

§ 10. Дополнительные замечания

Коэффициенты Лапласа и их производные являются функциями одной независимой переменной α , а потому могут быть удобно табулированы.

Таблицы Ранкля [1855] позволяют находить логарифмы величин

$$d^j b_n^{(i)} / d\alpha^j$$

для $\alpha = 0,000(0,005) \dots 0,750$, если $n = 1, 3, 5; i = 0, 1, 2, \dots, 9; j = 0, 1, \dots, 5$. Логарифмы даются с семью, шестью и пятью десятичными знаками в зависимости от величины индексов. Для наибольших значений индексов вместо готовых значений даются

ряды, расположенные по степеням α , с уже вычисленными коэффициентами.

Таблицы Брауна и Брауэра [1933] дают по аргументу $\rho = \alpha^2/(1 - \alpha^2)$ логарифмы функции $G_{n/2}^{(i)}$, определяемой равенством

$$b_n^{(i)} = \alpha^i (1 - \alpha^2)^{-n/2} G_{n/2}^{(i)}$$

для $\rho = 0,00(0,01) \dots 2,50$ (что соответствует изменению α от 0 до 0,845), причем $i = 0, 1, 2, \dots, 11$. Эти логарифмы даются с восемью десятичными знаками для $n = 1, 3, 5$ и с семью для $n = 7$.

Таблицы содержат, кроме того, значения функций $K_{1/2}^{(i)}, K_{3/2}^{(i)}$, определяемых равенствами

$$b_n^{(i)} = (1 - \alpha^2)^{-1} K_{n/2}^{(i)}, \quad n = 1, 3$$

для $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Аргументом здесь служит α , изменяющееся от 0,900 до 0,950.

Наличие этих таблиц в большинстве случаев избавляет от необходимости вычислять коэффициенты Лапласа. Рекуррентные соотношения, рассмотренные нами в § 8, могут быть использованы для контроля.

Для перехода от производных по α к нужным нам производным по $\ln \alpha$ служит соотношение

$$(ad/da)^k = D(D-1)(D-2) \dots (D-k+1).$$

При прямом нахождении производных (9.2) способом, указанным в предыдущем параграфе, важное значение имеет вычисление отношений (9.8). Это вычисление начинается с наибольшего нужного нам значения $i = k$ и выполняется при помощи цепной дроби (9.10).

Если α велико, то цепную дробь (9.10) можно заменить другой, сходящейся значительно быстрее. Для этого заметим, что

$$p_n^{k,j} = \frac{c_n^{k,j}}{c_n^{k-1,j}} = \frac{n+2k+2j-2}{2k+2j} \alpha \frac{F(A, B+1, C+1; \alpha^2)}{F(A, B, C; \alpha^2)},$$

где

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + k + j - 1; \quad C = k + j.$$

Остается воспользоваться следующим, указанным Гауссом, разложением:

$$\frac{F(A, B+1, C+1; x)}{F(A, B, C; x)} = \frac{1}{1 - \alpha_1 x} \frac{1}{1 - \beta_1 x} \frac{1}{1 - \alpha_2 x} \frac{1}{1 - \beta_2 x} \dots$$

где

$$\alpha_1 = \frac{A}{C} \frac{C-B}{C+1}, \quad \beta_1 = \frac{B+1}{C+1} \frac{C+1-A}{C+2},$$

$$\alpha_2 = \frac{A+1}{C+2} \frac{C+1-B}{C+3}, \quad \beta_2 = \frac{B+2}{C+3} \frac{C+2-A}{C+4},$$

.

причем α_{m+1} , β_{m+1} , получаются из α_m , β_m путем замены A , B и C через $A+1$, $B+1$ и $C+2$.

Для вычисления величин $D^k c_3^{(i)}$, $D^k c_5^{(i)}$, ..., когда величины $D^k c_1^{(i)}$ уже найдены, Иннесом была предложена следующая формула [Иннес, 1909]:

$$n^2 D^k c_{n+2}^{(i)} = D^k \left[D^2 + D - \left(i + \frac{n-1}{2} \right) \left(i + \frac{n-3}{2} \right) \right] c_n^{(i-1)} =$$

$$= D^k \left[D^2 + D - \left(i - \frac{n-1}{2} \right) \left(i - \frac{n-3}{2} \right) \right] c_n^{(i+1)}.$$

При выполнении вычислений целесообразно пользоваться следующими, вытекающими из нее соотношениями (множитель D^k для краткости не пишем):

$$\frac{1}{2} n^2 (c_{n+2}^{(i-1)} + c_{n+2}^{(i+1)}) = \left(D^2 + D - i^2 - \frac{n^2-1}{4} \right) c_n^{(i)},$$

$$\frac{1}{2} n^2 (c_{n+2}^{(i-1)} - c_{n+2}^{(i+1)}) = (\quad \quad \quad + ni) c_n^{(i)}.$$

Каждая из вычисляемых величин находится при этом дважды, что дает очень полезный контроль.

Несколько иной путь для вычисления коэффициентов Лапласа и их производных был указан Андуйе [1923]. Относительно других относящихся сюда работ сведения можно найти у Цейпеля [1912].

§ 11. Случай, когда взаимный наклон орбит велик

Изученная нами в предыдущих параграфах форма разложения пертурбационной функции пригодна лишь в том случае, когда взаимный наклон J орбит рассматриваемых планет достаточно мал (§ 1). Были получены и другие формы разложения в тригонометрические ряды, пригодные при всех значениях J . Вследствие значительно большей сложности, эти формы разложения пока не нашли сколько-нибудь широкого применения. Поэтому мы не будем их подробно рассматривать, а ограничимся лишь немногими указаниями.

Основой разложения пертурбационной функции является всегда разложение величины (§ 3):

$$D_0^{-1} = a' \Delta_0^{-1} = (1 + a^2 - 2a\sigma)^{-1/2},$$

где

$$\sigma = \cos H = \mu \cos(L' - L) + \nu \cos(L' + L),$$

$$\mu = \cos^2 \frac{J}{2}; \quad \nu = \sin^2 \frac{J}{2}.$$

Делая для краткости

$$x = L' - L; \quad y = L' + L,$$

получим

$$D_0^{-1} = b^{0,0} + 2 \sum_1^{\infty} b^{i,0} \cos ix + 2 \sum_1^{\infty} b^{0,j} \cos jy +$$

$$+ 4 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} b^{i,j} \cos ix \cos jy, \quad (11.1)$$

причем

$$\pi^2 b^{i,j} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} D_0^{-1} \cos ix \cos jy \, dx \, dy.$$

Формула Якоби (§ 7) позволяет придать этому выражению следующую форму:

$$\pi^2 b^{i,j} = \frac{(1/2, i+j)}{(1/2, i)(1/2, j)} (\alpha\mu)^i (\alpha\nu)^j \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} D_0^{-2i-2j-1} \sin^{2i} x \sin^{2j} y \, dx \, dy. \quad (11.2)$$

Отсюда видно, что коэффициенты $b^{i,j}$, получившие название *коэффициентов Якоби*, положительны. Формула (11.2) позволяет легко оценивать величины этих коэффициентов, а также находить их численные значения с любой точностью при помощи механических квадратур.

Изучению аналитической структуры коэффициентов Якоби было посвящено много работ [Тиссеран, 1889; Цейпель, 1912; Пламмер, 1918]. Наибольший практический интерес представляют полученные Сундманом ряды, выражающие величины $D^m b^{i,j}$ через коэффициенты Лапласа и их производные [Сундман, 1901]. Эти ряды сходятся при $0 < \nu < 1$.

Р. А. Лях показал, что разложению (11.1) целесообразно придать другую форму, позволяющую представить пертурбационную функцию в следующем виде:

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{b}^{l,j}(\alpha, \nu, \mu) \cos(il' + jL)$$

или, в более развернутой форме,

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n \sum_{k'=0}^{E(n/2)} \sum_{k=0}^n a_{k'k}^{(n)}(\nu, \mu) \cos[(n-2k')L' + (n-2k)L],$$

где $a_{k', k}^{(n)}(\nu, \mu)$ полиномы от ν и μ степени n . Он нашел эти полиномы для $n \leq 5$, а также дал формулы для их дальнейшего вычисления [Лях, 1959].

Разложение совершенно иной структуры было получено Н. Б. Еленевской [1952]. Она показала, что пертурбационная функция может быть разложена в ряд

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} b_1^{(h)}(\alpha) \sum_{l, j, k} A_{l, j, k}^{(h)} \cos(iL + jL' + kJ),$$

являющийся тригонометрическим не только по отношению к средним долготам L и L' , но и по отношению к взаимному наклону орбит J .

§ 12. Численные методы разложения пертурбационной функции

Методы разложения пертурбационной функции R , рассмотренные в предыдущих параграфах, дают R в форме ряда, каждый член которого есть тригонометрическая функция кратных средних аномалий M и M' с коэффициентом, являющимся явной функцией всех элементов орбит, за исключением больших полуосей. Только для этих последних приходится (по причине сложности коэффициентов Лапласа) употреблять численные значения с самого начала.

Такого рода методы, сохраняющие за элементами их общие, буквенные значения, принято называть аналитическими.

Аналитические методы дают наиболее полное решение задачи. В частности, они позволяют очень просто находить производные R по элементам, что необходимо для применения уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI).

Но аналитические методы, дающие коэффициенты тригонометрических функций в виде рядов, расположенных по степеням e , e' , ν , оказываются практически применимыми лишь для очень малых значений этих величин (не больших, примерно, чем 0,15 или 0,20). Это может иметь место и в тех случаях, когда сами коэффициенты тригонометрических рядов убывают достаточно быстро и эти ряды хорошо сходятся. Употребление разложений R в тригонометрические ряды по кратным не средних аномалий, а эксцентрических [Ньюком, 1891], или истинных [Браун и Шук, 1933], не меняет положения дела, так как в конце концов приходится полученные ряды преобразовывать в ряды, расположенные по кратным средним аномалий.

Вследствие этого нередко приходится прибегать к численным методам разложения R , в которых всем элементам сразу

даются их численные значения, а коэффициенты тригонометрического ряда находятся по формулам гармонического анализа. Конечно, полученное этим путем разложение не может служить для нахождения производных R по элементам. Поэтому таким разложением нельзя пользоваться для нахождения возмущений элементов по формулам Лагранжа. Но численные методы разложения R вполне пригодны для вычисления возмущенных координат методами, которые будут изложены в следующей главе. Для применения этих методов достаточно иметь разложения Δ^{-1} и Δ^{-3} , если вычисляются возмущения только первого порядка; если же ищутся и возмущения высших порядков, то нужны еще и разложения Δ^{-5} , Δ^{-7} , ... Но вычислять производные R по элементам здесь не приходится.

Задача заключается в нахождении коэффициентов ряда

$$R = \sum_{i, i'} [A_{i, i'} \cos(iM + i'M') + B_{i, i'} \sin(iM + i'M')]. \quad (12.1)$$

Этот ряд можно представить в форме

$$R = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \dots + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \dots, \quad (12.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_i(M') = \alpha_0^i + \alpha_1^i \cos M' + \dots + \beta_1^i \sin M' + \dots, \\ b_i &= b_i(M') = \gamma_0^i + \gamma_1^i \cos M' + \dots + \delta_1^i \sin M' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Обозначим через $R_{k, k'}$ значение функции R для $M = M_k$, $M' = M_{k'}$, где

$$\begin{aligned} M_k &= k(2\pi/m); & M_{k'} &= k'(2\pi/m'), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m-1; & k' &= 0, 1, 2, \dots, m'-1. \end{aligned}$$

Обычные формулы гармонического анализа позволяют найти значения коэффициентов ряда (12.1) для рассматриваемых частных значений переменной M' :

$$\left. \begin{aligned} a_0(M_{k'}) &= (1/m) \sum_{k=0}^{m-1} R_{k, k'}, \\ a_i(M_{k'}) &= (2/m) \sum_{k=0}^{m-1} R_{k, k'} \cos ki(2\pi/m), \\ b_i(M_{k'}) &= (2/m) \sum_{k=0}^{m-1} R_{k, k'} \sin ki(2\pi/m). \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

После этого повторное применение тех же формул даст коэффициенты каждого из рядов (12.3).

Например,

$$\alpha_0^l = (1/m') \sum_{k=0}^{m'-1} a_l(M'_{k'})$$

Получив числовые значения коэффициентов рядов (12.3) и подставив эти ряды в (12.2), будем иметь разложение пертурбационной функции, легко приводимое к виду (12.1).

Применение формул (12.4) особенно просто, когда для m и m' берутся такие значения как 8, 12, 16, 24, 32 или 48. Для этих случаев имеются удобные вычислительные схемы [Леверрье, 1855; Ганзен, 1857—1861; Браун и Брауэр, 1933].

Впервые изложенный метод разложения пертурбационной функции был применен Эйлером в работе, опубликованной в 1749 г. для вычисления вековых возмущений Юпитера и Сатурна. В 1811 г. Гаусс использовал этот метод для получения возмущений Паллады от Юпитера. Вместо M и M' он взял за переменные, по которым выполняется разложение, $M - M'$ и M' . Для первой из этих переменных он разделил окружность на 48 частей, а для второй на 24 части. Такой же выбор переменных был сделан Ганзеном в 1829 г. (вычисления Гаусса были опубликованы лишь в 1906 г.) при изучении взаимных возмущений Юпитера и Сатурна.

Вместо двукратного применения формул (12.4) можно пользоваться для вычисления коэффициентов ряда (12.1) такими формулами:

$$A_{l, l'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k, k'} \cos(iM_k + i'M_{k'}),$$

$$B_{l, l'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k, k'} \sin(iM_k + i'M_{k'}).$$

Заметим, что может оказаться выгодным получить сначала разложение R по кратным E и E' (или $E - E'$ и E'), или по кратным v и v' , а затем преобразовать полученный ряд в разложение по средним аномалиям. Такое преобразование для рядов с численными коэффициентами выполняется достаточно просто. Переход от разложений по кратным эксцентрических (или истинных) аномалий к разложениям по кратным средних аномалий выполняется указанным в гл. VI способом.

§ 13. Метод Брауэра

Чтобы получить только что изложенным методом коэффициенты разложений вида (11.1) с большой точностью, может понадобиться вычисление очень большого количества частных значений функции R . В только что указанной работе Гаусса

пришлось вычислить $48 \times 24 = 1152$ таких значений. Для получения возмущений Марса, производимых Землей, с требующейся в настоящее время точностью пришлось бы вычислить около 8000 частных значений каждой из разлагаемых функций.

Эта работа может быть существенно сокращена, как показал в 1946 г. Брауэр, если воспользоваться тем обстоятельством, что разложение вида (11.1) для квадрата расстояния между планетами, т. е. для Δ^2 , сходится очень быстро и легко может быть получено с нужной точностью как численным, так и аналитическим методом. Особенно просто эта величина выражается в том случае, когда разложения производятся по кратным эксцентрических аномалий. В функции этих переменных она выражается не рядом, а тригонометрическим полиномом, состоящим всего из 11 членов.

Метод Брауэра заключается в следующем [Брауэр, 1961]. Обозначим через D точное (в пределах принятого числа знаков) разложение Δ/a' , а через δ^{-1} , δ^{-3} , ... приближенные разложения a'/Δ , $(a'/\Delta)^3$, ..., полученные, например, при помощи сравнительно небольшого числа частных значений этих функций. Умножив квадрат δ^{-1} на уже имеющееся у нас точное разложение D^2 , мы получим

$$D^2\delta^{-2} = 1 + E,$$

где E тем ближе к нулю, чем точнее принятое нами разложение δ^{-1} .

Последовательное умножение позволяет найти E^2 , E^3 , ..., после чего формула

$$D^{-1} = \delta^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} E + \frac{3}{8} E^2 - \frac{5}{16} E^3 + \frac{35}{128} E^4 - \dots \right)$$

даст новое, гораздо более точное значение для a'/Δ .

Чтобы получить D^{-3} , находим разложения

$$F = D^2\delta^{-3} - D^{-1},$$

$$D^{-2} = \delta^{-2}(1 - E + E^2 - E^3 + \dots).$$

Тогда новое, более точное значение $(a'/\Delta)^3$ даст формула

$$D^{-3} = \delta^{-3} - FD^{-2}.$$

Для получения $(a'/\Delta)^5$ можно воспользоваться формулами

$$G = D^2\delta^{-5} - D^{-3}; \quad D^{-5} = \delta^{-5} - GD^{-2},$$

если величина δ^{-5} известна, или же соотношением

$$D^{-5} = D^{-3}D^{-2},$$

если она не вычислялась.

§ 14. Полуаналитические методы разложения

Численные методы, основанные на гармоническом анализе, позволяют получить разложение пертурбационной функции (а также компонент притяжения) с какой угодно точностью при помощи очень простых, удобно выполняемых на машинах вычислений. Но объем вычислительной работы может быть весьма велик. По мере дальнейшего прогресса вычислительной техники, этот недостаток будет делаться все менее и менее чувствительным и численные методы разложения сделаются основным, если не единственным, орудием исследования возмущенного движения тел солнечной системы; по крайней мере в тех случаях, когда требуется получить координаты с большой точностью и для не слишком значительных промежутков времени (не превосходящих, например, тысячи оборотов рассматриваемого объекта). Только при решении некоторых специальных задач (например, при рассмотрении особенно больших промежутков времени) преимущества буквенных разложений пертурбационной функции могут стать решающими.

В XIX столетии, когда возможность существенно сократить объем вычислительной работы имела очень большое значение, были созданы полуаналитические методы разложения пертурбационной функции, занимающие промежуточное положение между аналитическими методами, рассмотренными нами в §§ 3—11, и чисто интерполяционными методами, изложенными в двух предыдущих параграфах.

Вычисление каждого из коэффициентов ряда (12.1) приводится, по существу, к нахождению двойного интеграла. В аналитических методах интегрирование по каждой из переменных выполняется в общем виде, что дает коэффициент в форме бесконечного ряда, расположенного по степеням некоторых параметров. В численных методах оба интегрирования выполняются при помощи тригонометрического интерполирования; аналитические свойства подынтегральной функции при этом не используются. Полуаналитические методы основаны на частичном использовании свойств рассматриваемой функции: интегрирование по одной переменной выполняется аналитически, а по другой — при помощи тригонометрического интерполирования. Таким образом, полуаналитические методы используют ту же идею, которая лежит в основе метода Гаусса для нахождения вековых возмущений (§ 14 гл. XVI).

Первый полуаналитический метод был дан Коши в 1844 г. Коши развил его для изолированного вычисления тех членов в разложении пертурбационной функции, которые производят долгопериодические возмущения. При нахождении этих членов с нужной точностью общими методами неизбежно вычисление

всех остальных членов с излишне высокой точностью, что существенно увеличивает вычислительную работу. Этот метод был подробно изложен Тиссераном [1896].

Основные идеи метода Коши были потом использованы для получения полного разложения пертурбационной функции и ее частных производных [Бурже, 1863; Андуайе, 1926].

Другой полуаналитический метод был указан Якоби в 1848 г. Этот метод, дающий разложение пертурбационной функции по кратным эксцентрических аномалий, был впоследствии усовершенствован [Тиссеран, 1896; Пуанкаре, 1907], но практических применений не нашел.

Наибольшее значение имел метод, предложенный Ганzenом в 1857 г. Этот метод был широко использован (в первоначальной форме, приданной ему Ганzenом) для построения аналитических теорий движения малых планет. В следующем параграфе мы изложим его в форме, близкой к той, которую придал ему Хилл, создавая теории движения Юпитера и Сатурна [Хилл, 1890].

§ 15. Метод Ганзена

Разложение пертурбационной функции и ее частных производных приводится к нахождению тригонометрических рядов, представляющих Δ^{-1} , Δ^{-3} , Δ^{-5} , ..., где Δ есть расстояние между рассматриваемыми планетами.

Сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H,$$

$$\cos H = \cos(v + \Pi) \cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \cos J.$$

Считая опять $a < a'$ и положив $\alpha = a/a'$, мы можем написать

$$(\Delta/a')^2 = (r'/a')^2 + \alpha^2 (r/a)^2 - 2\alpha (rr'/aa') \cos H. \quad (15.1)$$

С другой стороны, $\cos H$ в развернутом виде равняется $C_1 \cos v \cos v' + C_2 \cos v \sin v' + C_3 \sin v \cos v' + C_4 \sin v \sin v'$,

где

$$C_1 = \cos \Pi \cos \Pi' + \sin \Pi \sin \Pi' \cos J,$$

$$C_2 = -\cos \Pi \sin \Pi' + \sin \Pi \cos \Pi' \cos J,$$

$$C_3 = -\sin \Pi \cos \Pi' + \cos \Pi \sin \Pi' \cos J,$$

$$C_4 = \sin \Pi \sin \Pi' + \cos \Pi \cos \Pi' \cos J.$$

Поэтому, введя вспомогательные величины k, K и k_1, K_1 при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} k \sin(\Pi' - K) &= a \sin \Pi \cos J, \\ k \cos(\Pi' - K) &= a \cos \Pi, \\ k_1 \sin(\Pi' - K_1) &= a \sin \Pi, \\ k_1 \cos(\Pi' - K_1) &= a \cos \Pi \cos J, \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

будем иметь

$$a \cos H = k \cos v \cos(v' + K) + k_1 \sin v \sin(v' + K_1).$$

Подставим это выражение в равенство (15.1) и воспользуемся известными формулами

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E); & r' &= a'(1 - e' \cos E'), \\ r \cos v &= a(\cos E - e); & r' \cos v' &= a'(\cos E' - e'), \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin E; & r' \sin v' &= a' \cos \varphi' \sin E', \end{aligned}$$

выражающими рассматриваемые величины через эксцентриские аномалии. Это даст

$$(\Delta/a')^2 = D - f \cos(E - F) + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2E, \quad (15.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \alpha^2 e^2, \\ D &= D_0 + D_1 \cos E' + D_2 \sin E' + e'^2 \cos^2 E', \\ f \sin F &= G_0 + G_1 \cos E' + G_2 \sin E', \\ f \cos F &= H_0 + H_1 \cos E' + H_2 \sin E', \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

причем постоянные коэффициенты имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 + \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - 2k e e' \cos K, \\ D_1 &= 2(ek \cos K - e'), \\ D_2 &= -2ek \sin K \cos \varphi', \\ G_0 &= -2e' k_1 \sin K_1 \cos \varphi; & H_0 &= 2(e\alpha^2 - e'k \cos K), \\ G_1 &= 2k_1 \sin K_1 \cos \varphi; & H_1 &= 2k \cos K, \\ G_2 &= 2k_1 \cos K_1 \cos \varphi \cos \varphi'; & H_2 &= -2k \sin K \cos \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Формулы (15.4) показывают, что D, f и F легко могут быть вычислены для каждого значения E' , а следовательно, и M' . Угол F является периодической функцией M' с периодом 2π .

Так как G_0 и H_0 — малые величины порядка эксцентриситетов, то при небольших эксцентриситетах разности $F - E'$, а потому и разности $F - M'$, остаются при всех изменениях M' небольшими по абсолютной величине.

Стоящая сейчас перед нами задача заключается в разложении функций a'/Δ , $(a'/\Delta)^3$, $(a'/\Delta)^5$, ..., в которых значение M' фиксировано, в тригонометрические ряды по кратным E .

Для решения этой задачи мы используем малость третьего члена в выражении (15.3) по сравнению с суммой двух первых. Это может быть сделано двумя различными путями, первый из которых заключается в следующем.

Положив для краткости

$$\mathfrak{D} = [D - f \cos(E - F)]^{1/2}$$

и пользуясь формулой бинома, получим следующие разложения:

$$(a'/\Delta)^n = \mathfrak{D}^{-n} - \frac{1}{4} n \gamma_2 \cos 2E \cdot \mathfrak{D}^{-n-2} + \dots, \quad (15.6)$$

где $n=1, 3, 5, \dots$, сходящиеся тем быстрее, чем меньше γ_2 .

Формулы (15.5) показывают, что $|f| < D$, а потому функция \mathfrak{D}^{-n} , имеющая непрерывные производные всех порядков, разлагается в абсолютно сходящийся ряд

$$\mathfrak{D}^{-n} = \alpha_n^{(0)} + 2\alpha_n^{(1)} \cos(E - F) + 2\alpha_n^{(2)} \cos 2(E - F) + \dots \quad (15.7)$$

Так как

$$E - F = E - M' - (F - M'),$$

то этот ряд можно заменить таким:

$$\mathfrak{D}^{-n} = \beta_n^{(0)} + 2\beta_n^{(1)} \cos(E - M') + \dots + 2\gamma_n^{(1)} \sin(E - M') + \dots, \quad (15.8)$$

где

$$\beta_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} \cos i(F - M'); \quad \gamma_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} \sin i(F - M'). \quad (15.9)$$

Каждая из этих величин есть функция M' , разложимая в тригонометрический ряд. Вычислим эти величины для $M' = 2\pi h/k$, где $h=0, 1, 2, \dots, k-1$, и применим обычные формулы тригонометрического интерполирования (§ 12). Это даст каждый из коэффициентов (15.9) в форме ряда

$$c_0 + 2 \sum_1^{\infty} c_j \cos j M' + 2 \sum_1^{\infty} s_j \sin j M'.$$

Подставим эти ряды в разложения (15.8), а эти последние в формулу (15.6). Полученный результат легко может быть

представлен в таком виде:

$$(\alpha'/\Delta)^n = \sum_{i, i'} [c_{i, i'}^n \cos(iE + i'M') + s_{i, i'}^n \sin(iE + i'M')], \quad (15.10)$$

где $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $i'=0, 1, 2, \dots$

Чтобы выразить входящую сюда эксцентрическую аномалию внутренней планеты через среднюю, нужно воспользоваться формулами (§ 5 гл. VI)

$$\left. \begin{aligned} \cos(iE + \beta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} J_{k-i}(ke) \cos(kM + \beta), \\ \sin(iE + \beta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} J_{k-i}(ke) \sin(kM + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

где β — произвольная величина. В членах, соответствующих значению $k=0$, коэффициент

$$\frac{i}{k} J_{k-i}(ke)$$

должен быть взят равным $-e/2$, если $i = \pm 1$; при всех остальных значениях i он, очевидно, равен нулю.

Ряды (15.11) при обычно встречающихся значениях эксцентриситета быстро сходятся. После несложных преобразований окончательно будем иметь

$$(\alpha'/\Delta)^n = \sum_{i, i'} [C_{i, i'}^n \cos(iM + i'M') + S_{i, i'}^n \sin(iM + i'M')]. \quad (15.12)$$

Коэффициенты $\alpha_n^{(i)}$ ряда (15.7), на вычислении которых мы не останавливались, легко могут быть выражены через коэффициенты Лапласа. Полагая

$$D = \mathfrak{M}(1 + d^2); \quad f = 2\mathfrak{M}d, \quad (15.13)$$

получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{-n} &= \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} |1 - 2d \cos(E - F) + d^2|^{-\frac{n}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} \sum b_n^{(i)} \cos i(E - F), \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} b_n^{(i)}. \quad (15.14)$$

Для вычисления \mathfrak{M} и d можно воспользоваться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= f/D; \quad d = \operatorname{tg}(\psi/2), \\ \mathfrak{M} &= D \cos^2(\psi/2), \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

вывод которых не представляет затруднений.

§ 16. Другие формы метода Ганзена

Применение разложения (15.6), на котором основан изложенный в предыдущем параграфе метод, может иногда представлять неудобства, тем более значительные, чем больше величина γ_2 , определяемая формулой (15.4). В самом деле, для нахождения $(a'/\Delta)^n$ при $n=1, 3, \dots, 2h+1$, эта формула требует нахождения \mathfrak{D}^{-n} при $n=1, 3, \dots, 2h+2k+1$, если приходится учитывать степени γ_2 до k -й включительно.

Вызываемое этим увеличение работы в какой-то мере компенсируется снижением точности, с которой надо находить \mathfrak{D}^{-n} по мере увеличения n . Тем не менее, во многих случаях может оказаться более выгодным другой путь использования малости последнего члена в соотношении (15.3), нежели указанный в предыдущем параграфе.

В основу этого варианта данного им метода разложения пертурбационной функции Ганзен положил разложение правой части равенства (15.3) на два множителя.

Положим

$$(\Delta/a')^2 = [C - q \cos(E - Q)] \left[1 - \frac{\gamma_2}{q} \cos(E + Q) \right]. \quad (16.1)$$

Отождествляя это выражение с (15.3), получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} C &= D - \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2Q, \\ qf \sin F &= (q^2 - C\gamma_2) \sin Q, \\ qf \cos F &= (q^2 + C\gamma_2) \cos Q, \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

из которых могут быть найдены величины C , q и Q . В самом деле, из них легко получаем

$$f^2 \sin(Q + F) \sin(Q - F) = \gamma_2 \sin^2 2Q \left(D - \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2Q \right), \quad (16.3)$$

$$q \sin 2Q = f \sin(Q + F). \quad (16.4)$$

Вследствие малости γ_2 решение уравнения (16.3) относительно Q выполняется очень просто. После этого формулы (16.2) и (16.4) дадут C и q .

Выражение (16.1) в свою очередь может быть преобразовано к виду

$$(\Delta/a')^2 = N [1 - 2a \cos(E - Q) + a^2] [1 - 2b \cos(E + Q) + b^2]. \quad (16.5)$$

Для этого нужно только сделать подстановку, аналогичную (15.13), а именно:

$$\begin{aligned} C &= \mathfrak{N} (1 + a^2); & q &= 2\mathfrak{N}a, \\ 1 &= \mathfrak{N}_1 (1 + b^2); & \gamma_2/q &= 2\mathfrak{N}_1 b. \end{aligned}$$

Вычисление a , b и N можно выполнить по формулам

$$\begin{aligned}\sin \psi &= q/C; & \sin \psi_1 &= \gamma_2/q, \\ a &= \operatorname{tg}(\psi/2); & b &= \operatorname{tg}(\psi_1/2), \\ N &= \mathfrak{N}\mathfrak{N}_1 = C \cos^2(\psi/2) \cos^2(\psi_1/2).\end{aligned}$$

При вычислении величин, относящихся ко второму множителю в (16,5), вследствие малости γ_2 может оказаться полезным применение формул:

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_2}{q} + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^3 + \frac{1}{16} \left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^5 + \frac{5}{128} \left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^7 + \dots, \\ \mathfrak{N}_1 &= \cos^2(\psi_1/2) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_2}{q} b.\end{aligned}$$

Что же касается величин, относящихся к первому множителю, то при машинном вычислении алгебраические формулы

$$a = \frac{1}{q} (C - \sqrt{C^2 - q^2}); \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2} (C + \sqrt{C^2 - q^2})$$

могут оказаться более удобными.

Выражение (16.5) показывает, что разложение пертурбационной функции по кратным E (при фиксированном значении M') приводится к нахождению рядов

$$[1 - 2a \cos(E - Q) + a^2]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(l)} \cos l(E - Q), \quad (16.6)$$

$$[1 - 2b \cos(E + Q) + b^2]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(l)} \cos l(E + Q) \quad (16.7)$$

и их почленному перемножению.

Коэффициенты ряда (16.6) находятся при помощи общих методов (§§ 7, 8 и 10). Что же касается ряда (16.7), в котором обычно приходится принимать во внимание лишь несколько членов, то он может быть удобно получен и при помощи гармонического анализа.

Дальнейшие операции по нахождению рядов (15.10) и (15.12) выполняются так, как это было указано в предыдущем параграфе.

В разработанной им теории движения планет Ганзен принял за независимую переменную эксцентрическую аномалию возмущаемой планеты. Поэтому, после того как получен ряд (15.10), он выражает входящую в него величину M' через E .

Так как

$$M = nt + M_0; \quad M' = n't + M'_0,$$

ТО

$$M' = \mu M + C,$$

где $\mu = n'/n$, а C не зависит от времени.

Уравнение Кеплера дает

$$M' = \mu E - \mu e \sin E + C.$$

Подстановка этого выражения в (15.10) и использование формул (2.7) гл. VI приводит к разложению

$$(a'/\Delta)^n = \sum_{i, i'} \{ |i, i', c|_n \cos (i - i'\mu) E + |i, i', s|_n \sin (i - i'\mu) E \},$$

которым пользовался Ганзен.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

§ 1. Возмущения элементов

Применение метода вариации постоянных интегрирования к эллиптическим элементам дает наиболее полное решение задачи изучения возмущенного движения планеты. Получение оскулирующих элементов в виде явных функций времени позволяет не только вычислять координаты для любого момента, но и дает исчерпывающее представление о свойствах движения.

Дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы, и решение этих уравнений последовательными приближениями были уже нами рассмотрены (§§ 10—13 гл. XVI). Наиболее трудоемкой частью решения является разложение пертурбационной функции в ряд. Если это разложение получено в буквенной форме, то нахождение частных производных пертурбационной функции, фигурирующих в уравнениях Лагранжа, выполняется непосредственно. В такой форме этот метод был использован Леверрье [1855—1877] и Ньюкомом [1867] для построения теорий движения больших планет. Подробное изложение практических приемов, разработанных Леверрье, можно найти в трактате Тиссерана [1889].

В тех случаях, когда нельзя воспользоваться буквенным разложением пертурбационной функции, частные производные этой функции по элементам могут быть найдены следующим образом.

Для каждого элемента, например a , мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}. \quad (1.1)$$

Так как

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right),$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial x} = k^2 m' \left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right)$$

и аналогично для двух других координат. Это показывает, что получение производных вида (1.1) в форме удобных для интегрирования бесконечных рядов приводится к разложению функции $(a'/\Delta)^3$, которое может быть найдено непосредственно в численной форме (§§ 12—16 гл. XVII). Для нахождения вторых производных R по элементам, необходимых для получения возмущений второго порядка, понадобится еще разложение $(a'/\Delta)^5$ и т. д.

Решение уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI) методом последовательных приближений мы можем написать в форме

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \delta_1 \varepsilon + \delta_2 \varepsilon + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где символом δ_n обозначены возмущения n -го порядка относительно возмущающих масс. Через $a_0, \dots, \varepsilon_0$ обозначены величины оскулирующих элементов в начальный момент времени.

Формулы (1.2) дают, таким образом, изменение оскулирующей орбиты от начального момента $t=0$ до рассматриваемого момента t .

В каждой из формул (1.2) отделим вековую часть возмущений от периодических членов. Это даст выражения вида

$$a = \tilde{a} + P_a; \dots; \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + P_\varepsilon,$$

где через $\tilde{a}, \dots, \tilde{\varepsilon}$ обозначены суммы постоянных $a_0, \dots, \varepsilon_0$ и соответствующих вековых членов, а через $P_a, \dots, P_\varepsilon$ совокупности периодических и смешанных членов.

Величины $\tilde{a}, \dots, \tilde{\varepsilon}$ носят название средних элементов. Они более пригодны, нежели оскулирующие элементы, например, для характеристики общей конфигурации планетной системы.

§ 2. Среднее движение планеты

Нахождение из наблюдений среднего движения планеты, наблюдения которой охватывают большой промежуток времени, представляет некоторые особенности.

Возмущенная средняя долгота λ дается, как известно, формулой

$$\lambda = \varepsilon + \int_0^t n dt.$$

Ограничиваясь, для простоты, возмущениями первого порядка, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + nt + P_\varepsilon; \quad n = n_0 + P_n,$$

где P_e и P_n представляют суммы периодических членов. Поэтому

$$\lambda = \varepsilon_0 + (n_0 + \kappa)t + P_\lambda. \quad (2.1)$$

Таким образом, если разность средних долгот, соответствующих двум моментам, разделенным значительным интервалом времени, разделить на величину этого интервала, то получим

$$n_1 = n_0 + \kappa \quad (2.2)$$

с тем большей точностью, чем больше рассматриваемый интервал времени. Таково среднее движение планеты, соответствующее периоду ее сидерического обращения.

Оскулирующие элементы a_0 и n_0 связаны соотношением

$$n_0^2 a_0^3 = k^2 (1 + m). \quad (2.3)$$

Введем в рассмотрение величину a_1 , определяемую аналогичным соотношением:

$$n_1^2 a_1^3 = k^2 (1 + m). \quad (2.4)$$

Последние равенства дают

$$a_0^3 = \frac{n_1^2 a_1^3}{(n_1 - \kappa)^2},$$

откуда, пренебрегая вторыми степенями масс, находим

$$a_0 = a_1 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\kappa}{n_1} \right). \quad (2.5)$$

При нахождении возмущений, стоящих в формулах (1.2), нужно пользоваться величиной a_0 , вычисляемой по формулам (2.4) и (2.5). С другой стороны, если бы мы хотели получить строго возмущения первого порядка $\delta_1 a, \dots, \delta_1 \varepsilon$, то в правых частях уравнений Лагранжа нужно было бы брать величину n_0 , даваемую равенством (2.3). Но уже при нахождении $\delta_2 a, \dots, \delta_2 \varepsilon$ в правые части уравнений нужно подставлять величину (2.2), т. е. брать среднее движение, равное n_1 . На практике предпочитают и при нахождении возмущений первого порядка в аргументах тригонометрических функций вместо n_0 брать n_1 . Это позволяет, без увеличения работы, включить в возмущения первого порядка некоторую часть возмущений второго порядка.

В тех случаях, когда n стоит в коэффициентах уравнений Лагранжа (а не в аргументах тригонометрических функций), нужно брать $n = n_0$. В этих случаях n является лишь сокращенным обозначением для величины

$$k \sqrt{1 + m} a^{-3/2}.$$

Правая часть формулы (2.1) представляет сумму возмущений от всех планет, заметно влияющих на движение рассматри-

ваемой планеты. Обозначим через m' , a' , ... массы и большие полуоси внутренних планет по отношению к той, движение которой изучается, а через m'' , a'' , ... соответствующие величины для внешних планет. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{2x}{3n_1} = \frac{1}{6} \sum m' \left(b_1^{(0)} + \alpha \frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} \right) - \frac{1}{6} \sum m'' \alpha^2 \frac{db_1^{(0)}}{d\alpha}, \quad (2.6)$$

причем в первой сумме $\alpha = a'/a$, тогда как во второй $\alpha = a/a''$.

Степенные разложения коэффициентов Лапласа (§ 7 гл. XVII) дают

$$b_1^{(0)} + \alpha \frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} = 2 + \sum_1^{\infty} (4n+2) \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right)^2 \alpha^{2n},$$

$$\alpha^2 \frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} = \sum_1^{\infty} 4n \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right)^2 \alpha^{2n+1}.$$

Применим эти формулы к нахождению оскулирующего значения большой полуоси земной орбиты для момента 1900,0.

В основу таблиц Ньюкома положена следующая величина среднего движения Земли в один юлианский год:

$$n_1 = 1\,295\,977''.4320 - 0''.000403 T,$$

где через T обозначено время, отсчитываемое от 12^h всемирного времени 0 января 1900 г. и выраженное в юлианских столетиях (по 36 525 суток, содержащих 86 400 секунд всемирного времени).

Формула (2.4) дает, как мы уже видели (§11 гл. III)

$$a_1 = 1,000\,000\,030.$$

Отдельные слагаемые величины (2.6), соответствующие тем планетам, которые оказывают здесь заметное влияние, в этом случае таковы:

действие	Венеры	+	1460	$\times 10^{-9}$
	» Марса	-	28	
	» Юпитера	-	1179	
	» Сатурна	-	55	

$$2x/3n_1 = +198 \times 10^{-9}.$$

вследствие чего формула (2.5) дает

$$a_0 = 1,000\,000\,23.$$

Эта величина оскулирующей большой полуоси земной орбиты для указанного выше начального момента и была использована Ньюкомом для вычисления таблиц движения Земли.

§ 3. Переход к возмущениям в координатах

После того как получены формулы, представляющие оскулирующие элементы рассматриваемой планеты в виде явных функций времени, вычисление ее координат по формулам невозмущенного движения не представляет трудностей.

При использовании современной вычислительной техники такой путь получения возмущенных координат является наиболее простым.

Другой путь решения задачи заключается в выводе формул, дающих непосредственно возмущенные координаты планеты в виде явных функций времени.

Вывод таких формул не представляет принципиальных трудностей, но с практической точки зрения оправдывает себя лишь в тех случаях, когда можно ограничиться возмущениями первого порядка, а потому число членов в рядах, представляющих оскулирующие элементы, не велико. Леверрье дал ряды, представляющие гелиоцентрические координаты r , l и b для Меркурия, Венеры, Земли и Марса, а также основанные на этих рядах таблицы. Что же касается остальных планет, для которых возмущения второго порядка имеют существенное значение, то он ограничился составлением таблиц, позволяющих находить оскулирующие элементы этих планет [Леверрье, 1855—1877]. Другой пример перехода от возмущений в элементах к возмущениям в координатах представляет данная Ньюкомом теория движения Нептуна [Ньюком, 1867].

Формулы, дающие возмущенные координаты планеты в виде явных функций времени и элементов орбиты, могут служить и для других целей, а не только для вычисления возмущенных координат со всею достижимой точностью. Такого рода формулы были использованы, например, для вычислений, приведших к открытию Нептуна и Плутона.

Гелиоцентрическая долгота l дается равенством

$$l = \omega + R, \quad (3.1)$$

где ω — долгота в орбите, а

$$R = -\frac{1}{\arcsin i} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{2 \arcsin i} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \dots \quad (3.2)$$

— приведение к эклиптике (§ 9 гл. IV).

Так как

$$u = \omega - \Omega,$$

то нахождение величины (3.1) приводится к вычислению возмущения долготы в орбите.

В невозмущенном движении

$$w = \lambda + f,$$

где через f обозначено уравнение центра; f разлагается в ряд (§ 6 гл. VI)

$$f = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \dots, \quad (3.3)$$

где

$$H_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 - \dots; \quad H_2 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \dots,$$

причем

$$M = \lambda - \pi. \quad (3.4)$$

Таким образом, обозначив через $\delta_1\lambda$, $\delta_1\pi$, δ_1e возмущения первого порядка соответствующих величин, с той же точностью будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_1 f = & \delta_1\lambda \{H_1 \cos M + 2H_2 \cos 2M + \dots\} - \\ & - \delta_1\pi \{H_1 \cos M + 2H_2 \cos 2M + \dots\} + \\ & + \delta_1e \left\{ \frac{dH_1}{de} \sin M + \frac{dH_2}{de} \sin 2M + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вместо возмущения радиуса-вектора обычно находили возмущение его логарифма. Для этого служило следующее легко получаемое (§ 5 гл. VI) выражение

$$\lg r = \lg a + A_0 + A_1 \cos M + A_2 \cos 2M + \dots, \quad (3.6)$$

где A_n — ряд, расположенный по целым положительным степеням e и имеющий множителем e^n .

Дифференцирование этого выражения дает

$$\begin{aligned} \delta_1 \lg r = & \delta_1 \lg a - \delta_1\lambda \{A_1 \sin M + 2A_2 \sin 2M + \dots\} + \\ & + \delta_1\pi \{A_1 \sin M + 2A_2 \sin 2M + \dots\} + \\ & + \delta_1e \left\{ \frac{dA_0}{de} + \frac{dA_1}{de} \cos M + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

При помощи формул (3.5) и (3.7) учитывают лишь короткопериодические члены в $\delta_1\lambda$ и периодические члены в $\delta_1\pi$ и δ_1e . Остальные части этих возмущений учитываются иначе. Делается это следующим образом.

По формулам (3.3) и (3.6), в которых берется значение e , соответствующее начальному моменту, строятся таблицы, дающие f и $\lg r$ по аргументу M .

Приняв тот же начальный момент и то же значение T , как и в предыдущем параграфе, мы имеем, например, для Земли (согласно вычислениям Ньюкома):

$$e = 0,016\ 751\ 04 - 0,000\ 041\ 80\ T - 0,000\ 000\ 126\ T^2,$$

что дает для начального момента:

$$f = 6910'',057 \sin M + 72'',338 \sin 2M + 1'',054 \sin 3M + 0'',018 \sin 4M,$$

$$\lg r = 0,000\ 030\ 57 - 0,007\ 274\ 12 \cos M -$$

$$- 0,000\ 091\ 38 \cos 2M -$$

$$- 0,000\ 001\ 45 \cos 3M -$$

$$- 0,000\ 000\ 02 \cos 4M.$$

При пользовании этими формулами (или соответствующими им таблицами) в аргумент (3.4) уже включают долгопериодические и вековые возмущения λ и π . Остается, таким образом, лишь добавить влияние вековых возмущений эксцентриситета. Только что приведенные формулы показывают, что соответствующие поправки даются следующими выражениями:

$$[f] = (-17'',240T - 0'',052T^2) \sin M - 0'',361T \sin 2M - 0'',001T \sin 3M,$$

$$10^8 [\lg r] = -15T + (1814T + 5T^2) \cos M + 46T \cos 2M + T \cos 3M,$$

которые также удобно табулируются.

Для вычисления возмущенной гелиоцентрической широты $b + \delta_1 b$ служит, прежде всего, формула

$$\sin b = \sin i \sin (\omega - \Omega), \quad (3.8)$$

где для i берется значение, соответствующее начальному моменту, для ω — значение, включающее все возмущения, а для Ω — значение, включающее вековые возмущения.

Обращаясь к вычислению $\delta_1 b$, мы можем считать, что в равенстве (3.8) приращения получают только i и Ω . Это дает

$$\delta_1 b = \sec b \cos i \sin u \delta_1 i - \sec b \sin i \cos u \delta_1 \Omega.$$

Здесь под $\delta_1 \Omega$ надо разуместь лишь периодические возмущения узла.

Дальнейшие подробности относительно вычисления возмущений координат и различных приемов табулирования полученных выражений содержат указанные выше работы Леверрье и Ньюкома.

Примечание. Если единственной целью является получение возмущений координат, то нахождение их при помощи возмущений элементов является мало целесообразным. Дело в том, что возмущения элементов обычно являются гораздо более значительными, нежели возмущения координат, и эти последние приходится получать как малые разности больших чисел. Причина этого заключается в следующем.

Каждый из шести оскулирующих элементов e_1, \dots, e_6 является функцией координат и их производных в какой-либо

момент времени, так что

$$e_k = f_k(r, l, b, \dot{r}, \dot{l}, \dot{b}, t).$$

Таким образом, если возмущения производных \dot{r} , \dot{l} , \dot{b} велики, то возмущения элементов могут быть также велики, даже если возмущения координат малы.

Между тем, если координата имеет возмущение

$$A \sin(vt + C)$$

хотя бы и с очень малой амплитудой A , но с периодом $2\pi/v$, весьма коротким по сравнению со временем обращения планеты, то производная этой координаты будет иметь возмущение

$$Av \cos(vt + C)$$

с тем же периодом, но уже с большей амплитудой.

Нахождение возмущений координат через посредство возмущений элементов может оказаться выгодным лишь в каком-либо исключительном случае еще и по другой причине.

Уже было отмечено, что при создании теории движения планеты наиболее существенную часть всей работы составляет разложение пертурбационной функции в ряд. При этом увеличение степени принимаемых во внимание членов сопровождается весьма быстрым увеличением вычислительной работы.

Но для получения членов степени m в возмущенных координатах нужно найти с такой же точностью возмущения элементов, а это требует нахождения в разложении пертурбационной функции членов степени $m+1$. Между тем, излагаемые ниже прямые методы нахождения возмущений координат показывают, что для получения членов m -й степени в этих возмущениях достаточно иметь в разложении пертурбационной функции лишь члены степени m .

§ 4. Возмущения, производимые близкой к Солнцу планетой

При изучении движения планеты за начало координат принимается центр Солнца. Поэтому приходится учитывать влияние на ее движение не только прямого притяжения каждой из возмущающих планет, но и притяжения, производимого этими планетами на Солнце. Проистекающее отсюда не прямое возмущающее действие выражается (в дифференциальных уравнениях движения) второй частью пертурбационной функции (§ 4 гл. XIV).

Вычисление не прямых возмущений не вызывает новых трудностей. Мы уже видели (§ 3 гл. XVII), что наличие второй части пертурбационной функции может быть легко учтено изменением

трех коэффициентов в исходном разложении главной части этой функции. Однако могут быть случаи, когда не прямые возмущения заслуживают особого рассмотрения.

Если минимальное расстояние между двумя планетами меньше или лишь на немного больше, чем радиус-вектор той из этих планет, которая ближе к Солнцу, то прямые возмущения имеют доминирующее значение. Но если одна планета отстоит от Солнца в несколько раз дальше, чем другая, то для нее не прямые возмущения могут существенно превысить прямые.

Обозначим через m, r, x, \dots, a, \dots величины, относящиеся к планете P , а через $m', r', x', \dots, a', \dots$ соответствующие величины для планеты P' . Будем считать, что первая из этих планет движется значительно ближе к Солнцу, нежели вторая, так что $a \ll a'$. Массы m, m' и эксцентриситеты e, e' будем считать, как всегда, малыми величинами.

Главная часть пертурбационной функции для планеты P' , равная

$$k^2 m [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-1/2} \quad (4.1)$$

разлагается в ряд (§ 6 гл. XVII)

$$\sum \frac{K_m}{a'} \left(\frac{a}{a'}\right)^h \cos(iM + i'M' + C). \quad (4.2)$$

Для второй части этой функции, т. е. для

$$k^2 m r' r^{-2} \cos H, \quad (4.3)$$

имеем разложение

$$\sum \frac{K_1 m a'}{a^2} \left(\frac{a}{a'}\right)^h \cos(iM + i'M' + C_1). \quad (4.4)$$

В рядах (4.2) и (4.4) суммирование ведется по индексам $h=0, 1, 2, \dots; i, i'=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Коэффициенты K и K_1 , разлагаемые в ряды по степеням e, e', v , не зависят от размеров орбит.

Так как мы считаем, что величина a очень мала по сравнению с a' , то в рядах (4.2) и (4.4) доминируют по абсолютной величине члены, получающиеся при $h=0$, т. е.

$$\sum \frac{K_m}{a'} \cos(iM + i'M' + C) \quad (4.5)$$

и

$$\sum \frac{K_1 m a'}{a^2} \cos(iM + i'M' + C_1). \quad (4.6)$$

Подставив в правые части уравнений Лагранжа производные этих доминирующих членов и выполнив интегрирование, мы найдем, что в возмущениях элементов доминировать будут

члены вида

$$\sum \frac{K_m}{a' (in + i'n')} \cos (iM + i'M' + C) \quad (4.7)$$

— от главной части пертурбационной функции, и

$$\sum \frac{K_1 m a'}{a^2 (in + i'n')} \cos (iM + i'M' + C_1) \quad (4.8)$$

— от второй части.

Поскольку

$$n = k(1 + m)^{1/2} a^{-3/2}, \quad (4.9)$$

члены ряда (4.7), в которых $i \neq 0$, будут стремиться к нулю вместе с a . Ряд (4.8) не имеет членов, в которых $i = 0$ (§ 14 гл. XVI). Поэтому все члены этого ряда будут порядка $a^{-1/2}$ и будут, следовательно, стремиться к бесконечности, когда a стремится к нулю.

Таким образом, возмущения элементов внешней планеты P' , зависящие от второй части пертурбационной функции, стремятся к бесконечности, когда размеры орбиты внутренней планеты P неограниченно убывают.

Обратимся теперь к возмущениям координат.

Возмущения прямоугольных гелиоцентрических координат x' , y' , z' планеты P' даются уравнениями вида

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + k^2 (1 + m') x' r'^{-3} = \frac{\partial R'}{\partial x'}, \quad (4.10)$$

где R' равняется разности выражений (4.1) и (4.3).

Поскольку каждая из производных $\partial R' / \partial x'$, $\partial R' / \partial y'$, ... есть величина того же порядка, как и $\partial R' / \partial a'$, рассмотрим частные производные выражений (4.5) и (4.6) по a' . Частная производная (4.5) после двукратного интегрирования, требуемого уравнениями (4.10), даст величину того же порядка, что и

$$\sum \frac{K_m}{a'^2 (in + i'n')^2} \cos (iM + i'M' + C). \quad (4.11)$$

Члены (4.6) после таких же операций дадут в возмущениях координат величины порядка

$$\sum \frac{K_1 m}{a^2 (in + i'n')^2} \cos (iM + i'M' + C_1). \quad (4.12)$$

В силу соотношения (4.9) все члены ряда (4.11), кроме тех, в которых $i = 0$, стремятся к нулю вместе с a . Ряд (4.12), как уже было отмечено, не содержит членов, в которых $i = 0$. Поэтому все его члены также будут стремиться к нулю вместе с a .

Итак, возмущения координат внешней планеты P' , зависящие от второй части пертурбационной функции, стремятся к нулю

при неограниченном убывании большой полуоси орбиты внутренней планеты P .

Легко выяснить природу тех возмущений, которые имеют место в пределе за счет тех членов ряда (4.11), в которых $i=0$.

Когда $a \rightarrow 0$ и, следовательно, $r \rightarrow 0$, то производная выражения (4.1) по x' обращается в $-k^2 m x' r'^{-3}$. Подставив эту величину в правые части уравнений (4.10), будем иметь уравнения движения в форме

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + k^2(1 + m + m') x' r'^{-3} = 0, \dots$$

Отсюда следует, что возмущения первого порядка внешней планеты при $a \rightarrow 0$ в пределе таковы, как если бы масса Солнца была увеличена на массу m внутренней планеты.

Вытекающий отсюда способ учета возмущений, производимых близкими к Солнцу планетами в движении далеких планет или комет, часто оказывается достаточно точным и нередко применяется на практике.

§ 5. Уравнения, дающие вековые возмущения

При изучении движения планет в течение небольших промежутков времени, не превышающих нескольких столетий, можно во многих случаях ограничиться учетом вековых возмущений первого порядка. Эти возмущения всегда легко могут быть получены с любой точностью относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит при помощи метода Гаусса (§ 14 гл. XVI),

При более значительных промежутках времени может встретиться надобность в нахождении вековых возмущений высших порядков. Они могут быть найдены при помощи общих методов (§ 10 гл. XVI). Однако сложность вычислений так быстро возрастает при увеличении порядка, что практически возможно лишь вычисление вековых возмущений второго и третьего порядков.

Задача изучения изменений конфигурации планетной системы за очень большие промежутки времени может быть решена (не количественно, а только качественно) путем нахождения членов нулевого ранга, т. е. членов, имеющих множителем возмущающие массы и время в одной и той же степени (§ 11 гл. XVI). Метод, предложенный Лагранжем для представления вековых возмущений в тригонометрической форме, к изложению которого мы сейчас переходим, дает совокупность членов нулевого ранга, хотя и с весьма ограниченной точностью относительно эксцентриситетов и взаимного наклона орбит. Этот метод основан на замене полных уравнений, служащих для нахождения оскулирующих элементов, упрощенными уравнениями,

получающимися путем отбрасывания в правых частях всех периодических членов. Для получения таких усеченных уравнений нужно, очевидно, заменить пертурбационную функцию ее вековой частью.

Обозначим через m_1, m_2, \dots массы рассматриваемых планет P_1, P_2, \dots ; через $a_1, e_1, \dots; a_2, e_2, \dots$ обозначим их элементы.

Вековые возмущения больших полуосей, появляющиеся только начиная с третьего порядка (§ 13 гл. XVI), крайне малы. Их влиянием на конфигурацию планетной системы, по сравнению с влиянием других элементов, мы можем пренебречь. Поэтому a_1, a_2, \dots будем в дальнейшем считать постоянными.

Вековые возмущения элементов e_1, e_2, \dots , изменяющие лишь положение планет в их орбитах, здесь не представляют интереса. Наибольший интерес представляют, с точки зрения интересующей нас здесь проблемы, вековые возмущения эксцентриситетов и наклонов орбит. Но, как заметил Лагранж, целесообразнее рассматривать вековые возмущения элементов

$$h_\mu = e_\mu \sin \pi_\mu; \quad k_\mu = e_\mu \cos \pi_\mu, \quad (5.1)$$

и

$$p_\mu = \operatorname{tg} i_\mu \sin \Omega_\mu; \quad q_\mu = \operatorname{tg} i_\mu \cos \Omega_\mu. \quad (5.2)$$

Вековая часть пертурбационной функции, выражающей действие планеты P_ν на планету P_μ , с точностью до членов второй степени включительно дается выражением (§ 6 гл. XVII)

$$|R_{\mu, \nu}| = k^2 m_\nu \{ M_{\mu, \nu} + N_{\mu, \nu} [e_\mu^2 + e_\nu^2 - \operatorname{tg}^2 i_\mu - \operatorname{tg}^2 i_\nu + \\ + 2 \operatorname{tg} i_\mu \operatorname{tg} i_\nu \cos (\Omega_\nu - \Omega_\mu)] - 2P_{\mu, \nu} e_\mu e_\nu \cos (\pi_\nu - \pi_\mu) \}$$

или

$$|K_{\mu, \nu}| = k^2 m_\nu \{ M_{\mu, \nu} + N_{\mu, \nu} [h_\mu^2 + h_\nu^2 + k_\mu^2 + k_\nu^2 - \\ - p_\mu^2 - p_\nu^2 - q_\mu^2 - q_\nu^2 + 2(p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu)] - \\ - 2P_{\mu, \nu} (h_\mu h_\nu + k_\mu k_\nu) \}. \quad (5.3)$$

Через $M_{\mu, \nu}, N_{\mu, \nu}, P_{\mu, \nu}$ здесь обозначены функции a_μ и a_ν , симметричные относительно этих величин.

Возмущения элементов (5.1) и (5.2) даются уравнениями (9.2) и (9.4) гл. XVI. Учитывая точность выражения (5.3), мы можем в правых частях этих уравнений отбросить члены второй и высших степеней. Это даст окончательно следующие уравнения:

$$\frac{dh_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial k_\mu}; \quad \frac{dk_\mu}{dt} = \frac{-1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial h_\mu}, \quad (5.4)$$

и

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial q_\mu}; \quad \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{-1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial p_\mu}, \quad (5.5)$$

где

$$R_{\mu} = \sum_{\nu=1}^m [R_{\mu, \nu}], \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \quad (5.6)$$

Чтобы не исключать значение $\nu = \mu$ при суммировании, условимся считать

$$M_{\mu, \mu} = N_{\mu, \mu} = P_{\mu, \mu} = 0.$$

Введя обозначения

$$(\mu, \nu) = \frac{2k^2 m_{\nu}}{n_{\mu} a_{\mu}^2} N_{\mu, \nu}; \quad [\mu, \nu] = \frac{2k^2 m_{\nu}}{n_{\mu} a_{\mu}^2} P_{\mu, \nu}, \quad (5.7)$$

мы можем уравнения (5.4) написать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_{\mu}}{dt} - A_{\mu, \mu} k_{\mu} + [\mu, 1] k_1 + [\mu, 2] k_2 + \dots &= 0, \\ \frac{dk_{\mu}}{dt} + A_{\mu, \mu} h_{\mu} - [\mu, 1] h_1 - [\mu, 2] h_2 - \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

где

$$A_{\mu, \mu} = (\mu, 1) + (\mu, 2) + \dots \quad (5.9)$$

Уравнения (5.5) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{\mu}}{dt} + A_{\mu, \mu} q_{\mu} - (\mu, 1) q_1 - (\mu, 2) q_2 - \dots &= 0, \\ \frac{dq_{\mu}}{dt} - A_{\mu, \mu} p_{\mu} + (\mu, 1) p_1 + (\mu, 2) p_2 + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Отмеченная выше симметричность коэффициентов $N_{\mu, \nu}$ и $P_{\mu, \nu}$ относительно a_{μ} и a_{ν} показывает, что

$$\left. \begin{aligned} m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 (\mu, \nu) &= m_{\nu} n_{\nu} a_{\nu}^2 (\nu, \mu), \\ m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 [\mu, \nu] &= m_{\nu} n_{\nu} a_{\nu}^2 [\nu, \mu]. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Поэтому, умножив уравнения (5.8) соответственно на $m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 h_{\mu}$ и $m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 k_{\mu}$, сложив их почленно и просуммировав полученное равенство по μ , получим

$$\sum m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 \left(h_{\mu} \frac{dh_{\mu}}{dt} + k_{\mu} \frac{dk_{\mu}}{dt} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 (h_{\mu}^2 + k_{\mu}^2) = C, \quad (5.12)$$

где C — постоянная величина.

Таким образом, учитывая (5.1), имеем

$$\sum m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 e_{\mu}^2 = C. \quad (5.13)$$

Для уравнений (5.5) найдем аналогичное соотношение

$$\sum m_{\mu} n_{\mu} a_{\mu}^2 \operatorname{tg}^2 i_{\mu} = C'. \quad (5.14)$$

Эти первые интегралы усеченных уравнений движения были открыты Лапласом.

В настоящее время эксцентриситеты и наклоны планетных орбит не велики, вследствие чего и постоянные C и C' очень малы. Так как все планеты движутся в одну сторону, то все члены в каждой из сумм, стоящих в (5.13) и (5.14), положительны. Лаплас считал возможным заключить отсюда, что и в будущем e_{μ} и i_{μ} останутся малыми величинами, что обеспечивает «устойчивость» планетной системы. Однако такое заключение справедливо лишь в отношении тех планет, массы которых составляют существенную часть суммы всех планетных масс. Если же масса какой-либо планеты достаточно мала, то ее эксцентриситет и наклон орбиты могут стать очень большими, не нарушая соотношений (5.13) и (5.14).

Так как

$$n_{\mu} = k \sqrt{1 + m_{\mu} a_{\mu}^{-3/2}},$$

то, пренебрегая величинами второго порядка относительно масс, интегралам Лапласа можно придать такой вид:

$$\sum m_{\mu} \sqrt{a_{\mu}} e_{\mu}^2 = \text{const}; \quad \sum m_{\mu} \sqrt{a_{\mu}} \operatorname{tg}^2 i_{\mu} = \text{const}.$$

§ 6. Тригонометрическая форма вековых возмущений

Уравнения (5.8) и (5.10), дающие вековые возмущения лагранжевых элементов, могут быть легко решены.

Сообразно с общим способом решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами нужно, прежде всего, найти $2m$ независимых частных решений каждой из этих двух систем.

Для системы уравнений (5.8) частные решения будем искать в форме

$$\left. \begin{aligned} h_{\mu} &= \frac{L^{(\mu)}}{a_{\mu} \sqrt{m_{\mu} n_{\mu}}} \sin(gt + \beta_{\mu}); \\ k_{\mu} &= \frac{L^{(\mu)}}{a_{\mu} \sqrt{m_{\mu} n_{\mu}}} \cos(gt + \beta_{\mu}) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

($\mu = 1, 2, \dots, m$),

где g , β_{μ} и $L^{(\mu)}$ — постоянные величины.

где

$$M_{\lambda}^{(\mu)} = \frac{C_{\lambda} q_{\lambda}^{(\mu)}}{a_{\mu} \sqrt{m_{\mu} n_{\mu}}}.$$

Уравнение (6.5), левая часть которого дается выражением вида (6.4), получило название векового уравнения.

От характера корней векового уравнения, являющегося характеристическим уравнением системы (5.8), зависят свойства решения (6.6).

В интересующем нас случае, когда все m_{μ} и n_{μ} положительны, вековое уравнение с элементами, определяемыми равенствами (5.9) и (6.3), не может иметь комплексных корней. В самом деле, при их наличии выражения (6.6) содержали бы показательные функции, вследствие чего левая часть равенства (5.12) стремилась бы к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$, что невозможно.

Лаплас пытался доказать таким же способом отсутствие равных корней, но при этом впал в ошибку: он считал, что при наличии равных корней в общем интеграле (6.6) обязательно должны появиться в качестве множителей тригонометрических функций полиномы относительно t , что было бы несовместимо с интегралом (5.12). Однако, как было показано Вейерштрассом (1858) и О. И. Сомовым (1859), в случае равных корней характеристического уравнения вовсе не обязательно появление t вне знаков тригонометрических функций.

Когда рассматриваются только две планеты, невозможность равных корней у векового уравнения легко доказывается непосредственной проверкой. Для случая трех планет эта невозможность была в 1878 г. доказана Зеелигером.

Общее решение уравнений (5.10), имеющих ту же форму, что и уравнения (5.8), дается выражениями

$$\left. \begin{aligned} p_{\mu} &= \sum_1^m N_{\lambda}^{(\mu)} \sin(f_{\lambda} t + \gamma_{\lambda}), \\ q_{\mu} &= \sum_1^m N_{\lambda}^{(\mu)} \cos(f_{\lambda} t + \gamma_{\lambda}), \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

аналогичными (6.6), где γ_{λ} — произвольные постоянные. Через f_1, f_2, \dots, f_m обозначены корни векового уравнения

$$\bar{D}(f) = 0. \quad (6.8)$$

Здесь $\bar{D}(f)$ отличается от (6.4) только тем, что на этот раз

$$A_{\mu, \nu} = -\frac{a_{\mu} \sqrt{m_{\mu} n_{\mu}}}{a_{\nu} \sqrt{m_{\nu} n_{\nu}}} (\mu, \nu), \quad (6.9)$$

для всех $\mu \neq \nu$, а $A_{\mu, \mu}$ имеют по-прежнему значения (5.9).

Выражения (6.6) показывают, что

$$e_{\mu}^2 = h_{\lambda}^2 + k_{\mu}^2 = M_1^{(\mu)^2} + M_2^{(\mu)^2} + \dots \\ \dots + 2M_1^{(\mu)}M_2^{(\mu)} \cos [(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] + \\ + 2M_1^{(\mu)}M_3^{(\mu)} \cos [(g_1 - g_3)t + \beta_1 - \beta_3] + \\ + \dots$$

Отсюда ясно, что

$$e_{\mu} < |M_1^{(\mu)}| + |M_2^{(\mu)}| + \dots \quad (6.10)$$

Точно так же из выражений (6.7) получим

$$\operatorname{tg} i_{\mu} < |N_1^{(\mu)}| + |N_2^{(\mu)}| + \dots \quad (6.11)$$

Эти соотношения позволяют найти верхние границы эксцентриситетов и наклонов орбит.

Рассмотрим теперь частный случай, когда в выражениях (6.6) абсолютная величина одного из коэффициентов превосходит сумму абсолютных величин всех остальных. Пусть, например,

$$|M_{\rho}^{(\mu)}| > \sum_1^m |M_{\lambda}^{(\mu)}|, \quad (6.12)$$

где значок ' в правой части показывает, что при суммировании значение $\lambda = \rho$ должно быть пропущено. Очевидная комбинация равенств (6.6) дает

$$e_{\mu} \sin (\pi_{\mu} - g_{\rho}t - \beta_{\rho}) = + \sum' M_{\lambda}^{(\mu)} \sin [(g_{\lambda} - g_{\rho})t + \beta_{\lambda} - \beta_{\rho}], \\ e_{\mu} \cos (\pi_{\mu} - g_{\rho}t - \beta_{\rho}) = M_{\rho}^{(\mu)} + \sum' M_{\lambda}^{(\mu)} \cos [(g_{\lambda} - g_{\rho})t + \beta_{\lambda} - \beta_{\rho}].$$

Правая часть второго из этих равенств в силу условия (6.12) никогда не может обратиться в нуль. Мы можем поэтому положить

$$\pi_{\mu} = g_{\rho}t + \beta_{\rho} + k \cdot 180^{\circ} + \delta_{\mu}(t),$$

где k — целое число, а последний член удовлетворяет неравенству

$$-90^{\circ} < \delta_{\mu}(t) < +90^{\circ}.$$

Отсюда следует, что при условии (6.12) перигелий планеты P_{μ} будет иметь среднее движение, равное g_{ρ} . Иначе говоря, перигелий будет всегда отстоять меньше чем на 90° от точки, движущейся равномерно с угловой скоростью g_{ρ} .

В рассматриваемом случае

$$e_{\mu} > |M_{\rho}^{(\mu)}| - \sum_{\lambda} |M_{\lambda}^{(\mu)}|,$$

а потому e_{μ} имеет нижнюю границу, отличную от нуля.

Аналогичные заключения имеют место и для вековых возмущений узлов и наклонов орбит, даваемых формулами (6.7).

Важно отметить, что каждая из величин $A_{\mu, \nu}$, определяемых формулами (5.9), (6.3) и (6.9), порядка планетных масс. Отсюда следует, что корни уравнений (6.5) и (6.8) также порядка масс. Поэтому разложение выражений (6.6) и (6.7) по степеням $g_{\mu}t$ и $f_{\mu}t$ даст возмущения нулевого ранга.

§ 7. Вековые возмущения больших планет

Получив выражения (6.6) и (6.7) для вековых возмущений (в мемуаре, опубликованном в 1782 г.), Лагранж вычислил входящие в эти выражения величины для случая нашей солнечной системы. Конечно, это первое вычисление представляет только исторический интерес. Действие Урана (открытого в 1781 г.) здесь еще не учитывается, а для масс Меркурия, Венеры и Марса Лагранжу пришлось взять грубо приближенные значения, полученные путем умножения объема на гипотетическую плотность.

С лучшими значениями постоянных и с учетом влияния Урана вычисления были выполнены Леверрье в 1839 г. Позднее, после получения достаточно надежных данных для Нептуна (открытого в 1846 г.), эти вычисления были им дополнены [Леверрье, 1857]. До недавнего времени наибольшую роль играли значения вековых возмущений (6.6) и (6.7), опубликованные Стокуэллом в 1870 г. В 1895 г. появилась фундаментальная работа Харцера, давшая много нового в отношении разработки метода, но ее результаты были искажены допущенной автором ошибкой. Наибольшее значение имеют сейчас результаты Брауэра и Вуркома [1950], применивших тот же метод, что и Харцер (вычисление вековых возмущений канонических элементов) к современным данным относительно масс и орбит восьми основных планет солнечной системы. Но включить действие Плутона оказалось невозможным вследствие особенностей его орбиты. Как известно, радиус-вектор Плутона может иногда быть меньше радиуса-вектора Нептуна. Вследствие этого орбита Плутона при варьировании долготы перигелия и долготы узла от 0° до 360° может пересекаться с орбитой Нептуна. Таким образом, разложение пертурбационной функции, на котором основан изложенный в §§ 5 и 6 метод Лагранжа, становится неприменимым.

В таблице 4 приведены наибольшие и наименьшие значения эксцентриситетов планетных орбит, полученные указанным в предыдущем параграфе способом из выражений вековых возмущений, данных в двух последних из только что указанных работ.

В тех случаях, когда в выражениях (6.6) нет доминирующего коэффициента, остается не ясным, имеет ли эксцентриситет

нижнюю границу, отличную от нуля. Наоборот, если условие (6.12) выполняется и нижняя граница эксцентриситета, отличная от нуля, существует, то перигелий планеты имеет, в среднем, поступательное движение. Это, однако, не значит, что движение перигелия (даже представляемое формулами (6.6), т. е. без учета периодических членов пертурбационной функции) происходит всегда в одну сторону.

Таблица 4

Планета	Стокуэлл		Брауэр и Вурком		
	Пределы эксцентриситета		Пределы эксцентриситета		Период обращения перигелия (в тысячелетиях)
Меркурий	0,121	0,232	0,109	0,241	220
Венера	0,071	...	0,074	...
Земля	0,068	...	0,067	...
Марс	0,018	0,140	0,004	0,141	72
Юпитер	0,025	0,061	0,027	0,062	300
Сатурн	0,012	0,084	0,012	0,086	47
Уран	0,012	0,078	...	0,067	...
Нептун	0,006	0,015	0,005	0,013	2000

Таблица 5

Планета	Стокуэлл		Брауэр и Вурком		
	Пределы наклона		Пределы наклона		Период обращения узла (в тысячелетиях)
Меркурий	4°,7	9°,2	4°,5	9°,8	250
Венера	3,3	...	3,4	...
Земля	3,1	...	2,9	...
Марс	5,9	...	6,2	...
Юпитер	0,2	0,5	0,2	0,5	50
Сатурн	0,8	1,0	0,8	1,0	50
Уран	0,9	1,1	0,9	1,1	450
Нептун	0,6	0,8	0,6	0,8	1900

Аналогичные данные в отношении наклонов орбит и движения узла содержит таблица 5. Наклоны орбит считаются относительно плоскости Лапласа (§ 3 гл. XIV).

Различие между результатами двух указанных работ почти целиком зависит от различия принятых в этих работах значений масс планет.

Выражения вековых возмущений в форме (6.6) и (6.7) несколько расширяют наши сведения относительно устойчивости солнечной системы. Учитывая все предположения, на которых

основан вывод этих формул, можно думать, что они, совместно с теоремами об отсутствии вековых возмущений первого и второго порядков у больших полуосей орбит, позволяют утверждать неизменность конфигурации солнечной системы в течение нескольких миллионов лет.

Примечание. Решение векового уравнения (6.5) и вычисление соответствующих коэффициентов $L_{\lambda}^{(\mu)}$ представляет, при большом значении m , довольно трудоемкую операцию. Для ее выполнения Леверрье и Якоби создали специальные методы, опубликованные ими соответственно в 1839 и 1845 годах. Эти методы употребляются еще и теперь. Следующий по времени метод, имеющий много преимуществ, был предложен А. Н. Крыловым в 1931 г.

Эта задача, т. е. нахождение собственных значений квадратной симметричной матрицы $\|A_{\mu, \nu}\|$ и ее собственных векторов, подробно рассматривается в статье Вейленда [1947] и в книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1960], содержащих весьма полную библиографию.

§ 8. Вековые возмущения малых планет

Применим изложенный метод нахождения вековых возмущений к случаю, когда рассматривается система, состоящая из $m+1$ планет $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$, причем масса m_0 планеты P_0 исчезающе мала.

В этом случае система уравнений, дающих вековые возмущения лагранжевых элементов (5.1), распадается, очевидно, на две независимые системы: систему (5.8), дающую вековые возмущения планет P_1, P_2, \dots, P_m , имеющих конечные массы, и систему

$$\left. \begin{aligned} dh_0/dt &= +k_0 \sum_1^m (0, \mu) - \sum_1^m k_{\mu} [0, \mu], \\ dk_0/dt &= -h_0 \sum_1^m (0, \mu) + \sum_1^m h_{\mu} [0, \mu], \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

дающую вековые возмущения изучаемой малой планеты.

Решив систему (5.8) и подставив полученные значения $h_1, \dots, h_m, k_1, \dots, k_m$ в уравнения (8.1), будем иметь систему двух неоднородных, линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} dh_0/dt &= +gk_0 - \sum_1^m B_{\mu} \cos(g_{\mu}t + \beta_{\mu}), \\ dk_0/dt &= -gh_0 + \sum_1^m B_{\mu} \sin(g_{\mu}t + \beta_{\mu}), \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

где

$$g = \sum_1^m (0, \mu), \quad (8.3)$$

а через B_{μ} обозначены постоянные коэффициенты.

Решение этих уравнений в общем случае дается формулами (индексы у элементов малой планеты, не нужные в дальнейшем, опускаем)

$$\left. \begin{aligned} e \sin \pi &= B \sin (gt + \beta) + \Delta h, \\ e \cos \pi &= B \cos (gt + \beta) + \Delta k, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta h \\ \Delta k \end{aligned} \right\} = \sum_1^m \frac{B_\mu}{g - g_\mu} \sin (g_\mu t + \beta_\mu), \quad (8.5)$$

а через B и β обозначены постоянные интегрирования.

Величины (8.5) представляют вынужденные колебания элементов малой планеты, тогда как первые члены в правых частях равенств (8.4) выражают собственные колебания этих элементов.

Обратимся теперь к лагранжевым элементам, определяющим положение плоскости орбиты. Вместо элементов

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega,$$

которыми мы пользовались до сих пор, возьмем ~~следующие~~

$$p = \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega,$$

употребляемые во многих работах.

И в том и в другом случае выражения (5.3) и уравнения (5.5) в пределах принятой нами точности одинаковы.

Аналогично только что рассмотренному случаю получим

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= C \sin (-gt + \gamma) + \Delta p, \\ \sin i \cos \Omega &= C \cos (-gt + \gamma) + \Delta q. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где g имеет то же самое значение (8.3),

$$\left. \begin{aligned} \Delta p \\ \Delta q \end{aligned} \right\} = \sum_1^m \frac{C_\mu}{g + f_\mu} \sin (f_\mu t + \gamma_\mu), \quad (8.7)$$

а C и γ — постоянные, характеризующие собственные колебания рассматриваемых элементов.

Подробное исследование формул (8.4) и (8.6), в частности, условий возможности резонанса, было выполнено Шарлье [1902].

Когда вековые возмущения системы больших планет, выражаемые формулами (6.6) и (6.7), найдены, то величины (8.5) и (8.7) легко могут быть затабулированы, так как они будут функцией лишь большой полуоси орбиты малой планеты. В уже упомянутой работе Брауэра и Вуркома [1950] даны пятизначные таблицы этих величин для значений a от 1,90 до 4,25.

Величины B , C и

$$\pi^* = gt + \beta, \quad \Omega^* = -gt + \gamma,$$

представляющие собой род средних элементов, лучше характеризуют общие свойства движения малой планеты, нежели оскулирующие элементы e , $\sin i$, π и Ω , для какого-либо определенного момента. Хирайама предложил назвать эти величины (вместе с a) собственными элементами малой планеты. В ряде работ, опубликованных с 1919 по 1933 г., он показал, что значительное число малых планет образует семейства, характеризующиеся очень близкими между собою значениями собственных элементов a , B и C [Хирайама, 1923—1928]. Эти исследования были существенно дополнены Брауэром [1951].

Согласно Брауэру имеется девять семейств, причем число входящих в семейство планет колеблется от 9 до 62. В качестве примера укажем «семейство Коронис», насчитывающее 33 планеты, для которых

$$2,8436 \leq a \leq 2,9046; \quad 0,0412 \leq B \leq 0,0658; \quad 0,0338 \leq C \leq 0,0422,$$

тогда как для всех 1537 рассмотренных Брауэром планет имеем $2,15 \leq a \leq 4,26$, $0,0000 \leq B \leq 0,5491$, $0,0069 \leq C \leq 0,6483$.

Помимо семейств, существуют еще, как указал Брауэр, группы малых планет, характеризующиеся тесной концентрацией значений a и суммы

$$\pi^* + \Omega^* = \beta + \gamma.$$

Таких групп он насчитал 19.

Семейства Хирайамы и группы Брауэра объединяют в общей сложности 458 малых планет из 1537 подвергнутых изучению. Дальнейшее изучение этих особенностей кольца малых планет может принести существенную пользу для выяснения многих вопросов эволюции солнечной системы.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ КООРДИНАТ

§ 1. Уравнения движения в цилиндрических координатах

В работах Эйлера, положивших начало созданию аналитических теорий движения планет (§ 2 гл. II), уже были даны методы для прямого получения возмущенных координат. В дальнейшем внимание Эйлера и его ближайших продолжателей, Лагранжа и Лапласа, было обращено главным образом на разработку методов получения возмущенных элементов.

Но когда Лаплас поставил перед собой задачу создания высокоточных теорий движения планет, он снова обратился к прямому нахождению возмущений координат, минуя вычисление возмущений элементов. Разработанный Лапласом метод, являющийся дальнейшим развитием применявшегося Эйлером интегрирования уравнений движения в цилиндрических координатах, не потерял своего значения и в настоящее время.

Обозначим через x, y, z координаты планеты P , имеющей массу m , относительно неподвижной системы координат с началом в центре Солнца S .

Чтобы получить уравнения движения в цилиндрических координатах (ρ, v, z) , определяемых соотношениями

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad r^2 = \rho^2 + z^2,$$

заметим, что кинетическая энергия в этих координатах дается выражением

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{v}^2 + \dot{z}^2).$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

примем $q_1 = \rho$, $q_2 = v$, $q_3 = z$. Обозначив через T_1 , T_2 и T_3 компоненты ускорения точки P по направлению укороченного радиуса-

вектора ρ , по направлению перпендикуляра к нему в плоскости xy , в сторону увеличения углов v и по направлению оси z , будем иметь

$$Q_1 = mT_1, \quad Q_2 = m\rho T_2, \quad Q_3 = mT_3.$$

Таким образом, уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = T_1, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) = \rho T_2, \quad \ddot{z} = T_3. \quad (1.1)$$

В том случае, когда существует функция сил mU , эти уравнения можно написать так:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) = \frac{\partial U}{\partial v}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Если рассматривается возмущенное движение планеты P , то

$$U = k_1^2 r^{-1} + R,$$

где первый член соответствует невозмущенному движению, а R представляет пертурбационную функцию. Через k_1^2 здесь для краткости обозначена величина $k^2(1+m)$.

Уравнения (1.2) принимают здесь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 + k_1^2 \rho r^{-3} &= \partial R / \partial \rho, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) &= \partial R / \partial v, \\ \ddot{z} + k_1^2 z r^{-1} &= \partial R / \partial z. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

В случае невозмущенного движения, когда $R=0$, движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через S .

Если принять эту плоскость за координатную плоскость Sxy , то будем иметь $z=0$, $\rho=r$. Решение уравнений (1.3) дается в этом случае хорошо известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} E - e \sin E &= k_1 a^{-3/2} (t - t_0), \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - v_0) &= \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E, \\ r &= \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos (v - v_0)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где через a , e , v_0 и t_0 обозначены постоянные, введенные интегрированием.

§ 2. Уравнения Клеро—Лапласа

Формулы (1.4) показывают, что r и t выражаются через v проще, нежели r и v через t . Это навело на мысль принять и при изучении возмущенного движения за независимую перемен-

ную не время t , а долготу v . Поскольку возмущенное движение мало отличается от невозмущенного, естественно ожидать, что такая замена независимой переменной будет способствовать большей простоте решения.

С другой стороны, в то время как радиус-вектор r , рассматриваемый как функция v , дается довольно сложным дифференциальным уравнением, его обратная величина

$$u = r^{-1} = a^{-1} (1 - e^2)^{-1} [1 + e \cos (v - v_0)]$$

удовлетворяет весьма простому уравнению:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = a^{-1} (1 - e^2)^{-1}.$$

Все эти соображения побудили принять за искомые величины

$$u = 1/\rho; \quad s = z/\rho; \quad t,$$

а за независимую переменную v .

Положив

$$\rho^2 \frac{dv}{dt} = H,$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} = Hu^2,$$

легко заменить производные по t производными по v . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = Hu^2 \frac{d}{dv} \left(Hu^2 \frac{d\rho}{dv} \right) = \\ &= -Hu^2 \frac{d}{dv} \left(H \frac{du}{dv} \right) = \\ &= -H^2 u^2 \frac{d^2 u}{dv^2} - Hu^2 \frac{dH}{dv} \frac{du}{dv}. \end{aligned}$$

Поэтому первое из уравнений (1.1) принимает вид

$$H^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) + H \frac{dH}{dv} u^2 \frac{du}{dv} = -T_1. \quad (2.1)$$

Второе из этих уравнений теперь напишется так

$$H \frac{dH}{dv} = u^{-3} T_2. \quad (2.2)$$

В третье из уравнений (1.1) подставим $z = s \cdot u^{-1}$. Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (su^{-1})}{dt^2} &= Hu^2 \frac{d}{dv} \left(Hu^2 \frac{d (su^{-1})}{dv} \right) = \\ &= H^2 u^2 \left(u \frac{d^2 s}{dv^2} - s \frac{d^2 u}{dv^2} \right) + H \frac{dH}{dv} u^2 \left(u \frac{ds}{dv} - s \frac{du}{dv} \right) \end{aligned}$$

и исключая отсюда вторую производную u при помощи соотношения (2.1), получим

$$H^2 u^3 \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) + H \frac{dH}{dv} u^3 \frac{ds}{dv} = T_3 - sT_1.$$

Входящую сюда производную H исключим при помощи равенства (2.2). Окончательно будем иметь уравнения, которые можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dv^2} + u &= H^{-2} u^{-2} \left(-T_1 - T_2 u^{-1} \frac{du}{dv} \right), \\ \frac{d^2 s}{dv^2} + s &= H^{-2} u^{-3} \left(-sT_1 - \frac{ds}{dv} T_2 + T_3 \right), \\ H \frac{dH}{dv} &= u^{-3} T_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

После того как решение уравнений (2.3) даст величины u , s и H в функции v , нужно еще найти t в функции v . Для этого служит уравнение

$$dt = H^{-1} u^{-2} dv. \quad (2.4)$$

Полученные уравнения можно представить в другом виде, исключив из них вспомогательную величину H . Соотношение (2.2) дает

$$H^2 = H_0^2 + 2 \int_0^v T_2 u^{-3} dv,$$

где H_0 — постоянная, введенная интегрированием.

Пользуясь этим соотношением, уравнения (2.3) и (2.4) можно заменить такими:

$$\left. \begin{aligned} \left(H_0^2 + 2 \int T_2 u^{-3} dv \right) \left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) &= u^{-2} \left(-T_1 - \frac{1}{u} \frac{du}{dv} T_2 \right), \\ \left(H_0^2 + 2 \int T_2 u^{-3} dv \right) \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) &= u^{-3} \left(-sT_1 - \frac{ds}{dv} T_2 + T_3 \right), \\ dt &= u^{-2} \left(H_0^2 + 2 \int T_2 u^{-3} dv \right)^{-1/2} dv. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Напишем еще эти уравнения для того случая, когда существует функция сил U . В этом случае

$$T_1 = \partial U / \partial \rho, \quad \rho T_2 = \partial U / \partial v, \quad T_3 = \partial U / \partial z,$$

а так как из равенства

$$U(u, v, s) = U(\rho^{-1}, v, z\rho^{-1})$$

следует

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -u^2 \frac{\partial U}{\partial u} - su \frac{\partial U}{\partial s}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = u \frac{\partial U}{\partial s},$$

то окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} (H_0^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv) \left(\frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) &= \\ &= \frac{\partial U}{\partial u} - u^{-2} \frac{du}{dv} \frac{\partial U}{\partial v} + su^{-1} \frac{\partial U}{\partial s}, \\ (H_0^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv) \left(\frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) &= \\ &= su^{-1} \frac{\partial U}{\partial u} - u^{-2} \frac{ds}{dv} \frac{\partial U}{\partial v} + u^{-2} (1 + s^2) \frac{\partial U}{\partial s}, \\ dt &= u^{-2} \left(H_0^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right)^{-1/2} dv. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

В таком виде эти уравнения были впервые даны Лапласом, но основные идеи — употребление долготы в качестве независимой переменной v и введение обратной величины ρ в качестве неизвестной — принадлежат Клеро.

Уравнения (2.6) были выведены Клеро для случая $s=0$ и применены к изучению возмущений в движении Луны, производимых Солнцем, — в предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики. Уравнения (2.3) и (2.4) были широко использованы Адамсом в его работах по теории движения Луны.

§ 3. Метод Лапласа

В основе метода Лапласа, с рассмотрения которого мы начнем изучение методов, дающих аналитические выражения возмущенных координат, лежит своеобразное использование уравнений (1.3), служащих для изучения возмущенного движения в цилиндрических координатах.

За плоскость xy , определяющую цилиндрическую систему координат ρ, v, z , Лаплас принимает плоскость оскулирующей орбиты в момент t , что дает $\rho=r, z=0$. Затем он показывает, что долготу v можно заменить (пренебрегая величинами второго порядка относительно возмущающих сил) долготой в неподвижной плоскости, а именно в плоскости оскулирующей орбиты для некоторого определенного момента t_0 . Таким образом для радиуса-вектора r и долготы в плоскости оскулирующей орбиты (эту долготу мы теперь будем обозначать через w) уравнения (1.3) дают

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + k_1^2 r^{-2} = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dw}{dt} \right) = \frac{\partial R}{\partial w}. \quad (3.2)$$

Ганзен показал (см. § 7), что эти уравнения являются совершенно точными, если долготу w отсчитывать от направления в плоскости оскулирующей орбиты, соответствующим образом определенного.

Умножим первое из этих уравнений на $2 \frac{dr}{dt}$, второе на $2 \frac{dw}{dt}$, сложим их и проинтегрируем. Это даст

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - 2k_1^2 r^{-1} = 2C + 2 \int d'R, \quad (3.3)$$

где для краткости положено

$$d'R = \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial R}{\partial w} \frac{dw}{dt}\right) dt.$$

Умножив равенство (3.1) на r и сложив его почленно с (3.3), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = 2C + r \frac{\partial R}{\partial r} + 2 \int d'R. \quad (3.4)$$

Обозначим через r_0 и w_0 координаты, соответствующие невозмущенному движению, и положим

$$r = r_0 + \delta r, \quad w = w_0 + \delta w.$$

Подстановка этих выражений в (3.4) и (3.2) дает

$$\frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} (r_0 \delta r) = r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + 2 \int d'R + G_2, \quad (3.5)$$

$$2r_0^2 \frac{dw_0}{dt} \frac{d\delta w}{dt} + \frac{d^2 r_0}{dt^2} \delta r - r_0 \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{3k_1^2 r_0 \delta r}{r_0^3} = -r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + H_2, \quad (3.6)$$

где через G_2 и H_2 обозначены совокупности членов не ниже чем второго порядка.

В невозмущенном движении

$$r_0^2 \frac{dw_0}{dt} = k_1 \sqrt{a(1-e^2)},$$

или, так как

$$e = \sin \varphi; \quad k_1 = na^{3/2},$$

то

$$r_0^2 \frac{dw_0}{dt} = na^2 \cos \varphi.$$

Поэтому уравнение (3.6) после вычитания из него уравнения (3.5), умноженного на 3, можно написать так:

$$a^2 n \cos \varphi \frac{d\delta w}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2r_0 \frac{d\delta r}{dt} + \delta r \frac{dr_0}{dt} \right) - 3 \int d'R - 2r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + J_2, \quad (3.7)$$

где J_2 обозначает совокупность членов второго и высших порядков.

Уравнение (3.5) служит для нахождения возмущений радиуса-вектора. Решение этого уравнения приводится к повторному интегрированию уравнения вида

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = Q, \quad (3.8)$$

где $k_1^2 r_0^{-3}$ и Q — известные функции t . В самом деле, для получения возмущений первого порядка надо в правой части уравнения (3.5) отбросить G_2 и вычислить пертурбационную функцию R при помощи невозмущенных значений координат планеты, что даст для Q вполне известную функцию t . При вычислении возмущений второго порядка, входящих в δr , мы найдем правую часть уравнения (3.5) с точностью до членов второго порядка включительно при помощи уже найденных возмущений первого порядка, и т. д.

Линейное неоднородное уравнение второго порядка вида (3.8) можно было бы решать методом вариации произвольных постоянных в его обычной форме. Но для нашей цели удобнее поступить несколько иначе.

Пусть для соответствующего (3.8) однородного уравнения

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = 0 \quad (3.9)$$

известны два линейно независимых решения q_1 и q_2 , так что

$$\ddot{q}_1 + k_1^2 r_0^{-3} q_1 = 0; \quad \ddot{q}_2 + k_1^2 r_0^{-3} q_2 = 0. \quad (3.10)$$

Исключение величины $k_1^2 r_0^{-3}$ из этих равенств дает

$$q_1 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 = 0,$$

откуда

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = C,$$

где постоянная C не равна нулю.

С другой стороны, исключение той же величины из уравнения (3.8) при помощи каждого из соотношений (3.10) дает

$$q_1 \ddot{q} - q \ddot{q}_1 = Q q_1; \quad q_2 \ddot{q} - q \ddot{q}_2 = Q q_2.$$

Отсюда, обозначив через K_1, K_2 постоянные, введенные интегрированием, получим

$$q_1 \dot{q} - q \dot{q}_1 = K_2 + \int q_1 Q dt,$$

$$q_2 \dot{q} - q \dot{q}_2 = -K_1 + \int q_2 Q dt.$$

Исключив из этих равенств \dot{q} , будем иметь искомое решение уравнения (3.8) в таком виде:

$$Cq = K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2 \int q_1 Q dt - q_1 \int q_2 Q dt, \quad (3.11)$$

или

$$Cq = q_2 \int q_1 Q dt - q_1 \int q_2 Q dt, \quad (3.12)$$

если оставить нижние пределы интегралов неопределенными.

Мы знаем, что орбитальные прямоугольные координаты

$$\xi = a(\cos E - e); \quad \eta = a \cos \varphi \sin E$$

удовлетворяют однородному уравнению (3.9). Сообразно с этим, можно положить

$$q_1 = \cos E - e; \quad q_2 = \sin E, \quad (3.13)$$

откуда

$$C = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = (1 - e \cos E) \dot{E} = n.$$

Таким образом, решение уравнения (3.5) можно написать, пользуясь формулой (3.12), так:

$$r_0 \delta r = n^{-1} q_2 \int q_1 Q dt - n^{-1} q_1 \int q_2 Q dt, \quad (3.14)$$

где q_1 и q_2 определяются равенствами (3.13).

В созданных им теориях движения больших планет Лаплас [1803] ограничился почти исключительно возмущениями первого порядка. Влияние очень немногих принятых им во внимание вековых и долгопериодических членов второго порядка было учтено дополнительно.

Для вычисления возмущения первого порядка радиуса-вектора, которое мы обозначим через $\delta_1 r$, Лаплас применил следующий прием.

Так как (§ 10 гл. VI)

$$\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \dots + \left(3e + \frac{27}{8} e^3 + \dots\right) \cos M + \left(\frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 + \dots\right) \cos 2M + \dots, \quad (3.15)$$

то уравнение (3.5) дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r_0 \delta_1 r)}{dt^2} + n_1^2(r_0 \delta_1 r) = \\ = 2 \int d'R + r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} - n^2(r_0 \delta_1 r) \left[\left(3e + \frac{27}{8} e^3 + \dots\right) \cos M + \left(\frac{9}{2} e^2 + \dots\right) \cos 2M + \dots \right], \end{aligned}$$

где

$$n_1^2 = k_1^2 a^{-3} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \dots \right) = n^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \dots \right).$$

Это уравнение позволяет легко найти $\delta_1 r$ последовательными приближениями, быстро сходящимися при малых значениях эксцентриситета e . В каждом приближении придется решать линейное уравнение с постоянными коэффициентами и со второй частью, состоящей из суммы членов вида

$$A \cos(\nu t + \beta). \quad (3.16)$$

Каждому такому члену в $r_0 \delta_1 r$ будет соответствовать член

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \beta), \quad (3.17)$$

если $\nu \neq n_1$, и

$$\frac{At}{2n_1} \sin(n_1 t + \beta),$$

если $\nu = n_1$.

Чтобы избежать появления вековых членов в $\delta_1 r$, Лаплас вычисляет r_0 при помощи элементов, к которым уже приданы их вековые изменения. Вследствие этого величины A , ν и β в (3.16) становятся функциями t . Весьма медленное изменение этих функций позволяет заменить каждый из членов (3.17) выражением

$$\begin{aligned} \frac{A}{n_1^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \beta) + \cos \nu t \left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} + \dots \right] - \\ - \sin \nu t \left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Для получения входящих сюда производных Лаплас находит численные значения $A \sin \beta$ и $A \cos \beta$, а затем применяет интерполяционные формулы.

§ 4. Метод Лапласа (продолжение)

Обратимся теперь к нахождению долготы в орбите, для чего Лаплас применяет уравнение (3.7).

В том случае, когда ищутся возмущения первого порядка, это уравнение принимает вид

$$na^2 \cos \varphi \frac{d\delta_1 w}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2r_0 \frac{d\delta_1 r}{dt} + \delta_1 r \frac{dr_0}{dt} \right) - 2r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} - 3 \int d'R. \quad (4.1)$$

Так как $\delta_1 r$ уже найдено, то решение уравнения (4.1) приводится к выполнению квадратур двух видов

$$\left. \begin{aligned} \int A \cos(vt + \beta) dt &= Av^{-1} \sin(vt + \beta), \\ \int dt \int A \sin(vt + \beta) dt &= -Av^{-2} \sin(vt + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

если A , v и β рассматривать как постоянные величины. Если же, как это обычно делается, правая часть (4.1) вычисляется при помощи элементов, уже включающих вековые изменения, то вместо формул (4.2) приходится употреблять такие:

$$\begin{aligned} \int A \cos(vt + \beta) dt &= Av^{-1} \sin(vt + \beta) - \\ &- \sin vt \left\{ v^{-2} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} + v^{-3} \frac{d^2(A \cos \beta)}{dt^2} + \dots \right\} + \\ &+ \cos vt \left\{ v^{-2} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} - v^{-3} \frac{d^2(A \sin \beta)}{dt^2} + \dots \right\}, \\ \int dt \int A \sin(vt + \beta) dt &= -Av^{-2} \sin(vt + \beta) + \\ &+ \sin vt \left\{ 2v^{-3} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} + 3v^{-4} \frac{d^2(A \cos \beta)}{dt^2} + \dots \right\} - \\ &- \cos vt \left\{ 2v^{-3} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} - 3v^{-4} \frac{d^2(A \sin \beta)}{dt^2} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Величины $r = r_0 + \delta_1 r$ и $w = w_0 + \delta_1 w$ фиксируют положение планеты в плоскости оскулирующей орбиты для рассматриваемого момента t . Делая ошибку второго порядка относительно возмущающих сил, мы можем w отождествить с долготой, отсчитываемой в некоторой неподвижной плоскости. За такую плоскость можно принять, как уже было отмечено, плоскость оскулирующей орбиты в некоторый фиксированный момент t_0 . Чтобы закончить нахождение положения планеты, нам остается найти третью координату z , определяющую положение планеты относительно выбранной неподвижной плоскости.

Для этого служит последнее из уравнений (1.3), а именно,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k_1^2 r^{-3} z = \partial R / \partial z.$$

Вместо z Лаплас пользуется величиной $s = z/r$, равной синусу широты планеты относительно неподвижной плоскости. Полагая $s = s_0 + \delta s$ и замечая, что $s_0 = 0$, получим

$$\frac{d^2 (r_0 \delta_1 s)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} (r_0 \delta_1 s) = \partial R / \partial z.$$

Это уравнение имеет вид (3.8) и потому легко может быть решено указанными в предыдущем параграфе способами. Способ, основанный на употреблении разложения (3.15), даст $r_0 \delta_1 s$ в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситета.

§ 5. Метод Лапласа—Ньюкома

Ньюком в своих обширных работах (начаты в 1867 г. и законченные в 1898 г.) по созданию высокоточных теорий движения больших планет использовал исключительно метод Лапласа. Стремясь к получению большей точности, с одной стороны, и к построению возможно более удобных таблиц, с другой, — Ньюком внес в метод Лапласа ряд изменений.

Имея в виду удобство пользования таблицами, Ньюком ищет возмущения не радиуса-вектора, а его логарифма. Положим

$$\rho = \ln r, \quad \rho_0 = \ln r_0 \quad (5.1)$$

и выведем уравнение, дающее величину

$$\delta \rho = \rho - \rho_0 \quad (5.2)$$

Очевидно,

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

вследствие чего уравнение (3.4) дает

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = 2C + \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2 \int d' R.$$

Для невозмущенного движения имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r_0^2)}{dt^2} - k_1^2 r_0^{-1} = 2C.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (r^2 - r_0^2) - k_1^2 (r^{-1} - r_0^{-1}) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2 \int d' R. \quad (5.3)$$

Равенства (5.1) и (5.2) дают

$$r^2 = \exp(2\rho_0 + 2\delta\rho) = r_0^2 \exp(2\delta\rho),$$

откуда

$$\frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) = r_0^2 \delta\rho + r_0^2 (\delta\rho)^2 + \dots$$

Аналогично,

$$r^{-1} - r_0^{-1} = -r_0^{-1} \delta\rho + \frac{1}{2} r_0^{-1} (\delta\rho)^2 + \dots$$

Эти выражения подставим в уравнение (5.3), причем с левой стороны оставим лишь члены первого порядка, а члены второго

порядка перенесем направо. Это даст

$$\frac{d^2(r_0 \delta\rho)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} (r_0^2 \delta\rho) = \\ = \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2 \int d'R - \frac{d^2(r_0^2 (\delta\rho)^2)}{dt^2} + \frac{k_1^2 (\delta\rho)^2}{2r_0} + G_3, \quad (5.4)$$

где через G_3 обозначена совокупность членов не ниже третьего порядка.

Решение уравнения (5.4) выполняется приемами, указанными в § 3, и сравнительно просто дает в $\delta\rho$ возмущения как первого, так и второго порядка.

Обратимся теперь к уравнению (3.2), дающему

$$\frac{dw}{dt} = r^{-2} \left[C + \int \frac{\partial R}{\partial w} dt \right].$$

Так как для невозмущенного движения

$$\frac{dw_0}{dt} = r_0^{-2} a^2 n \cos \varphi,$$

то

$$C = a^2 n \cos \varphi.$$

Поэтому

$$\frac{d \delta w}{dt} = r^{-2} \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + (r^{-2} - r_0^{-2}) a^2 n \cos \varphi,$$

а так как соотношения (5.1) и (5.2) дают

$$r^{-2} = r_0^{-2} [1 - 2\delta\rho + 2(\delta\rho)^2 - \dots],$$

то окончательно получим

$$r_0^2 \frac{d \delta w}{dt} = (1 - 2\delta\rho) \int \frac{\partial R}{\partial w} dt - 2a^2 n \cos \varphi [\delta\rho - (\delta\rho)^2] + H_3, \quad (5.5)$$

где H_3 есть совокупность членов третьего и высших порядков.

Решение уравнения (5.5) выполняется таким же образом, как и уравнения Лапласа (4.1). Это последнее несколько более удобно, если ограничиваться нахождением возмущений первого порядка. Но если имеется в виду нахождение и возмущений второго порядка, то использование уравнения (5.5), данного Ньютоном, оказывается более выгодным.

Чтобы получить эклиптические координаты планеты для момента t , Ньютоном вычисляет для этого момента не только координаты r и w , но и элементы Ω и i , определяющие положение плоскости оскулирующей орбиты [Ньютоном, 1874]. Нахождение Ω и i выполняется обычными методами (§ 1 гл. XVIII) с использованием рабочих формул, данных Лаверрье [1855].

Метод Лапласа — Ньютома был применен Ш. Г. Шараф и Н. А. Будниковой для построения теории движения Плутона [Шараф, 1955; Шараф и Будникова, 1964].

§ 6. Метод Лапласа—Андуайе

В своем «Курсе небесной механики» Андуайе изложил метод Лапласа, сделав в нем, как он сам отмечает, достаточно далеко идущие модификации [Андуайе, 1926, стр. 47—70]. Эти модификации, в основном являющиеся применением идей Ганзена, Гюльдена и Пуанкаре, довольно глубоко меняют не только форму, но и существо метода. Получившийся таким образом новый метод подробно развит автором и, несомненно, заслуживает применения на практике.

Ограничимся описанием основных идей метода, данного Андуайе.

В основу кладется неподвижная система координат $Sxyz$, причем за плоскость Sxy принимается оскулирующая плоскость в некоторый фиксированный момент t_0 . В соответствующих этой системе цилиндрических координатах уравнения движения можно написать так (§ 1):

$$h = \rho^2 \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{h^2}{\rho^3} = T_1; \quad \frac{dh}{dt} = \rho T_2; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = T_3, \quad (6.1)$$

где через T_1 , T_2 , T_3 обозначены компоненты силы, действующей на планету.

За исходное приближение Андуайе принимает не кеплерово движение планеты, а некоторое вспомогательное движение, определяемое тем условием, что проекция планеты на основную плоскость Sxy должна двигаться по законам Кеплера. Такое движение мы, очевидно, получим, если в уравнениях (6.1) положим

$$T_1 = -k_0^2 \rho^{-2}; \quad T_2 = 0; \quad T_3 = -k_0^2 z \rho^{-3}, \quad (6.2)$$

т. е. если сила, действующая на планету, направлена в точку O , а ее интенсивность равна

$$k_0^2 \rho^{-3} r = k_0^2 \rho^{-3} (\rho^2 + z^2)^{1/2}.$$

Постоянный коэффициент k_0^2 Андуайе определяет условием

$$k_0^2 (1 + \kappa) = k_1^2; \quad k_1^2 = k^2 (1 + m),$$

где k и m имеют обычные значения, а через κ обозначена величина порядка возмущающих сил, которая фиксируется в дальнейшем.

Так как мы рассматриваем случай, когда z имеет величину порядка возмущающих сил, то при всех этих условиях отклонение взятого нами вспомогательного исходного движения от кеплерова будет тоже первого порядка.

Для движения планеты, имеющего место в действительности, функция сил равна mU , где

$$U = k_0^2 (1 + \kappa) (\rho^2 + z^2)^{-1/2} + R,$$

причем через R обозначена, как обычно, пертурбационная функция. Поэтому для получения действительного движения планеты в уравнениях (6.1) надо взять

$$T_1 = \partial U / \partial \rho; \quad \rho T_2 = \partial U / \partial v; \quad T_3 = \partial U / \partial z. \quad (6.3)$$

Учитывая, что

$$(\rho^2 + z^2)^{-1/2} = \rho^{-1} - \frac{1}{2} z^2 \rho^{-3} + \frac{3}{8} z^4 \rho^{-5} - \frac{5}{16} z^6 \rho^{-7} + \dots,$$

положим

$$U = k_0^2 \left(\rho^{-1} - \frac{1}{2} z^2 \rho^{-3} \right) + W,$$

где

$$W = R + k_0^2 \kappa \left(\rho^{-1} - \frac{1}{2} z^2 \rho^{-3} \right) + k_0^2 (1 + \kappa) \left(\frac{3}{8} z^4 \rho^{-5} - \dots \right). \quad (6.4)$$

Таким образом, величины (6.3) примут вид

$$T_1 = -k_0^2 \rho^{-2} + \frac{3}{2} k_0^2 z^2 \rho^{-4} + \partial W / \partial \rho; \quad \rho T_2 = \partial W / \partial v;$$

$$T_3 = -k_0^2 z \rho^{-3} + \partial W / \partial z.$$

Они отличаются от (6.2), соответствующих промежуточной орбите, на величины порядка возмущающих сил.

Подстановка этих выражений в уравнения (6.1) позволяет написать эти уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \frac{k_0^2}{\rho^3} - \frac{3}{2} \frac{k_0^2 z^2}{\rho^4} - \frac{h^2}{\rho^3}; \quad \frac{dW}{dv} = \frac{dh}{dt}, \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k_0^2 z}{\rho^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Положим

$$W' = \int \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt$$

и выполним указанное здесь интегрирование. Легко убедиться, что

$$2W' = \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 - 2k_0^2 \rho^{-1} + k_0^2 z^2 \rho^{-3} + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + h^2 \rho^{-2}.$$

А так как

$$\rho \frac{\partial W}{\partial \rho} = \rho \frac{d^2 \rho}{dt^2} + k_0^2 \rho^{-1} - \frac{3}{2} k_0^2 z^2 \rho^{-3} - h^2 \rho^{-2}, \quad (6.6)$$

то, положив для краткости

$$P = \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} + 2W' + \frac{1}{2} k_0^2 z^2 \rho^{-3} - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

будем иметь для нахождения ρ такое уравнение:

$$\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2} - 2k_0^2 \rho^{-1} = P. \quad (6.7)$$

Присоединив к нему (6.6) и два последних из уравнений (6.5), т. е.

$$\frac{dv}{dt} = h\rho^{-2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + k_0^2 z \rho^{-3} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (6.8)$$

где

$$h^2 = \rho^3 \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} + k_0^2 \rho^{-2} - \frac{3}{2} k_0^2 z^2 \rho^{-4} - \frac{\partial W}{\partial \rho} \right), \quad (6.9)$$

получим для нахождения ρ , v и z систему пятого порядка. Шестая произвольная постоянная, необходимая для получения общего решения, уже содержится в W' .

Мы не будем входить во все подробности способа, развитого Андуайе для решения системы уравнений (6.7) и (6.8). Ограничимся лишь указанием замены переменных, делаемой им в этих уравнениях.

Учитывая, что невозмущенное движение проекции планеты на плоскость Sxy происходит по законам Кеплера, Андуайе вводит вместо ρ две новые переменные $\varepsilon = \sin \varphi$ и g , такие, что ρ и $\dot{\rho}$ выражаются через эти переменные по формулам кеплерова движения, в котором большая полуось a имеет постоянное значение.

Обозначим через n другую постоянную, определяемую равенством $n^2 a^3 = k_0^2$. В кеплеровом движении

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial g} n,$$

вследствие чего равенство

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

можно написать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial g} \left(\frac{dg}{dt} - n \right) + \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (6.10)$$

Обратимся теперь к уравнению (6.7), которое можно представить в форме

$$\frac{d\dot{\rho}}{dt} + \dot{\rho}^2 \rho^{-1} - k_0^2 \rho^{-2} = P\rho^{-1},$$

или

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \dot{\rho}^2 \rho^{-1} - k_0^2 \rho^{-2} = P\rho^{-1}.$$

Для невозмущенного движения это равенство имеет вид

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial g} n + \dot{\rho}^2 \rho^{-1} - k_0^2 \rho^{-2} = P_0 \rho^{-1},$$

где P_0 — постоянная величина, не зависящая от g и ε .

Почленное вычитание двух последних равенств дает

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial g} \left(\frac{dg}{dt} - n \right) + \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = P_0 \rho^{-1}, \quad (6.11)$$

поскольку постоянную P_0 можно считать присоединенной к той постоянной, которая уже фигурирует в W' .

Чтобы разрешить уравнения (6.10) и (6.11) относительно $dg/dt - n$ и $d\varepsilon/dt$, вычислим сначала определитель этой системы. Обозначив через w и u истинную и эксцентрическую аномалии, соответствующие g и ε , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial g} &= a \operatorname{tg} \varphi \sin w = \frac{a^2}{\rho} \varepsilon \sin u; & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial g} &= \frac{na^3}{\rho^2} \varepsilon \cos w; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} &= -a \cos w = \frac{a^2}{\rho} (\varepsilon - \cos u); & \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \varepsilon} &= \frac{na^3}{\rho^2} \cos \varphi \sin w. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \rho}{\partial g} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial g} = \frac{na^4 \varepsilon}{\rho^2},$$

а потому

$$\frac{dg}{dt} - n = \frac{P}{na^2 \varepsilon} (\cos u - \varepsilon); \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{P}{na^2} \sin u. \quad (6.12)$$

Эти уравнения Андуайе подвергает дальнейшему преобразованию, вводя вместо g и ε новые неизвестные, x_1 и x_2 , определяемые соотношениями

$$x_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \exp(ig); \quad x_2 = \frac{1}{2} \varepsilon \exp(-ig) \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Легко видеть, что радиус-вектор и уравнение центра выражаются через новые неизвестные следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln r &= \ln a - (x_1 + x_2) - \frac{3}{2} (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2 - \\ &\quad - \frac{17}{6} (x_1^3 + x_2^3) + \frac{3}{2} (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) + \dots, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} i(w - g) &= 2(x_1 - x_2) + \frac{5}{2} (x_1^2 - x_2^2) + \\ &\quad + \frac{13}{3} (x_1^3 - x_2^3) - (x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

Уравнения (6.12) могут быть заменены такими:

$$\frac{d(x^{-1}x_1)}{dt} = \frac{iz_2 P}{2na^2}; \quad \frac{d(xx_2)}{dt} = \frac{-iz_1 P}{2na^2}, \quad (6.15)$$

где

$$x = \exp i(nt + g_0),$$

$$z_1 = x[\exp i(u - g) - 2x_2]; \quad z_2 = x^{-1}[\exp[-i(u - g)] - 2x_1],$$

откуда

$$z_1 = x \left(1 + x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + \dots \right),$$

$$z_2 = x^{-1} \left(1 - 3x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \dots \right).$$

Вместо долготы v Андуайе вводит в качестве неизвестной соответствующую среднюю долготу λ . Так как

$$v = \lambda + (\omega - g),$$

то соотношения (6.8), (6.9) и разложение (6.14) приводят к уравнению вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + S - \frac{1}{na^2} CP, \quad (6.16)$$

где

$$C = 2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 + \dots,$$

а S дается равенством

$$h = h_1 + \rho^2 S,$$

причем

$$h_1 = na^2 \cos \varphi = na^2 (1 - 4x_1x_2)^{1/2}.$$

В заключение Андуайе подробно рассматривает вопрос о разложении пертурбационной функции R и выражения (6.4) в форме, наиболее удобной для решения уравнений (6.15), (6.16) и второго из уравнений (6.8).

§ 7. Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах

В неподвижной гелиоцентрической системе координат $Sxyz$ уравнения возмущенного движения планеты P с массой m имеют вид (§ 3 гл. XVI)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + k_1^2 x r^{-3} &= F_x, \\ \ddot{y} + k_1^2 y r^{-3} &= F_y, \\ \ddot{z} + k_1^2 z r^{-3} &= F_z, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где $k_1^2 = k^2(1 + m)$, а через (mF_x, mF_y, mF_z) обозначена возмущающая сила.

Координаты x, y, z и их производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ выражаются через оскулирующие элементы и время теми же самыми формулами, которые имеют место для невозмущенного движения, когда возмущающая сила равна нулю. Это свойство, присущее неподвижным координатам, может иметь место и для подвижных координатных систем, если их подчинить надлежащим условиям.

Пусть X, Y, Z — координаты планеты в подвижной гелиоцентрической системе, определяемой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ Y &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ Z &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

или эквивалентными им

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ z &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Если на девять угловых коэффициентов $\alpha, \alpha_1, \dots, \gamma_2$ уже связанных шестью условиями ортогональности,

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1; & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1; & \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 &= 0, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1; & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

наложить еще дополнительные условия:

$$\left. \begin{aligned} x\dot{\alpha} + y\dot{\alpha}_1 + z\dot{\alpha}_2 &= 0, \\ x\dot{\beta} + y\dot{\beta}_1 + z\dot{\beta}_2 &= 0, \\ x\dot{\gamma} + y\dot{\gamma}_1 + z\dot{\gamma}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

то производные новых координат будут даваться формулами

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \alpha\dot{x} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2\dot{z}, \\ \dot{Y} &= \beta\dot{x} + \beta_1\dot{y} + \beta_2\dot{z}, \\ \dot{Z} &= \gamma\dot{x} + \gamma_1\dot{y} + \gamma_2\dot{z}. \end{aligned}$$

В этом и только в этом случае новые координаты и их производные будут, очевидно, выражаться через оскулирующие элементы по формулам невозмущенного движения. Координатные системы, обладающие этим свойством, Ганзен предложил называть **идеальными**.

Покажем, что равенства (7.5) накладывают только два условия на угловые коэффициенты подвижной системы. В самом деле, подстановка выражений (7.3) в равенства (7.5) дает

$$X/A = Y/B = Z/C, \quad (7.6)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \gamma\dot{\beta} + \gamma_1\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\beta}_2 = -\beta\dot{\gamma} - \beta_1\dot{\gamma}_1 - \beta_2\dot{\gamma}_2, \\ B &= \alpha\dot{\gamma} + \alpha_1\dot{\gamma}_1 + \alpha_2\dot{\gamma}_2 = -\gamma\dot{\alpha} - \gamma_1\dot{\alpha}_1 - \gamma_2\dot{\alpha}_2, \\ C &= \beta\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 = -\alpha\dot{\beta} - \alpha_1\dot{\beta}_1 - \alpha_2\dot{\beta}_2. \end{aligned}$$

Соотношения (7.6) показывают, что мгновенная ось вращения триэдра $SXYZ$, дающего идеальную систему координат, совпадает с прямой SP .

Девять угловых коэффициентов, определяющих идеальную систему, связаны, помимо шести условий ортогональности, еще двумя условиями (7.6). Остающимся произволом в выборе этих коэффициентов Ганзен воспользовался, чтобы подчинить их еще условию

$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z = 0. \quad (7.7)$$

Таким образом, он получил идеальную систему, в которой всегда $Z=0$, а потому радиус-вектор планеты находится в плоскости SXY . Эту систему координат будем называть ганзеновской.

Соотношения (7.6) показывают, что для ганзеновской системы $C=0$; иначе говоря, имеет место первое из равенств:

$$\beta\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 = 0; \quad \alpha\dot{\alpha} + \alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2 = 0, \quad (7.8)$$

тогда как второе вытекает из соотношений (7.4). Эти же соотношения дают:

$$\beta\dot{\gamma} + \beta_1\dot{\gamma}_1 + \beta_2\dot{\gamma}_2 = 0; \quad \alpha\dot{\gamma} + \alpha_1\dot{\gamma}_1 + \alpha_2\dot{\gamma}_2 = 0. \quad (7.9)$$

Сопоставление равенств (7.8) и (7.9) показывает, что

$$\dot{\alpha}/\gamma = \dot{\alpha}_1/\gamma_1 = \dot{\alpha}_2/\gamma_2. \quad (7.10)$$

Точно так же, записав условие $C=0$ в форме

$$\alpha\dot{\beta} + \alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 = 0,$$

получим

$$\dot{\beta}/\gamma = \dot{\beta}_1/\gamma_1 = \dot{\beta}_2/\gamma_2. \quad (7.11)$$

Чтобы получить уравнения движения в ганзеновских координатах, продифференцируем равенства (7.3), в которых теперь $Z=0$. Это даст

$$\dot{x} = \alpha\dot{X} + \beta\dot{Y}; \quad \dot{y} = \alpha_1\dot{X} + \beta_1\dot{Y}; \quad \dot{z} = \alpha_2\dot{X} + \beta_2\dot{Y}. \quad (7.12)$$

так как

$$X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} = 0; \quad X\dot{\alpha}_1 + Y\dot{\beta}_1 = 0; \quad X\dot{\alpha}_2 + Y\dot{\beta}_2 = 0, \quad (7.13)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Дифференцирование равенств (7.12) дает

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha\ddot{X} + \beta\ddot{Y} + \dot{\alpha}\dot{X} + \dot{\beta}\dot{Y}, \\ \ddot{y} &= \alpha_1\ddot{X} + \beta_1\ddot{Y} + \dot{\alpha}_1\dot{X} + \dot{\beta}_1\dot{Y}, \\ \ddot{z} &= \alpha_2\ddot{X} + \beta_2\ddot{Y} + \dot{\alpha}_2\dot{X} + \dot{\beta}_2\dot{Y}. \end{aligned}$$

Умножим эти равенства сначала на α , α_1 , α_2 и сложим по-членно, потом — на β , β_1 , β_2 и опять сложим; наконец, на γ , γ_1 , γ_2 и снова сложим.

Учитывая (7.10) и (7.11), получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha\ddot{x} + \alpha_1\ddot{y} + \alpha_2\ddot{z} &= \ddot{X}, \\ \beta\ddot{x} + \beta_1\ddot{y} + \beta_2\ddot{z} &= \ddot{Y}, \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \gamma\ddot{x} + \gamma_1\ddot{y} + \gamma_2\ddot{z} &= (\gamma\dot{\alpha} + \dots)\dot{X} + (\gamma\dot{\beta} + \dots)\dot{Y} = \\ &= \gamma_2^{-1}(\dot{\alpha}_2\dot{X} + \dot{\beta}_2\dot{Y}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Очевидные комбинации уравнений движения (7.1) на основании (7.14) и (7.2) дают

$$\ddot{X} + k_1^2 X r^{-3} = F_X; \quad \ddot{Y} + k_1^2 Y r^{-3} = F_Y, \quad (7.16)$$

$$\dot{\alpha}_2\dot{X} + \dot{\beta}_2\dot{Y} = \gamma_2 F_Z. \quad (7.17)$$

Уравнение (7.17) и последнее из равенств (7.13) могут быть заменены такими:

$$\dot{\alpha}_2 = -\gamma_2 H^{-1} Y F_Z; \quad \dot{\beta}_2 = +\gamma_2 H^{-1} X F_Z, \quad (7.18)$$

где

$$H = X\dot{Y} - Y\dot{X}. \quad (7.19)$$

Уравнения (7.16) и (7.18) позволяют найти X , Y , α_2 , β_2 , так как

$$\gamma_2 = (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2)^{1/2}.$$

После этого из соотношений (7.4), уже чисто алгебраически, могут быть получены α , β , α_1 , β_1 . Этим заканчивается, как показывают формулы (7.3), переход от ганзеновских координат X , Y , $Z=0$ к координатам x , y , z .

Так как $Z=0$, то плоскость $Z=0$ ганзеновской системы координат совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты.

Перейдем к полярным координатам в плоскости оскулирующей орбиты, положив

$$X = r \cos \omega; \quad Y = r \sin \omega. \quad (7.20)$$

Подстановка этих выражений в уравнения (7.16) приводит к уравнениям

$$\ddot{r} - r\dot{\omega}^2 + k_1^2 r^{-2} = S; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\omega}) = rT, \quad (7.21)$$

где

$$S = F_x \cos \omega + F_y \sin \omega; \quad T = -F_x \sin \omega + F_y \cos \omega$$

представляют проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, лежащий в плоскости SXY .

Выражение (7.19) принимает вид

$$H = r^2\dot{\omega}. \quad (7.22)$$

В том случае, когда существует пертурбационная функция R , так что

$$F_x = \partial R / \partial X; \quad F_y = \partial R / \partial Y; \quad F_z = \partial R / \partial Z, \quad (7.23)$$

уравнения (7.21) можно придать вид

$$\ddot{r} - r\dot{\omega}^2 + k_1^2 r^{-2} = \frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\omega}) = \frac{\partial R}{\partial \omega}. \quad (7.24)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.1), (3.2), на которых базируется метод Лапласа. Изложенный нами вывод этих уравнений, данный Ганзеном, показывает, что уравнения (7.24) совершенно точны, если долгота ω отсчитывается от оси SX ганзеновской системы координат.

§ 8. Переход от ганзеновских координат к исходным

Угловые коэффициенты $\alpha, \beta, \dots, \gamma_2$, фигурирующие в формулах (7.3), могут быть выражены через три угла i, Ω и σ . Через i здесь обозначен угол между осями SZ и Sz ; через Ω — угол между Sx и положительным направлением линии узлов орбиты на плоскости Sxy ; через σ — угол между SX и этим направлением.

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \sigma \cos \Omega + \sin \sigma \sin \Omega \cos i, \\ \beta &= \sin \sigma \cos \Omega - \cos \sigma \sin \Omega \cos i, \\ \gamma &= \sin \Omega \sin i, \\ \alpha_1 &= \cos \sigma \sin \Omega - \sin \sigma \cos \Omega \cos i, \\ \beta_1 &= \sin \sigma \sin \Omega + \cos \sigma \cos \Omega \cos i, \\ \gamma_1 &= -\cos \Omega \sin i, \\ \alpha_2 &= -\sin \sigma \sin i, \\ \beta_2 &= \cos \sigma \sin i, \\ \gamma_2 &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Для случая ганзеновской системы координат $SXYZ$ на основании (7.8) имеем

$$\beta d\alpha + \beta_1 d\alpha_1 + \beta_2 d\alpha_2 = 0.$$

Подставив сюда выражения (8.1), дающие

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\alpha_1 d\Omega - \beta d\sigma - \gamma \sin \sigma di, \\ d\alpha_1 &= +\alpha d\Omega - \beta_1 d\sigma - \gamma_1 \sin \sigma di, \\ d\alpha_2 &= -\beta_2 d\sigma - \gamma_2 \sin \sigma di, \end{aligned}$$

получим

$$d\sigma = \cos i d\Omega. \quad (8.2)$$

С другой стороны, если в уравнения (7.18) подставить выражения (8.1) и учесть (7.23), то будем иметь

$$\frac{di}{dt} = H^{-1} r \cos(\varpi - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z}, \quad (8.3)$$

$$\operatorname{tg} i \frac{d\sigma}{dt} = H^{-1} r \sin(\varpi - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z}. \quad (8.4)$$

Соотношения (8.2) и (8.4) дают

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = H^{-1} r \sin(\varpi - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z}. \quad (8.5)$$

Уравнения (8.3) и (8.5) уже были нами выведены методом вариации произвольных постоянных (§ 6 гл. XVI).

После того как решение уравнений (7.24), (8.3), (8.4) и (8.5) даст величины r , ϖ , i , Ω и σ для вычисления гелиоцентрических сферических координат l и b , определяемых равенствами

$$x = r \cos b \cos l; \quad y = r \cos b \sin l; \quad z = r \sin b,$$

могут служить формулы

$$\left. \begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin(\varpi - \sigma), \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos(\varpi - \sigma), \\ \sin b &= \sin i \sin(\varpi - \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Чтобы их получить, достаточно к прямоугольному сферическому треугольнику, образованному на гелиоцентрической небесной сфере плоскостью xy , орбитой планеты и кругом широт, применить основные формулы сферической тригонометрии.

Формулы (8.6) достаточно удобны только в том случае, когда нужно вычислить лишь небольшое число положений планеты. Поэтому до самого последнего времени создание аналитической теории движения планеты всегда завершалось построением таблиц, по возможности облегчающих вычисление ее координат для целей получения эфемерид. Только электронные вычислительные

машины сделали во многих случаях более целесообразным получение эфемериды непосредственно по формулам аналитической теории, минуя составление таблиц.

Непосредственное табулирование b и $l - \Omega$ по аргументам i и $\omega - \sigma$ на основании формул (8.6) привело бы к построению слишком больших и неудобных таблиц с двумя входами. Чтобы избежать этого, Ганзен предложил заменить формулы (8.6) такими:

$$\left. \begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(\omega - \Omega_0) - \psi, \\ \cos b \cos(l - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos(\omega - \Omega_0) + \psi', \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(\omega - \Omega_0) + s, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

где i_0 и Ω_0 — значения элементов, соответствующие начальному моменту $t=0$, а за начальное значение σ (которым мы можем распорядиться по своему усмотрению) принято

$$\sigma_0 = \Omega_0. \quad (8.8)$$

Первые члены правых частей формул (8.7) удобно табулируются по аргументу $\omega - \Omega_0$. Что же касается малых величин ψ , ψ' и s , то для их вычисления Ганзен дал удобные формулы, которые мы приведем здесь без вывода.

После того как найдены ω и r , а следовательно, и H , вычисляем

$$\left. \begin{aligned} L &= \int_0^i H^{-1} r \cos i \sin(\omega - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} dt, \\ M &= \int_0^i H^{-1} r \cos i \cos(\omega - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} dt. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Учитывая малость $\partial R / \partial Z$ и достаточность нахождения L и M с небольшим числом знаков, в этих формулах можно пользоваться приближенными значениями i .

Решение уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin(\sigma - \Omega_0) &= L, \\ \sin i \cos(\sigma - \Omega_0) &= M + \sin i_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

даст значения σ и i . Значения i могут служить для контроля.

Далее находим:

$$\begin{aligned} s &= M \sin(\omega - \Omega_0) - L \cos(\omega - \Omega_0), \\ \kappa &= \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - M \sin i, \\ \psi &= s \kappa^{-1} [\sin i_0 \cos i + \cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \Omega_0)], \\ \psi' &= s \kappa^{-1} \sin i \sin(\sigma - \Omega_0), \end{aligned}$$

после чего формула

$$\Gamma = \int_0^t s \kappa^{-1} H^{-1} r \frac{\partial R}{\partial Z} dt$$

даст Γ .

Если пренебречь возмущениями второго и высших порядков, то

$$\Gamma = 0; \quad \psi = s \operatorname{tg} i_0; \quad \psi' = 0,$$

ибо, как показывают равенства (8.8) и (8.10), величины L и M , а потому и s — первого порядка относительно возмущающего ускорения.

§ 9. Метод Ганзена. Радиус-вектор и долгота в орбите

Создавая свой метод, Ганзен стремился избавиться от недостатков, присущих методу Лапласа в его первоначальном виде [Лаплас, 1799]. Мы уже видели (§ 7), что Ганзен дал безукоризненно строгий вывод основных уравнений возмущенного движения в плоскости оскулирующей орбиты. Далее он дал вполне строгие и удобные формулы для перехода от координат в плоскости оскулирующей орбиты к эклиптическим координатам. Еще более глубокие улучшения были им внесены в методику получения координат r и ω , определяющих положение планеты в плоскости оскулирующей орбиты.

Лаплас употреблял указанные в §§ 3 и 4 формулы лишь для нахождения короткопериодических членов в $\delta_1 r$ и $\delta_1 \omega$. Что же касается членов долгопериодических, то он предпочел учитывать их путем соответствующего изменения средней аномалии планеты. В формулах

$$\omega = \omega_0 + \delta_1 \omega; \quad r = r_0 + \delta_1 r$$

он находил значения ω_0 , r_0 при помощи средней аномалии, уже включающей долгопериодические члены среднего движения. Такой прием вполне оправдал себя на практике и широко использовался в дальнейшем при построении аналитических теорий движения планет (§ 3 гл. XVIII). Однако сделанная Лапласом попытка обосновать его законность [Лаплас, 1799; стр. 292] не может считаться доказательством. Вопрос о возможном влиянии такого учета долгопериодических возмущений на короткопериодические остался открытым, не говоря уже о неопределенности границы, разделяющей эти два класса возмущений.

В методе Ганзена все без исключения возмущения истинной долготы ω переносятся в среднюю аномалию планеты. Этим достигается безупречная строгость метода. С другой стороны, пре-

имущества, даваемые приемом Лапласа (уменьшение амплитуды), распространяются и на возмущения с короткими периодами.

Для достижения указанной цели Ганзен вводит в рассмотрение вспомогательную эллиптическую орбиту, лежащую в плоскости оскулирующей орбиты планеты и имеющую постоянные элементы a_0, e_0 и

$$n_0 = k_1 a_0^{-3/2}; \quad k_1^2 = k^2 (1 + m),$$

равные значениям оскулирующих элементов в начальный момент $t=0$. Через $n_0 z$ он обозначает среднюю аномалию в этой вспомогательной орбите.

Формулы эллиптического движения

$$\left. \begin{aligned} n_0 z &= E_0 - e_0 \sin E_0; & p_0 &= a_0 (1 - e_0^2), \\ r_0 \sin f_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0, \\ r_0 \cos f_0 &= a_0 (\cos E_0 - e_0), \\ r_0 &= a_0 (1 - e_0 \cos E_0) = p_0 (1 + e_0 \cos f_0)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

позволяют найти значения r_0 и f_0 , соответствующие любому значению z .

Величину z Ганзен рассматривает как функцию t , определяемую условием

$$w = f_0 + \pi_0, \quad (9.2)$$

где через π_0 обозначена долгота перигелия вспомогательной орбиты, отсчитываемая, как и долгота w , от оси SX .

Положим, далее,

$$r = r_0 (1 + v). \quad (9.3)$$

Вычисление возмущенных координат w и r в методе Ганзена приводится, таким образом, к нахождению величин z и v .

Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие z и v , введем в рассмотрение оскулирующие элементы a, e, n, p и χ . Через χ здесь обозначена долгота перигелия в момент t , отсчитываемая в плоскости оскулирующей орбиты от оси SX . Положив, далее,

$$h = k_1 / \sqrt{p}; \quad h_0 = k_1 / \sqrt{p_0},$$

из соотношений

$$r^2 \frac{dw}{dt} = k_1 \sqrt{p}; \quad r_0^2 \frac{df_0}{dz} = k_1 \sqrt{p_0},$$

получим

$$\frac{r^2}{r_0^2} \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_0}} = \frac{h_0}{h},$$

так как $dw = df_0$ на основании (9.2).

Учитывая (9.3), имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0^2}{h(1+v)^2}. \quad (9.4)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{1+v} = \frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{p} [1 + e \cos(\varpi - \chi)],$$

или

$$\frac{1}{1+v} = \frac{r_0}{p} [1 + e \cos(f_0 + \pi_0 - \chi)].$$

Введем вспомогательные величины ξ и η , определяемые равенствами

$$\left. \begin{aligned} e \cos(\chi - \pi_0) &= (1 - e_0^2) \xi + e_0, \\ e \sin(\chi - \pi_0) &= (1 - e_0^2) \eta. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Это позволит написать предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{1}{1+v} = \frac{1}{p} [r_0(1 + e_0 \cos f_0) + (1 - e_0^2) \xi r_0 \cos f_0 + (1 - e_0^2) \eta r_0 \sin f_0],$$

или

$$\frac{1}{1+v} = \frac{h^2}{h_0^2} \left(1 + \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0 \right). \quad (9.6)$$

Если соотношение (9.4) представить в форме

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 + \frac{2h_0}{h} \frac{1}{1+v} - \frac{h_0}{h}$$

и воспользоваться выражением (9.6), то получим

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{h_0}{h} \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 + \bar{W}, \quad (9.7)$$

где

$$\bar{W} = \frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + \frac{2h}{h_0} \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \frac{2h}{h_0} \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0. \quad (9.8)$$

Исключение h_0/h из (9.4) и (9.7) дает

$$(1 - v^2) \frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W},$$

или

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{\bar{W} + v^2}{1 - v^2}. \quad (9.9)$$

Выражению (9.8) Ганзен придает вид

$$\bar{W} = \Xi + \Upsilon \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \Psi \frac{r_0}{a_0} \sin f_0. \quad (9.10)$$

где

$$\Xi = \frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1; \quad \Upsilon = \frac{2h}{h_0} \xi; \quad \Psi = \frac{2h}{h_0} \eta. \quad (9.11)$$

Уравнение (9.6) мало удобно для нахождения v . Выгоднее пользоваться другим, дающим производную этой величины. Дифференцирование равенства (9.3) дает

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{dr}{dt} - \frac{r}{r_0^2} \frac{dr_0}{dt},$$

или, учитывая (9.4),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r_0} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \frac{h_0}{h} \frac{dr_0}{dz}.$$

Но, как мы знаем,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{k_1}{Vp} e \sin(\omega - \chi) = he \sin(\omega - \chi), \\ \frac{dr_0}{dz} &= h_0 e_0 \sin f_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{r_0} he \sin(\omega - \chi) - \frac{1}{r} \frac{h_0^2}{h} e_0 \sin f_0$$

Пользуясь выражением (9.1) для r_0 и аналогичным для r , это выражение можно заменить таким:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{h}{p_0} \{ e \sin(f_0 + \pi_0 - \chi) [1 + e_0 \cos f_0] - \\ &\quad - e_0 \sin f_0 [1 + e \cos(f_0 + \pi_0 - \chi)] \}, \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{p_0} [e \sin(f_0 - \pi_0 - \chi) - e_0 \sin f_0 + ee_0 \sin(\pi_0 - \chi)].$$

Соотношения (9.5) позволяют написать

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{a_0} [\xi \sin f_0 - \eta(e_0 + \cos f_0)], \quad (9.12)$$

или, пользуясь обозначениями (9.11),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{n_0}{2\sqrt{1-e_0^2}} [\Upsilon \sin f_0 - \Psi(e_0 + \cos f_0)]. \quad (9.13)$$

В заключение покажем, какой вид принимают эти выражения, если ограничиться членами первого порядка малости относительно возмущающего ускорения.

Уравнение (9.9) в этом случае принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W}_0, \quad (9.14)$$

причем

$$\bar{W}_0 = \Xi + \Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f, \quad (9.15)$$

поскольку a , r и f отличаются от a_0 , r_0 и f_0 на величины первого порядка.

Равенства (9.5) и (9.11) показывают, что ξ , η , Υ , Ψ суть величины первого порядка. Так как

$$\Xi = \frac{1}{hh_0} (h - h_0)(2h + h_0) = \frac{3}{h_0} (h - h_0) + \frac{1}{h_0^2} (h - h_0)^2 + \dots,$$

то Ξ — такого же порядка.

С той же точностью формулы (9.6) и (9.11) дают

$$v = 1 - \frac{h^2}{h_0^2} - \frac{h}{2h_0} \left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f \right),$$

или

$$v = -2 \frac{h - h_0}{h_0} - \frac{1}{2} \left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f \right),$$

а это выражение может быть заменено таким:

$$v = -\frac{2}{3} \Xi - \frac{1}{2} \left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f \right). \quad (9.16)$$

Итак, если пренебречь величинами второго порядка малости, то задача решается уравнениями (9.14) и (9.16).

§ 10. Метод Ганзена. Функция W

Уравнение (9.9) показывает, что

$$z = t + \int_0^t \frac{\bar{W} + v^2}{1 - v^2} dt. \quad (10.1)$$

Нахождение стоящей здесь функции \bar{W} приводится, как сейчас увидим, к нахождению некоторой другой функции W . Ганзен показал, что через эту функцию может быть весьма просто выражена и величина v , являющаяся другой главной неизвестной рассматриваемой нами задачи.

В функцию \bar{W} , определяемую равенством (9.10), время входит двояко: через посредство оскулирующих элементов, от которых зависят величины (9.11), и через посредство величин r_0 , f_0 , зависящих от z , которое является функцией времени. Чтобы сделать эту двоякую зависимость более явной, Ганзен обозна-

чает через t время, входящее в оскулирующие элементы, а через τ — время, функциями которого являются z , r_0 , f_0 .

Обозначив через ζ , ρ_0 , ω_0 , β величины z , r_0 , f_0 , v , рассматриваемые как функции τ , положим

$$W = \Xi + \Upsilon \frac{\rho_0}{a_0} \cos \omega_0 + \Psi \frac{\rho_0}{a_0} \sin \omega_0. \quad (10.2)$$

При замене τ через t функция W обращается в \bar{W} .

Возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{h_0}{h(1+\beta)^2}, \quad (10.3)$$

аналогичного (9.4). Это даст

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = -\frac{2}{1+\beta} \frac{d\beta}{d\tau}. \quad (10.4)$$

С другой стороны, дифференцирование по τ равенства

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^2 + W,$$

аналогичного (9.7), дает

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = 2 \frac{h_0}{h} \frac{\beta}{(1+\beta)^3} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau},$$

или, на основании соотношения (10.3),

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{dW}{d\zeta}.$$

Отсюда, учитывая (10.4), окончательно имеем

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{dW}{d\tau}.$$

В этом равенстве заменим τ через t . Результат этой замены в производной, стоящей справа, обозначим поставленной сверху черточкой. Это даст

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\tau} \right).$$

Таким образом,

$$v = C - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{dW}{d\tau} \right) dt. \quad (10.5)$$

Формулы (10.1) и (10.5) приводят решение задачи к нахождению функции W , определяемой равенством (10.2), или, что то же самое, к нахождению величин (9.11).

Первое из равенств (9.11) дает

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(\frac{2}{h_0} + \frac{h_0}{h^2} \right) \frac{dh}{dt},$$

откуда, учитывая (7.24), а также то, что в принятых здесь обозначениях Ганзена

$$r^2 \frac{d\varpi}{dt} = k_1 \sqrt{p} = k_1^2 h^{-1},$$

получим

$$\frac{d\Xi}{dt} = - \frac{h_0}{k_1^2} \left(1 + \frac{2h^2}{h_0^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \varpi}. \quad (10.6)$$

Из соотношений (9.5) и (9.11) имеем

$$\Upsilon = \frac{2h}{h_0(1-e_0^2)} [e \cos(\chi - \pi_0) - e_0],$$

$$\Psi = \frac{2h}{h_0(1-e_0^2)} e \sin(\chi - \pi_0).$$

Отсюда, после дифференцирования этих выражений и использования уравнений Эйлера (§ 6 гл. XVI), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Upsilon}{dt} &= \frac{2h}{k_1^2} \left[\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \cos f + \frac{e}{1-e^2} \right] \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{2ah}{k_1^2} \sin f \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{2h}{k_1^2} \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \sin f \frac{\partial R}{\partial \varpi} - \frac{2ah}{k_1^2} \cos f \frac{\partial R}{\partial r}. \end{aligned} \right\} (10.7)$$

Интегрирование уравнений (10.6) и (10.7), выполняемое, как всегда, последовательными приближениями, даст все более и более точные значения W , а следовательно, и полярных координат ϖ и r .

§ 11. Метод Ганзена. Широта планеты

При нахождении эклиптических координат l и b точные формулы (8.7) почти всегда могут быть заменены более простыми:

$$\left. \begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega_0) &= \cos i_0 \sin(\varpi - \Omega_0) - s \operatorname{tg} i_0, \\ \cos b \cos(l - \Omega_0) &= \cos(\varpi - \Omega_0), \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(\varpi - \Omega_0) + s. \end{aligned} \right\} (11.1)$$

Задача вычисления этих координат приводится, таким образом, к нахождению величины

$$s = M \sin(\varpi - \Omega_0) - L \cos(\varpi - \Omega_0),$$

где L и M определяются формулами (8.9), которые можно написать так (§ 9):

$$\left. \begin{aligned} L &= \int_0^t hr \cos i \sin(\varpi - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} dt, \\ M &= \int_0^t hr \cos i \cos(\varpi - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} dt. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Вместо s введем в качестве неизвестной величину

$$u = \frac{r_0}{a_0} s = M \frac{r_0}{a_0} \sin(f_0 + \pi_0 - \Omega_0) - L \frac{r_0}{a_0} \cos(f_0 + \pi_0 - \Omega_0). \quad (11.3)$$

Пользуясь приемом Ганзена, использованном в предыдущем параграфе, мы можем написать

$$u = \bar{N}, \quad (11.4)$$

где, аналогично (10.2),

$$\bar{N} = M \frac{\rho_0}{a_0} \sin(\omega_0 + \pi_0 - \Omega_0) - L \frac{\rho_0}{a_0} \cos(\omega_0 + \pi_0 - \Omega_0). \quad (11.5)$$

Равенства (11.2) и (11.5) показывают, что

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial R}{\partial Z} h \cos i \frac{\rho_0}{a_0} r \sin(\omega_0 - f_0).$$

После того, как интегрирование этого выражения (при условии, что $N=0$ при $t=0$) даст функцию N , формула (11.4) даст u , а следовательно, и s .

Можно получить другое выражение для u , аналогичное (10.5). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dN}{dt}\right)} &= \int_0^t \frac{\partial R}{\partial Z} hr \cos i \cos(\varpi - \Omega_0) dt \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{r}{a} \sin(\varpi - \Omega_0) \right] - \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial Z} hr \cos i \sin(\varpi - \Omega_0) dt \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{r}{a} \cos(\varpi - \Omega_0) \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям стоящего справа выражения показывает, что

$$\int_0^t \overline{\left(\frac{dN}{d\tau}\right)} dt = M \frac{r}{a} \sin(\varpi - \Omega_0) - L \frac{r}{a} \cos(\varpi - \Omega_0).$$

Следовательно,

$$u = \int_0^t \overline{\left(\frac{dN}{d\tau}\right)} dt. \quad (11.6)$$

Изложенный здесь способ нахождения дополнительных членов в правых частях формул (8.7) дает только возмущения первого порядка. Но его легко обобщить и сделать пригодным для получения возмущений высших порядков.

§ 12. Метод Ганзена. Дополнительные замечания

В предыдущих параграфах были выведены дифференциальные уравнения, позволяющие находить возмущения средней аномалии, радиуса-вектора и широты. Решение этих уравнений, приводящееся к выполнению в каждом приближении квадратур, принципиальных трудностей не представляет. Разработанные здесь технические приемы лучше всего изучать при помощи тех подробных изложений метода Ганзена, которые связаны с применением этого метода к фактическому вычислению планетных возмущений. Помимо основного сочинения Ганзена [1857—1861], в котором он приложил свой метод к вычислению возмущений первого и второго порядков малой планеты (13) Egeria, здесь прежде всего должна быть указана фундаментальная работа Хилла [1890], посвященная теории движения Юпитера и Сатурна. В этой работе в метод Ганзена был внесен ряд существенных улучшений и был подробно разработан вопрос о нахождении возмущений второго и частично третьего порядка.

Следует заметить, что при нахождении возмущений первого порядка различные методы требуют приблизительно одинакового количества вычислений. Существенное различие в этом отношении имеет место лишь при нахождении возмущений высших порядков. Тут преимущества метода Ганзена весьма заметны, что объясняется малой величиной возмущений величин z , v и u по сравнению с возмущениями других величин, могущих служить для нахождения положения планеты.

Именно по этой причине метод Ганзена был избран Хиллом для построения теорий движения Юпитера и Сатурна. Эти же причины заставили предпочесть метод Ганзена при переработке теории движения Марса, предпринятой Клеменсом [1949, 1961].

В уравнениях Ганзена пертурбационная функция содержит, как легко видеть, нечетные отрицательные степени расстояний между возмущаемой и возмущающими планетами. При интегрировании этих уравнений можно пользоваться различными формами разложений этих величин в тригонометрические ряды. В работе 1831 г. о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна,

в которой Ганзен впервые изложил свой метод и успешно применил его к задаче нахождения возмущений второго порядка (еще не имевшей удовлетворительного решения), он пользовался обычными разложениями по кратным средних аномалий. Но в своих позднейших работах [1857—1861] он стал пользоваться разложениями по кратным E и μE (§ 15 гл. XVII), а за независимую переменную принял эксцентрическую аномалию E . Такая замена независимой переменной позволяет ускорить сходимость рядов, расположенных по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты. Но эта выгода не окупает, по крайней мере в обычно встречающихся случаях, тех громоздких преобразований, которые здесь приходится делать, и сложной формы окончательных результатов. Вот почему Хилл, а затем и Клеменс в указанных выше работах отказались от употребления эксцентрической аномалии в качестве независимой переменной и вернулись к разложениям по кратным средних аномалий, т. е. к употреблению времени в качестве независимой переменной.

Метод Ганзена излагается и применяется либо в той форме, в которой он был дан самим Ганzenом, либо с теми изменениями, которые были внесены Хиллом [М. Ф. Хандриков, 1883; Тиссеран, 1896; Сундман, 1915]. Существенно иную форму этому методу придал Андуайе [1926]. Некоторые вопросы, например, нахождение постоянных интегрирования, с большой подробностью рассмотрены в книге Брауэра и Клеменса [1961].

§ 13. Возмущения прямоугольных координат.

Метод Энке

Наиболее прямой путь для получения прямоугольных координат x , y , z рассматриваемой планеты заключается в решении дифференциальных уравнений возмущенного движения в их первоначальной форме:

$$\ddot{x} + k_1^2 x r^{-3} = \partial R / \partial x; \dots, \quad (13.1)$$

где $k_1^2 = k^2(1+m)$, а через R обозначена пертурбационная функция (§ 4 гл. XIV).

В том случае, когда решение системы (13.1) выполняется численными методами, такой способ получения возмущенных координат давно уже стал основным, наиболее широко употребляемым. Возможность использовать уравнения (13.1) для непосредственного получения координат x , y , z в форме аналитических функций времени совершенно очевидна и является, с математической точки зрения, наиболее прямым способом решения задачи. Однако практические соображения, прежде всего желание по возможности сократить вычисления, заставили Клеро, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Ганзена и их последователей

отказаться от этого теоретически простейшего решения и создать рассмотренные выше методы нахождения возмущенных координат.

Метод аналитического решения уравнений возмущенного движения в форме (13.1), впервые детально разработанный Энке в 1857 г., заключается в следующем.

Пусть

$$x = x_0 + \delta x; \quad y = y_0 + \delta y; \quad z = z_0 + \delta z; \quad r = r_0 + \delta r, \quad (13.2)$$

где через x_0, y_0, z_0, r_0 обозначены значения x, y, \dots , соответствующие эллиптической орбите, удовлетворяющей уравнениям (13.1) при $R=0$. Таким образом,

$$\ddot{x}_0 + k_1^2 r_0^{-3} x_0 = 0; \quad \dots$$

Вычтя эти равенства почленно из (13.1), получим

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} \delta x = \frac{\partial R}{\partial x} + k_1^2 x \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right); \quad \dots \quad (13.3)$$

Так как

$$\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} = 3 \frac{\delta r}{r_0^4} - 6 \frac{\delta r^2}{r_0^5} + \dots,$$

то для вычисления возмущений первого порядка вместо уравнений (13.3) можно взять такие:

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} \delta x = \frac{\partial R_0}{\partial x_0} + \frac{3k_1^2 x_0}{r_0^5} (r_0 \delta r); \quad \dots, \quad (13.4)$$

где через R_0 обозначена пертурбационная функция R после замены x, y, z через x_0, y_0, z_0 .

Эллиптическую орбиту, дающую исходные величины x_0, y_0, z_0 , можно выбрать произвольно, так как решение уравнений (13.4) или (13.3) введет в выражения (13.2) нужное число постоянных интегрирования. Но, конечно, выгоднее эту орбиту выбрать так, чтобы для рассматриваемого интервала времени возмущения $\delta x, \delta y, \delta z$ были по возможности малы.

Энке предложил дополнить систему (13.3) уравнением (3.5), имеющим ту же форму по отношению к величине $r_0 \delta r$. Это уравнение легко может быть выведено непосредственно из уравнений (13.1). В самом деле, очевидные комбинации равенств (13.1) дают следующие соотношения:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + k_1^2 r^{-1} = r \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (13.5)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2k_1^2 r^{-1} = 2 \int d'R + K, \quad (13.6)$$

$$d'R = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz,$$

где через K обозначена постоянная, введенная интегрированием.

Почленное сложение соотношений (13.5) и (13.6) дает

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = r \frac{\partial R}{\partial r} + 2 \int d'R + K.$$

Подставив в левую часть этого равенства значение r , даваемое (13.2), окончательно будем иметь следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3} (r_0 \delta r) = \\ = r \frac{\partial R}{\partial r} + 2 \int d'R - \frac{1}{2} \frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-2} r^{-1} (\delta r)^2 + K. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Задача приводится к совместному решению уравнений (13.3) и (13.7), а в случае вычисления возмущений первого порядка — к решению уравнений (13.4) и (13.7), причем в этом последнем уравнении здесь должны быть отброшены члены второго порядка.

В каждом приближении приходится, таким образом, решать уравнения вида

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = Q, \quad (13.8)$$

где через Q обозначена известная функция времени.

В § 3 было показано, что решение уравнения (13.8) дается формулой

$$n_0 q = K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2 \int q_1 Q dt - q_1 \int q_2 Q dt, \quad (13.9)$$

где

$$q_1 = \cos E - e_0; \quad q_2 = \sin E,$$

а через K_1 , K_2 обозначены постоянные, введенные интегрированием.

Присоединение уравнения (13.7) к уравнениям (13.3), или (13.4) упрощает процесс интегрирования, но вводит три лишние произвольные постоянные. Чтобы число постоянных свести к шести, можно воспользоваться прежде всего соотношением

$$2(r_0 \delta r) = 2(x_0 \delta x + y_0 \delta y + z_0 \delta z) + (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 - (\delta r)^2,$$

получаемым путем подстановки выражений (13.2) в равенство

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Если ограничиться возмущениями первого порядка, то это соотношение принимает вид

$$r_0 \delta r - x_0 \delta x - y_0 \delta y - z_0 \delta z = 0.$$

Подставив сюда решения вида (13.9), полученные для уравнений (13.4) и (13.7), и выделив постоянные части в x_0 , y_0 , z_0 , мы получим, как нетрудно видеть, два соотношения между

девятью постоянными. Третье соотношение дает интеграл энергии (13.6).

Изложенный метод получения аналитических выражений возмущенных прямоугольных координат планеты не имеет преимуществ перед методами, рассмотренными в предыдущих параграфах, даже если ограничиться возмущениями первого порядка. При вычислении возмущений высших порядков он будет еще менее выгоден, так как возмущения в прямоугольных координатах значительно больше, нежели в полярных, употребляемых в методе Лапласа, не говоря уже о возмущениях в величинах z , v , u , являющихся неизвестными в методе Ганзена. Можно, как это было предложено Брюнновым еще в 1857 г., принять за плоскость xu плоскость оскулирующей (или средней) орбиты, что уменьшит возмущения δz третьей координаты. Но возмущения двух других координат будут все же много больше соответствующих величин в других методах. Все это объясняет, почему не было попыток применить разработанный Энке метод к вычислению возмущений планет в тех случаях, когда требуется значительная точность.

Стремление избежать недостатков, присущих методу Энке, привело к созданию метода Хилла, который будет рассмотрен в следующем параграфе. Другой путь для достижения той же цели был указан Брауэром [1944]. Разработанный Брауэром метод позволяет обходиться без вычисления возмущений радиус-вектора и гораздо более приспособлен к нахождению возмущений высших порядков, нежели метод Энке. В несколько иной форме метод Брауэра был представлен Дэнби [1962]. В. Т. Гонтковская [1958] видоизменила этот метод введением истинной аномалии в качестве независимой переменной и детально изучила вопрос о применении в нем быстродействующих вычислительных машин.

Мы ограничимся этими замечаниями, поскольку метод Брауэра подробно изложен в недавно вышедшей книге [Брауэр и Клеменс, 1961].

§ 14. Метод Хилла

Метод, опубликованный Хиллом в 1874 г. [Хилл, 1874], получился в результате введения в только что рассмотренный метод Энке трех изменений.

Если положить

$$q_1 = r_0 \delta r, \quad q_2 = \delta x, \quad q_3 = \delta y, \quad q_4 = \delta z,$$

то уравнения (13.3) и (13.7) можно написать так:

$$\ddot{q}_h + k_1^2 r_0^{-3} q_h = Q_h \quad (h = 1, 2, 3, 4), \quad (14.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_1 = Q_r &= 2 \int d'R + r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} + \frac{k_1^2(\delta r)^2}{r_0^2 r}, \\ Q_2 = Q_x &= \frac{\partial R}{\partial x} + (r_0^{-3} - r^{-3}) k_1^2 x, \\ Q_3 = Q_y &= \frac{\partial R}{\partial y} + (r_0^{-3} - r^{-3}) k_1^2 y, \\ Q_4 = Q_z &= \frac{\partial R}{\partial z} + (r_0^{-3} - r^{-3}) k_1^2 z. \end{aligned} \right\} (14.2)$$

Решение каждого из уравнений (14.1) дается формулами (3.12) и (3.13), так что

$$q_h = n^{-1} \left(q_2 \int q_1 Q_h dt - q_1 \int q_2 Q_h dt \right).$$

К выражению, стоящему в скобках, Хилл применил прием, используемый в методе Ганзена. Пусть

$$N = \bar{q}_2 q_1 - \bar{q}_1 q_2,$$

где черточками отмечены величины, в которых время t заменено величиной τ . Тогда

$$q_h = n^{-1} \int N Q_h dt, \quad (14.3)$$

при условии, что после интегрирования τ будет заменено на t .

Другое изменение, внесенное Хиллом, заключалось в том, что за независимую переменную он принял истинную аномалию v , соответствующую исходному невозмущенному движению. Так как

$$r_0^2 dv = na^2 \cos \varphi dt, \quad (14.4)$$

а функции (3.13) через v выражаются формулами

$$q_1 = \frac{r_0}{a} \cos v; \quad q_2 = \frac{r_0}{a \cos \varphi} \sin v,$$

то

$$N dt = \frac{\bar{r}_0 r_0^3}{na^4 \cos^2 \varphi} \sin(\bar{v} - v) dv.$$

Поэтому формулы (14.3) принимают вид

$$q_h = \frac{r_0}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_h r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv. \quad (14.5)$$

Эту систему четырех уравнений, служащих для нахождения только трех независимых между собой величин, Хилл заменил системой трех уравнений. С этой целью он положил

$$x = r \cos \lambda \cos \beta, \quad y = r \sin \lambda \cos \beta, \quad z = r \sin \beta, \quad (14.6)$$

что дает

$$\lambda = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Таким образом,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Уравнения движения (13.1) показывают, что

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h_0 + \int \left(x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt.$$

Полагая еще

$$Q_\lambda = x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \quad (14.7)$$

окончательно получим

$$(r^2 - z^2) \frac{d\lambda}{dt} = h_0 + \int Q_\lambda dt. \quad (14.8)$$

Постоянную h_0 определим условием

$$h_0 = x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} = na^2 \cos \varphi \cos i,$$

дающим

$$(r_0^2 - z_0^2) \frac{d\lambda_0}{dt} = h_0, \quad (14.9)$$

где через $\lambda_0 = \operatorname{arctg}(y_0/x_0)$ обозначена долгота, соответствующая невозмущенному движению.

Положим $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$ и найдем уравнение, дающее $\delta\lambda$. Так как

$$\begin{aligned} (r^2 - z^2) \frac{d\lambda_0}{dt} - h_0 &= [(r^2 - r_0^2) - (z^2 - z_0^2)] \frac{d\lambda_0}{dt} = \\ &= \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} h_0, \end{aligned}$$

то из (14.8) и (14.9) легко выводится, учитывая (14.4), первое из следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta\lambda &= \int \frac{r_0^2 dv}{r^2 - z^2} \left[\frac{1}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_\lambda r_0^2 dv - \right. \\ &\quad \left. - \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right], \\ \delta r &= \frac{1}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv, \\ \delta z &= \frac{r_0}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv. \end{aligned} \right\} (14.10)$$

Два других уравнения этой системы получаются из (14.5) при $h=1$ и $h=4$.

Хилл особо подчеркивает, что уравнения (14.10) совершенно точны и могут служить для вычисления возмущений любого порядка.

Применение этих уравнений требует представления подынтегральных выражений в удобной для интегрирования форме. Подынтегральные выражения в (14.10) являются функциями средних аномалий M и M' возмущаемой и возмущающей планет. Исключение времени дает следующее соотношение:

$$M' = \frac{n'}{n} M + M'_0 - \frac{n'}{n} M_0,$$

которое можно написать так:

$$M' = \vartheta' - \frac{n'}{n} (v - M),$$

где

$$\vartheta' = \frac{n'}{n} v + M'_0 - \frac{n'}{n} M_0.$$

Отсюда ясно, что подынтегральные выражения, которые являются 2π -периодическими функциями v и M' , могут быть рассматриваемы как 2π -периодические функции v и ϑ' . Тригонометрическое интерполирование (§ 12 гл. XVII) даст эти выражения в форме двойных рядов вида

$$\sum_{i,i'} [A_{i,i'} \cos(iv - i'\vartheta') + B_{i,i'} \sin(iv - i'\vartheta')],$$

вполне удобных для интегрирования по переменному v .

При употреблении v в качестве независимой переменной могут быть использованы и аналитические методы разложения пертурбационной функции по кратным истинных аномалий v и v' (или истинных долгот в орбитах). Такие методы [Цейпель, 1912; Браун и Шук, 1933] мало пригодны в тех случаях, когда эксцентриситеты значительны и требуется большая точность, поскольку последующее выражение v' через v , необходимое для интегрирования, требует выполнения весьма громоздких операций.

Наиболее значительным практическим применением рассматриваемого метода является теория движений Цереры, опубликованная В. Ф. Проскуриным. В его работе [Проскурин, 1952, 1962] с исчерпывающей полнотой изучены все вопросы, связанные как с вычислением возмущений первого и второго порядков, так и с нахождением постоянных интегрирования. Использование электронных вычислительных машин при применении метода Хилла было рассмотрено В. Т. Гонтковской [1958].

КАНОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Канонические уравнения

Рассмотрим динамическую систему, положение точек которой определяется обобщенными координатами q_k ($k=1, 2, \dots, s$), которые мы будем считать независимыми.

Состояние системы в момент t (т. е. положения и скорости всех ее точек) определяется значениями q_k и \dot{q}_k для этого момента. Состояние системы в начальный момент и кинетический потенциал $L(t, q_k, \dot{q}_k)$ вполне определяют при помощи уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (1.1)$$

движение системы, т. е. ее состояние для любого момента времени.

Для всех рассматриваемых в дальнейшем систем

$$L = T + U, \quad (1.2)$$

где через T обозначена кинетическая энергия, а через U — потенциал (потенциальная энергия с обратным знаком).

Чтобы систему (1.1) заменить системой $2s$ уравнений первого порядка, можно было бы принять за вспомогательные неизвестные обобщенные скорости \dot{q}_k . Покажем, что для этой цели можно воспользоваться также обобщенными импульсами, т. е. величинами

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (1.3)$$

После замены прямоугольных координат их выражениями через обобщенные кинетическая энергия принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_l \sum_k A_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_k A_k \dot{q}_k + A, \quad (1.4)$$

где суммирование по каждому индексу производится от 1 до s . С другой стороны, потенциал U не зависит от \dot{q}_i . Поэтому равенство (1.3) имеет вид

$$p_k = \sum_i A_{ik} \dot{q}_i + A_k. \quad (1.5)$$

Как известно, для всех голономных систем (а только с такими системами и приходится иметь дело в небесной механике) определитель $\det(A_{ik})$ не равен нулю. Таким образом, уравнения (1.5) разрешимы относительно \dot{q}_i , а потому мы действительно можем пользоваться переменными q_k, p_k вместо q_k, \dot{q}_k для определения состояния системы.

Для получения уравнений, дающих q_k и p_k , Гамильтон ввел величину

$$F = \sum p_k \dot{q}_k - L, \quad (1.6)$$

которую можно рассматривать, на основании (1.2) и (1.5), как функцию t, q_k, p_k .

Варьируя величины p_k, q_k , получим

$$\delta F = \sum \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k + \sum \frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k.$$

С другой стороны,

$$\delta F = \delta \sum p_k \dot{q}_k - \delta L = \sum \dot{q}_k \delta p_k + \sum p_k \delta \dot{q}_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k,$$

или, пользуясь равенством (1.3),

$$\delta F = \sum \dot{q}_k \delta p_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Сравнение этих двух выражений показывает, что

$$\dot{q}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Соотношения (1.1) и (1.3) дают

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Итак, для нахождения новых неизвестных, q_k, p_k , окончательно будем иметь уравнения

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (1.7)$$

Уравнения такого вида носят название канонических уравнений. Функция

$$F = F(t, q_k, p_k)$$

называется гамильтонианом системы (1.7).

Если функция F не зависит явно от t , то уравнения (1.7) имеют интеграл

$$F = \text{const.} \quad (1.8)$$

В том случае, когда рассматривается склерономная система, т. е. такая, в которой связи либо вовсе отсутствуют, либо не зависят от времени, интеграл (1.8) есть интеграл энергии. В самом деле, на основании (1.6), (1.3) и (1.2) его можно написать так:

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const.}$$

Но для склерономной системы T есть однородная функция второго порядка от \dot{q}_k , так как два последних члена в выражении (1.4) равны нулю. Поэтому стоящая здесь сумма равна $2T$, и рассматриваемый интеграл принимает, учитывая (1.2), такой вид:

$$T - U = \text{const.},$$

а это есть не что иное, как закон сохранения энергии.

§ 2. Лемма Пуанкаре

Канонические уравнения обладают многими весьма замечательными и весьма важными для динамики свойствами. Те свойства этих уравнений, которые нам понадобятся в дальнейшем, очень просто выводятся, как показал Пуанкаре [1905], из следующего предложения.

Лемма Пуанкаре. Если общее решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (2.1)$$

дается формулами

$$q_k = q_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}), \quad p_k = p_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}), \quad (2.2)$$

где через $\gamma_1, \dots, \gamma_{2s}$ обозначены постоянные интегрирования, то уравнения (2.1) эквивалентны соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2s). \quad (2.3)$$

Для доказательства служит следующее, легко проверяемое тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} \frac{\partial q_k}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) и (2.1) дают

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = - \sum \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i}. \quad (2.5)$$

Это показывает, что соотношения (2.3) действительно являются следствиями уравнений (2.1).

Чтобы показать, что уравнения (2.1) в свою очередь вытекают из соотношений (2.3), представим эти последние в форме (2.5) и воспользуемся тождеством (2.4). Получим

$$\sum \left(\frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial i_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \left(\frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2s).$$

Эти равенства мы можем рассматривать как систему $2s$ линейных однородных уравнений относительно величин

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_k} \right); \quad - \left(\frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \right). \quad (2.6)$$

Так как определитель этой системы не равен нулю (иначе функции (2.2) не были бы общим решением), то все величины (2.6) должны быть равны нулю, а это дает уравнения (2.1).

Примечание. Канонические уравнения (2.1) не меняются, если p_k и q_k поменять местами, а t заменить через $-t$. Поэтому соотношения (2.3) в лемме Пуанкаре можно заменить такими:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_i}. \quad (2.7)$$

§ 3. Канонические преобразования

В канонических уравнениях

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (3.1)$$

заменяем переменные q_k, p_k новыми переменными, Q_k, P_k , определяемыми равенствами

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= Q_k(t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s), \\ P_k &= P_k(t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Если уравнения, полученные после такой замены, могут быть представлены в каноническом виде:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}; \quad \frac{dP_k}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (3.3)$$

то преобразование (3.2) называется каноническим.

Не останавливаясь на различных формах, в которых могут быть представлены необходимые и достаточные условия каноничности преобразования [Шази, 1953], укажем лишь следующее достаточное условие, имеющее особенно широкое применение.

Теорема. Если зависимости (3.2) между старыми и новыми переменными таковы, что выражение

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = d'W \quad (3.4)$$

есть дифференциал некоторой функции W по всем переменным кроме времени, то преобразование (3.2) каноническое. Оно преобразует уравнения (3.1) в уравнения (3.3), в которых

$$K = F + \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (3.5)$$

где F и W выражены через новые переменные Q_k, P_k .

Заметим, прежде всего, что в соотношении (3.4), в котором p_k, q_k предполагаются выраженными через новые переменные P_k, Q_k , дифференциал функции

$$W = W(t, Q_k, P_k)$$

берется только по этим переменным, так что полный дифференциал этой функции равен

$$dW = d'W + \frac{\partial W}{\partial t} dt.$$

Таким образом, соотношение (3.4) можно написать в следующем виде:

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{dW}{dt} - \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (3.6)$$

С другой стороны, если при помощи соотношений (3.2) и (2.2) функцию W представить в форме

$$W = W(t, \gamma_1, \dots, \gamma_{2s}),$$

то (3.4) даст

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i}. \quad (3.7)$$

Продифференцировав равенство (3.6) по γ_i , а равенство (3.7) по t , и заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{dW}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_i} \right),$$

получим, произведя почленное вычитание,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Отсюда на основании (2.3) и (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) = - \frac{\partial K}{\partial y_i}.$$

Применив еще раз лемму Пуанкаре, убедимся, что новые переменные удовлетворяют уравнениям (3.3). Теорема доказана.

Условия этой теоремы можно выразить иначе. Сложим почленно равенство (3.4) с тождеством

$$\sum Q_k dP_k + \sum P_k dQ_k = \sum d(P_k Q_k).$$

Это даст

$$\sum p_k dq_k + \sum Q_k dP_k = d'S, \quad (3.8)$$

где

$$S = F + \sum P_k Q_k,$$

а через d' обозначен, как обычно, полный дифференциал, взятый по всем переменным, кроме времени, входящего явно.

Таким образом, взяв любую функцию

$$S(t, q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s),$$

мы получим при помощи равенств

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad (3.9)$$

эквивалентных (3.8), каноническое преобразование.

Пример 1. Покажем, что преобразование, даваемое соотношениями

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{2Q_1} \cos P_1; & p_1 &= \sqrt{2Q_1} \sin P_1, \\ q_i &= Q_i; & p_i &= P_i \quad (i=2, 3, \dots, s) \end{aligned}$$

является каноническим.

Так как

$$q_1 dp_1 = 2Q_1 \cos^2 P_1 dP_1 + \cos P_1 \sin P_1 dQ_1,$$

то

$$\begin{aligned} q_1 dp_1 - Q_1 dP_1 &= Q_1 \cos 2P_1 dP_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2P_1 dQ_1 = d\left(\frac{1}{2} Q_1 \sin 2P_1\right). \end{aligned}$$

Таким образом, условия теоремы здесь выполняются. Новые переменные удовлетворяют уравнениям (3.3), в которых $K=F$.

Пример 2. Часто встречается случай, когда P_k являются линейными функциями p_k , а Q_k — линейными функциями q_k . Здесь условие каноничности преобразования может быть выражено равенством

$$\sum p_k q_k - \sum P_k Q_k = 0.$$

В самом деле, из этого равенства непосредственно вытекает

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = 0,$$

так как dq_k связаны с dQ_k такими же соотношениями, как q_k с Q_k .

§ 4. Решение канонических систем

Рассмотрим каноническую систему

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}. \quad (4.1)$$

Введя новые переменные Q_k, P_k , удовлетворяющие условию каноничности

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = d'W, \quad (4.2)$$

получим, на основании только что доказанной теоремы, систему

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (4.3)$$

гамильтониан которой дается выражением

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + F(t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s). \quad (4.4)$$

Система (4.1) будет решена, если нам удастся найти такую функцию W , для которой $K=0$. В самом деле, уравнения (4.3) в этом случае дают

$$Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k,$$

где α_k и β_k — постоянные интегрирования. С другой стороны, соотношение (4.2) дает

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q_k},$$

причем мы можем считать, что функция W выражена, при помощи соотношений (3.2), через q_k и Q_k .

Заменив в W величины Q_k через α_k , мы получим функцию

$$W(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (4.5)$$

удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k. \quad (4.6)$$

Эти соотношения, позволяющие выразить q_k и p_k через t и $2s$ произвольных постоянных α_k и β_k , дают общее решение системы (4.1).

Итак, задача действительно приводится к нахождению функции W , удовлетворяющей уравнению $K=0$, которое, на основании (4.4) и (4.6), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + F\left(t, q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = 0, \quad (4.7)$$

т. е. является уравнением в частных производных первого порядка с $s+1$ независимыми переменными t, q_1, \dots, q_s .

Как известно, такое уравнение имеет всегда бесчисленное множество полных интегралов W , заключающих, помимо независимых переменных t, q_1, \dots, q_s , еще $s+1$ независимых между собою произвольных постоянных.

В рассматриваемом случае неизвестная функция W входит в уравнение (4.7) только в форме своих производных. Поэтому одна из произвольных постоянных, входящих в полный интеграл, будет аддитивной. Отбросив ее, получим функцию вида (4.5), где ни одна из постоянных α_k не может быть аддитивной.

Мы приходим, таким образом, к следующему результату, найденному Гамильтоном в 1834—1835 гг. и вскоре получившему окончательную форму в работах Якоби:

Теорема Якоби. Для решения канонической системы (4.1) достаточно найти один из полных интегралов W уравнения (4.7), содержащий неаддитивные произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Общее решение системы (4.1) будет даваться уравнениями (4.6), содержащими еще s произвольных постоянных β_1, \dots, β_s .

Применение этой теоремы к решению канонических систем носит название метода Якоби, а уравнение (4.7) обычно называется уравнением Гамильтона — Якоби.

Постоянные α_k, β_k , вводимые методом Якоби, носят название канонических постоянных или канонических элементов.

Примечание. Для консервативной канонической системы, у которой гамильтониан не зависит явно от времени, имеет место интеграл энергии (1.8).

В этом случае нахождение полного интеграла уравнения (4.7) упрощается. Полагая

$$W = -\alpha_1 t + W', \quad (4.8)$$

где α_1 — произвольная постоянная, для нахождения W' получим уравнение

$$F\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \frac{\partial W'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_s}\right) = \alpha_1.$$

Достаточно найти решение этого уравнения, содержащее еще $s-1$ произвольных постоянных $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$, чтобы иметь функцию (4.8), дающую общее решение (4.6) канонической

системы. В рассматриваемом случае это общее решение будет представлено уравнениями

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1; \quad \frac{\partial W'}{\partial q_1} = p_1; \quad \frac{\partial W'}{\partial \alpha_h} = \beta_h; \quad \frac{\partial W'}{\partial q_h} = p_h \quad (4.9)$$

$$(h = 2, 3, \dots, s).$$

Точно так же, если среди координат q_h имеются циклические q_λ, q_μ, \dots , т. е. такие, что соответствующие им импульсы p_λ, p_μ, \dots отсутствуют в гамильтониане, то система (4.1) будет иметь интегралы

$$q_\lambda = \text{const}, \quad q_\mu = \text{const}, \dots$$

Подстановка, аналогичная (4.8), позволит внести упрощение в нахождение функции W .

§ 5. Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических элементов

Рассмотрим решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial (F - R)}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial (F - R)}{\partial q_k}, \quad (5.1)$$

где F и R — функции $t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$.

Предположим, что применение метода Якоби позволило получить решение упрощенной, получающейся при $R=0$, системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (5.2)$$

в форме уравнений

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}, \quad (5.3)$$

дающих

$$\left. \begin{aligned} q_k &= q_k(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s), \\ p_k &= p_k(t, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s), \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где α_h, β_h — постоянные величины.

Для решения более сложной системы (5.1) методом вариации произвольных постоянных надо использовать соотношения (5.4) для замены переменных q_k, p_k новыми переменными α_h, β_h .

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sum p_k dq_k - \sum \alpha_k d\beta_k &= \sum p_k dq_k + \sum \beta_k d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) = \\ &= \sum \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) = d\left(W - \sum \alpha_k \beta_k\right), \end{aligned}$$

а потому условие каноничности преобразования здесь удовлетворяется, и мы сразу можем написать преобразованные уравнения (§ 3). Так как в рассматриваемом случае

$$K = F - R + \frac{\partial W}{\partial t} = -R,$$

то уравнения, дающие новые переменные, таковы:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}; \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}. \quad (5.5)$$

Решив эту систему и подставив полученные значения α_k , β_k в формулы (5.4), будем иметь решение уравнений (5.1).

Таким образом, применение метода вариации произвольных постоянных отличается исключительной простотой в том случае, когда используются канонические постоянные.

§ 6. Канонические элементы эллиптического движения

Чтобы получить канонические элементы эллиптического движения, нужно уравнения движения в задаче двух тел привести к канонической форме и решить их методом Якоби.

Уравнения невозмущенного движения планеты в гелиоцентрической прямоугольной системе координат имеют вид

$$\ddot{x} = \partial U / \partial x; \quad \ddot{y} = \partial U / \partial y; \quad \ddot{z} = \partial U / \partial z,$$

где

$$U = k^2(1+m)r^{-1} = k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду, можно было бы взять гамильтониан

$$F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$$

и считать \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} переменными, сопряженными с x , y , z . Удобнее, однако, пользоваться полярной системой координат, определяемой соотношениями

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \cos \varphi \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi.$$

Функция F в этом случае имеет вид

$$F = \frac{1}{2}(r^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2) - k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы получить уравнения в канонической форме, надо (см. § 1) ввести сопряженные с r , φ , θ величины

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}.$$

Учитывая, что $L = T + U$, находим

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2 \dot{\varphi}, \quad p_3 = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta},$$

и потому

$$F = \frac{1}{2} (p_1^2 + r^{-2} p_2^2 + r^{-2} \sec^2 \varphi \cdot p_3^2) - k_1^2 r^{-1}.$$

Следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби имеет здесь такой вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + r^{-2} \sec^2 \varphi \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right\} - k_1^2 r^{-1} = 0. \quad (6.1)$$

Это уравнение не содержит явно ни t , ни θ , поэтому мы можем положить (§ 4):

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2 \theta + W_1.$$

Подстановка этого выражения в (6.1) дает

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right)^2 + r^{-2} \sec^2 \varphi \cdot \alpha_2^2 = 2k_1^2 r^{-1} - 2\alpha_1$$

Нам достаточно найти какое-либо решение этого уравнения, заключающее еще одну постоянную α_3 . Сообразно с этим положим

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \alpha_2^2 \sec^2 \varphi = \alpha_3^2,$$

что дает

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \alpha_3^2 r^{-2} = 2k_1^2 r^{-1} - 2\alpha_1.$$

вследствие чего переменные r и φ оказываются разделенными. Решая два последних уравнения и складывая результаты, окончательно будем иметь

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2 \theta + \int_0^\varphi (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi + \\ + \int_{r_0}^r (-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{\frac{1}{2}} dr.$$

Нижние пределы интегралов могут быть выбраны произвольно.

Общее решение задачи дается равенствами

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}, \quad (6.2)$$

позволяющими выразить координаты в функции t и шести канонических элементов α_k, β_k .

Так как выражения координат через обычные кеплеровы элементы нам уже известны, то достаточно найти зависимости, существующие между каноническими и кеплеровыми элементами.

Первое из соотношений (6.2) имеет вид

$$\beta_1 = t - \int_{r_0}^r (-2a_1 + 2k_1^2 r^{-1} - a_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

В случае эллиптического движения радиус-вектор заключен в интервале

$$a(1 - e) \leq r \leq a(1 + e).$$

С другой стороны, для вещественности β_1 необходимо, чтобы r заключалось в интервале

$$r_0 \leq r \leq r_1,$$

где через r_0 и r_1 обозначены корни уравнения

$$2a_1 r^2 - 2k_1^2 r + a_3^2 = 0.$$

Так как эти интервалы должны совпадать, то

$$2a = r_0 + r_1 = \frac{k_1^2}{a_1}, \quad a^2(1 - e^2) = r_0 r_1 = \frac{a_3^2}{2a_1},$$

откуда

$$a_1 = \frac{k_1^2}{2a}, \quad a_3 = k_1 \sqrt{a(1 - e^2)} = k_1 \sqrt{p}.$$

В момент прохождения через перигелий $r = r_0$, поэтому

$$\beta_1 = T.$$

Второе из соотношений (6.2) дает

$$\beta_2 = \theta - a_2 \int_0^\varphi \sec^2 \varphi (a_3^2 - a_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Если $\varphi = 0$, то планета находится в одном из узлов своей орбиты. Поэтому

$$\beta_2 = \Omega.$$

Так как интеграл в последнем равенстве должен быть вещественным, то

$$a_3^2 - a_2^2 \sec^2 \varphi \geq 0.$$

Но это неравенство должно быть эквивалентно такому: $|\varphi| \leq i$. Следовательно,

$$a_2 = a_3 \cos i = k_1 \sqrt{p} \cos i.$$

Обратимся, наконец, к последнему из соотношений (6.2), которое имеет вид

$$\beta_3 = \alpha_3 \int_0^\varphi (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - \alpha_3 \int_{r_0}^r r^{-2} (-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Вместо широты φ введем аргумент широты u . Так как $\sin \varphi = \sin i \sin u$,

то

$$\begin{aligned} \alpha_3 \int_0^\varphi (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi &= \\ &= \int_0^u (\cos^2 \varphi - \cos^2 i)^{-\frac{1}{2}} \sin i \cos u du = \int_0^u du = u \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u - \beta_3 = \alpha_3 \int_{r_0}^r r^{-2} (-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Для момента прохождения через перигелий, когда $r=r_0$, $u=\omega$, это соотношение дает

$$\beta_3 = \omega = \pi - \Omega.$$

Собрав вместе полученные результаты, будем иметь следующие выражения канонических элементов через кеплеровы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= k_1^2/2a; & \beta_1 &= T, \\ \alpha_2 &= k_1 \sqrt{p} \cos i; & \beta_2 &= \Omega, \\ \alpha_3 &= k_1 \sqrt{p}; & \beta_3 &= \pi - \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Вместо элемента T введем ε — среднюю долготу (в орбите) для момента $t=0$. Так как среднюю долготу для момента t мы можем представить двояко:

$$\lambda = \varepsilon + nt; \quad \lambda = \pi + n(t - T), \quad (6.4)$$

то

$$\beta_1 = T = (\pi - \varepsilon) n^{-1} = (\pi - \varepsilon) k_1^{-1} a^{3/2}. \quad (6.5)$$

Для обратного перехода от канонических элементов к кеплеровым служат формулы

$$\left. \begin{aligned} a &= k_1^2/2\alpha_1; & \Omega &= \beta_2, \\ e^2 &= 1 - 2\alpha_1\alpha_3^2/k_1^4; & \pi &= \beta_2 + \beta_3, \\ \cos i &= \alpha_2/\alpha_3; & \varepsilon &= \beta_2 + \beta_3 - k_1^{-2} (2\alpha_1)^{3/2} \beta_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Канонические элементы, определяемые равенствами (6.3), будем называть каноническими элементами Якоби. Они были введены в его «Лекциях по динамике», прочитанных в 1842 г. и опубликованных в 1866 г.

§ 7. Новый вывод уравнений Лагранжа

В случае невозмущенного движения канонические элементы являются постоянными. При изучении возмущенного движения они являются функциями времени, определяемыми уравнениями:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}; \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (7.1)$$

где через R обозначена пертурбационная функция (§ 5).

От этих уравнений легко перейти к уравнениям Лагранжа, дающим изменения кеплеровых элементов. Дифференцируя равенства (6.6) и учитывая (7.1), получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{k_1^2} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial \beta_1},$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \beta_3},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\cos i \frac{\partial R}{\partial \beta_3} - \frac{\partial R}{\partial \beta_2} \right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2},$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3},$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} + n \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + 3 \frac{\varepsilon - \pi}{n^2 a^2} \frac{\partial R}{\partial \beta_1}.$$

Входящие сюда производные пертурбационной функции по каноническим элементам легко выражаются через ее производные по кеплеровым элементам при помощи соотношений (6.3) и (6.5). Легко видеть, что

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{3}{n^2 a^2} (\varepsilon - \pi) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

Подстановка этих выражений в предыдущие равенства дает уравнения Лагранжа, уже выведенные нами другим путем (§ 8 гл. XVI). Не повторяя здесь эти уравнения, ограничимся лишь некоторыми замечаниями относительно последнего из них, имеющего вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}. \quad (7.2)$$

Вывод этого уравнения основан на соотношении (6.4), т. е.

$$\lambda = \varepsilon + nt, \quad (7.3)$$

которое и должно быть употребляемо, когда ε найдено при помощи уравнения (7.2).

Производная $\partial R/\partial a$, входящая в уравнение (7.2), представляет ту особенность по сравнению с производными по другим элементам, что ее приходится брать как по a , входящему явно в координаты планеты, так и по a , входящему в них через посредство средней долготы λ . Таким образом,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{dn}{da} t,$$

где скобками отмечена производная, взятая по a , фигурирующему в R явно.

Подставив это выражение в (7.2) и учтя, что

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -t \frac{dn}{dt} - \frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Чтобы избежать в правой части уравнения члена, имеющего множителем t , вместо ε введем элемент (ε) , определяемый равенством

$$\frac{d(\varepsilon)}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt} \quad (7.4)$$

и условием $(\varepsilon) = 0$ при $t = 0$.

Это дает

$$\frac{d(\varepsilon)}{dt} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}. \quad (7.5)$$

С другой стороны, из (7.4) следует

$$(\varepsilon) = \varepsilon + \int_0^t t \frac{dn}{dt} dt = \varepsilon + nt - \int_0^t n dt,$$

откуда

$$\lambda = \varepsilon + nt = (\varepsilon) + \int_0^t n dt. \quad (7.6)$$

Так как на практике всегда употребляются формула (7.6) и уравнение (7.5), то скобки, отмечающие новый элемент (ε) и парциальную производную $(\partial R/\partial a)$, могут быть опущены.

§ 8. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре

Недостаток первоначальных кеплеровых элементов, указанный в предыдущем параграфе, присущ и каноническим элементам Якоби. Элемент α_1 входит в пертурбационную функцию R как через посредство a , фигурирующего явно, так и через посредство средней долготы λ . Поэтому в правой части уравнения

$$\frac{d\beta_1}{dt} = - \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} \quad (8.1)$$

появляется член, имеющий множителем t .

Если этот недостаток устранить заменой элемента ε элементом (ε) , как это было сделано для кеплеровых элементов, то теряется каноническая форма уравнения (8.1).

Тут необходима замена сразу двух элементов, α_1 и β_1 .

Делоне предложил ввести вместо этих элементов такие:

$$L = k_1 \sqrt{a} = k_1^2 (2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$l = n(t - T) = k_1 a^{-\frac{3}{2}} (t - \beta_1) = k_1^{-2} (2\alpha_1)^{\frac{3}{2}} (t - \beta_1).$$

Легко видеть, что

$$\beta_1 d\alpha_1 - l dL = t d\alpha_1 = d'(t\alpha_1).$$

Поэтому при переходе от элементов α_k, β_k к элементам

$$L, H = \alpha_2, G = \alpha_3; l, h = \beta_2, g = \beta_3$$

каноничность уравнений сохраняется (§ 3).

Новые элементы удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial l}; & \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial g}; & \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial h}; \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L}; & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial G}; & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial H}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

где

$$R' = R + a_1 = R + \frac{k_1^4}{2L^2}.$$

Элементы Делоне выражаются через кеплеровы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L &= k_1 \sqrt{a}; & G &= k_1 \sqrt{a(1-e^2)}; & H &= k_1 \sqrt{a(1-e^2)} \cos i; \\ l &= n(t-T); & g &= \pi - \Omega; & h &= \Omega. \end{aligned} \right\} (8.3)$$

Таким образом, все три элемента первой группы имеют здесь размерность секторной скорости; все элементы второй группы являются углами, причем за один из этих элементов принята средняя аномалия.

Пуанкаре ввел в употребление еще две системы канонических элементов, в которых за один из элементов принимается средняя долгота и лучше используется малость эксцентриситета и наклона орбиты.

Первая система элементов Пуанкаре определяется равенствами:

$$\left. \begin{aligned} L &= k_1 \sqrt{a}; & \lambda &= l + \pi = nt + \varepsilon; \\ \rho_1 &= k_1 \sqrt{a(1-\sqrt{1-e^2})}; & \omega_1 &= -\pi; \\ \rho_2 &= k_1 \sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i); & \omega_2 &= -\Omega. \end{aligned} \right\} (8.4)$$

Чтобы убедиться, что при переходе от элементов (8.3) к элементам (8.4) сохраняется каноническая форма элементов, рассмотрим выражение:

$$l dL + g dG + h dH - \lambda dL - \omega_1 d\rho_1 - \omega_2 d\rho_2.$$

Так как это выражение равняется

$$l dL + g dG + h dH - (l + g + h) dL + (g + h) (dL - dG) + h (dG - dH) = 0,$$

то условие (3.4) каноничности преобразования здесь выполняется.

Вторая система элементов Пуанкаре дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} L &= k_1 \sqrt{a}; & \lambda &= l + \pi; \\ \xi_1 &= \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1; & \eta_1 &= \sqrt{2\rho_1} \sin \omega_1; \\ \xi_2 &= \sqrt{2\rho_2} \cos \omega_2; & \eta_2 &= \sqrt{2\rho_2} \sin \omega_2. \end{aligned} \right\} (8.5)$$

Каноничность этой системы непосредственно вытекает из сказанного в § 3 (пример 1).

В 1913 г. Леви-Чивита и Хилл указали системы канонических элементов, в которых за один из элементов берется эксцентрическая или истинная аномалия. В этом же году Де Ситтер и Андуайе дали общий прием для получения таких систем элементов.

§ 9. Каноническая форма уравнений относительного движения

Рассмотрим относительное движение n материальных точек, имеющих массы m_0, m_1, \dots, m_{n-1} .

Обозначим через (x_i, y_i, z_i) якобиевы координаты точки m_i и положим (§ 5, гл. XIV):

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= m_i M_{i-1} / M_i, \quad M_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i, \\ U &= \frac{k^2}{2} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} m_g m_h r_{gh}^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где через r_{gh} обозначено расстояние между точками m_g и m_h , выраженное через якобиевы координаты.

В этом случае уравнения движения напишутся так:

$$\begin{aligned} \mu_i \ddot{x}_i &= \partial U / \partial x_i; \quad \mu_i \ddot{y}_i = \partial U / \partial y_i; \quad \mu_i \ddot{z}_i = \partial U / \partial z_i \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Эти уравнения могут быть заменены, как мы уже видели, каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$F = T - U = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U,$$

если принять за сопряженные переменные координаты x_i, y_i, z_i и обобщенные импульсы $\mu_i \dot{x}_i, \mu_i \dot{y}_i, \mu_i \dot{z}_i$.

Рассмотрим случай, когда массы m_1, m_2, \dots, m_{n-1} очень малы по сравнению с m_0 , так что взаимным притяжением этих масс можно пренебречь. Чтобы получить соответствующие уравнения движения, нужно в выражении (9.1) отбросить все члены, содержащие произведения малых масс, т. е. вместо U взять

$$U_0 = k^2 \sum_1^{n-1} m_0 m_i r_i^{-1},$$

где, если ограничиться первыми степенями малых масс,

$$r_i^2 = r_{0i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Система (9.2) распадется на $n - 1$ отдельных систем вида

$$\ddot{x}_i + k^2 m_0 M_i M_{i-1}^{-1} x_i r_i^{-3} = 0, \dots \quad (9.3)$$

Таким образом, координаты точки m_i в невозмущенном движении мы можем получить путем решения задачи двух тел и выразить через время и шесть канонических элементов орбиты. Чтобы получить уравнения возмущенного движения, нужно эти элементы принять за новые переменные и учесть, что для невозмущенного движения гамильтониан равен $T - U_0$, а для возмущенного он равен $T - U$. Отсюда следует, что пертурбационная функция, определяемая равенством

$$F = T - U_0 - R,$$

равна

$$R = U - U_0 = \frac{k^2}{2} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} m_g m_h r_{gh}^{-1} - \frac{k^2}{2} \sum_1^{n-1} m_0 m_i r_i^{-1}. \quad (9.4)$$

Мы будем пользоваться вторыми элементами Пуанкаре. Элементы $L, \xi_1, \xi_2; \lambda, \eta_1, \eta_2$ для точки m_i обозначим (чтобы избежать двойных индексов) через

$$L_i, \xi_{2i-1}, \xi_{2i}; \quad \lambda_i, \eta_{2i-1}, \eta_{2i}.$$

Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}; & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L_i}, \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \eta_j}; & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial \xi_j} \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

$(i = 1, 2, \dots, n - 1; j = 1, 2, \dots, 2n - 2),$

где на основании того, что мы видели в предыдущем параграфе, и учитывая форму исходных уравнений (9.3),

$$R' = R + \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} k^4 m_0^2 M_i^2 M_{i-1}^{-2} L_i^{-2}. \quad (9.6)$$

Эти уравнения мы используем для вывода некоторых общих свойств движения планет. Но предварительно нужно пертурбационную функцию R' выразить через канонические элементы планет и разложить в ряд, позволяющий решать уравнения последовательными приближениями, а это в свою очередь требует представления прямоугольных координат каждой планеты в виде явных функций ее канонических элементов.

§ 10. Выражение прямоугольных координат через канонические элементы

Прямоугольные гелиоцентрические координаты планеты выражаются через обычные эллиптические элементы следующими, хорошо известными, формулами:

$$\begin{aligned}x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i, \\y &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i, \\z &= r \sin u \sin i,\end{aligned}$$

где

$$u = v + \pi - \Omega.$$

Положив

$$X = r \cos(v - M), \quad Y = r \sin(v - M), \quad (10.1)$$

где через $M = \lambda - \pi$ обозначена средняя аномалия, легко убедиться, что эти формулы могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}x &= X \left[\cos^2 \frac{i}{2} \cos \lambda + \sin^2 \frac{i}{2} \cos(\lambda - 2\Omega) \right] - \\&\quad - Y \left[\cos^2 \frac{i}{2} \sin \lambda + \sin^2 \frac{i}{2} \sin(\lambda - 2\Omega) \right], \\y &= X \left[\cos^2 \frac{i}{2} \sin \lambda - \sin^2 \frac{i}{2} \sin(\lambda - 2\Omega) \right] + \\&\quad + Y \left[\cos^2 \frac{i}{2} \cos \lambda - \sin^2 \frac{i}{2} \cos(\lambda - 2\Omega) \right], \\z &= X \sin i \sin(\lambda - \Omega) + Y \sin i \cos(\lambda - \Omega).\end{aligned} \right\} (10.2)$$

Введем в эти выражения вторые элементы Пуанкаре, определяемые на основании (8.4) и (8.5) соотношениями:

$$\left. \begin{aligned}L &= k \sqrt{a}; & \lambda &= M + \pi; \\ \xi_1 &= \sqrt{2L} (1 - \sqrt{1 - e^2})^{\frac{1}{2}} \cos \pi; & -\eta_1 &= \sqrt{2L} (1 - \sqrt{1 - e^2})^{\frac{1}{2}} \times \\ & & & \times \sin \pi; \\ \xi_2 &= \sqrt{2L} \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - \cos i} \cos \Omega; & -\eta_2 &= \sqrt{2L} \sqrt{1 - e^2} \times \\ & & & \times \sqrt{1 - \cos i} \sin \Omega.\end{aligned} \right\} (10.3)$$

В выражениях (10.2) множители при X и Y состоят из произведений $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$ на величины

$$\cos^2 \frac{i}{2}; \quad \sin^2 \frac{i}{2} \cos 2\Omega; \quad \sin i \frac{\cos \Omega}{\sin \Omega}. \quad (10.4)$$

Покажем, что все эти пять величин разлагаются в ряды, расположенные по целым положительным степеням ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 .

Равенства (10.3) дают

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 2L(1 - \sqrt{1 - e^2}); \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 = 4L \sqrt{1 - e^2} \sin^2 \frac{i}{2}.$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{i}{2} &= \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \\ \cos^2 \frac{i}{2} &= \frac{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_2^2 - \eta_2^2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

что показывает разложимость этих двух величин в ряды требуемого вида.

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \Omega = -\eta_2/\xi_2,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \sin \Omega &= -\eta_2/\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}; & \cos \Omega &= \xi_2/\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}; \\ \sin 2\Omega &= -2\eta_2\xi_2/(\xi_2^2 + \eta_2^2); & \cos 2\Omega &= (\xi_2^2 - \eta_2^2)/(\xi_2^2 + \eta_2^2). \end{aligned}$$

Заметим еще, что из (10.5) легко получить равенство

$$\sin i = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \frac{[4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_2^2 - \eta_2^2]^{\frac{1}{2}}}{2L - \xi_1^2 - \eta_1^2}.$$

Подстановка всех этих выражений в произведения (10.4) делает очевидным справедливость нашего утверждения.

Рассмотрим теперь величины (10.1). Так как

$$r \cos v = a(\cos E - e), \quad r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} X &= -e \cos M + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \cos(E - M) + \\ &\quad + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} e^2 \cos(E + M), \\ \frac{1}{a} Y &= e \sin M + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \sin(E - M) - \\ &\quad - \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} e^2 \sin(E + M). \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Покажем, что каждая из величин

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}; \quad \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2}, \\ & \cos \frac{E - M}{\sin (E - M)}; \quad e^2 \frac{\cos (E + M)}{\sin (E + M)} \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

разлагается в ряд по целым положительным степеням $e \sin M$ и $e \cos M$.

Для двух первых величин, разлагающихся по степеням e^2 , это очевидно.

Заметим далее, что уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M$$

может быть написано в форме

$$E - M - e \sin M \cos (E - M) - e \cos M \sin (E - M) = 0.$$

Положив

$$\omega = E - M; \quad z_1 = e \sin M; \quad z_2 = e \cos M,$$

будем иметь уравнение

$$f(\omega, z_1, z_2) = 0, \quad (10.8)$$

левая часть которого есть голоморфная функция в точке $\omega = z_1 = z_2 = 0$.

Так как в этой точке производная

$$\partial f / \partial \omega = 1,$$

т. е. имеет значение, отличное от нуля, то уравнение (10.8) имеет одно и только одно решение, голоморфное в точке $z_1 = z_2 = 0$.

Итак, $\omega = E - M$ разлагается в ряд по целым положительным степеням z_1 и z_2 , сходящийся для достаточно малых значений эксцентриситета. В такие же ряды разлагаются и $\sin(E - M)$, $\cos(E - M)$.

Тождества

$$\left. \begin{aligned} e^2 \cos (E + M) &= e^2 \cos 2M \cos (E - M) - e^2 \sin 2M \sin (E - M), \\ e^2 \sin (E + M) &= e^2 \cos 2M \sin (E - M) + e^2 \sin 2M \cos (E - M), \\ e^2 \cos 2M &= (e \cos M)^2 - (e \sin M)^2, \\ e^2 \sin 2M &= 2(e \sin M)(e \cos M) \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

показывают, что и величины (10.7) обладают таким же свойством. Этим заканчивается доказательство разложимости величин (10.7), а следовательно, и величин (10.6), по целым положительным степеням $e \sin M$ и $e \cos M$,

Но

$$e \sin M = e \cos \pi \sin \lambda - e \sin \pi \cos \lambda,$$

$$e \cos M = e \cos \pi \cos \lambda + e \sin \pi \sin \lambda,$$

откуда следует разложимость величин (10.6) в ряды по целым положительным степеням $e \sin \pi$ и $e \cos \pi$, с коэффициентами, выражающимися через $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$.

Легко убедиться, что величины $e \sin \pi$ и $e \cos \pi$ разлагаются в свою очередь по целым положительным степеням ξ_1, η_1 .

Действительно, формулы (10.3) дают

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 2L(1 - \sqrt{1 - e^2}),$$

откуда

$$e = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, из этих же формул имеем

$$\frac{e \cos \pi}{\xi_1} = \frac{e \sin \pi}{-\eta_1} = \frac{e}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

Итак,

$$e \cos \pi = \frac{\xi_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$e \sin \pi = \frac{-\eta_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L} \right]^{\frac{1}{2}},$$

что и доказывает наше утверждение.

Из всего сказанного вытекает, что x, y, z могут быть представлены рядами вида

$$\sum A \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \Psi(\lambda),$$

где A есть некоторая функция L , а через $\Psi(\lambda)$ обозначена 2π -периодическая функция.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Теорема. Каждая из прямоугольных координат x, y, z разлагается в ряд вида

$$\sum A \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \cos(k\lambda + H) \quad (10.10)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

в котором H — постоянные числа, а коэффициенты A зависят только от L .

Эти ряды сходятся для достаточно малых значений эксцентриситета,

§ 11. Разложение пертурбационной функции

Рассмотрим пертурбационную функцию R , определяемую равенством (9.4).

Будем всегда считать, что входящие в нее величины r_{gh} и r_i имеют положительную нижнюю границу. Найденные в предыдущем параграфе разложения координат (10.10) показывают, что при этом условии R является функцией элементов

$$\xi_j, \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2n - 2), \quad (11.1)$$

голоморфной в точке $\xi_j=0, \eta_j=0$, каковы бы ни были значения других элементов. С другой стороны, R является 2π -периодической функцией каждой из средних долгот λ_i .

Это приводит к следующему заключению:

Теорема I. Если точки m_0, m_1, \dots, m_{n-1} движутся таким образом, что все их взаимные расстояния имеют положительную нижнюю границу, то пертурбационная функция R может быть разложена в ряд

$$R = \sum A \mathfrak{M} \cos(\sum k_i \lambda_i + H), \quad (11.2)$$

где

$$\mathfrak{M} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}, \dots, \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2}, \dots, \quad (11.3)$$

коэффициенты A зависят только от L_i , а через H обозначены постоянные (не зависящие от элементов) величины.

Суммирование ведется по

$$\begin{aligned} \alpha_j, \beta_j = 0, 1, 2, \dots; \quad k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ (i = 1, 2, \dots, n - 1; \quad j = 1, 2, \dots, 2n - 2). \end{aligned}$$

Ряд (11.2) сходится для достаточно малых значений ξ_j, η_j .

В дальнейшем нам понадобится еще выражение функции R через первые элементы Пуанкаре ρ_j, ω_j , связанные с (11.1) соотношениями (§ 8):

$$\xi_j = \sqrt{2\rho_j} \cos \omega_j; \quad \eta_j = \sqrt{2\rho_j} \sin \omega_j. \quad (11.4)$$

Докажем следующую теорему:

Теорема II. При тех же условиях, как и в теореме I, функция R может быть разложена в ряд

$$R = \sum A \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha_2} \dots \cos(\sum k_i \lambda_i + \sum p_j \omega_j + H), \quad (11.5)$$

сходящийся при достаточно малых значениях ρ_j .

Каждое из чисел $2q_j$ принимает значения $0, 1, 2, \dots$, тогда как k_i и p_j принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. При этом для каждого члена выполняются условия

$$2q_j \geq |p_j|; \quad 2q_j \equiv p_j \pmod{2}. \quad (11.6)$$

Коэффициенты A зависят только от L_i , а через H обозначены постоянные числа.

Чтобы получить разложение (11.5), будем преобразовывать каждый член ряда (11.2), последовательно заменяя каждый элемент (11.1) новыми при помощи соотношений (11.4).

Члены ряда (11.2), имеющие вид

$$A \cos \left(\sum k_i \lambda_i + H \right), \quad (11.7)$$

остаются при этом без изменения. Эти члены удовлетворяют, очевидно, условиям (11.6).

Покажем теперь, что всякое выражение

$$\Phi = A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \dots \cos \left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_j \omega_j + B \right),$$

удовлетворяющее условиям (11.6), после умножения на ξ_h или на η_h дает сумму членов того же вида. Вместо произведений

$$\Phi \xi_h = \Phi \sqrt{2\rho_h} \cos \omega_h \quad \text{и} \quad \Phi \eta_h = \Phi \sqrt{2\rho_h} \cos \left(\omega_h - \frac{\pi}{2} \right)$$

рассмотрим более общее выражение

$$\Phi \sqrt{2\rho_h} \cos (\omega_h + B'),$$

которое, очевидно, равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \dots \sqrt{\rho_h} \left[\cos \left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_j \omega_j + \omega_h + B + B' \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_j \omega_j - \omega_h + B - B' \right) \right].$$

Пусть, например, $h=3$. В таком случае $2q_1, 2q_2, 2q_4, \dots$ и p_1, p_2, p_4, \dots останутся без изменения, а потому будут удовлетворять условиям (11.6). Показатель $2q_3$ здесь заменяется через $2q_3+1$, а вместо p_3 имеем p_3+1 и p_3-1 .

Так как, по условию,

$$2q_3 \geq |p_3| \quad \text{и} \quad 2q_3 \equiv p_3 \pmod{2},$$

то

$$2q_3 + 1 \geq |p_3 + 1|, \quad 2q_3 + 1 \geq |p_3 - 1|, \\ 2q_3 + 1 \equiv p_3 \pm 1 \pmod{2}.$$

Отсюда ясно, что, начав с членов вида (11.7) и переходя последовательно путем умножения на ξ или на η к следующим членам, мы всегда будем получать члены, удовлетворяющие условиям (11.6).

Теорема полностью доказана.

Для наших целей достаточно знать лишь форму разложения пертурбационной функции в случае употребления элементов

Пуанкаре. Получение первых членов такого разложения было детально рассмотрено Шарлье [1902] и Пикаром [1906]. Разложение до членов второго порядка включительно можно найти также в курсе Г. Н. Дубошина [1938].

§ 12. Возмущения канонических элементов

Полученную в предыдущем параграфе форму разложения пертурбационной функции используем при решении уравнений относительного движения планет. В принятых нами обозначениях эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}; & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L_i}; \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \eta_j}; & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial \xi_j} \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, 2n-2$).

Здесь

$$R' = R_0 + R,$$

причем, на основании (9.6) и (11.2),

$$R_0 = k^4 m_0^2 \left[\frac{(m_0 + m_1)^2}{2m_0^2 L_1^2} + \frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{2(m_0 + m_1)^2 L_2^2} + \dots \right].$$

$$R = \sum A \mathfrak{M} \cos(\sum k_i \lambda_i + H).$$

Через \mathfrak{M} обозначено произведение целых неотрицательных степеней ξ_j, η_j . Коэффициенты A , зависящие только от элементов L_i , обращаются в нуль вместе с малыми массами m_1, m_2, \dots, m_{n-1} .

В первом приближении, т. е. при $m_i = 0$, уравнения (12.1) дают (нуликами обозначены постоянные значения элементов):

$$L_i = L_i^0, \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0, \quad \xi_j = \xi_j^0, \quad \eta_j = \eta_j^0, \quad (12.2)$$

где

$$n_i = -\frac{\partial R_0}{\partial L_i^0} = k^4 \mu_i^2 (L_i^0)^{-3},$$

причем

$$\mu_1 = m_0 + m_1; \quad \mu_2 = m_0 \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1}; \quad \dots$$

Для получения второго приближения в правые части уравнений (12.1) надо подставить значения (12.2), найденные в первом приближении.

Так как правые части примут вид

$$\sum B \cos(vt + H'), \quad (12.3)$$

где

$$\dot{v} = \sum k_i n_i, \quad (12.4)$$

а через B обозначены постоянные коэффициенты, то интегрирование даст

$$\left. \begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta_1 L_i; & \lambda_i &= n_i t + \lambda_i^0 + \delta_1 \lambda_i; \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j; & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Через $\delta_1 L_i, \dots, \delta_1 \eta_j$ здесь обозначены суммы вида

$$B_0 t + \sum B \nu^{-1} \sin(\nu t + H').$$

Вековые члены $B_0 t$ получаются от интегрирования тех членов ряда (12.3), в которых $\nu=0$.

Уравнения (12.1) показывают, что в $\delta_1 L_i$ вековые члены отсутствуют. Этот результат эквивалентен, как легко видеть, теореме Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Подстановка выражений (12.5) в правые части уравнений (12.1) даст возможность получить следующее приближение. Продолжая этот процесс дальше после какого угодно числа приближений, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i; & \lambda_i &= n_i t + \lambda_i^0 + \delta \lambda_i; \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta \xi_j; & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta \eta_j, \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

причем каждая из величин $\delta L_i, \dots, \delta \eta_j$ будет представлена рядом вида

$$\sum A t^p \mathfrak{M} \cos(\nu t + H),$$

где \mathfrak{M} обозначает произведение целых неотрицательных степеней ξ_j^0, η_j^0 .

Коэффициент A зависит только от L_i^0 и имеет множителем произведение целых неотрицательных степеней масс m_1, m_2, \dots . Сумма показателей этих масс, которую мы обозначим через m , называется, как уже было сказано, порядком соответствующего члена, а разность $m-p$ называется его рангом.

§ 13. Теорема Пуанкаре о ранге

Теорема Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит была весьма существенно обобщена следующей теоремой Пуанкаре о ранге возмущений [Пуанкаре, 1905].

Теорема. Если средние движения планет n_i таковы, что величина ν , определяемая равенством (12.4), равняется нулю только в том случае, когда $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$, то:

1) в разложениях δL_i , $\delta \lambda_i$, $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$ формул (12.6) нет членов, имеющих отрицательный ранг;

2) ранг каждого смешанного члена не может быть меньше единицы;

3) разложение δL_i не содержит членов нулевого ранга.

Для членов первого порядка справедливость этих утверждений очевидна. В самом деле, разложения $\delta_1 L_i$, $\delta_1 \lambda_i$, $\delta_1 \xi_j$, $\delta_1 \eta_j$, входящие в формулы (12.5), не содержат вовсе смешанных членов; в $\delta_1 L_i$ вековые члены отсутствуют; наконец, в $\delta_1 \lambda_i$, $\delta_1 \xi_j$, $\delta_1 \eta_j$ вековые члены могут быть лишь вида At , а ранг таких членов равен нулю.

Предположим, что теорема справедлива для всех членов, порядок которых $\leq m$, и покажем, что она будет справедлива в этом случае и для членов $(m+1)$ -го порядка. Доказательство разделим на три части.

Прежде всего дадим формулы для вычисления членов $(m+1)$ -го порядка.

Чтобы получить эти члены, нужно выражения

$$\left. \begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i; & \lambda_i &= n_i t + \lambda_i^0 + \delta \lambda_i; \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta \xi_j; & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta \eta_j, \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

в которых через δL_i , $\delta \lambda_i$, $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$ обозначены совокупности всех членов до m -го порядка включительно, подставить в правые части уравнений (12.1), которые можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}; & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L_i} - \frac{\partial R_0}{\partial L_i}; \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \eta_j}; & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi_j}. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Интегрирование трех уравнений, не содержащих R_0 , дает формулы

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt; \quad \delta \xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_j} dt; \quad \delta \eta_j = - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \xi_j} dt, \quad (13.3)$$

позволяющие вычислить в δL_i , $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$ все члены $(m+1)$ -го порядка, поскольку R есть величина первого порядка.

Чтобы найти члены $(m+1)$ -го порядка в средних долготах λ_i , нужно еще рассмотреть разложение $\partial R_0 / \partial L_i$. Так как

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0(L_1^0 + \delta L_1, L_2^0 + \delta L_2, \dots) = \\ &= R_0(L_1^0, L_2^0, \dots) - \sum_i n_i \delta L_i + \frac{1}{2} \sum_{i, k} C_{ik} \delta L_i \delta L_k + \Phi, \end{aligned}$$

где

$$n_i = -\partial R_0 / \partial L_i^0; \quad C_{ik} = \partial^2 R_0 / \partial L_i^0 \partial L_k^0,$$

а через Φ обозначена совокупность членов третьего и высших порядков относительно δL_i , то

$$\frac{\partial R_0}{\partial L_i} = \frac{\partial R_0}{\partial (\delta L_i)} = -n_i + \sum_k C_{ik} \delta L_k + \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}.$$

Поэтому интегрирование оставшегося из уравнений (13.2) даст, если учесть (13.3),

$$\delta \lambda_i = - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt - \sum_k C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt. \quad (13.4)$$

Легко убедиться, что при подстановке в правую часть этого равенства выражений (13.1), имеющих ошибку $(m+1)$ -го порядка, мы получим $\delta \lambda_i$ с ошибкой порядка $m+2$. Для первых двух членов правой части это очевидно, поскольку R имеет множителем величины первого порядка. Остается рассмотреть последний член.

Производная $\partial \Phi / \partial L_i$, входящая в последний член (13.4), есть сумма членов по меньшей мере второго порядка относительно возмущений δL_i , каждое из которых первого порядка относительно возмущающих масс.

Обозначим через A, B, C, \dots точные значения $\delta L_1, \delta L_2, \dots$, а через A', B', C', \dots их приближенные значения, имеющие ошибки порядка $m+1$. Тождества вида

$$AB - A'B' = A(B - B') + B'(A - A'),$$

$$ABC - A'B'C' = AB(C - C') + AC'(B - B') + B'C'(A - A')$$

.....

показывают, что замена A, B, \dots через A', B', \dots даст $\partial \Phi / \partial L_i$ с ошибкой порядка $m+2$.

Мы доказали, таким образом, что при замене в правых частях формул (13.3) и (13.4) возмущений их величинами, точными до m -го порядка включительно, эти формулы дадут возмущения, точные до $(m+1)$ -го порядка включительно.

Перейдем теперь к доказательству теоремы в отношении возмущений $\delta L_i, \delta \xi_j, \delta \eta_j$.

Заметим, прежде всего, что при перемножении двух членов, ранги которых положительны, получается сумма членов, также имеющих положительные ранги. При перемножении членов, имеющих неотрицательные ранги, могут получиться только члены с неотрицательными рангами.

Поэтому, подставив в правые части формул (13.3) выражения (13.1), не имеющие, согласно сделанному нами предположению, членов отрицательного ранга, мы получим под знаком каждого интеграла только члены неотрицательного ранга. Более того, так как подстановка делается в выражения, имеющие множителями одну из масс m_i , то под знаком каждого интеграла в (13.3) мы будем иметь лишь члены, ранг которых ≥ 1 .

Хорошо известные формулы

$$\int_0^t At^p \cos(vt + H) dt =$$

$$= Av^{-1}t^p \sin(vt + H) + pAv^{-2}t^{p-1} \cos(vt + H) + \dots, \quad (13.5)$$

$$\int_0^t At^p dt = \frac{1}{p+1} At^{p+1}$$

показывают, что ранг смешанных и периодических членов не изменится, а ранг вековых членов понизится на единицу. Таким образом, формулы (13.3) дадут члены, ранг которых ≥ 0 . А так как понижение ранга имеет место только для вековых членов, то ранг каждого смешанного члена не может быть меньше единицы.

Остается показать, что выражение δL_i , даваемое формулой (13.3), не включает членов нулевого ранга.

Подставив в производную $\partial R/\partial \lambda_i$ выражения (13.1) и разложив эту производную в ряд, получим

$$\partial R/\partial \lambda_i = \sum D_0 \mathfrak{M}, \quad (13.6)$$

где через D_0 обозначены частные производные, взятые от $\partial R/\partial \lambda_i$ по элементам, после замены в этих производных элементов их начальными значениями

$$L_i^0, \quad n_i t + \lambda_i^0, \quad \xi_j^0, \quad \eta_j^0; \quad (13.7)$$

через \mathfrak{M} обозначено произведение целых неотрицательных степеней $\delta L_i, \delta \lambda_i, \delta \xi_j, \delta \eta_j$, вычисленных до членов m -го порядка включительно.

Рассмотрим сначала D_0 . Воспользовавшись теоремой 1, доказанной в § 11, для производных функции $\partial R/\partial \lambda_i$, по элементам будем иметь разложения вида

$$\sum A \mathfrak{M} \cos(vt + H),$$

где A зависят только от L_i , а \mathfrak{M} даются равенством (11.3)

После подстановки значений (13.7) получим

$$D_0 = \sum A_0 \mathfrak{M}_0 \cos(vt + H).$$

Здесь $v = \sum k_h n_h$ не может равняться нулю, так как по условиям доказываемой нами теоремы v могло бы быть равно нулю лишь в случае, когда все k_h равны нулю; но в $\partial R/\partial \lambda_i$ могут быть лишь такие члены, в которых $k_i \neq 0$.

Итак, D_0 состоит из одних только периодических членов. Ранг каждого такого члена, очевидно, равен или больше единицы.

Рассмотрим теперь множитель \mathcal{N} , входящий в разложение (13.6). Так как, согласно нашему предположению, в $\delta L_i, \delta \lambda_i, \delta \xi_j, \delta \eta_j$ членами нулевого ранга могут быть только вековые члены, то в разложении \mathcal{N} каждый член нулевого ранга должен быть вековым.

При перемножении D_0 и \mathcal{N} мы можем получить в (13.6) только члены, ранг которых не меньше единицы. Те члены, ранг которых равняется единице, не могут быть вековыми: они будут либо периодическими, либо смешанными. Но ранг таких членов, как показывает формула (13.5), при интегрировании не меняется. Отсюда следует, что разложение величины

$$\delta L_i = \int_0^i \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt$$

действительно не содержит членов нулевого ранга.

Теорема полностью доказана для возмущений, даваемых формулами (13.3). Остается убедиться в ее справедливости для возмущений средних долгот $\delta \lambda_i$, даваемых формулой (13.4).

К первому члену формулы (13.4) применимо все, что было только что сказано относительно формул (13.3). Таким образом, этот член не может дать ни членов отрицательного ранга, ни смешанных членов нулевого ранга.

Рассмотрим теперь последний член формулы (13.4). Мы уже видели, что $\partial \Phi/\partial L_i$ состоит из членов по меньшей мере второй степени относительно величин δL_h . Так как δL_h равняется в свою очередь сумме членов, имеющих ранг ≥ 1 , то ранг каждого члена $\partial \Phi/\partial L_i$ будет ≥ 2 . Интегрирование может уменьшить ранг на единицу, но он все же будет ≥ 1 , что соответствует требованиям теоремы.

Остается рассмотреть второй член формулы (13.4). Как мы уже видели, разложение производной $\partial R/\partial \lambda_i$ не содержит членов нулевого ранга, а все члены первого ранга в этом разложении являются либо периодическими, либо смешанными. И в том и в другом случае ранг их при двойном интегрировании не изменится. Все остальные члены в $\partial R/\partial \lambda_i$ имеют ранг ≥ 2 . После двойного интегрирования изменится ранг только вековых членов, но он будет во всяком случае ≥ 0 .

Таким образом, среди членов $(m+1)$ -го порядка в разложениях $\delta\lambda_i$, также отсутствуют члены отрицательного ранга и смешанные члены нулевого ранга.

Теорема полностью доказана.

§ 14. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона об отсутствии у больших полуосей планетных орбит вековых возмущений второго порядка, приведенная выше без доказательства (§ 13 гл. XVI), является дальнейшим развитием основной теоремы Лапласа — Лагранжа, но в другом направлении, нежели рассмотренная в предыдущем параграфе теорема Пуанкаре.

Уравнения (10.3) показывают, что большие полуоси планетных орбит a_i связаны с величинами L_i следующим равенством:

$$a_i = k_1^{-2} L_i^2,$$

где

$$k_1^2 = k^2 m_0 (m_0 + m_1 + \dots + m_i) (m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1})^{-1}.$$

Таким образом, возмущения этих элементов связаны соотношением

$$a_i^0 + \delta_1 a_i + \delta_2 a_i + \dots = k_1^{-2} (L_i^0 + \delta_1 L_i + \delta_2 L_i + \dots)^2,$$

которое дает

$$\delta_1 a_i = 2k_1^{-2} L_i^0 \cdot \delta_1 L_i,$$

$$\delta_2 a_i = k_1^{-2} [(\delta_1 L_i)^2 + 2L_i^0 \cdot \delta_2 L_i].$$

В предыдущем параграфе мы видели, что $\delta_1 L_i$ состоят только из периодических членов. Отсюда следует, что в $\delta_1 a_i$ вековые члены отсутствуют, а в $\delta_2 a_i$ они могли бы быть лишь в том случае, если бы они были в $\delta_2 L_i$. Поэтому теорема Пуассона является следствием следующей теоремы:

Теорема. Если средние движения планет таковы, что величина

$$v = \sum k_i n_i, \quad (14.1)$$

где целые числа k_i не все равны нулю, не может равняться нулю, то возмущения второго порядка $\delta_2 L_i$ не содержат вековых членов.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, вычислим $\delta_2 L_i$ при помощи первой из формул (13.3), которую можно написать так:

$$\frac{d}{dt} (\delta L_i) = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}. \quad (14.2)$$

В правой части здесь следует положить

$$L_k = L_k^0 + \delta_1 L_k, \quad \lambda_k = n_k t + \lambda_k^0 + \delta_1 \lambda_k, \quad \xi_j = \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j, \\ \eta_j = \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j.$$

В пределах нужной нам точности это дает:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_i} = \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}\right)_0 + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial L_k}\right)_0 \delta_1 L_k + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1 \lambda_k + \\ + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \xi_j}\right)_0 \delta_1 \xi_j + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \eta_j}\right)_0 \delta_1 \eta_j.$$

Входящие сюда возмущения первого порядка могут быть вычислены по формулам (13.3) и (13.4). При помощи (13.3) находим

$$\delta_1 L_k = \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_k}\right)_0 dt, \quad \delta_1 \xi_j = \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \eta_j}\right)_0 dt, \quad \delta_1 \eta_j = - \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_j}\right)_0 dt, \tag{14.3}$$

тогда как формула (13.4) может быть представлена следующим образом:

$$\delta_1 \lambda_k = \delta_1' \lambda_k + \delta_1'' \lambda_k,$$

где

$$\delta_1' \lambda_k = - \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial L_k}\right)_0 dt, \quad \delta_1'' \lambda_k = - \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}\right)_0 dt. \tag{14.4}$$

Последний член формулы (13.4) здесь опущен, поскольку $\partial R/\partial \lambda_i$ он дает члены не ниже третьего порядка.

Уравнение (14.2) показывает, что для нахождения интересующих нас возмущений второго порядка можно пользоваться формулой:

$$\frac{d}{dt} (\delta_2 L_i) = \sum \left\{ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial L_k}\right)_0 \delta_1 L_k + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1' \lambda_k \right\} + \\ + \sum \left\{ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \xi_j}\right)_0 \delta_1 \xi_j + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \eta_j}\right)_0 \delta_1 \eta_j \right\} + \\ + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1'' \lambda_k. \tag{14.5}$$

Вековые члены в $\delta_2 L_i$ могут получиться лишь в случае наличия в правой части этого равенства постоянных членов.

Легко видеть, что первая из сумм, стоящих в выражении (14.5), не может содержать постоянного члена. В самом деле, обозначим через

$$R' = A' \mathfrak{M}' \cos \left(\sum k'_g \lambda_g + H'\right); \quad R'' = A'' \mathfrak{M}'' \cos \left(\sum k''_g \lambda_g + H''\right)$$

два какие-либо члена в разложении пертурбационной функции, даваемом формулой (11.2). Рассматриваемая сумма состоит, очевидно, из слагаемых вида

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 R'}{\partial \lambda_i \partial L_h} \right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R''}{\partial L_h} \right)_0 dt = \\ & = k'_i \frac{\partial A'_0}{\partial L_h} \mathfrak{M}'_0 \sin \left(\sum k'_g \lambda_g + H' \right) k''_h A''_0 \mathfrak{M}''_0 v^{-1} \times \\ & \times \left[\cos \left(k''_g \lambda_g + H'' \right) - \cos \left(\sum k''_g \lambda_g^0 + H'' \right) \right] \quad \left(v = \sum k''_g n_g \right) \end{aligned}$$

и слагаемых вида

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 R'}{\partial \lambda_i \partial \lambda_h} \right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R''}{\partial L_h} \right)_0 dt = \\ & = -k'_i k'_h A'_0 \mathfrak{M}'_0 \cos \left(\sum k'_g \lambda_g + H' \right) \frac{\partial A''_0}{\partial L_h} \mathfrak{M}''_0 v^{-1} \times \\ & \times \left[\sin \left(\sum k''_g \lambda_g + H'' \right) - \sin \left(\sum k''_g \lambda_g^0 + H'' \right) \right], \end{aligned}$$

если только не все k''_g равны нулю. Но такие слагаемые равны суммам периодических членов, ни один из которых в силу условий теоремы не равен постоянному числу.

Если все k''_g равны нулю, то соответствующие слагаемые первой суммы могут дать смешанные, но отнюдь не постоянные члены.

Совершенно так же можно убедиться, что вторая и третья суммы выражения (14.5) могут дать только периодические или смешанные члены.

Таким образом, доказано отсутствие вековых членов в $\delta_2 L_i$, а вместе с тем и теорема Пуассона.

Пуанкаре [1905] доказал более общую теорему: он показал, что возмущения δL не могут содержать вековых членов не только нулевого ранга, но и первого ранга.

Вопросы, связанные с теоремой Пуассона, были подробно рассмотрены Хагихара [1945].

§ 15. Теорема Пуанкаре о классе

В результате решения уравнений (12.1) методом последовательных приближений каждая из величин δL_i , $\delta \lambda_i$, $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$ получается в виде суммы членов вида

$$A_0 \mathfrak{M}_0 t^p v_1^{-q_1} v_2^{-q_2} \dots \cos \left(\sum k_g \lambda_g + H \right), \quad (15.1)$$

где через

$$v_\alpha = \sum k_g^\alpha n_g \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (15.2)$$

обозначены делители, введенные последовательными интегрированиями.

Если коэффициент A_0 порядка m относительно возмущающих масс, то величина

$$m - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q_\alpha$$

называется классом возмущения (15.1) относительно рассматриваемого делителя v_α (§ 11 гл. XVI).

Теорема. Если средние движения n_g таковы, что величина (15.2) может равняться нулю только в том случае, когда все целые числа k_g^α равны нулю, то в разложении $\delta\lambda_i$ класс каждого члена относительно любого делителя ≥ 0 ; в разложениях δL_i , $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ класс каждого члена $\geq 1/2$.

Заметим, прежде всего, что справедливость этой теоремы для возмущений первого порядка непосредственно вытекает из выражений (14.3) и (14.4). Так, формулы (14.4) показывают, что $\delta_1\lambda_i$ состоят из членов, для которых либо $m=1$, $p=1$, $q=0$, либо $m=1$, $p=0$, $q=0$ или 2, а из формул (14.3) следует, что $\delta_1 L_i$, $\delta_1\xi_j$, $\delta_1\eta_j$ состоят из членов, в которых либо $m=1$, $p=0$, $q=0$ или 1, либо $m=1$, $p=1$, $q=0$.

Допустим, что теорема справедлива для всех возмущений до m -го порядка включительно, и покажем, что она будет тогда справедлива и для возмущений $(m+1)$ -го порядка. Это и докажет теорему.

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся для вычисления возмущений $(m+1)$ -го порядка формулами (13.3), т. е.

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt, \quad \delta \xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_j} dt, \quad \delta \eta_j = - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \xi_j} dt. \quad (15.3)$$

Если в каждую из стоящих здесь производных функции R подставить возмущенные значения элементов до m -го порядка включительно, то эти производные можно написать в виде сумм вида (13.6), т. е.

$$\sum D_0 \mathcal{R}. \quad (15.4)$$

Мы уже видели, что каждый из стоящих здесь множителей D_0 разлагается в ряд, состоящий из одних только периодических членов. Класс каждого из этих членов равен единице, так как здесь $m=1$, $p=0$, $q=0$.

С другой стороны, \mathfrak{N} есть произведение целых неотрицательных степеней δL_i , $\delta \lambda_i$, $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$, вычисленных до членов m -го порядка включительно. Но эти величины являются суммами членов, класс каждого из которых согласно сделанному допущению неотрицателен.

Так как произведение двух членов может дать лишь члены, классы которых равны сумме классов перемножаемых членов, то из всего сказанного следует, что сумма (15.4) состоит из членов, класс которых ≥ 1 . При подстановке этих членов в формулы (15.3) и интегрировании их порядок не изменится, а один (и только один) из показателей p и q может увеличиться на единицу. Таким образом, в возмущениях $(m+1)$ -го порядка могут появиться члены, имеющие класс, равный $1/2$, но не ниже.

Для доказательства первой части теоремы рассмотрим вычисление возмущений $(m+1)$ -го порядка в $\delta \lambda_i$ при помощи формулы (13.4). Эта формула дает:

$$\delta \lambda_i = - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt - \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt. \quad (15.5)$$

В двух первых членах подынтегральные функции разлагаются в ряды только что рассмотренного вида. Принимая во внимание, что двукратное интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не более чем на две единицы, убеждаемся, что эти два члена могут дать лишь члены, имеющие класс ≥ 0 .

Рассмотрим третий член формулы (15.5). Производная $\partial \Phi / \partial L_i$ состоит (§ 13) из членов по крайней мере второй степени относительно величин δL_i . Так как каждая из этих величин, вычисленная до членов m -го порядка включительно, состоит, по нашему допущению, из членов, класс которых $\geq 1/2$, то произведение двух и более величин δL_i будет состоять из членов, имеющих класс ≥ 1 .

Интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не больше чем на единицу. Отсюда ясно, что третий член формулы (15.5) может дать в возмущениях $(m+1)$ -го порядка только члены, класс которых $\geq 1/2$. Теорема полностью доказана.

§ 16. Возмущения наименьшего класса

Рассмотрим в возмущениях элементов члены наименьшего класса относительно некоторого определенного делителя

$$v_0 = \sum k_i^0 n_i. \quad (16.1)$$

Покажем, что все такие члены (иначе говоря, члены класса $1/2$ в разложениях δL , $\delta \xi$, $\delta \eta$ и члены нулевого класса в

разложении $\delta\lambda$) имеют форму

$$Bt^p \cos(\beta v_0 t + H), \quad (16.2)$$

где β — целое число.

Справедливость этого утверждения для возмущений первого порядка совершенно очевидна. Допустим поэтому, что оно справедливо для возмущений, вычисленных до членов m -го порядка включительно, и убедимся, что ту же форму имеют члены наименьшего класса и в возмущениях $(m+1)$ -го порядка.

Обратимся сначала к формулам (15.3) и посмотрим, в каких случаях они могут дать члены класса $1/2$. Так как каждое из подынтегральных выражений в (15.3) состоит, как мы видели, из членов, имеющих класс ≥ 1 , то в разложениях этих выражений нужно прежде всего отобрать члены, класс которых относительно делителя v_0 равен единице. Класс такого члена

$$B't^{p'} \cos(vt + H')$$

должен быть затем понижен интегрированием на $1/2$. Это может иметь место только в следующих случаях: 1) если $v=0$, то интегрирование повысит на единицу показатель p' ; 2) если $v=\beta v_0$, где β — целое число, то показатель q' делителя v_0 увеличится на единицу.

Итак, в возмущениях δL , $\delta\xi$, $\delta\eta$ все члены наименьшего класса, равного $1/2$, действительно имеют форму (16.2).

Легко убедиться, что для получения всех этих членов достаточно взять в функции R лишь члены, аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g. \quad (16.3)$$

В самом деле, каждое из подынтегральных выражений в формулах (15.3) разлагается, как мы знаем, в ряд вида (15.4). Входящие в этот ряд величины D_0 являются частными производными R по элементам L_i , λ_i , ξ_j , η_j , в которых эти элементы заменены их начальными значениями L_i^0 , $\lambda_i^0 + n_i t$, ξ_j^0 , η_j^0 . Поэтому каждая из величин D_0 есть сумма членов вида

$$B_0 \cos(vt + H_0), \quad (16.4)$$

где

$$v = \sum k_g n_g,$$

причем H_0 зависит только от λ_i^0 , а B_0 — только от L_i^0 , ξ_j^0 , η_j^0 . Член (16.4), получающийся путем дифференцирования из соответствующего члена

$$B \cos(vt + H) \quad (16.5)$$

в разложении функции R , имеет, очевидно, класс, равный единице.

С другой стороны, входящие в (15.4) множители \mathcal{R} , являющиеся произведениями целых неотрицательных степеней δL_i , $\delta \lambda_i$, $\delta \xi_j$, $\delta \eta_j$, вычисленных до членов m -го порядка включительно, могут дать члены нулевого класса только в случае, когда в δL_i , $\delta \lambda_i$, ... взяты члены наинизшего класса, а эти последние имеют, как было показано, форму (16.2).

Таким образом, члены наименьшего класса (первого) в производных $\partial R/\partial \lambda_i$, $\partial R/\partial \xi_j$, $\partial R/\partial \eta_j$, входящих в (15.3), получатся от перемножения членов вида (16.2) и (16.4). Их аргументы будут иметь поэтому форму

$$(\beta v_0 \pm v)t + \text{const.}$$

Но чтобы после интегрирования получился член класса, равного $1/2$, такой аргумент должен быть вида

$$\gamma v_0 t + \text{const.}$$

где γ — целое число.

Следовательно, должно быть

$$v = \sigma v_0; \quad k_g = \sigma k_g^0,$$

где $\sigma = \pm(\gamma - \beta)$ есть целое число.

Поэтому члены (16.5) пертурбационной функции R , дающие члены наименьшего класса в δL , $\delta \xi$, $\delta \eta$, необходимо имеют аргументы вида

$$\sum k_g \lambda_g + H = \sigma \theta + H,$$

т. е. аргументы, кратные θ .

Остается рассмотреть члены наименьшего (нулевого) класса в $\delta \lambda_i$. В предыдущем параграфе мы видели, что эти члены может дать только второй член формулы (15.5). Таким образом, для нахождения этих членов может служить формула

$$\delta \lambda_i = - \sum C_{ik} \int_0^i dt \int_0^i \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt. \quad (16.6)$$

Мы только что видели, что наименьший возможный класс членов ряда, в который разлагается производная $\partial R/\partial \lambda_k$, равен единице. Двукратное интегрирование в том и только в том случае увеличит сумму $p+q$ на две единицы и даст, таким образом, член нулевого класса, когда аргумент этого члена имеет форму $\beta v_0 t + H$.

Итак, действительно, для получения в возмущениях элементов всех членов наименьшего класса по отношению к делителю (16.1) достаточно взять в пертурбационной функции R только те члены, аргументы которых кратны величине θ , определяемой равенством (16.3).

§ 17. Уравнения, дающие члены наименьшего класса

Результаты предыдущего параграфа позволяют легко получить дифференциальные уравнения, дающие члены наименьшего класса в возмущениях элементов.

Обозначим через Ψ совокупность тех членов в разложении пертурбационной функции R , аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g,$$

если через

$$\nu_0 = \sum k_g^0 n_g$$

обозначен делитель, по отношению к которому мы рассматриваем класс.

Обозначим, далее, через L_i^* , λ_i^* , ξ_j^* , η_j^* совокупности членов наименьшего класса в соответствующих элементах, т. е. класса, равного $1/2$ в L_i , ξ_j , η_j и равного нулю в λ_i .

Учитывая сказанное в предыдущем параграфе, из равенств (15.3) получим

$$\frac{dL_i^*}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}; \quad \frac{d\xi_j^*}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j}; \quad \frac{d\eta_j^*}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j}. \quad (17.1)$$

Эти уравнения могут быть значительно упрощены. В самом деле, согласно с тем, что мы видели выше, для получения членов класса $1/2$ нужно в разложениях (15.4) частных производных функции R , входящих в (15.3), брать в \mathcal{R} только члены нулевого класса. Но такие члены можно получить лишь в том случае, если вместо $\delta \lambda_i$ взять члены нулевого класса и положить

$$\delta L_i = 0, \quad \delta \xi_j = 0, \quad \delta \eta_j = 0,$$

иначе говоря, положить

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_j = \xi_j^0, \quad \eta_j = \eta_j^0.$$

Результаты этой подстановки, выполненной в функции Ψ и ее частных производных, обозначим через

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}\right)_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i}, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j}\right)_0.$$

Поскольку указанная подстановка уже выполнена в коэффициентах D_0 , входящих в разложения (15.4), уравнения (17.1)

можно заменить такими:

$$\frac{dL_i^*}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i}; \quad \frac{d\xi_j^*}{dt} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0, \quad \frac{d\eta_j^*}{dt} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0. \quad (17.2)$$

Для нахождения λ_i^* , т. е. членов нулевого класса в $\delta\lambda_i$, может служить, как мы видели, формула (16.6). Учитывая (15.3), ее можно написать так:

$$\delta\lambda_i = - \sum C_{ik} \int_0^t \delta L_k dt = - \sum C_{ik} \int_0^t (L_k - L_k^0) dt.$$

Чтобы получить в левой части этого равенства только члены нулевого класса, надо в правой части, в L_k , взять только члены класса, равного 1/2, т. е. положить $L_k = L_k^*$.

Таким образом, учитывая, что

$$\lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i,$$

будем иметь

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = n_i - \sum C_{ik} (L_k^* - L_k^0).$$

Если ввести в рассмотрение функцию

$$\Phi_0 = C_0 - \sum n_i (L_i^* - L_i^0) + \frac{1}{2} \sum \sum C_{ik} (L_i^* - L_i^0) (L_k^* - L_k^0), \quad (17.3)$$

где C_0 — произвольная постоянная, то последнему равенству можно придать вид

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i^*}. \quad (17.4)$$

Замечая, наконец, что

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_i^*} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i^*} = 0,$$

мы можем заменить уравнения (17.2) и (17.4) такими:

$$\frac{dL_i^*}{dt} = \frac{\partial (\Phi_0 + \Psi_0)}{\partial \lambda_i^*}; \quad \frac{d\lambda_i^*}{dt} = - \frac{\partial (\Phi_0 + \Psi_0)}{\partial L_i^*}, \quad (17.5)$$

$$\frac{d\xi_j^*}{dt} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0, \quad \frac{d\eta_j^*}{dt} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0. \quad (17.6)$$

Таким образом, для получения в возмущениях элементов членов наименьшего класса, достаточно решить систему уравнений (17.5) и (17.6).

§ 18. Вычисление долгопериодических возмущений

Возмущения наименьшего класса относительно делителя

$$v_0 = \sum k_g^0 n_g$$

представляют особый интерес в том случае, когда этот делитель очень мал по сравнению со средними движениями n_g . В этом случае амплитуды соответствующих долгопериодических возмущений L_i^* , λ_i^* , ξ_j^* , η_j^* будут особенно велики. Результаты предыдущего параграфа позволяют находить эти возмущения независимо от прочих путем решения уравнений (17.5) и (17.6), правые части которых являются функциями начальных значений L_i^0 , λ_i^0 , ξ_j^0 , η_j^0 элементов и 2π -периодическими функциями величины

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g. \quad (18.1)$$

Вследствие того, что правые части рассматриваемых уравнений зависят от t только через посредство θ , решение может быть получено в квадратурах.

Первое из уравнений (17.5) дает

$$\frac{dL_i^*}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i^*} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} k_i^0.$$

Введем вспомогательную величину U , определяемую равенством

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta}.$$

Это даст

$$\frac{dL_i^*}{dt} - k_i^0 \frac{dU}{dt} = 0,$$

откуда

$$L_i^* = k_i^0 U + L_i^0, \quad (18.2)$$

если принять, что $U=0$ для $t=0$.

Подставив значения (18.2) в выражение (17.3), определяющее функцию Φ_0 , получим

$$\Phi_0 = \text{const} - 2BU - AU^2, \quad (18.3)$$

где через A и B обозначены постоянные коэффициенты.

Уравнения (17.5) имеют очевидный интеграл

$$\Phi_0 + \Psi_0 = \text{const},$$

дающий

$$C + \Psi_0 = 2BU + AU^2,$$

где C — постоянная величина.

Поэтому величина U выражается через θ следующим образом:

$$AU + B = (B^2 + AC + A\Psi_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (18.4)$$

Соотношения (18.1), (17.4) и (18.2) показывают, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_g^0 \frac{d\lambda_g}{dt} = - \sum k_g^0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_g^*} = - \sum \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i^*} \frac{dL_i^*}{dU} = - \frac{d\Phi_0}{dU}.$$

На основании (18.3) и (18.4) это дает

$$\frac{d\theta}{dt} = 2B + 2AU = 2(B^2 + AC + A\Psi_0)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$2t = \int_{\theta_0}^{\theta} (A\Psi_0 + B^2 + AC)^{-1/2} d\theta. \quad (18.5)$$

Формулы (18.2) и (18.4) решают задачу в отношении элементов L_i . Уравнение (17.4) показывает, что

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i^*} = n_i - \sum C_{ik} (L_k^* - L_k^0) = n_i - U \sum k_k^0 C_{ik}.$$

После замены здесь U его значением (18.4) и интегрирования найдем λ_i^* . Точно так же интегрирование уравнений (17.6) даст ξ_j, η_j в виде функций θ . Решение задачи завершается соотношением (18.5), устанавливающим зависимость между θ и t .

Метод, созданный Делоне для последовательного получения отдельных периодических возмущений, оказался весьма плодотворным. Он позволил построить наиболее полную алгебраическую теорию движения Луны [Делоне, 1860—1867]. Попытки использовать принципы этого метода для изучения движения планет были сделаны Хиллом. В 1900 г. он дал метод, в некоторых отношениях существенно обобщающий метод Делоне [Хилл, 1907]. Работы Пуанкаре глубоко осветили сущность этих методов [Пуанкаре, 1893; Пуанкаре, 1907]*).

*) Некоторая обобщающая модификация этих методов была предложена Цейпелем [1915—1917]. (Прим. ред.)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ**§ 1. Общий характер движения Луны**

Задача теории движения Луны заключается в получении ее координат относительно центра Земли в виде функций времени. Эта задача решается путем интегрирования уравнений движения центра Луны, вытекающих из закона тяготения и нахождения постоянных интегрирования при помощи наблюдений.

Движение, которое имела бы Луна при отсутствии всех других небесных тел, кроме Земли (принимаемой, так же как и Луна, за материальную точку), называется невозмущенным движением, а все изменения, вызываемые в нем притяжением Солнца и планет, а также несферичностью Земли и Луны, называются возмущениями или неравенствами.

Возмущения, испытываемые Луной со стороны Солнца, настолько велики, что ее невозмущенное движение нецелесообразно использовать в качестве первого приближения при решении уравнений движения. Здесь приходится класть в основу ту или иную промежуточную орбиту, уже включающую существенную часть солнечных неравенств.

Возмущения, производимые в движении какой-либо планеты притяжением других планет, всегда очень малы по сравнению с притяжением Солнца, несмотря на то, что возмущающие массы иногда находятся ближе к возмущаемой планете, нежели центральное тело. Это объясняется крайней малостью возмущающих масс по сравнению с массой Солнца. Но возмущения, производимые Солнцем в движении Луны, имеют совсем другой характер, поскольку масса возмущающего тела здесь в 332 485 раз больше массы центрального тела, которым является Земля.

Приняв средние расстояния Луны и Солнца от Земли равными соответственно 384 401 и 149 598 630 км, найдем, что отношение этих расстояний равно $1/389,173$. Отсюда следует, что ускорение, сообщаемое Луне Солнцем, в

$$332\,485/(389,173)^2 = 2,195$$

раза (в среднем) больше, чем ускорение, вызываемое притяжением Земли.

Но, поскольку мы изучаем движение Луны по отношению к Земле, наблюдаемый эффект зависит от разности ускорений, вызываемых Солнцем в движении Луны и Земли. Легко видеть, что эта разность в среднем составляет

$$332\,485/(389,173)^3 = 0,005\,641$$

часть ускорения, производимого Землей, причем эта величина может изменяться (вследствие эксцентricности орбит Луны и Солнца) от 0,0045 до 0,0070.

Таким образом, отношение возмущающего ускорения, производимого Солнцем, к ускорению, производимому центральным телом, здесь по крайней мере в десятки раз больше тех, с которыми приходится иметь дело в теории движения планет.

Близость Луны к Земле делает возмущения, производимые всеми остальными планетами, весьма малыми. Но вследствие этой же близости появляется необходимость учитывать неполную сферичность Земли и Луны.

Теорию движения Луны естественно разделить поэтому на следующие части:

1. Основная проблема теории движения Луны, называемая также солнечной теорией лунного движения. Она заключается в изучении относительных движений в системе трех материальных точек T , L и S , одна из которых S (Солнце) описывает заданный кеплеров эллипс вокруг центра инерции G двух других точек T (Земля) и L (Луна).

2. Вычисление поправок, обусловленных тем, что в задаче трех материальных точек T , L и S орбита S относительно G не может быть в точности кеплеровым эллипсом, а также некоторыми другими упрощениями, делаемыми при решении основной проблемы.

3. Нахождение возмущений, производимых притяжением, испытываемым Луной и Землей со стороны планет (прямое действие планет).

4. Вычисление влияния на движение Луны возмущений, испытываемых Солнцем со стороны планет (косвенное действие планет).

5. Вычисление влияния несферичности Земли.

6. Вычисление влияния несферичности Луны.

7. Учет релятивистской поправки, соответствующей замене закона тяготения Ньютона законом Эйнштейна.

Для получения совершенно строгой гравитационной теории движения Луны нужно было бы еще рассмотреть возмущения высших порядков, происходящие от взаимного влияния действий, указанных в последних шести пунктах. Однако эти

действия настолько малы по сравнению с солнечными возмущениями, даваемыми решением основной проблемы, что в пределах требуемой точности этим взаимным влиянием можно пренебречь.

Чтобы судить об относительной важности указанных факторов, возьмем средние вековые движения перигея и узла лунной орбиты, производимые каждым из этих факторов в отдельности. Согласно вычислениям Брауна [1897—1908] эти движения таковы *):

	Перигей	Узел
1. Основные солнечные возмущения	+14642692"	-6967204"
2. Поправки к решению основной проблемы —	68	+ 19
3. Прямое действие планет	+ 269	- 142
4. Косвенное действие планет	16	+ 5
5. Несферичность Земли	+ 641	- 600
6. Несферичность Луны	+ 3	- 14
7. Релятивистская поправка	+ 2	+ 2
<hr/>		
Гравитационное вековое движение	+14643523"	-6967934"

Включенные сюда релятивистские поправки складываются из так называемой геодезической прецессии, открытой Де Ситтером в 1916 г., и шварцшильдовского движения перигея (§ 4 гл. II), равного $+0'',06$ в столетие. Геодезическую прецессию, одинаковую для узла и перигея, Де Ситтер нашел равной $+1'',91$ в столетие. Наиболее полно релятивистские поправки в теории движения Луны были изучены В. А. Брумбергом [1958].

Кроме только что указанных факторов, на движение Луны влияют морские приливы, увеличение масс Земли и Луны вследствие падения метеоритов и некоторые другие физические воздействия, остающиеся за пределами чисто гравитационной теории.

В дальнейшем мы ограничимся исключительно рассмотрением основной проблемы лунного движения.

Напомним, в чем выражаются наиболее значительные из возмущений, производимых Солнцем в движении Луны.

За невозмущенную орбиту Луны можно принять ее среднюю орбиту, представляющую собой эллипс с большой полуосью, равной $384\,401 \pm 2 \text{ км} = 0,00256955 \text{ а. е.}$, и эксцентриситетом, равным $0,05490$, лежащий в плоскости, наклоненной к эклиптике $1850,0$ под углом в $5^\circ 9'$. Время обращения по этому эллипсу равно $27,321661$ суток (сидерический месяц).

Действие Солнца сказывается прежде всего в том, что перигей лунной орбиты имеет поступательное движение. Полный оборот он совершает в среднем в $3232,5822$ суток, что составляет

*) Новейшие данные о теоретических и наблюдаемых значениях вековых движений перигея и узла Луны содержатся в работе Эккерта [1965]. (Прим. ред.)

8,850339 года. На равномерное движение перигея накладываются периодические неравенства, самое большое из которых имеет амплитуду в $8^{\circ}41'$. Эксцентриситет при этом изменяется немного, колеблясь около указанного выше среднего значения.

С другой стороны линия узлов движется попятным движением, делая полный оборот в среднем в 6793,462 суток, т. е. в 18,59949 года. Наиболее значительное из периодических неравенств, накладывающихся на это равномерное движение, имеет амплитуду в $1^{\circ}26'$. Наклон орбиты имеет периодические неравенства, вследствие которых он меняется от $4^{\circ}57'$ до $5^{\circ}20'$.

Неравенства долготы даются формулой вида

$$v = \lambda + 377' \sin M + 13' \sin 2M + \dots + 76' \sin (2D - M) + \dots \\ \dots + 39' \sin 2D - 11' \sin M' - 2' \sin D + \dots,$$

где через v обозначена истинная долгота, а через λ — средняя, соответствующая указанному выше периоду обращения. Через M и M' обозначены средние аномалии Луны и Солнца, причем M считается от среднего положения перигея, найденного с учетом векового движения; разность средних долгот Луны и Солнца обозначена через D .

Члены с аргументами M , $2M$, ... называются эллиптич е с к и м и. Сумма этих членов представляет уравнение центра.

Основная часть уравнения центра была открыта еще Гиппархом, который дал достаточно удовлетворительный для того времени способ вычисления ее при помощи эксцентрика. Гиппарху были известны также движения перигея и узла.

Неравенство с аргументом $2D - M$, имеющее период в 31,8 суток, было открыто Птолемеем и названо им э в е к ц и е й. Впоследствии эвекцией стали называть всю группу членов

$$4608'' \sin (2D - M) + 175'' \sin (2D + M) + \dots,$$

аналогичных тому, который был эмпирически найден Птолемеем.

Неравенство с аргументом $2D$, имеющее период, равный половине синодического месяца, т. е. 14,76 суток, было открыто Тихо Браге (около 1580 г.) и названо вариацией. Столь позднее открытие такого большого неравенства объясняется тем, что вариация обращается в нуль в сизигиях, а потому не оказывает влияния на солнечные и лунные затмения, наблюдения которых так долго были главным средством изучения движения Луны.

Вариацией стали потом называть совокупность всех членов с аргументами $2D$, $4D$, $6D$, ..., т. е.

$$2106'' \sin 2D + 9'' \sin 4D + \dots$$

Член с аргументом M' дает возмущение, имеющее годовой период и получившее название годичного неравенства. Это неравенство (открытое Тихо Браге) вызывается эллиптичностью земной орбиты, производящей изменение расстояния до Солнца, а следовательно, и величины возмущающей силы. В настоящее время годичным неравенством обычно называется совокупность всех членов, зависящих от средней аномалии Солнца, а именно:

$$- 659'',2 \sin M' + 152'',1 \sin (2D - M') - 21'',6 \sin (2D + M') + \dots$$

Совокупность членов с аргументами D , $3D$, $5D$, ... принято называть параллактическим неравенством. Амплитуда каждого из этих членов пропорциональна отношению a/a' больших полуосей орбит Луны и Солнца. Так как величина a находится с большой точностью из измерений параллакса Луны, то сравнение полученной из наблюдений величины параллактического неравенства с теоретической дает возможность найти a' , т. е. параллакс Солнца. Этот метод является одним из наиболее эффективных среди гравитационных методов нахождения солнечного параллакса.

Вместо радиуса-вектора Луны r обычно рассматривается ее параллакс P , определяемый равенством

$$\sin P = \frac{a}{r} \sin P_{\odot}, \quad P_{\odot} = 3422'',57.$$

Возмущения параллакса и широты состоят из членов с теми же аргументами и носящими те же названия, как и в разложении долготы. Так, для возмущенного значения параллакса имеем

$$P = 3424'' + 187'' \cos M + 10'' \cos 2M + \dots$$

$$\dots + 34'' \cos (2D - M) + \dots + 28'' \cos 2D + \dots,$$

где в первой строке дано среднее значение параллакса и эллиптические члены, а во второй — важнейшие возмущения.

§ 2. Основная проблема

Массы Земли T и Луны L условимся обозначать этими же буквами, а массу Солнца S будем обозначать через m' . Координаты L и S в инерциальной системе, начало которой находится в T , обозначим соответственно через ξ , η , ζ и ξ_1 , η_1 , ζ_1 . Пусть, далее, координаты Солнца относительно параллельных осей с началом в G (центр инерции Земли и Луны) будут

$$\xi' = \xi_1 - \frac{L}{T+L} \xi; \quad \eta' = \eta_1 - \frac{L}{T+L} \eta; \quad \zeta' = \zeta_1 - \frac{L}{T+L} \zeta.$$

Обозначив через r , r_1 , r' и Δ расстояния TL , TS , GS и LS , а через H' угол между векторами GL и GS , будем иметь

$$r_1^2 = r'^2 + \frac{2L}{T+L} rr' \cos H' + \left(\frac{L}{T+L}\right)^2 r^2, \quad (2.1)$$

$$\Delta^2 = r'^2 - \frac{2T}{T+L} rr' \cos H' + \left(\frac{T}{T+L}\right)^2 r^2. \quad (2.2)$$

Уравнения движения Луны и Солнца мы можем написать следующим образом (§ 5 гл. XIV):

$$\ddot{\xi} = v \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad \ddot{\eta} = v \frac{\partial U}{\partial \eta}; \quad \ddot{\zeta} = v \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\xi}' = v' \frac{\partial U}{\partial \xi'}; \quad \ddot{\eta}' = v' \frac{\partial U}{\partial \eta'}; \quad \ddot{\zeta}' = v' \frac{\partial U}{\partial \zeta'}, \quad (2.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{T+L}{TL}; & v' &= \frac{T+L+m'}{m'(T+L)}, \\ U &= k^2 \left(\frac{TL}{r} + \frac{Tm'}{r_1} + \frac{Lm'}{\Delta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Хорошо известные свойства полиномов Лежандра $P_n(x)$ дают разложение

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_0^{\infty} \alpha^n P_n(x),$$

сходящееся при $|\alpha| < 1$, $|x| \leq 1$. Поэтому на основании (2.1) и (2.2)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r'} \sum_0^{\infty} \left(\frac{-L}{T+L} \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos H'), \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_0^{\infty} \left(\frac{T}{T+L} \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos H'). \quad (2.7)$$

Рассмотрим сначала уравнения движения Солнца (2.4). Отбросив в выражении (2.5) для U первый член, их можно написать так:

$$\ddot{\xi}' = \frac{\partial U'}{\partial \xi'}; \quad \ddot{\eta}' = \frac{\partial U'}{\partial \eta'}; \quad \ddot{\zeta}' = \frac{\partial U'}{\partial \zeta'}, \quad (2.8)$$

где

$$U' = \frac{k^2(T+L+m')}{T+L} \left(\frac{T}{r_1} + \frac{L}{\Delta} \right),$$

или, пользуясь разложениями (2.6) и (2.7),

$$U' = \frac{k^2(T+L+m')}{r'} \left[1 + \frac{TL}{(T+L)^2} \left(\frac{r}{r'} \right)^2 P_n(\cos H') + \dots \right].$$

Так как всегда

$$|P_n(\cos H')| \leq 1,$$

а в рассматриваемом случае $L/T < 1/80$ и $r/r' < 1/389$, то легко видеть, что уже второй член этого разложения не превосходит $1/12\,500\,000$ часть первого члена. Мы можем поэтому пренебречь здесь вторым и всеми последующими членами. Движение S относительно G будет тогда строго эллиптическое, что существенно упростит задачу, так как движение Луны будет определяться системой шестого порядка (2.3), в которой x' , y' , z' суть известные функции t .

Уравнения (2.3) напомним теперь так:

$$\ddot{\xi} = \partial V / \partial \xi, \quad \ddot{\eta} = \partial V / \partial \eta, \quad \ddot{\zeta} = \partial V / \partial \zeta, \quad (2.9)$$

где

$$V = k^2 \frac{T+L}{r} + k^2 \frac{T+L}{L} \frac{m'}{r_1} + k^2 \frac{T+L}{T} \frac{m'}{\Delta}.$$

Введем прямоугольную геоцентрическую систему координат $Txyz$, у которой плоскость Txy параллельна эклиптике (т. е. плоскости той орбиты, которую S описывает вокруг G) и которая вращается вокруг оси Tz с постоянной угловой скоростью n' , равной среднему угловому движению Солнца. Уравнения (2.9) заменятся такими (см. § 3 гл. XV):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} - n'^2x &= \partial V / \partial x, \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} - n'^2y &= \partial V / \partial y, \\ \ddot{z} &= \partial V / \partial z. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Если воспользоваться разложениями (2.6) и (2.7), то будем иметь

$$V = \frac{k^2(T+L)}{r} + \frac{k^2m'}{r'} \sum_2^{\infty} \kappa_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H'), \quad (2.11)$$

где

$$\kappa_n = \left(\frac{T}{T+L}\right)^{n-1} - \left(\frac{-L}{T+L}\right)^{n-1}.$$

Член k^2m'/r' , не зависящий от координат Луны, здесь опущен. Множители

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= 1, \\ \kappa_3 &= (T^2 - L^2)/(T+L)^2 = 0,975\,675, \\ \kappa_4 &= (T^3 + L^3)/(T+L)^3 = 0,963\,957, \\ &\dots \end{aligned}$$

близки к единице.

Обозначим через a' большую полуось эллиптической орбиты Солнца, т. е. величину, определяемую равенством

$$n'^2 a'^3 = k^2 (T + L + m'), \quad (2.12)$$

и положим

$$T + L + m' = (m').$$

Поскольку $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, ..., разложение (2.11) можно будет написать так:

$$V = \frac{k^2(T+L)}{r} + n'^2 \frac{(m')}{m'} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H' - \frac{1}{2}\right) + \dots \quad (2.13)$$

Начнем с нахождения тех неравенств в движении Луны, которые не зависят от параллакса Солнца. Для этого удалим Солнце на бесконечность, увеличив соответствующим образом его массу: пусть a' и m' стремятся к бесконечности таким образом, что сохраняется равенство (2.12).

Так как $r' \rightarrow \infty$, то сумма всех ненаписанных членов в выражении (2.13), равная

$$n'^2 \frac{(m')}{m'} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r^3}{r'} \sum_3^{\infty} \kappa_n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-3} P_n(\cos H')$$

обратится в нуль и это выражение примет вид

$$k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 \left(\lim \frac{a'}{r'}\right)^3 (3r^2 \cos^2 H' - r^2). \quad (2.14)$$

Для облегчения начального этапа решения задачи выделим еще более узкую группу неравенств, а именно те неравенства, которые не зависят не только от параллакса Солнца, но и от его эксцентриситета e' .

Если $e' = 0$, то вектор GS вращается равномерно, с угловой скоростью n' , около точки G . Направим ось Tx параллельно этому вектору. При таком выборе осей

$$r \cos H' = x,$$

а так как при $e' = 0$, очевидно, $\lim(a'/r') = 1$, то выражение (2.14) обратится в

$$V_1 = k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 (3x^2 - r^2),$$

или

$$V_1 = k^2 \frac{T+L}{r} - \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m^2 (n - n')^2 (3x^2 - z^2). \quad (2.15)$$

Через m здесь обозначено отношение

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

среднего сидерического движения Солнца n' к среднему синодическому движению Луны $n - n'$.

Полагая

$$V = V_1 + (n - n')^2 \Omega,$$

мы можем написать уравнения (2.10) так:

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} = (n - n')^2 [-\kappa xr^{-3} + 3m^2x + \partial\Omega/\partial x],$$

$$\ddot{y} + 2n'\dot{x} = (n - n')^2 [-\kappa yr^{-3} + \partial\Omega/\partial y],$$

$$\ddot{z} = (n - n')^2 [-\kappa zr^{-3} - m^2z + \partial\Omega/\partial z],$$

где

$$\kappa = k^2(T + L)(n - n')^{-2}.$$

Обозначим через τ время, измеряемое в таких единицах, что синодическое обращение Луны равно 2π . Так как $d\tau = (n - n')dt$, то уравнения движения Луны примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \kappa xr^{-3} - 3m^2x &= \partial\Omega/\partial x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \kappa yr^{-3} &= \partial\Omega/\partial y, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} + \kappa zr^{-3} + m^2z &= \partial\Omega/\partial z. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Решение этих уравнений при $\Omega=0$ дает промежуточную орбиту, уже включающую значительную часть возмущений. Влияние отдельных членов разложения величины Ω , которая играет здесь роль возмущающей функции, учитывается дополнительно. Это дает полное решение основной проблемы теории движения Луны.

Примечание. За невозмущенное (со стороны планет) движение Солнца можно с очень большой точностью принять эллиптическое движение, даваемое уравнениями (2.8), в которых U' заменено через $k^2(T + L + m')r'^{-1}$.

Хилл [1878а] показал, что для перехода от этого эллиптического движения к тому реальному, которое имеет Солнце под влиянием притяжения Луны, нужно эллиптическую среднюю аномалию уменьшить на $0'',001 \sin 2D$, а эллиптический радиус-вектор умножить на

$$1,0000000200 + 0,0000000003 \cos 2D.$$

Через D здесь обозначена разность средних долгот Луны и Солнца.

Стоящие здесь периодические члены не производят заметного действия. Постоянный член вызывает ощутимое увеличение большой полуоси земной орбиты, так как он соответствует уменьшению среднего годового движения Солнца на $0'',03895$.

§ 3. Вариационная кривая

В предыдущем параграфе было показано, что солнечные неравенства в движении Луны даются уравнениями (2.16).

Решение этих уравнений естественно начать с того простейшего случая, когда $\Omega=0$. В этом случае уравнения (2.16) обращаются в уравнения, уже рассмотренные нами при изучении движений в ограниченной задаче трех тел, происходящих вблизи конечной массы (§ 10 гл. XV).

Вследствие малости наклона лунной орбиты координата z настолько мала, что можно сделать еще одно упрощение: положить $z=0$, т. е. считать, что Луна движется в плоскости эклиптики.

Для этого частного случая, когда движение определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \kappa x r^{-3} - 3m^2x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \kappa y r^{-3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Хилл нашел, как мы видели (§ 12 гл. XV), периодическую орбиту:

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos \tau + A_3 \cos 3\tau + A_5 \cos 5\tau + \dots, \\ y &= A'_1 \sin \tau + A'_3 \sin 3\tau + A'_5 \sin 5\tau + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Эта орбита, получившая название вариационной кривой, симметрична относительно каждой из координатных осей. Начало счета времени τ , служащего параметром в уравнениях (3.2), выбрано так, что сизигии (пересечения с осью Tx) имеют место при $\tau=0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$, а квадратуры (пересечения с осью Ty) имеют место при $\tau=\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$

Мы уже видели (§ 14 гл. XV), что для достаточно малых значений $|m|$ коэффициенты A_{2k+1} , A'_{2k+1} могут быть представлены в форме сходящихся рядов, расположенных по целым положительным степеням m и начинающихся членом с m^{2k} . Общий множитель всех этих коэффициентов a , даваемый формулами (14.4) и (14.6) гл. XV, зависит не только от m , но и от κ . Этот множитель фиксирует размеры вариационной кривой, тогда как ее форма зависит только от m .

Ограничившись членами второй степени относительно m , будем иметь

$$\begin{aligned} x &= a \left[\left(1 - \frac{19}{16} m^2 \right) \cos \tau + \frac{3}{16} m^2 \cos 3\tau \right], \\ y &= a \left[\left(1 + \frac{19}{16} m^2 \right) \sin \tau + \frac{3}{16} m^2 \sin 3\tau \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}\cos 3\tau &= 4 \cos^3 \tau - 3 \cos \tau = \cos \tau (1 - 4 \sin^2 \tau), \\ \sin 3\tau &= 3 \sin \tau - 4 \sin^3 \tau = \sin \tau (-1 + 4 \cos^2 \tau),\end{aligned}$$

то в пределах принятой точности уравнения вариационной кривой можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned}x &= a \cos \tau \left(1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau\right), \\ y &= a \sin \tau \left(1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau\right).\end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Это показывает, что вариационная кривая, имеющая для бесконечно малых значений $|m|$ форму окружности, принимает при возрастании $|m|$ форму, близкую к эллипсу, с центром в начале координат и с отношением осей, равным $(1-m^2)/(1+m^2)$, причем малая ось совпадает с линией сизигий, а большая — с линией квадратур.

Заметим, что уравнения (3.3) дают для радиуса-вектора выражение

$$r = a [1 - m^2 \cos 2\tau + O(m^3)], \quad (3.4)$$

воспроизводящее, как легко убедиться, основной член вариации (§ 1). Покажем, что движение по вариационной кривой воспроизводит также и вариацию в долготе Луны.

Обозначим через v истинную долготу Луны, а через λ и λ' — средние долготы Луны и Солнца. Благодаря сделанному нами выбору переменной τ будем иметь

$$\tau = \lambda - \lambda',$$

а потому

$$v - \lambda = v - \lambda' - \tau.$$

Рассмотрим выражения

$$r \cos (v - \lambda) = x \cos \tau + y \sin \tau,$$

$$r \sin (v - \lambda) = y \cos \tau - x \sin \tau,$$

где

$$x = r \cos (v - \lambda'), \quad y = r \sin (v - \lambda')$$

не что иное, как координаты Луны в употребляемой нами вращающейся системе координат.

Подставив сюда разложения (3.2), написанные в форме (§ 12 гл. XV)

$$\begin{aligned}x &= a [(1 + a_{-1}) \cos \tau + (a_1 + a_{-2}) \cos 3\tau + \dots], \\ y &= a [(1 - a_{-1}) \sin \tau + (a_1 - a_{-2}) \sin 3\tau + \dots],\end{aligned}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} r \cos(v - \lambda) &= a [1 + (a_1 + a_{-1}) \cos 2\tau + (a_2 + a_{-2}) \cos 4\tau + \dots], \\ r \sin(v - \lambda) &= a [* + (a_1 - a_{-1}) \sin 2\tau + (a_2 - a_{-2}) \sin 4\tau + \dots]. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Эти уравнения дают движение Луны, соответствующее рассматриваемому нами частному решению системы (3.1). Чтобы вывести из них долготу Луны, можно воспользоваться разложением

$$v - \lambda = \operatorname{tg}(v - \lambda) - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(v - \lambda) + \dots$$

При помощи указанных выше значений коэффициентов a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2} (§ 14 гл. XV), получим

$$v = \lambda + \left(\frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \dots \right) \sin 2\tau + \dots \quad (3.6)$$

Это выражение действительно воспроизводит те неравенства в долготе Луны, которые носят название вариации (§ 1).

Вариационная кривая для Луны была вычислена Хиллом [1878], принявшим следующие значения средних годовых движений Луны и Солнца:

$$n = 17\,325\,594'',06085, \quad n' = 1\,295\,977'',41516,$$

что дает

$$m = n' / (n - n') = 0,0808489338\,08311\,6.$$

Это же значение m было затем положено Брауном в основу созданной им теории движения Луны.

Уравнения вариационной кривой имеют здесь такой вид:

$$\begin{aligned} x/a &= +0,99130 & 42530 & 38460 \cos \tau + \\ & +0,00151 & 58712 & 70049 \cos 3\tau + \\ & +0,00000 & 58811 & 16971 \cos 5\tau + \\ & +0,00000 & 00300 & 43916 \cos 7\tau + \\ & +0,00000 & 00001 & 75332 \cos 9\tau + \\ & +0,00000 & 00000 & 01107 \cos 11\tau + \\ & +0,00000 & 00000 & 00007 \cos 13\tau, \\ y/a &= +1,00869 & 57469 & 61540 \sin \tau + \\ & +0,00151 & 55436 & 89077 \sin 3\tau + \\ & +0,00000 & 58761 & 96185 \sin 5\tau + \\ & +0,00000 & 00300 & 19348 \sin 7\tau + \\ & +0,00000 & 00001 & 75204 \sin 9\tau + \\ & +0,00000 & 00000 & 01107 \sin 11\tau + \\ & +0,00000 & 00000 & 00007 \sin 13\tau. \end{aligned}$$

Формула (14.6) гл. XV дает

$$a/a = 0,99909 \quad 31419 \quad 75298.$$

Наконец, формулы (3.5), служащие для вычисления радиуса-вектора и долготы, имеют здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} r \cos(v - \lambda) = a [& 1 - 0,00718 \quad 00394 \quad 81977 \cos 2\tau + \\ & + 0,00000 \quad 60424 \quad 47064 \cos 4\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00324 \quad 92024 \cos 6\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00001 \quad 87552 \cos 8\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00000 \quad 01171 \cos 10\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00000 \quad 00008 \cos 12\tau], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} r \sin(v - \lambda) = a [& * + 0,01021 \quad 14544 \quad 41102 \sin 2\tau + \\ & + 0,00000 \quad 57148 \quad 66093 \sin 4\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00275 \quad 71239 \sin 6\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00001 \quad 62985 \sin 8\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00000 \quad 01042 \sin 10\tau + \\ & + 0,00000 \quad 00000 \quad 00007 \sin 12\tau]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти выражения показывают, что все возмущения, вводимые в радиус-вектор и долготу присутствием в уравнениях (3.1) величины m , являются π -периодическими функциями τ , т. е. вариационными неравенствами.

§ 4. Вариационные орбиты

Вариационная кривая представляет частное решение уравнений (3.1), зависящее только от одной произвольной постоянной, а именно от начала счета τ .

Чтобы достаточно приблизиться к реальному движению Луны, необходимо взять более общее решение уравнений (3.1), нежели вариационная кривая. В самом деле, при $m=0$, когда эти уравнения обращаются в уравнения задачи двух тел и поэтому дают для Луны эллиптическую орбиту, вариационная кривая обращается, как мы видели, в окружность. Таким образом, вариационную кривую можно рассматривать как круговую орбиту Луны, деформированную притяжением Солнца.

Общее решение уравнений (3.1), заключающее четыре произвольные постоянные, назовем вариационной орбитой. Наша задача заключается прежде всего в нахождении таких вариационных орбит, которые при $m=0$ обращаются в эллиптические орбиты с очень малыми эксцентриситетами. Будем считать, что квадратом эксцентриситета можно пренебречь. Соот-

ветствующая вариационная орбита даст неравенства порядка первой степени эксцентриситета лунной орбиты.

Обозначим через x, y координаты произвольной точки P вариационной кривой (3.2), а через $x + \delta x, y + \delta y$ координаты точки P' близкой вариационной орбиты для того же значения τ . Приращения $\delta x, \delta y$ будем рассматривать как величины бесконечно малые, т. е. будем пренебрегать квадратами и произведениями этих величин.

Введя для сокращения письма обозначение $D \equiv d/d\tau$, напишем уравнения (3.1) так:

$$D^2x - 2mDy = \partial F/\partial x; \quad D^2y + 2mDx = \partial F/\partial y, \quad (4.1)$$

где

$$F = \kappa r^{-1} + \frac{3}{2} m^2 x^2.$$

Подставим в уравнения (4.1) координаты точек P' и P ; почленное вычитание полученных равенств даст

$$D^2\delta x - 2mD\delta y = \frac{\partial}{\partial x} \delta F; \quad D^2\delta y + 2mD\delta x = \frac{\partial}{\partial y} \delta F, \quad (4.2)$$

где

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y.$$

Обозначим через V скорость точки P . Тогда

$$V^2 = (Dx)^2 + (Dy)^2, \quad (4.3)$$

$$Dx = V \cos \psi, \quad Dy = V \sin \psi, \quad (4.4)$$

где через ψ обозначен угол, образуемый скоростью с осью x .

Вместо $\delta x, \delta y$ примем за неизвестные тангенциальное и нормальное смещения точки P' относительно P . Обозначив эти смещения соответственно через δT и δN , будем иметь

$$\delta x = \delta T \cos \psi - \delta N \sin \psi; \quad \delta y = \delta T \sin \psi + \delta N \cos \psi. \quad (4.5)$$

Интеграл Якоби для уравнений (4.1) имеет вид

$$V^2 = 2F - C.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только тех смежных орбит, для которых постоянная C имеет такое же значение, как для вариационной кривой. При этом условии применение к интегралу Якоби операции, приведенной от уравнений (4.1) к соотношениям (4.2), дает

$$Dx \cdot D\delta x + Dy \cdot D\delta y = \delta F. \quad (4.6)$$

Подставим в это равенство выражения (4.4) и (4.5). Так как

$$\left. \begin{aligned} D\delta x &= D\delta T \cos \psi - \delta T \sin \psi D\psi - D\delta N \sin \psi + \delta N \cos \psi D\psi, \\ D\delta y &= D\delta T \sin \psi + \delta T \cos \psi D\psi + D\delta N \cos \psi - \delta N \sin \psi D\psi, \end{aligned} \right\} (4.7)$$

то соотношение (4.6) заменится таким:

$$V(D\delta T - \delta N D\psi) = \delta F. \quad (4.8)$$

С другой стороны, из равенств (4.4) находим

$$V^2 D\psi = D^2 y D x - D^2 x D y,$$

или, пользуясь уравнениями (4.1) и учитывая (4.3),

$$V^2 D\psi = -2mV^2 + \frac{\partial F}{\partial y} D x - \frac{\partial F}{\partial x} D y.$$

Подставим сюда выражения (4.4). Так как

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial y} \cos \psi - \frac{\partial F}{\partial x} \sin \psi; \quad \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \psi + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \psi, \quad (4.9)$$

то это даст

$$V(D\psi + 2m) = \frac{\partial F}{\partial N}. \quad (4.10)$$

Дифференцирование интеграла Якоби дает

$$VDV = DF,$$

а так как, на основании (4.4) и (4.9),

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} D x + \frac{\partial F}{\partial y} D y = V \frac{\partial F}{\partial T},$$

то

$$DV = \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (4.11)$$

Вернемся теперь к соотношению (4.8), которое можно написать так:

$$V(D\delta T - \delta N \cdot D\psi) = \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial N} \delta N.$$

При помощи соотношений (4.10) и (4.11) исключим отсюда частные производные функции F . Это даст уравнение

$$D\delta T - V^{-1}DV \cdot \delta T = 2(D\psi + m)\delta N, \quad (4.12)$$

устанавливающее зависимость между смещениями δT и δN .

Обратимся теперь к уравнениям (4.2). Если их умножить на $-\sin \psi$ и $+\cos \psi$, а затем сложить, то получим, учитывая (4.9),

$$-\sin \psi D^2 \delta x + \cos \psi D^2 \delta y + [\sin \psi D \delta y + \cos \psi D \delta x] = \\ = \frac{\partial \delta F}{\partial y} \cos \psi - \frac{\partial \delta F}{\partial x} \sin \psi = \frac{\partial \delta F}{\partial N}. \quad (4.13)$$

Формулы (4.7) показывают, что

$$\sin \psi D \delta y + \cos \psi D \delta x = D \delta T - \delta N \cdot D \psi.$$

Эти же формулы показывают, что

$$-\sin \psi D \delta x + \cos \psi D \delta y = D \delta N + \delta T \cdot D \psi.$$

Дифференцируя это равенство и снова пользуясь формулами (4.7), получим

$$-\sin \psi D^2 \delta x + \cos \psi D^2 \delta y = D^2 \delta N + \\ + 2D \delta T \cdot D \psi - \delta N (D \psi)^2 + \delta T \cdot D^2 \psi.$$

Все эти преобразования позволяют заменить уравнение (4.13) таким:

$$[D^2 - (D \psi)^2 - 2m D \psi] \delta N + D^2 \psi \cdot \delta T + 2(D \psi + m) D \delta T = \frac{\partial \delta F}{\partial N}. \quad (4.14)$$

Приведение этого уравнения к нужному нам виду начнем с преобразования его второй части. Прежде всего мы можем написать:

$$\frac{\partial \delta F}{\partial N} = \delta \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T} \delta T. \quad (4.15)$$

Дифференцирование первого из равенств (4.9) дает

$$D \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\partial F}{\partial T} D \psi + D \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \cos \psi - D \frac{\partial F}{\partial x} \sin \psi = \\ = -\frac{\partial F}{\partial T} D \psi + V \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \cos \psi \sin \psi + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos 2\psi \right].$$

Но повторное применение формул (4.9) показывает, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \cos \psi \sin \psi + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cos 2\psi.$$

Поэтому

$$D \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{\partial F}{\partial T} D \psi + V \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T}.$$

Это соотношение позволяет представить формулу (4.15)

в таком виде:

$$\frac{\partial \delta F}{\partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{\delta T}{V} \left(D \frac{\partial F}{\partial N} + \frac{\partial F}{\partial T} D\psi \right).$$

Воспользовавшись формулами (4.10) и (4.11), легко найдем, что

$$\frac{\partial \delta F}{\partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + D^2\psi \cdot \delta T + 2(D\psi + m) \frac{DV}{V} \delta T.$$

Таково окончательное выражение правой части уравнения (4.14). Теперь это уравнение можно написать так:

$$\left[D^2 - (D\psi)^2 - 2mD\psi - \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \right] \delta N + 2(D\psi + m) \left(D \delta T - \frac{DV}{V} \delta T \right) = 0.$$

Исключим отсюда δT , воспользовавшись соотношением (4.12). Это даст для нахождения δN уравнение

$$D^2 \delta N + \Theta \delta N = 0, \quad (4.16)$$

где

$$\Theta = 3(D\psi + m)^2 + m^2 - \partial^2 F / \partial N^2. \quad (4.17)$$

После того как решение этого уравнения даст δN , из уравнения (4.12) получим δT . Этим заканчивается нахождение орбит, близких к вариационной кривой. Так как решение уравнений (4.16) и (4.12) вводит три новые произвольные постоянные в дополнение к той, которая уже была в вариационной кривой, то мы получаем общее решение системы (4.1), т. е. все вариационные орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой (3.2).

Такой способ нахождения решений, бесконечно близких к частному решению, применим ко всем уравнениям вида (4.1), в которых функция F не зависит от времени и для которых, следовательно, существует интеграл Якоби.

Для нахождения величины (4.17) в функции τ могут служить формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sin^2 \psi - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \psi \cos \psi + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos^2 \psi, \\ D\psi &= (D^2 y \cdot Dx - D^2 x \cdot Dy) [(Dx)^2 + (Dy)^2]^{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

легко получаемые из (4.3), (4.4) и (4.9).

Координаты x и y , даваемые формулами (3.2), не меняются или только меняют знак, если τ заменить через $-\tau$, или через $\tau + \pi$. Поэтому выражение

$$F = \kappa (x^2 + y^2)^{-1/2} + \frac{3}{2} m^2 x^2$$

есть четная, π -периодическая функция τ . Этими же свойствами обладают, очевидно, и выражения (4.18). Таким образом,

функция (4.17) разлагается в ряд вида

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + 2q_2 \cos 4\tau + \dots \quad (4.19)$$

Уравнение (4.16), у которого коэффициент Θ имеет вид (4.19), называется уравнением Хилла.

В рассматриваемом нами случае, когда x и y даются рядами (3.2), коэффициенты разложения (4.19) зависят только от m . Хилл [1894] получил для этих коэффициентов следующие выражения:

$$\begin{aligned} q^2 &= 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{255}{32} m^4 + 19m^5 + \frac{80}{3} m^6 + \\ &\quad + \frac{533}{2 \cdot 3^2} m^7 + \frac{11\,230\,225}{2^{13} \cdot 3^3} m^8 + \frac{1\,576\,037}{2^7 \cdot 3^4} m^9 + \\ &\quad + \frac{49\,359\,583}{2^9 \cdot 3^5} m^{10} + \frac{720\,508\,007}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5} m^{11} + \dots, \\ q_1 &= -\frac{15}{2} m^2 - \frac{57}{4} m^3 - 11 m^4 - \frac{23}{2 \cdot 3} m^5 - \frac{68\,803}{2^9 \cdot 3^2} m^6 - \\ &\quad - \frac{1\,792\,417}{2^{10} \cdot 3^3} m^7 - \frac{7\,172\,183}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5} m^8 - \frac{596\,404\,499}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2} m^9 - \\ &\quad - \frac{2\,641\,291\,011\,773}{2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5^3} m^{10} + \dots, \\ q_2 &= +\frac{111}{16} m^4 + \frac{1397}{2^6} m^5 + \frac{8807}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} m^6 + \frac{319\,003}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^7 + \\ &\quad + \frac{252\,382\,507}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3} m^8 + \dots, \\ q_3 &= -\frac{11\,669}{2^9} m^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.20)$$

Однако в тех случаях, когда требуется особенно большая точность, употребление численного метода (§ 13 гл. XV) гораздо скорее ведет к цели. Именно таким путем Хилл получил для указанного выше значения m (§ 3) разложение:

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{array}{r} 1,15884 \quad 39395 \quad 96583 \quad - \\ -0,11408 \quad 80374 \quad 93807 \cos 2\tau + \\ +0,00076 \quad 64759 \quad 95109 \cos 4\tau - \\ -0,00001 \quad 83465 \quad 77790 \cos 6\tau + \\ +0,00000 \quad 01088 \quad 95009 \cos 8\tau - \\ -0,00000 \quad 00020 \quad 98671 \cos 10\tau + \\ +0,00000 \quad 00000 \quad 12103 \cos 12\tau - \\ -0,00000 \quad 00000 \quad 00211 \cos 14\tau. \end{array} \end{aligned}$$

Уравнение Хилла приобрело впоследствии большое значение в математической физике и явилось предметом многих исследований. Мы изложим в следующих параграфах решение этого уравнения, данное Хиллом [1877].

§ 5. Решение уравнения Хилла

Уравнение Хилла имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \Theta x = 0, \quad (5.1)$$

где

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + 2q_2 \cos 4\tau + \dots \quad (5.2)$$

есть π -периодическая функция.

Рассмотрим прежде всего некоторые свойства этого уравнения, являющиеся частными случаями свойств, присущих линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Эти свойства являются следствием того факта, что каждому решению $x(\tau)$ уравнения (5.1) соответствует другое решение, имеющее вид $x(\tau + \pi)$.

Таким образом, если через $g(\tau)$ и $h(\tau)$ обозначить линейно независимые решения уравнения (5.1), то должны иметь место равенства

$$\left. \begin{aligned} g(\tau + \pi) &= \alpha g(\tau) + \beta h(\tau), \\ h(\tau + \pi) &= \gamma g(\tau) + \delta h(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не зависят от τ .

Покажем, что уравнение (5.1) имеет решение $F(\tau)$, удовлетворяющее условию

$$F(\tau + \pi) = \nu F(\tau), \quad (5.4)$$

где ν — постоянный множитель.

Полагая

$$F(\tau) = Ag(\tau) + Bh(\tau), \quad (5.5)$$

найдем, что A, B и ν должны удовлетворять соотношению (аргумент τ опускаем)

$$A(\alpha g + \beta h) + B(\gamma g + \delta h) = \nu(Ag + Bh).$$

Так как g и h линейно независимы, то отсюда следует, что

$$A(\alpha - \nu) + B\gamma = 0, \quad A\beta + B(\delta - \nu) = 0.$$

Поскольку оба коэффициента, A и B , не могут быть равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} \alpha - \nu & \gamma \\ \beta & \delta - \nu \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\nu^2 - (\alpha + \delta)\nu + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0. \quad (5.6)$$

Каждый из корней этого уравнения дает решение, удовлетворяющее условию (5.4).

Легко убедиться, что корни уравнения (5.6) не зависят от выбора частных решений $g(\tau)$ и $h(\tau)$. Возьмем решения, определяемые начальными условиями:

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0; \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.1) дает

$$g \frac{d^2 h}{d\tau^2} - h \frac{d^2 g}{d\tau^2} = 0,$$

откуда, интегрируя и пользуясь начальными условиями, получим

$$g(\tau) h'(\tau) - g'(\tau) h(\tau) = 1.$$

В этом равенстве положим $\tau = \pi$ и воспользуемся соотношениями (5.3). Это даст

$$g(\pi) = \alpha, \quad g'(\pi) = \beta; \quad h(\pi) = \gamma, \quad h'(\pi) = \delta, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Таким образом, корни уравнения (5.6) можно обозначить через ν и ν^{-1} , причем $\nu + \nu^{-1} = \alpha + \delta$.

С другой стороны, равенство (5.4) при $\tau = 0$ и $\tau = -\pi$ дает

$$F(\pi) = \nu F(0), \quad F(-\pi) = \nu^{-1} F(0),$$

откуда

$$\nu + \nu^{-1} = \frac{F(\pi) + F(-\pi)}{F(0)}.$$

Легко убедиться, что $g(\tau)$ есть четная функция τ , тогда как $h(\tau)$ — нечетная. Поэтому из равенства (5.5) следует, что

$$F(\pi) = Ag(\pi) + Bh(\pi); \quad F(-\pi) = Ag(\pi) - Bh(\pi).$$

Так как, кроме того, $F(0) = A$, то

$$\nu + \nu^{-1} = 2g(\pi), \quad (5.8)$$

откуда

$$\nu = g(\pi) \pm \{[g(\pi)]^2 - 1\}^{1/2}.$$

В рассматриваемом нами случае, когда коэффициенты ряда (5.2) даются формулами (4.20), уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left(1 + 2m - \frac{1}{2}m^2 + \dots - 15m^2 \cos 2\tau - \dots\right) x = 0.$$

Таким образом,

$$g(\tau) = \cos(1+m)\tau + O(m^2)$$

и потому $|g(\pi)| < 1$, если только $|m|$ достаточно мало. В этом случае, имеющем место для Луны, целесообразно положить

$$\nu = \exp(i\pi) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

где через c обозначено вещественное число. Для малых значений $|m|$ это число близко к единице.

Очевидно,

$$\exp [ic(\tau + \pi)] = v \exp (ic\tau),$$

откуда следует, что выражение

$$\Phi(\tau) = \frac{F(\tau)}{\exp(ic\tau)}$$

является π -периодической функцией τ .

Поэтому, введя вместо τ переменную

$$\zeta = \exp(i\tau),$$

будем иметь

$$\Phi(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k},$$

а решение уравнения Хилла, удовлетворяющее условию (5.4), примет вид

$$x(\tau) = \Phi(\tau) \exp(ic\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+c}. \quad (5.9)$$

Поскольку уравнение (5.1) не меняется при замене τ через $-\tau$, функция $x(-\tau)$ будет другим частным решением этого уравнения. Решения $x(\tau)$ и $x(-\tau)$ образуют, как легко проверить, фундаментальную систему во всех случаях, кроме тех, когда c есть целое число.

Таким образом, во всех интересующих нас случаях полное решение уравнения Хилла приводится к нахождению величины c и коэффициентов b_k , входящих в выражение (5.9).

Примечание I. Уравнение (5.8) показывает, что для нахождения величины c достаточно вычислить значения функции $g(\tau)$, определяемой уравнением (5.1) и начальными условиями (5.7), в интервале $[0, \pi]$. Для этого могут быть использованы методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Примечание II. Когда показатель c в выражении (5.9) имеет вещественное значение, вариационная кривая является устойчивым периодическим решением задачи Хилла. Такого рода случай имеет место, как уже было отмечено, при изучении движения Луны.

§ 6. Уравнение, дающее показатель c

Если в уравнении Хилла (5.1) взять за независимую переменную ζ , то оно примет вид

$$-\zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \frac{dx}{d\zeta} \right) + \Theta x = 0, \quad (6.1)$$

причем

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + \dots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_n \cos 2n\tau = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_n \zeta^{2n},$$

где $q_0 = q^2$, $q_{-h} = q_h$. Этот ряд мы будем считать абсолютно сходящимся.

Подстановка выражения (5.9) в (6.1) дает

$$-\sum_k b_k (2k + c)^2 \zeta^{2k+c} + \sum_h \sum_i q_h b_i \zeta^{2h+2i+c} = 0.$$

Приравняв нулю коэффициент при ζ^{2k+c} , получим систему уравнений, которую можно написать так:

$$[q^2 - (2k + c)^2] b_k + \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{k-i} b_i = 0 \quad (6.2)$$

$$(k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots; i \neq k).$$

Несмотря на то, что мы имеем здесь бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных b_k , Хилл применил к этой системе теоремы, доказанные для конечных систем линейных уравнений. Законность такого применения в рассматриваемом случае была обоснована Пуанкаре, который развил с этой целью теорию бесконечных определителей.

Рассмотрим прежде всего тот простейший частный случай, когда $q_1 = q_2 = \dots = 0$. Здесь уравнения (6.2) имеют вид

$$[q^2 - (2k + c)^2] b_k = 0.$$

Единственное решение этой системы, в котором не все коэффициенты b_k равны нулю, таково:

$$c = -2n \pm q; \quad b_k = 0 \quad (k \neq n)$$

где n — произвольное целое число.

Уравнение Хилла имеет в этом случае два решения,

$$b_n \zeta^q, \quad b_n \zeta^{-q},$$

образующие фундаментальную систему.

Обратимся теперь к интересующему нас случаю, когда q_1, q_2, \dots не равны нулю, но очень малы и быстро стремятся к нулю. Здесь ни одно из выражений

$$q^2 - (2k + c)^2$$

не равно нулю и уравнения (6.2) можно написать так:

$$b_k + \sum_i' \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k + c)^2} b_i = 0. \quad (6.3)$$

Положим

$$a_{k, k} = \delta_{k, k}, \quad a_{k, l} = \delta_{k, l} + \frac{q_{k-l}}{q^2 - (2k+c)^2} \quad (i \neq k),$$

где, как обычно,

$$\delta_{k, k} = 1, \quad \delta_{k, l} = 0 \quad (i \neq k).$$

Уравнения (6.3) примут тогда вид

$$\sum_i a_{k, i} b_i = 0. \quad (6.4)$$

Если двойной ряд $\sum_{k, i} |a_{k, i} - \delta_{k, i}|$ сходится, то бесконечный определитель, составленный из коэффициентов $a_{k, i}$ системы (6.4), называется нормальным. Пуанкаре показал, что системы (6.4), имеющие нормальный определитель, обладают в отношении ограниченных систем решений теми же свойствами, что и конечные системы. Система решений называется ограниченной, если существует такое число A , что $|b_k| < A$.

Легко убедиться, что система (6.4) имеет нормальный определитель. В самом деле, так как

$$\sum_{k, l} |a_{k, l} - \delta_{k, l}| < 2 \sum_j |q_j| \sum_k \left| \frac{1}{q^2 - (2k+c)^2} \right|,$$

где оба стоящие справа ряда сходятся, то и двойной ряд сходится.

Таким образом, система (6.4) только в том случае имеет решение, не равное тождественно нулю, когда определитель, составленный из коэффициентов $a_{k, i}$, равен нулю. Обозначим этот определитель через $\Delta(c)$.

Стоящая перед нами задача нахождения функции

$$x = \sum b_k z^{2k+c},$$

удовлетворяющей уравнению Хилла, распадается на две. Сначала надо найти корни уравнения

$$\Delta(c) = 0. \quad (6.5)$$

Затем для полученных значений c из уравнений (6.4) надо найти коэффициенты b_k .

Рассмотрим функцию $\Delta(z)$ комплексного переменного z . Легко убедиться, что эта функция голоморфна для всех значений z , кроме

$$z = \pm q - 2k. \quad (6.6)$$

В самом деле, для всех значений z , кроме (6.6), определитель $\Delta(z)$ является нормальным. Он является поэтому пределом, к которому равномерно сходится последовательность конеч-

ных определителей, вырезаемых из бесконечного и симметричных относительно центрального члена $a_{0,0}$. Но каждый такой конечный определитель есть голоморфная функция z .

Итак, единственные точки, которые могут быть особыми, это точки (6.6). Покажем, что каждая из них является для функции $\Delta(z)$ полюсом первого порядка.

В самом деле, рассмотрим строку

$$\dots, \frac{q_1}{q^2 - (2k+z)^2}, 1, \frac{q_1}{q^2 - (2k+z)^2}, \dots \quad (6.7)$$

определителя $\Delta(z)$. Каждый член этой строки, кроме центрального, имеет в точках (6.6) полюс первого порядка. Для членов всех остальных строк эти точки являются обыкновенными. Но при разворачивании определителя $\Delta(z)$ мы получим сходящийся ряд, каждый член которого будет иметь множителем один и только один член строки (6.7).

Заметим, далее, что мероморфная функция $\Delta(z)$ обладает следующими свойствами:

$$\Delta(-z) = \Delta(z); \quad \Delta(z+2) = \Delta(z). \quad (6.8)$$

Четность этой функции следует из того, что строка (6.7) не меняется при одновременном изменении знаков k и z . С другой стороны, при замене z через $z+2$ результат исключения b_k из уравнений (6.4) не меняется, ибо от замены k на $k-1$ эта система не меняется, вследствие чего, если c есть корень уравнения (6.5), то $c+2$ будет также удовлетворять этому уравнению.

Отсюда следует, что все нули функции $\Delta(z)$ даются равенством

$$z = \pm c - 2k, \quad (6.9)$$

где k — произвольное целое число.

Отметим еще одно свойство этой функции. Положим $z = x + y\sqrt{-1}$ и заставим y стремиться к $\pm\infty$. Все члены строки (6.7), за исключением центрального, равного единице, обратятся в нули. В пределе все члены определителя, кроме стоящих на главной диагонали, обратятся в нули. Таким образом, при $y \rightarrow \pm\infty$ будем иметь

$$\lim \Delta(x + y\sqrt{-1}) = 1.$$

Покажем, что рассмотренные нами свойства достаточны для того, чтобы найти функцию $\Delta(z)$.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$(\cos \pi z - \cos \pi c) / (\cos \pi z - \cos \pi q),$$

имеющую те же самые полюса (6.6) и те же самые нули (6.9), что и функция $\Delta(z)$. Легко убедиться, что при $y \rightarrow \pm\infty$ эта функция тоже стремится к единице.

Из всего сказанного следует, что отношение рассматриваемых функций, равное

$$\Delta(z) (\cos \pi z - \cos \pi q) / (\cos \pi z - \cos \pi c)$$

есть целая функция с периодом 2, стремящаяся к единице, когда $y \rightarrow \pm\infty$. Такая функция, остающаяся ограниченной на всей плоскости переменного z , равняется, как известно, постоянной величине, а эта последняя необходимо равняется единице.

Итак,

$$\Delta(z) = \frac{\cos \pi z - \cos \pi c}{\cos \pi z - \cos \pi q}.$$

При $z=0$ это равенство дает

$$\sin^2(\pi c/2) = \Delta(0) \sin^2(\pi q/2). \quad (6.10)$$

Таким образом, задача нахождения корней уравнения (6.5) приведена к гораздо более простой задаче вычисления $\Delta(0)$, так как решение уравнения (6.10) не представляет уже никаких трудностей.

Делая $z=1/2$, или $z=1$, или $z=q$, получим другие, аналогичные (6.10), уравнения, также могущие служить для нахождения величины c .

§ 7. Вычисление определителя $\Delta(0)$

Положим

$$\beta_k = 1/(q^2 - 4k^2).$$

Тогда определитель $\Delta(0)$ примет вид

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \beta_{k-1}q_1 & \beta_{k-1}q_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \beta_k q_1 & 1 & \beta_k q_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \beta_{k+1}q_2 & \beta_{k+1}q_1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (7.1)$$

Формулы (4.20) показывают, что при рассматриваемых нами малых значениях $|m|$ коэффициент q_α есть величина порядка 2α относительно m .

Покажем, что справедливо следующее утверждение:

Если $Aq_\alpha q_\beta \dots q_\lambda$ есть какой-либо член разложения определителя (7.1), то сумма индексов

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda$$

равна четному числу.

Для доказательства заменим во всех членах выражения (7.1) величины q_α через $q_\alpha z^\alpha$ и покажем, что полученный таким образом определитель, который мы обозначим через $\Delta(0, z)$, есть четная функция z . Действительно, для получения $\Delta(0, -z)$ надо в выражении $\Delta(0, z)$ сначала переменить знаки у всех столбцов через один, затем — у всех строк через одну. А так как число строк и столбцов, меняющих знаки, в каждом из конечных определителей, пределом которых является $\Delta(0, z)$, одинаково, то при такой перемене знаков определитель не изменится.

Отсюда непосредственно вытекает, что разложение определителя (7.1) состоит из членов, порядок каждого из которых относительно m делится на 4.

Так, например, если отбросить члены 12-го порядка, то сумма индексов может равняться только 0, 2, 4, и мы будем иметь

$$\Delta(0) = 1 + Aq^2 + Bq_1^4 + Cq_1^2q_2 + Dq_2^2.$$

Легко видеть, что

$$Aq_1^2 = \sum_k \begin{vmatrix} 0, & \beta_{k-1}q_1 \\ \beta_kq_1, & 0 \end{vmatrix} = -q_1^2 \sum_k \beta_{k-1}\beta_k,$$

$$Bq_1^4 = \sum_k \sum_i \begin{vmatrix} 0, & \beta_{k-1}q_1 \\ \beta_kq_1, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \beta_{i-1}q_1 \\ \beta_iq_1, & 0 \end{vmatrix} = q_1^4 \sum_k \sum_i \beta_{k-1}\beta_k\beta_{i-1}\beta_i.$$

В последнем равенстве k не может равняться $i, i-1, i+1$. Поэтому

$$B = A^2 - \sum_i \beta_{i-1}^2\beta_i^2 - 2 \sum_i \beta_{i-1}\beta_i^2\beta_{i+1}.$$

Коэффициенты A, B, \dots весьма просто выражаются через q . Например,

$$\begin{aligned} A &= - \sum_k \beta_{k-1}\beta_k = - \sum_k \frac{1}{16 \left[\frac{1}{4}q^2 - (k-1)^2 \right] \left[\frac{1}{4}q^2 - k^2 \right]} = \\ &= \sum_k \frac{1}{16q(q+1)} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}q+k} + \frac{1}{\frac{1}{2}q-k+1} \right) - \\ &- \sum_k \frac{1}{16q(q-1)} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}q-k} - \frac{1}{\frac{1}{2}q+k-1} \right) = \\ &= \sum_n \frac{1}{4q(1-q^2)} \frac{1}{\frac{1}{2}q+k} = \frac{1}{4q(1-q^2)} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}q} + q \sum_1^\infty \frac{1}{\frac{1}{4}q^2 - k^2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{4q(1-q^2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}. \end{aligned}$$

Хилл [1877] вычислил все члены разложения $\Delta(0)$, порядок которых относительно m меньше 16. Полученный им результат таков:

$$\begin{aligned} \Delta(0) = & 1 + \frac{\pi}{4q} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2} \left[\frac{q_1^2}{1-q^2} + \frac{q_2^2}{4-q^2} + \frac{q_3^2}{9-q^2} \right] + \\ & + \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2} \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{9}{2(4-q^2)} \right] q_1^4 + \\ & + \frac{3\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{8q(1-q^2)(4-q^2)} q_1^2 q_2 + \\ & + \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{128q(1-q^2)^3} \left[\left(-\frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{9}{2(4-q^2)} \right) \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{25}{8q^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{q^4} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{4}{(1-q^2)^2} - \frac{9}{8(4-q^2)} + \frac{9}{(4-q^2)^2} - \frac{4}{9-q^2} - \frac{\pi^2}{3q^2} \right] q_1^6 + \\ & + \frac{3\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2(4-q^2)} \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{4-q^2} + \frac{20}{3(9-q^2)} \right] q_1^4 q_2 + \\ & + \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{15q(1-q^2)(4-q^2)} \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{2}{4-q^2} + \frac{10}{9-q^2} \right] q_1^2 q_2^2 + \\ & + \frac{(7-3q^2) \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{4q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)} q_1 q_2 q_3 + \frac{5\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{16q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)} q_1^3 q_3. \end{aligned}$$

Подставив сюда значения q, q_1, q_2, \dots , соответствующие принятому значению m (§ 3), Хилл получил:

Член нулевого порядка	+ 1,00000 00000 00000 0
Член 4-го порядка	+ 0,00180 46110 93422 7
Сумма членов 8-го порядка	+ 0,00000 01800 63109 9
Сумма членов 12-го порядка	+ 0,00000 00000 64478 6
	$\Delta(0) = + 1,00180 47920 21011 2$

Рассмотрение характера убывания членов различных порядков позволяет думать, что первые 13 десятичных знаков при дальнейших приближениях не изменятся.

Решение уравнения (6.10) дает

$$c = 1,07158 32774 160.$$

Если в формулу, дающую $\Delta(0)$, подставить выражения (4.20) для q^2, q_1, q_2, \dots , то можно получить $\Delta(0)$ и c в виде явных

функций m . Хилл нашел, что

$$\begin{aligned}
 c = 1 + m - \frac{3}{4} m^2 - \frac{201}{32} m^3 - \frac{2367}{2^7} m^4 - \frac{111\,749}{2^{11}} m^5 - \\
 - \frac{4\,095\,991}{2^{13} \cdot 3} m^6 - \frac{332\,532\,037}{2^{16} \cdot 3^2} m^7 - \\
 - \frac{15\,106\,211\,789}{2^{18} \cdot 3^3} m^8 - \frac{5\,975\,332\,916\,861}{2^{23} \cdot 3^4} m^9 - \\
 - \frac{1\,547\,804\,933\,375\,567}{2^{26} \cdot 3^5 \cdot 5} m^{10} - \frac{818\,293\,211\,836\,767\,367}{2^{28} \cdot 3^6 \cdot 5^2} m^{11} - \dots \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

В указанном выше мемуаре этот ряд был дан без двух последних членов. Нахождение членов с m^{10} и m^{11} составляет содержание особого мемуара [Хилл, 1894].

§ 8. Вычисление коэффициентов

Для нахождения коэффициентов b_k , входящих в решение

$$x(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+1},$$

мы имеем систему уравнений (6.2), которую можно написать так:

$$b_k + \sum_i' \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k+c)^2} b_i = 0. \quad (8.1)$$

Здесь i и k принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем $i \neq k$.

После того как показатель c найден, решение системы (8.1) не представляет затруднений, если, как это предполагается, коэффициенты b_k ограничены по абсолютной величине, а $|m|$ есть достаточно малая величина. В этом случае каждый член уравнения (8.1) будет быстро стремиться к нулю при возрастании абсолютной величины $|q^2 - (2k+c)^2|$ знаменателя и абсолютной величины $|k-i|$ индекса коэффициента q_{k-i} . Поэтому искомые коэффициенты b_k также будут быстро приближаться к нулю при возрастаниях $|k|$.

Замена бесконечных уравнений (8.1) конечными, содержащими наиболее значительные члены, позволяет легко получить численные значения b_k . Для нахождения общих выражений этих коэффициентов можно поступить следующим образом.

В определителе $\Delta(z)$, состоящем из строк (6.7), заменим нулевую строку, соответствующую значению $k=0$, неопределенными величинами

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

Полученный таким образом новый определитель, который мы обозначим через $D(z)$, будет сходиться, если выполняется условие $|x_i| < A$, где A не зависит от i .

Развертывание $D(z)$ по элементам нулевой строки дает

$$D(z) = \dots + x_{-1}B_{-1}(z) + x_0B_0(z) + x_1B_1(z) + \dots, \quad (8.2)$$

где $B_k(z)$ — мероморфные функции z , имеющие те же полюсы (6.6), как и функция $\Delta(z)$, за исключением только точек $z = \pm q$.

Легко убедиться, что

$$b_k = B_k(c). \quad (8.3)$$

Действительно, если в определителе $D(c)$ положить

$$x_i = \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k+c)^2} \quad (8.4)$$

для всех $i \neq k$, а x_k заменить единицей, то получим $D(c) = 0$. В самом деле, если $k \neq 0$, то определитель $D(c)$ будет иметь две одинаковые строки; если же $k = 0$, то он обратится в $\Delta(c)$, а потому и в этом случае будет равняться нулю. Но при подстановке (8.4) выражение (8.2) обращается в (8.1), что и доказывает справедливость формулы (8.3).

Можно показать, что коэффициент b_k разлагается в ряд по целым положительным степеням m , причем ряд этот начинается членом степени $|2k|$ или $|2k|-1$.

§ 9. Важнейшие неравенства движения Луны

В § 5 было показано, что общее решение уравнения Хилла (4.16) можно представить в форме

$$\delta N = C_1 \sum b_k \zeta^{2k+c} + C_2 \sum b_k \zeta^{-2k-c},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Это решение напомним так:

$$\delta N = (C_1 + C_2) \left[\sum_0^{\infty} b_k \cos(2k+c)\tau + \sum_1^{\infty} b_{-k} \cos(2k-c)\tau \right] + \\ + i(C_1 - C_2) \left[\sum_0^{\infty} b_k \sin(2k+c)\tau - \sum_1^{\infty} b_{-k} \sin(2k-c)\tau \right].$$

Положив

$$(C_1 + C_2)b_0 = A \cos \omega; \quad i(C_1 - C_2)b_0 = -A \sin \omega,$$

где A и ω — новые произвольные постоянные, получим

$$A^{-1}b_0 \delta N = \sum_0^{\infty} b_k \cos[(2k+c)\tau + \omega] + \sum_1^{\infty} b_{-k} \cos[(2k-c)\tau - \omega]. \quad (9.1)$$

Вычислим первые коэффициенты b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2} , ограничившись членами не выше второго порядка.

Формулы (4.20) и (7.2) дают

$$q_1 = q_{-1} = -\frac{15}{2} m^2 - \frac{57}{4} m^3 - 11m^4 - \dots,$$

$$q^2 - c^2 = \frac{225}{16} m^3 + \frac{3645}{64} m^4 + \dots,$$

$$q^2 - (c + 2)^2 = -8 - 4m + 3m^2 + \dots;$$

$$q^2 - (c - 2)^2 = 4m - 3m^2 + \dots,$$

$$q^2 - (c + 4)^2 = -24 - 8m + \dots;$$

$$q^2 - (c - 4)^2 = -8 + 8m - 6m^2 + \dots$$

Система уравнений (6.2) принимает здесь такой вид:

$$[q^2 - c^2] b_0 + q_1 b_1 + q_{-1} b_{-1} = 0,$$

$$[q^2 - (c + 2)^2] b_1 + q_1 b_0 = 0; \quad [q^2 - (c - 2)^2] b_{-1} + q_{-1} b_0 = 0,$$

$$[q^2 - (c + 4)^2] b_2 + q_1 b_1 = 0; \quad [q^2 - (c - 4)^2] b_{-2} + q_{-1} b_{-1} = 0.$$

Таким образом, с принятой нами точностью получаем

$$b_1 = -\frac{15}{16} m^2 b_0; \quad b_{-1} = \left(\frac{15}{8} m + \frac{159}{32} m^2 \right) b_0; \quad b_2 = b_{-2} = 0.$$

Подстановка этих значений в (9.1) дает

$$A^{-1} \delta N = -\frac{15}{16} m^2 \cos [(c + 2) \tau + \omega] + \cos (c\tau + \omega) + \\ + \left(\frac{15}{8} m + \frac{159}{32} m^2 \right) \cos [(c - 2) \tau - \omega] + \dots \quad (9.2)$$

Обратимся теперь к уравнению (4.12), служащему для нахождения δT . С принятой нами точностью это уравнение имеет вид

$$\frac{d \delta T}{d\tau} + \frac{7}{2} m^2 \sin 2\tau \cdot \delta T = 2 \left(1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) \delta N. \quad (9.3)$$

Чтобы еще больше упростить дальнейшие выкладки, опустим в (9.2) и (9.3) члены второго порядка. Эти соотношения дадут

$$\delta N = A \cos (c\tau + \omega) + \frac{15}{8} A m \cos [(c - 2) \tau + \omega], \quad (9.4)$$

$$\delta T = 2A \sin (c\tau + \omega) - \frac{15}{4} A m \sin [(c - 2) \tau + \omega] + B, \quad (9.5)$$

$$c = 1 + m - \frac{3}{4} m^2,$$

где через B обозначена новая постоянная.

Метод, примененный нами для нахождения δN и δT (§ 4), показывает, что мы должны рассматривать A и B как величины бесконечно малые.

Перейдем к вычислению величин δx и δy при помощи формул (4.5). Уравнения вариационной кривой (3.3) и соотношения (4.4) показывают, что

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \tau + O(m^2).$$

Таким образом, в пределах принятой точности имеем

$$\delta x = -\delta T \sin \tau - \delta N \cos \tau; \quad \delta y = \delta T \cos \tau - \delta N \sin \tau.$$

Подставив сюда выражения (9.4) и (9.5), прибавим полученные значения δx , δy к координатам x , y , даваемым формулами (3.3). Это даст следующие выражения для возмущенных координат Луны:

$$\begin{aligned} x = & a \cos \tau - B \sin \tau - am^2 \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \tau \right) \cos \tau - \\ & - A \left\{ \frac{15}{8} m \cos [(c-2)\tau + \omega] \cos \tau + \cos (c\tau + \omega) \cos \tau - \right. \\ & \left. - \frac{15}{4} m \sin [(c-2)\tau + \omega] \sin \tau + 2 \sin (c\tau + \omega) \sin \tau \right\}, \quad (9.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = & a \sin \tau + B \cos \tau + am^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos^2 \tau \right) \sin \tau - \\ & - A \left\{ \frac{15}{8} m \cos [(c-2)\tau + \omega] \sin \tau + \cos (c\tau + \omega) \sin \tau + \right. \\ & \left. + \frac{15}{4} m \sin [(c-2)\tau + \omega] \cos \tau - 2 \sin (c\tau + \omega) \cos \tau \right\}. \quad (9.7) \end{aligned}$$

Бесконечно малую постоянную B заменим постоянной $\delta\tau_0$, также бесконечно малой, определяемой равенствами

$$a \cos \tau - B \sin \tau = a \cos (\tau + \delta\tau_0); \quad a \sin \tau + B \cos \tau = a \sin (\tau + \delta\tau_0).$$

Не меняя точности выражений (9.6) и (9.7), мы можем положить $\delta\tau_0 = 0$. В самом деле, в членах, стоящих в первых строках этих выражений, изменится при этом лишь начало счета τ , тогда как все остальные члены изменятся на величины второго порядка относительно A и $\delta\tau_0$.

Чтобы связать введенные нами величины с употребляемыми в астрономии, рассмотрим сначала предельный случай, когда $m=0$, и потому возмущающее действие Солнца исчезает. Выражения (9.6) и (9.7) обращаются здесь, как легко убедиться, в такие:

$$\begin{aligned} x = & a \cos \tau - \frac{3}{2} A \cos \omega + \frac{1}{2} A \cos (2\tau + \omega), \\ y = & a \sin \tau + \frac{3}{2} A \sin \omega + \frac{1}{2} A \sin (2\tau + \omega). \end{aligned}$$

Повернем оси координат на угол ω . Новые координаты

$$x' = x \cos \omega - y \sin \omega, \quad y' = x \sin \omega + y \cos \omega$$

будут равны:

$$x' = -\frac{3}{2} A + a \cos(\tau + \omega) + \frac{1}{2} A \cos 2(\tau + \omega),$$

$$y' = a \sin(\tau + \omega) + \frac{1}{2} A \sin 2(\tau + \omega).$$

Сопоставим эти выражения с формулами, дающими орбитальные координаты в эллиптическом движении (§ 5 гл. VI), а именно:

$$\xi = a(\cos E - e) = a\left(-\frac{3}{2}e + \cos M + \frac{e}{2}\cos 2M + \dots\right),$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = a\left(\sin M + \frac{e}{2}\sin 2M + \dots\right).$$

Тогда получим

$$a = a, \quad A = ae, \quad \tau + \omega = M,$$

причем фигурирующая здесь величина a определяется равенством

$$n^2 a^3 = k^2 (T + L),$$

где через n обозначено найденное из наблюдения среднее движение Луны.

В возмущенном движении, когда $m \neq 0$, имеем (§ 14 гл. XV и § 7 гл. XXI)

$$a = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 + \dots\right), \quad (9.8)$$

$$c = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{201}{32}m^3 - \frac{2367}{128}m^4 + \dots, \quad (9.9)$$

причем роль средней аномалии играет величина $\sigma\tau + \omega$. Положим

$$\sigma\tau + \omega = nt + \varepsilon - \Pi, \quad (9.10)$$

где через $nt + \varepsilon$ обозначена средняя долгота Луны, а через Π — долгота перигея.

Дифференцирование этого равенства дает

$$\frac{d\Pi}{dt} = n - c(n - n') = n\left(1 - \frac{c}{1+m}\right). \quad (9.11)$$

Таким образом, та часть движения перигея, которая не зависит от эксцентриситетов Луны и Солнца, будучи выражена в

частях среднего движения Луны n , равна

$$\frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} = \frac{3}{4} m^2 + \frac{177}{32} m^3 + \frac{1659}{2^7} m^4 + \frac{85205}{2^{11}} m^5 + \frac{3073531}{2^{13} \cdot 3} m^6 + \\ + \frac{258\,767\,293}{2^{16} \cdot 3^2} m^7 + \frac{12001004273}{2^{18} \cdot 3^3} m^8 + \frac{4823236506653}{2^{23} \cdot 3^4} m^9 + \\ + \frac{1258410742976387}{2^{26} \cdot 3^5 \cdot 5} m^{10} + \frac{66728\,39226\,79600\,927}{2^{28} \cdot 3^6 \cdot 5^2} m^{11} + \dots \quad (9.12)$$

Величину (9.10), являющуюся одним из главных аргументов лунных неравенств, можно представить в другом виде. Так как τ есть разность средних долгот Луны и Солнца, то

$$\tau = nt + \varepsilon - (n't + \varepsilon') = (n - n')t + \beta,$$

где $\beta = \varepsilon - \varepsilon'$. Поэтому

$$c\tau + \omega = c(n - n')t + c\beta + \omega.$$

Введя, далее, величину

$$c = \frac{c}{1+m} = 1 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{177}{32} m^3 - \dots,$$

будем иметь

$$c\tau + \omega = cnt - \pi, \quad (9.13)$$

где $\pi = -c\beta - \omega$.

Обозначим через r и v радиус-вектор и долготу Луны, а через $v' = n't + \varepsilon'$ среднюю долготу Солнца. Тогда

$$r \cos(v - v') = x, \quad r \sin(v - v') = y, \quad (9.14)$$

где x и y даются формулами (9.6) и (9.7), в которых мы можем, не уменьшая их точности, положить $A = ae$, $B = 0$.

Равенства (9.14), (9.6), (9.7) дают

$$r^2 = a^2 \left\{ 1 - 2e \cos(c\tau + \omega) - 2m^2 \cos 2\tau - \frac{15}{4} me \cos[(c-2)\tau + \omega] \right\}$$

откуда, учитывая (9.8), получим

$$r = a \left\{ 1 - \frac{1}{6} m^2 - e \cos(c\tau + \omega) - \right. \\ \left. - \frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \omega] - m^2 \cos 2\tau \right\}. \quad (9.15)$$

Почленное деление равенств (9.6) и (9.7) на (9.15) приводит к соотношениям:

$$\cos(v - v') = \cos \tau \left\{ 1 - \frac{11}{4} m^2 \sin^2 \tau \right\} + \\ + \sin \tau \left\{ \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] - 2e \sin(c\tau + \omega) \right\},$$

$$\sin(v - v') = \sin \tau \left\{ 1 + \frac{11}{4} m^2 \cos^2 \tau \right\} - \\ - \cos \tau \left\{ \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] - 2e \sin(c\tau + \omega) \right\}.$$

Очевидная комбинация этих равенств дает

$$\begin{aligned} \sin(v - v' - \tau) &= \\ &= \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin [(c - 2)\tau + \omega] + 2e \sin (c\tau + \omega), \end{aligned}$$

откуда, замечая, что

$$v - v' - \tau = v - (nt + \varepsilon),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} v &= nt + \varepsilon + 2e \sin (c\tau + \omega) - \frac{15}{4} me \sin [(c - 2)\tau + \omega] + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau = \\ &= nt + \varepsilon + 2e \sin (cnt - \pi) - \frac{15}{4} me \sin [(cn - 2n + 2n')t - \pi - 2\beta] + \\ &\quad + \frac{11}{8} m^2 \sin [2(n - n')t + 2\beta]. \quad (9.16) \end{aligned}$$

Первые периодические члены в выражениях (9.15) и (9.16) представляют, очевидно, главные части эллиптических неравенств соответствующих координат; вторые периодические члены — главные части эвекции; последние члены дают главные части вариации.

Изложенный метод позволяет найти члены, имеющие множителем e , с точностью до любых степеней m . Однако вычисления быстро усложняются, и в тех случаях, когда нужно принимать во внимание высокие степени m , приходится отказаться от вывода буквенных выражений неравенств и пользоваться численными значениями коэффициентов b_k .

Точно так же для той части движения перигея, которая зависит только от m , формула (9.11) и численное значение c (§ 7) сразу дают

$$\frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} = 0,00857\ 25730\ 04864,$$

где только последний знак не вполне надежен. Заметим, что ряд (9.12), хотя и доведенный Хиллом [1894] до 11-й степени m , не может дать такой точности. В рассматриваемом случае последний написанный член этого ряда, равный 0,00000 01045 25170, еще очень далек от 10^{-15} .

§ 10. Неравенства, зависящие от m и e

В предыдущих параграфах была подробно рассмотрена та часть используемой в настоящее время теории движения Луны, которая была создана Хиллом. Хилл положил в основу теории упрощенную систему дифференциальных уравнений (3.1),

имеющую вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \kappa x r^{-3} - 3m^2 x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \kappa y r^{-3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Исходя из открытого им частного периодического решения системы (10.1), он построил общее решение этой системы, но при существенном ограничении: постоянная интегрирования e в решении Хилла рассматривается как величина бесконечно малая, квадратом которой можно пренебречь (§§ 4—9).

Обобщив метод неопределенных коэффициентов, употребленный Хиллом, Браун снял указанное ограничение и нашел все неравенства в движении Луны, зависящие от m и e , т. е. общее решение системы (10.1). Форма решения, включающего все такие неравенства, была подсказана теорией Понтекулана [1829—1846], в которой рассматриваемые неравенства были получены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a/r &= \sum_i \sum_p B_{i,p} \cos(2i\tau + p\omega), \\ v - n't - \varepsilon' &= \tau + \sum_i \sum_p B'_{i,p} \sin(2i\tau + p\omega), \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

где i меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а $p=0, 1, 2, \dots$

Положим, как мы это уже делали,

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad s = x - y\sqrt{-1}, \quad \zeta = \exp(\tau\sqrt{-1}),$$

и введем опять символ $D \equiv \zeta \frac{d}{d\zeta}$; тогда уравнения (10.1) примут такой вид (§ 11 гл. XV):

$$\left. \begin{aligned} D^2u + 2m Du + \frac{3}{2} m^2(u + s) - \kappa u r^{-3} &= 0, \\ D^2s - 2m Ds + \frac{3}{2} m^2(u + s) - \kappa s r^{-3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Нами было найдено периодическое решение этой системы, представляемое вариационной кривой (§§ 12 и 13 гл. XV)

$$u_0 = a \sum a_k \zeta^{2k+1}; \quad s_0 = a \sum a_{-k-1} \zeta^{2k+1}. \quad (10.4)$$

Решение, бесконечно близкое к решению (10.4), полученное в §§ 4—9, имеет вид

$$u = u_0 + \delta u; \quad s = s_0 + \delta s. \quad (10.5)$$

Соотношения (4.5) дают:

$$2\delta N = [\delta s \cdot \exp(\psi \sqrt{-1}) - \delta u \cdot \exp(-\psi \sqrt{-1})] \sqrt{-1},$$

$$2\delta T = \delta s \cdot \exp(\psi \sqrt{-1}) + \delta u \cdot \exp(-\psi \sqrt{-1}),$$

тогда как соотношения (4.4) можно написать так:

$$V \exp(\psi \sqrt{-1}) = \sqrt{-1} D u_0; \quad V \exp(-\psi \sqrt{-1}) = \sqrt{-1} D s_0. \quad (10.6)$$

Поэтому

$$V \delta u = (\sqrt{-1} \delta T - \delta N) D u_0; \quad V \delta s = (\sqrt{-1} \delta T + \delta N) D s_0. \quad (10.7)$$

Найденное нами общее выражение для δN (§ 5 и § 9) напомним теперь так:

$$\delta N = \zeta_1^{\pm c} \sum b_k \zeta^{2k}, \quad (10.8)$$

где

$$\zeta_1 = \exp[(\tau - \tau_1) \sqrt{-1}],$$

причем через τ_1 обозначена произвольная постоянная.

Соотношение (4.12), связывающее δT и δN , может быть написано следующим образом:

$$V \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta T}{V} \right) = 2 \left(\frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \delta N,$$

а так как формулы (10.6) дают

$$V^2 = - D u_0 \cdot D s_0; \quad 2 \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{D^2 u_0}{D u_0} - \frac{D^2 s_0}{D s_0},$$

то отсюда легко заключить, что δT можно представить в той же форме (10.8), что и δN .

Так как $\delta u + \delta s = 2\delta x$ есть вещественная величина, а $\delta u - \delta s = 2\sqrt{-1}\delta y$ — величина мнимая, то из (10.7) вытекает, что имеют место разложения:

$$\delta u = \zeta_1^{\pm c} \sum b_k \zeta^{2k}; \quad \delta s = \zeta_1^{\mp c} \zeta^{-1} \sum b_k \zeta^{-2k},$$

в которых коэффициенты b_k имеют одинаковые вещественные значения.

Учитывая выражения (10.4), рассматриваемое нами решение (10.5) можно представить рядами:

$$u = a\zeta \sum_k \sum_p A_{k,p} \zeta^{2k} \zeta_1^{pc}; \quad s = a\zeta^{-1} \sum_k \sum_p A_{-k,-p} \zeta^{2k} \zeta_1^{pc}, \quad (10.9)$$

в которых k принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, а p имеет только три значения: $-1, 0, +1$. В частности, если $p=0$, то $A_{k,0} = a_k$.

Если в разложениях (10.9) дать индексу p значения от $-\infty$ до $+\infty$ и вернуться к переменному τ , то получим ряды вида (10.2). Это обстоятельство и навело Брауна на мысль искать общее решение уравнений (10.3) в форме (10.9), распространив суммирование на все целые значения p . Покажем, что в рядах (10.9) коэффициенты A могут иметь такие значения, при которых эти ряды формально удовлетворяют уравнениям (10.3).

Так как

$$D(\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc}) = (2k+1+pc)\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc},$$

$$D(\zeta^{2k+1+pc}) = (2k+1+pc)\zeta^{2k+1+pc},$$

то результат подстановки рядов (10.9) в уравнения (10.3) и приравнивания коэффициентов будет такой же, как если бы мы предварительно положили $\zeta_1 = \zeta$.

Таким образом, выражения (10.9) мы можем заменить более простыми:

$$u = a \sum_k \sum_p A_{k,p} \zeta^{2k+1+pc}; \quad s = a \sum_k \sum_p A_{-k-1,-p} \zeta^{2k+1+pc}. \quad (10.10)$$

Нужно только помнить, что в окончательных результатах $\zeta^{2k+1+pc}$ должно быть заменено на

$$\exp \sqrt{-1} [(2k+1)\tau + pc(\tau - \tau_1)].$$

Подстановка рядов (10.10) в уравнения (10.3) дает для нахождения величины s и коэффициентов A следующую бесконечную систему уравнений:

$$\sum_k \sum_p A_{k,p} \{ [2i+qc, 2k+pc] A_{k-i, p-q} + [2i+qc] A_{i-k-1, q-p} + (2i+qc) A_{-i-k-1, -q-p} \} = 0. \quad (10.11)$$

Символы $[j, h]$, $[j]$ и (h) определяются теми же самыми формулами (13.3), как и раньше (§ 13 гл. XV).

Система (10.11), являющаяся обобщением системы (13.2), рассматривавшейся нами в гл. XV, легко решается способом последовательных приближений. Исходными значениями могут служить $A_{i,0} = a_i$, даваемые системой (13.2), и значение s , найденное выше (§§ 6 и 7). Новое значение s , полученное из уравнений (10.11), будет отличаться от прежнего на ту часть движения перигея, которая зависит от эксцентриситета лунной орбиты.

§ 11. Влияние наклона лунной орбиты

Наклон лунной орбиты к плоскости эклиптики, в которой движется Солнце, настолько мал, что целесообразно изучить сначала частный случай, когда этот наклон равен нулю, а потому и $z=0$. Это было сделано нами в предыдущих параграфах

в предположении, что эксцентриситет орбиты Солнца и его параллакс равны нулю. Сохраняя это предположение, обратимся теперь к изучению пространственного движения Луны, когда координата z не равна тождественно нулю.

Вследствие сделанных ограничений, в исходных уравнениях (2.16) надо положить $\Omega=0$. Если вместо переменных τ, x, y воспользоваться опять переменными ζ, u, s , то первые два из этих уравнений заменятся системой (10.3), тогда как третье уравнение примет вид

$$D^2z - z(m^2 + \kappa r^{-3}) = 0, \quad (11.1)$$

причем

$$r^2 = us + z^2.$$

Если пренебречь величинами порядка z^2 , то уравнения (10.3) не будут содержать z и их общее решение, найденное в предыдущем параграфе, будет выражаться формулами (10.10). В этом случае уравнение (11.1) после подстановки значения $r^2 = us$, вытекающего из формул (10.10), даст соответствующее значение координаты z в функции ζ, m и e .

Ограничимся получением той части координаты z , которая не зависит от e . Сообразно с этим, для u и s возьмем не общие выражения (10.9) или (10.10), а выражения (10.4), т. е. положим

$$u = a \sum a_k \zeta^{2k+1}, \quad s = a \sum a_k \zeta^{-2k-1}. \quad (11.2)$$

В этом случае

$$m^2 + \kappa r^{-3} \sim m^2 + \kappa (us)^{-3/2} \sim \sum M_i \zeta^{2i}, \quad (11.3)$$

причем $M_{-i} = M_i$ и $M_i = 0 (m^{i2i})$, как это следует из формул (11.2).

Таким образом, уравнение (11.1) принимает вид

$$D^2z - z \sum M_i \zeta^{2i} = 0,$$

или

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z(M_0 + 2M_1 \cos 2\tau + 2M_2 \cos 4\tau + \dots) = 0, \quad (11.4)$$

т. е. обращается в уравнение Хилла (§ 4).

Общее решение этого уравнения может быть представлено, как мы видели, в таком виде:

$$z = C_1 \sum z_k \zeta^{2k+g} + C_2 \sum z_k \zeta^{-2k-g}, \quad (11.5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Характеристические показатели g и $-g$ даются здесь уравнением

$$\sin^2(\pi g/2) = \Delta_1(0) \sin^2(\pi \sqrt{2M_0/2}), \quad (11.6)$$

аналогичным (6.10), причем бесконечный определитель $\Delta_1(0)$ получается из $\Delta(0)$ заменой q^2 на M_0 и q_i на M_i . Коэффициенты z_k находятся из уравнений

$$(g + 2k)^2 z_k - \sum_i M_{k-i} z_i = 0, \quad (11.7)$$

аналогичным уравнениям (6.2). Легко видеть, что при $k > 0$

$$z_{-k} = 0 (m^{2k-1}), \quad z_k = 0 (m^{2k}).$$

В выражении (11.5) за постоянные интегрирования вместо C_1 и C_2 можно принять z_0 и такую величину χ , что

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \exp(\chi \sqrt{-1}), \quad C_2 = \frac{-1}{2\sqrt{-1}} \exp(-\chi \sqrt{-1}).$$

Тогда это выражение можно будет написать так:

$$z = z_0 \sin(g\tau + \chi) + 0(m). \quad (11.8)$$

С другой стороны, если обратиться к треугольнику на геоцентрической небесной сфере, образованному эклиптической, орбитой Луны и кругом широт, то легко увидеть, что

$$z = r \sin b = r \sin i \sin(v - \Omega), \quad (11.9)$$

$$z \simeq r \operatorname{tg} b = r \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega), \quad (11.10)$$

где через l и b обозначены эклиптические долготы и широта Луны, а через v — ее долгота в орбите.

В предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики, имеем (§ 3)

$$r = a \left[1 + \dots - \left(m^2 + \frac{7}{6} m^3 + \dots \right) \cos 2\tau + \dots \right], \quad (11.11)$$

$$v = nt + \varepsilon + \left(\frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \dots \right) \sin 2\tau + \dots \quad (11.12)$$

Чтобы получить z с той же точностью, какую дает выражение (11.8), в формулах (11.9) и (11.10) достаточно положить $r = a$, $v = nt + \varepsilon$, или $l = nt + \varepsilon$. Тогда будем иметь

$$z = ak \sin(nt + \varepsilon - \Omega) + 0(m), \quad (11.13)$$

где можно, в пределах принятой точности, считать $k = \operatorname{tg} i$. Эту величину мы и примем, вместо z_0 , за одну из постоянных интегрирования, вводимых решением уравнения (11.1).

Изложенный способ дает для координаты z выражение (11.5), имеющее ошибку $0(k^2)$. Если его подставить в уравнение (10.3), то получим u и s с ошибкой $0(k^3)$, после чего уравнение (11.1) даст z с такой же точностью. Аналогичным способом могут быть получены возмущения u , s и z , зависящие от всех степеней m , e и k .

§ 12. Движение узла

Так как выражения координаты z , даваемые формулами (11.8) и (11.13), при $m=0$ должны совпадать, то

$$g\tau + \chi = nt + \varepsilon - \Omega.$$

Дифференцируя это уравнение и замечая, что

$$d\tau = (n - n') dt = \frac{n}{1+m} dt,$$

получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = n(1-g), \quad (12.1)$$

где

$$g = g/(1+m).$$

Величина g дает, таким образом, ту часть движения узла, которая зависит от m , но не зависит от e и k (наклон орбиты рассматривается как величина бесконечно малая). Чтобы найти g , а следовательно, и g , нужно решить уравнение (11.6).

Формула (11.11) и соотношение (§ 14 гл. XV)

$$\kappa a^{-3} = 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 + \dots$$

позволяют найти коэффициенты разложения

$$m^2 + \kappa r^{-3} = M_0 + 2M_1 \cos 2\tau + 2M_2 \cos 4\tau + \dots \quad (12.2)$$

в функции m . Получив

$$M_0 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 + \dots, \quad M_1 = \frac{3}{2} m^2 + \frac{19}{4} m^3 + \dots, \quad \dots, \quad (12.3)$$

можно решить уравнение (11.6) способом, указанным в § 7. Это дает

$$g = 1 + \frac{3}{4} m^2 - \frac{57}{32} m^3 + \frac{123}{128} m^4 - \frac{1925}{2048} m^5 + \\ + \frac{25667}{24576} m^6 - \frac{268309}{589824} m^7 + \dots$$

Однако в тех случаях, когда надо получить большую точность, целесообразнее прибегнуть к численным методам, нежели пользоваться разложениями по степеням m . Для значения m , соответствующего Луне (§ 3), Хилл [1878] при помощи формул (3.7) и (3.8) вычислил значения функции (12.2) для $\tau=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$. Употребив затем обычные формулы гармонического

анализа, он получил:

$$\begin{aligned}
 m^2 + \kappa r^{-3} = & 1,17804 \quad 45712 \quad 77166 \quad + \\
 & + 0,02523 \quad 36924 \quad 97860 \cos 2\tau + \\
 & + 0,00025 \quad 15533 \quad 50012 \cos 4\tau + \\
 & + 0,00000 \quad 24118 \quad 79799 \cos 6\tau + \\
 & + 0,00000 \quad 00226 \quad 05851 \cos 8\tau + \\
 & + 0,00000 \quad 00002 \quad 08750 \cos 10\tau + \\
 & + 0,00000 \quad 00000 \quad 01908 \cos 12\tau + \\
 & + 0,00000 \quad 00000 \quad 00017 \cos 14\tau.
 \end{aligned}$$

С этими значениями коэффициентов уравнение (11.6) дает

$$g = 1,08517 \quad 14265 \quad 58189,$$

откуда

$$g = 1,00399 \quad 91645 \quad 34949.$$

Это показывает, в соответствии с принятым значением n (§ 3), что годовое движение узла, поскольку оно зависит только от m , равно

$$n(1 - g) = -69288'',50622175.$$

Наблюдаемая величина среднего движения узла равна $69679'',33$. Разность этих величин представляет влияние членов, зависящих от e , k , e' и a/a' .

Изложенный здесь метод нахождения основной части движения узла был дан Адамсом еще в 1868 г., но был им опубликован лишь в 1877 г., уже после появления работы Хилла о движении перигея. Разработанный Адамсом способ решения уравнения (11.4) при помощи бесконечных определителей совпадает в основном со способом Хилла (§§ 5—7). Впоследствии было показано, что численное решение уравнения (11.4) можно очень просто получить способом последовательных дифференциальных поправок [Браун, 1936].

§ 13. Возмущения широты

Чтобы получить наиболее значительные возмущения широты, нужно в равенство $\operatorname{tg} b \approx z/r$ подставить выражения (11.5) и (11.11). Вычислим для этого первые коэффициенты разложения (11.5).

Ограничиваясь величинами $O(m^3)$, систему уравнений (11.7) можно написать так:

$$\begin{aligned}
 M_1 z_{-1} + (M_0 - g^2) z_0 + M_{-1} z_1 &= 0, \\
 [M_0 - (g - 2)^2] z_{-1} + M_{-1} z_0 &= 0, \\
 M_1 z_0 + [M_0 - (g + 2)^2] z_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений показывает, что

$$g^2 = M_0 + O(m^3),$$

откуда, используя (12.3), находим

$$g = 1 + m + \frac{3}{4} m^2 + \dots$$

Другие два уравнения дают

$$z_{-1} = \left(-\frac{3}{8} m - \frac{29}{32} m^2 - \dots\right) z_0, \quad z_1 = \left(\frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \dots\right) z_0.$$

Таким образом, вводя опять вместо C_1 и C_2 постоянные k и χ , будем иметь

$$z = ak \left\{ \sin(g\tau + \chi) - \left(\frac{3}{8} m + \frac{29}{32} m^2\right) \sin[(g-2)\tau + \chi] + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} m^2 \sin[(g+2)\tau + \chi] \right\} + O(m^3).$$

С той же точностью

$$r = a(1 - m^2 \cos 2\tau).$$

Поэтому, ограничиваясь членами $O(k)$, будем иметь для широты следующее выражение:

$$b = k \sin(g\tau + \chi) - \left(\frac{3}{8} m + \frac{13}{32} m^2\right) k \sin[(g-2)\tau + \chi] + \\ + \frac{11}{16} m^2 k \sin[(g+2)\tau + \chi] + O(m^3). \quad (13.1)$$

Для Луны эта формула дает

$$b = 308' \sin F - 610'',6 \sin(F - 2\tau) + 83'',2 \sin(F + 2\tau). \quad (13.2)$$

Аргумент

$$F = g\tau + \chi = nt + \varepsilon - \Omega,$$

где Ω есть средняя долгота узла, определяемая равенством (12.1), можно представить еще и в такой форме:

$$F = g(n - n')t + \varepsilon - \Omega_0. \quad (13.3)$$

Через Ω_0 здесь обозначена средняя долгота узла в момент $t=0$.

Первый член формулы (13.1) представляет главную часть широты. Второй член был назван эвекцией в широте. Это название распространяют обычно и на третий член.

Заметим, что истинные величины коэффициентов второго и третьего членов в выражении (13.2) равны соответственно $618'',4$ и $94'',5$. Таким образом, и здесь учет возмущений, зависящих только от m , дает уже очень хорошее приближение к реальному движению Луны.

БИБЛИОГРАФИЯ

- Акимов М. И., 1929. О функциях Бесселя многих переменных и их приложениях в механике. Ленинград.
- Алексеев В. М., 1956. Обмен и захват в задаче трех тел. Докл. АН СССР, 108, № 4.
- Андерсен (Andersen E.), 1955. Adjustment of observations by the method of least squares. Mém. Inst. geod. Danemark, III série, t. 22.
- Андуайе (Andoyer H.), 1918. Formules et Tables nouvelles relatives à l'étude du mouvement des comètes et à différents problèmes de la théorie des orbites. Bull. astr. 35, 5—51.
- Андуайе (Andoyer H.), 1923—1926. Cours de Mécanique céleste, t. I, t. II. Paris.
- Аренд (Arend S.), 1941. Etablissement par voie raccourcie des formules de Thiele—Innes, relatives aux orbites d'étoiles doubles en recourant aux principes de l'affinité. Ann. Observ. Toulouse, 16, 109.
- Аренд (Arend S.), 1959. Méthodes expéditives de détermination de la trajectoire apparente rectiligne décrite par certains compagnons d'étoiles doubles visuelles. Ann. Observ. roy. Belgique, 8, Fasc. 2.
- Арнольд В. И., 1963. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, т. XVIII, 6 (114), 91—192.
- Баженов Г. М., 1947. Об одном ряде в теории определения орбит планет и комет. Бюлл. Астрон. обсерв. Харьковск. ун-та им. А. М. Горького, № 7, 8—101.
- Баженов Г. М., 1949. Исследование сходимости итерационных процессов в задаче определения орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 4, 207—225.
- Баженов Г. М., 1952. Обзор отечественных работ по теории определения орбит планет и комет. Уч. зап. Харьковск. ун-та, 42, 17—31.
- Банахович (Banachiewicz Th.), 1916. Tables auxiliaires pour la résolution de l'équation de Gauss dans la détermination d'une orbite plétaire. Paris.
- Эти таблицы напечатаны также в 24-м томе Трудов астрон. обсерв. Юрьевского университета.
- Банахович (Banachiewicz Th.), 1928. Über die Behandlung mehrfacher Lösungen des Kometenproblems bei Bauschinger. Acta Astronomica. Ser. c. I, 17—20.
- Банахович (Banachiewicz Th.), 1932. Calcul arithmométrique d'une orbite parabolique d'après deux lieux héliocentriques. Acta Astronomica. Sér. c. 2, 37—40.
- Батраков Ю. В., 1955а. Периодические решения типа Шварцшильда в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 6, 112—120.
- Батраков Ю. В., 1955в. О периодических решениях третьего сорта в общей задаче трех тел. Бюлл. ин-та теорет. астрон. 6, 121—126.
- Батраков Ю. В., 1960. Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 570—580.

- Баушингер (Bauschinger J.), 1928. Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. 2. Aufl. Leipzig.
- Баушингер и Штракке (Bauschinger J. und Stracke G.), 1934. Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig.
- Белорицкий (Belorizky D.), 1933. Recherches sur l'application pratique des solutions générales du problème des trois corps. J. des Observ. 16, 109—132, 149—172, 189—211.
- Боке (Boquet F.), 1885. Développement de la fonction perturbatrice. Ann. Observ. Paris (Mémoires), t. XIX.
- Боке (Boquet F.), 1920. Tables du mouvement képlérien. Paris.
- Браун (Brown E. W.), 1896. An Introductory Treatise on the Lunar Theory. Cambridge.
- Браун (Brown E. W.), 1897—1899—1900—1905—1908. Theory of the motion of the moon etc. Mem. of the R. Astr. Society 53, 5¹, 57, 59.
- Браун (Brown E. W.), 1915. Theorie des Erdmondes. Enc. d. math. Wiss., Bd. VI, 2; 667—728.
- Браун (Brown E. W.), 1936. On the calculation of the principal parts of the motions of the lunar perigee and node. Astron. J. 45, 84—88.
- Браун и Брауэр (Brown E. W. and Brouwer D.), 1933. Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis. Cambridge.
- Браун и Шук (Brown E. W. and Shook C. A.), 1933. Planetary Theory. Cambridge.
- Брауэр (Brouwer D.), 1944. Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates. Astron. J., 51, 37—43.
- Брауэр (Brouwer D.), 1951. Secular variations of the orbital elements of minor planets. Astron. J. 56, 9—32.
- Брауэр и Вурком (Brouwer D. and A. J. J. van Woerkom), 1950. The Secular Variations of the Orbital Elements of the Principal Planets, Astr. Papers, Vol. XIII, Pt. II.
- Брауэр и Клеменс (Brouwer D. and Clemence J.), 1961. Methods of celestial mechanics. New York—London, Academic Press.
Русский перевод: Методы небесной механики, М., «Мир», 1964.
- Бриггс и Слоун (Briggs R. E. and Slowey J. W.), 1959. An iterative method of orbit determination from three observations of a nearby satellite. Smithsonian Inst., Research in Space Science, Special Report, No 27, 1—8.
- Брумберг В. А., 1958. Релятивистские поправки в теории движения Луны. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 6, 733—756.
- Брумберг В. А., 1963. Ряды полиномов в задаче трех тел. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 9, 234—256.
- Брумберг В. А., 1966. Представление координат планет тригонометрическими рядами. Тр. Ин-та теорет. астрон. 11.
- Бурже (Bouquet J.), 1863. Mémoire sur le calcul des divers termes du développement de la fonction perturbatrice et de ses dérivées. Ann. Observ. Paris (Mémoires), t. VII.
- Буцериус (Bucarius H.), 1950—1953. Bahnbestimmung als Randwertproblem. Astron. Nachr. 278, 193, 204; 280, 73; 281, 97.
- Ватсон (Watson G. N.), 1922. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge.
- С 3-го издания, вышедшего в 1945 г., сделан русский перевод: Теория бесселевых функций. М., 1949.
- Ватсон (Watson J. C.), 1868. Theoretical Astronomy. Philadelphia. 2 ed. 1877; 3 ed. 1881; 4 ed. 1900.
- Вейленд Г., 1947. Представление векового уравнения в виде многочлена. Успехи матем. наук 2, вып. 4, 128—158. (Перевод статьи, опубликованной в 1945 г.).

- Вилларсо (Villarseau A.—J. Yvon), 1857. Détermination des orbites des planètes et comètes. Ann. Observ. Paris, 3, 1—197.
- Виллиамс (Williams K. P.), 1934. The calculation of the orbits of asteroids and comets. Bloomington.
- Вильев М. А., 1919. Исследования по теории движения Луны. Часть I. Оскулирующие элементы лунной орбиты. Петроград.
- Вильев М. А., 1919. Исследования по вопросу о числе решений основной задачи теоретической астрономии в связи с общим ее положением в настоящее время. Уч. зап. Ленинградск. ун-та 27 (1938), 81—252.
- Вилькенс (Wilkens A.), 1919. Eine Methode der Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten, Astron. Nachr. 210, 81—112.
- Винтнер (Wintner A.), 1941. The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton. Русский перевод: Аналитические основы небесной механики, «Наука», 1967.
- Виет-Кнудсен (Wieth-Knudsen N.), 1953. Studies on orbit determination of visual binary stars in some extreme cases. Ann. of the Observ. Lund, No 12.
- Востоков И. А., 1888. Об определении орбит по трем наблюдениям. Варшавск. университетские изв.
- Вуд (Wood H.), 1950. Kepler's problem. J. and Proceed. of the R. Soc. of New South Wales 83, 150—163.
- Вяйсяля (Väisälä Y.), 1924. Über die Laplacesche Methode der Bahnbestimmung. Ann. Univ. Fennicae Aboensis, Ser. A, t. 2, No 2, 1—19.
- Вяйсяля (Väisälä Y.), 1940. Eine einfache Methode der Bahnbestimmung. Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, Ser. A, t. LII, No 2, 5—32.
- Вяйсяля и Отерма (Väisälä Y. and Oterma L.), 1951. Formulae and directions for computing the orbits of minor planets and comets. Ann. Univ. Turkuensis, Ser. A, t. X, No 3, 1—32.
- Гайо (Gaillet A.), 1904. Addition a la théorie du mouvement de Saturne de Le Verrier. Ann. Observ. Paris (Mémoires), t. 24.
- Гайо (Gaillet A.), 1910. Théorie du mouvement des planètes Uranus et Neptune, par Le Verrier. Calcul à nouveau des perturbations, après rectification des valeurs primitivement adoptées pour les masses des deux planètes et pour les éléments de leurs orbites. Tables nouvelles des mouvement d'Uranus et de Neptune. Ann. Observ. Paris (Mémoires), t. 28.
- Гайо (Gaillet A.), 1913. Tables rectifiées du mouvement de Jupiter. Ann. Observ. Paris (Mémoires), t. 31.
- Галибина И. В., 1958. Определение первоначальных и будущих орбит некоторых долгопериодических орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 6, 630—670.
- Ганзен (Hansen P. A.), 1838. Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat. Gotha.
- Ганзен (Hansen P. A.), 1857. Tables de la Lune. London.
- Ганзен (Hansen P. A.), 1857—1861. Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode, die Störungen der kleinen Planeten zu berechnen. Abhandl. der K. Sächs.-Ges. der Wiss., Leipzig.
- Ганзен (Hansen P. A.), 1862—1864. Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Abhandl. der K. Sächs.-Ges. der Wiss., Leipzig, Bd. 6 (1862); Bd. 7 (1864).
- Гаусс (Gauss C. F.), 1809. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburg (Werke, Bd. VII; 1 Aufl. 1871; 2 Aufl. 1906).
- Гаусс (Gauss C. F.), 1818. Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, que singulae partes describuntur, uniformiter esset dispersita. (Werke, Bd. III, 1866). Немецкий перевод дан в Ostwald's Klassiker der exakt. Wiss. Nr. 225.

- Гиббс (Gibbs W.), 1888. On the determination of elliptic orbits from three complete observations. Mem. of the Mat. Acad. of Sciences, Washington.
- Гонтковская В. Т., 1958. Применение современной вычислительной техники в аналитических методах небесной механики, Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 6, 592—629.
- Горячев Н. Н., 1937. Способ Halphen'a для вычисления вековых возмущений планет и применение его к Церере. Томск.
- Даламбер (d'Alembert J.), 1754. Recherches sur différents points importants du système du Monde, t. I—III, Paris.
- Данжон (Danjon A.), 1951. Deux modes d'application de la méthode de Laplace pour la détermination des orbites (méthode des positions fictives, méthode des variations). Bull. astr. 16, 85—110.
- Данжон (Danjon A.), 1952—1953. Astronomie générale. Paris.
- Данком (Duncombe R. L.), 1958. Motion of Venus 1750—1949. Astr. Papers., Vol. XVI. Pt. I, Washington.
- Двайер (Dwyer P. S.), 1951. Linear Computations. New York.
- Делоне (DeLaunay C.), 1860—1867. Théorie du mouvement de la Lune. Mém. Acad. des Sciences de Paris, 28, 29.
- Джеффрис и Мозер (Jeffrys W. H., Moser J.), 1966. Quasi-Periodic Solutions for Three—Body Problem. Astron. J. 71, N 7, pp. 568—578.
- Дирикис М. А., 1956. Определение первоначального характера орбит комет с эксцентриситетом, близким к единице. Труды Астрон. сектора Акад. наук Латв. ССР, 6, 5—66.
- Домманже (Dommanget J.), 1959. Propriétés du système des équations fondamentales de la méthode de Thiele—Innes pour le calcul d'orbites d'étoiles doubles visuelles. J. des Observ. 42, 129—133.
- Дубошин Г. Н., 1938. Введение в небесную механику. Москва—Ленинград.
- Дубяго А. Д., 1943. Кометы и их значение в общей системе ньютоновых «Начал». Исаак Ньютон. (Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения), Акад. наук СССР, 235—263.
- Дубяго А. Д., 1949. Определение орбит. Гостехиздат. Москва.
- Дэнби (Danby J. M. A.), 1962. Integration of the equations of planetary motion in rectangular coordinates. Astron. J. 67, 287—299.
- Еленевская Н. Б., 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 5, 69—95.
- Жонголович И. Д. и Амелин В. М., 1960. Сборник таблиц и номограмм для обработки наблюдений искусственных спутников Земли, изд. Акад. наук СССР.
- Зигель (Siegel C. L.), 1956. Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin. Есть русский перевод: ИЛ, Москва, 1959.
- Иннес (Innes R. T. A.), 1904. Some developments in terms on the mean anomaly. Mem. of the R. Astron. Soc. 54, 137—141.
- Иннес (Innes R. T. A.), 1909. Note on certain coefficients appearing in the algebraical development of the perturbative function. Monthly Not. of R. Astron. Soc. 69, 633—647; 70, 194—196.
- Иннес (Innes R. T. A.), 1927. Tables of X and Y. Elliptic rectangular coordinates. Append. to Union Observatory Circular. No 71.
- Интерполяционные таблицы. 1956. Interpolation and Allied Tables, Prepared by H. M. Nautical Almanac Office, London.
- Калландро (Callandrea M. O.), 1892. Étude sur la théorie des comètes périodiques. Ann. Observ. Paris (Mémoires), 20, 1—64.
- Калландро (Callandrea M. O.), 1902. Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes. Ann. Observ. Paris (Mémoires), 23, 1—135.
- Кармазина Л. Н. и Курочкина Л. В., 1956. Таблицы интерполяционных коэффициентов. Вычислительный центр Академии наук СССР, Москва.

- Клеменс (Clemence G. M.), 1949; 1961; Theory of Mars. Astr. Papers, Vol. XI, Part. 2; Vol. XVI, Part. 2.
- Клеменс и Брауэр (Clemence G. M. and Brouwer D.), 1955. The accuracy of the coordinates of the five outer planets and the inviariable plane. Astron. J. 60, 118.
- Клинкерфюс (Klinkerfues W.), 1871, Theoretische Astronomie; 2 Ausg. 1878; 3 Ausg. 1912.
- Клеро (Clairaut A. C.), 1752. Théorie de la Lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrée des distances. St.-Pétersbourg.
Второе существенно дополненное издание этой книги вышло в Париже в 1765 г.
- Ковальский М. А., 1951. Избранные работы по астрономии. Гостехиздат, Москва.
- Колмогоров А. Н., 1954. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР 98, № 4, 527—530.
- Кон (Cohn F.), 1918. Neue Methoden der Bahnbestimmung. Vierteljahrsschrift der Astr. Ges. 53, 27—146.
- Коши (Cauchy A. L.), 1897. Oeuvres complètes. I-e série, t. 10.
- Красинский Г. А., 1968а. Квазипериодические решения первого сорта в плоской задаче n тел. Тр. Ин-та теорет. астрон. 13.
- Красинский Г. А., 1968b. Нормализация канонической системы дифференциальных уравнений в окрестности квазипериодического решения. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 413—442.
- Крауфорд (Crawford R. T.), 1930. Determination of orbites of comets and asteroids. New York.
- Крылов А. Н., 1911. Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VI, 1936, 1—149.
- Крылов А. Н., 1915. Sur la variation des éléments des orbites elliptiques des planètes.
Изв. Акад. наук. Петроград. (Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VI, 1936, 249—266).
- Крылов А. Н., 1924. On a theorem of Sir Isaac Newton. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VI, 1936, 273—277.
- Крылов А. Н., 1925. On Sir Isaac Newton method of determining the parabolic orbit of a comet.
Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VI, 1936, 279—298.
- Крылов А. Н., 1935. Судьба одной знаменитой теоремы. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VI, 1936, 227—248.
- Крылов А. Н., 1936. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, 288—309.
- Куликов Д. К., 1951. Формулы и таблицы для дифференциального исправления параболических орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 4, 451—487.
- Куликов К. А., 1956. Фундаментальные постоянные астрономии. Гостехиздат, Москва.
- Куликов Д. К. и Батраков Ю. В., 1960. Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 554—569.
- Кунц (Kunz K. S.), 1957. Numerical Analysis. New York.
- Курганов (Kourganoff V.), 1940. La part de la mécanique céleste dans la découverte de Pluton. Bull. astr. 12.
- Кюнерт (Kühnert F.), 1879. Folgerungen aus v. Oppolzer's neuer Methode für die Bearbeitung späterer Oppositionen. Astron. Nachr. 95, 143—150.
- Кэли (Cauley A.), 1861. Tables of the Development of Functions in the Theory of Elliptic Motion. Mem. of the R. Astr. Society, 29, 191—306.

- Лаббок (Lubbock J. W.), 1834—1836—1837—1840—1861. Tracts on theory of the Moon and on the perturbations of the Planets, London.
- Основные результаты опубликованы раньше: London, Phil. Trans. 1831, 1832, 1834.
- Лагранж (Lagrange J. L.), 1778—1783. Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations, 1-er et 2-ième mémoires (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1778), 3-ième mémoire (Id., 1783). Oeuvres de Lagrange, t. IV, Paris, 1869.
- Ламберт (Lambert J. H.), 1761. Insigniores orbitae cometarum proprietates.
- Немецкий перевод: J. H. Lambert's Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen. (Ostwald's Klassiker der exakt. Wiss, Nr. 133). Leipzig, 1902.
- Ламберт (Lambert J. H.), 1902. Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen, Leipzig (Ostwald's Klassiker Nr. 133).
- Лаплас (Laplace P. S.), 1780. Mémoire sur la détermination des orbites des Comètes. Mém. Acad. Paris, 1780—1784.
- Лаплас (Laplace P. S.), 1799—1825. Traité de mécanique céleste. I (1799), II (1799), III (1803), IV (1805), V (1825). Paris. Переиздано в 1843—1846 гг.
- Ларченко Е. Г., 1956. Механизация вычислительных работ. Гостехиздат. Москва.
- Лебедев А. В. и Федорова Р. М., 1956. Справочник по математическим таблицам. Вычисл. центр Акад. наук СССР. Москва.
- Левверье (Leverrier U. J. J.), 1855—1877. Recherches astronomiques. Ann. Observ. Paris, 1, 2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14.
- Леви-Чивита (Levi-Civita T.), 1904. Sopra la equazione di Kepler. Atti della R. Accademia dei Lincei. 13.
- Лежандр (Legendre A. M.), 1806. Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris.
- Лойшнер А. О. (Leuschner A. O.), 1913. Publ. of the Lick Observ., v. VII, 389.
- Линник Ю. В., 1958. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз.
- Лунные эфемериды 1952—1959. Improved Lunar Ephemeris 1952—1959. A Joint Supplement to the American Ephemeris and the (British) Nautical Almanac, Washington. 1954.
- Ляпунов А. М., 1954. Собрание сочинений, т. I, изд. АН СССР.
- Лях Р. А., 1959. Некоторые изменения в методике разложения пертурбационной функции. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 422—440.
- Маковер С. Г., 1956. Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц. Астрон. ж., 33, 423—439.
- Малкин И. Г., 1956. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, Москва.
- Марколонго (Marcolongo R.), 1919. Il problema dei tre corpi de Newton ai nostri giorni, Milano.
- Март (Marth A.), 1865. Auxiliary Tables for the solution of Lambert's equation. Astron. Nachr. 65.
- Мельников В. К., 1965. О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, Докл. АН СССР 165, № 6, 1245—1248.
- Мерман Г. А., 1952. О радиусе сходимости рядов Хилла. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 5, 185—198.
- Мерман Г. А., 1952. Новый класс периодических решений в ограниченной задаче трех тел и в задаче Хилла. Тр. Ин-та теорет. астрон. 1, 7—86.
- Мерман Г. А., 1958. О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами. Бюлл. Ин-та теорет. астрон., 6, 713—732.

- Мерман Г. А., 1961. Почти-периодические решения и расходимость рядов Линдштедта в плоской ограниченной задаче трех тел. Тр. Ин-та теорет. астрон. 8, 5—134.
- Месис П. Ш., 1947. О сходимости последовательных приближений в способе Гаусса определения орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 4, 31—39.
- Меффруа (Meffroy J.), 1958. Sur l'existence effective du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. Bull. astr. 21, 261—322.
- Мультон (Moulton F. R.), 1901. A general method of determining the elements of orbits of all eccentricities from three observations. Astron. J. 22, 43—52.
- Мультон (Moulton F. R.), 1914. Memoir on the Theory of Determining Orbits, Astron. J. 28, 103—124.
- Мультон (Moulton F. R.), 1920. Periodic Orbits, Washington.
- Ньюком (Newcomb S.), 1867. An investigation of the orbit of Neptune with general tables of its motion. Smiths. contrib. to Knowledge, XV.
- Ньюком (Newcomb S.), 1874. An investigation of the orbit of Uranus, with general tables of its motion. Smiths. contrib. to Knowledge, XIX.
- Ньюком (Newcomb S.), 1891. Development of the perturbative function and its derivatives, in sines and cosines of multiples of the eccentric anomalies, and in powers of the eccentricities and inclinations. Astr. Papers, Vol. III, Part I (1884).
- Ньюком (Newcomb S.), 1895a. Development of the perturbative function in cosines of multiples of the mean anomalies and of angles between the perihelia and common node and in powers of the eccentricities and mutual inclination. Astr. Papers, Vol. V, Part I.
- Ньюком (Newcomb S.), 1895b. The Elements of the four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. to the American Ephem. and Nautical Almanac for 1897.
- Ньюком (Newcomb S.), 1895c. Tables of the four inner planets. Astr. Papers, Vol. VI.
- Ньюком (Newcomb S.), 1898. Tables of the heliocentric motion of Uranus and Neptune, Astr. Papers, Vol. VII, Parts III and IV.
- Ольберс (Olbers H. W. M.), 1864. Abhandlungen über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen, Leipzig.
- Оппольцер (Oppolzer Th.), 1870. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Erster Band, Leipzig.
- Оппольцер (Oppolzer Th.), 1882. 2-е издание.
- Орельская В. И., 1959. Таблицы для вычисления суточного параллакса. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 478—496.
- Орлов А. Я. и Орлов Б. А., 1940. Курс теоретической астрономии. ГИТТЛ. Москва.
- Орлов Б. А., 1939. Determination of the preliminary orbit of a minor planet by two observations. Цирк. Гл. Астр. обсерв. в Пулковке, № 26—27, 55—63.
- Петерс (Peters J.), 1912. Tafeln zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvektors in elliptischen Bahnen für Exzentrizitätswinkel von 0° bis 24°. Veröff. d. Astr. Recheninstituts, Nr. 41, Berlin. 2-te Aufl., 1933.
- Петерс (Peters J.), 1934. Präzessionstafeln für das Äquinoktium 1950, 0. Veröff. d. Astr. Recheninstituts, Nr. 50, Berlin.
- Петровская М. С., 1958. Новая оценка радиуса сходимости рядов Хилла. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 441—465.
- Пикар (Picart L.), 1906. Sur le développement des coordonnées dans le mouvement elliptique avec les notations de M. Poincaré. Bull. Astr. 23, Paris.
- Пикар (Picart L.), 1913. Calcul des Orbites et des Ephémérides. Paris.

- Пиус Л. Ю., 1961. Применение методы периодических орбит к изучению движения малой планеты Гекубы (108). Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 8, 11—92.
- Пламмер (Plummer H. C.), 1906. On some points connected with the determination of orbits. Monthly Not. R. Astron. Soc. 66, 491—498.
- Пламмер (Plummer H. C.), 1918. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. Cambridge. Переиздано в 1960 г. New York.
- Пламмер (Plummer H. C.), 1932. On the motion in the neighbourhood of the equilateral points of libration. Monthly Not. R. Astron. Soc. 92, 442—448.
- Планетные координаты 1800—1940. Planetary Coordinates for the Years 1800—1940. Prepared by Nautical Almanac Office. London, 1933; Idem-for the Years 1940—1960, London, 1939; Idem-for the Years 1960—1980, London, 1958
- Понтекулан (Pontécoulant G. de), 1829—1846. Théorie analytique du système du Monde I—IV. Paris.
- Проскурин В. Ф., 1950. К вопросу об устойчивости движения VIII спутника Юпитера. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 4, 355—361.
- Проскурин В. Ф., 1952, 1962. Теория движения Цереры. Часть I. Труды Ин-та теорет. астрон. 2, 3—184. Часть II. Труды Ин-та теорет. астрон. 9, 3—64.
- Пуанкаре (Poincaré H.), 1892, 1893, 1899. Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. I—III. Paris.
- Пуанкаре (Poincaré H.), 1905, 1907, 1910. Leçons de Mécanique céleste, I—III. Paris.
- Пуанкаре (Poincaré H.), 1906. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace. Bull. astr. 23, 161—187 (Oeuvres, t. VIII, 393—416, Paris, 1952).
- Пуанкаре (Poincaré H.), 1953. Les limites de la loi de Newton. Bull. astr. 17, 121—269.
- Пуассон (Poisson S.), 1835. Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Inst. de France, 13.
- Пурцхванидзе А. В., 1952. Приближенная формула для вычисления отношения площадей эллиптического сектора и треугольника. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 5, 212—215.
- Пуизё (Puisseux V.), 1864. Sur les principales inégalités de la Lune. Ann. de l'École normale supér., Paris.
- Рабе (Rabe E.), 1950. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Eros during 1926—1945. Astron. J. 55, 112—126.
- Рабе (Rabe W.), 1951. Neue Methoden zur Bestimmung und Bahnverbesserung visueller Doppelsterne. Astr. Nachr. 280.
- Радо (Radau R.), 1899. Bibliographie relative au calcul des orbites. Bull. astr. 16, 427—445.
- Ранкль (Runkle J. D.), 1855. New tables for determining the values of the coefficients, in the perturbative function of planetary motion, which depend upon the ratio of the mean distances. Smiths. Contrib. to Knowledge, Washington.
- Расмусен (Rasmusen H. Q.), 1951. Tables for the computation of parallax corrections for comets and planets. Publikationer og mindre Medd. fra Københavns Observatorium, Nr. 155.
- Рейнолдс (Reynolds G. K.), 1957. Table of $(\sin x)/x$. Electronics Research Directorate, Air Force Cambridge Research Center. Bedford.
- Росс (Ross F. E.), 1917. New elements of Mars and Tables for correcting the heliocentric positions derived from Astronomical Papers, Vol. VI Part. IV; Astr. Papers, Vol. IX, Part. II.
- Рябов Ю. А., 1952. О периодических решениях вблизи «треугольных» точек либрации ограниченной плоской круговой задачи трех тел. Астрон. ж., 29, 582—596.

- Самойлова-Яхонтова Н. С., 1927. Die singulären Punkte der Differentialgleichungen des Zwei-Körperproblems. Бюлл. Астрон. ин-та, № 15, 169—176.
- Самойлова-Яхонтова Н. С., 1944. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон., № 53, 447—455.
- Сихахара (Sibahara R.), 1961a. Zur Theorie der Zerstreuung im Dreikörperproblem. Publ. of the Astr. Soc. of Japan, 13, 108—112.
- Сихахара (Sibahara R.), 1961b. Eine kurze Notiz über den Übergang des Begleiters bei der Begegnung eines Doppelsternsystems mit einem Himmelskörper. Publ. of the Astr. Soc. of Japan 13, 113—114.
- Синдинг (Sinding E.), 1948. On the Systematic Changes of the Eccentricities of Nearly Parabolic Orbits. Kgl. Danske Vid. Selskab, Mat.-fys. Medd. 24, N 16 (Publ. Københavns Obs., N 146), København.
- Ситников К. А., 1953. О возможности захвата в задаче трех тел. Матем. сб. 32 (74) : 3. Москва, изд. АН СССР.
- Ситников К. А., 1960. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. Докл. АН СССР, 133, № 2.
- Смарт (Smart W. M.), 1947. John Couch Adams and the discovery of Neptune. Occ. Notes R. Astron. Soc. 2, No. 11, 33—88.
- Смарт (Smart W. M.), 1953. Celestial Mechanics, London—New York—Toronto.
- Стойко (Stoyko N.), 1933. Coordonnées héliocentriques dans le calcul des orbites circulaires. J. des Observ. 16, 21—27.
- Стойко (Stoyko N.), 1931a. Les methodes de première approximation dans la détermination des orbites planétaires. Bull. Astr. 7, 33—60.
- Стойко (Stoyko N.), 1931b. Comparaison des diverses méthodes de détermination des orbites planétaires. Bull. Astr. 7, 177—200.
- Стрёмгрен (Strömberg B.), 1929. Formeln und Tafeln zur Bestimmung parabolischer Bahnen. København. (=Det Kgl. Danske Vid. Selskab. Mat.-fys. Medd. X, 3).
- Субботин М. Ф., 1923. Новая форма уравнения Эйлера—Ламберта и ее применение при вычислении орбит. Русский Астрон. ж., I, 1923.
- Субботин М. Ф. (Subbotin M. F.), 1928. Sur le calcul des coordonnées héliocentriques des comètes. Astron. Nachr. 234, Nr. 5606, 287—288.
- Субботин М. Ф., 1929. Формулы и таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Тр. Ташкентск. астрон. абсерв. т. II.
- Субботин М. Ф., 1937. Курс небесной механики, т. II. ОНТИ. Москва—Ленинград.
- Субботин М. Ф., 1941. Sur le calcul des inégalités séculaires. Астрон. ж. 18, 35—50.
- Субботин М. Ф., 1958. Леонард Эйлер и астрономические проблемы его времени. Вопросы истории естеств. и техн. 7, 58—66.
- Субботин М. Ф., 1959. О вычислении параболических орбит. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 416—419.
- Сундман (Sundman K. F.), 1901. Über die Störungen der kleinen Planeten.
- Сундман (Sundman K. F.), 1912. Mémoire sur le problème des trois corps. Acta math. 36, 105—179.
- Сундман (Sundman K. F.), 1915. Theorie der Planeten. Enc. d. math. Wiss., Bd. VI, 2, 729—807.
- Тиссеран (Tisserand F.), 1889—1896. Traité de Mécanique Céleste, t. I (1889), t. II (1891), t. III (1894), t. IV (1896), Paris.
- Тиссеран (Tisserand F.), 1895. Sur la détermination des orbites circulaires. Bull. astr. 12, 53.
- Тиссеран (Tisserand F.), 1899. Leçons sur la détermination des orbites. Avec une préface de H. Poincaré, Paris.

- Титъен (Tietjen F.), 1877. Zusammenstellung aller für die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen erforderlichen Formeln nebst Rechnungsschema. Berliner Astr. Jahrbuch für 1879, Anhang.
- Титъен (Tietjen F.), 1892. Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie für Exzentrizitätswinkel von 0° bis $20^\circ 20'$ Veröff. d. Astr. Recheninstituts, Nr. 1, Berlin.
- Томбо (Tombaugh, Clyde W.), 1960. Reminiscences of the Discovery of Pluto, Sky and Telescope, 19.
- Труды Международного Астрономического Союза. 1966. Transactions of the International Astronomical Union, Vol. XIIB (1964).
- Тягт А. П., 1944. О решении уравнения Кеплера. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 3, 478—480.
- Уиттекер Е. Т. (Whittaker E. T.), 1937. Аналитическая динамика. Перевод с 3-го англ. изд. 1927 г. М. Английские издания 1937 и 1944 гг. содержат существенные дополнения.
- Фабрициус В. И. (Fabritius W.), 1877. Veränderte Form für die Berechnung der Hypothesen bei Bahnbestimmung aus drei beobachteten Oertern. Astron. Nachr. 90, 217—222, 225—230.
- Фабрициус (Fabritius W.), 1883. Du Séjour und Olbers. Astron. Nachr. 106, 87—94.
- Фабрициус В. И., 1887. Критические начала задачи определения орбит по трем наблюдениям. Киев.
- Фабрициус (Fabritius W.), 1891. Ueber eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Principis von Gibbs. Astron. Nachr. 128, 225—228.
- Фабрициус (Fabritius W.), 1891. Weitere Anwendungen des Gibbs'schen Principis. Astron. Nachr. 128, 321—328.
- Фабрициус В. И., 1893. Начало Джиббса и его применение в теоретической астрономии. Киев.
- Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., 1960. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз.
- Фаддеева В. Н., 1950. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат.
- Финзен (Finsen W. S.), 1936. Parabolic orbits of double stars. Union Observ. Circular, 95.
- Флетчер (Fletcher A.), 1931. Note on the effect of proper motion on double star measures. Monthly Not. of R. Astr. Soc. 92, 119.
- Флетчер (Fletcher A.), 1938. Tables of the two chief Laplace coefficients. Monthly Not. of R. Astr. Soc. 99, 259—265.
- Фогель Р. Ф., 1891. Определение элементов орбиты по трем наблюдениям. Киев.
- Фогель Р. Ф. (Vögel R.), 1892. Eine Methode für Bahnbestimmungen. Astron. Nachr. 192, 37—44.
- Фогель Р. Ф. (Vogel R.), 1894. Über die Identität der Lambert'schen und Olbers'schen Methode zur Berechnung parabolischer Bahnen. Astron. Nachr. 136, 83—86.
- Фогель Р. Ф., 1895. Определение орбит, мало наклоненных к эклиптике. Киев.
- Фок В. А., 1955. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, Москва.
- Фришауф (Frischauf J.), 1903. Grundriß der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. 2 Aufl, Leipzig.
- Фришауф (Frischauf J.), 1905. Die Gauss-Gibbs'sche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, Leipzig.

- Хагихара (Hagihara Yusuke), 1944. On the Reducibility of the Differential Equations in the n -Body Problem. Tokyo Astr. Observ. Reprints, No. 25, 501—504.
- Хагихара (Hagihara Yusuke), 1945. A Proof of Poisson's Theorem on the Invariability of the Major-Axes of Planetary Orbits. Japan. J. of Astron. and Geophys. 21, 9—27.
- Хагихара (Hagihara Yusuke), 1957. Stability in Celestial Mechanics. Tokyo. Pp. X+106.
- Хайаши (Hayashi K.), 1930. Tafeln der Besselschen, Theta — Kugel- und anderen Funktionen, Berlin.
- Хамель (Hamel G.), 1949. Theoretische Mechanik. Springer — Verlag.
- Хандриков М. Ф., 1883. Очерк теоретической астрономии. Киев.
- Ханина Ф. Б., 1955. Формулы и таблицы для интерполирования особых координат и вычисления компонентов скоростей. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 6, 127—132.
- Хаппель (Happel H.), 1941. Das Dreikörperproblem. Leipzig.
- Харцер (Harzer P.), 1896. Über eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung. Astron. Nachr. 141, 177—198.
- Харцер (Harzer P.), 1901. Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen, Publ. der Sternw. Kiel, II.
- Харцер (Harzer P.), 1913. Über eine kurze Methode der Bestimmung einer Planetenbahn nach drei Beobachtungen bei den gewöhnlichen kleinen und mäßigen Zwischenzeiten. Astron. Nachr. 195, 345; Astron. Nachr. 208, 153.
- Херглотц (Herglotz G.), 1906. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Enc. d. math. Wiss., Bd. 6, 379—426.
- Херрик (Herrick S.), 1940. The Laplacian and Gaussian Orbit Methods. University of California Press.
- Херрик (Herrick S.), 1953. Tables for Rocket and Comet Orbits, Washington.
- Хильми Г. Ф., 1950. Теорема о вириале в небесной механике. Докл. АН СССР 70, 393—396.
- Хильми Г. Ф., 1951. Проблема n тел в небесной механике и космогонии. Изд-во АН СССР.
- Хильми Г. Ф., 1958. Качественные методы в проблеме n тел. Изд-во АН СССР.
- Хилл (Hill G. W.), 1874. A Method of Computing Absolute Perturbations. Astron. Nachr. 83, Collected Mathematical Works of G. W. Hill, Vol. I, 1905, 151—166.
- Хилл (Hill G. W.), 1877. On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon. Works, Vol. I, 1905, 243—270.
- Хилл (Hill G. W.), 1878. Researches in the Lunar Theory. Amer. Journ. of Mathem., I. Works, Vol. I, 1905, 284—335.
- Хилл (Hill G. W.), 1878a. On the Motion of the Centre of Gravity of the Earth and Moon, Analyst 5, 33—38; Works, Vol. I, 1905, 336—341.
- Хилл (Hill G. W.), 1890. A new theory of Jupiter and Saturn, Astr. Papers, Vol. IV; Works, Vol. III, 1906.
- Хилл (Hill G. W.), 1894. Literal Expression for the Motion of the Moon's Perigee. Ann. of Mathematics 9. Works, Vol. IV, 1907, 41—50.
- Хилл (Hill G. W.), 1898. Tables of Jupiter, Tables of Saturn, Astr. Papers, Vol. VII.
- Хилл (Hill G. W.), 1900. On the Extension of Delaunay's Method in the Lunar Theory to the General Problem of Planetary Motion. Trans. Amer. Math. Soc. I. Works, Vol. IV, 1907, 169—206.

- Хилл (Hill G. W.), 1907. Illustrations of Periodic Solutions in the Problem of Three Bodies (First Article). Works Vol. IV, 244—253. Carnegie Inst. of Washington. Memoir No. 71. (Astron. J., Vol. 22, 93—97, 117—121, 1902).
- Хилл (Hill G. W.), 1907. Illustrations of Periodic Solutions in the Problem of Three Bodies (Second Article). Carnegie Inst. of Washington. Memoir No. 72. Works, Vol. IV, 254—261.
- Хирайма (Hirayama K.), 1923—1928. Families of Asteroids. Japan. Journ. of Astron. and Geophys., Vol. I; Vol. V.
- Цейпель (Zeipel H.), 1904. Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps. Nova Acta Reg. Societ. scient. Upsaliensis, Ser. III.
- Цейпель (Zeipel H.), 1912. Entwicklung der Störungsfunktion. Enc. d. math. Wiss., Bd. VI, 2; 557—665.
- Цейпель (Zeipel H.), 1915—1917. Recherches sur le mouvement des petites planètes. Première partie. Arkiv f. Mat. Astr. och Fysik, Bd. II, Nos 1—13.
- Чаллис (Challis J.), 1849. A method of Calculating the Orbit of a Planet or Comet from three observed Places. Mem. R. Astr. Soc. 17, 59—77.
- Чеботарев Г. А., 1951. Применение периодических орбит к изучению движения малых планет. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 4, 499—554.
- Шази (Chazy J.), 1913. Sur le points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps. C. R. 157, 1398—1400.
- Шази (Chazy J.), 1928—1930. La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste, t. I, t. II, Paris.
- Шази (Chazy J.), 1953. Mécanique céleste. Equations canoniques et variation des constantes. Paris. Presses universitaires de France.
- Шайн Г. А., 1936. Двойные звезды. Статья в «Курсе астрофизики и звездной астрономии», Ч. II, ОНТИ, 255—314.
- Шараф Ш. Г., 1953. Разложение некоторых функций координат эллиптического движения в ряды до 9-й степени эксцентриситета. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 5, 303—314.
- Шараф Ш. Г., 1955. Теория движения Плутона, Часть I. Тр. Ин-та теорет. астрон. 4, 3—131.
- Шараф Ш. Г. и Будникова Н. А., 1964. Теория движения Плутона. Части II, III, IV. Тр. Ин-та теорет. астрон. 10, 3—162.
- Шарлье (Charlier C. L.), 1902, 1907. Die Mechanik des Himmels; Bd. I, II, Leipzig.
Русский перевод (сокр.): Небесная механика, Москва, «Наука», 1966.
- Шауб (Schaub W.), 1950. Vorlesungen über sphärische Astronomie. Leipzig.
- Шварцшильд (Schwarzschild K.), 1898. Ueber eine Classe periodischer Lösungen des Dreikörperproblems. Astron. Nachr. 147.
- Шварцшильд (Schwarzschild K.), 1903. Ueber die periodischen Bahnen vom Hecubatypus, Astron. Nachr. 160, 385—400.
- Шлезингер и Удик (Schlesinger F. and Udick S.), 1912. Tables for the true anomaly in elliptic orbits. Publ. of the Allegheny Obs. No. 17.
- Шор В. А., 1960. Применение быстродействующих вычислительных машин к решению ограниченной задачи трех тел методом Хилла — Брауна. Части I, II и III. Бюлл. Ин-та теорет. астрон. 7, 639—675, 8, 165—172, 8, 359—378.
- Шорр (Schorr R.), 1927. Präzessionstafeln 1925, 0. Hamburger Sternwarte in Bergedorf.
- Штракке (Stracke G.), 1928. Tafeln der elliptischen Koordinaten C und S für Exzentrizitätswinkel von 0° bis 25° . Veröff. d. Astr. Recheninstituts Nr. 46, Berlin.

- Штраке (Stracke G.), 1929. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Berlin.
- Штумпф (Stumpff K.), 1931. Über eine kurze Methode der Bahnbestimmung aus drei oder mehr Beobachtungen. *Astron. Nachr.* 243, 317—336; 244, 433—464.
- Штумпф (Stumpff K.), 1951. Eine einfache symmetrische Ableitung der Lagrangeschen partikulären Lösungen des Dreikörperproblems. *Astron. Nachr.* 280, 91—93.
- Штумпф (Stumpff K.), 1959. *Himmelsmechanik*, Bd. I, Berlin.
- Шуберт (Schubert F. T.), 1798. *Lehrbuch der theoretischen Astronomie*. Особенно широкое распространение получило второе (существенно дополненное) издание, вышедшее на французском языке: *Traité d'Astronomie théorique*, t. I—III. St.-Petersbourg, 1822.
- Эберт (Ebert W.), 1906. Une simple méthode pour le calcul d'une orbite elliptique par trois observations. *Bull. astr.* 23, 209—235.
- Эйлер Л. (Euler L.), 1743. Determinatio orbitae cometae qui mense Martio hujus anni 1742 potissimum fuit observatus. *Miscellanea Berolinensia*, t. VII, 1290.
- Эйлер Л. (Euler L.), 1753. *Theoria motus Lunae exhibens omnes ejus inaequalitates etc.* Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.
- Эйлер Л. (Euler L.), 1772. *Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata una cum Tabulis astronomicis etc.* J. A. Euler, W. L. Krafft, J. A. Lexell. Opus dirigente L. Euler. Petropolitanae.
Часть этого сочинения имеется в русском переводе.
Леонард Эйлер, Новая теория движения Луны. Перевод А. Н. Крылова. Ленинград, 1934.
- Эйткен (Aitken R. G.), 1935. *The Binary Stars*. 2-nd ed. New York.
- Экенберг (Ekenberg B.), 1945. A study of visual binary stars. *Meddelande från Lunds astr. observatorium*, Ser. II, 116.
- Эккерт (Eckert W. J.), 1965. On the motions of the perigee and node and the distribution of mass in the Moon. *Astron. J.* 70, 787.
- Эккерт и Брауэр (Eckert W. and Brouwer D.), 1937. The use of rectangular coordinates in the differential correction of orbits. *Astron. J.* 46, 125—132.
- Эккерт, Брауэр и Клеменс (Eckert W., Brouwer D. and Clemence G.), 1951. *Coordinates of the Five Outer Planets 1653—2060*. *Astr. Papers*, Vol. XII.
- Эккерт, Джонс и Кларк (Eckert W. J., Jones Rebecca and Clark H. K.), 1954. *Improved Lunar Ephemeris 1952—1959*.
- Энке (Encke J. F.), 1831. Über die Olberssche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen. *Berliner Astron. Jahrbuch für 1833*.
- Энке (Encke J. F.), 1852. Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. *Berliner Astron. Jahrbuch für 1854*. (Ostwald's Klassiker der exakt. Wiss., Nr. 141, Leipzig, 1903).

ТАБЛИЦЫ

I. Коэффициенты разложений C_k^n, m по степеням эксцентриситета

n	m	k=0				k=1			
		e^0	e^2	e^4	e^6	e	e^3	e^5	e^7
-3	0	+1	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{15}{8}$	$+\frac{35}{16}$	+3	$+\frac{27}{8}$	$+\frac{261}{64}$	$+\frac{14\ 309}{3\ 072}$
-2	0	+1	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{8}$	$+\frac{5}{16}$	+2	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{65}{96}$	$+\frac{2\ 675}{4\ 608}$
-1	0	+1	0	0	0	+1	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{192}$	$-\frac{1}{9\ 216}$
+1	0	+1	$+\frac{1}{2}$	0	0	-1	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{192}$	$+\frac{7}{9\ 216}$
+2	0	+1	$+\frac{3}{2}$	0	0	-2	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{96}$	$+\frac{1}{4\ 608}$
+3	0	+1	+3	$+\frac{3}{8}$	0	-3	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{15}{64}$	$-\frac{35}{3\ 072}$
-2	2	0	0	0	0	-1	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{384}$	$+\frac{77}{11\ 520}$
-1	2	0	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{5}{64}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{13}{12}$	$+\frac{103}{768}$	$+\frac{31}{240}$
0	2	0	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{3}{64}$	-2	$+\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{192}$	$+\frac{751}{11\ 520}$
+1	2	0	$+\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{25}{12}$	$-\frac{187}{768}$	$+\frac{29}{2\ 880}$
+2	2	0	$+\frac{5}{2}$	0	0	-3	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{37}{384}$	$+\frac{11}{3\ 840}$
		e	e^3	e^5	e^7	e^0	e^2	e^4	e^6
-2	1	0	0	0	0	+1	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{5}{192}$	$-\frac{7}{9\ 216}$
-1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	+1	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{5}{64}$	$-\frac{889}{9\ 216}$
0	1	-1	0	0	0	+1	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{25}{192}$	$-\frac{49}{9\ 216}$
+1	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	+1	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{5}{192}$	$-\frac{7}{9\ 216}$
+2	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	0	+1	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{25}{64}$	$+\frac{245}{9\ 216}$

I. Коэффициенты разложений $C_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k=2				k=3				
		e^0	e^2	e^4	e^6	e	e^3	e^5	e^7	
-3	0	0	$+\frac{9}{2}$	$+\frac{7}{2}$	$+\frac{141}{32}$	0	$+\frac{53}{8}$	$+\frac{393}{128}$	$+\frac{24\ 753}{5\ 120}$	
-2	0	0	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{21}{32}$	0	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{25}{64}$	$+\frac{393}{512}$	
-1	0	0	+1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{24}$	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{81}{128}$	$+\frac{729}{5\ 120}$	
+1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{16}$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{45}{128}$	$-\frac{567}{5\ 120}$	
+2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{9}{64}$	$-\frac{81}{2\ 560}$	
+3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{16}$	0	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{45}{128}$	$+\frac{189}{1\ 024}$	
-2	2	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{85}{48}$	$-\frac{319}{1\ 440}$	+3	$-\frac{69}{8}$	$+\frac{3\ 663}{640}$	$-\frac{3\ 597}{2\ 560}$	
-1	2	+1	-4	$+\frac{47}{16}$	$-\frac{13}{36}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{131}{16}$	$+\frac{8\ 861}{1\ 280}$	$-\frac{9\ 921}{5\ 120}$	
0	2	+1	-4	$+\frac{167}{48}$	$-\frac{503}{720}$	+2	$-\frac{27}{4}$	$+\frac{2\ 079}{320}$	$-\frac{1\ 427}{640}$	
+1	2	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{71}{24}$	$-\frac{551}{720}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{75}{16}$	$+\frac{5\ 751}{1\ 280}$	$-\frac{8\ 829}{5\ 120}$	
+2	2	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{11}{8}$	$-\frac{179}{720}$	+1	$-\frac{19}{8}$	$+\frac{1\ 053}{640}$	$-\frac{243}{512}$	
			e	e^3	e^5	e^7	e^0	e^2	e^4	e^6
-2	1	+2	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{45}$	0	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{405}{128}$	$+\frac{5\ 103}{5\ 120}$	
-1	1	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{6}$	$+\frac{9}{32}$	$-\frac{9}{80}$	0	$+\frac{17}{8}$	$-\frac{385}{128}$	$+\frac{5\ 201}{5\ 120}$	
0	1	+1	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{2}{45}$	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{225}{128}$	$+\frac{3\ 969}{5\ 120}$	
+1	1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{180}$	0	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{45}{128}$	$+\frac{567}{5\ 120}$	
+2	1	0	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{15}$	0	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{75}{128}$	$-\frac{441}{1\ 024}$	

I. Коэффициенты разложений $C_k^{n, m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k = 4			k = 5		
		e^2	e^4	e^6	e^3	e^5	e^7
-3	0	0	$+\frac{77}{8}$	$+\frac{129}{80}$	0	$+\frac{1773}{128}$	$-\frac{4987}{8072}$
-2	0	0	$+\frac{103}{24}$	$-\frac{129}{80}$	0	$+\frac{1097}{192}$	$-\frac{16621}{4608}$
-1	0	0	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{15}$	0	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{15625}{9216}$
+1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{5}$	0	$-\frac{125}{384}$	$+\frac{4375}{9216}$
+2	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{2}{15}$	0	$-\frac{25}{192}$	$+\frac{625}{4608}$
+3	0	0	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{10}$	0	$+\frac{15}{128}$	$-\frac{875}{3072}$
-2	2	$+\frac{13}{2}$	$-\frac{55}{3}$	$+\frac{10723}{720}$	$+\frac{295}{24}$	$-\frac{13745}{384}$	$+\frac{1102775}{32256}$
-1	2	$+\frac{19}{4}$	$-\frac{121}{8}$	$+\frac{10597}{720}$	$+\frac{389}{48}$	$-\frac{20267}{768}$	$+\frac{626681}{21504}$
0	2	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{259}{24}$	$+\frac{8401}{720}$	$+\frac{59}{12}$	$-\frac{3221}{192}$	$+\frac{163363}{8064}$
+1	2	+2	$-\frac{19}{3}$	$+\frac{62}{9}$	$+\frac{125}{48}$	$-\frac{6625}{768}$	$+\frac{679375}{64512}$
+2	2	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{94}{45}$	$+\frac{25}{24}$	$-\frac{1075}{384}$	$+\frac{29375}{10752}$
		e^3	e^5	e^7	e^4	e^6	-
-2	1	$+\frac{16}{3}$	$-\frac{32}{5}$	$+\frac{128}{45}$	$+\frac{3125}{384}$	$-\frac{109375}{9216}$	-
-1	1	$+\frac{71}{24}$	$-\frac{387}{80}$	$+\frac{387}{160}$	$+\frac{523}{128}$	$-\frac{70273}{9216}$	-
0	1	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$	$+\frac{64}{45}$	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{30625}{9216}$	-
+1	1	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$+\frac{8}{45}$	$+\frac{125}{384}$	$-\frac{4375}{9216}$	-
+2	1	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{25}{128}$	$+\frac{6125}{9216}$	-

I. Коэффициенты разложений $C_k^{n, m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k=6		k=7		k=8	k=9
		e^4	e^6	e^5	e^7	e^8	e^9
-3	0	0	$+\frac{3\ 167}{160}$	0	$+\frac{432\ 091}{15\ 360}$	0	0
-2	0	0	$+\frac{1\ 223}{160}$	0	$+\frac{47\ 273}{4\ 608}$	0	0
-1	0	0	$+\frac{81}{40}$	0	$+\frac{117\ 649}{46\ 080}$	0	0
+1	0	0	$-\frac{27}{80}$	0	$-\frac{16\ 807}{46\ 080}$	0	0
+2	0	0	$-\frac{9}{80}$	0	$-\frac{2\ 401}{23\ 040}$	0	0
+3	0	0	$+\frac{9}{80}$	0	$+\frac{343}{3\ 072}$	0	0
-2	2	$+\frac{345}{16}$	$-\frac{10\ 569}{160}$	$+\frac{69\ 251}{1\ 920}$	$-\frac{5\ 394\ 109}{46\ 080}$	$+\frac{42\ 037}{720}$	$+\frac{3\ 306\ 951}{35\ 840}$
-1	2	$+\frac{209}{16}$	$-\frac{887}{20}$	$+\frac{78\ 077}{3\ 840}$	$-\frac{2\ 228\ 929}{30\ 720}$	$+\frac{17\ 807}{576}$	$+\frac{3\ 313\ 213}{71\ 680}$
0	2	$+\frac{115}{16}$	$-\frac{2\ 049}{80}$	$+\frac{9\ 893}{960}$	$-\frac{889\ 303}{23\ 040}$	$+\frac{42\ 037}{2\ 880}$	$+\frac{367\ 439}{17\ 920}$
+1	2	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{189}{16}$	$+\frac{16\ 807}{3\ 840}$	$-\frac{1\ 495\ 823}{92\ 160}$	$+\frac{256}{45}$	$+\frac{531\ 441}{71\ 680}$
+2	2	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{261}{80}$	$+\frac{2\ 401}{1\ 920}$	$-\frac{12\ 005}{3\ 072}$	$+\frac{64}{45}$	$+\frac{59\ 049}{35\ 840}$
		e^5	e^7	e^8	-	e^9	-
-2	1	$+\frac{243}{20}$	$-\frac{729}{35}$	$+\frac{823\ 543}{46\ 080}$	-	$+\frac{8\ 192}{315}$	-
-1	1	$+\frac{899}{160}$	$-\frac{6\ 617}{560}$	$+\frac{355\ 081}{46\ 080}$	-	$+\frac{47\ 259}{4\ 480}$	-
0	1	$+\frac{81}{40}$	$-\frac{162}{35}$	$+\frac{117\ 649}{46\ 080}$	-	$+\frac{1\ 024}{315}$	-
+1	1	$+\frac{27}{80}$	$-\frac{81}{140}$	$+\frac{16\ 807}{46\ 080}$	-	$+\frac{128}{315}$	-
+2	1	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{27}{35}$	$-\frac{2\ 401}{9\ 216}$	-	$-\frac{32}{105}$	-

II. Коэффициенты разложений $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k=1				k=2				
		e^0	e^2	e^4	e^6	e	e^3	e^4	e^7	
-2	1	+1	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{11}{192}$	$-\frac{457}{9\ 216}$	+2	$-\frac{5}{3}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{45}$	
-1	1	+1	$-\frac{7}{8}$	$+\frac{3}{64}$	$-\frac{199}{9\ 216}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$+\frac{35}{96}$	$-\frac{13}{240}$	
0	1	+1	$-\frac{7}{8}$	$+\frac{17}{192}$	$-\frac{271}{9\ 216}$	+1	$-\frac{7}{6}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{19}{360}$	
+1	1	+1	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{11}{192}$	$-\frac{457}{9\ 216}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$	$+\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{45}$	
+2	1	+1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{25}{64}$	$-\frac{613}{9\ 216}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{3}{80}$	
+3	1	+1	$+\frac{5}{8}$	$-\frac{151}{192}$	$-\frac{1\ 387}{9\ 216}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{6}$	$-\frac{17}{48}$	$+\frac{47}{1\ 440}$	
-2	3	0	$+\frac{7}{8}$	$-\frac{85}{384}$	$-\frac{237}{5\ 120}$	-2	$+\frac{9}{2}$	$-\frac{103}{60}$	$+\frac{2}{15}$	
-1	3	0	$+\frac{13}{8}$	$-\frac{329}{384}$	$-\frac{2\ 009}{15\ 360}$	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{13}{2}$	$-\frac{1\ 709}{480}$	$+\frac{13}{40}$	
0	3	0	$+\frac{21}{8}$	$-\frac{243}{128}$	$-\frac{339}{5\ 120}$	-3	$+\frac{33}{4}$	$-\frac{111}{20}$	$+\frac{13}{15}$	
+1	3	0	$+\frac{31}{8}$	$-\frac{1\ 213}{384}$	$+\frac{143}{1\ 024}$	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{75}{8}$	$-\frac{821}{120}$	$+\frac{22}{15}$	
+2	3	0	$+\frac{43}{8}$	$-\frac{1\ 637}{384}$	$+\frac{3\ 397}{15\ 360}$	-4	$+\frac{19}{2}$	$-\frac{791}{120}$	$+\frac{37}{24}$	
			e	e^3	e^5	e^7	e^0	e^2	e^4	e^6
-2	2	-1	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{9}{128}$	$+\frac{1\ 321}{23\ 040}$	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{89}{48}$	$-\frac{211}{1\ 440}$	
-1	2	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{25}{24}$	$+\frac{15}{256}$	$+\frac{971}{15\ 360}$	+1	-4	$+\frac{47}{16}$	$-\frac{29}{72}$	
0	2	-2	$+\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{64}$	$+\frac{151}{2\ 880}$	+1	-4	$+\frac{163}{48}$	$-\frac{527}{720}$	
+1	2	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{49}{24}$	$-\frac{35}{256}$	$+\frac{3\ 941}{46\ 080}$	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{35}{12}$	$-\frac{131}{180}$	
+2	2	-3	$+\frac{23}{12}$	$+\frac{19}{128}$	$+\frac{371}{2\ 560}$	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{73}{360}$	

II. Коэффициенты разложений $S_k^{n, m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k=3				k=4				
		e^0	e^2	e^4	e^6	e	e^3	e^5	e^7	
-2	1	0	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{459}{128}$	$+\frac{4\ 887}{5\ 120}$	0	$+\frac{16}{3}$	$-\frac{104}{15}$	$+\frac{26}{9}$	
-1	1	0	$+\frac{17}{8}$	$-\frac{367}{128}$	$+\frac{5\ 489}{5\ 120}$	0	$+\frac{71}{24}$	$-\frac{1\ 129}{240}$	$+\frac{1\ 177}{480}$	
0	1	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{207}{128}$	$+\frac{3\ 681}{5\ 120}$	0	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{34}{15}$	$+\frac{121}{90}$	
+1	1	0	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{51}{128}$	$+\frac{543}{5\ 120}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{13}{30}$	$+\frac{13}{72}$	
+2	1	0	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{53}{128}$	$-\frac{353}{1\ 024}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{29}{60}$	$-\frac{107}{240}$	
+3	1	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{81}{128}$	$-\frac{1\ 683}{5\ 120}$	0	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{131}{240}$	$-\frac{203}{576}$	
-2	3	+1	$-\frac{17}{2}$	$+\frac{951}{64}$	$-\frac{38\ 947}{5\ 120}$	+4	-24	$+\frac{241}{6}$	$-\frac{5\ 309}{210}$	
-1	3	+1	-9	$+\frac{1\ 143}{64}$	$-\frac{11\ 689}{1\ 024}$	$+\frac{7}{2}$	$-\frac{179}{8}$	$+\frac{2\ 009}{48}$	$-\frac{103\ 781}{3\ 360}$	
0	3	+1	-9	$+\frac{1\ 215}{64}$	$-\frac{71\ 813}{5\ 120}$	+3	$-\frac{39}{2}$	$+\frac{155}{4}$	$-\frac{26\ 843}{840}$	
+1	3	+1	$-\frac{17}{2}$	$+\frac{1\ 143}{64}$	$-\frac{72\ 131}{5\ 120}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{63}{4}$	$+\frac{757}{24}$	$-\frac{15\ 387}{560}$	
+2	3	+1	$-\frac{15}{2}$	$+\frac{927}{64}$	$-\frac{56\ 599}{5\ 120}$	+2	$-\frac{23}{2}$	$+\frac{65}{3}$	$-\frac{31\ 013}{1\ 680}$	
			e	e^3	e^5	e^7	e^2	e^4	e^6	-
-2	2	+3	$-\frac{69}{8}$	$+\frac{3\ 717}{640}$	$-\frac{213}{160}$	$+\frac{13}{2}$	$-\frac{55}{3}$	$+\frac{10\ 787}{720}$	-	
-1	2	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{131}{16}$	$+\frac{8\ 879}{1\ 280}$	$-\frac{5\ 037}{2\ 560}$	$+\frac{19}{4}$	$-\frac{121}{8}$	$+\frac{10\ 613}{720}$	-	
0	2	+2	$-\frac{27}{4}$	$+\frac{2\ 061}{320}$	$-\frac{2881}{1280}$	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{259}{24}$	$+\frac{8\ 369}{720}$	-	
+1	2	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{75}{16}$	$+\frac{5\ 709}{1\ 280}$	$-\frac{4\ 353}{2\ 560}$	+2	$-\frac{19}{3}$	$+\frac{247}{36}$	-	
+2	2	+1	$-\frac{19}{8}$	$+\frac{1\ 087}{640}$	$-\frac{59}{128}$	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{763}{360}$	-	

II. Коэффициенты разложений $S_k^{n, m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k=5			k=6		
		e ²	e ⁴	e ⁶	e ³	e ⁵	e ⁷
-2	1	0	$+\frac{3\ 125}{384}$	$-\frac{115\ 625}{9\ 216}$	0	$+\frac{243}{20}$	$-\frac{1\ 215}{56}$
-1	1	0	$+\frac{523}{128}$	$-\frac{69\ 023}{9\ 216}$	0	$+\frac{899}{160}$	$-\frac{817}{70}$
0	1	0	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{29\ 375}{9\ 216}$	0	$+\frac{81}{40}$	$-\frac{2\ 511}{560}$
+1	1	0	$+\frac{125}{384}$	$-\frac{4\ 625}{9\ 216}$	0	$+\frac{27}{80}$	$-\frac{135}{224}$
+2	1	0	$-\frac{25}{128}$	$+\frac{5\ 275}{9\ 216}$	0	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{387}{560}$
+3	1	0	$-\frac{95}{384}$	$+\frac{4\ 765}{9\ 216}$	0	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{117}{224}$
-2	3	$+\frac{85}{8}$	$-\frac{1\ 355}{24}$	$+\frac{98\ 525}{1\ 024}$	$+\frac{47}{2}$	$-\frac{239}{2}$	$-\frac{33\ 951}{160}$
-1	3	$+\frac{67}{8}$	$-\frac{2\ 279}{48}$	$+\frac{274\ 345}{3\ 072}$	+17	$-\frac{2\ 949}{32}$	$+\frac{57\ 213}{320}$
0	3	$+\frac{51}{8}$	$-\frac{593}{16}$	$+\frac{75\ 643}{1\ 024}$	$+\frac{47}{4}$	$-\frac{525}{8}$	$+\frac{43\ 041}{320}$
+1	3	$+\frac{37}{8}$	$-\frac{635}{24}$	$+\frac{54\ 765}{1\ 024}$	$+\frac{61}{8}$	$-\frac{677}{16}$	$+\frac{56\ 487}{640}$
+2	3	$+\frac{25}{8}$	$-\frac{50}{3}$	$+\frac{98\ 875}{3\ 072}$	$+\frac{9}{2}$	$-\frac{189}{8}$	$+\frac{3\ 807}{80}$
		e ³	e ⁵	e ⁷	e ⁴	e ⁶	-
-2	2	$+\frac{295}{24}$	$-\frac{13\ 745}{384}$	$+\frac{276\ 475}{8\ 064}$	$+\frac{345}{16}$	$-\frac{10\ 569}{160}$	-
-1	2	$+\frac{389}{48}$	$-\frac{20\ 267}{768}$	$+\frac{104\ 551}{3\ 584}$	$+\frac{209}{16}$	$-\frac{887}{20}$	-
0	2	$+\frac{59}{12}$	$-\frac{3\ 221}{192}$	$+\frac{326\ 101}{16\ 128}$	$+\frac{115}{16}$	$-\frac{2\ 049}{80}$	-
+1	2	$+\frac{125}{48}$	$-\frac{6\ 625}{768}$	$+\frac{338\ 875}{32\ 256}$	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{189}{16}$	-
+2	2	$+\frac{25}{24}$	$-\frac{1\ 075}{384}$	$+\frac{925}{336}$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{261}{80}$	-

II. Коэффициенты разложений $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	$k=7$		$k=8$		$k=9$	$k=10$
		e^4	e^6	e^6	e^7	e^6	e^7
-2	1	0	$+\frac{823\ 543}{46\ 080}$	0	$+\frac{8\ 192}{315}$	0	0
-1	1	0	$+\frac{355\ 081}{46\ 080}$	0	$+\frac{47\ 259}{4\ 480}$	0	0
0	1	0	$+\frac{117\ 649}{46\ 080}$	0	$+\frac{1\ 024}{315}$	0	0
+1	1	0	$+\frac{16\ 807}{46\ 080}$	0	$+\frac{128}{315}$	0	0
+2	1	0	$-\frac{2\ 401}{9\ 216}$	0	$-\frac{32}{105}$	0	0
+3	1	0	$-\frac{9\ 947}{46\ 080}$	0	$-\frac{68}{315}$	0	0
-2	3	$+\frac{17\ 969}{384}$	$-\frac{301\ 973}{1\ 280}$	$+\frac{2\ 611}{30}$	$-\frac{39\ 893}{90}$	$+\frac{790\ 053}{5\ 120}$	$+\frac{532\ 345}{2\ 016}$
-1	3	$+\frac{12\ 085}{384}$	$-\frac{32\ 419}{192}$	$+\frac{26\ 371}{480}$	$-\frac{1\ 710\ 983}{5\ 760}$	$+\frac{471\ 527}{5\ 120}$	$+\frac{604\ 279}{4\ 032}$
0	3	$+\frac{2\ 567}{128}$	$-\frac{35\ 583}{320}$	$+\frac{2\ 611}{80}$	$-\frac{87\ 599}{480}$	$+\frac{263\ 351}{5\ 120}$	$+\frac{106\ 469}{1\ 344}$
+1	3	$+\frac{4\ 553}{384}$	$-\frac{84\ 109}{1\ 280}$	$+\frac{8\ 551}{480}$	$-\frac{288\ 221}{2\ 880}$	$+\frac{26\ 809}{1\ 024}$	$+\frac{305\ 593}{8\ 064}$
+2	3	$+\frac{2\ 401}{384}$	$-\frac{127\ 253}{3\ 840}$	$+\frac{128}{15}$	$-\frac{416}{9}$	$+\frac{59\ 049}{5\ 120}$	$+\frac{15\ 625}{1\ 008}$
		e^6	e^7	e^6	-	e^7	-
-2	2	$+\frac{69\ 251}{1\ 920}$	$-\frac{5\ 394\ 109}{46\ 080}$	$+\frac{42\ 037}{720}$	-	$+\frac{3\ 306\ 951}{35\ 840}$	-
-1	2	$+\frac{78\ 077}{3\ 840}$	$-\frac{2\ 228\ 929}{30\ 720}$	$+\frac{17\ 807}{576}$	-	$+\frac{3\ 313\ 213}{71\ 680}$	-
0	2	$+\frac{9\ 893}{960}$	$-\frac{889\ 303}{23\ 040}$	$+\frac{42\ 037}{2\ 880}$	-	$+\frac{367\ 439}{17\ 920}$	-
+1	2	$+\frac{16\ 807}{3\ 840}$	$-\frac{1\ 495\ 823}{92\ 160}$	$+\frac{256}{45}$	-	$+\frac{531\ 441}{71\ 680}$	-
+2	2	$+\frac{2\ 401}{1\ 920}$	$-\frac{12\ 005}{3\ 072}$	$+\frac{64}{45}$	-	$+\frac{59\ 049}{35\ 840}$	-

III. Зависимость между большой полуосью орбиты и средним суточным движением

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>
400"	4,28513	450"	3,96153	500"	3,69282	550"	3,46547
01	,27801 - 712	51	,95567 - 586	01	,68790 - 492	51	,46128 - 419
02	,27091 710	52	,94983 584	02	,68300 490	52	,45710 418
03	,26384 707	53	,94402 581	03	,67812 488	53	,45293 417
04	,25680 704	54	,93822 580	04	,67325 487	54	,44877 416
	- 701		- 577		- 485		- 414
405	4,24979	455	3,93245	505	3,66840	555	3,44463
06	,24281 698	56	,92670 575	06	,66357 483	56	,44050 413
07	,23586 695	57	,92097 573	07	,65875 482	57	,43638 412
08	,22893 693	58	,91526 571	08	,65394 481	58	,43227 411
09	,22214 689	59	,90957 569	09	,64916 478	59	,42818 409
	- 687		- 567		- 478		- 409
410	4,21517	460	3,90390	510	3,64438	560	3,42409
11	,20833 684	61	,89826 564	11	,63963 475	61	,42002 407
12	,20152 681	62	,89263 563	12	,63489 474	62	,41597 405
13	,19473 679	63	,88702 561	13	,63016 473	63	,41192 405
14	,18798 675	64	,88143 559	14	,62545 471	64	,40789 403
	- 673		- 556		- 469		- 403
415	4,18125	465	3,87587	515	3,62076	565	3,40386
16	,17454 671	66	,87032 555	16	,61608 468	66	,39985 400
17	,16786 668	67	,86479 553	17	,61141 467	67	,39585 398
18	,16121 665	68	,85929 550	18	,60676 465	68	,39187 398
19	,15459 662	69	,85380 549	19	,60213 463	69	,38789 398
	- 660		- 547		- 462		- 396
420	4,14799	470	3,84833	520	3,59751	570	3,38393
21	,14142 657	71	,84288 545	21	,59291 460	71	,37998 395
22	,13488 654	72	,83745 543	22	,58832 459	72	,37604 394
23	,12836 652	73	,83204 541	23	,58374 458	73	,37211 393
24	,12186 650	74	,82665 539	24	,57918 456	74	,36819 392
	- 646		- 537		- 455		- 391
425	4,11540	475	3,82128	525	3,57463	575	3,36428
26	,10895 645	76	,81592 536	26	,57010 453	76	,36039 389
27	,10254 641	77	,81059 533	27	,56558 452	77	,35650 389
28	,09614 640	78	,80527 532	28	,56108 450	78	,35263 387
29	,08978 636	79	,79997 530	29	,55659 449	79	,34877 386
	- 635		- 527		- 447		- 385
430	4,08343	480	3,79470	530	3,55212	580	3,34492
31	,07711 632	81	,78943 527	31	,54765 447	81	,34108 384
32	,07082 629	82	,78419 524	32	,54321 444	82	,33725 383
33	,06455 627	83	,77897 522	33	,53877 442	83	,33343 382
34	,05830 625	84	,77376 521	34	,53435 442	84	,32963 380
	- 622		- 519		- 440		- 380
435	4,05208	485	3,76857	535	3,52995	585	3,32583
36	,04588 620	86	,76340 517	36	,52556 439	86	,32205 378
37	,03971 617	87	,75824 516	37	,52118 438	87	,31827 378
38	,03356 615	88	,75311 513	38	,51681 437	88	,31451 376
39	,02743 613	89	,74799 512	39	,51246 435	89	,31076 375
	- 611		- 510		- 433		- 374
440	4,02132	490	3,74289	540	3,50813	590	3,30702
41	,01524 608	91	,73781 508	41	,50380 433	91	,30328 374
42	,00919 605	92	,73274 507	42	,49949 431	92	,29956 372
43	4,00315 604	93	,72769 505	43	,49519 430	93	,29585 371
44	3,99714 601	94	,72266 503	44	,49091 428	94	,29215 370
	- 599		- 502		- 427		- 369
445	3,99115	495	3,71764	545	3,48664	595	3,28846
46	,98518 597	96	,71264 500	46	,48238 426	96	,28478 368
47	,97923 595	97	,70766 498	47	,47813 425	97	,28112 366
48	,97331 592	98	,70270 496	48	,47390 423	98	,27746 366
49	,96741 590	99	,69775 495	49	,46968 422	99	,27381 365
	- 588		- 493		- 421		- 364
450	3,96153	500	3,69282	550	3,46547	600	3,27017

III. Зависимость между большой полуосью орбиты и средним суточным движением

п		а		п		а		п		а		п		а	
600"	3,27017		-363	650"	3,10024		-318	700"	2,95079		-280	750"	2,81815		-251
01	,26654	362		51	,09706	316		01	,94799	280		51	,81564	249	
02	,26292	361		52	,09390	316		02	,94519	289		52	,81315	249	
03	,25931	359		53	,09074	315		03	,94239	278		53	,81066	249	
04	,25572		-359	54	,08759		-315	04	,93961		-278	54	,80817		-248
605	3,25213	358		655	3,08444	313		705	2,93683	278		755	2,80569	247	
06	,24855	357		56	,08131	313		06	,93405	277		56	,80322	247	
07	,24498	356		57	,07818	312		07	,93128	276		57	,80075	247	
08	,24142	355		58	,07506	311		08	,92852	275		58	,79828	246	
09	,23787		-354	59	,07195		-310	09	,92577		-275	59	,79582		-245
610	3,23433	353		667	3,06885	310		710	2,92302	274		760	2,79337	245	
11	,23080	352		61	,06575	309		11	,92028	273		61	,79092	244	
12	,22728	351		62	,06266	308		12	,91755	273		62	,78848	244	
13	,22377	350		63	,05958	307		13	,91482	273		63	,78604	243	
14	,22027		-349	64	,05651		-307	14	,91209		-271	64	,78361		-242
615	3,21678	349		665	3,05344	305		715	2,90938	271		765	2,78119	243	
16	,21329	347		66	,05039	305		16	,90667	270		66	,77876	241	
17	,20982	346		67	,04734	304		17	,90397	270		67	,77635	241	
18	,20636	346		68	,04430	304		18	,90127	269		68	,77394	241	
19	,20290		-344	69	,04126		-303	19	,89858		-269	69	,77153		-240
620	3,19946	344		670	3,03823	302		720	2,89589	267		770	2,76913	239	
21	,19602	342		71	,03521	301		21	,89322	268		71	,76674	239	
22	,19260	342		72	,03220	300		22	,89054	266		72	,76435	239	
23	,18918	341		73	,02920	300		23	,88788	266		73	,76196	238	
24	,18577		-340	74	,02620		-299	24	,88522		-266	74	,75958		-237
625	3,18237	339		675	3,02321	298		725	2,88256	264		775	2,75721	237	
26	,17898	338		76	,02023	298		26	,87992	264		76	,75484	236	
27	,17560	337		77	,01725	296		27	,87728	264		77	,75248	236	
28	,17223	336		78	,01429	296		28	,87464	263		78	,75012	236	
29	,16887		-336	79	,01133		-296	29	,87201		-262	79	,74776		-235
630	3,16551	334		680	3,00837	294		730	2,86939	262		780	2,74541	234	
31	,16217	334		81	,00543	294		31	,86677	261		81	,74307	234	
32	,15883	333		82	,00249	293		32	,86416	261		82	,74073	233	
33	,15550	332		83	,2,99956	293		33	,86155	260		83	,73840	233	
34	,15218		-331	84	,99663		-291	34	,85895		-259	84	,73607		-233
635	3,14887	330		685	2,99372	291		735	2,85636	259		785	2,73374	231	
36	,14557	329		86	,99081	291		36	,85377	258		86	,73143	232	
37	,14228	329		87	,98790	289		37	,85119	258		87	,72911	231	
38	,13899	327		88	,98501	289		38	,84861	257		88	,72680	230	
39	,13572		-327	89	,98212		-288	39	,84604		-256	89	,72450		-230
640	3,13245	326		690	2,97924	288		740	2,84348	256		790	2,72220	230	
41	,12919	325		91	,97636	287		41	,84092	255		91	,71990	229	
42	,12594	324		92	,97349	286		42	,83837	255		92	,71761	229	
43	,12270	323		93	,97063	285		43	,83582	254		93	,71533	228	
44	,11947		-323	94	,96778		-285	44	,83328		-254	94	,71305		-228
645	3,11624	321		695	2,96493	284		745	2,83074	253		795	2,71077	227	
46	,11303	321		96	,96209	283		46	,82821	252		96	,70850	227	
47	,10982	320		97	,95926	283		47	,82569	252		97	,70623	226	
48	,10662	320		98	,95643	282		48	,82317	252		98	,70397	225	
49	,10342		-318	99	,95361		-282	49	,82065		-250	99	,70172		-225
650	3,10024			700	2,95079			750	2,81815			800	2,69947		

III. Зависимость между большой полуосью орбиты и средним суточным движением

n	a	n	a	n	a	n	a
800"	2,69947	850"	2,59254	900"	2,49561	950"	2,40725
01	,69722	51	,59051	01	,49376	51	,40557
02	,69497	52	,58848	02	,49192	52	,40388
03	,69274	53	,58646	03	,49008	53	,40220
04	,69050	54	,58444	04	,48824	54	,40052
	- 222		- 202		- 183		- 168
805	2,68828	855	2,58242	905	2,48641	955	2,39884
06	,68605	56	,58041	06	,48458	56	,39717
07	,68383	57	,57840	07	,48275	57	,39550
08	,68162	58	,57640	08	,48093	58	,39383
09	,67941	59	,57440	09	,47911	59	,39217
	- 221		- 200		- 182		- 166
810	2,67720	860	2,57240	910	2,47729	960	2,39051
11	,67500	61	,57041	11	,47548	61	,38885
12	,67280	62	,56842	12	,47367	62	,38719
13	,67061	63	,56644	13	,47186	63	,38554
14	,66842	64	,56446	14	,47006	64	,38389
	- 218		- 198		- 180		- 165
815	2,66624	865	2,56243	915	2,46826	965	2,38224
16	,66406	66	,56051	16	,46646	66	,38060
17	,66189	67	,55854	17	,46467	67	,37896
18	,65972	68	,55657	18	,46288	68	,37732
19	,65755	69	,55461	19	,46109	69	,37568
	- 216		- 196		- 178		- 163
820	2,65539	870	2,55265	920	2,45931	970	2,37405
21	,65323	71	,55070	21	,45752	71	,37242
22	,65108	72	,54875	22	,45575	72	,37079
23	,64893	73	,54680	23	,45397	73	,36917
24	,64679	74	,54486	24	,45220	74	,36755
	- 214		- 194		- 176		- 162
825	2,64465	875	2,54292	925	2,45044	975	2,36593
26	,64252	76	,54098	26	,44867	76	,36431
27	,64039	77	,53905	27	,44691	77	,36270
28	,63826	78	,53712	28	,44515	78	,36109
29	,63614	79	,53520	29	,44340	79	,35948
	- 212		- 192		- 176		- 161
830	2,63402	880	2,53328	930	2,44164	980	2,35787
31	,63191	81	,53136	31	,43990	81	,35627
32	,62980	82	,52945	32	,43815	82	,35467
33	,62769	83	,52754	33	,43641	83	,35307
34	,62559	84	,52563	34	,43467	84	,35148
	- 210		- 190		- 174		- 159
835	2,62349	885	2,52373	935	2,43293	985	2,34989
36	,62140	86	,52183	36	,43120	86	,34830
37	,61931	87	,51993	37	,42947	87	,34671
38	,61723	88	,51804	38	,42774	88	,34513
39	,61515	89	,51615	39	,42602	89	,34355
	- 208		- 189		- 172		- 158
840	2,61307	890	2,51426	940	2,42430	990	2,34197
41	,61100	91	,51238	41	,42258	91	,34039
42	,60893	92	,51051	42	,42086	92	,33882
43	,60687	93	,50863	43	,41915	93	,33725
44	,60481	94	,50676	44	,41744	94	,33568
	- 206		- 187		- 170		- 156
845	2,60275	895	2,50489	945	2,41574	995	2,33412
46	,60070	96	,50303	46	,41404	96	,33255
47	,59866	97	,50117	47	,41234	97	,33099
48	,59661	98	,49931	48	,41064	98	,32944
49	,59457	99	,49746	49	,40894	99	,32788
	- 203		- 185		- 169		- 155
850	2,59254	900	2,49561	950	2,40725	1000	2,32633

III. Зависимость между большой полуосью орбиты и средним суточным движением

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>
1000"	2,32633	1050"	2,25188	1100"	2,18311	1150"	2,11937
01	,32478 - 155	51	,25045 - 143	01	,18179 - 132	51	,11814 - 123
02	,32323 155	52	,24902 143	02	,18047 132	52	,11691 123
03	,32169 154	53	,24760 142	03	,17915 132	53	,11569 122
04	,32015 154	54	,24618 142	04	,17783 132	54	,11446 123
	- 154		- 142		- 131		- 122
1005	2,31861	1055	2,24476	1105	2,17652	1155	2,11324
06	,31707 154	56	,24334 142	06	,17521 131	56	,11203 121
07	,31553 154	57	,24192 142	07	,17390 131	57	,11081 122
08	,31400 153	58	,24051 141	08	,17259 131	58	,10959 121
09	,31247 153	59	,23910 141	09	,17128 131	59	,10838 121
	- 152		- 141		- 130		- 121
1010	2,31095	1060	2,23769	1110	2,16998	1160	2,10717
11	,30942 153	61	,23629 140	11	,16868 130	61	,10596 121
12	,30790 152	62	,23488 141	12	,16738 130	62	,10475 121
13	,30638 152	63	,23348 140	13	,16608 130	63	,10354 121
14	,30487 151	64	,23208 140	14	,16478 130	64	,10234 120
	- 152		- 140		- 129		- 121
1015	2,30335	1065	2,23068	1115	2,16349	1165	2,10113
16	,30184 151	66	,22929 139	16	,16220 129	66	,09993 120
17	,30033 151	67	,22789 140	17	,16090 130	67	,09873 120
18	,29882 150	68	,22650 139	18	,15961 129	68	,09753 120
19	,29732 150	69	,22512 138	19	,15833 128	69	,09634 119
	- 150		- 139		- 129		- 120
1020	2,29582	1070	2,22373	1120	2,15704	1170	2,09514
21	,29432 150	71	,22234 139	21	,15576 128	71	,09395 119
22	,29282 150	72	,22096 138	22	,15448 128	72	,09276 119
23	,29133 149	73	,21958 138	23	,15320 128	73	,09157 119
24	,28984 149	74	,21820 138	24	,15192 128	74	,09038 119
	- 149		- 137		- 127		- 118
1025	2,28835	1075	2,21683	1125	2,15065	1175	2,08920
26	,28686 149	76	,21545 138	26	,14937 128	76	,08801 119
27	,28537 149	77	,21403 137	27	,14810 127	77	,08683 118
28	,28389 148	78	,21271 137	28	,14683 127	78	,08565 118
29	,28241 148	79	,21135 136	29	,14557 126	79	,08447 118
	- 147		- 137		- 127		- 118
1030	2,28094	1080	2,20998	1130	2,14430	1180	2,08329
31	,27946 148	81	,20862 136	31	,14304 126	81	,08211 118
32	,27799 147	82	,20726 136	32	,14177 127	82	,08094 117
33	,27652 147	83	,20590 136	33	,14051 126	83	,07977 117
34	,27505 147	84	,20454 136	34	,13926 125	84	,07860 117
	- 147		- 135		- 126		- 117
1035	2,27358	1085	2,20319	1135	2,13800	1185	2,07743
36	,27212 146	86	,20183 136	36	,13674 126	86	,07626 117
37	,27066 146	87	,20048 135	37	,13549 125	87	,07509 117
38	,26920 146	88	,19913 135	38	,13424 125	88	,07393 116
39	,26774 146	89	,19779 134	39	,13299 125	89	,07276 117
	- 145		- 135		- 125		- 116
1040	2,26629	1090	2,19644	1140	2,13174	1190	2,07160
41	,26484 145	91	,19510 134	41	,13050 124	91	,07044 116
42	,26339 145	92	,19376 134	42	,12925 125	92	,06928 116
43	,26194 145	93	,19242 134	43	,12801 124	93	,06813 115
44	,26050 144	94	,19109 133	44	,12677 124	94	,06697 116
	- 145		- 134		- 124		- 115
1045	2,25905	1095	2,18975	1145	2,12553	1195	2,06582
46	,25762 143	96	,18842 133	46	,12429 124	96	,06467 115
47	,25618 144	97	,18709 133	47	,12306 123	97	,06352 115
48	,25474 143	98	,18576 132	48	,12183 123	98	,06237 115
49	,25331 143	99	,18444 132	49	,12059 124	99	,06122 115
	- 143		- 133		- 122		- 114
1050	2,25188	1100	2,18311	1150	2,11937	1200	2,06008

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	e M
0°	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	360°
1	0,05	0,11	0,18	0,25	0,33	0,43	0,54	0,67	0,82	1,00	359
2	0,11	0,22	0,35	0,50	0,67	0,86	1,08	1,33	1,63	2,00	358
3	0,16	0,33	0,53	0,75	1,00	1,28	1,61	2,00	2,45	2,99	357
4	0,21	0,44	0,70	1,00	1,33	1,71	2,15	2,66	3,26	3,97	356
5	0,26	0,55	0,88	1,25	1,66	2,14	2,68	3,21	4,06	4,95	355
6	0,32	0,66	1,05	1,49	1,99	2,56	3,21	3,97	4,86	5,91	354
7	0,37	0,77	1,23	1,74	2,32	2,98	3,73	4,61	5,64	6,86	353
8	0,42	0,88	1,40	1,99	2,65	3,40	4,26	5,26	6,42	7,80	352
9	0,47	0,99	1,58	2,23	2,97	3,81	4,77	5,89	7,19	8,72	351
10	0,52	1,10	1,75	2,47	3,29	4,22	5,29	6,52	7,94	9,62	350
11	0,57	1,21	1,92	2,72	3,62	4,63	5,79	7,13	8,69	10,50	349
12	0,63	1,32	2,09	2,96	3,93	5,04	6,30	7,74	9,41	11,36	348
13	0,68	1,43	2,26	3,20	4,25	5,44	6,79	8,34	10,13	12,20	347
14	0,73	1,53	2,43	3,43	4,56	5,83	7,28	8,93	10,82	13,01	346
15	0,78	1,64	2,60	3,67	4,87	6,22	7,76	9,51	11,51	13,80	345
16	0,83	1,75	2,76	3,90	5,17	6,61	8,23	10,07	12,17	14,57	344
17	0,88	1,85	2,93	4,13	5,48	6,99	8,69	10,63	12,82	15,31	343
18	0,93	1,95	3,09	4,36	5,77	7,36	9,15	11,17	13,45	16,03	342
19	0,98	2,06	3,25	4,58	6,07	7,73	9,60	11,70	14,07	16,73	341
20	1,03	2,16	3,42	4,81	6,36	8,10	10,04	12,22	14,66	17,40	340
21	1,08	2,26	3,57	5,03	6,65	8,45	10,47	12,72	15,24	18,05	339
22	1,13	2,36	3,73	5,25	6,93	8,80	10,89	13,21	15,80	18,67	338
23	1,17	2,46	3,89	5,46	7,21	9,15	11,30	13,69	16,35	19,27	337
24	1,22	2,56	4,04	5,67	7,48	9,48	11,70	14,16	16,87	19,84	336
25	1,27	2,66	4,19	5,88	7,75	9,81	12,09	14,61	17,38	20,40	335
26	1,31	2,76	4,34	6,09	8,02	10,14	12,48	15,05	17,87	20,93	334
27	1,36	2,85	4,49	6,29	8,27	10,45	12,85	15,48	18,34	21,43	333
28	1,41	2,95	4,64	6,49	8,53	10,76	13,21	15,89	18,79	21,92	332
29	1,45	3,04	4,78	6,68	8,77	11,06	13,56	16,29	19,23	22,38	331
30	1,50	3,13	4,92	6,88	9,02	11,36	13,91	16,67	19,65	22,83	330
31	1,54	3,22	5,06	7,06	9,25	11,64	14,23	17,04	20,05	23,25	329
32	1,58	3,31	5,20	7,25	9,49	11,92	14,56	17,40	20,44	23,65	328
33	1,62	3,40	5,33	7,43	9,72	12,20	14,87	17,75	20,81	24,04	327
34	1,67	3,49	5,47	7,61	9,94	12,46	15,17	18,08	21,16	24,40	326
35	1,71	3,57	5,59	7,78	10,16	12,72	15,47	18,40	21,50	24,75	325
36	1,76	3,66	5,72	7,95	10,37	12,97	15,75	18,71	21,82	25,07	324
37	1,80	3,74	5,84	8,12	10,57	13,21	16,02	19,00	22,13	25,38	323
38	1,84	3,82	5,97	8,28	10,77	13,44	16,28	19,28	22,42	25,68	322
39	1,87	3,90	6,09	8,44	10,97	13,67	16,53	19,55	22,70	25,95	321
40	1,91	3,98	6,20	8,60	11,16	13,89	16,78	19,81	22,97	26,22	320
41	1,95	4,06	6,32	8,75	11,34	14,10	17,01	20,06	23,22	26,46	319
42	1,99	4,13	6,43	8,89	11,52	14,30	17,23	20,29	23,45	26,69	318
43	2,03	4,20	6,54	9,03	11,69	14,50	17,44	20,51	23,68	26,90	317
44	2,06	4,28	6,65	9,17	11,85	14,69	17,65	20,72	23,89	27,10	316
45	2,10	4,35	6,75	9,31	12,02	14,87	17,84	20,92	24,08	27,29	315
46	2,13	4,42	6,85	9,44	12,17	15,04	18,03	21,11	24,27	27,46	314
47	2,17	4,48	6,94	9,56	12,32	15,21	18,20	21,29	24,44	27,62	313
48	2,20	4,55	7,04	9,68	12,46	15,37	18,37	21,46	24,60	27,77	312
49	2,23	4,61	7,14	9,80	12,60	15,52	18,53	21,62	24,75	27,90	311
50	2,27	4,68	7,23	9,91	12,73	15,66	18,68	21,77	24,89	28,02	310

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	e M
0°	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	0°,00	360°
1	1,22	1,50	1,85	2,33	2,99	3,97	5,58	8,60	15,04	26,11	359
2	2,44	2,99	3,70	4,63	5,92	7,81	10,74	15,54	23,02	32,23	358
3	3,65	4,47	5,51	6,89	8,75	11,40	15,26	20,85	28,18	36,26	357
4	4,85	5,93	7,29	9,07	11,44	14,68	19,13	25,00	31,97	39,28	356
5	6,03	7,36	9,03	11,17	13,97	17,66	22,45	28,34	34,95	41,69	355
6	7,19	8,76	10,70	13,17	16,32	20,33	25,30	31,12	37,40	43,69	354
7	8,33	10,12	12,32	15,07	18,50	22,73	27,78	33,47	39,45	45,39	353
8	9,45	11,44	13,88	16,86	20,51	24,89	29,95	35,49	41,21	46,84	352
9	10,54	12,72	15,36	18,55	22,37	26,84	31,86	37,25	42,74	48,11	351
10	11,60	13,96	16,78	20,14	24,08	28,59	33,56	38,80	44,08	49,23	350
11	12,63	15,15	18,13	21,62	25,65	30,18	35,08	40,17	45,27	50,22	349
12	13,63	16,30	19,41	23,01	27,10	31,62	36,44	41,40	46,32	51,09	348
13	14,60	17,39	20,62	24,31	28,44	32,94	37,67	42,49	47,26	51,87	347
14	15,53	18,44	21,77	25,52	29,67	34,14	38,78	43,48	48,11	52,57	346
15	16,44	19,44	22,85	26,66	30,81	35,23	39,79	44,37	48,87	53,20	345
16	17,30	20,40	23,88	27,72	31,87	36,24	40,71	45,18	49,55	53,76	344
17	18,14	21,31	24,84	28,71	32,84	37,16	41,54	45,91	50,16	54,26	343
18	18,94	22,18	25,76	29,63	33,74	38,00	42,31	46,57	50,72	54,70	342
19	19,70	23,01	26,62	30,50	34,58	38,78	43,00	47,17	51,22	55,10	341
20	20,44	23,79	27,42	31,30	35,35	39,49	43,64	47,71	51,67	55,46	340
21	21,15	24,53	28,19	32,05	36,07	40,15	44,2	48,21	52,07	55,78	339
22	21,82	25,24	28,90	32,76	36,73	40,75	44,74	48,65	52,43	56,06	338
23	22,46	25,91	29,58	33,41	37,34	41,30	45,23	49,06	52,76	56,30	337
24	23,08	26,54	30,21	34,02	37,91	41,81	45,67	49,42	53,05	56,51	336
25	23,66	27,14	30,80	34,59	38,43	42,28	46,07	49,75	53,30	56,69	335
26	24,22	27,71	31,36	35,12	38,92	42,71	46,43	50,04	53,52	56,85	334
27	24,75	28,24	31,88	35,61	39,37	43,10	46,76	50,31	53,72	56,98	333
28	25,25	28,75	32,37	36,07	39,78	43,46	47,05	50,54	53,89	57,08	332
29	25,73	29,22	32,83	36,49	40,16	43,78	47,32	50,74	54,03	57,17	331
30	26,18	29,67	33,26	36,89	40,51	44,08	47,56	50,92	54,15	57,23	330
31	26,61	30,09	33,66	37,25	40,83	44,35	47,77	51,07	54,24	57,27	329
32	27,02	30,49	34,03	37,59	41,12	44,59	47,95	51,20	54,32	57,29	328
33	27,40	30,86	34,38	37,90	41,39	44,80	48,12	51,31	54,37	57,29	327
34	27,76	31,21	34,70	38,18	41,63	44,99	48,26	51,40	54,41	57,28	326
35	28,10	31,53	35,00	38,44	41,84	45,16	48,38	51,47	54,43	57,25	325
36	28,43	31,84	35,27	38,68	42,04	45,31	48,47	51,52	54,43	57,21	324
37	28,73	32,12	35,52	38,90	42,21	45,44	48,55	51,55	54,41	57,15	323
38	29,01	32,38	35,75	39,09	42,37	45,55	48,62	51,56	54,38	57,07	322
39	29,27	32,62	35,97	39,27	42,50	45,64	48,66	51,56	54,34	56,98	321
40	29,52	32,85	36,16	39,43	42,62	45,71	48,69	51,55	54,28	56,88	320
41	29,75	33,06	36,34	39,56	42,71	45,76	48,70	51,52	54,21	56,77	319
42	29,96	33,25	36,49	39,68	42,80	45,80	48,70	51,47	54,12	56,64	318
43	30,16	33,42	36,63	39,79	42,86	45,83	48,68	51,41	54,02	56,51	317
44	30,34	33,57	36,76	39,88	42,91	45,84	48,65	51,34	53,91	56,36	316
45	30,51	33,71	36,87	39,95	42,94	45,83	48,60	51,26	53,79	56,20	315
46	30,66	33,84	36,96	40,01	42,96	45,81	48,55	51,16	53,66	56,04	314
47	30,80	33,95	37,04	40,05	42,97	45,78	48,48	51,06	53,52	55,86	313
48	30,93	34,05	37,11	40,08	42,97	45,74	48,40	50,94	53,36	55,67	312
49	31,04	34,13	37,16	40,10	42,95	45,68	48,31	50,81	53,20	55,48	311
50	31,14	34,20	37,20	40,11	42,92	45,62	48,20	50,67	53,03	55,27	310

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	e M
50°	2°,27	4°,68	7°,23	9°,91	12°,73	15°,66	18°,68	21°,77	24°,89	28°,02	310°
51	2,30	4,74	7,31	10,02	12,86	15,80	18,82	21,91	25,02	28,13	309
52	2,33	4,79	7,40	10,13	12,98	15,93	18,96	22,03	25,14	28,23	308
53	2,36	4,85	7,48	10,23	13,10	16,05	19,08	22,15	25,24	28,32	307
54	2,39	4,91	7,56	10,33	13,21	16,17	19,20	22,26	25,34	28,40	306
55	2,41	4,96	7,63	10,42	13,31	16,28	19,31	22,36	25,42	28,46	305
56	2,44	5,01	7,71	10,51	13,41	16,38	19,41	22,45	25,50	28,52	304
57	2,47	5,06	7,77	10,59	13,50	16,48	19,50	22,54	25,57	28,56	303
58	2,49	5,11	7,84	10,67	13,59	16,57	19,59	22,61	25,62	28,60	302
59	2,52	5,16	7,91	10,75	13,67	16,65	19,67	22,68	25,67	28,62	301
60	2,54	5,20	7,97	10,82	13,75	16,73	19,73	22,73	25,71	28,64	300
61	2,57	5,24	8,02	10,89	13,82	16,80	19,80	22,78	25,74	28,65	299
62	2,59	5,28	8,08	10,95	13,89	16,87	19,85	22,83	25,76	28,65	298
63	2,61	5,32	8,13	11,02	13,95	16,92	19,90	22,86	25,78	28,64	297
64	2,63	5,36	8,18	11,07	14,01	16,98	19,95	22,88	25,78	28,62	296
65	2,65	5,40	8,23	11,12	14,06	17,02	19,98	22,90	25,78	28,59	295
66	2,67	5,43	8,27	11,17	14,11	17,06	20,01	22,91	25,77	28,56	294
67	2,69	5,46	8,31	11,22	14,15	17,10	20,03	22,92	25,75	28,51	293
68	2,70	5,49	8,35	11,26	14,19	17,13	20,04	22,91	25,73	28,47	292
69	2,72	5,52	8,39	11,29	14,22	17,15	20,05	22,90	25,70	28,41	291
70	2,74	5,55	8,42	11,33	14,25	17,17	20,05	22,89	25,66	28,34	290
71	2,75	5,57	8,45	11,36	14,28	17,18	20,06	22,87	25,61	28,27	289
72	2,76	5,60	8,48	11,38	14,29	17,19	20,04	22,84	25,56	28,20	288
73	2,78	5,62	8,50	11,40	14,31	17,19	20,03	22,80	25,50	28,11	287
74	2,79	5,64	8,52	11,42	14,32	17,19	20,02	22,76	25,43	28,02	286
75	2,80	5,65	8,54	11,44	14,32	17,18	19,98	22,71	25,36	27,92	285
76	2,81	5,67	8,56	11,45	14,32	17,16	19,95	22,66	25,28	27,82	284
77	2,82	5,68	8,57	11,45	14,32	17,14	19,91	22,60	25,20	27,71	283
78	2,83	5,69	8,58	11,46	14,31	17,12	19,86	22,53	25,11	27,59	282
79	2,84	5,70	8,59	11,46	14,30	17,09	19,82	22,46	25,02	27,47	281
80	2,84	5,71	8,59	11,46	14,28	17,06	19,76	22,39	24,91	27,34	280
81	2,85	5,72	8,59	11,45	14,26	17,02	19,70	22,30	24,81	27,21	279
82	2,85	5,72	8,59	11,44	14,24	16,98	19,64	22,22	24,70	27,07	278
83	2,86	5,73	8,59	11,42	14,21	16,93	19,57	22,12	24,58	26,93	277
84	2,86	5,73	8,59	11,41	14,18	16,88	19,50	22,03	24,46	26,78	276
85	2,86	5,73	8,58	11,39	14,14	16,82	19,42	21,93	24,33	26,63	275
86	2,86	5,73	8,57	11,36	14,10	16,76	19,34	21,82	24,20	26,47	274
87	2,86	5,72	8,55	11,34	14,06	16,70	19,25	21,71	24,06	26,31	273
88	2,86	5,72	8,54	11,31	14,01	16,63	19,16	21,59	23,92	26,14	272
89	2,86	5,71	8,52	11,27	13,96	16,56	19,06	21,47	23,77	25,97	271
90	2,86	5,70	8,50	11,24	13,90	16,48	18,96	21,35	23,62	25,79	270
91	2,86	5,69	8,48	11,20	13,85	16,40	18,86	21,22	23,47	25,61	269
92	2,85	5,68	8,45	11,16	13,78	16,32	18,75	21,08	23,31	25,43	268
93	2,85	5,66	8,42	11,11	13,72	16,23	18,64	20,95	23,14	25,24	267
94	2,84	5,65	8,39	11,06	13,65	16,14	18,52	20,80	22,98	25,06	266
95	2,84	5,63	8,36	11,01	13,58	16,04	18,40	20,66	22,81	24,85	265
96	2,83	5,61	8,33	10,96	13,50	15,94	18,28	20,51	22,63	24,65	264
97	2,82	5,59	8,29	10,90	13,42	15,84	18,15	20,35	22,45	24,44	263
98	2,81	5,57	8,25	10,84	13,34	15,73	18,02	20,20	22,27	24,23	262
99	2,80	5,55	8,21	10,78	13,26	15,63	17,89	20,04	22,08	24,02	261
100	2,79	5,52	8,17	10,72	13,17	15,51	17,75	19,87	21,89	23,80	260

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	e M
50°	31°,14	34°,20	37°,20	40°,11	42°,92	45°,62	48°,20	50°,67	53°,03	55°,27	310°
51	31,22	34,26	37,22	40,10	42,87	45,54	48,09	50,53	52,85	55,06	309
52	31,30	34,31	37,24	40,08	42,82	45,45	47,97	50,37	52,66	54,84	308
53	31,36	34,34	37,24	40,05	42,75	45,35	47,83	50,20	52,46	54,61	307
54	31,41	34,36	37,23	40,01	42,68	45,24	47,69	50,03	52,25	54,37	306
55	31,45	34,38	37,21	39,96	42,60	45,12	47,54	49,85	52,04	54,13	305
56	31,48	34,38	37,18	39,90	42,50	44,99	47,38	49,65	51,82	53,88	304
57	31,50	34,37	37,14	39,82	42,40	44,86	47,21	49,45	51,59	53,62	303
58	31,51	34,35	37,09	39,74	42,28	44,71	47,03	49,25	51,35	53,36	302
59	31,51	34,32	37,04	39,65	42,16	44,56	46,85	49,03	51,11	53,09	301
60	31,50	34,28	36,97	39,55	42,03	44,40	46,66	48,81	50,86	52,81	300
61	31,48	34,23	36,89	39,44	41,89	44,23	46,46	48,58	50,61	52,53	299
62	31,46	34,18	36,80	39,33	41,74	44,05	46,25	48,35	50,34	52,24	298
63	31,42	34,11	36,71	39,20	41,59	43,86	46,04	48,11	50,08	51,95	297
64	31,37	34,04	36,61	39,07	41,42	43,67	45,82	47,86	49,80	51,65	296
65	31,32	33,96	36,50	38,93	41,25	43,47	45,59	47,60	49,52	51,34	295
66	31,26	33,87	36,38	38,78	41,08	43,27	45,36	47,34	49,24	51,03	294
67	31,19	33,77	36,25	38,62	40,89	43,06	45,12	47,08	48,95	50,72	293
68	31,11	33,67	36,12	38,46	40,70	42,84	44,87	46,81	48,65	50,40	292
69	31,03	33,56	35,98	38,29	40,51	42,61	44,62	46,53	48,35	50,08	291
70	30,94	33,44	35,83	38,12	40,30	42,38	44,36	46,25	48,04	49,75	290
71	30,84	33,31	35,67	37,94	40,09	42,15	44,10	45,96	47,73	49,41	289
72	30,74	33,18	35,51	37,75	39,88	41,90	43,83	45,67	47,41	49,07	288
73	30,63	33,04	35,35	37,55	39,66	41,66	43,56	45,37	47,09	48,73	287
74	30,51	32,89	35,18	37,35	39,43	41,40	43,28	45,07	46,77	48,38	286
75	30,38	32,74	35,00	37,15	39,20	41,15	43,00	44,76	46,44	48,03	285
76	30,25	32,58	34,81	36,94	38,96	40,88	42,71	44,45	46,11	47,68	284
77	30,12	32,42	34,62	36,72	38,72	40,61	42,42	44,14	45,77	47,32	283
78	29,97	32,25	34,43	36,50	38,47	40,34	42,12	43,82	45,43	46,96	282
79	29,83	32,08	34,23	36,27	38,22	40,06	41,82	43,49	45,08	46,59	281
80	29,67	31,90	34,02	36,04	37,96	39,78	41,52	43,17	44,73	46,22	280
81	29,51	31,71	33,81	35,80	37,69	39,50	41,21	42,83	44,38	45,85	279
82	29,35	31,52	33,59	35,56	37,43	39,20	40,89	42,50	44,02	45,47	278
83	29,18	31,33	33,37	35,31	37,16	38,91	40,58	42,16	43,66	45,09	277
84	29,01	31,12	33,14	35,06	36,88	38,61	40,25	41,81	43,30	44,71	276
85	28,83	30,92	32,91	34,80	36,60	38,31	39,93	41,47	42,93	44,32	275
86	28,64	30,71	32,67	34,54	36,32	38,00	39,60	41,12	42,56	43,93	274
87	28,45	30,49	32,43	34,28	36,03	37,69	39,27	40,76	42,19	43,54	273
88	28,26	30,28	32,19	34,01	35,74	37,37	38,93	40,41	41,81	43,15	272
89	28,06	30,05	31,94	33,74	35,44	37,06	38,59	40,05	41,43	42,75	271
90	27,86	29,82	31,69	33,46	35,14	36,73	38,25	39,63	41,05	42,35	270
91	27,65	29,59	31,43	33,18	34,84	36,41	37,90	39,32	40,66	41,94	269
92	27,44	29,36	31,17	32,90	34,53	36,08	37,55	38,95	40,27	41,54	268
93	27,23	29,12	30,91	32,61	34,22	35,75	37,20	38,58	39,88	41,13	267
94	27,01	28,87	30,64	32,32	33,91	35,41	36,84	38,20	39,49	40,72	266
95	26,79	28,63	30,37	32,02	33,59	35,07	36,48	37,82	39,09	40,30	265
96	26,56	28,37	30,09	31,72	33,27	34,73	36,12	37,44	38,69	39,88	264
97	26,33	28,12	29,81	31,42	32,95	34,39	35,76	37,06	38,29	39,46	263
98	26,10	27,86	29,53	31,12	32,62	34,04	35,39	36,67	37,89	39,04	262
99	25,86	27,60	29,25	30,81	32,29	33,69	35,02	36,28	37,48	38,62	261
100	25,62	27,33	28,96	30,50	31,96	33,34	34,65	35,89	37,07	38,19	260

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	e M
100°	2°,79	5°,52	8°,17	10°,72	13°,17	15°,51	17°,75	19°,87	21°,89	23°,80	269°
101	2,78	5,49	8,12	10,65	13,08	15,40	17,61	19,70	21,70	23,59	259
102	2,77	5,46	8,07	10,58	12,98	15,28	17,46	19,53	21,50	23,36	258
103	2,76	5,43	8,02	10,51	12,89	15,15	17,31	19,36	21,30	23,14	257
104	2,74	5,40	7,97	10,43	12,79	15,03	17,16	19,18	21,10	22,91	256
105	2,73	5,37	7,92	10,36	12,68	14,90	17,01	19,00	20,89	22,67	255
106	2,71	5,34	7,86	10,28	12,58	14,77	16,85	18,82	20,68	22,44	254
107	2,70	5,30	7,80	10,19	12,47	14,63	16,69	18,63	20,46	22,20	253
108	2,68	5,26	7,74	10,11	12,36	14,50	16,52	18,44	20,25	21,96	252
109	2,66	5,23	7,68	10,02	12,25	14,36	16,36	18,24	20,03	21,71	251
110	2,64	5,19	7,62	9,93	12,13	14,21	16,19	18,05	19,81	21,47	250
111	2,62	5,14	7,55	9,84	12,01	14,07	16,01	17,85	19,58	21,22	249
112	2,60	5,10	7,48	9,74	11,89	13,92	15,84	17,65	19,35	20,96	248
113	2,58	5,06	7,41	9,65	11,77	13,77	15,66	17,44	19,12	20,71	247
114	2,56	5,01	7,34	9,55	11,64	13,61	15,48	17,23	18,89	20,45	246
115	2,54	4,96	7,27	9,45	11,51	13,46	15,30	17,02	18,65	20,19	245
116	2,52	4,92	7,19	9,35	11,38	13,30	15,11	16,81	18,42	19,93	244
117	2,49	4,87	7,12	9,24	11,25	13,14	14,92	16,60	18,18	19,66	243
118	2,47	4,81	7,04	9,13	11,11	12,98	14,73	16,38	17,93	19,39	242
119	2,44	4,76	6,96	9,03	10,98	12,81	14,54	16,16	17,69	19,12	241
120	2,42	4,71	6,88	8,92	10,84	12,64	14,34	15,94	17,44	18,85	240
121	2,39	4,66	6,79	8,80	10,70	12,47	14,14	15,71	17,19	18,58	239
122	2,36	4,60	6,71	8,69	10,55	12,30	13,94	15,49	16,94	18,30	238
123	2,34	4,54	6,62	8,57	10,41	12,13	13,74	15,26	16,68	18,02	237
124	2,31	4,49	6,53	8,45	10,26	11,95	13,54	15,03	16,43	17,74	236
125	2,28	4,43	6,44	8,33	10,11	11,77	13,33	14,79	16,17	17,46	235
126	2,25	4,37	6,35	8,21	9,96	11,59	13,12	14,56	15,91	17,17	234
127	2,22	4,30	6,26	8,09	9,80	11,41	12,91	14,32	15,64	16,88	233
128	2,19	4,24	6,16	7,97	9,65	11,23	12,70	14,08	15,38	16,60	232
129	2,16	4,18	6,07	7,84	9,49	11,04	12,49	13,84	15,11	16,31	231
130	2,12	4,11	5,97	7,71	9,33	10,85	12,27	13,60	14,85	16,01	230
131	2,09	4,05	5,88	7,58	9,17	10,66	12,05	13,35	14,58	15,72	229
132	2,06	3,98	5,78	7,45	9,01	10,47	11,83	13,11	14,30	15,42	228
133	2,02	3,91	5,68	7,32	8,85	10,28	11,61	12,86	14,03	15,13	227
134	1,99	3,84	5,57	7,18	8,68	10,08	11,39	12,61	13,76	14,83	226
135	1,96	3,77	5,47	7,05	8,52	9,89	11,17	12,36	13,48	14,53	225
136	1,92	3,70	5,37	6,91	8,35	9,69	10,94	12,11	13,20	14,23	224
137	1,88	3,63	5,26	6,77	8,18	9,49	10,71	11,85	12,92	13,92	223
138	1,85	3,56	5,15	6,63	8,01	9,29	10,48	11,60	12,64	13,62	222
139	1,81	3,49	5,05	6,49	7,84	9,09	10,25	11,34	12,36	13,31	221
140	1,77	3,42	4,94	6,35	7,66	8,88	10,02	11,08	12,07	13,00	220
141	1,73	3,34	4,83	6,21	7,49	8,68	9,79	10,82	11,79	12,69	219
142	1,70	3,27	4,72	6,06	7,31	8,47	9,55	10,56	11,50	12,38	218
143	1,66	3,19	4,60	5,92	7,13	8,26	9,32	10,30	11,22	12,07	217
144	1,62	3,11	4,49	5,77	6,95	8,05	9,08	10,03	10,93	11,76	216
145	1,58	3,03	4,38	5,62	6,77	7,85	8,84	9,77	10,64	11,45	215
146	1,54	2,96	4,26	5,47	6,59	7,63	8,60	9,50	10,34	11,13	214
147	1,50	2,88	4,15	5,32	6,41	7,42	8,36	9,24	10,05	10,82	213
148	1,46	2,80	4,03	5,17	6,23	7,21	8,12	8,97	9,76	10,50	212
149	1,41	2,72	3,91	5,02	6,04	6,99	7,88	8,70	9,46	10,18	211
150	1,37	2,64	3,80	4,87	5,86	6,78	7,63	8,43	9,17	9,86	210

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

$M \backslash e$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	$e \backslash M$
100°	25° 62	27° 33	28° 96	30° 50	31° 96	33° 34	34° 65	35° 89	37° 07	38° 19	260°
101	25 37	27 07	28 67	30 18	31 62	32 98	34 27	35 50	36 66	37 77	259
102	25 13	26 79	28 37	29 87	31 28	32 62	33 89	35 10	36 25	37 34	258
103	24 88	26 52	28 07	29 55	30 94	32 26	33 51	34 70	35 83	36 90	257
104	24 62	26 24	27 77	29 22	30 60	31 90	33 13	34 30	35 41	36 47	256
105	24 36	25 96	27 47	28 90	30 25	31 53	32 75	33 90	34 99	36 03	255
106	24 10	25 68	27 16	28 57	29 90	31 16	32 36	33 49	34 57	35 59	254
107	23 84	25 39	26 85	28 24	29 55	30 79	31 97	33 09	34 15	35 15	253
108	23 57	25 10	26 54	27 91	29 20	30 42	31 58	32 68	33 72	34 71	252
109	23 31	24 81	26 23	27 57	28 84	30 04	31 18	32 26	33 29	34 27	251
110	23 03	24 51	25 91	27 23	28 48	29 67	30 79	31 85	32 86	33 82	250
111	22 76	24 22	25 59	26 89	28 12	29 29	30 39	31 44	32 43	33 37	249
112	22 48	23 92	25 27	26 55	27 76	28 90	29 99	31 02	32 00	32 92	248
113	22 20	23 61	24 95	26 20	27 39	28 52	29 59	30 60	31 56	32 47	247
114	21 92	23 31	24 62	25 86	27 03	28 13	29 18	30 18	31 12	32 02	246
115	21 64	23 00	24 29	25 51	26 66	27 75	28 78	29 76	30 69	31 57	245
116	21 35	22 69	23 96	25 16	26 29	27 36	28 37	29 33	30 25	31 11	244
117	21 06	22 38	23 63	24 80	25 91	26 96	27 96	28 91	29 80	30 65	243
118	20 77	22 07	23 29	24 45	25 54	26 57	27 55	28 48	29 36	30 20	242
119	20 48	21 75	22 95	24 09	25 16	26 17	27 14	28 05	28 91	29 74	241
120	20 18	21 43	22 61	23 73	24 78	25 78	26 72	27 62	28 47	29 27	240
121	19 88	21 11	22 27	23 37	24 40	25 38	26 31	27 18	28 02	28 81	239
122	19 58	20 79	21 93	23 00	24 02	24 98	25 89	26 75	27 57	28 35	238
123	19 28	20 47	21 58	22 64	23 63	24 58	25 47	26 31	27 12	27 88	237
124	18 98	20 14	21 24	22 27	23 25	24 17	25 05	25 88	26 67	27 41	236
125	18 67	19 81	20 89	21 90	22 86	23 77	24 63	25 44	26 21	26 95	235
126	18 36	19 48	20 54	21 53	22 47	23 36	24 20	25 00	25 76	26 48	234
127	18 05	19 15	20 18	21 16	22 08	22 95	23 78	24 56	25 30	26 01	233
128	17 74	18 82	19 83	20 79	21 69	22 54	23 35	24 12	24 84	25 53	232
129	17 43	18 48	19 47	20 41	21 29	22 13	22 92	23 67	24 38	25 06	231
130	17 11	18 14	19 12	20 03	20 90	21 72	22 49	23 23	23 92	24 59	230
131	16 79	17 81	18 76	19 65	20 50	21 30	22 06	22 78	23 46	24 11	229
132	16 48	17 47	18 40	19 27	20 11	20 89	21 63	22 33	23 00	23 64	228
133	16 16	17 12	18 03	18 89	19 71	20 47	21 20	21 89	22 54	23 16	227
134	15 83	16 78	17 67	18 51	19 30	20 05	20 76	21 44	22 07	22 68	226
135	15 51	16 44	17 31	18 13	18 90	19 63	20 33	20 99	21 61	22 20	225
136	15 19	16 09	16 94	17 74	18 50	19 21	19 89	20 53	21 14	21 72	224
137	14 86	15 74	16 57	17 36	18 10	18 79	19 46	20 08	20 68	21 24	223
138	14 53	15 40	16 21	16 97	17 69	18 37	19 02	19 63	20 21	20 76	222
139	14 21	15 05	15 84	16 58	17 28	17 95	18 58	19 17	19 74	20 27	221
140	13 88	14 70	15 46	16 19	16 88	17 52	18 14	18 72	19 27	19 79	220
141	13 55	14 34	15 09	15 80	16 47	17 10	17 70	18 26	18 80	19 31	219
142	13 21	13 99	14 72	15 41	16 06	16 67	17 25	17 80	18 33	18 82	218
143	12 88	13 63	14 35	15 01	15 65	16 24	16 81	17 35	17 85	18 34	217
144	12 54	13 28	13 97	14 62	15 23	15 82	16 36	16 89	17 38	17 85	216
145	12 21	12 92	13 59	14 23	14 82	15 39	15 92	16 43	16 91	17 36	215
146	11 87	12 56	13 22	13 83	14 41	14 96	15 47	15 97	16 43	16 87	214
147	11 53	12 20	12 84	13 43	13 99	14 52	15 03	15 50	15 96	16 38	213
148	11 19	11 84	12 46	13 03	13 58	14 09	14 58	15 04	15 48	15 89	212
149	10 85	11 48	12 08	12 64	13 16	13 66	14 13	14 58	15 00	15 40	211
150	10 51	11 12	11 70	12 24	12 75	13 23	13 68	14 11	14 52	14 91	210

IV. Эллиптическое движение. Разность между эксцентрической
и средней аномалиями
($E - M \geq 0$ для $M \leq 180^\circ$)

e M	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	e M
150°	1°,37	2°,64	3°,80	4°,87	5°,86	6°,78	7°,63	8°,43	9°,17	9°,86	210°
151	1,33	2,55	3,68	4,71	5,67	6,56	7,39	8,16	8,87	9,54	209
152	1,29	2,47	3,56	4,56	5,48	6,34	7,14	7,88	8,57	9,22	208
153	1,24	2,39	3,44	4,40	5,30	6,12	6,89	7,61	8,28	8,90	207
154	1,20	2,30	3,32	4,25	5,11	5,91	6,65	7,34	7,93	8,58	206
155	1,16	2,22	3,19	4,09	4,92	5,69	6,40	7,06	7,68	8,25	205
156	1,11	2,13	3,07	3,93	4,73	5,46	6,15	6,78	7,38	7,93	204
157	1,07	2,05	2,95	3,77	4,54	5,24	5,90	6,51	7,07	7,61	203
158	1,03	1,96	2,82	3,61	4,34	5,02	5,65	6,23	6,77	7,28	202
159	0,98	1,88	2,70	3,45	4,15	4,80	5,39	5,95	6,47	6,95	201
160	0,94	1,79	2,57	3,29	3,96	4,57	5,14	5,67	6,17	6,63	200
161	0,89	1,70	2,45	3,13	3,76	4,35	4,89	5,39	5,86	6,30	199
162	0,84	1,62	2,32	2,97	3,57	4,12	4,64	5,11	5,56	5,97	198
163	0,80	1,53	2,20	2,81	3,37	3,90	4,38	4,83	5,25	5,64	197
164	0,75	1,44	2,07	2,65	3,18	3,67	4,13	4,55	4,94	5,31	196
165	0,71	1,35	1,94	2,48	2,98	3,44	3,87	4,27	4,64	4,98	195
166	0,66	1,26	1,81	2,32	2,79	3,22	3,61	3,98	4,33	4,65	194
167	0,61	1,17	1,69	2,16	2,59	2,99	3,36	3,70	4,02	4,32	193
168	0,57	1,08	1,56	1,99	2,39	2,76	3,10	3,42	3,72	3,99	192
169	0,52	1,00	1,43	1,83	2,19	2,53	2,84	3,14	3,41	3,66	191
170	0,47	0,91	1,30	1,66	1,99	2,30	2,59	2,85	3,10	3,33	190
171	0,43	0,82	1,17	1,50	1,80	2,07	2,33	2,57	2,79	3,00	189
172	0,38	0,73	1,04	1,33	1,60	1,84	2,07	2,28	2,48	2,66	188
173	0,33	0,64	0,91	1,16	1,40	1,61	1,81	2,00	2,17	2,33	187
174	0,29	0,54	0,78	1,00	1,20	1,38	1,55	1,71	1,86	2,00	186
175	0,24	0,45	0,65	0,83	1,00	1,15	1,30	1,43	1,55	1,67	185
176	0,19	0,36	0,52	0,67	0,80	0,92	1,04	1,14	1,24	1,33	184
177	0,14	0,27	0,39	0,50	0,60	0,69	0,78	0,86	0,93	1,00	183
178	0,10	0,18	0,26	0,33	0,40	0,46	0,52	0,57	0,62	0,67	182
179	0,05	0,08	0,13	0,17	0,20	0,23	0,26	0,29	0,31	0,33	181
180	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	180

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
0,0	0,000 000	5,0	0,060 744	10,0	0,121 046
0,1	,001 216	5,1	,061 956	10,1	,122 245
0,2	,002 433	5,2	,063 167	10,2	,123 443
0,3	,003 649	5,3	,064 379	10,3	,124 641
0,4	,004 865	5,4	,065 590	10,4	,125 838
	1217		1211		1198
0,5	0,006 082	5,5	0,066 801	10,5	0,127 036
0,6	,007 298	5,6	,068 012	10,6	,128 233
0,7	,008 514	5,7	,069 223	10,7	,129 429
0,8	,009 731	5,8	,070 433	10,8	,130 625
0,9	,010 947	5,9	,071 643	10,9	,131 821
	1216		1210		1195
1,0	0,012 163	6,0	0,072 853	11,0	0,133 016
1,1	,013 379	6,1	,074 063	11,1	,134 211
1,2	,014 595	6,2	,075 273	11,2	,135 406
1,3	,015 812	6,3	,076 482	11,3	,136 600
1,4	,017 028	6,4	,077 691	11,4	,137 794
	1216		1209		1194
1,5	0,018 244	6,5	0,078 900	11,5	0,138 988
1,6	,019 460	6,6	,080 109	11,6	,140 181
1,7	,020 675	6,7	,081 318	11,7	,141 374
1,8	,021 891	6,8	,082 526	11,8	,142 566
1,9	,023 107	6,9	,083 734	11,9	,143 758
	1216		1208		1191
2,0	0,024 323	7,0	0,084 942	12,0	0,144 949
2,1	,025 538	7,1	,086 149	12,1	,146 141
2,2	,026 754	7,2	,087 357	12,2	,147 331
2,3	,027 969	7,3	,088 564	12,3	,148 522
2,4	,029 185	7,4	,089 770	12,4	,149 712
	1215		1207		1189
2,5	0,030 400	7,5	0,090 977	12,5	0,150 901
2,6	,031 615	7,6	,092 183	12,6	,152 090
2,7	,032 830	7,7	,093 389	12,7	,153 279
2,8	,034 045	7,8	,094 595	12,8	,154 467
2,9	,035 260	7,9	,095 800	12,9	,155 655
	1215		1205		1187
3,0	0,036 475	8,0	0,097 005	13,0	0,156 842
3,1	,037 690	8,1	,098 210	13,1	,158 029
3,2	,038 904	8,2	,099 415	13,2	,159 216
3,3	,040 119	8,3	,100 619	13,3	,160 402
3,4	,041 333	8,4	,101 823	13,4	,161 588
	1214		1204		1185
3,5	0,042 547	8,5	0,103 027	13,5	0,162 773
3,6	,043 761	8,6	,104 230	13,6	,163 957
3,7	,044 975	8,7	,105 434	13,7	,165 142
3,8	,046 189	8,8	,106 636	13,8	,166 326
3,9	,047 403	8,9	,107 839	13,9	,167 509
	1214		1202		1183
4,0	0,048 617	9,0	0,109 041	14,0	0,168 692
4,1	,049 830	9,1	,110 243	14,1	,169 874
4,2	,051 043	9,2	,111 445	14,2	,171 056
4,3	,052 256	9,3	,112 646	14,3	,172 238
4,4	,053 469	9,4	,113 847	14,4	,173 419
	1213		1201		1181
4,5	0,054 682	9,5	0,115 048	14,5	0,174 600
4,6	,055 895	9,6	,116 248	14,6	,175 780
4,7	,057 107	9,7	,117 448	14,7	,176 960
4,8	,058 320	9,8	,118 648	14,8	,178 139
4,9	,059 532	9,9	,119 847	14,9	,179 317
	1212		1199		1179
5,0	0,060 744	10,0	0,121 046	15,0	0,180 496

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
15,0	0,180 496	20,0	0,238 739	25,0	0,295 493
15,1	,181 674	20,1	,239 889	25,1	,296 611
15,2	,182 851	20,2	,241 039	25,2	,297 729
15,3	,184 028	20,3	,242 188	25,3	,298 846
15,4	,185 204	20,4	,243 337	25,4	,299 962
	1176		1148		1116
15,5	0,186 380	20,5	0,244 485	25,5	0,301 078
15,6	,187 555	20,6	,245 632	25,6	,302 192
15,7	,188 730	20,7	,246 779	25,7	,303 307
15,8	,189 904	20,8	,247 926	25,8	,304 420
15,9	,191 078	20,9	,249 071	25,9	,305 533
	1173		1145		1112
16,0	0,192 251	21,0	0,250 216	26,0	0,306 645
16,1	,193 424	21,1	,251 361	26,1	,307 757
16,2	,194 596	21,2	,252 504	26,2	,308 868
16,3	,195 768	21,3	,253 648	26,3	,309 978
16,4	,196 939	21,4	,254 790	26,4	,311 087
	1171		1142		1109
16,5	0,198 110	21,5	0,255 932	26,5	0,312 196
16,6	,199 280	21,6	,257 073	26,6	,313 304
16,7	,200 450	21,7	,258 214	26,7	,314 411
16,8	,201 619	21,8	,259 354	26,8	,315 518
16,9	,202 787	21,9	,260 493	26,9	,316 624
	1168		1139		1105
17,0	0,203 955	22,0	0,261 632	27,0	0,317 729
17,1	,205 123	22,1	,262 770	27,1	,318 833
17,2	,206 290	22,2	,263 908	27,2	,319 937
17,3	,207 456	22,3	,265 045	27,3	,321 040
17,4	,208 622	22,4	,266 181	27,4	,322 142
	1165		1135		1102
17,5	0,209 787	22,5	0,267 316	27,5	0,323 244
17,6	,210 952	22,6	,268 451	27,6	,324 345
17,7	,212 117	22,7	,269 586	27,7	,325 445
17,8	,213 280	22,8	,270 719	27,8	,326 545
17,9	,214 443	22,9	,271 852	27,9	,327 644
	1163		1133		1098
18,0	0,215 606	23,0	0,272 985	28,0	0,328 742
18,1	,216 768	23,1	,274 116	28,1	,329 839
18,2	,217 930	23,2	,275 247	28,2	,330 936
18,3	,219 091	23,3	,276 378	28,3	,332 032
18,4	,220 251	23,4	,277 507	28,4	,333 127
	1160		1129		1094
18,5	0,221 411	23,5	0,278 636	28,5	0,334 221
18,6	,222 570	23,6	,279 765	28,6	,335 315
18,7	,223 729	23,7	,280 893	28,7	,336 408
18,8	,224 887	23,8	,282 020	28,8	,337 501
18,9	,226 044	23,9	,283 146	28,9	,338 592
	1157		1126		1091
19,0	0,227 201	24,0	0,284 272	29,0	0,339 683
19,1	,228 358	24,1	,285 397	29,1	,340 773
19,2	,229 514	24,2	,286 521	29,2	,341 863
19,3	,230 669	24,3	,287 645	29,3	,342 952
19,4	,231 823	24,4	,288 768	29,4	,344 040
	1154		1123		1087
19,5	0,232 977	24,5	0,289 891	29,5	0,345 127
19,6	,234 131	24,6	,291 012	29,6	,346 213
19,7	,235 284	24,7	,292 133	29,7	,347 299
19,8	,236 436	24,8	,293 254	29,8	,348 384
19,9	,237 588	24,9	,294 374	29,9	,349 469
	1151		1119		1083
20,0	0,238 739	25,0	0,295 493	30,0	0,350 552

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
30,0	0,350 552	35,0	0,403 785	40,0	0,455 124
30,1	,351 635	35,1	,404 831	40,1	,456 132
30,2	,352 717	35,2	,405 876	40,2	,457 138
30,3	,353 799	35,3	,406 920	40,3	,458 144
30,4	,354 879	35,4	,407 963	40,4	,459 149
	1080		1042		1004
30,5	0,355 959	35,5	0,409 005	40,5	0,461 153
30,6	,357 038	35,6	,410 047	40,6	,461 156
30,7	,358 117	35,7	,411 088	40,7	,462 159
30,8	,359 195	35,8	,412 128	40,8	,463 161
30,9	,360 272	35,9	,413 167	40,9	,464 162
	1076		1039		1000
31,0	0,361 348	36,0	0,414 206	41,0	0,465 162
31,1	,362 424	36,1	,415 244	41,1	,466 162
31,2	,363 498	36,2	,416 281	41,2	,467 161
31,3	,364 572	36,3	,417 317	41,3	,468 159
31,4	,365 646	36,4	,418 353	41,4	,469 156
	1072		1035		997
31,5	0,366 718	36,5	0,419 388	41,5	0,470 153
31,6	,367 790	36,6	,420 422	41,6	,471 149
31,7	,368 861	36,7	,421 455	41,7	,472 144
31,8	,369 931	36,8	,422 487	41,8	,473 138
31,9	,371 001	36,9	,423 519	41,9	,474 131
	1069		1031		993
32,0	0,372 070	37,0	0,424 550	42,0	0,475 124
32,1	,373 138	37,1	,425 580	42,1	,476 116
32,2	,374 205	37,2	,426 610	42,2	,477 107
32,3	,375 272	37,3	,427 639	42,3	,478 098
32,4	,376 338	37,4	,428 667	42,4	,479 088
	1065		1027		989
32,5	0,377 403	37,5	0,429 694	42,5	0,480 077
32,6	,378 467	37,6	,430 720	42,6	,481 065
32,7	,379 531	37,7	,431 746	42,7	,482 052
32,8	,380 594	37,8	,432 771	42,8	,483 039
32,9	,381 656	37,9	,433 795	42,9	,484 025
	1061		1023		985
33,0	0,382 717	38,0	0,434 818	43,0	0,485 010
33,1	,383 778	38,1	,435 841	43,1	,485 994
33,2	,384 837	38,2	,436 863	43,2	,486 978
33,3	,385 896	38,3	,437 884	43,3	,487 960
33,4	,386 955	38,4	,438 904	43,4	,488 942
	1057		1019		982
33,5	0,388 012	38,5	0,439 923	43,5	0,489 924
33,6	,389 069	38,6	,440 942	43,6	,490 904
33,7	,390 125	38,7	,441 960	43,7	,491 884
33,8	,391 181	38,8	,442 977	43,8	,492 863
33,9	,392 235	38,9	,443 994	43,9	,493 841
	1054		1016		978
34,0	0,393 289	39,0	0,445 010	44,0	0,494 819
34,1	,394 342	39,1	,446 024	44,1	,495 796
34,2	,395 394	39,2	,447 039	44,2	,496 772
34,3	,396 446	39,3	,448 052	44,3	,497 747
34,4	,397 497	39,4	,449 065	44,4	,498 721
	1050		1012		974
34,5	0,398 547	39,5	0,450 077	44,5	0,499 695
34,6	,399 596	39,6	,451 088	44,6	,500 668
34,7	,400 644	39,7	,452 098	44,7	,501 640
34,8	,401 692	39,8	,453 108	44,8	,502 612
34,9	,402 739	39,9	,454 116	44,9	,503 582
	1046		1008		970
35,0	0,403 785	40,0	0,455 124	45,0	0,504 552

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
45,0	0,504 552 969	50,0	0,552 092 932	55,0	0,597 795 896
45,1	,505 521 969	50,1	,553 024 931	55,1	,598 691 895
45,2	,506 490 968	50,2	,553 955 931	55,2	,599 586 895
45,3	,507 458 967	50,3	,554 886 929	55,3	,600 481 893
45,4	,508 425 966	50,4	,555 815 929	55,4	,601 374 893
	966		929		893
45,5	0,509 391 965	50,5	0,556 744 928	55,5	0,602 267 892
45,6	,510 356 965	50,6	,557 672 928	55,6	,603 159 892
45,7	,511 321 964	50,7	,558 600 927	55,7	,604 051 891
45,8	,512 285 963	50,8	,559 527 926	55,8	,604 942 890
45,9	,513 248 962	50,9	,560 453 925	55,9	,605 832 889
	962		925		889
46,0	0,514 210 962	51,0	0,561 378 924	56,0	0,606 721 889
46,1	,515 172 961	51,1	,562 302 924	56,1	,607 610 888
46,2	,516 133 960	51,2	,563 226 923	56,2	,608 498 888
46,3	,517 093 959	51,3	,564 149 923	56,3	,609 386 888
46,4	,518 052 959	51,4	,565 072 921	56,4	,610 272 886
	959		921		886
46,5	0,519 011 958	51,5	0,565 993 921	56,5	0,611 158 885
46,6	,519 969 957	51,6	,566 914 920	56,6	,612 043 885
46,7	,520 926 956	51,7	,567 834 920	56,7	,612 928 884
46,8	,521 882 956	51,8	,568 754 919	56,8	,613 812 883
46,9	,522 838 955	51,9	,569 673 917	56,9	,614 695 882
	955		917		882
47,0	0,523 793 954	52,0	0,570 590 918	57,0	0,615 577 882
47,1	,524 747 953	52,1	,571 508 916	57,1	,616 459 881
47,2	,525 700 953	52,2	,572 424 916	57,2	,617 340 881
47,3	,526 653 952	52,3	,573 340 915	57,3	,618 221 879
47,4	,527 605 951	52,4	,574 255 914	57,4	,619 100 879
	951		914		879
47,5	0,528 556 950	52,5	0,575 169 914	57,5	0,619 979 879
47,6	,529 506 950	52,6	,576 083 913	57,6	,620 858 877
47,7	,530 456 949	52,7	,576 996 912	57,7	,621 735 877
47,8	,531 405 948	52,8	,577 903 912	57,8	,622 612 876
47,9	,532 353 947	52,9	,578 820 911	57,9	,623 488 876
	947		911		876
48,0	0,533 300 947	53,0	0,579 731 910	58,0	0,624 364 875
48,1	,534 247 946	53,1	,580 641 909	58,1	,625 239 874
48,2	,535 193 945	53,2	,581 550 909	58,2	,626 113 873
48,3	,536 138 944	53,3	,582 459 907	58,3	,626 986 873
48,4	,537 082 944	53,4	,583 366 907	58,4	,627 859 872
	944		907		872
48,5	0,538 026 943	53,5	0,584 273 907	58,5	0,628 731 872
48,6	,538 969 942	53,6	,585 180 906	58,6	,629 603 870
48,7	,539 911 942	53,7	,586 086 905	58,7	,630 473 870
48,8	,540 853 940	53,8	,586 991 904	58,8	,631 343 870
48,9	,541 793 940	53,9	,587 895 904	58,9	,632 213 869
	940		904		869
49,0	0,542 733 939	54,0	0,588 799 903	59,0	0,633 082 868
49,1	,543 672 939	54,1	,589 702 902	59,1	,633 950 867
49,2	,544 611 939	54,2	,590 604 901	59,2	,634 817 867
49,3	,545 549 938	54,3	,591 505 901	59,3	,635 683 866
49,4	,546 486 936	54,4	,592 406 900	59,4	,636 549 866
	936		900		866
49,5	0,547 422 936	54,5	0,593 306 899	59,5	0,637 415 864
49,6	,548 358 934	54,6	,594 205 899	59,6	,638 279 864
49,7	,549 292 934	54,7	,595 104 898	59,7	,639 143 864
49,8	,550 226 934	54,8	,596 002 897	59,8	,640 007 862
49,9	,551 160 932	54,9	,596 899 896	59,9	,640 869 862
	932		896		862
50,0	0,552 092	55,0	0,597 795	60,0	0,641 731

V. Параболическое движение

<i>B</i>	<i>σ</i>	<i>B</i>	<i>σ</i>	<i>B</i>	<i>σ</i>			
60,0	0,641 731	861	65,0	0,683 980	828	70,0	0,724 629	797
60,1	,642 592	861	65,1	,684 808	828	70,1	,725 426	797
60,2	,643 453	860	65,2	,685 636	827	70,2	,726 223	796
60,3	,644 313	859	65,3	,686 463	827	70,3	,727 019	796
60,4	,645 172	858	65,4	,687 290	826	70,4	,727 815	795
60,5	0,646 030	858	65,5	0,688 116	825	70,5	0,728 610	794
60,6	,646 888	857	65,6	,688 941	824	70,6	,729 404	794
60,7	,647 745	857	65,7	,689 765	824	70,7	,730 198	793
60,8	,648 602	856	65,8	,690 589	823	70,8	,730 991	792
60,9	,649 458	855	65,9	,691 412	823	70,9	,731 783	792
61,0	0,650 313	854	66,0	0,692 235	822	71,0	0,732 575	791
61,1	,651 167	854	66,1	,693 057	821	71,1	,733 366	791
61,2	,652 021	853	66,2	,693 878	821	71,2	,734 157	790
61,3	,652 874	853	66,3	,694 699	820	71,3	,734 947	789
61,4	,653 727	852	66,4	,695 519	820	71,4	,735 736	789
61,5	0,654 579	851	66,5	0,696 339	819	71,5	0,736 525	788
61,6	,655 430	851	66,6	,697 158	818	71,6	,737 313	788
61,7	,656 281	850	66,7	,697 976	817	71,7	,738 101	787
61,8	,657 131	849	66,8	,698 793	817	71,8	,738 888	787
61,9	,657 980	848	66,9	,699 610	817	71,9	,739 675	786
62,0	0,658 828	848	67,0	0,700 427	816	72,0	0,740 461	785
62,1	,659 676	847	67,1	,701 243	815	72,1	,741 246	785
62,2	,660 523	847	67,2	,702 058	814	72,2	,742 031	784
62,3	,661 370	846	67,3	,702 872	814	72,3	,742 815	784
62,4	,662 216	845	67,4	,703 686	814	72,4	,743 599	783
62,5	0,663 061	845	67,5	0,704 499	813	72,5	0,744 382	782
62,6	,663 906	844	67,6	,705 312	812	72,6	,745 164	782
62,7	,664 750	843	67,7	,706 124	811	72,7	,745 946	781
62,8	,665 593	842	67,8	,706 935	811	72,8	,746 727	781
62,9	,666 435	842	67,9	,707 746	810	72,9	,747 508	780
63,0	0,667 277	842	68,0	0,708 556	809	73,0	0,748 288	779
63,1	,668 119	840	68,1	,709 365	809	73,1	,749 067	779
63,2	,668 959	840	68,2	,710 174	808	73,2	,749 846	778
63,3	,669 799	840	68,3	,710 982	808	73,3	,750 624	778
63,4	,670 639	838	68,4	,711 790	807	73,4	,751 402	777
63,5	0,671 477	838	68,5	0,712 597	807	73,5	0,752 179	777
63,6	,672 315	838	68,6	,713 404	805	73,6	,752 956	776
63,7	,673 153	837	68,7	,714 209	806	73,7	,753 732	775
63,8	,673 990	836	68,8	,715 015	804	73,8	,754 507	775
63,9	,674 826	835	68,9	,715 819	804	73,9	,755 282	774
64,0	0,675 661	835	69,0	0,716 623	803	74,0	0,756 056	774
64,1	,676 496	834	69,1	,717 426	803	74,1	,756 830	773
64,2	,677 330	834	69,2	,718 229	802	74,2	,757 603	773
64,3	,678 164	832	69,3	,719 031	802	74,3	,758 376	771
64,4	,678 996	833	69,4	,719 833	801	74,4	,759 147	772
64,5	0,679 829	831	69,5	0,720 634	800	74,5	0,759 919	771
64,6	,680 660	831	69,6	,721 434	800	74,6	,760 690	770
64,7	,681 491	830	69,7	,722 234	799	74,7	,761 460	770
64,8	,682 321	830	69,8	,723 033	798	74,8	,762 230	769
64,9	,683 151	829	69,9	,723 831	798	74,9	,762 999	768
65,0	0,683 980	829	70,0	0,724 629	798	75,0	0,763 767	768

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
75,0	0,763 767	80,0	0,801 481	85,0	0,837 857
75,1	,764 535	80,1	,802 222	85,1	,838 571
75,2	,765 302	80,2	,802 961	85,2	,839 285
75,3	,766 069	80,3	,803 701	85,3	,839 998
75,4	,766 835	80,4	,804 439	85,4	,840 711
	766		739		713
75,5	0,767 601	80,5	0,805 178	85,5	0,841 424
75,6	,768 366	80,6	,805 915	85,6	,842 136
75,7	,769 131	80,7	,806 652	85,7	,842 847
75,8	,769 895	80,8	,807 389	85,8	,843 558
75,9	,770 658	80,9	,808 125	85,9	,844 268
	763		736		710
76,0	0,771 421	81,0	0,808 861	86,0	0,844 978
76,1	,772 183	81,1	,809 596	86,1	,845 688
76,2	,772 945	81,2	,810 330	86,2	,846 397
76,3	,773 706	81,3	,811 064	86,3	,847 105
76,4	,774 467	81,4	,811 798	86,4	,847 813
	760		733		708
76,5	0,775 227	81,5	0,812 531	86,5	0,848 521
76,6	,775 986	81,6	,813 263	86,6	,849 228
76,7	,776 745	81,7	,813 995	86,7	,849 934
76,8	,777 504	81,8	,814 726	86,8	,850 640
76,9	,778 262	81,9	,815 457	86,9	,851 345
	757		730		705
77,0	0,779 019	82,0	0,816 187	87,0	0,852 050
77,1	,779 775	82,1	,816 917	87,1	,852 755
77,2	,780 532	82,2	,817 646	87,2	,853 459
77,3	,781 287	82,3	,818 375	87,3	,854 162
77,4	,782 042	82,4	,819 103	87,4	,854 865
	755		728		703
77,5	0,782 797	82,5	0,819 831	87,5	0,855 568
77,6	,783 551	82,6	,820 558	87,6	,856 270
77,7	,784 304	82,7	,821 285	87,7	,856 973
77,8	,785 057	82,8	,822 011	87,8	,857 672
77,9	,785 809	82,9	,822 737	87,9	,858 373
	752		725		700
78,0	0,786 561	83,0	0,823 462	88,0	0,859 073
78,1	,787 312	83,1	,824 187	88,1	,859 773
78,2	,788 063	83,2	,824 911	88,2	,860 472
78,3	,788 813	83,3	,825 634	88,3	,861 171
78,4	,789 562	83,4	,826 357	88,4	,861 869
	749		723		698
78,5	0,790 311	83,5	0,827 080	88,5	0,862 567
78,6	,791 060	83,6	,827 802	88,6	,863 264
78,7	,791 808	83,7	,828 523	88,7	,863 961
78,8	,792 555	83,8	,829 244	88,8	,864 657
78,9	,793 302	83,9	,829 965	88,9	,865 353
	746		720		695
79,0	0,794 048	84,0	0,830 685	89,0	0,866 048
79,1	,794 794	84,1	,831 404	89,1	,866 743
79,2	,795 539	84,2	,832 123	89,2	,867 437
79,3	,796 284	84,3	,832 842	89,3	,868 131
79,4	,797 028	84,4	,833 560	89,4	,868 824
	743		717		693
79,5	0,797 771	84,5	0,834 277	89,5	0,869 517
79,6	,798 515	84,6	,834 994	89,6	,870 210
79,7	,799 257	84,7	,835 710	89,7	,870 902
79,8	,799 999	84,8	,836 426	89,8	,871 593
79,9	,800 740	84,9	,837 142	89,9	,872 284
	741		715		691
80,0	0,801 481	85,0	0,837 857	90,0	0,872 975

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
90,0	0,872 975	95,0	0,906 912	100,0	0,939 740
90,1	,873 665 690	95,1	,907 579 667	100,1	,940 386 646
90,2	,874 354 689	95,2	,908 246 667	100,2	,941 031 645
90,3	,875 043 689	95,3	,908 912 666	100,3	,941 676 645
90,4	,875 732 688	95,4	,909 578 666	100,4	,942 321 644
			665		644
90,5	0,876 420	95,5	0,910 243	100,5	0,942 965
90,6	,877 108 688	95,6	,910 908 665	100,6	,943 608 643
90,7	,877 795 687	95,7	,911 573 665	100,7	,944 252 642
90,8	,878 482 686	95,8	,912 237 664	100,8	,944 894 643
90,9	,879 168 686	95,9	,912 901 664	100,9	,945 537 642
	686		663		642
91,0	0,879 854	96,0	0,913 564	101,0	0,946 179
91,1	,880 539 685	96,1	,914 227 663	101,1	,946 821 642
91,2	,881 224 685	96,2	,914 889 662	101,2	,947 462 641
91,3	,881 909 685	96,3	,915 551 662	101,3	,948 102 641
91,4	,882 593 684	96,4	,916 212 661	101,4	,948 743 640
	683		662		640
91,5	0,883 276	96,5	0,916 874	101,5	0,949 383
91,6	,883 959 683	96,6	,917 534 660	101,6	,950 022 639
91,7	,884 642 683	96,7	,918 194 660	101,7	,950 661 639
91,8	,885 324 682	96,8	,918 854 659	101,8	,951 300 638
91,9	,886 006 681	96,9	,919 513 659	101,9	,951 938 638
	681		659		638
92,0	0,886 687	97,0	0,920 172	102,0	0,952 576
92,1	,887 368 681	97,1	,920 831 659	102,1	,953 214 638
92,2	,888 048 680	97,2	,921 489 658	102,2	,953 851 637
92,3	,888 728 680	97,3	,922 146 657	102,3	,954 488 636
92,4	,889 407 679	97,4	,922 804 653	102,4	,955 124 636
	679		656		636
92,5	0,890 086	97,5	0,923 460	102,5	0,955 760
92,6	,890 765 679	97,6	,924 117 657	102,6	,956 395 635
92,7	,891 443 678	97,7	,924 772 655	102,7	,957 030 635
92,8	,892 121 677	97,8	,925 428 656	102,8	,957 665 634
92,9	,892 797 677	97,9	,926 083 655	102,9	,958 299 634
	677		655		634
93,0	0,893 474	98,0	0,926 738	103,0	0,958 933
93,1	,894 150 676	98,1	,927 392 654	103,1	,959 567 634
93,2	,894 826 676	98,2	,928 045 653	103,2	,960 200 633
93,3	,895 501 675	98,3	,928 699 653	103,3	,960 833 633
93,4	,896 176 674	98,4	,929 352 653	103,4	,961 465 632
	674		652		632
93,5	0,896 850	98,5	0,930 004	103,5	0,962 097
93,6	,897 524 674	98,6	,930 656 652	103,6	,962 728 631
93,7	,898 198 674	98,7	,931 308 651	103,7	,963 359 631
93,8	,898 871 673	98,8	,931 959 651	103,8	,963 990 630
93,9	,899 543 672	98,9	,932 610 650	103,9	,964 620 630
	672		650		630
94,0	0,900 215	99,0	0,933 260	104,0	0,965 250
94,1	,900 887 672	99,1	,933 910 649	104,1	,965 880 629
94,2	,901 558 671	99,2	,934 559 649	104,2	,966 509 628
94,3	,902 229 670	99,3	,935 208 649	104,3	,967 137 629
94,4	,902 899 670	99,4	,935 857 648	104,4	,967 766 628
	670		648		628
94,5	0,903 569	99,5	0,936 505	104,5	0,968 394
94,6	,904 239 669	99,6	,937 153 648	104,6	,969 021 627
94,7	,904 908 668	99,7	,937 800 647	104,7	,969 648 627
94,8	,905 576 668	99,8	,938 447 647	104,8	,970 275 626
94,9	,906 244 668	99,9	,939 094 646	104,9	,970 901 626
	668		646		626
95,0	0,906 912	100,0	0,939 740	105,0	0,971 527

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
100	0,939 74	150	1,219 71	200	1,439 16
101	,946 18 644	151	,224 59 488	201	,443 11 395
102	,952 58 640	152	,229 44 485	202	,447 05 393
103	,958 93 635	153	,234 27 483	203	,450 98 391
104	,965 25 632	154	,239 08 481	204	,454 89 389
	628		479		389
105	0,971 53	155	1,243 87	205	1,458 78
106	,977 77 624	156	,248 63 476	206	,462 66 388
107	,983 96 619	157	,253 37 474	207	,466 53 387
108	,990 13 617	158	,258 10 473	208	,470 38 385
109	,996 25 612	159	,262 79 469	209	,474 22 384
	609		468		383
110	1,002 34	160	1,267 47	210	1,478 05
111	,008 38 604	161	,272 13 466	211	,481 86 381
112	,014 40 602	162	,276 76 463	212	,485 66 380
113	,020 37 597	163	,281 38 462	213	,489 45 379
114	,026 32 595	164	,285 97 459	214	,493 22 377
	590		457		376
115	1,032 22	165	1,290 54	215	1,496 98
116	,038 09 587	166	,295 10 456	216	,500 73 375
117	,043 93 584	167	,299 63 453	217	,504 46 373
118	,049 74 581	168	,304 14 451	218	,508 18 372
119	,055 51 577	169	,308 64 450	219	,511 89 371
	573		447		370
120	1,061 24	170	1,313 11	220	1,515 59
121	,066 95 571	171	,317 57 446	221	,519 27 368
122	,072 62 567	172	,322 01 444	222	,522 94 367
123	,078 26 564	173	,326 42 441	223	,526 60 366
124	,083 87 561	174	,330 82 440	224	,530 24 364
	558		438		364
125	1,089 45	175	1,335 20	225	1,533 88
126	,094 99 554	176	,339 56 436	226	,537 50 362
127	,100 51 552	177	,343 91 435	227	,541 11 361
128	,106 00 549	178	,348 23 432	228	,544 71 360
129	,111 45 545	179	,352 54 431	229	,548 29 358
	543		429		358
130	1,116 88	180	1,356 83	230	1,551 87
131	,122 28 540	181	,361 10 427	231	,555 43 356
132	,127 65 537	182	,365 36 426	232	,558 98 355
133	,132 99 534	183	,369 60 424	233	,562 52 354
134	,138 30 531	184	,373 82 422	234	,566 05 353
	528		420		352
135	1,143 58	185	1,378 02	235	1,569 57
136	,148 84 526	186	,382 21 419	236	,573 08 351
137	,154 07 523	187	,386 38 417	237	,576 57 349
138	,159 27 520	188	,390 54 416	238	,580 06 348
139	,164 45 518	189	,394 67 413	239	,583 53 347
	515		413		346
140	1,169 60	190	1,398 80	240	1,586 99
141	,174 72 512	191	,402 90 410	241	,590 44 345
142	,179 82 510	192	,406 99 409	242	,593 88 344
143	,184 89 507	193	,411 07 408	243	,597 31 343
144	,189 94 505	194	,415 13 406	244	,600 73 342
	502		404		341
145	1,194 96	195	1,419 17	245	1,604 14
146	,199 96 500	196	,423 20 403	246	,607 54 340
147	,204 93 497	197	,427 21 401	247	,610 93 339
148	,209 88 495	198	,431 21 400	248	,614 31 338
149	,214 81 493	199	,435 19 398	249	,617 68 337
	490		397		336
150	1,219 71	200	1,439 16	250	1,621 04

V. Параболическое движение

<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ	<i>B</i>	σ
		297,48	1,77	559,64	2,37	962,10	2,97
250	1,621 04	300,89	,78	565,10	,38	970,20	,98
251	,624 38	304,33	,79	570,60	,39	978,34	,99
252	,627 72	307,80	1,80	576,14	2,40	986,54	3,00
253	,631 05	311,30	,81	581,72	,41	994,79	,01
254	,634 37	314,83	,82	587,33	,42	1003,08	,02
	331	318,39	,83	592,99	,43	1011,4	,03
		321,98	,84	598,69	,44	1019,8	,04
255	1,637 68	325,60	1,85	604,42	2,45	1028,3	3,05
256	,640 97	329,25	,86	610,20	,46	1036,8	,06
257	,644 26	332,94	,87	616,02	,47	1045,3	,07
258	,647 54	336,65	,88	621,88	,48	1053,9	,08
259	,650 81	340,39	,89	627,78	,49	1062,5	,09
	326	344,17	1,90	633,72	2,50	1071,2	3,10
260	1,654 07	347,97	,91	639,70	,51	1080,0	,11
261	,657 33	351,81	,92	645,72	,52	1088,8	,12
262	,660 57	355,68	,93	651,78	,53	1097,6	,13
263	,663 80	359,58	,94	657,89	,54	1106,5	,14
264	,667 02	363,51	1,95	664,03	2,55	1115,5	3,15
	322	367,47	,96	670,22	,56	1124,5	,16
265	1,670 24	371,47	,97	676,45	,57	1133,6	,17
266	,673 44	375,50	,98	682,73	,58	1142,7	,18
267	,676 64	379,56	,99	689,04	,59	1151,8	,19
268	,679 83	383,65	2,00	695,40	2,60	1161,0	3,20
269	,683 00	387,78	,01	701,80	,61	1170,3	,21
	317	391,94	,02	708,25	,62	1179,6	,22
270	1,686 17	396,14	,03	714,73	,63	1189,0	,23
271	,689 33	400,36	,04	721,26	,64	1198,4	,24
272	,692 49	404,62	2,05	727,84	2,65	1207,9	3,25
273	,695 63	408,92	,06	734,45	,66	1217,4	,26
274	,698 76	413,24	,07	741,12	,67	1227,0	,27
	313	417,61	,08	747,82	,68	1236,7	,28
275	1,701 89	422,00	,09	754,57	,69	1246,4	,29
276	,705 01	426,43	2,10	761,36	2,70	1256,1	3,30
277	,708 12	430,90	,11	768,20	,71	1265,9	,31
278	,711 22	435,40	,12	775,08	,72	1275,8	,32
279	,714 31	439,93	,13	782,01	,73	1285,7	,33
	308	444,50	,14	788,98	,74	1295,6	,34
280	1,717 39	449,11	2,15	796,00	2,75	1305,6	3,35
281	,720 47	453,75	,16	803,06	,76	1315,7	,36
282	,723 54	458,42	,17	810,17	,77	1325,9	,37
283	,726 60	463,13	,18	817,32	,78	1336,1	,38
284	,729 65	467,88	,19	824,52	,79	1346,3	,39
	304	472,66	2,20	831,76	2,80	1356,6	3,40
285	1,732 69	477,48	,21	839,05	,81	1367,0	,41
286	,735 73	482,34	,22	846,39	,82	1377,4	,42
287	,738 75	487,23	,23	853,77	,83	1387,8	,43
288	,741 77	492,16	,24	861,20	,84	1398,3	,44
289	,744 78	497,12	2,25	868,68	2,85	1408,9	3,45
	301	502,13	,26	876,20	,86	1419,6	,46
290	1,747 79	507,17	,27	883,77	,87	1430,3	,47
291	,750 78	512,24	,28	891,39	,88	1441,0	,48
292	,753 77	517,36	,29	899,06	,89	1451,8	,49
293	,756 75	522,51	2,30	906,77	2,90	1462,7	3,50
294	,759 73	527,70	,31	914,53	,91	1473,6	,51
	296	532,93	,32	922,34	,92	1484,6	,52
295	1,762 69	538,19	,33	930,19	,93	1495,6	,53
296	,765 65	543,50	,34	938,10	,94	1506,7	,54
297	,768 60	548,84	2,35	946,05	2,95	1517,9	3,55
298	,771 54	554,22	,36	954,06	,96	1529,1	,56
299	,774 48	559,64	,37	962,10	,97	1540,4	,57
300	1,777 41						

VI. Параболическое движение. Вычисление σ в случае, когда истинная аномалия близка к 180°

x	$\lg \beta$	x	$\lg \beta$	x	$\lg \beta$
0,000	0,000 000	0,030	9,986 776	0,060	9,973 163
01	9,999 565	31	,986 328	61	,972 703
02	,999 130	32	,985 880	62	,972 242
03	,998 695	33	,985 432	63	,971 781
04	,998 259	34	,984 983	64	,971 319
	436		449		462
05	9,997 823	35	9,984 534	65	9,970 857
06	,997 386	36	,984 084	66	,970 394
07	,996 949	37	,983 634	67	,969 931
08	,996 512	38	,983 184	68	,969 468
09	,996 074	39	,982 733	69	,969 004
	437		452		463
	437		450		463
	437		450		463
	437		450		463
	438		451		464
	439		452		464
0,010	9,995 635	0,040	9,982 281	0,070	9,968 540
11	,995 196	41	,981 829	71	,968 075
12	,994 757	42	,981 377	72	,967 610
13	,994 317	43	,980 924	73	,967 145
14	,993 877	44	,980 471	74	,966 679
	440		453		466
15	9,993 437	45	9,980 018	75	9,966 213
16	,992 996	46	,979 564	76	,965 746
17	,992 554	47	,979 109	77	,965 279
18	,992 112	48	,978 655	78	,964 811
19	,991 670	49	,978 199	79	,964 343
	443		455		468
	443		455		468
0,020	9,991 227	0,050	9,977 744	0,080	9,963 875
21	,990 784	51	,977 288	81	,963 406
22	,990 340	52	,976 831	82	,962 937
23	,989 896	53	,976 374	83	,962 467
24	,989 452	54	,975 916	84	,961 997
	445		457		471
25	9,989 007	55	9,975 459	85	9,961 526
26	,988 562	56	,975 000	86	,961 056
27	,988 116	57	,974 542	87	,960 584
28	,987 670	58	,974 083	88	,960 112
29	,987 223	59	,973 623	89	,959 640
	447		460		472
0,030	9,986 776	0,060	9,973 163	0,090	9,959 168

$$B = q^{-3/2} (t - T)$$

$$\lg \alpha = \frac{1}{3} \lg |B| + 9,520 7294 -_{10}$$

$$x = \alpha^{-2}, \quad \lg \sigma = \lg \alpha + \lg \beta$$

Пример. Дано $B = 1045,3$

$$B \dots 3,019 241$$

$$x \dots 8,945 714$$

$$1,006 413 7$$

$$x = 0,088 250$$

$$\alpha \dots 0,527 143$$

$$\beta \dots 9,959 994$$

$$\sigma = 3,06999.$$

$$\sigma \dots 0,487 137$$

VIIa. Значения функций $U(\xi)$ и $V(\xi)$

ξ	$U(\xi)$	$V(\xi)$	ξ	$U(\xi)$	$V(\xi)$
0,000	82,21169	27,40390	0,050	80,13004	27,82633
,001	82,17057	27,41212	,051	80,08786	27,83502
,002	82,12943	27,42036	,052	80,04565	27,84372
,003	82,08828	27,42860	,053	80,00342	27,85243
,004	82,04710	27,43685	,054	79,96117	27,86115
	4120	826		4228	873
0,005	82,00590	27,44511	0,055	79,91889	27,86988
,006	81,96468	27,45338	,056	79,87660	27,87861
,007	81,92344	27,46166	,057	79,83428	27,88736
,008	81,88218	27,46995	,058	79,79194	27,89612
,009	81,84090	27,47824	,059	79,74957	27,90489
	4130	831		4238	878
0,010	81,79960	27,48655	0,060	79,70719	27,91367
,011	81,75827	27,49487	,061	79,66478	27,92245
,012	81,71693	27,50319	,062	79,62235	27,93125
,013	81,67556	27,51152	,063	79,57989	27,94006
,014	81,63418	27,51986	,064	79,53742	27,94887
	4141	835		4250	883
0,015	81,59277	27,52821	0,065	79,49492	27,95770
,016	81,55134	27,53657	,066	79,45240	27,96654
,017	81,50989	27,54494	,067	79,40985	27,97539
,018	81,46842	27,55332	,068	79,36728	27,98424
,019	81,42693	27,56171	,069	79,32469	27,99311
	4151	839		4261	888
0,020	81,38542	27,57010	0,070	79,28208	28,00199
,021	81,34388	27,57851	,071	79,23944	28,01088
,022	81,30233	27,58692	,072	79,19678	28,01977
,023	81,26075	27,59535	,073	79,15410	28,02868
,024	81,21915	27,60378	,074	79,11140	28,03760
	4161	844		4273	893
0,025	81,17754	27,61222	0,075	79,06887	28,04653
,026	81,13590	27,62067	,076	79,02592	28,05547
,027	81,09423	27,62913	,077	78,98314	28,06442
,028	81,05255	27,63760	,078	78,94034	28,07338
,029	81,01085	27,64608	,079	78,89752	28,08235
	4173	849		4284	898
0,030	80,96912	27,65457	0,080	78,85468	28,09133
,031	80,92737	27,66307	,081	78,81181	28,10032
,032	80,88560	27,67158	,082	78,76892	28,10932
,033	80,84381	27,68010	,083	78,72601	28,11833
,034	80,80200	27,68862	,084	78,68307	28,12735
	4183	854		4296	903
0,035	80,76017	27,69716	0,085	78,64011	28,13638
,036	80,71831	27,70570	,086	78,59712	28,14542
,037	80,67644	27,71426	,087	78,55412	28,15448
,038	80,63454	27,72282	,088	78,51109	28,16354
,039	80,59262	27,73139	,089	78,46803	28,17262
	4195	859		4303	908
0,040	80,55067	27,73998	0,090	78,42495	28,18170
,041	80,50871	27,74857	,091	78,38185	28,19079
,042	80,46672	27,75717	,092	78,33872	28,19990
,043	80,42471	27,76578	,093	78,29557	28,20902
,044	80,38268	27,77440	,094	78,25240	28,21814
	4205	864		4320	914
0,045	80,34063	27,78304	0,095	78,20920	28,22728
,046	80,29856	27,79168	,096	78,16598	28,23643
,047	80,25646	27,80033	,097	78,12273	28,24559
,048	80,21434	27,80899	,098	78,07946	28,25476
,049	80,17220	27,81766	,099	78,03617	28,26394
	4216	867		4332	919
0,050	80,13004	27,82633	0,100	77,99285	28,27313

VIIa. Значения функций $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$

ζ	$U(\zeta)$	$V(\zeta)$	ζ	$U(\zeta)$	$V(\zeta)$
0,100	77,99285	28,27313	0,150	75,79543	28,74697
,101	77,94951	28,28233	,151	75,75083	28,75674
,102	77,90615	28,29155	,152	75,70621	28,76653
,103	77,86276	28,30077	,153	75,66155	28,77632
,104	77,81934	28,31000	,154	75,61688	28,78613
	4343			4471	983
0,105	77,77591	28,31925	0,155	75,57217	28,79596
,106	77,73244	28,32851	,156	75,52744	28,80579
,107	77,68896	28,33777	,157	75,48269	28,81564
,108	77,64545	28,34705	,158	75,43790	28,82549
,109	77,60191	28,35634	,159	75,39309	28,83537
	4356	930		4483	988
0,110	77,55835	28,36564	0,160	75,34826	28,84525
,111	77,51477	28,37495	,161	75,30339	28,85514
,112	77,47116	28,38427	,162	75,25850	28,86505
,113	77,42752	28,39361	,163	75,21358	28,87497
,114	77,38387	28,40295	,164	75,16864	28,88490
	4369	936		4497	995
0,115	77,34018	28,41231	0,165	75,12367	28,89485
,116	77,29647	28,42168	,166	75,07867	28,90481
,117	77,25274	28,43105	,167	75,03365	28,91478
,118	77,20899	28,44044	,168	74,98860	28,92476
,119	77,16520	28,44984	,169	74,94352	28,93475
	4380	942		4511	1001
0,120	77,12140	28,45926	0,170	74,89841	28,94478
,121	77,07757	28,46868	,171	74,85328	28,95478
,122	77,03371	28,47811	,172	74,80812	28,96482
,123	76,98983	28,48756	,173	74,76293	28,97486
,124	76,94592	28,49702	,174	74,71771	28,98492
	4393	946		4524	1007
0,125	76,90199	28,50648	0,175	74,67247	28,99499
,126	76,85803	28,51596	,176	74,62720	29,00507
,127	76,81405	28,52546	,177	74,58191	29,01517
,128	76,77005	28,53496	,178	74,53658	29,02528
,129	76,72601	28,54447	,179	74,49123	29,03540
	4405	953		4538	1014
0,130	76,68196	28,55400	0,180	74,44585	29,04554
,131	76,63787	28,56354	,181	74,40044	29,05569
,132	76,59377	28,57308	,182	74,35501	29,06585
,133	76,54963	28,58264	,183	74,30954	29,07602
,134	76,50547	28,59222	,184	74,26405	29,08621
	4418	958		4552	1020
0,135	76,46129	28,60180	0,185	74,21853	29,09641
,136	76,41708	28,61140	,186	74,17299	29,10662
,137	76,37284	28,62100	,187	74,12741	29,11685
,138	76,32858	28,63062	,188	74,08181	29,12709
,139	76,28429	28,64025	,189	74,03618	29,13734
	4431	964		4566	1027
0,140	76,23998	28,64989	0,190	73,99052	29,14761
,141	76,19564	28,65955	,191	73,94483	29,15789
,142	76,15128	28,66921	,192	73,89911	29,16818
,143	76,10689	28,67889	,193	73,85337	29,17848
,144	76,06247	28,68858	,194	73,80760	29,18880
	4444	970		4580	1033
0,145	76,01803	28,69828	0,195	73,76180	29,19913
,146	75,97356	28,70800	,196	73,71597	29,20948
,147	75,92907	28,71772	,197	73,67011	29,21984
,148	75,88455	28,72746	,198	73,62423	29,23021
,149	75,84000	28,73721	,199	73,57831	29,24060
	4457	976		4594	1040
0,150	75,79543	28,74697	0,200	73,53237	29,25100

VIIb. Значения функций $\lg U(\zeta)$ и $\lg V(\zeta)$

ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$	ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$
+ 0,000	1,914 9336	1,437 8123	+ 0,050	1,903 7954	1,444 4567
01	,914 7163	,437 9426	51	,903 5667	,444 5916
02	,914 4988	,438 0731	52	,903 3377	,444 7273
03	,914 2811	,438 2036	53	,903 1085	,444 8631
04	,914 0632	,438 3243	54	,902 8791	,444 9990
	2181	1307		2296	1361
+ 0,005	1,913 8451	1,438 4650	+ 0,055	1,902 6495	1,445 1351
06	,913 6267	,438 5959	56	,902 4196	,445 2712
07	,913 4082	,438 7268	57	,902 1894	,445 4075
08	,913 1894	,438 8578	58	,901 9690	,445 5439
09	,912 9704	,438 9890	59	,901 7284	,445 6803
	2192	1312		2309	1366
+ 0,010	,912 7512	1,439 1202	+ 0,060	1,901 4975	1,445 8169
11	,912 5317	,439 2516	61	,901 2664	,445 9536
12	,912 3120	,439 3831	62	,901 0350	,446 0904
13	,912 0921	,439 5146	63	,900 8034	,446 2273
14	,911 8720	,439 6463	64	,900 5715	,446 3644
	2203	1317		2321	1371
+ 0,015	1,911 6517	1,439 7780	+ 0,065	1,900 3394	1,446 5015
16	,911 4311	,439 9099	66	,900 1070	,446 6387
17	,911 2108	,440 0419	67	,899 8744	,446 7761
18	,910 9893	,440 1740	68	,899 6415	,446 9136
19	,910 7681	,440 3061	69	,899 4084	,447 0512
	2215	1323		2334	1377
+ 0,020	1,910 5466	1,440 4384	+ 0,070	1,899 1750	1,447 1889
21	,910 3249	,440 5708	71	,898 9414	,447 3267
22	,910 1030	,440 7033	72	,898 7075	,447 4647
23	,909 8805	,440 8359	73	,898 4734	,447 6027
24	,909 6585	,440 9686	74	,898 2390	,447 7409
	2226	1328		2346	1383
+ 0,025	1,909 4359	1,441 1014	+ 0,075	1,898 0044	1,447 8792
26	,909 2130	,441 2343	76	,897 7695	,448 0176
27	,908 9900	,441 3673	77	,897 5344	,448 1561
28	,908 7667	,441 5005	78	,897 2990	,448 2947
29	,908 5432	,441 6337	79	,897 0634	,448 4334
	2238	1333		2359	1389
+ 0,030	1,908 3194	1,441 7670	+ 0,080	1,896 8275	1,448 5723
31	,908 0954	,441 9004	81	,896 5913	,448 7113
32	,907 8712	,442 0340	82	,896 3549	,448 8504
33	,907 6468	,442 1676	83	,896 1182	,448 9896
34	,907 4221	,442 3013	84	,895 8813	,449 1289
	2249	1339		2372	1394
+ 0,035	1,907 1972	1,442 4352	+ 0,085	1,895 6441	1,449 2683
36	,906 9721	,442 5692	86	,895 4067	,449 4079
37	,906 7467	,442 7033	87	,895 1689	,449 5475
38	,906 5211	,442 8375	88	,894 9310	,449 6873
39	,906 2953	,442 9717	89	,894 6927	,449 8272
	2261	1344		2384	1400
+ 0,040	1,906 0692	1,443 1061	+ 0,090	1,894 4543	1,449 9672
41	,905 8429	,443 2405	91	,894 2155	,450 1074
42	,905 6163	,443 3753	92	,893 9765	,450 2476
43	,905 3895	,443 5100	93	,893 7372	,450 3881
44	,905 1625	,443 6448	94	,893 4977	,450 5285
	2273	1349		2399	1406
+ 0,045	1,904 9352	1,443 7797	+ 0,095	1,893 2578	1,450 6691
46	,904 7077	,443 9147	96	,893 0178	,450 8098
47	,904 4800	,444 0499	97	,892 7774	,450 9507
48	,904 2520	,444 1852	98	,892 5368	,451 0916
49	,904 0238	,444 3206	99	,892 2960	,451 2327
	2284	1354		2412	1412
+ 0,050	1,903 7954	1,444 4560	+ 0,100	1,892 0548	1,451 3739

VIII. Значения функций $\lg U(\zeta)$ и $\lg V(\zeta)$

ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$	ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$
+ 0,100	1,892 0548	1,451 3739	+ 0,150	1,879 6430	1,453 5921
01	,891 8134 2414	,451 5152 1413	51	,879 3874 2556	,458 7397 1476
02	,891 5717 2419	,451 6567 1415	52	,879 1315 2559	,458 8875 1478
03	,891 3298 2422	,451 7983 1416	53	,878 8753 2562	,459 0354 1479
04	,891 0876 2425	,451 9400 1417	54	,878 6187 2566	,459 1834 1480
					1481
+ 0,105	1,890 8451	1,452 0818	+ 0,155	1,878 3619	1,459 3315
06	,890 6023 2428	,452 2237 1419	56	,878 1048 2571	,459 4798 1483
07	,890 3593 2430	,452 3657 1420	57	,877 8473 2575	,459 6282 1484
08	,890 1160 2433	,452 5079 1422	58	,877 5896 2577	,459 7768 1486
09	,889 8724 2436	,452 6502 1423	59	,877 3316 2580	,459 9255 1487
					1488
+ 0,110	1,889 6286	1,452 7926	+ 0,160	1,877 0732	1,460 0743
11	,889 3844 2442	,452 9352 1426	61	,876 8145 2587	,460 2233 1490
12	,889 1400 2444	,453 0776 1426	62	,876 5556 2589	,460 3724 1491
13	,888 8954 2446	,453 2208 1428	63	,876 2963 2593	,460 5216 1492
14	,888 6504 2450	,453 3635 1429	64	,876 0367 2596	,460 6710 1494
					1495
+ 0,115	1,888 4052	1,453 5065	+ 0,165	1,875 7768	1,460 8205
16	,888 1597 2455	,453 6497 1432	66	,875 5166 2602	,460 9701 1496
17	,887 9139 2458	,453 7930 1433	67	,875 2561 2605	,461 1199 1498
18	,887 6678 2461	,453 9364 1434	68	,874 9952 2609	,461 2698 1499
19	,887 4215 2466	,454 0799 1435	69	,874 7341 2611	,461 4199 1501
					1501
+ 0,120	1,887 1749	1,454 2236	+ 0,170	1,874 4726	1,461 5700
21	,886 9280 2469	,454 3674 1438	71	,874 2108 2618	,461 7203 1503
22	,886 6808 2472	,454 5113 1439	72	,873 9487 2621	,461 8708 1505
23	,886 4334 2474	,454 6553 1440	73	,873 6863 2624	,462 0214 1506
24	,886 1856 2478	,454 7994 1441	74	,873 4236 2627	,462 1722 1508
					1508
+ 0,125	1,885 9376	1,454 9437	+ 0,175	1,873 1605	1,462 3230
26	,885 6833 2483	,455 0881 1444	76	,872 8972 2633	,462 4740 1510
27	,885 4407 2486	,455 2326 1445	77	,872 6335 2637	,462 6252 1512
28	,885 1913 2489	,455 3773 1447	78	,872 3695 2640	,462 7765 1513
29	,884 9426 2492	,455 5221 1448	79	,872 1051 2644	,462 9279 1514
					1516
+ 0,130	1,884 6932	1,455 6670	+ 0,180	1,871 8405	1,463 0795
31	,884 4434 2498	,455 8120 1450	81	,871 5755 2650	,463 2312 1517
32	,884 1934 2500	,455 9572 1452	82	,871 3102 2653	,463 3830 1518
33	,883 9431 2503	,456 1025 1453	83	,871 0446 2656	,463 5350 1520
34	,883 6925 2509	,456 2479 1454	84	,870 7786 2660	,463 6872 1522
					1522
+ 0,135	1,883 4416	1,456 3934	+ 0,185	1,870 5124	1,463 8394
36	,883 1904 2512	,456 5391 1457	86	,870 2458 2666	,463 9918 1524
37	,882 9390 2514	,456 6849 1458	87	,869 9783 2670	,464 1444 1526
38	,882 6872 2518	,456 8308 1459	88	,869 7116 2672	,464 2971 1527
39	,882 4351 2521	,456 9769 1461	89	,869 4440 2676	,464 4500 1529
					1529
+ 0,140	1,882 1828	1,457 1231	+ 0,190	1,869 1761	1,464 6029
41	,881 9301 2527	,457 2694 1463	91	,868 9078 2683	,464 7560 1531
42	,881 6772 2529	,457 4158 1464	92	,868 6392 2686	,464 9093 1533
43	,881 4240 2532	,457 5624 1466	93	,868 3703 2689	,465 0628 1535
44	,881 1704 2536	,457 7091 1467	94	,868 1011 2692	,465 2163 1535
					1537
+ 0,145	1,880 9166	1,457 8559	+ 0,195	1,867 8315	1,465 3700
46	,880 6625 2541	,458 0029 1470	96	,867 5616 2699	,465 5239 1539
47	,880 4081 2544	,458 1500 1471	97	,867 2913 2703	,465 6779 1540
48	,880 1534 2547	,458 2972 1472	98	,867 0207 2706	,465 8320 1541
49	,879 8983 2551	,458 4446 1474	99	,866 7498 2709	,465 9863 1543
					1544
+ 0,150	1,879 6430	1,458 5921	+ 0,200	1,866 4785	1,466 1407

VIIb. Значения функций $\lg U(\zeta)$ и $\lg V(\zeta)$

ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$	ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$
-0,000	1,914 9336 2170	1,437 8123 1372	-0,050	1,925 5282 2067	1,431 4202 1255
01	,915 1506 2168	,437 6821 1371	51	,925 7349 2065	,431 2947 1253
02	,915 3674 2166	,437 5520 1371	52	,925 9414 2063	,431 1694 1252
03	,915 5840 2164	,437 4219 1259	53	,926 1477 2062	,431 0442 1252
04	,915 8004 2162	,437 292) 1298	54	,926 3539 2059	,430 9190 1251
-0,005	1,916 0166 2159	1,437 1622 1298	-0,055	1,926 5598 2057	1,430 7939 1249
06	,916 2325 2158	,437 0324 1297	56	,926 7655 2056	,430 6690 1248
07	,916 4483 2155	,436 9027 1295	57	,926 9711 2053	,430 5442 1248
08	,916 6638 2153	,436 7732 1294	58	,927 1764 2051	,430 4194 1247
09	,916 8791 2151	,436 6438 1293	59	,927 3815 2050	,430 2947 1246
-0,010	1,917 0942 2149	1,436 5145 1292	-0,060	1,927 5865 2047	1,430 1701 1245
11	,917 3091 2147	,436 3853 1292	61	,927 7912 2046	,430 0456 1244
12	,917 5238 2145	,436 2561 1291	62	,927 9958 2044	,429 9212 1243
13	,917 7383 2142	,436 1270 1289	63	,928 2002 2042	,429 7969 1243
14	,917 9525 2141	,435 9981 1289	64	,928 4044 2040	,429 6726 1241
-0,015	1,918 1666 2138	1,435 8692 1288	-0,065	1,928 6084 2038	1,429 5485 1240
16	,918 3804 2136	,435 7404 1286	66	,928 8122 2036	,429 4245 1240
17	,918 5940 2134	,435 6118 1285	67	,929 0158 2034	,429 3005 1239
18	,918 8074 2132	,435 4833 1285	68	,929 2192 2032	,429 1766 1237
19	,919 0206 2130	,435 3548 1284	69	,929 4224 2030	,429 0529 1237
-0,020	1,919 2336 2128	1,435 2264 1282	-0,070	1,929 6254 2029	1,428 9292 1236
21	,919 4464 2126	,435 0982 1282	71	,929 8283 2026	,428 8056 1235
22	,919 6590 2124	,434 9700 1280	72	,930 0309 2025	,428 6821 1235
23	,919 8714 2121	,434 8421 1280	73	,930 2334 2023	,428 5586 1233
24	,920 0835 2120	,434 7141 1279	74	,930 4357 2021	,428 4353 1232
-0,025	1,920 2955 2117	1,434 5861 1278	-0,075	1,930 6378 2019	1,428 3121 1232
26	,920 5072 2116	,434 4583 1276	76	,931 8397 2017	,428 1889 1231
27	,920 7188 2113	,434 3307 1276	77	,931 0414 2015	,428 0658 1229
28	,920 9301 2111	,434 2031 1275	78	,931 2429 2014	,427 9429 1229
29	,921 1412 2110	,434 0756 1274	79	,931 4443 2011	,427 8200 1228
-0,030	1,921 3522 2107	1,433 9482 1273	-0,080	1,931 6454 2010	1,427 6972 1227
31	,921 5629 2105	,433 8209 1272	81	,931 8464 2008	,427 5745 1226
32	,921 7734 2103	,433 6937 1271	82	,932 0472 2006	,427 4519 1226
33	,921 9837 2101	,433 5666 1270	83	,932 2478 2004	,427 3293 1225
34	,922 1938 2099	,433 4396 1270	84	,932 4482 2002	,427 2063 1223
-0,035	1,922 4037 2097	1,433 3126 1268	-0,085	1,932 6484 2001	1,427 0845 1223
36	,922 6134 2095	,433 1858 1267	86	,932 8485 1998	,426 9622 1221
37	,922 8229 2093	,433 0591 1266	87	,933 0483 1997	,426 8401 1221
38	,923 0322 2091	,432 9325 1266	88	,933 2480 1995	,426 7180 1220
39	,923 2413 2089	,432 8059 1265	89	,933 4475 1993	,426 5960 1220
-0,040	1,923 4502 2087	1,432 6794 1263	-0,090	1,933 6468 1991	1,426 4740 1218
41	,923 6589 2035	,432 5531 1262	91	,933 8459 1990	,426 3522 1217
42	,923 8674 2083	,432 4269 1262	92	,934 0449 1987	,426 2305 1217
43	,924 0757 2081	,432 3007 1261	93	,934 2436 1986	,426 1088 1216
44	,924 2838 2079	,432 1746 1260	94	,934 4422 1984	,425 9872 1215
-0,045	1,924 4917 2077	1,432 0486 1258	-0,095	1,934 6406 1982	1,425 8657 1214
46	,924 6994 2075	,431 9228 1258	96	,934 8388 1981	,425 7443 1213
47	,924 9069 2073	,431 7970 1257	97	,935 0369 1978	,425 6230 1212
48	,925 1142 2071	,431 6713 1256	98	,935 2347 1977	,425 5018 1212
49	,925 3213 2069	,431 5457 1255	99	,935 4324 1975	,425 3806 1210
-0,050	1,925 5282	1,431 4202	-0,100	1,935 6299	1,425 2596

VIIb. Значения функций $\lg U(\zeta)$ и $\lg V(\zeta)$

ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$	ζ	$\lg U(\zeta)$	$\lg V(\zeta)$
-0,100	1,935 6299	1,425 2596	-0,150	1,945 2825	1,419 3131
01	,935 8272	1,425 1386	51	,945 4712	1,419 1963
02	,936 0244	,425 0177	52	,945 6598	1,419 0795
03	,936 2213	,424 8969	53	,945 8482	1,418 9628
04	,936 4181	,424 7762	54	,946 0365	1,418 8461
	1966	1207		1880	1165
-0,105	1,936 6147	1,424 6555	-0,155	1,946 2245	1,418 7296
06	,936 8111	,424 5350	56	,946 4125	1,418 6132
07	,937 0074	,424 4146	57	,946 6002	1,418 4968
08	,937 2034	,424 2942	58	,946 7878	1,418 3805
09	,937 3993	,424 1739	59	,946 9753	1,418 2643
	1967	1202		1873	1162
-0,110	1,937 5950	1,424 0537	-0,160	1,947 1626	1,418 1481
11	,937 7906	,423 9336	61	,947 3497	1,418 0320
12	,937 9860	,423 8135	62	,947 5366	1,417 9160
13	,938 1811	,423 6935	63	,947 7234	1,417 8001
14	,938 3762	,423 5737	64	,947 9100	1,417 6843
	1948	1198		1865	1157
-0,115	1,938 5710	1,423 4539	-0,165	1,948 0965	1,417 5686
16	,938 7657	,423 3342	66	,948 2828	1,417 4529
17	,938 9601	,423 2145	67	,948 4690	1,417 3373
18	,939 1545	,423 0950	68	,948 6550	1,417 2218
19	,939 3486	,422 9756	69	,948 8408	1,417 1063
	1940	1194		1857	1154
-0,120	1,939 5426	1,422 8562	-0,170	1,949 0265	1,416 9909
21	,939 7364	,422 7369	71	,949 2120	1,416 8756
22	,939 9300	,422 6177	72	,949 3974	1,416 7604
23	,940 1234	,422 4986	73	,949 5826	1,416 6453
24	,940 3167	,422 3796	74	,949 7676	1,416 5302
	1931	1190		1849	1150
-0,125	1,940 5098	1,422 2606	-0,175	1,949 9525	1,416 4152
26	,940 7028	,422 1417	76	,950 1372	1,416 3003
27	,940 8955	,422 0229	77	,950 3218	1,416 1855
28	,941 0881	,421 9042	78	,950 5062	1,416 0708
29	,941 2805	,421 7856	79	,950 6905	1,415 9561
	1923	1186		1841	1146
-0,130	1,941 4728	1,421 6670	-0,180	1,950 8746	1,415 8415
31	,941 6649	,421 5486	81	,951 0585	1,415 7269
32	,941 8568	,421 4302	82	,951 2423	1,415 6125
33	,942 0485	,421 3119	83	,951 4259	1,415 4981
34	,942 2401	,421 1937	84	,951 6094	1,415 3838
	1914	1182		1833	1142
-0,135	1,942 4315	1,421 0755	-0,185	1,951 7927	1,415 2696
36	,942 6227	,420 9575	86	,951 9759	1,415 1554
37	,942 8138	,420 8395	87	,952 1589	1,415 0413
38	,943 0047	,420 7216	88	,952 3418	1,414 9273
39	,943 1954	,420 6038	89	,952 5245	1,414 8134
	1906	1177		1825	1138
-0,140	1,943 3860	1,420 4861	-0,190	1,952 7070	1,414 6996
41	,943 5764	,420 3684	91	,952 8894	1,414 5858
42	,943 7666	,420 2508	92	,953 0717	1,414 4721
43	,943 9567	,420 1333	93	,953 2538	1,414 3585
44	,944 1466	,420 0159	94	,953 4357	1,414 2450
	1897	1173		1818	1135
-0,145	1,944 3363	1,419 8986	-0,195	1,953 6175	1,414 1315
46	,944 5259	,419 7813	96	,953 7991	1,414 0181
47	,944 7153	,419 6642	97	,953 9806	1,413 9048
48	,944 9045	,419 5471	98	,954 1620	1,413 7915
49	,945 0936	,419 4301	99	,954 3431	1,413 6783
	1889	1170		1811	1131
-0,150	1,945 2825	1,419 3131	-0,200	1,954 5242	1,413 5652

VIII. Функция $\xi(x)$

x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$	x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$	x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$
0,000	0	0	0,050	1471	1389	0,100	6 066	5 403
,001	1	1	,051	1532	1444	,101	6 192	5 509
,002	2	2	,052	1593	1500	,102	6 319	5 616
,003	5	5	,053	1656	1558	,103	6 448	5 723
,004	9	9	,054	1720	1616	,104	6 578	5 832
0,005	14	14	0,055	1785	1675	0,105	6 709	5 941
,006	21	20	,056	1852	1736	,106	6 842	6 052
,007	28	28	,057	1920	1798	,107	6 976	6 163
,008	37	36	,058	1989	1860	,108	7 111	6 275
,009	47	46	,059	2060	1924	,109	7 248	6 389
0,010	57	57	0,060	2131	1988	0,110	7 386	6 503
,011	70	69	,061	2204	2054	,111	7 526	6 618
,012	83	82	,062	2278	2121	,112	7 667	6 734
,013	97	96	,063	2354	2189	,113	7 809	6 851
,014	113	111	,064	2431	2257	,114	7 953	6 969
0,015	130	127	0,065	2509	2327	0,115	8 098	7 088
,016	148	145	,066	2588	2398	,116	8 245	7 208
,017	167	164	,067	2669	2470	,117	8 393	7 329
,018	187	183	,068	2751	2543	,118	8 542	7 451
,019	209	204	,069	2834	2617	,119	8 693	7 574
0,020	231	226	0,070	2918	2691	0,120	8 845	7 698
,021	255	249	,071	3004	2767	,121	8 999	7 822
,022	280	273	,072	3091	2844	,122	9 154	7 948
,023	306	298	,073	3180	2922	,123	9 311	8 074
,024	334	325	,074	3269	3001	,124	9 469	8 202
0,025	362	352	0,075	3360	3081	0,125	9 628	8 330
,026	392	381	,076	3453	3162	,126	9 789	8 459
,027	423	410	,077	3546	3244	,127	9 951	8 590
,028	455	441	,078	3641	3327	,128	10 115	8 721
,029	489	473	,079	3738	3411	,129	10 280	8 853
0,030	523	506	0,080	3835	3496	0,130	10 447	8 986
,031	559	539	,081	3934	3582	,131	10 615	9 120
,032	596	575	,082	4034	3669	,132	10 784	9 255
,033	634	611	,083	4136	3757	,133	10 955	9 390
,034	674	648	,084	4239	3846	,134	11 128	9 527
0,035	714	686	0,085	4343	3936	0,135	11 301	9 665
,036	756	726	,086	4448	4027	,136	11 477	9 803
,037	799	766	,087	4555	4119	,137	11 654	9 943
,038	844	807	,088	4663	4212	,138	11 832	10 083
,039	889	850	,089	4773	4306	,139	12 012	10 224
0,040	936	894	0,090	4884	4401	0,140	12 193	10 366
,041	984	938	,091	4996	4496	,141	12 376	10 509
,042	1033	984	,092	5109	4593	,142	12 560	10 653
,043	1084	1031	,093	5224	4691	,143	12 745	10 798
,044	1135	1079	,094	5341	4790	,144	12 933	10 944
0,045	1188	1128	0,095	5458	4890	0,145	13 121	11 091
,046	1242	1178	,096	5577	4991	,146	13 311	11 238
,047	1298	1229	,097	5697	5092	,147	13 503	11 387
,048	1354	1281	,098	5819	5195	,148	13 696	11 536
,049	1412	1334	,099	5942	5299	,149	13 891	11 686
0,050	1471	1389	0,100	6066	5403	0,150	14 087	11 838

VIII. Функция $\xi(x)$

x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$	x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$	x	$10^7 \xi(x)$	$10^7 \xi(-x)$
0,150	14 087	11 838	0,200	25 887	20 507	0,250	41 835	31 245
,151	14 185	11 990	,201	26 154	20 702	,251	42 199	31 480
,152	14 484	12 143	,202	26 433	20 897	,252	42 566	31 716
,153	14 684	12 296	,203	26 713	21 094	,253	42 934	31 952
,154	14 886	12 451	,204	26 995	21 292	,254	43 305	32 189
0,155	15 090	12 607	0,205	27 278	21 490	0,255	43 677	32 427
,156	15 295	12 763	,206	27 564	21 689	,256	44 051	32 666
,157	15 502	12 921	,207	27 851	21 889	,257	44 427	32 905
,158	15 710	13 079	,208	28 139	22 090	,258	44 804	33 146
,159	15 920	13 238	,209	28 429	22 291	,259	45 184	33 387
0,160	16 131	13 398	0,210	28 722	22 494	0,260	45 566	33 628
,161	16 344	13 559	,211	29 015	22 697	,261	45 949	33 871
,162	16 559	13 721	,212	29 311	22 901	,262	46 334	34 114
,163	16 775	13 883	,213	29 608	23 106	,263	46 721	34 358
,164	16 992	14 047	,214	29 907	23 311	,264	47 111	34 603
0,165	17 211	14 211	0,215	30 207	23 518	0,265	47 502	34 848
,166	17 432	14 377	,216	30 509	23 725	,266	47 894	35 094
,167	17 654	14 543	,217	30 814	23 932	,267	48 289	35 341
,168	17 878	14 710	,218	31 119	24 142	,268	48 686	35 589
,169	18 103	14 878	,219	31 427	24 352	,269	49 085	35 838
0,170	18 330	15 047	0,220	31 736	24 562	0,270	49 485	36 087
,171	18 558	15 216	,221	32 047	24 774	,271	49 888	36 337
,172	18 788	15 387	,222	32 359	24 986	,272	50 292	36 587
,173	19 020	15 558	,223	32 674	25 199	,273	50 699	36 839
,174	19 253	15 730	,224	32 990	25 412	,274	51 107	37 091
0,175	19 487	15 903	0,225	33 308	25 627	0,275	51 517	37 344
,176	19 724	16 077	,226	33 627	25 842	,276	51 930	37 598
,177	19 961	16 252	,227	33 949	26 058	,277	52 344	37 852
,178	20 201	16 428	,228	34 272	26 275	,278	52 760	38 107
,179	20 442	16 604	,229	34 597	26 493	,279	53 178	38 363
0,180	20 685	16 782	0,230	34 924	26 711	0,280	53 598	38 620
,181	20 929	16 960	,231	35 252	26 931	,281	54 020	38 877
,182	21 175	17 139	,232	35 582	27 151	,282	54 444	39 135
,183	21 422	17 319	,233	35 914	27 371	,283	54 870	39 394
,184	21 671	17 500	,234	36 248	27 593	,284	55 298	39 654
0,185	21 922	17 681	0,235	36 584	27 816	0,285	55 728	39 914
,186	22 174	17 864	,236	36 921	28 039	,286	56 160	40 175
,187	22 428	18 047	,237	37 260	28 263	,287	56 594	40 437
,188	22 683	18 231	,238	37 601	28 487	,288	57 030	40 700
,189	22 941	18 416	,239	37 944	28 713	,289	57 468	40 963
0,190	23 199	18 602	0,240	38 289	28 939	0,290	57 908	41 227
,191	23 460	18 789	,241	38 635	29 166	,291	58 350	41 491
,192	23 722	18 976	,242	38 983	29 394	,292	58 795	41 757
,193	23 985	19 165	,243	39 333	29 623	,293	59 241	42 023
,194	24 251	19 354	,244	39 685	29 852	,294	59 689	42 290
0,195	24 518	19 544	0,245	40 039	30 083	0,295	60 139	42 557
,196	24 786	19 735	,246	40 394	30 314	,296	60 591	42 826
,197	25 056	19 926	,247	40 752	30 545	,297	61 045	43 095
,198	25 328	20 119	,248	41 111	30 778	,298	61 502	43 364
,199	25 602	20 312	,249	41 472	31 001	,299	61 960	43 635
0,200	25 877	20 507	0,250	41 835	31 245	0,300	62 421	43 906

IX. Вторая форма уравнения Эйлера

c	θ_0	$\lg \theta_0$	c	θ_0	$\lg \theta_0$
0,000	1,000 0000	0,000 000	0,050	1,004 2198	0,001 829
01	,000 0834	,000 036	51	,004 3053	,001 866
02	,000 1668	,000 072	52	,004 3908	,001 903
03	,000 2502	,000 109	53	,004 4764	,001 940
04	,000 3337	,000 145	54	,004 5621	,001 977
	835	36		856	37
0,005	1,000 4172	0,000 181	0,055	1,004 6477	0,002 014
06	,000 5003	,000 217	56	,004 7335	,002 051
07	,000 5844	,000 254	57	,004 8192	,002 088
08	,000 6680	,000 290	58	,004 9050	,002 125
09	,000 7517	,000 326	59	,004 9909	,002 162
	837	37		859	37
0,010	1,000 8354	0,000 363	0,060	1,005 0768	0,002 199
11	,000 9192	,000 399	61	,005 1628	,002 236
12	,001 0030	,000 435	62	,005 2487	,002 274
13	,001 0869	,000 472	63	,005 3348	,002 311
14	,001 1708	,000 508	64	,005 4209	,002 348
	839	37		861	37
0,015	1,001 2547	0,000 545	0,065	1,005 5070	0,002 385
16	,001 3387	,000 581	66	,005 5932	,002 422
17	,001 4227	,000 617	67	,005 6794	,002 460
18	,001 5068	,000 654	68	,005 7656	,002 497
19	,001 5909	,000 690	69	,005 8519	,002 534
	842	37		864	37
0,020	1,001 6751	0,000 727	0,070	1,005 9383	0,002 571
21	,001 7593	,000 763	71	,006 0247	,002 603
22	,001 8435	,000 800	72	,006 1111	,002 646
23	,001 9278	,000 836	73	,006 1976	,002 683
24	,002 0121	,000 873	74	,006 2842	,002 721
	844	37		865	37
0,025	1,002 0965	0,000 910	0,075	1,006 3707	0,002 758
26	,002 1809	,000 946	76	,006 4574	,002 795
27	,002 2653	,000 983	77	,006 5440	,002 833
28	,002 3498	,001 019	78	,006 6307	,002 870
29	,002 4344	,001 056	79	,006 7175	,002 908
	846	37		868	37
0,030	1,002 5190	0,001 093	0,080	1,006 8043	0,002 945
31	,002 6036	,001 129	81	,006 8912	,002 983
32	,002 6883	,001 166	82	,006 9781	,003 020
33	,002 7730	,001 203	83	,007 0650	,003 058
34	,002 8577	,001 239	84	,007 1520	,003 095
	848	37		870	38
0,035	1,002 9425	0,001 276	0,085	1,007 2390	0,003 133
36	,003 0274	,001 313	86	,007 3261	,003 170
37	,003 1123	,001 350	87	,007 4133	,003 208
38	,003 1972	,001 386	88	,007 5004	,003 245
39	,003 2822	,001 423	89	,007 5877	,003 283
	850	37		872	37
0,040	1,003 3672	0,001 460	0,090	1,007 6749	0,003 320
41	,003 4523	,001 497	91	,007 7622	,003 358
42	,003 5374	,001 534	92	,007 8496	,003 396
43	,003 6225	,001 570	93	,007 9370	,003 433
44	,003 7077	,001 607	94	,008 0245	,003 471
	852	37		875	38
0,045	1,003 7929	0,001 644	0,095	1,003 1120	0,003 509
46	,003 8782	,001 681	96	,008 1995	,003 546
47	,003 9635	,001 718	97	,008 2871	,003 584
48	,004 0489	,001 755	98	,008 3748	,003 622
49	,004 1343	,001 792	99	,008 4625	,003 660
	855	37		877	38
0,050	1,004 2198	0,001 829	0,100	1,008 5502	0,003 698

IX. Вторая форма уравнения Эйлера

c	θ_0	$\lg \theta_0$	c	θ_0	$\lg \theta_0$
0,100	1,008 5502 878	0,003 698 37	0,150	1,012 9983 902	0,005 609 38
01	,008 6380 878	,003 735 38	51	,013 0895 903	,005 647 39
02	,008 7258 879	,003 773 38	52	,013 1788 903	,005 686 39
03	,008 8137 879	,003 811 38	53	,013 2691 904	,005 725 39
04	,008 9016 880	,003 849 38	54	,013 3595 904	,005 764 39
		38		904	38
0,105	1,008 9896 880	0,003 887 38	0,155	1,013 4499 905	0,005 802 39
06	,009 0776 881	,003 925 37	56	,013 5404 905	,005 841 39
07	,009 1657 881	,003 962 37	57	,013 6309 906	,005 880 39
08	,009 2538 881	,004 000 38	58	,013 7215 906	,005 919 39
09	,009 3419 883	,004 038 38	59	,013 8121 906	,005 957 39
		38		906	39
0,110	1,009 4302 882	0,004 076 38	0,160	1,013 9027 908	0,005 996 39
11	,009 5184 883	,004 114 38	61	,013 9935 907	,006 035 39
12	,009 6067 884	,004 152 38	62	,014 0842 909	,006 074 39
13	,009 6951 884	,004 190 38	63	,014 1751 908	,006 113 39
14	,009 7835 884	,004 228 38	64	,014 2659 910	,006 152 39
		38		910	39
0,115	1,009 8719 885	0,004 266 38	0,165	1,014 3569 909	0,006 191 39
16	,009 9604 886	,004 304 38	66	,014 4478 911	,006 230 39
17	,010 0490 886	,004 342 38	67	,014 5389 910	,006 269 39
18	,010 1376 886	,004 381 38	68	,014 6299 912	,006 308 39
19	,010 2262 887	,004 419 38	69	,014 7211 912	,006 347 39
		38		912	39
0,120	1,010 3149 887	0,004 457 38	0,170	1,014 8123 912	0,006 386 39
21	,010 4036 888	,004 495 38	71	,014 9035 913	,006 425 39
22	,010 4924 889	,004 533 38	72	,014 9948 913	,006 464 39
23	,010 5813 888	,004 571 38	73	,015 0861 914	,006 503 39
24	,010 6701 890	,004 609 39	74	,015 1775 915	,006 542 39
		39		915	39
0,125	1,010 7591 889	0,004 648 38	0,175	1,015 2690 914	0,006 581 39
26	,010 8480 891	,004 686 38	76	,015 3604 916	,006 620 39
27	,010 9371 891	,004 724 38	77	,015 4520 916	,006 659 40
28	,011 0262 891	,004 762 38	78	,015 5436 916	,006 699 39
29	,011 1153 892	,004 801 38	79	,015 6352 917	,006 738 39
		38		917	39
0,130	1,011 2045 892	0,004 839 38	0,180	1,015 7269 918	0,006 777 39
31	,011 2937 892	,004 877 38	81	,015 8187 918	,006 816 39
32	,011 3829 894	,004 916 38	82	,015 9106 919	,006 855 40
33	,011 4723 893	,004 954 38	83	,016 0024 919	,006 895 39
34	,011 5616 895	,004 992 39	84	,016 0943 919	,006 934 39
		39		919	39
0,135	1,011 6511 894	0,005 031 38	0,185	1,016 1862 921	0,006 973 40
36	,011 7405 896	,005 069 38	86	,016 2783 920	,007 013 39
37	,011 8301 895	,005 108 38	87	,016 3703 921	,007 052 39
38	,011 9196 896	,005 146 38	88	,016 4624 922	,007 091 40
39	,012 0092 897	,005 184 39	89	,016 5546 922	,007 131 39
		39		922	39
0,140	1,012 0989 897	0,005 223 38	0,190	1,016 6468 923	0,007 170 40
41	,012 1886 898	,005 261 38	91	,016 7391 924	,007 210 39
42	,012 2784 898	,005 300 38	92	,016 8315 924	,007 249 39
43	,012 3682 899	,005 338 38	93	,016 9239 924	,007 288 40
44	,012 4581 899	,005 377 39	94	,017 0163 925	,007 328 39
		39		925	39
0,145	1,012 5480 900	0,005 416 38	0,195	1,017 1088 925	0,007 367 40
46	,012 6390 900	,005 454 38	96	,017 2013 926	,007 407 39
47	,012 7280 900	,005 493 38	97	,017 2939 927	,007 446 40
48	,012 8180 901	,005 531 38	98	,017 3866 927	,007 486 40
49	,012 9081 902	,005 570 39	99	,017 4793 928	,007 526 39
		39		928	39
0,150	1,012 9983	0,005 609	0,200	1,017 5721	0,007 565

IX. Вторая форма уравнения Эйлера

c	θ_0	$\lg \theta_0$	c	θ_0	$\lg \theta_0$
0,200	1,017 5721	0,007 565	0,250	1,022 2803	0,009 570
01	,017 6649	,007 606	51	,022 3759	,009 611
02	,017 7577	,007 644	52	,022 4716	,009 651
03	,017 8507	,007 684	53	,022 5673	,009 692
04	,017 9436	,007 724	54	,022 6631	,009 733
	931	39		958	40
0,205	1,018 0367	0,007 763	0,255	1,022 7589	0,009 773
06	,018 1298	,007 803	56	,022 8548	,009 814
07	,018 2229	,007 843	57	,022 9507	,009 855
08	,018 3161	,007 883	58	,023 0468	,009 895
09	,018 4093	,007 922	59	,023 1428	,009 935
	933	40		962	41
0,210	1,018 5026	0,007 962	0,260	1,023 2390	0,009 977
11	,018 5960	,008 002	61	,023 3351	,010 018
12	,018 6894	,008 042	62	,023 4314	,010 059
13	,018 7829	,008 082	63	,023 5277	,010 100
14	,018 8764	,008 122	64	,023 6241	,010 140
	936	39		964	41
0,215	1,018 9700	0,008 161	0,265	1,023 7205	0,010 181
16	,019 0536	,008 201	66	,023 8170	,010 222
17	,019 1573	,008 241	67	,023 9135	,010 263
18	,019 2510	,008 281	68	,024 0101	,010 304
19	,019 3448	,008 321	69	,024 1067	,010 345
	939	40		968	41
0,220	1,019 4387	0,008 361	0,270	1,024 2035	0,010 386
21	,019 5326	,008 401	71	,024 3002	,010 427
22	,019 6266	,008 441	72	,024 3971	,010 468
23	,019 7206	,008 481	73	,024 4940	,010 509
24	,019 8146	,008 521	74	,024 5909	,010 551
	942	40		970	41
0,225	1,019 9088	0,008 561	0,275	1,024 6879	0,010 592
26	,020 0037	,008 601	76	,024 7850	,010 633
27	,020 0972	,008 642	77	,024 8822	,010 674
28	,020 1915	,008 682	78	,024 9794	,010 715
29	,020 2858	,008 722	79	,025 0766	,010 756
	945	40		973	42
0,230	1,020 3803	0,008 762	0,280	1,025 1739	0,010 798
31	,020 4747	,008 802	81	,025 2713	,010 839
32	,020 5692	,008 842	82	,025 3687	,010 880
33	,020 6633	,008 883	83	,025 4662	,010 921
34	,020 7584	,008 923	84	,025 5638	,010 963
	947	40		976	41
0,235	1,020 8531	0,008 963	0,285	1,025 6614	0,011 004
36	,020 9479	,009 004	86	,025 7591	,011 045
37	,021 0427	,009 044	87	,025 8568	,011 087
38	,021 1375	,009 084	88	,025 9546	,011 128
39	,021 2325	,009 125	89	,026 0525	,011 170
	949	40		979	41
0,240	1,021 3274	0,009 165	0,290	1,026 1504	0,011 211
41	,021 4225	,009 205	91	,026 2484	,011 252
42	,021 5176	,009 246	92	,026 3465	,011 294
43	,021 6127	,009 286	93	,026 4446	,011 336
44	,021 7079	,009 327	94	,026 5427	,011 377
	953	40		983	42
0,245	1,021 8032	0,009 367	0,295	1,026 6410	0,011 419
46	,021 8985	,009 408	96	,026 7393	,011 460
47	,021 9938	,009 448	97	,026 8376	,011 502
48	,022 0893	,009 489	98	,026 9360	,011 543
49	,022 1848	,009 529	99	,027 0345	,011 585
	955	41		986	42
0,250	1,022 2803	0,009 570	0,300	1,027 1331	0,011 627

IX. Вторая форма уравнения Эйлера

c	θ_0	$\lg \theta_0$	c	θ_0	$\lg \theta_0$
0,300	1,027 1331	986	0,350	1,032 1417	1019
01	,027 2317	986	51	,032 2436	1019
02	,027 3303	988	52	,032 3455	1020
03	,027 4291	988	53	,032 4475	1020
04	,027 5279	988	54	,032 5495	1021
		988			1021
0,305	1,027 6267	989	0,355	1,032 6516	1022
06	,027 7256	990	56	,032 7538	1023
07	,027 8246	991	57	,032 8561	1023
08	,027 9237	991	58	,032 9584	1024
09	,028 0228	991	59	,033 0608	1025
		991			1025
0,310	1,028 1219	993	0,360	1,033 1633	1025
11	,028 2212	993	61	,033 2658	1026
12	,028 3205	993	62	,033 3684	1027
13	,028 4198	994	63	,033 4711	1027
14	,028 5192	994	64	,033 5738	1028
		995			1028
0,315	1,028 6187	996	0,365	1,033 6766	1029
16	,028 7183	996	66	,033 7795	1029
17	,028 8179	997	67	,033 8824	1030
18	,028 9176	997	68	,033 9854	1031
19	,029 0173	998	69	,034 0885	1032
		998			1032
0,320	1,029 1171	999	0,370	1,034 1917	1032
21	,029 2170	999	71	,034 2949	1033
22	,029 3169	1000	72	,034 3982	1034
23	,029 4169	1001	73	,034 5016	1034
24	,029 5170	1001	74	,034 6050	1035
		1001			1035
0,325	1,029 6171	1002	0,375	1,034 7085	1036
26	,029 7173	1003	76	,034 8121	1036
27	,029 8176	1003	77	,034 9157	1037
28	,029 9179	1004	78	,035 0194	1038
29	,030 0183	1005	79	,035 1232	1039
		1005			1039
0,330	1,030 1188	1005	0,380	1,035 2271	1039
31	,030 2193	1006	81	,035 3310	1040
32	,030 3199	1006	82	,035 4350	1041
33	,030 4205	1007	83	,035 5391	1041
34	,030 5212	1007	84	,035 6432	1042
		1008			1042
0,335	1,030 6220	1009	0,385	1,035 7474	1043
36	,030 7229	1009	86	,035 8517	1044
37	,030 8238	1010	87	,035 9561	1044
38	,030 9248	1010	88	,036 0605	1045
39	,031 0258	1011	89	,036 1650	1046
		1011			1046
0,340	1,031 1269	1012	0,390	1,036 2696	1046
41	,031 2281	1012	91	,036 3742	1047
42	,031 3293	1014	92	,036 4789	1048
43	,031 4307	1013	93	,036 5837	1049
44	,031 5320	1015	94	,036 6886	1049
		1015			1049
0,345	1,031 6335	1015	0,395	1,036 7935	1050
46	,031 7350	1016	96	,036 8985	1051
47	,031 8366	1016	97	,037 0036	1052
48	,031 9382	1017	98	,037 1088	1052
49	,032 0399	1018	99	,037 2140	1053
		1018			1053
0,850	1,032 1417		0,400	1,037 3193	
		0,013 739			0,015 912

IX. Вторая форма уравнения Эйлера

с	θ_0	$\lg \theta_c$	с	θ_0	$\lg \theta_0$
0,400	1,037 3193	0,015 912	0,450	1,042 6809	0,018 151
01	,037 4247	,015 957	51	,042 7901	,018 197
02	,037 5301	,016 001	52	,042 8994	,018 242
03	,037 6356	,016 045	53	,043 0088	,018 288
04	,037 7412	,016 089	54	,043 1183	,018 334
	1054	44		1095	45
0,405	1,037 8469	0,016 133	0,455	1,043 2278	0,018 379
06	,037 9526	,016 178	56	,043 3374	,018 425
07	,038 0585	,016 222	57	,043 4471	,018 470
08	,038 1644	,016 266	58	,043 5570	,018 516
09	,038 2703	,016 310	59	,043 6668	,018 562
	1057	45		1100	46
0,410	1,038 3764	0,016 355	0,460	1,043 7768	0,018 608
11	,038 4825	,016 399	61	,043 8868	,018 653
12	,038 5887	,016 444	62	,043 9969	,018 699
13	,038 6949	,016 488	63	,044 1071	,018 745
14	,038 8013	,016 532	64	,044 2174	,018 791
	1061	45		1104	46
0,415	1,038 9077	0,016 577	0,465	1,044 3278	0,018 837
16	,039 0142	,016 621	66	,044 4382	,018 883
17	,039 1208	,016 666	67	,044 5488	,018 929
18	,039 2274	,016 711	68	,044 6594	,018 975
19	,039 3341	,016 755	69	,044 7701	,019 021
	1068	45		1108	46
0,420	1,039 4409	0,016 800	0,470	1,044 8809	0,019 067
21	,039 5478	,016 844	71	,044 9918	,019 113
22	,039 6547	,016 889	72	,045 1027	,019 159
23	,039 7618	,016 934	73	,045 2137	,019 205
24	,039 8689	,016 979	74	,045 3249	,019 251
	1071	44		1112	46
0,425	1,039 9760	0,017 023	0,475	1,045 4361	0,019 297
26	,040 0833	,017 068	76	,045 5474	,019 344
27	,040 1906	,017 113	77	,045 6587	,019 390
28	,040 2980	,017 158	78	,045 7702	,019 436
29	,040 4055	,017 203	79	,045 8817	,019 483
	1076	45		1117	46
0,430	1,040 5131	0,017 248	0,480	1,045 9934	0,019 529
31	,040 6207	,017 292	81	,046 1051	,019 575
32	,040 7285	,017 337	82	,046 2169	,019 622
33	,040 8363	,017 382	83	,046 3288	,019 668
34	,040 9441	,017 427	84	,046 4407	,019 715
	1080	45		1121	46
0,435	1,041 0521	0,017 472	0,485	1,046 5528	0,019 761
36	,041 1601	,017 518	86	,046 6649	,019 808
37	,041 2682	,017 563	87	,046 7772	,019 854
38	,041 3764	,017 608	88	,046 8895	,019 901
39	,041 4847	,017 653	89	,047 0019	,019 947
	1083	45		1125	47
0,440	1,041 5930	0,017 698	0,490	1,047 1144	0,019 994
41	,041 7015	,017 743	91	,047 2270	,020 041
42	,041 8100	,017 789	92	,047 3396	,020 088
43	,041 9185	,017 834	93	,047 4524	,020 134
44	,042 0272	,017 879	94	,047 5652	,020 181
	1088	45		1129	47
0,445	1,042 1360	0,017 924	0,495	1,047 6781	0,020 228
46	,042 2448	,017 970	96	,047 7912	,020 275
47	,042 3537	,018 015	97	,047 9043	,020 322
48	,042 4627	,018 061	98	,048 0175	,020 369
49	,042 5717	,018 106	99	,048 1307	,020 415
	1092	45		1134	47
0,450	1,042 6809	0,018 151	0,500	1,048 2441	0,020 462

X. Приближенное решение уравнений Лагранжа

x	$\cos \psi = -1,00$	- 0,95	- 0,90	- 0,85	- 0,80	- 0,75	- 0,70	- 0,65	- 0,60	- 0,55	- 0,50
0,0	- 3,00	- 2,85	- 2,70	- 2,55	- 2,40	- 2,25	- 2,100	- 1,950	- 1,800	- 1,650	- 1,500
0,1	- 3,72	- 3,47	- 3,22	- 2,99	- 2,76	- 2,54	- 2,323	- 2,114	- 1,910	- 1,712	- 1,520
0,2	- 4,47	- 4,22	- 3,92	- 3,54	- 3,22	- 2,85	- 2,547	- 2,259	- 1,988	- 1,734	- 1,495
0,3	- 6,38	- 5,56	- 4,84	- 4,21	- 3,66	- 3,18	- 2,745	- 2,358	- 2,011	- 1,698	- 1,414
0,4	- 9,07	- 7,38	- 6,07	- 5,02	- 4,17	- 3,46	- 2,879	- 2,383	- 1,958	- 1,592	- 1,273
0,5	- 14,0	- 10,17	- 7,66	- 5,91	- 4,63	- 3,66	- 2,903	- 2,303	- 1,816	- 1,415	- 1,079
0,6	- 24,4	- 14,48	- 9,88	- 6,74	- 4,82	- 3,68	- 2,778	- 2,106	- 1,589	- 1,179	- 0,849
0,7	- 51,5	- 20,89	- 11,52	- 7,27	- 4,92	- 3,47	- 2,494	- 1,805	- 1,297	- 0,910	- 0,606
0,8	- 155,0	- 28,82	- 12,72	- 7,19	- 4,54	- 3,03	- 2,064	- 1,440	- 0,979	- 0,637	- 0,374
0,9	- 1110,0	- 34,03	- 12,30	- 6,39	- 3,83	- 2,45	- 1,613	- 1,059	- 0,670	- 0,385	- 0,169
1,0	∞	- 30,62	- 10,18	- 5,09	- 2,95	- 1,86	- 1,152	- 0,707	- 0,398	- 0,171	0,000
1,2	- 103,3	- 12,19	- 4,79	- 2,46	- 1,39	- 0,794	- 0,424	- 0,176	0,000	+ 0,130	+ 0,230
1,4	- 10,4	- 3,633	- 1,733	- 0,903	- 0,465	- 0,181	0,000	+	+ 0,221	+ 0,292	+ 0,348
1,6	- 2,27	- 1,042	- 0,490	+ 0,187	0,000	+	+ 0,213	0,157	0,327	0,366	0,397
1,8	- 0,530	- 0,193	0,000	+ 0,122	+ 0,205	0,265	0,309	0,343	0,370	0,392	0,410
2,0	0,000	+ 0,120	+ 0,198	+ 0,253	+ 0,293	+ 0,323	+ 0,347	+ 0,366	+ 0,381	+ 0,393	+ 0,404
2,2	+ 0,191	0,242	0,278	0,306	0,326	0,342	0,355	0,366	0,375	0,383	0,389
2,4	0,265	0,289	0,307	0,322	0,333	0,342	0,350	0,357	0,362	0,367	0,371
2,6	0,291	0,303	0,313	0,322	0,328	0,334	0,339	0,343	0,346	0,349	0,352
2,8	0,296	0,303	0,309	0,314	0,318	0,321	0,324	0,327	0,329	0,331	0,333
3,0	+ 0,292	+ 0,296	+ 0,300	+ 0,303	+ 0,306	+ 0,307	+ 0,309	+ 0,311	+ 0,313	+ 0,314	+ 0,315
3,2	0,283	0,286	0,288	0,290	0,292	0,293	0,295	0,296	0,297	0,298	0,299
3,4	0,273	0,275	0,276	0,277	0,279	0,280	0,281	0,281	0,282	0,283	0,284
3,6	0,262	0,263	0,264	0,265	0,266	0,267	0,267	0,268	0,268	0,269	0,269
3,8	0,251	0,252	0,253	0,253	0,254	0,254	0,255	0,255	0,256	0,256	0,257
4,0	+ 0,241	+ 0,241	+ 0,242	+ 0,242	+ 0,243	+ 0,243	+ 0,244	+ 0,244	+ 0,244	+ 0,244	+ 0,245

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
1,00	1,00 070	1,50	0,54 433
,01	0,98 519	,51	,53 893
,02	,97 073	,52	,53 362
,03	,95 663	,53	,52 840
,04	,94 287	,54	,52 326
	1344		505
1,05	0,92 943	1,55	0,51 821
,06	,91 631	,56	,51 323
,07	,90 349	,57	,50 834
,08	,89 097	,58	,50 352
,09	,87 874	,59	,49 877
	1196		466
1,10	0,86 678	1,60	0,49 411
,11	,85 510	,61	,48 951
,12	,84 367	,62	,48 498
,13	,83 250	,63	,48 053
,14	,82 157	,64	,47 614
	1070		432
1,15	0,81 037	1,65	0,47 182
,16	,80 041	,66	,46 756
,17	,79 017	,67	,46 337
,18	,78 015	,68	,45 924
,19	,77 033	,69	,45 517
	960		401
1,20	0,76 073	1,70	0,45 116
,21	,75 131	,71	,44 720
,22	,74 210	,72	,44 331
,23	,73 306	,73	,43 947
,24	,72 421	,74	,43 569
	867		373
1,25	0,71 554	1,75	0,43 196
,26	,70 704	,76	,42 828
,27	,69 871	,77	,42 466
,28	,69 053	,78	,42 109
,29	,68 252	,79	,41 756
	786		347
1,30	0,67 466	1,80	0,41 409
,31	,66 695	,81	,41 066
,32	,65 939	,82	,40 728
,33	,65 196	,83	,40 395
,34	,64 468	,84	,40 066
	715		325
1,35	0,63 753	1,85	0,39 741
,36	,63 051	,86	,39 421
,37	,62 362	,87	,39 105
,38	,61 685	,88	,38 794
,39	,61 021	,89	,38 486
	653		303
1,40	0,60 368	1,90	0,38 183
,41	,59 727	,91	,37 883
,42	,59 097	,92	,37 588
,43	,58 478	,93	,37 296
,44	,57 870	,94	,37 008
	597		284
1,45	0,57 273	1,95	0,36 724
,46	,56 685	,96	,36 443
,47	,56 106	,97	,36 166
,48	,55 540	,98	,35 892
,49	,54 982	,99	,35 622
	549		267
1,50	0,54 433	2,00	0,35 355

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
2,00	0,353 553	2,50	0,252 982	3,00	0,192 450
,01	,350 918	,51	,251 472	,01	,191 492
,02	,348 316	,52	,249 976	,02	,190 542
,03	,345 745	,53	,248 496	,03	,189 599
,04	,343 206	,54	,247 030	,04	,188 664
	2508		1452		927
2,05	0,340 698	2,55	0,245 578	3,05	0,187 737
,06	,338 220	,56	,244 141	,06	,186 818
,07	,335 772	,57	,242 717	,07	,185 906
,08	,333 353	,58	,241 307	,08	,185 001
,09	,330 964	,59	,239 911	,09	,184 104
	2361		1383		891
2,10	0,328 603	2,60	0,238 528	3,10	0,183 213
,11	,326 269	,61	,237 159	,11	,182 331
,12	,323 964	,62	,235 802	,12	,181 455
,13	,321 685	,63	,234 459	,13	,180 586
,14	,319 433	,64	,233 128	,14	,179 724
	2226		1319		855
2,15	0,317 207	2,65	0,231 809	3,15	0,178 869
,16	,315 006	,66	,230 504	,16	,178 020
,17	,312 831	,67	,229 210	,17	,177 179
,18	,310 681	,68	,227 928	,18	,176 343
,19	,308 556	,69	,226 658	,19	,175 515
	2102		1258		822
2,20	0,306 454	2,70	0,225 400	3,20	0,174 693
,21	,304 377	,71	,224 154	,21	,173 877
,22	,302 323	,72	,222 919	,22	,173 068
,23	,300 291	,73	,221 695	,23	,172 265
,24	,298 283	,74	,220 483	,24	,171 468
	1987		1202		791
2,25	0,296 296	2,75	0,219 281	3,25	0,170 677
,26	,294 332	,76	,218 090	,26	,169 892
,27	,292 389	,77	,216 910	,27	,169 114
,28	,290 468	,78	,215 741	,28	,168 341
,29	,288 567	,79	,214 582	,29	,167 574
	1880		1148		761
2,30	0,286 687	2,80	0,213 434	3,30	0,166 813
,31	,284 828	,81	,212 295	,31	,166 057
,32	,282 988	,82	,211 167	,32	,165 308
,33	,281 168	,83	,210 049	,33	,164 564
,34	,279 368	,84	,208 940	,34	,163 825
	1782		1098		738
2,35	0,277 586	2,85	0,207 842	3,35	0,163 092
,36	,275 824	,86	,206 753	,36	,162 364
,37	,274 080	,87	,205 673	,37	,161 642
,38	,272 355	,88	,204 603	,38	,160 926
,39	,270 647	,89	,203 542	,39	,160 214
	1690		1052		706
2,40	0,268 957	2,90	0,202 490	3,40	0,159 508
,41	,267 285	,91	,201 447	,41	,158 807
,42	,265 630	,92	,200 413	,42	,158 111
,43	,263 992	,93	,199 388	,43	,157 420
,44	,262 371	,94	,198 371	,44	,156 734
	1605		1007		681
2,45	0,260 766	2,95	0,197 364	3,45	0,156 053
,46	,259 178	,96	,196 364	,46	,155 377
,47	,257 605	,97	,195 373	,47	,154 706
,48	,256 049	,98	,194 391	,48	,154 039
,49	,254 508	,99	,193 416	,49	,153 378
	1526		966		657
2,50	0,252 982	3,00	0,192 450	3,50	0,152 721

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
3,50	0,152 721	4,00	0,125 000	4,50	0,104 757
,51	,152 069	,01	,124 533	,51	,104 408
,52	,151 421	,02	,124 068	,52	,104 062
,53	,150 778	,03	,123 607	,53	,103 718
,54	,150 140	,04	,123 148	,54	,103 375
	634		456		340
3,55	0,149 506	4,05	0,122 692	4,55	0,103 035
,56	,148 876	,06	,122 239	,56	,102 696
,57	,148 251	,07	,121 789	,57	,102 359
,58	,147 630	,08	,121 342	,58	,102 024
,59	,147 014	,09	,120 897	,59	,101 691
	612		442		332
3,60	0,146 402	4,10	0,120 455	4,60	0,101 359
,61	,145 794	,11	,120 015	,61	,101 030
,62	,145 190	,12	,119 579	,62	,100 702
,63	,144 591	,13	,119 145	,63	,100 376
,64	,143 995	,14	,118 713	,64	,100 051
	591		429		322
3,65	0,143 404	4,15	0,118 284	4,65	0,099 729
,66	,142 816	,16	,117 858	,66	,099 408
,67	,142 233	,17	,117 435	,67	,099 089
,68	,141 654	,18	,117 013	,68	,098 771
,69	,141 078	,19	,116 595	,69	,098 456
	571		416		314
3,70	0,140 507	4,20	0,116 179	4,70	0,098 142
,71	,139 939	,21	,115 765	,71	,097 829
,72	,139 375	,22	,115 354	,72	,097 518
,73	,138 815	,23	,114 945	,73	,097 209
,74	,138 259	,24	,114 538	,74	,096 902
	553		404		306
3,75	0,137 706	4,25	0,114 134	4,75	0,096 596
,76	,137 157	,26	,113 733	,76	,096 292
,77	,136 612	,27	,113 333	,77	,095 989
,78	,136 070	,28	,112 937	,78	,095 688
,79	,135 532	,29	,112 542	,79	,095 389
	535		393		298
3,80	0,134 997	4,30	0,112 149	4,80	0,095 091
,81	,134 466	,31	,111 759	,81	,094 794
,82	,133 938	,32	,111 372	,82	,094 499
,83	,133 414	,33	,110 986	,83	,094 206
,84	,132 893	,34	,110 603	,84	,093 914
	517		382		290
3,85	0,132 376	4,35	0,110 221	4,85	0,093 624
,86	,131 862	,36	,109 842	,86	,093 335
,87	,131 351	,37	,109 466	,87	,093 048
,88	,130 844	,38	,109 091	,88	,092 762
,89	,130 339	,39	,108 718	,89	,092 478
	501		370		283
3,90	0,129 838	4,40	0,108 348	4,90	0,092 195
,91	,129 341	,41	,107 980	,91	,091 913
,92	,128 846	,42	,107 613	,92	,091 633
,93	,128 355	,43	,107 249	,93	,091 354
,94	,127 866	,44	,106 887	,94	,091 077
	485		360		276
3,95	0,127 381	4,45	0,106 527	4,95	0,090 801
,96	,126 899	,46	,106 169	,96	,090 527
,97	,126 420	,47	,105 813	,97	,090 254
,98	,125 943	,48	,105 459	,98	,089 982
,99	,125 470	,49	,105 107	,99	,089 712
	470		350		269
4,00	0,125 000	4,50	0,104 757	5,00	0,089 443

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
5,00	0,089 4427	5,50	0,077 5275	6,00	0,068 0414
,01	,089 1751	,51	,077 3166	,01	,067 8716
,02	,088 9087	,52	,077 1066	,02	,067 7026
,03	,088 6437	,53	,076 8975	,03	,067 5342
,04	,088 3800	,54	,076 6894	,04	,067 3666
	2676		2109		1698
	2664		2100		1690
	2650		2091		1684
	2637		2081		1676
	2623		2072		1670
5,05	0,088 1177	5,55	0,076 4822	6,05	0,067 1996
,06	,087 8566	,56	,076 2760	,06	,067 0334
,07	,087 5968	,57	,076 0707	,07	,066 8678
,08	,087 3332	,58	,075 8663	,08	,066 7029
,09	,087 0810	,59	,075 6628	,09	,066 5387
	2611		2062		1662
	2598		2053		1656
	2586		2044		1649
	2572		2035		1642
	2560		2026		1636
5,10	0,086 8250	5,60	0,075 4602	6,10	0,066 3751
,11	,086 5703	,61	,075 2585	,11	,066 2122
,12	,086 3168	,62	,075 0577	,12	,066 0500
,13	,086 0645	,63	,074 8579	,13	,065 8884
,14	,085 8134	,64	,074 6589	,14	,065 7276
	2547		2017		1629
	2535		2008		1622
	2523		1998		1616
	2511		1990		1603
	2498		1982		1603
5,15	0,085 5636	5,65	0,074 4607	6,15	0,065 5673
,16	,085 3150	,66	,074 2635	,16	,065 4077
,17	,085 0676	,67	,074 0671	,17	,065 2488
,18	,084 8214	,68	,073 8716	,18	,065 0904
,19	,084 5764	,69	,073 6769	,19	,064 9328
	2486		1972		1596
	2474		1964		1589
	2462		1955		1584
	2450		1947		1576
	2439		1938		1570
5,20	0,084 3325	5,70	0,073 4831	6,20	0,064 7753
,21	,084 0898	,71	,073 2902	,21	,064 6194
,22	,083 8483	,72	,073 0981	,22	,064 4636
,23	,083 6079	,73	,072 9068	,23	,064 3084
,24	,083 3687	,74	,072 7164	,24	,064 1539
	2427		1929		1564
	2415		1921		1558
	2404		1913		1552
	2392		1904		1545
	2381		1896		1539
5,25	0,083 1306	5,75	0,072 5268	6,25	0,064 0000
,26	,082 8937	,76	,072 3380	,26	,063 8467
,27	,082 6578	,77	,072 1500	,27	,063 6940
,28	,082 4281	,78	,071 9628	,28	,063 5420
,29	,082 1895	,79	,071 7765	,29	,063 3905
	2369		1888		1533
	2359		1880		1527
	2347		1872		1520
	2336		1863		1515
	2325		1856		1509
5,30	0,081 9570	5,80	0,071 5909	6,30	0,063 2396
,31	,081 7256	,81	,071 4082	,31	,063 0893
,32	,081 4953	,82	,071 2222	,32	,062 9397
,33	,081 2661	,83	,071 0390	,33	,062 7906
,34	,081 0379	,84	,070 8567	,34	,062 6421
	2314		1847		1503
	2303		1840		1496
	2292		1832		1491
	2282		1823		1485
	2271		1816		1479
5,35	0,080 8108	5,85	0,070 6751	6,35	0,062 4942
,36	,080 5847	,86	,070 4942	,36	,062 3468
,37	,080 3597	,87	,070 3142	,37	,062 2001
,38	,080 1358	,88	,070 1349	,38	,062 0539
,39	,079 9129	,89	,069 9563	,39	,061 9083
	2261		1809		1474
	2250		1800		1467
	2239		1793		1462
	2229		1786		1456
	2219		1777		1451
5,40	0,079 6910	5,90	0,069 7786	6,40	0,061 7682
,41	,079 4702	,91	,069 6015	,41	,061 6188
,42	,079 2503	,92	,069 4252	,42	,061 4748
,43	,079 0315	,93	,069 2497	,43	,061 3315
,44	,078 8137	,94	,069 0749	,44	,061 1887
	2208		1771		1444
	2199		1763		1440
	2188		1755		1433
	2178		1748		1428
	2168		1741		1423
5,45	0,078 5969	5,95	0,068 9008	6,45	0,061 0464
,46	,078 3810	,96	,068 7275	,46	,060 9048
,47	,078 1662	,97	,068 5549	,47	,060 7636
,48	,077 9523	,98	,068 3830	,48	,060 6230
,49	,077 7394	,99	,068 2118	,49	,060 4830
	2159		1733		1416
	2148		1726		1412
	2139		1719		1406
	2129		1712		1400
	2119		1704		1396
5,50	0,077 5275	6,00	0,068 0414	6,50	0,060 3484

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
6,50	0,060 3434	7,00	0,053 9949	7,50	0,048 6864
,51	,060 2044	,01	,053 8794	,51	,048 5892
,52	,060 0660	,02	,053 7643	,52	,048 4924
,53	,059 9281	,03	,053 6497	,53	,048 3958
,54	,059 7907	,04	,053 5354	,54	,048 2995
	1369		1139		959
6,55	0,059 6538	7,05	0,053 4215	7,55	0,048 2036
,56	,059 5174	,06	,053 3081	,56	,048 1080
,57	,059 3816	,07	,053 1950	,57	,048 0127
,58	,059 2463	,08	,053 0824	,58	,047 9177
,59	,059 1115	,09	,052 9701	,59	,047 8231
	1343		1119		944
6,60	0,058 9772	7,10	0,052 8582	7,60	0,047 7287
,61	,058 8434	,11	,052 7467	,61	,047 6346
,62	,058 7101	,12	,052 6356	,62	,047 5409
,63	,058 5774	,13	,052 5250	,63	,047 4475
,64	,058 4461	,14	,052 4146	,64	,047 3544
	1318		1099		929
6,65	0,058 3133	7,15	0,052 3047	7,65	0,047 2615
,66	,058 1820	,16	,052 1952	,66	,047 1690
,67	,058 0512	,17	,052 0860	,67	,047 0768
,68	,057 9209	,18	,051 9772	,68	,046 9849
,69	,057 7911	,19	,051 8689	,69	,046 8933
	1293		1081		913
6,70	0,057 6618	7,20	0,051 7608	7,70	0,046 8020
,71	,057 5329	,21	,051 6532	,71	,046 7109
,72	,057 4045	,22	,051 5459	,72	,046 6202
,73	,057 2766	,23	,051 4390	,73	,046 5298
,74	,057 1492	,24	,051 3325	,74	,046 4396
	1270		1062		898
6,75	0,057 0222	7,25	0,051 2263	7,75	0,046 3498
,76	,056 8958	,26	,051 1205	,76	,046 2602
,77	,056 7698	,27	,051 0151	,77	,046 1709
,78	,056 6442	,28	,050 9100	,78	,046 0819
,79	,056 5191	,29	,050 8053	,79	,045 9932
	1246		1044		884
6,80	0,056 3945	7,30	0,050 7009	7,80	0,045 9048
,81	,056 2703	,31	,050 5969	,81	,045 8167
,82	,056 1466	,32	,050 4933	,82	,045 7288
,83	,056 0233	,33	,050 3900	,83	,045 6412
,84	,055 9005	,34	,050 2870	,84	,045 5539
	1224		1026		870
6,85	0,055 7781	7,35	0,050 1844	7,85	0,045 4669
,86	,055 6582	,36	,050 0822	,86	,045 3802
,87	,055 5348	,37	,049 9803	,87	,045 2937
,88	,055 4137	,38	,049 8787	,88	,045 2075
,89	,055 2931	,39	,049 7775	,89	,045 1216
	1201		1008		856
6,90	0,055 1730	7,40	0,049 6767	7,90	0,045 0360
,91	,055 0532	,41	,049 5761	,91	,044 9506
,92	,054 9340	,42	,049 4760	,92	,044 8655
,93	,054 8151	,43	,049 3761	,93	,044 7806
,94	,054 6967	,44	,049 2766	,94	,044 6961
	1181		992		843
6,95	0,054 5786	7,45	0,049 1774	7,95	0,044 6118
,96	,054 4611	,46	,049 0786	,96	,044 5277
,97	,054 3439	,47	,048 9800	,97	,044 4439
,98	,054 2272	,48	,048 8818	,98	,044 3604
,99	,054 1108	,49	,048 7840	,99	,044 2772
	1159		976		830
7,00	0,053 9949	7,50	0,048 6864	8,00	0,044 1942

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
8,00	0,044 1942	8,50	0,040 3526	9,00	0,037 0370
,01	,044 1114	,51	,040 2815	,01	,036 9754
,02	,044 0290	,52	,040 2106	,02	,036 9139
,03	,043 9467	,53	,040 1399	,03	,036 8526
,04	,043 8648	,54	,040 0694	,04	,036 7915
	817		702		610
8,05	0,043 7831	8,55	0,039 9992	9,05	0,036 7375
,06	,043 7016	,56	,039 9291	,06	,036 6697
,07	,043 6204	,57	,039 8592	,07	,036 6091
,08	,043 5394	,58	,039 7896	,08	,036 5486
,09	,043 4588	,59	,039 7201	,09	,036 4884
	805		693		602
8,10	0,043 3783	8,60	0,039 6508	9,10	0,036 4282
,11	,043 2981	,61	,039 5818	,11	,036 3682
,12	,043 2181	,62	,039 5129	,12	,036 3084
,13	,043 1384	,63	,039 4443	,13	,036 2488
,14	,043 0590	,64	,039 3758	,14	,036 1893
	793		683		593
8,15	0,042 9797	8,65	0,039 3075	9,15	0,036 1300
,16	,042 9007	,66	,039 2395	,16	,036 0709
,17	,042 8220	,67	,039 1716	,17	,036 0119
,18	,042 7435	,68	,039 1039	,18	,035 9531
,19	,042 6652	,69	,039 0364	,19	,035 8944
	780		672		585
8,20	0,042 5872	8,70	0,038 9692	9,20	0,035 8359
,21	,042 5094	,71	,038 9021	,21	,035 7776
,22	,042 4319	,72	,038 8352	,22	,035 7194
,23	,042 3546	,73	,038 7685	,23	,035 6613
,24	,042 2775	,74	,038 7019	,24	,035 6034
	769		663		577
8,25	0,042 2006	8,75	0,038 6356	9,25	0,035 5457
,26	,042 1240	,76	,038 5695	,26	,035 4882
,27	,042 0476	,77	,038 5035	,27	,035 4306
,28	,041 9715	,78	,038 4378	,28	,035 3735
,29	,041 8956	,79	,038 3722	,29	,035 3164
	757		654		570
8,30	0,041 8199	8,80	0,038 3068	9,30	0,035 2594
,31	,041 7444	,81	,038 2416	,31	,035 2027
,32	,041 6692	,82	,038 1766	,32	,035 1460
,33	,041 5942	,83	,038 1118	,33	,035 0895
,34	,041 5194	,84	,038 0471	,34	,035 0332
	746		645		562
8,35	0,041 4448	8,85	0,037 9826	9,35	0,034 9770
,36	,041 3705	,86	,037 9183	,36	,034 9210
,37	,041 2964	,87	,037 8542	,37	,034 8651
,38	,041 2225	,88	,037 7903	,38	,034 8093
,39	,041 1488	,89	,037 7266	,39	,034 7538
	735		636		555
8,40	0,041 0753	8,90	0,037 6630	9,40	0,034 6983
,41	,041 0021	,91	,037 5996	,41	,034 6430
,42	,040 9291	,92	,037 5364	,42	,034 5879
,43	,040 8563	,93	,037 4734	,43	,034 5328
,44	,040 7837	,94	,037 4105	,44	,034 4780
	724		627		547
8,45	0,040 7113	8,95	0,037 3478	9,45	0,034 4233
,46	,040 6391	,96	,037 2853	,46	,034 3687
,47	,040 5672	,97	,037 2230	,47	,034 3143
,48	,040 4954	,98	,037 1608	,48	,034 2600
,49	,040 4239	,99	,037 0988	,49	,034 2059
	713		618		540
8,50	0,040 3526	9,00	0,037 0370	9,50	0,034 1519

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
9,50	0,034 1519	10,00	0,031 6228	10,50	0,029 3911
,51	,034 0980	,01	,031 5754	,51	,029 3492
,52	,034 0443	,02	,031 5282	,52	,029 3733
,53	,033 9907	,03	,031 4810	,53	,029 2656
,54	,033 9373	,04	,031 4340	,54	,029 2240
	533		469		416
9,55	0,033 8840	10,05	0,031 3871	10,55	0,029 1824
,56	,033 8309	,06	,031 3403	,56	,029 1410
,57	,033 7779	,07	,031 2936	,57	,029 0996
,58	,033 7250	,08	,031 2471	,58	,029 0584
,59	,033 6722	,09	,031 2006	,59	,029 0172
	526		463		410
9,60	0,033 6196	10,10	0,031 1543	10,60	0,028 9762
,61	,033 5672	,11	,031 1081	,61	,028 9352
,62	,033 5149	,12	,031 0620	,62	,028 8944
,63	,033 4627	,13	,031 0160	,63	,028 8536
,64	,033 4106	,14	,030 9701	,64	,028 8129
	519		457		405
9,65	0,033 3587	10,15	0,030 9244	10,65	0,028 7724
,66	,033 3069	,16	,030 8787	,66	,028 7319
,67	,033 2553	,17	,030 8332	,67	,028 6915
,68	,033 2037	,18	,030 7878	,68	,028 6512
,69	,033 1523	,19	,030 7425	,69	,028 6110
	512		452		401
9,70	0,033 1011	10,20	0,030 6973	10,70	0,028 5709
,71	,033 0500	,21	,030 6522	,71	,028 5309
,72	,032 9990	,22	,030 6072	,72	,028 4910
,73	,032 9481	,23	,030 5623	,73	,028 4512
,74	,032 8974	,24	,030 5176	,74	,028 4115
	506		447		397
9,75	0,032 8468	10,25	0,030 4729	10,75	0,028 3718
,76	,032 7963	,26	,030 4284	,76	,028 3323
,77	,032 7460	,27	,030 3840	,77	,028 2928
,78	,032 6958	,28	,030 3396	,78	,028 2535
,79	,032 6457	,29	,030 2954	,79	,028 2142
	500		441		392
9,80	0,032 5957	10,30	0,030 2513	10,80	0,028 1750
,81	,032 5459	,31	,030 2073	,81	,028 1359
,82	,032 4962	,32	,030 1634	,82	,028 0969
,83	,032 4466	,33	,030 1196	,83	,028 0580
,84	,032 3972	,34	,030 0759	,84	,028 0192
	493		435		387
9,85	0,032 3479	10,35	0,030 0324	10,85	0,027 9805
,86	,032 2987	,36	,029 9889	,86	,027 9419
,87	,032 2496	,37	,029 9455	,87	,027 9033
,88	,032 2006	,38	,029 9023	,88	,027 8648
,89	,032 1518	,39	,029 8591	,89	,027 8265
	487		431		383
9,90	0,032 1031	10,40	0,029 8160	10,90	0,027 7892
,91	,032 0545	,41	,029 7731	,91	,027 7500
,92	,032 0061	,42	,029 7302	,92	,027 7119
,93	,031 9577	,43	,029 6875	,93	,027 6739
,94	,031 9095	,44	,029 6448	,94	,027 6359
	481		425		378
9,95	0,031 8614	10,45	0,029 6023	10,95	0,027 5981
,96	,031 8135	,46	,029 5599	,96	,027 5603
,97	,031 7656	,47	,029 5175	,97	,027 5226
,98	,031 7179	,48	,029 4753	,98	,027 4850
,99	,031 6703	,49	,029 4332	,99	,027 4475
	475		421		374
10,00	0,031 6228	10,50	0,029 3911	11,00	0,027 4101

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
12,50	0,022 6274	271	13,00	0,021 3346	246
,51	,022 6003	271	,01	,021 3100	245
,52	,022 5732	270	,02	,021 2855	245
,53	,022 5462	270	,03	,021 2610	245
,54	,022 5192	269	,04	,021 2365	244
					244
12,55	0,022 4923	268	13,05	0,021 2121	243
,56	,022 4655	268	,06	,021 1878	243
,57	,022 4387	268	,07	,021 1635	243
,58	,022 4119	267	,08	,021 1392	242
,59	,022 3852	266	,09	,021 1150	242
					242
12,60	0,022 3586	266	13,10	0,021 0908	241
,61	,022 3320	265	,11	,021 0667	241
,62	,022 3055	265	,12	,021 0426	240
,63	,022 2790	265	,13	,021 0186	240
,64	,022 2525	264	,14	,020 9946	240
					240
12,65	0,022 2261	263	13,15	0,020 9706	239
,66	,022 1998	263	,16	,020 9467	238
,67	,022 1735	262	,17	,020 9229	238
,68	,022 1473	262	,18	,020 8991	238
,69	,022 1211	261	,19	,020 8753	238
					237
12,70	0,022 0950	260	13,20	0,020 8516	237
,71	,022 0690	261	,21	,020 8279	236
,72	,022 0429	259	,22	,020 8043	236
,73	,022 0170	260	,23	,020 7807	236
,74	,021 9910	258	,24	,020 7572	235
					235
12,75	0,021 9652	258	13,25	0,020 7337	235
,76	,021 9394	259	,26	,020 7102	234
,77	,021 9136	257	,27	,020 6868	234
,78	,021 8879	257	,28	,020 6634	233
,79	,021 8622	256	,29	,020 6401	233
					232
12,80	0,021 8366	256	13,30	0,020 6169	233
,81	,021 8110	255	,31	,020 5936	232
,82	,021 7855	254	,32	,020 5704	231
,83	,021 7601	255	,33	,020 5473	231
,84	,021 7346	253	,34	,020 5242	231
					231
12,85	0,021 7093	253	13,35	0,020 5011	230
,86	,021 6840	253	,36	,020 4781	229
,87	,021 6587	252	,37	,020 4552	229
,88	,021 6335	252	,38	,020 4322	229
,89	,021 6083	251	,39	,020 4093	229
					228
12,90	0,021 5832	251	13,40	0,020 3865	228
,91	,021 5581	250	,41	,020 3637	228
,92	,021 5331	250	,42	,020 3409	227
,93	,021 5081	249	,43	,020 3182	227
,94	,021 4832	249	,44	,020 2955	227
					226
12,95	0,021 4583	248	13,45	0,020 2729	226
,96	,021 4335	248	,46	,020 2503	225
,97	,021 4087	247	,47	,020 2278	225
,98	,021 3840	247	,48	,020 2053	225
,99	,021 3593	247	,49	,020 1828	225
					224
13,00	0,021 3346		13,50	0,020 1604	224
			,51	,020 1380	223
			,52	,020 1157	223
			,53	,020 0934	223
			,54	,020 0711	223
					222
			13,55	0,020 0489	222
			,56	,020 0267	221
			,57	,020 0046	221
			,58	,019 9825	220
			,59	,019 9605	220
					220
			13,60	0,019 9385	220
			,61	,019 9165	219
			,62	,019 8946	219
			,63	,019 8727	219
			,64	,019 8503	219
					218
			13,65	0,019 8290	218
			,66	,019 8072	217
			,67	,019 7855	217
			,68	,019 7638	216
			,69	,019 7422	216
					216
			13,70	0,019 7206	216
			,71	,019 6990	215
			,72	,019 6775	215
			,73	,019 6560	215
			,74	,019 6345	215
					214
			13,75	0,019 6131	214
			,76	,019 5917	213
			,77	,019 5704	213
			,78	,019 5491	213
			,79	,019 5278	213
					212
			13,80	0,019 5066	212
			,81	,019 4854	211
			,82	,019 4643	211
			,83	,019 4432	211
			,84	,019 4221	211
					210
			13,85	0,019 4011	210
			,86	,019 3801	210
			,87	,019 3591	209
			,88	,019 3382	209
			,89	,019 3173	209
					208
			13,90	0,019 2965	208
			,91	,019 2757	208
			,92	,019 2549	207
			,93	,019 2342	207
			,94	,019 2135	207
					207
			13,95	0,019 1928	206
			,96	,019 1722	206
			,97	,019 1516	205
			,98	,019 1311	205
			,99	,019 1106	205
					205
			14,00	0,019 0901	

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
14,00	0,019 0901	14,50	0,018 1112	15,00	0,017 2133
,01	,019 0696	,51	,018 0925	,01	,017 1961
,02	,019 0492	,52	,018 0739	,02	,017 1789
,03	,019 0289	,53	,018 0552	,03	,017 1617
,04	,019 0086	,54	,018 0366	,04	,017 1446
	203		186		171
14,05	0,018 9883	14,55	0,018 0180	15,05	0,017 1275
,06	,018 9690	,56	,017 9994	,06	,017 1105
,07	,018 9478	,57	,017 9809	,07	,017 0935
,08	,018 9276	,58	,017 9624	,08	,017 0765
,09	,018 9075	,59	,017 9439	,09	,017 0595
	201		184		170
14,10	0,018 8874	14,60	0,017 9255	15,10	0,017 0425
,11	,018 8673	,61	,017 9071	,11	,017 0256
,12	,018 8472	,62	,017 8887	,12	,017 0087
,13	,018 8272	,63	,017 8704	,13	,016 9919
,14	,018 8073	,64	,017 8521	,14	,016 9751
	200		183		168
14,15	0,018 7873	14,65	0,017 8338	15,15	0,016 9583
,16	,018 7674	,66	,017 8155	,16	,016 9415
,17	,018 7476	,67	,017 7973	,17	,016 9247
,18	,018 7278	,68	,017 7791	,18	,016 9080
,19	,018 7080	,69	,017 7610	,19	,016 8913
	198		181		167
14,20	0,018 6882	14,70	0,017 7429	15,20	0,016 8746
,21	,018 6685	,71	,017 7248	,21	,016 8580
,22	,018 6488	,72	,017 7067	,22	,016 8414
,23	,018 6291	,73	,017 6887	,23	,016 8248
,24	,018 6095	,74	,017 6707	,24	,016 8082
	196		180		165
14,25	0,018 5899	14,75	0,017 6527	15,25	0,016 7917
,26	,018 5704	,76	,017 6348	,26	,016 7752
,27	,018 5509	,77	,017 6169	,27	,016 7587
,28	,018 5314	,78	,017 5990	,28	,016 7423
,29	,018 5119	,79	,017 5812	,29	,016 7259
	194		178		164
14,30	0,018 4925	14,80	0,017 5634	15,30	0,016 7095
,31	,018 4731	,81	,017 5456	,31	,016 6931
,32	,018 4538	,82	,017 5278	,32	,016 6768
,33	,018 4345	,83	,017 5101	,33	,016 6605
,34	,018 4152	,84	,017 4924	,34	,016 6442
	193		177		163
14,35	0,018 3959	14,85	0,017 4747	15,35	0,016 6279
,36	,018 3767	,86	,017 4571	,36	,016 6117
,37	,018 3576	,87	,017 4395	,37	,016 5955
,38	,018 3384	,88	,017 4219	,38	,016 5793
,39	,018 3193	,89	,017 4044	,39	,016 5631
	191		176		161
14,40	0,018 3002	14,90	0,017 3868	15,40	0,016 5470
,41	,018 2812	,91	,017 3693	,41	,016 5309
,42	,018 2622	,92	,017 3519	,42	,016 5148
,43	,018 2432	,93	,017 3345	,43	,016 4987
,44	,018 2242	,94	,017 3171	,44	,016 4827
	189		174		160
14,45	0,018 2053	14,95	0,017 2997	15,45	0,016 4667
,46	,018 1864	,96	,017 2823	,46	,016 4507
,47	,018 1676	,97	,017 2650	,47	,016 4348
,48	,018 1488	,98	,017 2477	,48	,016 4189
,49	,018 1300	,99	,017 2305	,49	,016 4030
	188		172		159
14,50	0,018 1112	15,00	0,017 2133	15,50	0,016 3871

XI. Значения r^{-3} по аргументу r^2

r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}	r^2	r^{-3}
15,50	0,016 3871 158	16,00	0,015 6250 146	16,50	0,014 9202 136
,51	,016 3713 158	,01	,015 6104 146	,51	,014 9066 135
,52	,016 3555 158	,02	,015 5958 146	,52	,014 8931 135
,53	,016 3397 158	,03	,015 5812 146	,53	,014 8796 135
,54	,016 3239 158	,04	,015 5666 146	,54	,014 8661 135
15,55	0,016 3081 157	16,05	0,015 5520 145	16,55	0,014 8526 134
,56	,016 2924 157	,06	,015 5375 145	,56	,014 8392 135
,57	,016 2767 156	,07	,015 5230 145	,57	,014 8257 134
,58	,016 2611 157	,08	,015 5085 144	,58	,014 8123 134
,59	,016 2454 156	,09	,015 4941 145	,59	,014 7989 133
15,60	0,016 2298 156	16,10	0,015 4796 144	16,60	0,014 7856 134
,61	,016 2142 156	,11	,015 4652 144	,61	,014 7722 133
,62	,016 1986 155	,12	,015 4508 143	,62	,014 7589 133
,63	,016 1831 155	,13	,015 4365 144	,63	,014 7456 133
,64	,016 1676 155	,14	,015 4221 143	,64	,014 7323 133
15,65	0,016 1521 155	16,15	0,015 4078 143	16,65	0,014 7190 132
,66	,016 1366 154	,16	,015 3935 143	,66	,014 7058 133
,67	,016 1212 154	,17	,015 3792 142	,67	,014 6925 132
,68	,016 1058 154	,18	,015 3650 143	,68	,014 6793 132
,69	,016 0904 154	,19	,015 3507 142	,69	,014 6661 131
15,70	0,016 0750 154	16,20	0,015 3365 141	16,70	0,014 6530 132
,71	,016 0596 153	,21	,015 3224 142	,71	,014 6398 131
,72	,016 0443 153	,22	,015 3082 142	,72	,014 6267 131
,73	,016 0290 153	,23	,015 2940 141	,73	,014 6136 131
,74	,016 0137 152	,24	,015 2799 141	,74	,014 6005 131
15,75	0,015 9985 152	16,25	0,015 2658 141	16,75	0,014 5874 131
,76	,015 9833 152	,26	,015 2517 140	,76	,014 5743 130
,77	,015 9681 152	,27	,015 2377 141	,77	,014 5613 130
,78	,015 9529 152	,28	,015 2236 140	,78	,014 5483 130
,79	,015 9377 151	,29	,015 2096 140	,79	,014 5353 130
15,80	0,015 9226 151	16,30	0,015 1956 140	16,80	0,014 5223 129
,81	,015 9075 151	,31	,015 1816 139	,81	,014 5094 130
,82	,015 8924 150	,32	,015 1677 139	,82	,014 4964 129
,83	,015 8774 151	,33	,015 1538 139	,83	,014 4835 129
,84	,015 8623 150	,34	,015 1399 139	,84	,014 4706 129
15,85	0,015 8473 150	16,35	0,015 1260 139	16,85	0,014 4577 128
,86	,015 8323 149	,36	,015 1121 138	,86	,014 4449 129
,87	,015 8174 150	,37	,015 0983 139	,87	,014 4320 128
,88	,015 8024 149	,38	,015 0844 138	,88	,014 4192 128
,89	,015 7875 149	,39	,015 0706 138	,89	,014 4064 128
15,90	0,015 7726 148	16,40	0,015 0568 137	16,90	0,014 3936 128
,91	,015 7578 149	,41	,015 0431 137	,91	,014 3808 127
,92	,015 7429 148	,42	,015 0294 138	,92	,014 3681 127
,93	,015 7281 148	,43	,015 0156 137	,93	,014 3554 127
,94	,015 7133 148	,44	,015 0019 136	,94	,014 3427 127
15,95	0,015 6985 147	16,45	0,014 9883 137	16,95	0,014 3300 127
,96	,015 6838 148	,46	,014 9746 136	,96	,014 3173 127
,97	,015 6690 147	,47	,014 9610 136	,97	,014 3046 126
,98	,015 6543 146	,48	,014 9474 136	,98	,014 2920 126
,99	,015 6397 147	,49	,014 9338 136	,99	,014 2794 126
16,00	0,015 6250 146	16,50	0,014 9202 136	17,00	0,014 2668 126

XII. Функция $T(z)$

z	$T(z)$	$T(-z)$	z	$T(z)$	$T(-z)$				
0,000	6,165 8765	3 3053	6,165 8765	3 3010	0,055	6,354 2921	3 5559	5,990 4349	3 0789
,001	6,169 1818	3 3095	6,162 5755	3 2968	,056	6,357 8479	3 5606	5,987 3560	3 0752
,002	6,172 4913	3 3139	6,159 2787	3 2924	,057	6,361 4085	3 5655	5,984 2803	3 0713
,003	6,175 8052	3 3182	6,155 9863	3 2883	,058	6,364 9740	3 5704	5,981 2095	3 0675
,004	6,179 1234	3 3225	6,152 6980	3 2839	,059	6,368 5444	3 5753	5,978 1420	3 0637
0,005	6,182 4459	3 3269	6,149 4141	3 2798	0,060	6,372 1197	3 5801	5,975 0783	3 0599
,006	6,185 7728	3 3311	6,146 1343	3 2755	,061	6,375 6998	3 5850	5,972 0184	3 0562
,007	6,189 1039	3 3356	6,142 8588	3 2713	,062	6,379 2839	3 5900	5,968 9622	3 0524
,008	6,192 4395	3 3398	6,139 5875	3 2671	,063	6,382 8748	3 5948	5,965 9038	3 0487
,009	6,195 7793	3 3443	6,136 3204	3 2628	,064	6,386 4696	3 5998	5,962 8611	3 0449
0,010	6,199 1236	3 3486	6,133 0576	3 2587	0,065	6,390 0694	3 6048	5,959 8162	3 0412
,011	6,202 4722	3 3530	6,129 7989	3 2545	,066	6,393 6742	3 6097	5,956 7750	3 0375
,012	6,205 8252	3 3574	6,126 5444	3 2504	,067	6,397 2839	3 6146	5,953 7375	3 0337
,013	6,209 1826	3 3618	6,123 2940	3 2461	,068	6,400 8985	3 6197	5,950 7033	3 0300
,014	6,212 5444	3 3662	6,120 0479	3 2421	,069	6,404 5182	3 6246	5,947 6738	3 0263
0,015	6,215 9106	3 3707	6,116 8058	3 2378	0,070	6,408 1428	3 6296	5,944 6475	3 0226
,016	6,219 2813	3 3750	6,113 5680	3 2338	,071	6,411 7724	3 6347	5,941 6249	3 0189
,017	6,222 6563	3 3796	6,110 3342	3 2296	,072	6,415 4071	3 6396	5,938 6060	3 0152
,018	6,226 0359	3 3839	6,107 1046	3 2254	,073	6,419 0467	3 6447	5,935 5908	3 0116
,019	6,229 4198	3 3885	6,103 8792	3 2214	,074	6,422 6914	3 6498	5,932 5792	3 0079
0,020	6,232 8083	3 3929	6,100 6578	3 2173	0,075	6,426 3412	3 6548	5,929 5713	3 0042
,021	6,236 2012	3 3973	6,097 4405	3 2131	,076	6,429 9900	3 6599	5,926 5671	3 0005
,022	6,239 5985	3 4019	6,094 2274	3 2091	,077	6,433 6559	3 6650	5,923 5666	2 9969
,023	6,243 0004	3 4064	6,091 0183	3 2050	,078	6,437 3209	3 6700	5,920 5697	2 9933
,024	6,246 4068	3 4109	6,087 8133	3 2010	,079	6,440 9909	3 6752	5,917 5764	2 9896
0,025	6,249 8177	3 4154	6,084 6123	3 1968	0,080	6,444 6661	3 6803	5,914 5868	2 9860
,026	6,253 2331	3 4199	6,081 4155	3 1929	,081	6,448 3464	3 6854	5,911 6003	2 9824
,027	6,256 6530	3 4245	6,078 2226	3 1887	,082	6,452 0318	3 6905	5,908 6184	2 9788
,028	6,260 0775	3 4290	6,075 0339	3 1848	,083	6,455 7223	3 6957	5,905 6396	2 9751
,029	6,263 5065	3 4336	6,071 8491	3 1807	,084	6,459 4180	3 7009	5,902 6645	2 9716
0,030	6,266 9401	3 4382	6,068 6684	3 1767	0,085	6,463 1189	3 7061	5,899 6929	2 9680
,031	6,270 3783	3 4427	6,065 4917	3 1727	,086	6,466 8250	3 7112	5,896 7249	2 9644
,032	6,273 8210	3 4473	6,062 3190	3 1687	,087	6,470 5362	3 7164	5,893 7605	2 9608
,033	6,277 2683	3 4520	6,059 1503	3 1647	,088	6,474 2526	3 7217	5,890 7997	2 9572
,034	6,280 7203	3 4565	6,055 9856	3 1607	,089	6,477 9743	3 7269	5,887 8425	2 9537
0,035	6,284 1768	3 4612	6,052 8249	3 1567	0,090	6,481 7012	3 7321	5,884 8888	2 9501
,036	6,287 6380	3 4658	6,049 6682	3 1528	,091	6,485 4333	3 7374	5,881 9387	2 9466
,037	6,291 1038	3 4704	6,046 5154	3 1488	,092	6,489 1707	3 7426	5,878 9921	2 9430
,038	6,294 5742	3 4751	6,043 3666	3 1449	,093	6,492 9133	3 7479	5,876 0491	2 9395
,039	6,298 0493	3 4798	6,040 2217	3 1409	,094	6,496 6612	3 7532	5,873 1096	2 9360
0,040	6,301 5291	3 4844	6,037 0803	3 1369	0,095	6,500 4144	3 7585	5,870 1736	2 9325
,041	6,305 0135	3 4891	6,033 9439	3 1331	,096	6,504 1729	3 7638	5,867 2411	2 9289
,042	6,308 5026	3 4938	6,030 8108	3 1291	,097	6,507 9367	3 7691	5,864 3122	2 9254
,043	6,311 9964	3 4985	6,027 6817	3 1252	,098	6,511 7058	3 7745	5,861 3868	2 9220
,044	6,315 4949	3 5033	6,024 5565	3 1214	,099	6,515 4803	3 7798	5,858 4648	2 9184
0,045	6,318 9982	3 5079	6,021 4351	3 1174	0,100	6,519 2601	3 7852	5,855 5464	2 9150
,046	6,322 5061	3 5127	6,018 3177	3 1135	,101	6,523 0453	3 7905	5,852 6314	2 9114
,047	6,326 0188	3 5174	6,015 2042	3 1097	,102	6,526 8358	3 7959	5,849 7200	2 9080
,048	6,329 5362	3 5222	6,012 0945	3 1058	,103	6,530 6318	3 8013	5,846 8120	2 9046
,049	6,333 0584	3 5270	6,009 9887	3 1019	,104	6,534 4331	3 8068	5,843 9074	2 9011
0,050	6,336 5854	3 5317	6,005 8868	3 0981	0,105	6,538 2399	3 8122	5,841 0063	2 8976
,051	6,340 1171	3 5366	6,002 7887	3 0942	,106	6,542 0521	3 8176	5,838 1087	2 8942
,052	6,343 6537	3 5413	5,999 6945	3 0904	,107	6,545 8697	3 8231	5,835 2145	2 8907
,053	6,347 1950	3 5461	5,996 6041	3 0865	,108	6,549 6928	3 8285	5,832 3238	2 8873
,054	6,350 7411	3 5510	5,993 5176	3 0827	,109	6,553 5213	3 8341	5,829 4365	2 8839
0,055	6,354 2921	3 5558	5,990 4349	3 0789	0,110	6,557 3554	3 8396	5,826 5526	2 8805

XII. Функция $T(\zeta)$

ζ	$T(\zeta)$	$T(-\zeta)$	ζ	$T(\zeta)$	$T(-\zeta)$
0,110	6,557 3554	5,826 5526	0,155	6,735 7767	5,700 2168
,111	6,561 1949	5,823 6721	,156	6,739 8776	5,697 4835
,112	6,565 0399	5,820 7950	,157	6,743 9847	5,694 7533
,113	6,568 8904	5,817 9214	,158	6,748 0979	5,692 0263
,114	6,572 7465	5,815 0511	,159	6,752 2173	5,689 3024
	3 8616	2 8668		4 1256	2 7209
0,115	6,576 6081	5,812 1843	0,160	6,756 3429	5,686 5815
,116	6,580 4753	5,809 3208	,161	6,760 4746	5,683 8638
,117	6,584 3480	5,806 4607	,162	6,764 6127	5,681 1492
,118	6,588 2263	5,803 6040	,163	6,768 7569	5,678 4377
,119	6,592 1103	5,800 7506	,164	6,772 9074	5,675 7293
	3 8895	2 8500		4 1568	2 7054
0,120	6,595 9998	5,797 9006	0,165	6,777 0642	5,673 0239
,121	6,599 8949	5,795 0539	,166	6,781 2272	5,670 3216
,122	6,603 7957	5,792 2105	,167	6,785 3966	5,667 6224
,123	6,607 7022	5,789 3706	,168	6,789 5723	5,664 9263
,124	6,611 6143	5,786 5340	,169	6,793 7543	5,662 2332
	3 9178	2 8333		4 1883	2 6900
0,125	6,615 5321	5,783 7007	0,170	6,797 9426	5,659 5432
,126	6,619 4556	5,780 8707	,171	6,802 1374	5,656 8562
,127	6,623 3848	5,778 0440	,172	6,806 3385	5,654 1723
,128	6,627 3197	5,775 2207	,173	6,810 5460	5,651 4914
,129	6,631 2603	5,772 4006	,174	6,814 7599	5,648 8135
	3 9464	2 8168		4 2203	2 6748
0,130	6,635 2067	5,769 5838	0,175	6,818 9802	5,646 1387
,131	6,639 1589	5,766 7703	,176	6,823 2070	5,643 4669
,132	6,643 1168	5,763 9601	,177	6,827 4403	5,640 7981
,133	6,647 0805	5,761 1532	,178	6,831 6800	5,638 1323
,134	6,651 0501	5,758 3495	,179	6,835 9262	5,635 4695
	3 9753	2 8004		4 2528	2 6598
0,135	6,655 0254	5,755 5491	0,180	6,840 1790	5,632 8097
,136	6,659 0066	5,752 7520	,181	6,844 4383	5,630 1529
,137	6,662 9936	5,749 9581	,182	6,848 7041	5,627 4991
,138	6,666 9865	5,747 1674	,183	6,852 9765	5,624 8482
,139	6,670 9853	5,744 3800	,184	6,857 2554	5,622 2004
	4 0046	2 7842		4 2856	2 6449
0,140	6,674 9899	5,741 5958	0,185	6,861 5410	5,619 5555
,141	6,679 0005	5,738 8149	,186	6,865 8331	5,616 9136
,142	6,683 0170	5,736 0372	,187	6,870 1319	5,614 2746
,143	6,687 0394	5,733 2626	,188	6,874 4374	5,611 6386
,144	6,691 0678	5,730 4913	,189	6,878 7495	5,609 0055
	4 0343	2 7681		4 3188	2 6301
0,145	6,695 1021	5,727 7232	0,190	6,883 0683	5,606 3754
,146	6,699 1424	5,724 9583	,191	6,887 3938	5,603 7482
,147	6,703 1887	5,722 1966	,192	6,891 7260	5,601 1239
,148	6,707 2410	5,719 4380	,193	6,896 0650	5,598 5026
,149	6,711 2993	5,716 6826	,194	6,900 4107	5,595 8842
	4 0644	2 7522		4 3525	2 6155
0,150	6,715 3637	5,713 9304	0,195	6,904 7632	5,593 2687
,151	6,719 4341	5,711 1814	,196	6,909 1224	5,590 6561
,152	6,723 5106	5,708 4355	,197	6,913 4885	5,588 0465
,153	6,727 5932	5,705 6928	,198	6,917 8614	5,585 4397
,154	6,731 6819	5,702 9532	,199	6,922 2411	5,582 8358
	4 0948	2 7364		4 3866	2 6010
0,155	6,735 7767	5,700 2168	0,200	6,926 6277	5,580 2348
	4 1009	2 7333			

XIII. Коэффициенты интерполяционной формулы Бесселя

x	B_2	B_3	B_4	B_5	x
0,00	-0,00000 - 495	+0,0000000 - 8085	+0,00000 +	-0,0020 +	1,02
,01	,00495 485	,0068085 7595	,00083	,0001	0,99
,02	,00980 476	,0015680 7115	,00165	,0032	,98
,03	,01465 465	,0022795 6645	,00246	,0002	,97
,04	,01920 455	,0029440 6185	,00326	,0003	,96
0,05	-0,02375 - 445	+0,0035625 - 5735	+0,00405 +	-0,0004 +	0,95
,06	,02820 435	,0041360 5295	,00483	,0074	,94
,07	,03255 425	,0046655 4865	,00560	,0005	,93
,08	,03680 415	,0051520 4445	,00636	,0006	,92
,09	,04095 405	,0055965 4035	,00710	,0006	,91
0,10	-0,04500 - 395	+0,0060000 - 3635	+0,00784 +	-0,0006 +	0,90
,11	,04895 385	,0063635 3245	,07856	,0007	,89
,12	,05280 375	,0066880 2865	,00926	,0007	,88
,13	,05655 365	,0069745 2495	,00996	,0007	,87
,14	,06020 355	,0072240 2135	,01064	,0008	,86
0,15	-0,06375 - 345	+0,0074375 - 1785	+0,01130 +	-0,0008 +	0,85
,16	,06720 335	,0077616 1445	,01195	,0008	,84
,17	,07055 325	,0077603 1115	,01259	,0008	,83
,18	,07380 315	,0078720 795	,01321	,0008	,82
,19	,07695 305	,0079515 485	,01381	,0009	,81
0,20	-0,08000 - 295	+0,0080000 - 185	+0,01440 +	-0,0009 +	0,80
,21	,08295 285	,0080185 105	,01497	,0009	,79
,22	,08580 275	,0080080 385	,01553	,0009	,78
,23	,08855 265	,0079695 655	,01607	,0009	,77
,24	,09120 255	,0079040 915	,01659	,0009	,76
0,25	-0,09375 - 245	+0,0078125 - 1165	+0,01709 +	-0,0009 +	0,75
,26	,09620 235	,0076960 1405	,01758	,0008	,74
,27	,09855 225	,0075555 1635	,01804	,0008	,73
,28	,10080 215	,0073920 1855	,01849	,0008	,72
,29	,10295 205	,0072065 2065	,01892	,0008	,71
0,30	-0,10500 - 195	+0,0070000 - 2265	+0,01934 +	-0,0008 +	0,70
,31	,10695 185	,0067735 2455	,01973	,0007	,69
,32	,10880 175	,0065280 2635	,02011	,0007	,68
,33	,11055 165	,0062645 2805	,02046	,0007	,67
,34	,11220 155	,0059840 2965	,02080	,0007	,66
0,35	-0,11375 - 145	+0,0056875 - 3115	+0,02111 +	-0,0006 +	0,65
,36	,11520 135	,0053760 3255	,02141	,0006	,64
,37	,11655 125	,0050505 3385	,02169	,0006	,63
,38	,11780 115	,0047120 3505	,02195	,0005	,62
,39	,11895 105	,0043615 3615	,02218	,0005	,61
0,40	-0,12000 - 95	+0,0040000 - 3715	+0,02240 +	-0,0004 +	0,60
,41	,12095 85	,0036285 3805	,02260	,0004	,59
,42	,12180 75	,0032480 3885	,02277	,0004	,58
,43	,12255 65	,0028595 3955	,02293	,0003	,57
,44	,12320 55	,0024640 4015	,02306	,0003	,56
0,45	-0,12375 - 45	+0,0020625 - 4065	+0,02318 +	-0,0002 +	0,55
,46	,12420 35	,0016560 4105	,02327	,0002	,54
,47	,12455 25	,0012455 4135	,02334	,0001	,53
,48	,12480 15	,0008320 4155	,02340	,0001	,52
,49	,12495 5	,0004165 4165	,02343	,0000	,51
0,50	-0,12500 -	0,0000000	+0,02344 +	0,0000	0,50

XIV. Коэффициенты формулы, дающей первую производную

x	B_3^1	B_4^1	B_5^1	x
0,00	+ 0,08333 + 495	+ 0,08333 - 85	- 0,00633 - 41	1,00
,01	,07838 485	,08248 91	,00792 42	0,99
,02	,07353 475	,08157 96	,00750 41	,98
,03	,06878 465	,08061 100	,00709 42	,97
,04	,06413 455	,07961 105	,00667 41	,96
0,05	+ 0,06958 + 445	+ 0,07856 - 109	- 0,00626 - 41	0,95
,06	,06513 435	,07747 114	,00585 41	,94
,07	,06078 425	,07633 118	,00544 40	,93
,08	,04653 415	,07515 122	,00504 40	,92
,09	,04238 405	,07393 126	,00464 39	,91
0,10	+ 0,03833 + 395	+ 0,07267 - 131	- 0,00425 - 40	0,90
,11	,03438 385	,07136 134	,00385 38	,89
,12	,03053 375	,07002 139	,00347 38	,88
,13	,02678 365	,06864 142	,00309 38	,87
,14	,02313 355	,06722 145	,00271 37	,86
0,15	+ 0,01958 + 345	+ 0,06577 - 149	- 0,00234 - 35	0,85
,16	,01613 335	,06428 152	,00198 36	,84
,17	,01278 325	,06276 155	,00162 34	,83
,18	,00953 315	,06121 159	,00128 35	,82
,19	,00638 305	,05962 162	,00093 33	,81
0,20	+ 0,00333 + 295	+ 0,05800 - 165	- 0,00060 - 33	0,80
,21	+ 0,00038 + 285	,05635 168	- 0,00027 - 31	,79
,22	- 0,00247 - 275	,05467 170	+ 0,00004 + 31	,78
,23	,00522 265	,05297 173	,00035 30	,77
,24	,00787 255	,05124 176	,00065 29	,76
0,25	- 0,01042 - 245	+ 0,04948 - 178	+ 0,00094 + 29	0,75
,26	,01287 235	,04770 181	,00128 27	,74
,27	,01522 225	,04589 183	,00150 26	,73
,28	,01747 215	,04406 185	,00176 25	,72
,29	,01962 205	,04221 188	,00201 24	,71
0,30	- 0,02167 - 195	+ 0,04033 - 199	+ 0,00225 + 24	0,70
,31	,02362 185	,03844 191	,0249 22	,69
,32	,02547 175	,03653 193	,00271 21	,68
,33	,02722 165	,03460 195	,00292 19	,67
,34	,02887 155	,03265 196	,00311 19	,66
0,35	- 0,03042 - 145	+ 0,03069 - 198	+ 0,00330 + 18	0,65
,36	,03187 135	,02871 199	,00348 16	,64
,37	,03322 125	,02672 201	,00364 16	,63
,38	,03447 115	,02471 202	,00380 14	,62
,39	,03562 105	,02269 202	,00394 13	,61
0,40	- 0,03667 - 95	+ 0,02067 - 204	+ 0,00407 + 11	0,60
,41	,03762 85	,01863 205	,00418 9	,59
,42	,03847 75	,01658 205	,00429 11	,58
,43	,03922 65	,01453 207	,00438 8	,57
,44	,03987 55	,01246 206	,00446 7	,56
0,45	- 0,04042 - 45	+ 0,01040 - 208	+ 0,00453 + 6	0,55
,46	,04087 35	,00832 207	,00459 4	,54
,47	,04122 25	,00625 208	,00463 3	,53
,48	,04147 15	,00417 209	,00466 2	,52
,49	,04162 5	,00208 208	,00468 1	,51
0,50	- 0,04167 -	+ 0,00000 -	+ 0,00469 +	0,50

ПРИЛОЖЕНИЕ

Система астрономических постоянных МАС (Гамбург, 1964)*)

Определяющие постоянные

1. Число эфемеридных секунд в одном тропическом годе (1900) $s = 31556925,9747$
2. Гауссова гравитационная постоянная, определяющая астрономическую единицу (а. е.) $k = 0,01720209895$

Основные постоянные

3. Длина (мера) 1 а. е. в метрах $A = 149\,600 \times 10^6$
4. Скорость света в метрах в секунду $c = 299\,792,5 \times 10^3$
5. Экваториальный радиус Земли в метрах $a_e = 6\,378\,160$
6. Динамический коэффициент формы для Земли $J_2 = 0,0010827$
7. Геоцентрическая гравитационная постоянная (единицы: $m^3сек^{-2}$) $GE = 398\,603 \times 10^9$
8. Отношение масс Луны и Земли $\mu = 1/81,30$
9. Сидерическое среднее движение Луны в радианах в секунду (1900) $n_{\zeta}^* = 2,661699489 \times 10^{-6}$
10. Общая прецессия в долготе за тропическое столетие (1900) $p = 5025''\,64$
11. Наклон эклиптики (1900) $\varepsilon = 23^{\circ}\,27'\,08''\,26$
12. Постоянная нутации (1900) $N = 9''\,210$

Вспомогательные постоянные и коэффициенты

- Постоянная $k/86\,400$, используемая, когда единица времени равна одной секунде $k' = 1,990983675 \times 10^{-7}$
Число секунд дуги в одном радиане $206\,264''\,806$
Коэффициент для постоянной аберрации $F_1 = 1,000142$
Коэффициент для среднего расстояния Луны $F_2 = 0,999093142$
Коэффициент для параллактического неравенства $F_3 = 49853''\,2$

*) См. Труды Международного Астрономического Союза, 1966, стр. 593—598.

Производные постоянные

13. Параллакс Солнца $\arcsin (a_e/A) = \pi_{\odot} = 8'',79405 (8'',794)$
14. Световой промежуток для единичного расстояния (световое уравнение) $A/c = \tau_A = 499,5012 = 1^s/0,00200396$
15. Постоянная аберрации $F_1 k' \tau_A = \kappa = 20'',4958 (20'',496)$
16. Сжатие Земли $f = 0,0033529 = 1/298,25$
17. Гелиоцентрическая гравитационная постоянная (единицы: $\text{м}^3 \text{сек}^{-2}$) $A^3 k'^2 = GS = 132718 \times 10^{18}$
18. Отношение масс Солнца и Земли $(GS/GE) = S/E = 332\,958$
19. Отношение масс Солнца и системы Земля + Луна $S/E(1 + \mu) = 328\,912$
20. Возмущенное среднее расстояние Луны в метрах $F_2(GE(1 + \mu)/n_{\odot}^2)^{1/3} = a_{\zeta} = 384400 \times 10^3$
21. Постоянная синуса параллакса Луны $a_e/a_{\zeta} = \sin \pi_{\zeta} = 3422'',451$
22. Постоянная лунного неравенства $\frac{\mu}{1 + \mu} \frac{a_{\zeta}}{A} = L = 6'',43987(6'',440)$
23. Постоянная параллактического неравенства $F_3 \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{a_{\zeta}}{A} = P_{\zeta} = 124'',986$
24. Система планетных масс

Обратное значение массы

Меркурий	6 000 000
Венера	408 000
Земля + Луна	329 390
Марс	3 093 500

Обратное значение массы

Юпитер	1047,355
Сатурн	3501,6
Уран	22 869
Нептун	19 314
Плутон	360 000