

В.А. ПОСТНОВ, И.Я. ХАРХУРИМ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

в расчетах
судовых
конструкций

У4572/8

БИБЛИОТЕКА
Ин-та Укроборонпроект
1988-1991

В книге изложены основные положения метода конечных элементов применительно к расчету строительной металлоконструкции.

Приведены основные пути получения матриц жесткости и податливости конечного элемента. Показаны особенности использования МКЭ при учете геометрической и физической нелинейности материалов конструкций. Указана связь между МКЭ и вариационными методами.

Изложены вопросы использования МКЭ для расчета стержней и стержневых конструкций. Даются примеры расчета стержневых систем на изгиб, устойчивость и колебания.

Особое внимание уделено вопросам применения ЭВМ в методе конечных элементов: решение ленточных систем алгебраических уравнений, получение лент матриц жесткости и податливости и возможности оптимизации при решении систем уравнений высокого порядка. Приведено несколько программ на языке «Алгол-5В».

Показано использование МКЭ для решения классической задачи упругости. Дается вывод матриц жесткости и податливости для треугольного и прямоугольного конечных элементов из упругого и упруго-пластического материалов. Приведены примеры решения задач, связанных с концентраторной напряженностью около отверстий.

Рассматриваются вопросы задачи теории упругости. Получены выражения для матриц жесткости тетраэдра и параллелепипеда. Обсужден вопрос использования МКЭ для расчета напряженно-деформированного состояния тела вращения в упругой и упруго-пластической областях. Приводятся расчет тонких оболочек вращения и цилиндрических тел с кольцевыми вырезами.

Показано применение МКЭ в расчете пластин на изгиб, устойчивость и колебания. Дается вывод матриц жесткости, устойчивости и масс для треугольного и прямоугольного элементов пластин.

Рассмотрены вопросы расчета элементов средней толщиной и оболочек вращения. Приводятся матрицы жесткости для ленточного элемента оболочки, примеры расчета тонких оболочек вращения, оболочек средней толщиной, оболочек большого прогиба и др.

Описаны вопросы использования метода конечных элементов при расчете задач нелинейности, неустойчивости и др.

Наз. ЦК. Табл. 22. Литерат. 156 наз.

Рецензенты Н. Н. Кайдалов,
В. С. Чувпковский

Появление электронных цифровых машин оказало большое влияние на развитие многих областей науки и техники, в том числе и на строительную механику корабля.

Целый ряд проблем этой науки получает полное разрешение. Изменяется состав расчетных методов. При ручном счете основными критериями выбора метода служат трудоемкость расчета, при машинном счете более предпочтительным является метод, обладающий большей универсальностью, т. е. позволяющий получить решение для более широкого класса задач и приводящий к расчетному алгоритму с большим числом однородных вычислительных операций. Двадцать лет назад расчет конструкции с десятком неизвестными казался весьма трудоемким процессом и усилия инженера-исследователя тратились в основном на вводные тексты или иные упрощения с целью снижения числа неизвестных. При использовании ЭВМ число неизвестных достигает нескольких сотен и даже тысяч. Это позволяет инженеру-исследователю при выборе модели объекта учесть все его наиболее характерные черты.

На современном этапе научно-технической революции в судостроении, характеризующемся быстрым ростом размеров судов, усложнением и интенсификацией условий их эксплуатации, внедрением высокопрочных сталей и др., становится необходимым развитие уточненных и высокопроизводительных методов расчета и проектирования судовых конструкций с использованием ЭВМ.

Выбор метода расчета определяет алгоритм. От рациональности же полученного алгоритма зависит точность расчета, расход машинного времени, сложность программы.

Одним из наиболее перспективных численных методов, получивших в последние 5—10 лет исключительное широкое распространение в расчетах прочности строительных, авиационных и судовых конструкций, является так называемый метод конечных элементов (МКЭ). И несмотря на сравнительно короткий срок эксплуатации этого метода, имеется достаточно оснований рассматривать его в качестве одного из наиболее эффективных численных методов оценки прочности сложных судовых конструкций.

Широкое использование МКЭ в значительной мере объясняется наличием машинных программ, обладающих высокой степенью автоматизации трудоемких операций составления и решения систем алгебраических уравнений, имеющих высокий порядок, минимумом требований к исходной информации и оптимальной формой выдачи результатов.

Машинная техника вычислений потребовала представления расчетного алгоритма в форме, наиболее приспособленной к использованию машины. И такой формой для ЭВМ оказался язык матричного исчисления. Применение матриц сокращает и упрощает математические выкладки в расчетном алгоритме.

Удобство использования матричного языка усиливается еще и тем, что современные вычислительные машины располагают стандартными программами для производства различных операций над матрицами. Поэтому в дальнейшем мы также широко будем использовать теорию матриц.

К моменту выхода настоящей книги метод конечных элементов получил широкое распространение, особенно за рубежом. Колоссальное журнальное публикации, касающиеся МКЭ, перевалило, по-видимому, за тысячу, число книг и монографий только на английском языке насчитывает около десятка. В связи с этим авторы сочли возможным ограничиться ссылками лишь на основную литературу по этому вопросу. Более полную библиографию по МКЭ можно найти в работах [4, 60, 129, 141, 155].

Несмотря на столь бурный поток литературы по МКЭ, в большинстве работ, как правило, отсутствуют многие «мелочи», из-за которых практически реализовать МКЭ становится невозможной. Авторы в данной книге пытались заполнить МКЭ с «мелких позиций», казавшихся этой тенденции.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность рецензентам проф. Н. Н. Кайдалову и проф. В. С. Чуйниковскому, а также к. т. н. Ю. К. Вильямову, одному из авторов универсальной программы МКЭ [11], и сотрудникам кафедры «Строительная механика корабля» Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института Н. И. Черникову, Н. Г. Слезиню, Б. Е. Кельману, С. А. Дмитриеву и И. А. Кизанку, принимавшим участие в расчетах некоторых примеров, используемых в книге.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1

Основные сведения о матрицах и матричных операциях

Поскольку сведения о матрицах и матричных операциях известны широкому кругу читателей, целью этого параграфа является не столько повторение этих сведений, сколько введение в курс обозначений матриц, широко используемых ниже на протяжении всей книги.

Матрицей называется совокупность чисел a_{ij} , расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей i строк и j столбцов. Матрица записывается в виде

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

или, сокращенно,

$$[A] = [a_{ij}]. \quad (1.2)$$

Матрица $[A]$ имеет размеры $m \times n$.

Равные матрицы. Две матрицы $[A] = [a_{ij}]$ и $[B] = [b_{ij}]$ называются равными, если равны их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Матрица-строка. Для матриц, состоящих из одной строки, часто используют специальное обозначение:

$$[A] = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n] = [a_j]. \quad (1.3)$$

Матрица-столбец. Матрицы, состоящие из одного столбца, называют столбцами или векторами. Для экономии места используется строчечная запись вида

$$[A] = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n] = [a_i]. \quad (1.4)$$

Квадратная матрица. Если число n строк прямоугольной матрицы равно числу ее столбцов m , то такая матрица называется квадратной. В этом случае число n называется порядком матрицы.

Производная от матрицы. Под производной от матрицы условно понимают матрицу, получаемую из данной путем замены всех ее элементов их производными:

$$|A'| = \frac{d|A|}{dx} = \left[\frac{d|A|}{dx} \right]. \quad (1.13)$$

Определитель квадратной матрицы. Определителем квадратной матрицы называется определитель, элементы которого равны элементам матрицы. Определитель матрицы $|A|$ обозначается через $|A|$.

Квадратная матрица $\{a_{ij}\}$ называется несобственной, если ее определитель $|a_{ij}|$ не равен нулю; в противном случае матрица называется собственной.

Обратная матрица. Матрицу $|B|$ назовем обратной к квадратной матрице $|A|$, если

$$|A| |B| = |E|, \quad (1.14)$$

Можно показать, что достаточным условием существования обратной матрицы является несобщность матрицы $|A|$. Матрица, обратная к матрице $|A|$, обычно обозначается через $|A|^{-1}$, т. е. $|B| = |A|^{-1}$.

Транспонированная матрица произведения нескольких матриц может быть определена через значения матриц, транспонированных по отношению к матрицам-составляющим:

$$||A_1| |A_2| \dots |A_n||^T = |A_n|^T |A_{n-1}|^T \dots |A_1|^T |A_2|^T. \quad (1.15)$$

Определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-составляющих:

$$||A_1| |A_2| \dots |A_n|| = |A_1| |A_2| \dots |A_n|. \quad (1.16)$$

Обратная матрица произведения нескольких матриц определяется через значения обратных матриц-составляющих в соответствии с формулой

$$||A_1| |A_2| \dots |A_n|^{-1}| = |A_n|^{-1} |A_{n-1}|^{-1} \dots |A_1|^{-1}. \quad (1.17)$$

Транспонирование обратной матрицы. От изменения последовательности выполнения транспонирования и обращения матрицы результат не изменяется, т. е.

$$||A|^{-1}|^T = ||A|^T|^{-1}. \quad (1.18)$$

Обращение диагональной матрицы. Если имеется диагональная матрица $|A| = |a_1 a_2 \dots a_n|$, то обратная по отношению к ней матрица определяется так:

$$|A|^{-1} = |a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}|, \quad (1.19)$$

где $a_i = \frac{1}{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Обращение квазидиагональной матрицы. Если имеется квазидиагональная матрица $|A|$ с квадратными диагональными блоками $|A| = ||A_1| |A_2| \dots |A_n||$, то обратной по отношению к ней является матрица

$$|A|^{-1} = ||A_1|^{-1} |A_2|^{-1} \dots |A_n|^{-1}|. \quad (1.20)$$

На этом мы и закончим краткий перечень основных матричных операций. Некоторые дополнительные сведения из теории матриц будут излагаться по мере необходимости в соответствующих разделах книги.

§ 2

Идеализация исходной конструкции

В любом упругом теле, если принять во внимание его молекулярную структуру, действительное число внутренних связей бесконечно. Это приводит к известным трудностям при получении численных решений.

Метод конечных элементов позволяет преодолеть эти трудности. Он основан на мысленном представлении сплошного тела (конструктива) в виде совокупности отдельных конечных элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек. В этих точках прикладываются некоторые фиктивные усилия взаимодействия, характеризующие действие распределенных внутренних напряжений, приложенных вдоль реальных границ стыковки смежных элементов.

Если такая идеализация исходного упругого тела (конструкции) возможна, то проблема сводится к расчету упругой системы с конечным числом степеней свободы.

Существующие методы определения связи между узловыми усилиями и узловыми перемещениями будут подробно рассмотрены ниже. Добавим, что определением этой связи (матрицы жесткости или матрицы податливости) является одним из основных этапов приложения МКЭ к расчету конструкций.

Замена исходной конструкции совокупностью дискретных элементов подразумевает равенство энергий конструкции к ее дискретной модели. Для некоторых конструкций соблюдение энергетического баланса ведет к получению дискретной модели, точно описывающей поведение исходной конструкции. Это характерно для конструкций, которые уже состоят из отдельных элементов с дискретным соединением их между собой. В качестве примера можно указать на фермы, рамы, стержневые перекрытия.

Если же элементы реальной конструкции имеют вдоль своей границы непрерывные связи со смежными элементами, то при построении дискретной модели мы вынуждены делать некоторые априорные предположения о характере силового или кинематического взаимодействия между смежными элементами. В этом случае дискретная модель будет лишь приближенно отражать поведение исходной конструкции. Характер взаимодействия между элементами должен

быть выбран таковым, чтобы уменьшение размеров конечных элементов привело к получению решения, стремящегося к точному.

Приведем примеры разбиения конструкций на конечные элементы.

Пример 1. Ферма, изображенная на рис. 1.1, состоит из равнодействующих и параллельно-сочлененных стержней. Каждый стержень фермы работает лишь на растяжение-сжатие.

Если в качестве дискретных элементов выбрать отдельные стержни, то дискретная модель будет точной копией реальной конструкции. В узловых точках вводятся определенные условия взаимодействия между отдельными стержнями. Для определения этих условий составляется необходимое число уравнений равновесия узловых точек.

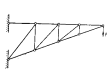


Рис. 1.1. Стержневая конструкция, состоящая из равнодействующих и параллельно-сочлененных стержней.

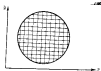


Рис. 1.2. Дискретная модель пластины с линейной окантовкой разрезов на конечных элементах.

Рассматриваемая ферма относится к классу статически неопределимых, поэтому дополнительно к упомянутым выше уравнениям равновесия необходимо составить определенное число уравнений совместности деформаций, т. е. условий равенства перемещений концов стержней, соединенных в каждом узле.

Пример 2. Пусть теперь стержни конструкции, изображенной на рис. 1.1, жестко скреплены друг с другом. В этом случае остается прежним общий вид дискретной модели. Однако характер взаимодействия между стержнями в узловых точках становится более сложным: наряду с осевыми усилиями появляются поперечные силы и моменты. Это приводит к увеличению числа неизвестных узловых усилий, а следовательно, и к необходимости составления дополнительных уравнений для их определения.

Пример 3. Плоская пластина (рис. 1.2) произвольного очертания с помощью сечений, параллельных осям x и y , может быть представлена в виде совокупности прямоугольных и треугольных конечных элементов. Именно эти две формы конечных элементов нашли широкое использование при решении плоской задачи теории упругости.

В отношении выбора размеров конечных элементов можно утверждать лишь следующее: уменьшение размеров сторон конечного элемента и связанное с этим увеличение числа узлов, как правило, приводит к повышению точности расчета. Заметим, что переход к очень малым по размеру конечным элементам может иногда при-

вести к равному возрастанию ошибок округления и, как следствие этого, к росту общей погрешности расчета.

Не всегда целесообразно использовать один и тот же размер конечного элемента по всему полю пластины. В местах окантовки концентратора напряжений, резкого изменения напряжений полезно усилить размеры конечных элементов путем введения дополнительных расчленений с образованием дополнительных узловых точек.

Заметим, что даже при одном и том же числе узловых точек возможны различные схемы идеализации исходной конструкции (рис. 1.3). Различие в схемах идеализации порождает разницу в окон-

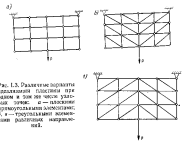


Рис. 1.3. Различные варианты идеализации пластины при одном и том же числе узловых точек: а — плоские прямоугольные элементы; б, в — треугольные конечные элементы различного назначения.

чательных результатах расчета. К сожалению, заранее сказать, какая из возможных схем идеализации при одном и том же числе и расположении узловых точек окажется оптимальной, т. е. приведет к наименьшей погрешности решения, невозможно.

С первого взгляда может показаться, что сохранение связи между конечными элементами лишь в узловых точках сопряжено с резким уменьшением общей жесткости пластины. В действительности же это не так. Каждый конечный элемент, к которому приложены узловые усилия взаимодействия, деформируется в соответствии с некоторыми внутренними силами, нивелируемыми на него задаваемым законом изменения компонентов напряжений. Вот почему приложение сосредоточенных узловых усилий во сопряженных элементах дает концентрированные напряжения области узловых точек.

Треугольные и прямоугольные конечные элементы широко используются в расчетах прочности стержневых конструкций. На рис. 1.4 представлена схема идеализации поперечной рамы супертанкера.

Пример 4. Если пластина на рис. 1.2 нагружена кроме заданных, действующих в ее плоскости сил еще и поперечной нагрузкой, то

при той же схеме идеализации это приведет к появлению в узловых точках дополнительных усилий взаимодействия между стыкующимися конечными элементами. Наряду с усилиями взаимодействия, лежащими в плоскости пластины, вводятся поперечные усилия взаимодействия и изгибающие поперечные моменты.

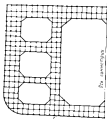


Рис. 1.4. Идеализация поперечной рамы сверхразмера совокупностью пластичных конечных элементов прямоугольной и треугольной формы.

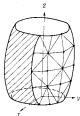


Рис. 1.5. Идеализация оболочки вращения совокупностью треугольных конечных элементов.

Пример 5. На рис. 1.5 показана идеализация оболочки вращения с помощью треугольных конечных элементов. Если размеры элемента достаточно малы, то можно не считаться с его погрешью и принимать конечный элемент плоским. Учет естественной погреш конечного элемента существенно усложняет определение связей между узловыми перемещениями и узловыми усилиями.

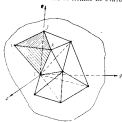


Рис. 1.6. Идеализация объема тела совокупностью тетраэдров.

Пример 6. При определении напряженного состояния трехмерных тел идеализация осуществляется уже с помощью объемных конечных элементов — параллелепипедов, тетраэдров и т. п., шарнирно-скрепленных в узловых точках (рис. 1.6). При такой идеализации к каждой вершине конечного элемента прикладываются по координатным осям три составляющие усилий взаимодействия со смежными элементами.

Полному корпус представляет конструкцию, состоящую из пластин, оболочек и подкрепляющих их ребер. Поэтому дискретная модель судового корпуса (рис. 1.7) будет включать стержневые, пластинчатые и оболочечные конечные элементы (рис. 1.7, б).

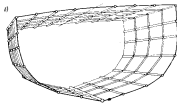
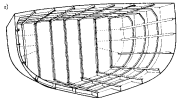


Рис. 1.7. Объемный корпус судна: а — конструкция отсека; б — дискретная модель отсека.

§ 3 Матрица жесткости и податливости

Уже сама идеализация, приводящая исходную конструкцию к совокупности конечных элементов, связанных между собой лишь в узловых точках, требует, чтобы напряженное состояние в каждом из элементов относительно определялось через значения узловых перемещений (узловых усилий).

Матрицей жесткости (податливости) определяется связь между узловыми перемещениями и узловыми усилиями конечного элемента, т. е. определяются его упругие и ирриационные (в задачах динамики) свойства.

Для иллюстрации метода получения матрицы жесткости (податливости) рассмотрим прямоугольный конечный элемент пластины (рис. 1.8), подверженной действию поперечной нагрузки и условий в срединной плоскости. В данном случае естественно предположить, что напряженное состояние конечного элемента будет одноосью

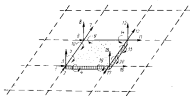


Рис. 1.8. Прямоугольный конечный элемент пластины при осевом изгибе.

определяется двенадцатью узловыми линейными и восемью узловыми перемещениями.

Для каждого узлового перемещения можно ввести соответствующее узловое усилие. Совокупность этих усилий характеризует влияние смежных элементов конструкции на рассматриваемый элемент. Между узловыми усилиями и узловыми перемещениями существует определенная связь:

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (3.1)$$

где $\{R\} = \{R_1, R_2, \dots, R_{12}\}$ — вектор-столбец узловых усилий; $[K]$ — матрица жесткости, которая и определяет, по существу, упругие свойства рассматриваемого конечного элемента;

$\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_{12}\}$ — вектор-столбец узловых перемещений.

Установление зависимости (3.1), т. е. определение значения матрицы жесткости $[K]$ требует предварительного предположения о характере изменения по объему элемента компонентов перемещения или компонентов напряжений. От того, насколько удачно выбраны выражения для перемещений (или компонентов напряжений), зависит точность решения задачи.

Так как напряженно-деформированное состояние конечного элемента полностью определяется заданием вектора узловых перемещений, состоящего в нашем случае из 20 скалярных величин, то общие выражения для компонентов перемещения по объему конечного

элемента $\{U\} = \{u, v, w\}$ должны включать 20 произвольных варьируемых параметров. Указанные параметры легко выражаются через вектор узловых перемещений $\{q\}$, что позволяет представить вектор перемещений $\{U\}$ в следующем виде:

$$\{U\} = [B] \{q\}, \quad (3.2)$$

где $[B]$ — прямоугольная матрица размером 3×20 , элементы которой зависят от координат положения рассматриваемой точки.

Используя далее зависимость Коши и закон Гука, можно получить выражения для компонентов деформации и напряжения:

$$\{\epsilon\} = [D] \{q\}, \quad (3.3)$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}, \quad (3.4)$$

здесь $[D]$ и $[E]$ — некоторые прямоугольные матрицы, элементы которых зависят от координат положения рассматриваемой точки. Элементы матрицы $[E]$ дополнительно зависят от параметров, которыми характеризуются упругие свойства материала конструкции в пределах объема рассматриваемого конечного элемента.

Рассматривая узловые усилия $\{R\}$ в качестве некоторых внешних сил, действие которых вызывает внутри объема элемента напряженно-деформированное состояние, описываемое зависимостями (3.3) и (3.4), можно использовать для установления связи (3.1) принцип возможных перемещений [60, 67, 139, 155]. Согласно этому принципу сумма работ всех внешних $\{R\}$ и внутренних $\{\sigma\}$ сил на возможном перемещении системы $\{U\}$ равна нулю:

$$R_1 \delta q_1 + R_2 \delta q_2 + \dots + R_{12} \delta q_{12} - \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV = 0, \quad (3.5)$$

Второй член в правой части равенства (3.5) выражает приращение потенциальной энергии, которая, как известно, равна с обратным знаком работе внутренних сил. Интеграл берется по всему объему конечного элемента.

В матричной форме зависимость (3.5) переписывается в более компактном виде:

$$\{\delta q\}^T \{R\} = \int \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (3.6)$$

Воспользовавшись далее соотношениями (3.3) и (3.4), непосредственно из зависимости (3.6) можно получить

$$\{R\} = \left[\int [D]^T [E] dV \right] \{q\}. \quad (3.7)$$

Откуда, если учесть зависимость (3.1),

$$\{K\} = \int \{D\}^T \{E\} dV. \quad (3.8)$$

При выводе формулы (3.8) не вводились какие-либо ограничения, касающиеся формы конечного элемента, поэтому полученное выражение для матрицы жесткости может быть использовано для самых разнообразных форм конечного элемента.

Матрица $\{K\}$ является квадратной; ее порядок равен числу степеней свободы рассматриваемого конечного элемента.

Изложенный способ получения матрицы жесткости не единственный. Приведем еще один достаточно распространенный путь получения матрицы жесткости элемента [60, 139].

Согласно теории Клайберна, удельное значение потенциальной энергии равно сумме произведений внешних обобщенных сил на соответствующие им обобщенные перемещения. Приведем в качестве обобщенных сил и обобщенных перемещений соответственно узловые усилия элемента $\{R\}$ и узловые перемещения $\{q\}$. Тогда

$$2V = R_1 q_1 + R_2 q_2 + \dots + R_n q_n, \quad (3.9)$$

или в матричной форме

$$2V = \{q\}^T \{R\}. \quad (3.10)$$

Исключая далее из зависимости (3.10) с помощью зависимости (3.1) вектор узловых усилий $\{R\}$, получим

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T \{K\} \{q\} \quad (3.11)$$

или в развернутом виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (3.12)$$

где k_{ij} — элементы матрицы жесткости $\{K\}$, т. е.

$$\{K\} = [k_{ij}]. \quad (3.13)$$

Таким образом, чтобы получить матрицу жесткости, достаточно располагать выражением для потенциальной энергии конечного элемента в форме (3.12).

Значения элементов матрицы $\{K\}$ зависят от геометрических и жесткостных параметров конечного элемента, а также от принятого закона распределения компонентов перемещений (или напряжений).

Выбор выражений, аппроксимирующих характер изменений перемещений (напряжений) по объему конечного элемента, является одним из наиболее ответственных моментов в общей процедуре МКЭ. Всегда желательно, чтобы этот выбор приводил к удовлетворению уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций внутри объема конечного элемента; к отсутствию разрывов в компонентах перемещений и напряжений вдоль линий стыковки смежных элементов.

Ограниченность числа степеней свободы для конечного элемента не позволяет удовлетворить всем этим условиям, а следовательно, и получить точное решение задачи.

В настоящее время отсутствуют надежные критерии, которые позволили бы сразу выбрать оптимальный вариант аппроксимированных выражений для перемещений (напряжений) из числа возможных. И единственным надежным обоснованием в пользу выбора одного закона аппроксимации, а не другого остается сопоставление полученных на их основе приближенных решений с точными (там, где это возможно).

В дальнейшем все эти вопросы, как и вопросы сходимости МКЭ при увеличении числа конечных элементов, на которые разбивается рассматриваемая конструкция, будут рассмотрены более детально.

Матрица жесткости $\{K\}$ полностью определяет жесткостные свойства рассматриваемого конечного элемента.

Если в качестве расчетного метода выбрать метод перемещений, следовательно, за основные неизвестные принять перемещения в узловых точках, то для определения этих неизвестных нужно будет составить необходимое число уравнений равновесия узловых точек. Узловые усилия, которые войдут в эти уравнения, исключатся с помощью матрицы жесткости для отдельных элементов, за которые разбита конструкция. В результате получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, позволяющую определить неизвестные узловые перемещения.

Однако может оказаться более удобным за основные неизвестные принять не узловые перемещения, а узловые усилия взаимодобываемые между элементами. Для их определения необходимо составить уравнения совместности перемещений в узловых точках (метод сил). Компоненты узловых перемещений в уравнениях совместности следует затем выразить через узловые усилия.

Может показаться, что для этого достаточно воспользоваться зависимостью (3.1), т. е. найти обратную матрицу $\{K\}^{-1}$. Однако такой путь невозможен, так как в общем случае матрица жесткости $\{K\}$ является матрицей особенной. Обясняется это тем, что компоненты матрицы усилий $\{R\}$ в выражении (3.1) являются зависимыми величинами: они линейно связаны между собой с помощью системы уравнений равновесия для конечного элемента в целом. Поэтому при получении матрицы жесткости за конечный элемент следует выбирать определенное число кинематических связей, которые ликвидировали бы его перемещение как абсолютно твердого тела. Последнее приводит к уменьшению числа уравнений в (3.1) на число степеней свободы перемещения элемента:

$$\{R^*\} = \{K^*\} \{q^*\}. \quad (3.14)$$

Матрица $\{K^*\}$ уже не будет особенной и допустит операцию обращения:

$$\{q^*\} = [F] \{R^*\},$$

где $[F] = \{K^*\}^{-1}$ — матрица податливости конечного элемента.

Заметим, что вектором $\{q^*\}$ определяются лишь суточные перемещения произвольной точки внутри объема конечного элемента, т. е. перемещения, которые связаны с элементом деформированного состояния элемента.

Хотя порядок матрицы податливости $\{F\}$ меньше порядка матрицы жесткости $\{K\}$, общее число уравнений для определения основных неизвестных в методе сил, как правило, оказывается большим, чем в методе перемещений. Это предопределяло преимущественное использование в расчетной практике метода перемещений. Поэтому в дальнейшем мы редко будем касаться вопроса получения

матрицы податливости. Основное внимание будет уделено наложению матриц жесткости, используемых в методе перемещений.

Приведем наиболее характерные типы конечных элементов, употребляемые в МКЭ для расчета прочности различных конструкций.

1. Элемент стержня, работающего в условиях одноосного напряженного состояния на растяжение-сжатие (рис. 1.9). При использовании метода перемещений (МП) в каждый элемент требуется ввести две реактивные силы (см. рис. 1.9, а),

Рис. 1.9. Элемент стержня, работающего в условиях растяжения-сжатия.

при использовании же метода сил (МС) — лишь одну, так как другая (аналогична на рис. 1.9, б пунктиром) определяется из уравнений равновесия рассматриваемого элемента при выбранных kinематических закреплениях, устраняющих его перемещения как абсолютно твердого тела.

2. Элемент стержня, работающего на растяжение-сжатие в осевом направлении, на скручивание и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 1.10). При использовании МП в каждом элементе вводятся до четырех перемещающих и две осевых силы, четыре изгибающих и два скручивающих момента (рис. 1.10, а). Общее число реактивных усилий равно числу степеней свободы конечного элемента. Порядок матрицы жесткости равен 12.

При использовании МС шесть реактивных усилий (набразены на рис. 1.10, б пунктирными линиями) можно исключить из общего рассмотрения с помощью уравнений равновесия. Порядок матрицы податливости будет равен 6.

3. Плоский треугольный элемент пластинки при рассмотрении плоской задачи теории упругости (рис. 1.11). В МП в каждом узле вводятся до два реактивных условия (рис. 1.11, а). Порядок матрицы жесткости равен 6. В МС три узловые реакции исключаются из общего рассмотрения с помощью уравнений равновесия

элемента в целом (рис. 1.11, б). Порядок матрицы податливости равен 3.

4. Прямоугольный плоский элемент пластинки при рассмотрении плоской задачи (рис. 1.12). При использовании МП общее число узловых усилий равно 8 (рис. 1.12, а). Порядок матрицы жесткости равен 8. В МС три из восьми узловых усилий исключаются с помощью уравнений равновесия элемента как жесткого тела (рис. 1.12, б). Порядок матрицы податливости равен 5.

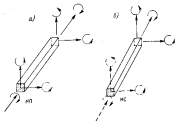


Рис. 1.10. Элемент пространственного стержня, работающего в условиях растяжения-сжатия, кручения и изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

5. Тетраэдр (рис. 1.13). Конечный элемент такой формы используется при решении объемной задачи теории упругости. Порядок матрицы жесткости равен 12, порядок матрицы податливости — 6.

6. Плоский треугольный элемент в задачах изгиба жестких пластин (рис. 1.14). При использовании МП в каждой узловой точке вводятся одно реактивное поперечное усилие и два момента (рис. 1.14, а). Порядок матрицы жесткости равен 9.

При использовании МС три реактивных условия (показаны пунктиром на рис. 1.14, б) исключаются с помощью уравнений равновесия. Порядок для матрицы податливости будет равен 6.

7. Плоский прямоугольный элемент в задачах изгиба жестких пластин (рис. 1.15). Порядок матрицы жесткости элемента будет равен 12, матрицы податливости — 9.

8. Конический элемент оболочки вращения при осесимметричном напряженном состоянии (рис. 1.16). Оболочка вращения может быть идеализирована совокупностью конических, торцевых или с действительной меридиональной кривизной элементов.

При использовании МП в каждом из торцевых сечений такого элемента будут действовать по три реактивных силы и одному

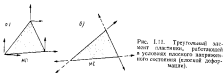


Рис. 1.11. Треугольный элемент пластинки, работающей в условиях плоского напряженного состояния (плоской деформации).



Рис. 1.12. Прямоугольный элемент пластинки при рассмотрении плоской задачи теории упругости.

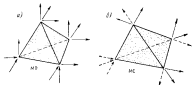


Рис. 1.13. Косой элемент в форме тетраэдра для решения объемной задачи теории упругости.

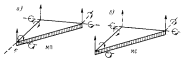


Рис. 1.14. Плоский треугольный элемент в задачах теории жестких пластин.

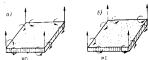


Рис. 1.15. Плоский прямоугольный элемент в задачах теории жестких пластин.



Рис. 1.16. Косой элемент толстой оболочки вращения при осесимметричном напряженном состоянии.



Рис. 1.17. Косой элемент треугольного сечения при осесимметричном напряженном состоянии тела вращения.

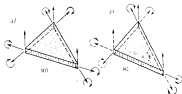


Рис. 1.18. Треугольный плоский элемент для идеализации произвольной оболочки.

наблюдению моменту. Порядок матрицы жесткости будет равен 8, матрица податливости — 6.

9. **Концевой элемент с треугольным сечением при осесимметричном напряженном состоянии тела вращения.** Любое тело вращения может быть идеализировано совокупностью концевых элементов с треугольным сечением (рис. 1.17). При использовании МП в каждой вершине треугольного сечения выделяется по две реактивных силы. Порядок матрицы жесткости равен 6.

Для исключения перемещений элемента как жесткого тела достаточно закрепить одну из вершин сечения от перемещений, параллельных оси тела.

Порядок матрицы податливости будет равен 3.

10. **Конечный треугольный элемент провольной оболочки.** Любая оболочка может быть элементом совокупностью плоских, сферических или с двоякой кривизной треугольных в плане (или блинчик к этому) конечных элементов.

Рассмотрим для простоты плоский треугольный элемент (рис. 1.18). В каждой вершине такого элемента следует ввести по меньшей мере три силы и два момента. Две из упомянутых сил лежат в средней плоскости элемента, а третья направлена перпендикулярно этой плоскости.

Общее число реактивных усилий взаимосвязей рассматриваемого элемента со смежными элементами оболочки равно 15. Таким образом, порядок матрицы жесткости элемента будет равен 15, порядок матрицы податливости — 9.

§ 4

Метод перемещений

Общая матрица жесткости конструкции. В предыдущем параграфе были изложены способы определения матрицы жесткости конечного элемента, которая устанавливает связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями элемента.

Перейдем теперь к рассмотрению модели идеализированной конструкции, состоящей из совокупности конечных элементов, скрепленных между собой в узловых точках. Наличие матрицы жесткости для отдельных элементов позволяет заменить всю данную конструкцию с бесконечным числом степеней свободы дискретной моделью с конечным числом степеней свободы.

Как уже было сказано, в методе перемещений в качестве основных неизвестных выбираются узловые перемещения.

Наша ближайшая задача — определить для этой дискретной модели ее матрицу жесткости. Эта матрица, как будет показано ниже, выражается через матрицы жесткости отдельных элементов конструкции и устанавливает связь между узловыми перемещениями дискретной модели и внешней нагрузкой исходной конструкции. Расположим выражение для общей матрицы, по заданным значениям внешней нагрузки мы без особого труда сможем найти узловые

перемещения. Если далее воспользоваться формулой (3.4), то по значениям узловых перемещений элемента можно определить его напряженное состояние:

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}. \quad (3.1)$$

Напряженное же состояние рассматриваемой конструкции складывается из напряженных состояний в каждой из ее конечных элементов.

Переходим к выводу выражения для общей матрицы жесткости заданной конструкции.

Напряженное состояние $\{\sigma\}_i$ внутри каждого i -го элемента удовлетворяется его узловыми усилиями $\{R\}_i$. Узловые усилия $\{R\}_i$ связаны при помощи матрицы жесткости элемента $[K]_i$ с соответствующими им узловыми перемещениями $\{q\}_i$ зависимостью (3.1):

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i. \quad (4.2)$$

Объединим уравнения (4.2), выписанные для каждого из конечных элементов конструкции, в одно матричное уравнение вида

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (4.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \{R\} &= \{R\}_1, \{R\}_2, \dots, \{R\}_n, \\ [K] &= [K]_1, [K]_2, \dots, [K]_n, \\ \{q\} &= \{q\}_1, \{q\}_2, \dots, \{q\}_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) устанавливает связь между внутренними узловыми усилиями $\{R\}$ и узловыми перемещениями $\{q\}$ рассматриваемой конструкции.

Выведем в рассмотренные вектор узловых перемещений s -го узла $\{q\}^{(s)} = \{q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, \dots, q_n^{(s)}\}$ и соответствующий этим перемещениям вектор узловых внешних сил

$$\{P\}^{(s)} = \{P_1^{(s)}, P_2^{(s)}, \dots, P_n^{(s)}\}. \quad (4.5)$$

Здесь i равно числу неизвестных узловых перемещений в s -м узле. Тогда выражение

$$\{\bar{q}\} = \{\{q\}^{(1)}, \{q\}^{(2)}, \dots, \{q\}^{(s)}, \dots, \{q\}^{(n)}\} \quad (4.7)$$

будет вектором узловых перемещений для всей конструкции в общей системе координат, а зависимость

$$\{\bar{P}\} = \{\{P\}^{(1)}, \{P\}^{(2)}, \dots, \{P\}^{(s)}, \dots, \{P\}^{(n)}\} \quad (4.8)$$

— вектором внешней узловой нагрузки для всей конструкции.

Для любой конкретной конструкции путем непосредственного рассмотрения векторов $\{q\}$ и $\{\bar{q}\}$ нетрудно установить связь между

кинематических закреплений в отдельных ее узлах по некоторым из обобщенных узловых координат.

В общем случае объемной конструкции число таких закреплений, которые позволяют аннулировать поступательные и вращательные движения (вдоль и вокруг каждой из осей координат) системы как твердого тела, будет равно шести. В случае же, например, плоской рамы, изображенной на рис. 1.19, достаточно ввести три кинематические связи $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{12} = 0$, чтобы полностью исключить ее перемещения как твердого тела.

Исключая из матрицы $[K]$ строки и столбцы, соответствующие узловым перемещениям, на которые накладываются кинематические связи, получим некоторую несобственную матрицу жесткости $[K^*]$. Последняя операция есть не что иное, как удовлетворение кинематическим граничным условиям закрепления конструкции. При этом уравнение равновесия (4.17) переписывается в виде

$$[P^*] = [K^*] \{q^*\}, \quad (4.19)$$

где индекс «*» означает, что из соответствующей матрицы исключены члены, связанные с наличием у конструкции переменных как абсолютно твердого тела. Исключение соответствующих строк и столбцов из матрицы $[K]$ и ЭВМ является довольно трудоемкой операцией, так как связано с изменением объема всех матриц и переконфигурацией соответствующих массивов в оперативной памяти машины. Заметим, что в дальнейшем индекс «*» в уравнении (4.19) для упрощения записи будем опускать.

Получение общей матрицы жесткости $[K]$ по уравнению (4.18) также связано с неудобствами и требует осей большого объема оперативной памяти ЭВМ, так как размеры матрицы $[H]$ могут достигать очень больших величин. Например, пространственная стержневая конструкция среднего объема, состоящая из 80 элементов и 30 узлов, дает матрицу $[H]$ размером 960×180 , и только для размещения одной этой матрицы требуется около 20 тысяч ячеек памяти.

Значительно более простой прием для автоматического формирования общей матрицы жесткости системы, а также для одновременного учета кинематических граничных условий и т. п., связанных с использованием так называемой матрицы индексов и реализованной в универсальной программе МКЭ IIII, будет описан ниже в третьей главе.

Матрица преобразования координат. Выше, при выводе общей матрицы жесткости, предполагалось, что матрицы жесткости всех конечных элементов получены в общей системе координат.

В § 3 были приведены способы нахождения матриц жесткости для конечного элемента, ориентированного в произвольной системе координат. Таким образом, используя методы § 3, мы могли бы получать матрицы жесткости конечных элементов для случая, когда местная система координат совпадает с общей. Однако в практических расчетах, как правило, используются уже готовые, полученные ранее матрицы жесткости для отдельных типовых элементов конструкции.

И может оказаться, что местная система координат, для которой и была найдена матрица жесткости элемента, не совпадает с общей системой координат для конструкции.

Покажем, каким образом с помощью неиспользованной матрицы перехода от одной координатной системы к другой можно получить выражение для матрицы жесткости конечного элемента в новой системе координат.

Пусть ось x_0 — местные оси конечного элемента, а известно для этих осей была получена матрица жесткости i -го элемента $[K]_i$, т. е. установлена связь между его узловыми усилиями $[R]_i$ и узловыми перемещениями $\{q\}_i$:

$$[R]_i = [K]_i \{q\}_i, \quad (4.20)^*$$

Введем для элемента новые оси координат $x'g'z'$. В новой системе координат зависимость (4.20) можно переписать в таком виде

$$[R'] = [K'] \{q'\}. \quad (4.21)$$

Здесь индекс «'» показывает, что соответствующая матрица зависима для осей $x'g'z'$.

Далее предположим, что нам известна матрица преобразования перемещений для элемента из новой системы координат в старую:

$$\{q\} = [T] \{q'\}. \quad (4.22)$$

Записать в общем виде выражение для матрицы преобразования $[T]$ сложно. Подробное описание процедуры получения этой матрицы для некоторых типовых элементов будет приведено ниже в соответствующих главах книги.

Так как направления узловых усилий совпадают с направлениями соответствующих узловых перемещений, то легко понять, что связь между узловыми усилиями в старой и новой системах координат осуществляется с помощью той же матрицы преобразования $[T]$, т. е.

$$[R] = [T] [R']. \quad (4.23)$$

Внося значения матриц $[R]$ и $\{q\}$ из (4.23) и (4.22) в (4.20) и разделив полученное при этом уравнение относительно матрицы $[R']$, находим

$$[R'] = [T]^{-1} [K] [T] \{q'\}. \quad (4.24)$$

Покажем далее, что матрица преобразования $[T]$ для элемента является ортогональной матрицей, т. е.

$$[T]^{-1} = [T]^T. \quad (4.25)$$

Действительно, работа, произведенная внутренними силами на действительных перемещениях в любой системе координат, постоянна. Тогда

$$\{q\}^T [R] = \{q'\}^T [R']. \quad (4.26)$$

* В целях упрощения записи в дальнейшем выкладках индекс «i» будем опускать.

Подставляя в левую часть последнего равенства выражения $\{q\}$ и $\{R\}$ из формул (4.22) и (4.23), получаем

$$\{q\}^T [T]^T [T] \{R\} = \{q\}^* \{R\}^* \quad (4.27)$$

Откуда следует, что

$$[T]^T [T] = [E], \quad (4.28)$$

где $[E]$ — единичная матрица.

Следовательно, $[T]^T = [T]$, что и требовалось доказать.

Тогда зависимость (4.24) можно переписать в виде

$$\{R\}^* = [K^*] \{q\}^*, \quad (4.29)$$

где

$$[K^*] = [T]^T [K] [T] \quad (4.30)$$

— матрица жесткости конечного элемента в системе координат $x^* y^* z^*$. Формулой (4.30) можно воспользоваться для определения матрицы жесткости конечного элемента при переходе от местной системы координат к общей системе.

§ 5

Метод сил

Анализ метода конечных элементов в форме метода сил мы начнем с уравнения связи между узловыми силами и перемещениями i -го элемента (3.1):

$$\{R\}_i = [K]_i \{q\}_i \quad (5.1)$$

Для определения неизвестных узловых усилий нам нужно будет составлять уравнения совместности перемещений в узловых точках. Входящие в эти уравнения компоненты узловых перемещений следует выражать через узловые усилия.

В § 3 уже отмечалось, что использование для этих целей зависимости (5.1) невозможно, так как матрица жесткости $[K]_i$ является матрицей особенной.

Налагая на конечный элемент определенное число кинематических связей, которые ликвидируют его перемещение как абсолютно твердого тела, мы уменьшаем число уравнений (5.1) на число степеней свободы элемента (3.14):

$$\{R^*\}_i = [K^*]_i \{q^*\}_i \quad (5.2)$$

Матрица $[K^*]_i$ уже не будет особенной и допустит операцию обращения

$$\{q^*\}_i = [F]_i \{R^*\}_i \quad (5.3)$$

где $[F]_i = [K^*]_i^{-1}$ — матрица податливости i -го конечного элемента.

Заметим, что выражение для матрицы $[F]_i$ зависит от выбора основной системы сил $\{R^*\}_i$.

Матрицы $\{q^*\}_i$ определяются лишь «упругие» перемещения. Для определения полных перемещений необходимо к найденным упругим перемещениям добавить перемещения соответствующего элемента как абсолютно твердого тела.

После определения вектора $\{R^*\}_i$ остаются часть условий равновесия определяется из соответствующих уравнений равновесия для конечных элементов.



Рис. 1.20. К жесткой матрице податливости. Для элемента стержня при осевом растяжении-сжатии. a — метод перемещений; q^* — для варианта метода сил.



Как уже говорилось, общее число неизвестных в методе сил, как правило, оказывается большим, чем в методе перемещений, хотя порядок матрицы податливости $[F]_i$ меньше порядка матрицы жесткости $[K]_i$. Поэтому в расчетной практике преимущественно используется метод перемещений.

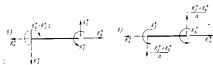
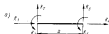


Рис. 1.21. Элемент балки (а) катки с растяжением (б) и для варианта (б, в) основной системы сил для получения матрицы податливости.

Для примера покажем получение матрицы податливости для элемента стержня при растяжении-сжатии (рис. 1.20).

Уравнение (5.1) для этого случая принимает вид

$$\begin{Bmatrix} R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix} = \frac{EF}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

где EF — жесткость стержня на растяжение-сжатие; a — длина элемента стержня.

Для исключения перемещений элемента стержня как абсолютно жесткого целого мы должны принять либо $q_1 = 0$, либо $q_2 = 0$. Принимая, например, $q_1 = 0$, получаем

$$q_2^* = \{R^*\}. \quad (5.5)$$

где $f = \frac{a}{EF}$ — матрица податливости, состоящая в рассматриваемом случае из одного элемента.

Для элемента балки, работающего на изгиб, имеется несколько возможностей выбора основной системы при выводе матрицы податливости. Две из них показаны на рис. 1.21, б и в.

Уравнения (5.1) для этого случая принимают вид

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EF}{a} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{a^3} & & & & \\ & & \text{Симметрично} & & & \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & & & \\ -\frac{EF}{a} & 0 & 0 & \frac{EF}{a} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & \frac{12EI}{a^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

В случае принятия основной схемы сил согласно рис. 1.21, б, что соответствует работе балки как жестко заделанной консоли ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$), уравнение (5.8) запишется в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^3}{3EI} & \frac{a^2}{2EI} \\ 0 & \frac{a^2}{2EI} & \frac{a}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

или, в матричной форме, для i -го элемента

$$\{q^*\}_i = \{F\}_i \{R^*\}_i, \quad (5.8)$$

где $\{F\}_i$ — матрица податливости i -го элемента балки при его кинематическом закреплении согласно рис. 1.21, б.

Принимая во внимание зависимость (5.7), а также кинематическое закрепление конечного элемента $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, непосредственно из (5.6) можем получить связь между усилиями $\{R\}$ и $\{R^*\}$:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

или, в матричной форме, для i -го элемента

$$\{R\}_i = \{B\}_i \{R^*\}_i. \quad (5.10)$$

Выбирая далее в качестве основной системы сил систему, изображенную на рис. 1.21, в, получаем

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{3EI} & \frac{a}{6EI} \\ 0 & \frac{a}{6EI} & \frac{a}{3EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Связь между векторами $\{R\}$ и $\{R^*\}$ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & -1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Естественно, что возможны и другие условия закрепления элемента балки, при которых будем получать соответственно другие матрицы податливости.

Уравнения типа (5.8) и (5.10) можно записать для каждого элемента конструкции. Тогда для всей конструкции, состоящей из n элементов, получим следующие матричные уравнения:

$$\{q^*\} = \{F\} \{R^*\}, \quad (5.13)$$

$$\{R\} = \{B\} \{R^*\}, \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \{q^*\} &= \{ \{q^*\}_1, \{q^*\}_2, \dots, \{q^*\}_n \}, \\ \{F\} &= \{ \{F\}_1, \{F\}_2, \dots, \{F\}_n \}, \\ \{R^*\} &= \{ \{R^*\}_1, \{R^*\}_2, \dots, \{R^*\}_n \}, \\ \{R\} &= \{ \{R\}_1, \{R\}_2, \dots, \{R\}_n \}, \\ \{B\} &= \{ \{B\}_1, \{B\}_2, \dots, \{B\}_n \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Если теперь на конструкцию дополнительно действуют внешние силы $\{P\}$, приведенные к узловому виду по направлениям вектора $\{q^*\}$, то суммарные перемещения узлов конструкции будут равны

$$\{q\} = \{F\} \{R^*\} + \{F\} \{P\}. \quad (5.16)$$

Введем в рассмотрение вектор лишних неизвестных $\{\bar{R}\}$ в общей системе координат. Из непосредственного рассмотрения векторов $\{R^*\}$ и $\{\bar{R}\}$ нетрудно установить связь между ними:

$$\{R^*\} = [A] \{\bar{R}\}. \quad (5.17)$$

Умножив (5.16) слева на матрицу $[A]^T$ с учетом зависимости (5.17), можем получить

$$[A]^T \{q\} = \{F\} \{\bar{R}\} + [A]^T \{F\} \{P\}, \quad (5.18)$$

где $\{F\} = [A]^T \{F\} [A]$ — общая матрица податливости всей конструкции в общей системе координат.

Заметим далее, что левая часть уравнения (5.18) представляет собою суммарные узловые перемещения в общей системе координат, которые на основании условий неразрывности должны быть равны нулю, находим искомого матричного уравнение совместности деформаций:

$$\{F\} \{\bar{R}\} + [A]^T \{F\} \{P\} = 0. \quad (5.19)$$

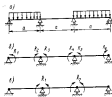


Рис. 1.22. Метод трех моментов для неразрывной балки: а — схема балки; б — узловые условия балки; в — условия связи основной системы.



Рис. 1.23. Дискретный момент неразрывной балки.

Пример. Все матричные операции метода сил, основанного на использовании уравнений (5.19), графоиллюстрируем примером расчета балки, изображенной на рис. 1.22.

Матрица податливости для элемента балки (рис. 1.22)

$$\{F\} = \frac{a}{2EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

(i = 1, 2, 3)

Квадратная матрица податливости $\{F\}$ для всей неразрывной балки

$$\{F\} = \frac{a}{2EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Выразим для вектора $\{P\}$ в связи между узловыми системами базис $\{R^*\}$ (см. рис. 1.22, б) в узловых системах основной системы $\{R\}$ (рис. 1.22, в) в каждом случае запишется так:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \frac{qa^2}{8} & -\frac{qa^2}{8} & 0 & 0 & -\frac{qa^2}{8} & -\frac{qa^2}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \quad (5.22)$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = [A] \{R\}. \quad (5.23)$$

Тогда общая матрица податливости конструкции

$$[F] = [A]^T [F^*] [A] = \frac{a}{24EI} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{a}{24EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Выясним второй член в уравнении (5.19):

$$[A]^T \{F\} \{P\} = \frac{a}{24EI} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{qa^2}{8} \\ -\frac{qa^2}{8} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qa^2}{8} \\ -\frac{qa^2}{8} \end{bmatrix} = -\frac{qa^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Внесем полученные результаты (5.24) и (5.25) в уравнение (5.18), получим

$$\frac{a}{24EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} - \frac{qa^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (5.26)$$

откуда

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \frac{qa^2}{20}. \quad (5.27)$$

Из приведенного примера видно, что в методе сил, по сравнению с методом перемещений, показателю позавиднее трудоемкая численная процедура нахождения вектора перемещений от внешней нагрузки. В методе же перемещений вторая часть общего уравнения (5.1), в случае сосредоточенных узловых сил, состоит непосредственно из величин этих сил.

Сопоставление метода сил и метода перемещений. Рассмотрев выше два возможных варианта метода конечных элементов в виде метода сил (МС) и метода перемещений (МП), естественно задать вопрос: какой же метод предпочтительнее?

Сопоставим отдельные стороны этих методов.

1. Теоретически оба метода дают одинаковый результат. Вычислительные же трудности в обоих вариантах различны (зависят в виду ошибок округления и возможности разной обусловленности уравнений), поэтому результаты могут также различаться.

2. Метод перемещений основан на решении простого матричного уравнения (4.29), связывающего внешние силы с узловыми перемещениями конструкции $\{q\}$. При этом чрезвычайно важными обстоятельствами являются простота и стандартность как выбора основной системы, так и формирования общей матрицы жесткости $[K]$. Отметим, что МП дает всегда одну-единственную возможную основную систему, тогда как в МС основных систем для данного конечного элемента может быть выбрано несколько. При этом в последнем случае неудачный выбор основной системы может привести к плохо обусловленной общей матрице податливости конструкции $[F]$.

3. Как было показано выше, в МС требуется дополнительная и довольно сложная численная процедура получения второй части системы уравнений, тогда как в МП эта операция, по существу, отсутствует.

4. Для некоторых специальных конструкций, особенно если выбор основной системы МС может быть автоматизирован, МС может быть использован весьма эффективно. Более того, для некоторых конструкций МС дает меньшее количество неизвестных, чем МП; и напряженности получаются сразу же после решения системы уравнений, а следовательно, и более точно, чем при прочих равных условиях в МП.

И все же, в целом МП для решения произвольных сложных конструкций дает численные процедуры значительно более простые и стандартные, а с этим связаны простота алгоритмизации и программирования и большая универсальность метода конечных элементов в варианте метода перемещений. Эти обстоятельства и оказались

решениями для окончательного выбора МП в качестве основного варианта, который мы выше и принимаем на протяжении всей книги. Правильность такого выбора подтвердила практика массового использования универсальной программы МКЭ в варианте МП [11].

§ 8

Приведение объемных и поверхностных сил, а также начальных деформаций к эквивалентным узловым внешним силам

При составлении уравнений равновесия узлов в методе перемещений предполагалось, что все внешние силы приложены к узлам.

Предположим теперь, что помимо узловых внешних сил на рассматриваемый элемент действуют объемные силы интенсивностью $\{F_v\} = \{X_v Y_v Z_v\}$ и поверхностные силы интенсивностью $\{F_s\} = \{X_s Y_s Z_s\}$. Кроме того, рассматриваемый элемент имеет начальные деформации $\{\epsilon^0\} = \{\epsilon_{xx}^0 \epsilon_{yy}^0 \dots \epsilon_{xy}^0\}$, которые могут быть вызваны, например, температурным воздействием.

Для определения эквивалентных узловых сил поступим следующим образом. Дадим перемещение элементу $\{U\} = \{u \ v \ w\}$ малые вариации $\{\delta U\} = \{\delta u \ \delta v \ \delta w\}$ и найдем работу по объему конечного элемента указанных выше сил на этих вариациях:

$$\delta Q = \int_V \{\delta U\}^T \{F_v\} dV + \int_S \{\delta U\}^T \{F_s\} dS + \int_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma^0\} dV. \quad (6.1)$$

Второй интеграл в правой части выражения (6.1) берется по поверхности конечного элемента. Если далее учесть, что на основании зависимостей (3.2), (3.3) и закона Гука $\{\sigma\} = [E_s] \{\epsilon\}$

$$\left. \begin{aligned} \{\delta U\}^T &= \{\delta q\}^T [B]^T, \\ \{\delta \epsilon\}^T &= \{\delta q\}^T [D]^T, \\ \{\sigma^0\} &= [E_s] \{\epsilon^0\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

то правую часть выражения (6.1) можно переписать в виде

$$\delta Q = \{\delta q\}^T \int_V [B]^T \{F_v\} dV + \{\delta q\}^T \int_S [B]^T \{F_s\} dS + \{\delta q\}^T \int_V [D]^T [E_s] \{\epsilon^0\} dV. \quad (6.3)$$

В полученном выражении коэффициенты, стоящие при вариациях узловых перемещений $\{\delta q\}$, и будут представлять матрицу эквивалентных узловых усилий:

$$\{P_v\} = \int_V [B]^T \{F_v\} dV; \quad (6.4)$$

от действия поверхностных сил интенсивностью $\{F_s\}$

$$\{P_s\} = \int_S [B]^T \{F_s\} dS, \quad (6.5)$$

а вследствие учета начальных деформаций $\{\epsilon^0\}$

$$\{P_{\epsilon^0}\} = \int_V [D]^T [E_s] \{\epsilon^0\} dV. \quad (6.6)$$

Таким образом, если на отдельные конечные элементы действуют внешние объемные и поверхностные силы и имеется начальное деформированное состояние, то при составлении уравнения равновесия произвольного i -го узла [с-е уравнение системы (4.17)] вместо узловой силы $\{P_i\}$ следует ввести величину

$$\{\bar{P}_i\} = \{P_i\} + \sum_j \{P_j^0\} + P_i^0 + P_i^{\epsilon^0}. \quad (6.7)$$

В формуле (6.7) суммирование производится по всем элементам, сходившимся в i -м узле.

Заметим, что при учете начальных деформаций компоненты напряжения $\{\sigma\}$ в каждом из элементов будут определяться с помощью зависимости

$$\{\sigma\} = [E_s] \{\epsilon - \epsilon^0\}$$

или, если принять во внимание зависимость (4.1),

$$\{\sigma\} = [E] \{q\} - [E_s] \{\epsilon^0\}. \quad (6.8)$$

Приведенный выше вывод выражений (6.4), (6.5) и (6.6) для эквивалентных узловых усилий был основан на равенстве работ, совершаемых действующей на элемент внешней нагрузкой и эквивалентными ей узловыми усилиями на соответствующих возможных перемещениях.

Естественно, что точность замены внешних нагрузок эквивалентными узловыми усилиями во многом зависит от того, насколько удачно выбранное выражение (3.2) для перемещений $\{U\}$ отображает действительный характер перемещений по объему рассматриваемого конечного элемента.

§ 9

Учет геометрической и физической нелинейности при расчете конструкций

Для типа нелинейности встречаются при расчете конструкций. Первый тип связан с нелинейностью зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$, которой характеризуется материал конструкции в упруго-пластической области или при учете изменения механических свойств материала во времени (ползучесть). Второй тип связан с геометрической нелинейностью и имеет место, когда перемещения конструкции вызывают

значительные изменения геометрии, так что уравнения равновесия приходится составлять уже для деформированного состояния.

Методы расчета конструкций, изложенные выше для линейных систем, могут быть использованы и при учете геометрической и физической нелинейности. Учет любого из этих двух типов нелинейности приводит к получению разрывной системы уравнений, содержащей нелинейно относительно определяемых основных неизвестных члены. Присутствие в уравнениях нелинейных членов не позволяет получить их решение в замкнутом виде, поэтому тому, как это обычно делается при расчете линейных систем. Здесь приходится использовать различные процедуры последовательных приближений.

При учете физической нелинейности связь между вектором нагрузок $\{p\}$ и вектором деформаций $\{e\}$ можно представить в виде

$$\{e\} = [E_e(q)] \{e\}, \quad (7.1)$$

где значимая матрица $[E_e]$ будет некоторой функцией подлежащего определению деформированного состояния $\{e\}$, которое, как известно, в методе конечных элементов является однозначной функцией узловых перемещений $\{q\}$. Последнее позволяет перенести зависимость (7.1) так:

$$\{e\} = [E(q)] \{q\}. \quad (7.2)$$

В общем случае каждый элемент матрицы $[E(q)]$ можно представить в виде степенного полинома от компонентов вектора $\{q\}$. Учет геометрической нелинейности приводит к тому, что зависимость (3.3) между $\{e\}$ и $\{q\}$ перестает быть линейной:

$$\{e\} = [D(q)] \{q\}. \quad (7.3)$$

Элементы матрицы $[D(q)]$ являются степенными функциями компонентов вектора $\{q\}$ для рассматриваемого конечного элемента. Если теперь воспользоваться принципом возможных перемещений в форме зависимости (3.6) и учесть, что в рассматриваемом случае

$$\delta e_i = [D^*] \delta q_i, \quad (7.4)$$

где $[D^*]$ — матрица, элементы которой определяются по формуле

$$d_{ij}^* = d_{ij} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} q_k, \quad (7.5)$$

d_{ij} — элемент матрицы $[D]$, то для определения матрицы жесткости получим вместо (3.8) выражение вида

$$[K^*] = \int [D^*]^T [E] dV. \quad (7.6)$$

С вводом в рассмотрение матрицы $[K^*]$ зависимость между узловыми усилиями и узловыми перемещениями для i -го конечного элемента

$$[K^*]_i \{q\}_i, \quad (7.7)$$

при учете физической и геометрической нелинейности перестает быть линейной, так как значение матрицы жесткости $[K^*]$ находится в зависимости от узловых перемещений.

Располагая значением матрицы жесткости $[K^*]$ для i -го элемента, по формуле (4.18) можно построить общую матрицу жесткости $[K^*]$ для всей конструкции. При этом основные матричные уравнения (4.17) для определения неизвестных узловых перемещений переписываются в виде

$$[K^*] \{q\} = \{P\}. \quad (7.8)$$

Значение матрицы $[K^*]$ зависит не только от геометрических параметров конструкции, но и от ее напряженно-деформированного состояния, выражаемого через узловые перемещения. Именно это обстоятельство и приводит к тому, что решение системы (7.8) может быть получено лишь с помощью итерационных методов. Остановимся на некоторых наиболее употребительных из них.

Метод последовательных приближений. Суть этого метода состоит в том, что общая матрица $[K^*]$ на каждом этапе решения системы (7.8) определяется через узловые перемещения, полученные на предыдущем этапе:

$$[K^*]^{(s)} \{q^{(s)}\} = \{P\}, \quad (7.9)$$

где s — номер этапа приближения.

На 1-м этапе ($s = 1$) значения узловых перемещений, от которых зависит отдельные элементы матрицы жесткости $[K^*]$, следует положить равными нулю. Последнее приводит к тому, что все члены, связанные с учетом геометрической или физической нелинейности, обращаются в нуль, и мы получаем обычную упругую матрицу $[K]$.

Процесс последовательных решений уравнения (7.9), с помощью которого значения матрицы жесткости $[K^*]$ на каждом этапе продолжается до тех пор, пока разница между результатами решения, полученными на данном и предыдущем этапах приближения не будет достаточно малой (рис. 1.24).

Описанный выше процесс последовательных приближений при всей своей простоте обладает тем существенным недостатком, что при сильной нелинейности оказывается слабо сходящимся, а иногда и расходящимся.

Метод уругих решений. Этот метод приводит к определенному уменьшению общей трудоемкости вычислительных операций по сравнению с предыдущим методом. Он основан на выделении из



Рис. 1.24. Процедура метода последовательных приближений при расчете нелинейных систем.

матрицу жесткости системы $[\bar{K}^*]$ ее узловой составляющей $[\bar{K}]$:

$$[\bar{K}^*] = [\bar{K}] + [\bar{K}]_{\text{мат.}} \quad (7.10)$$

где второй член в правой части полностью связан с наличием нелинейности в рассматриваемой конструкции.

Принимая далее во внимание зависимость (7.10), уравнение (7.8) можно переписать в следующем виде:

$$[\bar{K}^*] \{\bar{q}\} = [\bar{P}] - [\bar{K}]_{\text{мат.}} \{\bar{q}\}. \quad (7.11)$$

К решению матричного уравнения (7.11) можно применить процедуру последовательных приближений согласно следующему алгоритму:

$$[\bar{K}] \{\bar{q}^{(1)}\} = [\bar{P}]^{(1)}, \quad (7.12)$$

где

$$[\bar{P}]^{(s-1)} = [\bar{P}] - [\bar{K} \{\bar{q}^{(s-1)}\}]_{\text{мат.}} \{\bar{q}^{(s-1)}\}, \quad (7.13)$$

Таким образом, на каждом этапе последовательных приближений нам придется решить систему линейных алгебраических уравнений (7.12) с постоянными коэффициентами в правых частях, значения которых [см. выражение (7.13)] уточняются с помощью результатов, полученных в предыдущем этапе. Процедура метода показана на рис. 7.25.

Рис. 7.25. Процедура метода узловой жесткости.

Шаговый метод нагружения. Введем в уравнение (7.8) для удобства дальнейших рассуждений параметр нагрузки λ , изменяющийся в пределах от 0 до 1. Тогда

$$[\bar{K}^*] \{\bar{q}\} = \lambda [\bar{P}]. \quad (7.14)$$

Разобьем весь интервал изменения λ на ряд отдельных участков: 0, λ_1 , λ_2 , ..., λ_s , $\lambda_s = 1$.

Запишем уравнение (7.14) для s -го и $s+1$ -го шага нагружения:

$$[\bar{K}^{(s)}] \{\bar{q}^{(s)}\} = \lambda_s [\bar{P}], \quad (7.15)$$

$$[\bar{K}^{(s+1)}] \{\bar{q}^{(s+1)}\} = \lambda_{s+1} [\bar{P}]. \quad (7.16)$$

Рассматривая матрицу жесткости $[\bar{K}^*]$ в качестве сложной функции узловых перемещений и раскладывая значения этой матрицы в ряд Тейлора, можно, в частности, получить выражение

$$[\bar{K}^{(s+1)}] \approx [\bar{K}^{(s)}] + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial [\bar{K}]}{\partial q_k} \right]_{\{\bar{q}\}=\{\bar{q}^{(s)}\}} d\bar{q}_k^{(s+1)}, \quad (7.17)$$

$$d\bar{q}_k^{(s+1)} = \bar{q}_k^{(s+1)} - \bar{q}_k^{(s)}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7.18)$$

или, в матричной форме,

$$[d\bar{q}^{(s+1)}] = [\bar{q}^{(s+1)}] - [\bar{q}^{(s)}]. \quad (7.19)$$

Вычитая из уравнения (7.16) уравнение (7.15) и применяя во внимание разложение (7.17) и обозначение (7.19), можно найти

$$[\bar{K}^{(s)}] [d\bar{q}^{(s+1)}] + \left[\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial [\bar{K}]}{\partial q_k} \right] d\bar{q}_k^{(s+1)} \right] \{\bar{q}^{(s)}\} \approx (\lambda_{s+1} - \lambda_s) [\bar{P}]. \quad (7.20)$$

Второй член в левой части последнего уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial [\bar{K}]}{\partial q_k} \right] d\bar{q}_k^{(s+1)} \right] \{\bar{q}^{(s)}\} - \left[\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial q_k} \right] d\bar{q}_k^{(s+1)} \right] \{\bar{q}^{(s)}\} = \\ & - \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial q_k} d\bar{q}_k^{(s+1)} \bar{q}_j^{(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial q_k} \bar{q}_j^{(s)} \right] d\bar{q}_k^{(s+1)} = \\ & = \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial q_k} \bar{q}_j^{(s)} \right] [d\bar{q}^{(s+1)}] = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ik}}{\partial q_k} \bar{q}_k^{(s)} \right] [d\bar{q}^{(s+1)}] = \\ & = [\Delta \bar{K}^{(s)}] [d\bar{q}^{(s+1)}], \quad (7.21) \end{aligned}$$

где $[\Delta \bar{K}^{(s)}]$ — матрица, элементы которой определяются по формуле

$$\Delta \bar{K}_{ij}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ik}}{\partial q_k} \bar{q}_k^{(s)}. \quad (7.22)$$

Здесь $\frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial q_k}$ есть значение частной производной от элемента \bar{K}_{ij} матрицы $[\bar{K}]$ по узловой координате q_k при $\{\bar{q}\} = \{\bar{q}^{(s)}\}$.

С учетом результата (7.22) уравнение (7.20) можно переписать так:

$$[\bar{K}^{(s)} + \Delta \bar{K}^{(s)}] [d\bar{q}^{(s+1)}] = (\lambda_{s+1} - \lambda_s) [\bar{P}]. \quad (7.23)$$

С помощью зависимости (7.23) последовательно переходя от узловой ступени нагружения ($s=0$) к первой ($s=1$), от первой к



Рис. 7.26. Процедура шагового метода нагружения.

второй ($s = 2$) и т. д., легко получать значение вектора узловых перемещений $\{\bar{q}\}$ при интересующем нас значении $\lambda_y = 1$.

Матрицы $[K^{(s)}]$ и $\{\Delta K^{(s)}\}$ определяются однозначно через вектор $\{\bar{q}^{(s)}\}$. Заметим, что значение $\{\bar{q}\}$ на каждой ступени нагружения согласно зависимости (7.19) определяется по формуле

$$\{\bar{q}^{(s+1)}\} = \{\bar{q}^{(s)}\} + \{\Delta \bar{q}^{(s+1)}\}.$$

Последовательность операций шагового метода легко прослеживается из рис. 1.26.

§ 8

Общая схема использования метода конечных элементов в расчете конструкций

Основные этапы МКЭ в форме метода перемещений (рис. 1.27) состоят в следующем:

1. Задаче исходной информации, которая должна включать: а) расположение узловых точек в общей системе координат; б) взаимное расположение конечных элементов (топологию конструкции). Более детально об этом будет сказано в гл. III; в) значения геометрических и жесткостных параметров каждого из элементов конструкции.

2. Определение положения узловых точек элементов в местной системе координат.

3. Нахождение матрицы жесткости для элемента в местной системе координат $[K^*]$.

4. Вычисление направляющих косинусов для каждого элемента и матрицы преобразования перемещений элемента из местной системы координат в общую $[T^*]$.

5. Определение матрицы жесткости элемента в общей системе координат $[K^*] = [T^*]^T [K^*] [T^*]$.

6. Нахождение общей матрицы жесткости для всей конструкции $[K]$.

7. Нахождение на конструкцию определенного числа сил, исключая тех ее перемещений как абсолютно жестного тела. Последнее приводит к получению некоторой урезанной общей матрицы жесткости $[K^*]$.

8. Приведение поверхностных и объемных сил к эквивалентным узловым силам $[P_u]_i$ и $[P_v]_i$.

9. Вычисление суммарных узловых сил в каждом i -м узле $P^{(i)} = P^{(i)} + P_v^{(i)} + P_u^{(i)}$.

10. Определение обратной матрицы $[K^*]^{-1}$.

11. Нахождение узловых перемещений конструкции $\{\bar{q}\} = [K^*]^{-1} \{P\}$.

12. Определение узловых перемещений и напряженного состояния для конечного элемента.

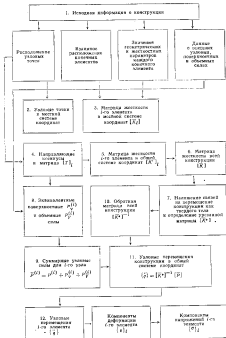


Рис. 1.27. Общая блок-схема расчета конструкций по методу конечных элементов.

Попытаемся установить связь между методом конечных элементов и методом Рунга [60, 67, 155]. Полупоту выясним, в чем состоит специфика метода конечных элементов по сравнению с методом Рунга.

На основании принципа возможных перемещений для системы, находящейся в положении равновесия, должно быть справедливо следующее равенство:

$$\int (\sigma_x \delta u_x + \sigma_y \delta u_y + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz - \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz - \int (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) d\Omega = 0. \quad (9.1)$$

Входящие в зависимость (9.1) обозначения уже встречались ранее. Используя матричную запись для компонентов перемещений, деформаций и напряжений, равенство (9.1) можно записать в виде

$$\int \{\delta u\}^T \{\sigma\} dV - \int \{\delta U\}^T \{X\} dV - \int \{\delta U\}^T \{S\} d\Omega = 0, \quad (9.2)$$

где

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}\}, \\ \{U\} &= \{u, v, w\}, \quad \{X\} = \{X, Y, Z\}, \\ \{S\} &= \{X_n, Y_n, Z_n\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

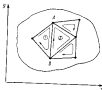


Рис. 1.28. К составлению выражения для потенциальной энергии выделенной части тела.

Разобьем мысленно весь объем рассматриваемого тела на конечные элементы (рис. 1.28). Каждый из элементов будет находиться под воздействием приложенной к нему внешней нагрузки и усилий взаимодействия со смежными элементами. Эти усилия взаимодействия по характеру тождественны внешним поверхностным нагрузкам. Если тело в целом находится в равновесии, то и каждый его i -й элемент при воздействии на него вышеупомянутых усилий также будет находиться в равновесии, и для него на основании принципа возможных перемещений можно выписать уравнение, аналогичное выражению (9.2),

$$\int_V \{\delta u\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta U\}^T \{X\} dV - \int_{S_1} \{\delta U\}^T \{S'\}_1 d\Omega' - \int_{S_2} \{\delta U\}^T \{S''\}_2 d\Omega'' = 0, \quad (9.4)$$

Индекс i указывает на связь величины с рассмотренным i -го конечным элементом.

При записи уравнения (9.4) площадь наружной поверхности i -го элемента S_i была разделена на две части: S'_i — наружная поверхность элемента, которая одновременно является частью наружной поверхности рассматриваемого тела в целом; S''_i — часть наружной поверхности элемента, образованная при расчленении тела на конечные элементы. В соответствии с этим в выражении (9.4) через $\{S'\}_i$ обозначена поверхностная нагрузка, действующая на тело и приходящая на часть поверхности i -го элемента S'_i , а через $\{S''\}_i$ — усилия взаимодействия со стороны примыкающих к рассматриваемому i -му элементу смежных элементов.

Просуммируем выражение (9.4) по всем i конечным элементам тела:

$$\sum_{i=1}^n \int_V \{\delta u\}^T \{\sigma\}_i dV - \sum_{i=1}^n \int_V \{\delta U\}^T \{X\}_i dV - \sum_{i=1}^n \int_{S'_i} \{\delta U\}^T \{S'\}_i d\Omega' - \sum_{i=1}^n \int_{S''_i} \{\delta U\}^T \{S''\}_i d\Omega'' = 0, \quad (9.5)$$

Легко видеть, что первые три члена в левой части выражения (9.5) в точности равны соответствующим членам в зависимости (9.2). Таким образом, разделение целого тела на конечные элементы с последующим составлением уравнений вида (9.4), а затем уравнения (9.5) приводит к выделению в его левой части дополнительного члена (он подчеркнут сплошной линией). Легко показать, что для сплошного тела, внутри которого выполняются условия равновесия и сплошности, этот член обращается в нуль. В самом деле, для любого участка линии раздела двух смежных элементов (например, вдоль линии AB на рис. 1.28) в последнем члене левой части уравнения (9.5) будут присутствовать два следующих члена:

$$\int_A^B (X_n^{(1)} \delta u^{(1)} + Y_n^{(1)} \delta v^{(1)}) ds + \int_B^A (X_n^{(2)} \delta u^{(2)} + Y_n^{(2)} \delta v^{(2)}) ds, \quad (9.6)$$

где через $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$, $\delta u^{(1)}$, $\delta v^{(1)}$ обозначены соответственно проекция усилий и вариации перемещений вдоль линии контура AB, принадлежащей i -му конечному элементу ($i = 1; 2$).

При выполнении всех условий сплошности и равновесия внутри объема целого тела

$$X_n^{(1)} = X_n^{(2)}, \dots, \delta u^{(2)} = \delta u^{(1)}, \dots;$$

это приводит к тому, что члены в уравнении (9.6) взаимно уничтожаются. В результате четвертый член в левой части (9.5) обращается в нуль.

При использовании метода конечных элементов, основанного на определенной аппроксимации напряженно-деформированного состояния или компонентов перемещений по объему конечного элемента, как правило, некоторые из компонентов перемещения или напряжения на границах раздела двух смежных элементов терпят разрыв. В результате четвертый член в выражениях (9.4), появившись которого связано с представлением рассматриваемого тела в виде совокупности конечных элементов, оказывается не равным нулю, а напряженное состояние элемента, определяемое с помощью (9.4), — отличным от истинного напряженного состояния.

Особое внимание следует обращать на условия совместности перемещений. При наличии разрывов в перемещениях (или углах поворота для задач изгиба пластин) нельзя быть уверенным в том, что увеличение числа конечных элементов приведет к уменьшению четвертого члена в зависимости (9.5) т. е., к получению точного решения. При несоблюдении условий непрерывности вдоль линий стыкования смежных элементов может оказаться, что увеличение числа конечных элементов приведет к тому, что решение асимптотически будет приближаться к какому-то значению, но отличному от точного.

При нарушении вдоль линий стыкования элементов лишь силовых условий увеличения размера конечных элементов всегда ведет к уменьшению погрешности решения.

Вернемся вновь к уравнению (9.5) и покажем, что из него может быть получено основное матричное уравнение метода конечных элементов (4.17).

В этом уравнении каждый i -й член первой суммы представляет собою вариацию потенциальной энергии i -го элемента δV_i , определенную по формуле (4.13), а каждый i -й член в последующих суммах соответственно равен приращению работы объемных сил, заданных поверхностями и поверхностных сил взаимодействия на возможном перемещении i -го элемента.

Используя выражение (4.13) для δV_i , а также формулы приведения объемных и поверхностных сил к узловым [(6.4) и (6.5)], можно переписать выражение (9.4) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n [\delta q_i]^T [K_i] \{q_i\} - \sum_{i=1}^n \{\delta q_i\}^T \{P^*\}_i = 0, \quad (9.7)$$

где

$$\{P^*\}_i = \{P_V\}_i + \{P_X\}_i + \{P_Z\}_i. \quad (9.8)$$

Здесь $\{P_V\}_i$, $\{P_X\}_i$ и $\{P_Z\}_i$ суть векторы узловых усилий, эквивалентных соответственно действию на i -й конечный элемент объемных $\{X\}_i$ и поверхностных $\{S^*\}_i$ и $\{S^T\}_i$ сил.

Если далее воспользоваться обозначениями (4.4), то уравнение (9.7) можно привести к виду

$$[\delta \bar{q}]^T [K_d] \{\bar{q}\} - [\delta \bar{q}]^T \{\bar{P}\} = 0, \quad (9.9)$$

Воспользовавшись зависимостью (4.8) между вектором узловых перемещений всей конструкции в местной системе координат $\{q\}$ и вектором узловых перемещений в общей системе координат $\{\bar{q}\}$

$$\{q\} = [H] \{\bar{q}\}, \quad (9.10)$$

уравнение (9.9) перепишем так:

$$[\delta \bar{q}]^T [H]^T [K_d] [H] \{\bar{q}\} - [\delta \bar{q}]^T [H]^T \{\bar{P}\} = 0. \quad (9.11)$$

Откуда получим

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = 0, \quad (9.12)$$

где $[\bar{K}] = [H]^T [K_d] [H]$ — общая матрица жесткости конструкции в общей системе координат;

$$\{\bar{P}\} = [H]^T \{P\} \quad (9.13)$$

— вектор узловых усилий для всей конструкции в общей системе координат.

Уравнение (9.12) есть уравнение метода конечных элементов при выборе в качестве неизвестных узловых перемещений [см. выражение (4.17)], что и доказывает общность вариационного метода Рунда и метода конечных элементов.

Специфическим для метода конечных элементов является лишь выбор координатных функций: здесь изменение любого из узловых перемещений сопровождается на изменении поля перемещений лишь по объему сходящихся в этом узле конечных элементов. На рис. 1.29 для плоской задачи изображена совокупность конечных элементов, сходящихся в i -м узле. Легко понять, что смещение i -го узла вызывает смещение по всей области, занятой примыкающими к этому узлу элементами.

Для метода же Рунда изменение любой из координатных функций вызывает изменение перемещений по всему объему конструкции.

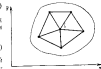


Рис. 1.29. Совместность конечных элементов, сходящихся в i -й узловой точке.



РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

За последнее время благодаря применению ЭВМ интерес к стержневым системам возрос, и не только с точки зрения расчета чисто стержневых систем, но и в связи с открывавшимися возможностями решения континуальных объектов и массивных тел на основе их идеализации стержневыми моделями. Кроме того, такой распространенный класс задач, как осесимметричные оболочки вращения, описываются функциями одной переменной, а следовательно, сводятся к одномерным задачам путем замены их соответствующей стержневой моделью.

В работах Дж. Аргираса [5], Р. Клафа [23, 100], М. Н. Длугача [18], А. В. Александрова [3], А. Хренникова [90] и др. приведены различные стержневые модели для решения плоской задачи теории упругости, гибки пластин и оболочек некоторых видов.

А. П. Филин [84] рассмотрел жесткостную замену оболочек стержневой моделью, исходя из чисто физических соображений, причем он показал, что стержневая система в предельном случае может перейти в оболочку. А. Р. Ризановым [63] вывел стержневую модель для решения пространственной задачи теории упругости. Строгое обоснование выбора стержневой модели при расчете пластин и оболочек дано в работах Л. А. Розина [65].

Таким образом, дискретные стержневые модели позволяют приблизительно описать поведение континуальных упругих систем (пластин, оболочек, объемных тел и т. д.).

В настоящее время имеется довольно много численных алгоритмов и программ для анализа стержневых систем. Все они, однако, имеют много существенных ограничений как в отношении объема расчетной схемы, так и в отношении класса решаемой задачи. Универсальный алгоритм и программа метода конечных элементов [11] для расчета упругих систем (в том числе и стержневых) являются, на наш взгляд, наиболее эффективным способом решения задач прочности упругих систем с помощью ЭВМ.

Метод конечных элементов не вносит принципиально новых приемов в анализ стержневых систем по сравнению с классическим методом перемещений, однако наличие готовых программ существенно

увеличивает эффективность его использования для решения указанных задач с помощью ЭВМ.

Не останавливаясь подробно на основах использования МКЭ применительно к рассматриваемым в этой главе задачам, мы укажем лишь на некоторые его особенности, приведем несколько типичных жесткостей для разных стержневых элементов и некоторые числовые примеры для иллюстрации.

В МКЭ понятие «основной системы» и «лишних неизвестных» получили более общую трактовку. Элементом может являться не только стержень между узлами, но и любая его часть, а понятие «лишние неизвестные» вообще потеряло свой первоначальный смысл, так как в МКЭ отсутствует различия в расчетах конструкций статически определяемых и статически неопределяемых.

Применение обычных методов строительной механики для расчета достаточно сложных стержневых конструкций, отдельные стержни которых имеют переменную жесткость, оказывается затруднительным. При использовании метода конечных элементов каждый стержень конструкции по длине между двумя смежными узловыми точками разбивается на конечное число призматических стержневых элементов, скрепленных между собой в узловых точках. Число элементов выбирается таким, чтобы получаемая при этом кусочно-линейная аппроксимация жесткостных параметров по длине стержня достаточно точно отражала закон их изменения. Покажем это на примере балки переменной жесткости (рис. П.1, а)

$$I(x) = I_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

загруженной поперечной нагрузкой, изменяющейся по длине балки также по линейному закону

$$q(x) = q_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right).$$

Левый конец балки шарнирно оперт на жесткую опору, правый — жестко заделан.

При использовании МКЭ балку следует разбить на конечные элементы постоянной жесткости (рис. П.1, б). Внешняя нагрузка также может быть заменена ступенчато-переменной поперечной нагрузкой.

Замена внешней трапециевидной нагрузки ступенчато-постоянной совершенно не обязательна. Такая замена позволяет лишь упростить замену распределенной внешней нагрузки, действующей на конечный элемент, эквивалентными узловыми усилиями.

Если внешняя нагрузка заменена эквивалентными узловыми усилиями, то расчет рассматриваемой балки ступенчато-постоянной жесткости сводится к расчету фиктивной балки ступенчато-постоянного сечения, нагруженной сосредоточенными внешними усилиями (шарнирные силы и моменты) в узловых сеченьях. С увеличением числа элементов, на которые мы разбиваем балку, фиктивная балка будет все более «сближаться» к исходной балке.

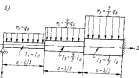
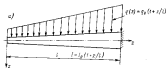


Рис. 11.1. Балка переменная по длине жесткости, нагруженная трансформацией распределенной нагрузки (а); расчетная модель метода конечных элементов (б).



Рис. 11.2. Внешние узловые сосредоточенные силы и моменты для балки.

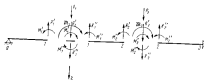


Рис. 11.3. К построению уравнений равновесия для узла балки.

При использовании метода перемещений для расчета дискретной модели балки (рис. 11.2) в качестве основных неизвестных естественно принять прогибы и углы поворота узловых сечений. Это приведет к тождественному выполнению условий непрерывности прогиба и угла поворота при переходе из одного элемента в соседний через узловое сечение.

На каждое из узловых сечений элемента действуют реактивные поперечная сила и изгибающий момент со стороны соседних элементов балки (рис. 11.3).

Реактивные усилия в каждом из узловых сечений должны быть уравновешены внешней узловой нагрузкой:

$$\left. \begin{aligned} R_0^I + R_0^{II} + P_1 &= 0; \\ M_0^I + M_0^{II} + \mathfrak{M}_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ (а)}$$

для 2-го узлового сечения

$$\left. \begin{aligned} R_1^I + R_1^{II} + P_2 &= 0; \\ M_1^I + M_1^{II} + \mathfrak{M}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ (б)}$$

Если далее воспользоваться матрицей жесткости для каждого из элементов балки с целью исключения из уравнений равновесия (а) и (б) реактивных усилий (выход матрицы жесткости для элемента балки будет дан ниже), то в результате получим систему уравнений для определения основных неизвестных — прогибов (q_1, q_2) и углов поворота (φ_1, φ_2) узловых сечений балки. Расстояние между узлами узловых перемещений, можно определить напряженное состояние в каждом конечном элементе балки, а следовательно, и в конструкции в целом.

§ 10

Матрица жесткости призматического элемента стержня

Ниже будет приведено несколько матриц жесткости для призматического элемента стержня. Вначале получим матрицу жесткости элемента стержня при плоском изгибе в местной (одна из осей совпадает с осью элемента стержня) и общей (произвольной) системах координат. Затем найдем матрицы жесткости элементов балок с учетом как изгибных деформаций, так и деформаций сдвига, а также влияния на изгиб элемента, продольных к нему осевых усилий.

Матрица жесткости для призматического элемента балки при изгибе в одной плоскости. Для призматического элемента балки примем следующие направленные координатные оси: ось x совпадает с осью балки, а оси y и z — с главными центральными осями инерции поперечного сечения. Ограничимся рассмотрением изгиба элемента балки, происходящего в плоскости xy . Такой изгиб будет иметь место, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой балке (или к плоской системе стержней), действует в той же плоскости.

Элемент балки будет нагружен усилием взаимодействия со смежными элементами R_{1z}, R_{2z}, R_{3z} и R_{4z} , которые в дальнейшем будем рассматривать в качестве элементов вектора узловых усилий $\{R\} = [R_{1z}, R_{2z}, R_{3z}, R_{4z}]$. Введем в рассмотрение также вектор узловых перемещений $\{q\} = [q_1, q_2, q_3, q_4]$. Положительные направления компонентов вектора узловых усилий и вектора узловых перемещений приведены на рис. 11.4.

При рассмотрении изгиба элемента балки будем использовать техническую теорию изгиба балок. Это позволит в дальнейшем вместо изгиба балки рассматривать изгиб ее оси.

В нашем случае положение элемента балки (его оси) полностью определяется четырьмя узловыми перемещениями, поэтому можно считать следующее предположение о законе изменения прогиба элемента балки:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad (10.1)$$

где α_i — произвольные параметры, подлежащие определению.

Заметим, что выражение (10.1) является интегралом дифференциального уравнения изгиба балки, нагруженной лишь в узловых сечениях.

$$EI v''''(x) = 0. \quad (10.2)$$

Параметры α_i можно выразить через узловые перемещения $\{q\}$, которые найдем с помощью формулы (10.1):

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= v(0) = \alpha_1, \\ q_2 &= \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \alpha_2, \\ q_3 &= v(a) = \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 a^2 + \alpha_4 a^3, \\ q_4 &= \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=a} = \alpha_2 + 2\alpha_3 a + 3\alpha_4 a^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= q_1, \quad \alpha_2 = q_2, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{a^2} (-3q_1 - 2q_2 a + 3q_3 - q_4 a), \\ \alpha_4 &= \frac{1}{a^3} (2q_1 + q_2 a - 2q_3 + q_4 a). \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Внося значения α_i из (10.4) в (10.1), получаем

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 q_i S_i(x), \quad (10.5)$$

(10.6)

$$\left. \begin{aligned} S_1(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}, \\ S_2(x) &= x - 2 \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}, \\ S_3(x) &= 3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}, \\ S_4(x) &= -\frac{x^3}{a} + \frac{x^3}{a^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

так называемые одномерные функции Эрмита, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} S_1(0) &= 1, \quad S_1'(0) = 0, \quad S_1(a) = 0, \quad S_1'(a) = 0; \\ S_2(0) &= 0, \quad S_2'(0) = 1, \quad S_2(a) = 0, \quad S_2'(a) = 0; \\ S_3(0) &= 0, \quad S_3'(0) = 0, \quad S_3(a) = 1, \quad S_3'(a) = 0; \\ S_4(0) &= 0, \quad S_4'(0) = 0, \quad S_4(a) = 0, \quad S_4'(a) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

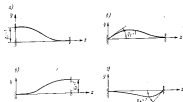


Рис. 11.5. Четыре единичных изгибных деформирования элемента балки: а, в — при узловых перемещениях слева и справа; б, д — при узловых поворотах слева и справа.

Непосредственно из выражения (10.5) следует, что каждая i -я функция Эрмита определяет изгиб жестко заделанной балки, которая получила единичное смещение по i -му направлению ($q_i = 1$). Эти четыре единичных состояния элемента показаны на рис. 11.5.

Чтобы получить матрицу жесткости для рассматриваемого элемента балки, воспользуемся приемом, который требует предварительного определения потенциальной энергии элемента:

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^a [v''(x)]^2 dx. \quad (10.8)$$

Подставляя (10.5) в (10.8), получаем

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij} q_i q_j \quad (10.9)$$

где

$$k_{ik} = EI \int_0^l \mathcal{E}_i(x) \mathcal{E}_k(x) dx \quad (10.10)$$

и есть элементы основной матрицы жесткости конечного элемента $[K] = \|k_{ik}\|$.

Матрица $[K]$ связывает узловые перемещения $\{q\}$ и узловые усилия элемента $\{R\}$:

$$\{R\}_e = [K]_e \{q\}_e \quad (10.11)$$

Индекс e указывает на связь данной величины с изгибными деформациями элемента.

В рассматриваемом случае зависимость (10.11) в развернутой форме запишется в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ & \frac{4EI}{a} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{3EI}{a} \\ & & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ & & & \frac{4EI}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

Симметрично

Нумерация и положительные направления узловых перемещений и усилий элемента балки показаны на рис. 11.4.

Физический смысл значения каждого из элементов матрицы жесткости $[K]$ легко понять из выражения (10.12): произвольный элемент матрицы жесткости k_{ik} численно равен реактивному узловому усилию в жестко заданном элементе балки по i -му направлению при единичном смещении по k -му направлению ($q_k = 1$).

Обратимся теперь к определению эквивалентных узловых усилий $\{P\}$ для элемента балки, нагруженного пезаторой поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x)$. Для определения $\{P\}$ проще всего воспользоваться принципом возможных перемещений, на основании которого можно записать

$$\{\delta q\}^T \{P\} = \int_0^l q(x) \delta v(x) dx \quad (10.13)$$

Если учесть, что на основании выражения (10.5) $\delta v = -\sum_{i=1}^4 \delta q_i \mathcal{E}_i(x)$, то из зависимости (10.13) находим

$$\{\delta q\}^T \{P\} = \sum_{i=1}^4 \delta q_i \int_0^l q(x) \mathcal{E}_i(x) dx \quad (10.14)$$

Отсюда получаем следующую формулу для определения i -го элемента матрицы $\{P\}$:

$$P_i = \int_0^l q(x) \mathcal{E}_i(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (10.15)$$

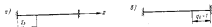


Рис. 11.5. Два эквивалентно деформированных состояния стержня от растяжения-сжатия: а — треугольного, б — прямого вида.

Для частного случая $q(x) = \text{const}$:

$$\{P\}_e = \left\{ \frac{1}{2} q_0 l, \frac{1}{12} q_0 l^2, \frac{1}{2} q_0 l, -\frac{1}{12} q_0 l^2 \right\} \quad (10.16)$$

Матрица жесткости для элемента стержня при совместном учете деформаций изгиба и растяжения-сжатия. На элемент стержня длиной a , жесткостью на изгиб EI и жесткостью на растяжение-сжатие EF действует поперечная нагрузка интенсивностью $q(x)$ и распределенная осевая нагрузка интенсивностью $\tau(x)$. Введение продольной силы требует рассмотрения еще двух единичных состояний элемента, показанных на рис. 11.6. Здесь через q_1 и q_2 обозначены узловые перемещения элемента в направлении оси x .

Перемещение произвольного сечения элемента в направлении x можно выразить через его узловые перемещения с помощью зависимости

$$v(x) = q_1 \mathcal{E}_1(x) + q_2 \mathcal{E}_2(x) \quad (10.17)$$

где

$$\mathcal{E}_1(x) = 1 - \frac{x}{a}, \quad \mathcal{E}_2(x) = \frac{x}{a} \quad (10.18)$$

Чтобы определить матрицу жесткости, вновь воспользуемся выражением для потенциальной энергии элемента, которое в рассматриваемом случае совместного учета изгибных и продольных деформаций запишется в виде

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^l [v''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} EF \int_0^l [v'(x)]^2 dx \quad (10.19)$$

Подставляя сюда выражение $v(x)$ из формулы (10.5) и $a(x)$ из формулы (10.17), получаем

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{\kappa=1}^6 k_{i\kappa} q_i q_{\kappa} \quad (10.20)$$

где

$$k_{i\kappa} = \begin{cases} EI \int_0^l \mathcal{Z}_i'(x) \mathcal{Z}_{\kappa}'(x) dx, & i, \kappa = 1, 2, 3, 4; \\ EF \int_0^l \mathcal{Z}_i(x) \mathcal{Z}_{\kappa}(x) dx, & i, \kappa = 5, 6. \end{cases} \quad (10.21)$$

Если определить с помощью зависимостей (10.21) значения элементов матрицы жесткости $[K]$, то связь между узловыми усилиями $\{R\}$ и узловыми перемещениями $\{q\}$ для случая совместного учета деформаций изгиба и деформации растяжения-сжатия в развернутой форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{a} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{a} & -\frac{EF}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{a} & \frac{EF}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \quad (10.22)^*$$

Симметрично

Нумерация и положительные направления узловых усилий и перемещений приведены на рис. 11.7.

Вектор эквивалентных узловых усилий $\{P\}$ в случае действия на элемент поперечной нагрузки интенсивностью $q = \text{const}$ и распределенной продольной нагрузки интенсивностью $\tau = \text{const}$ будет иметь следующий вид:

$$\{P\} = \left\{ \frac{1}{2} qa, \frac{1}{12} qa^2, \frac{1}{2} qa, -\frac{1}{12} qa^2, \frac{1}{2} \tau a, \frac{1}{2} \tau a \right\}. \quad (10.23)$$

Нумерация и положительные направления элементов вектора соответствуют приведенным на рис. 11.7.

* Здесь и везде в пустых клетках выше главной диагонали стоят нули.

Зависимость (10.22) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [K]_a & 0 \\ 0 & [K]_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \quad (10.24)$$

или

$$\begin{cases} \{R\}_a = [K]_a \{q\}_a \\ \{R\}_p = [K]_p \{q\}_p \end{cases} \quad (10.25)$$

Первое из этих уравнений уже встречалось выше (см. выражение 10.11). Второе уравнение (10.26) определяет связь между узловыми усилиями и перемещениями в направлении оси элемента стержня.

В уравнении (10.26) введены следующие обозначения:

$$\{R\}_p = \begin{pmatrix} R_5 \\ R_6 \end{pmatrix}, \quad \{q\}_p = \begin{pmatrix} q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

$$[K]_p = \begin{pmatrix} \frac{EF}{a} & -\frac{EF}{a} \\ -\frac{EF}{a} & \frac{EF}{a} \end{pmatrix} \quad (10.28)$$

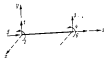


Рис. 11.7. Положительные направления узловых сил и перемещений для элемента балки при изгибе с учетом растяжения-сжатия.

Индекс p указывает на связь данной величины с деформациями растяжения-сжатия элемента.

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемом случае суммарная деформация элемента стержня определяется путем простого суммирования его изгибной деформации $\{q\}_a$ и деформации растяжения-сжатия $\{q\}_p$. Этот результат явился следствием нашего предположения, что влияние осевых усилий на изгиб элемента стержня можно пренебречь.

Принятая при выводе зависимости (10.22) нумерация узловых перемещений и узловых усилий (см. рис. 11.7) приводит к некоторым неудобствам при построении матрицы жесткости элемента в общей системе координат. С этих позиций оказывается более удобной нумерация узловых перемещений и усилий, приведенная на рис. 11.8.

Рис. 11.8. Положительные направления узловых сил и перемещений, более удобные при построении матрицы жесткости для балки.

При этом матрица жесткости элемента стержня примет вид

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{a} & & & & & \\ & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} & & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ & & & \frac{EF}{a} & & \\ & & & & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ & & & & \frac{6EI}{a^2} & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \quad (10.29)$$

Симметрично

а вектор узловых усилий (10.23) принимает вид:

$$\{P\} = \left\{ \frac{1}{2} q_0, \frac{1}{2} q_0 a, \frac{1}{12} q_0 a^2, \frac{1}{2} q_0, \frac{1}{2} q_0 a, -\frac{1}{12} q_0 a^2 \right\}. \quad (10.30)$$

Выше были рассмотрены два вида деформации элемента стержня: изгиб в одной из главных плоскостей сечения элемента и растяжения-сжатие в направлении его оси. Остается рассмотреть еще чистое кручение элемента стержня при действии на него крутящего момента погонной интенсивностью m_x .



Рис. 11.9. Положительные направления узловых усилий кручения элемента в узлах закручивания для балки.

Нумерация и положительные направления узловых усилий (кручение моменты) и узловых перемещений (углы закручивания) приведены на рис. 11.9. Здесь вектором с двумя степенями свободы положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора.

По аналогии с зависимостью (10.26) для растяжения-сжатия связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями при чистом кручении запишется в виде

$$\{R\}_k = [K]_k \{q\}_k, \quad (10.31)$$

здесь

$$\{R\}_k = \{R_1, R_2\}, \quad \{q\}_k = \{q_1, q_2\}; \quad (10.32)$$

$$[K]_k = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{a} & -\frac{GI_x}{a} \\ -\frac{GI_x}{a} & \frac{GI_x}{a} \end{bmatrix}, \quad (10.33)$$

индекс k_0 указывает на связь рассматриваемых узлов с деформацией кручения.

Последнее выражение есть матрица жесткости элемента стержня при чистом кручении (GI_x — жесткость стержня на кручение).

Вектор узловых усилий, эквивалентный действию на элемент крутящего момента интенсивностью $m_x = \text{const}$, принимает вид

$$\{P\}_k = \left\{ \frac{1}{2} m_x a, \frac{1}{2} m_x a \right\}. \quad (10.34)$$

Матрица жесткости элемента стержня при совместном учете деформаций изгиба, растяжения-сжатия и кручения. На элемент стержня длиной a , жесткостью на изгиб EI_x и EI_z (соответственно

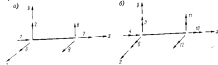


Рис. 11.10. Положительные направления узловых перемещений и усилий для элемента стержня, рассмотренного как элемент деформируемых конструкций: а — линейных перемещений и сил, б — угловых перемещений и моментов.

в плоскостях xz и xz), растяжение EF и кручение GI_x действуют поперечная нагрузка интенсивностью q_y и q_z (соответственно в направлении осей y и z), продольная нагрузка интенсивностью t и крутящий момент интенсивностью m_x .

Если заданные величины усилия привести к узлам, то положение элемента стержня однозначно определится заданием 12 узловых перемещений: трех поступательных перемещений в трех направлениях осей x, y, z и трех углов поворота каждого из узловых сечений вокруг этих же осей.

Для удобства дальнейших преобразований получаемой матрицы жесткости при переходе к другой системе координат (в случае, если собственные оси элемента не совпадают по направлению с осями общей системы координат для рассматриваемой конструкции) введем для узловых перемещений и узловых усилий нумерацию (рис. 11.10), отличную от той, которая применялась выше.

Используя полученные выше зависимости (10.25), (10.26) и (10.31), которые определяют связь между узловыми усилиями и перемещениями элемента стержня соответственно при его изгибе в одной из главных плоскостей, растяжении и кручении, можно выписать на главных плоскостях, растяжении и кручении, можно выписать уравнение связи между рассматриваемой конструкцией $\{R\} = [R_1, R_2, R_3, \dots, R_{12}]$ и вектором узловых перемещений $\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{12}\}$:

$$\{R\} = [K] \{q\}. \quad (10.35)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & \alpha_x & \nu_x \\ l_y & \alpha_y & \nu_y \\ l_z & \alpha_z & \nu_z \end{bmatrix} \quad (10.41)$$

— матрица ориентации жесткой системы координат относительно общей. Если известны координаты конца элемента стержня в общей системе координат, то для определения значений направляющих косинусов оси x можно воспользоваться очевидными зависимостями:

$$l_{xx'} = \frac{x_j' - x_i'}{a}, \quad l_{xy'} = \frac{y_j' - y_i'}{a}, \quad l_{xz'} = \frac{z_j' - z_i'}{a}, \quad (10.42)$$

где

$$a = \sqrt{(x_j' - x_i')^2 + (y_j' - y_i')^2 + (z_j' - z_i')^2} \quad (10.43)$$

— длина элемента стержня.

Для определения оставшихся шести направляющих косинусов в матрице $[K]$ воспользуемся известными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} l_{xx'}^2 + l_{yy'}^2 + l_{zz'}^2 &= 1, & l_{xx'}^2 + l_{yy'}^2 + l_{zz'}^2 &= 1, \\ l_{xx'}l_{xy'} + l_{xy'}l_{yx'} + l_{xz'}l_{zx'} &= 0, & l_{xx'}l_{xy'} + l_{xy'}l_{yx'} + l_{xz'}l_{zx'} &= 0, \\ l_{xx'}l_{xz'} + l_{xz'}l_{zx'} + l_{yy'}l_{yz'} &= 0, & l_{xx'}l_{xz'} + l_{xz'}l_{zx'} + l_{yy'}l_{yz'} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

к которым уже в качестве дополнительной информации о расположении главных центральных осей инерции сечения элемента следует подсоединить значения двух направляющих косинусов для углов частного вращения (из числа неизвестных), например,

$$l_{xy'} = \cos \beta, \quad l_{yz'} = \cos \gamma. \quad (10.45)$$

Углы β и γ показаны на рис. 11.11.

Матрица $[T]$ для элемента плоской стержневой системы. На рис. 11.13 показан элемент плоской рамы в местной и общей системах координат. Матрица преобразования узловых перемещений и узловых усилий из общей системы координат в местную в рассматриваемом случае имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} | & | & 0 \\ | & | & | \\ 0 & | & | \end{bmatrix}. \quad (10.46)$$

Если учесть, что в данном случае

$$l_{xx'} = 0, \quad l_{xy'} = 0, \quad l_{xz'} = 1, \quad l_{yx'} = l_{xy'}, \quad l_{yz'} = -l_{zy'} \quad (10.47)$$

и ввести обозначения

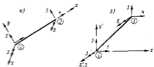
$$l_{xy'} = l, \quad l_{yz'} = \alpha,$$

то входящая в (10.46) матрица $[T]$ примет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} l & \alpha & 0 \\ -\alpha & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.48)$$

Матрицы жесткостей и матрицы усилий для стержневых элементов в общей системе координат. Приведем матрицы жесткостей и матрицы усилий для стержневых элементов в общей системе координат.

Рис. 11.13. Элемент плоской рамы, работающей на изгиб с разрывом светом и местной (а) и общей (б) системами координат.



Элемент пространственного стержня. Для определения матрицы жесткости элемента стержня, изображенного на рис. 11.12, б в общей системе координат, необходимо воспользоваться формулой (10.38), куда следует внести значения матрицы $[K]$ из формулы (10.36) и матрицы $[T]$ из формулы (10.40).

Вследствие громоздкости общей матрицы жесткости $[K^*]$ для пространственного стержневого элемента мы представим ее двумя таблицами (табл. 11.1 и 11.2). В первой таблице вместо элементов показаны числа, а во второй таблице приведены сами элементы, занумерованные в табл. 11.1.

В табл. 11.2 используются следующие дополнительные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{AEI_x}{a}, & B &= \frac{2EI_y}{a}, & C &= \frac{2EI_z}{a}, & D &= \frac{12EI_x}{a^3}, \\ M &= \frac{4EI_x}{a}, & N &= \frac{2EI_y}{a}, & K &= \frac{6EI_z}{a^2}, & H &= \frac{12EI_x}{a^3}, \\ S &= \frac{EF}{a}, & T &= \frac{GI_x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

Чтобы оценить прочность какого-либо элемента стержневой системы, необходимо располагать значениями его внутренних усилий в местной системе координат. Для этого достаточно найти значение вектора узловых усилий $\{R\}$ в этой же системе координат.

Подставляя (10.39) в (10.35), получаем

$$\{R\} = [K] [T] \{q\} \quad (10.50)$$

Матрица жесткости порядка 12×12 для пространственного элемента стержня (см. рис. II. 12)

(K)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
			22	23	24	25	26	27	28	29	30
				31	32	33	34	35	36	37	38
					36	37	38	39	40	41	42
						1	2	3	4	5	6
							10	11	12	13	14
								17	18	19	20
									22	23	24
										31	32
С	и	ж	м	к	т	з	я	ч	ш	о	р

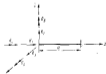


Рис. II. 14. К определению внутренних условий для пространственного стержневого элемента.

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 и R_6 (рис. II. 14). Произвести расчет прочности такой статически определяемой балки не представляет затруднений.

Коэффициенты матрицы жесткости для элемента пространственной рамы в общей системе координат

1	$D1_2^2 + N1_2^2 + S1_2^2$	22	$A1_2^2 + M1_2^2 + T1_2^2$
2	$D1_2 r_{2y} + N1_2 r_{2z} - S1_2 r_{2x}$	23	$A1_2 r_{2y} + M1_2 r_{2z} + T1_2 r_{2x}$
3	$D1_2 r_{2z} + N1_2 r_{2x} + S1_2 r_{2y}$	24	$A1_2 r_{2z} + M1_2 r_{2x} + T1_2 r_{2y}$
4	$C1_2 j_y - K1_2 j_z$	25	$-C1_2 j_z + K1_2 j_y$
5	$C1_2 j_z - K1_2 m_y$	26	$-C1_2 m_y + K1_2 j_z$
6	$C1_2 j_y - K1_2 m_z$	27	$-C1_2 m_z + K1_2 j_y$
7	$-D2_2^2 - N2_2^2 - S2_2^2$	28	$B2_2^2 + M2_2^2 + T2_2^2$
8	$-D2_2 r_{2y} - N2_2 r_{2z} - S2_2 r_{2x}$	29	$B2_2 r_{2y} + M2_2 r_{2z} - T2_2 r_{2x}$
9	$-D2_2 r_{2z} - N2_2 r_{2x} - S2_2 r_{2y}$	30	$B2_2 r_{2z} + M2_2 r_{2x} - T2_2 r_{2y}$
10	$Dm_2^2 + Nm_2^2 + Sm_2^2$	31	$Acm_2^2 + Bm_2^2 + Tm_2^2$
11	$Dm_2 r_{2y} + Nm_2 r_{2z} + Sm_2 r_{2x}$	32	$Acm_2 r_{2y} + Bm_2 r_{2z} + Tm_2 r_{2x}$
12	$C1_2 j_z - K1_2 m_y$	33	$-C1_2 m_y + K1_2 j_z$
13	$C1_2 m_z - K1_2 j_y$	34	$-C1_2 j_y + K1_2 m_z$
14	$C1_2 m_y - K1_2 j_z$	35	$-C1_2 j_z + K1_2 m_y$
15	$-D3_2^2 - N3_2^2 - S3_2^2$	36	$B3_2^2 + M3_2^2 + T3_2^2$
16	$-D3_2 r_{2y} - N3_2 r_{2z} - S3_2 r_{2x}$	37	$B3_2 r_{2y} + M3_2 r_{2z} - T3_2 r_{2x}$
17	$Dn_2^2 + Nn_2^2 + Sn_2^2$	38	$Acn_2^2 + Bcn_2^2 + Tcn_2^2$
18	$C1_2 m_z - K1_2 j_y$	39	$-C1_2 j_y + K1_2 m_z$
19	$C1_2 m_y - K1_2 j_z$	40	$-C1_2 j_z + K1_2 m_y$
20	$C1_2 m_x - K1_2 j_z$	41	$-C1_2 j_z + K1_2 m_x$
21	$-D4_2^2 - N4_2^2 - S4_2^2$	42	$B4_2^2 + M4_2^2 + T4_2^2$

Таким образом, нам достаточно в зависимости (10.5) сократить лишь первые шесть строк:

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}
R_1	0	0	0	$-S_1c_1$	$-S_1s_1$	$-M_1$	0	0	0	0	0	0
R_2	0	0	0	$-S_2c_2$	$-S_2s_2$	$-M_2$	0	0	0	0	0	0
R_3	0	0	0	$-S_3c_3$	$-S_3s_3$	$-M_3$	0	0	0	0	0	0
R_4	S_1c_1	S_1s_1	M_1	0	0	0	T_1c_1	T_1s_1	K_1	$-C_1$	A	0
R_5	S_2c_2	S_2s_2	M_2	0	0	0	T_2c_2	T_2s_2	K_2	$-C_2$	A	0
R_6	S_3c_3	S_3s_3	M_3	0	0	0	T_3c_3	T_3s_3	K_3	$-C_3$	A	0
R_7	D_1c_1	D_1s_1	B_1	$-S_1c_1$	$-S_1s_1$	$-M_1$	T_1c_1	T_1s_1	M_1	M_1	M_1	B_1
R_8	D_2c_2	D_2s_2	B_2	$-S_2c_2$	$-S_2s_2$	$-M_2$	T_2c_2	T_2s_2	M_2	M_2	M_2	B_2
R_9	D_3c_3	D_3s_3	B_3	$-S_3c_3$	$-S_3s_3$	$-M_3$	T_3c_3	T_3s_3	M_3	M_3	M_3	B_3
R_{10}	$-7u_1$	$-7u_2$	$-7u_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_{11}	M_1	M_2	M_3	K_1	K_2	K_3	0	0	0	0	0	0
R_{12}	B_1	B_2	B_3	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	0	0	0	0	0	0

В выражении (10.53) приняты обозначения, используемые в формулах (10.49).

Элемент стержня для плоской рамной конструкции в общей системе координат. Чтобы определить матрицу жесткости элемента стержня (см. рис. 11.13) в общей системе координат для плоской рамной конструкции, необходимо воспользоваться формулой (10.38), куда следует внести значение матрицы жесткости элемента в местной системе координат $[K]$ из выражения (10.29) и значение матрицы преобразования $[T]$ из зависимости (10.46). В результате получим

$$[K] = \begin{bmatrix} Dm^2 + SP & Sml & -Dml & -Cm & -S1^2 - Dm^2 & -Sml + Dml & -Cm \\ & Sm^2 + Dm^2 & Cl & -Sml + Dml & -Sm^2 - Dm^2 & Cl \\ & & A & Cm & -Cl & B \\ & & & SP + Dm^2 & Sml - Dml & Cm \\ \text{Симметрично} & & & & Sm^2 + Dm^2 & -Cl \\ & & & & & A \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

Для определения матрицы внутренних усилий $[E]_e$ можно воспользоваться формулой (10.52).

Для расчета прочности элемента стержня нам достаточно расположить значения узловых усилий R_1, R_2, R_3 , которым соответствуют первые три строки элементов матрицы усилий $[E]_e$. Тогда

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S1 & Sml & 0 & -S1 & -Sm & 0 \\ -Dml & D1 & C & Dml & -D1 & C \\ -Cm & Cl & A & Cm & -Cl & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} \quad (10.55)$$

Расчет прочности элемента стержня сводится к расчету прочности консольной балки (рис. 11.15), нагруженной на свободном конце узловыми силами R_1, R_2, R_3 , определенными из выражения (10.55).

Матрица жесткости для стержней с учетом сдвига. Прогнбы балок возникают не только в результате удлинения их продольных

волокон от воздействия нормальных напряжений, но также и в результате поперечных смещений (сдвигов), развивающихся под воздействием касательных напряжений. Последние имеют существенное значение, когда размеры сечений балок сопоставимы с их длиной.

Получим матрицу жесткости с учетом влияния деформаций сдвига для элемента стержня (см. рис. II.4).

Потенциальная энергия для элемента стержня при учете деформирующей энергии и сдвига

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^l [v_1'(x)]^2 dx + \frac{1}{2} G_0 \int_0^l [v_2(x)]^2 dx. \quad (10.56)$$

Здесь $v_1(x)$ — стрелка прогиба от изгиба; G_0 — жесткость стержня на сдвиг; $v_2(x)$ — стрелка прогиба от сдвига.

Предполагается, что по длине элемента стержня жесткости на изгиб и сдвиг сохраняются постоянными.

Для призматической балки однородные дифференциальные уравнения, определяющие стрелки прогиба $v_1(x)$ и $v_2(x)$, запишутся в виде

$$EI v_1^{IV}(x) = 0, \quad G_0 v_2''(x) = -\frac{EI}{G_0} v_1''(x). \quad (10.57)$$

Рис. II.15. Внутренние узловые условия для стержневого элемента.

При удовлетворении условий неразрывности перемещений в узловых сечениях необходимо выполнить условие неразрывности угловых поворотов и условие неразрывности по суммарным прогибам $v = v_1 + v_2$. Поэтому представим общий интеграл для стрелки прогиба $v_1(x)$, через которую однозначно определяется значение потенциальной энергии (см. выражение (10.56)) в виде

$$v_1(x) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i \mathcal{Z}_i(x), \quad (10.58)$$

целесообразно предать узловым перемещениям элемента балки следующий смысл:

$$\varphi_1 = v_1(0) + v_2(0), \quad \varphi_2 = v_1'(0), \quad \varphi_3 = v_1(l) + v_2(l), \quad \varphi_4 = v_1'(l).$$

Тогда для функций Эрмита могут быть получены выражения

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}_1(x) &= s \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} + 6\beta \right), \\ \mathcal{Z}_2(x) &= 6s \left[\frac{x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} (1 + 3\beta) + \frac{x^3}{l^3} - 4\beta (1 + 3\beta) \right], \\ \mathcal{Z}_3(x) &= s \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} + 6\beta \right), \\ \mathcal{Z}_4(x) &= 6s \left(\frac{x^2}{l^2} (6\beta - 1) + \frac{x^3}{l^3} + 12\beta^2 - 2\beta \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.59)$$

удовлетворяющие условиям (10.7).

Здесь обозначено:

$$s = \frac{1}{1 + 12\beta}, \quad \beta = \frac{EI}{G_0 l^2}. \quad (10.60)$$

Подставив формулу (10.58) в зависимость (10.56), можно привести выражение для потенциальной энергии элемента балки к виду

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij} \varphi_i \varphi_j,$$

где

$$k_{ik} = EI \int_0^l \mathcal{Z}_i'(x) \mathcal{Z}_k'(x) dx + s^2 \beta^2 G_0 \int_0^l \mathcal{Z}_i(x) \mathcal{Z}_k(x) dx \quad (10.61)$$

— элементы матрицы жесткости для изгиба стержня с учетом деформаций сдвига.

Внося в формулу (10.61) значения функций Эрмита из выражения (10.59) и производя необходимые вычисления, получаем матрицу жесткости элемента стержня, изображенного на рис. II.4 (членами, содержащими параметр β в степени выше первой, пренебрегаем для упрощения матрицы в силу малости этих членов):

$$[K] = \begin{bmatrix} D_1 & C_1 & -D_1 & C_1 \\ & A_1 & -C_1 & B_1 \\ & & D_1 & -C_1 \\ \text{Симметрично} & & & A_1 \end{bmatrix}, \quad (10.62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{4EI}{s} k_0, \quad B_1 = \frac{2EI}{s} k_0, \quad C_1 = \frac{A_1 + B_1}{s}, \\ D_1 &= \frac{2C_1}{s}, \quad k_1 = \frac{3}{4} s + \frac{1}{4}; \quad k_2 = \frac{3}{2} s - \frac{1}{2}, \\ s &= \frac{1}{1 + \frac{24(I + \nu)J}{a^2 G_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.63)$$

Из матрицы жесткости (10.62), по аналогии с рассмотренными выше случаями, можно получить матрицы жесткости для пространственного и плоского стержневых элементов в общей системе координат, а также соответствующие им матрицы усилий $[E]_0$.

Расчет судовых перекрытий при стержневой идеализации*

1. Днищевые перекрытия транспортных судов представляют собой сложную систему, состоящую из элементов набора, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях и перевязанных между собой и с обшивкой или двумя обшивками. Опорными для такого перекрытия служат перпендикулярные к нему перекрытия (борта, поперечные и продольные переборки и т. д.).

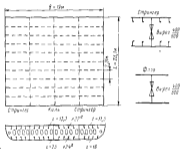


Рис. 11.16. Судовое днищевое перекрытие со вторым дном.

$$F_0 = 448 \text{ м}^2, F_1 = 158 \text{ м}^2, F_2 = 325 \text{ м}^2, F_3 = 102.5 \text{ м}^2, F_4 = 107 \text{ м}^2, F_5 = 162.8 \text{ м}^2.$$

По ряду конструктивных особенностей все днищевые перекрытия можно разделить на перекрытия типа «двойное дно» (рис. 11.16) и перекрытия танкерного типа (рис. 11.17). Первые присущие большое число практически одинаковых поперечных связей и несомненно переключаются (киль и стрингер). Продольные и поперечные связи имеют одинаковую высоту и практически являются призматическими. Перекрытия танкерного типа не имеют внутреннего дна и состоят из ограниченного числа флоров (2—4) и одной поперечной связи (киль). Для переключений танкеров характерны весьма значительная неравномерность балок за счет больших конических килей.

При расчетах днищевых переключений используются следующие основные допущения: а) перекрытие плоское; б) опорный контур —

абсолютно жесткий; в) связи взаимно перпендикулярны; г) взаимодействие рассматриваемого переключен с соседними переключенными определяется через коэффициенты упругого закрепления опорных кромок.

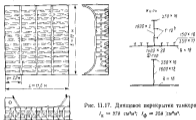


Рис. 11.17. Днищевое перекрытие танкера.

$$F_0 = 278 \text{ м}^2, F_1 = 224 \text{ м}^2.$$

Характер закрепления переключенных связей на поперечных переборках существенно зависит от соотношения длин пролетов и нагрузок соседних переключен. Во многих практических расчетах принята жесткая заделка килей и стрингеров на поперечных переборках, что не всегда оправдано и приводит к завышению напряжений в опорных сечениях.

Условия заделки флоров на борту для переключенных типа «двойное дно» судогрузных судов близки к свободному опиранию. Для переключенных танкерного типа заделка флоров на продольных переборках близка к жесткой.

При использовании традиционных методов расчета прочности судовых переключенных трудно учесть ряд конструктивных особенностей, таких, как наличие вырезов в отдельных связях, неравномерность отдельных балок, различие в характере закрепления на опорном контуре для связей, идущих в одном направлении и т. п. Все эти особенности конструируют днищевые переключенные легко учитываются в методе конечных элементов.

2. В случае использования МКЭ перекрытие разбивается на некоторое число конечных элементов — стержней. Число элементов зависит от особенностей конструкции и характера нагрузки.

Неравномерность участка балок заменяется ступенчато-переменными (рис. 11.18). Вырезы в стенках балок учитываются либо более подробной разбивкой на конечные элементы, либо выделением в расчет эквивалентной площади на сдвиг.



Рис. 11.18. Замена участка балки ступенчато-переменной жесткостью.

1 — действительная изогнутая балка; 2 — ступенчатая эквивалентная по МКЭ.

* В настоящей параграфе приняты условные обозначения С. А. Дмитриев.

В качестве примера рассмотрен расчет перекрытия со вторым дном на действии равномерно распределенного давления воды (рис. 11.19).

Моменты инерции балок определяются с учетом присоединенного попуска. Заметим, что весьма условный выбор шарниры присоединенного попуска — один из главных недостатков стержневой идеализации при расчете перекрытия. Пролозные ребра набора также включаются в поперечное сечение соответствующих балок (клина и стрингеров). Перекрытие разбито на 49 конечных элементов, имеющих 86 неизвестных линейных и угловых перемещений. Устойчив симметричной геометрической формы внешней нагрузки относительно центра перекрытия позволяют ограничиться расчетом лишь четверти перекрытия. При этом задается условие отсутствия соответствующих углов поворота вдоль осей симметрии, а моменты инерции и площадь сечения балок, вдоль которых проходит эти оси, уменьшаются в два раза. По расчетной схеме составляется исходная информация для расчета: матрица индексов, матрица геометрических и жесткостных параметров перекрытия и нагрузки (см. гл. III). Расчет такого перекрытия по МКЭ на ЭВМ «Минск-22» занимает около 3 мин машинного времени. В результате определяются все неизвестные перемещения, распределяющие силы игибающие моменты в узловых сечениях балок перекрестия.

Некоторые из полученных числовых результатов (перемещения и напряжения в отдельных характерных точках перекрытия) приведены в табл. 11.3, где через $w(0)$, $\sigma_x(0)$, $\sigma_{\max}(0)$ обозначены соответственно прогиб, максимальная фиброзная напряженность в киле и флоре, действующая в центре тараканья, а через $\sigma_x(L/2)$ — максимальное фиброзное напряжение в заднем киле. Расчет производился по МКЭ с учетом сдвига в стенках флюров и стрингеров (1), по МКЭ без учета сдвига в стенках балок (2) и по методу главных изгибов (3).

Таблица 11.3
Некоторые результаты расчета перекрытия типа «двойное дно» по стержневой схеме

Метод расчета	Результаты расчета			
	$w(0)$, см	$\sigma_x(0)$, кгс/см ²	$\sigma_{\max}(0)$, кгс/см ²	$\sigma_x(L/2)$, кгс/см ²
1	5,65	1480	1260	2560
2	3,82	1520	9910	3680
3	4,08	1600	1140	2180

Видно, что разница в результатах, получаемых при использовании метода конечных элементов и метода главных изгибов пренебрежимо мала.

Заметим, что МКЭ дает возможность легко учесть структурную нерегулярность перекрытия, а также сдвиг и неперпендикулярность,

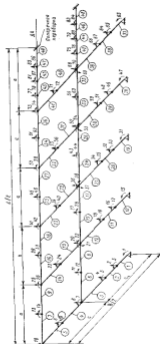


Рис. 11.19. Расчетная схема по МКЭ структуры со вторым дном.

формы, непрямые углы в плане, вырезы и т. д., что вызывает значительные, а порой и непреодолимые трудности при использовании традиционных методов для оценки прочности судовых перекрытий.

§ 12

Расчет объемного судового отсека по стержневой аналогии*

В настоящее время практика расчета пространственных конструкций типа «судовой отсек» основана на ряде упрощающих предположений:

- а) считается, что балки, составляющие конструктивно, имеют постоянное сечение по длине;
- б) пролеты балок, образующих раму, измеряются между точками пересечения нейтральных осей отдельных балок;
- в) деформации сдвига не учитываются;
- г) распорки, связывающие рамные шпангоуты и рамные стойки продольных переборок, считаются шарнирно-соединенными с ними в связи с их малой изгибной жесткостью;
- д) все узлы рамы, за исключением связанных с распорками, не имеют линейных перемещений в плоскости рамы.

В действительности же эти допущения строго не выполняются и влияние фактического отступления от этих допущений на истинное напряженное состояние рамы может оказаться недопустимо большим.

Значительное увеличение деформативности танкеров, наблюдаемое в последние время в мировой практике, приводит к существенному изменению соотношений между основными размерами судна; так, например, возрастают относительная ширина судна, а также относительная высота борта. Наблюдается значительный рост длин отсеков между нефтенепроницаемыми переборками. Все это приводит к тому, что узлы рамы, связанные с бортами и продольными переборками, могут получить заметные линейные перемещения в плоскости рамы. Эти перемещения будут различными для разных рам в составе отсека и разных узлов в составе рамы.

Учет этих перемещений может вызвать заметное изменение характера совместной работы донных и палубных перекрытий и бортовых рам в судовом отсеке.

Указанные выше конструктивные особенности современных больших танкеров требуют учета совместной работы всех рам и перекрытий, образующих объемный судовой отсек. Расчет такого отсека стал возможным вследствие применения МКЭ. При этом конструкция отсека разбивается на некоторую совокупность стержневых элементов.

В качестве примера рассмотрим расчет стержневой конструкции отсека танкера, заключенной между двумя поперечными нефтене-

* В изложении параграфа принимал участие инженер И. А. Калугин.

ных рам
для лист
кающих

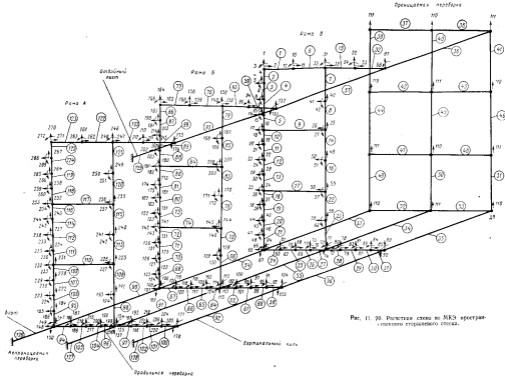
экспри-
з ДП и



не отоска.
исходят.
я балок-
сдвига.
исходн —
4, П.Б).

така П.4
ых балок
танкера

Поперечная балка по длине рамы	Поперечная балка по длине рамы
0,0996	0,0996
0,0341	0,0341
0,109	0,109
0,109	0,109
0,109	0,109



пронизаемыми переборками и состоящей из шести шпангоутных рам и одной поперечной пронизаемой переборки.

Продольные связи (борт, продольная переборка, отбойный лист и киль) представляются в виде отдельных балок, —перекрывающих шпангоутные рамы.

В силу симметрии внешней нагрузки и конструкции рассматривается четвертая часть отсека с плоскостями симметрии по ДП и пронизаемой переборке.

При расчете отсека по МКЭ были сделаны следующие допущения (рис. 11.20, см. вкладку):

- 1) перемещения всех продольных связей на пронизаемых переборках равны нулю;
- 2) распорки жестко связаны с рамными шпангоутами и рамными стойками;
- 3) пронизаемая поперечная переборка при работе отсека может лишь перемещаться как твердое тело, т. е. все линейные вертикальные перемещения продольных связей в месте пересечения с поперечной переборкой одинаковы;

4) в диаметральной плоскости на отбойном листе и вертикальном киле угловые перемещения в плоскости рамы отсутствуют.

При расчете использовалась матрица жесткости (10.65) для балочного элемента, подвергающегося изгибу, с учетом деформаций сдвига.

Расстояние между поперечными пронизаемыми переборками — 40 м, расстояние между рамами (рис. 11.21) — 5 м (табл. 11.4, 11.5).

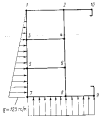


Рис. 11.21. Поперечная рама отсека.

Таблица 11.4

Размеры и жесткостные параметры стальных балок поперечной рамы танкера

Узел рамы	Длина l , м	Момент инерции I , м ⁴	Продольная жесткость K , т/м	Узел рамы	Длина l , м	Момент инерции I , м ⁴	Продольная жесткость K , т/м
1—2	11,85	0,8809	0,0819	4—5	7,85	0,0995	0,0696
1—3	7,85	0,1625	0,1171	5—6	11,85	0,06715	0,0241
2—4	7,85	0,0675	0,0835	5—7	7,85	0,159	0,109
2—10	11,85	0,0304	0,0258	6—8	7,85	0,1054	0,109
3—4	11,85	0,0065	0,0220	7—8	11,85	0,020	0,709
3—5	7,85	0,109	0,109				

Таблица 11.5

Момент инерции I и площадь поперечного сечения ω продольных и поперечных стержней танкера

Наименование продольной связи	$I, м^4$	$\omega, м^2$
Борт	43,5	0,700
Продольная переборка	41,0	0,684
Обойлочный лист	0,2274	0,1060
Вертикальный киль	1,2	0,2140

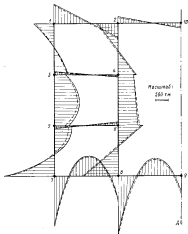


Рис. 11.22. Эпюры изгибающих моментов рамы B отсека.
 — расчет по МКЭ; — — — — балочный расчет.

Принципиал переборки моделировалась системой перекрещивающихся стержней с моментом инерции $I = 1,0 м^4$ и площадью поперечного сечения $\omega = 0,1 м^2$.

В результате расчета построена эпюра изгибающих моментов (рис. 11.22) для рамы B и эпюры линейных перемещений для рам (рис. 11.23).

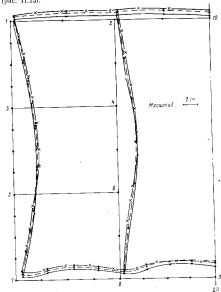


Рис. 11.23. Эпюры линейных перемещений для рам.
 — для рамы A ; — — — — рамы B ; — \times — рамы B .

Оказалось, что напряженное состояние в рамках А и В качественно такое же, как и в раме В; разница в величинах моментов не превышает 5%. Сопоставление полученных по МКЭ и по балочной теории напряжений и перемещений показывает их хорошее совпадение.

Следует остановиться на некоторых преимуществах МКЭ при расчете стержневых конструкций по сравнению со стандартными подходами.

1. Изменяя геометрические характеристики отдельных конечных элементов, можно с достаточной степенью точности учитывать непрямоугольность сечения балок в составе конструкции судового отсека.

2. В некоторых случаях может оказаться необходимым исследовать более подробно поле напряжений в брашпах, кинцах, и районах опорных, концентраторов напряжений и т. д. Метод конечных элементов позволяет «выделить» определенную часть конструкции с интересующим нас районом для проведения более тонкого расчета с помощью использования более мелких конечных элементов.

§ 13

Упруго-пластический изгиб стержневых систем

Для расчета упруго-пластического изгиба стержневых систем используется итерационный процесс, характеризующийся следующими этапами (рис. 11.24).

1. Каждый из стержней конструкции разбивается по длине на определенное число призматических стержневых элементов. Число элементов зависит от объема оперативной памяти машины, от примененного алгоритма и от требуемой точности расчетов.

2. Из расчета упругой стадии изгиба по стандартной схеме МКЭ определяются напряжения и перемещения в элементах конструкции, а также кривизна и деформация во всех сечениях стыковки элементов в нулевом приближении.

3. Уточняются значения моментов инерции I^* (блок «сечение») при использовании уравнения упруго-пластического изгиба балок.

4. На базе полученных в каждом сечении элемента полей жесткостей строится матрица жесткости для стержневых элементов (блок «связь»).

5. С помощью найденных на четвертом этапе матриц жесткостей для элементов строится общая матрица жесткости для всей системы $[K^*]$ и производится уточнение напряженно-деформированного состояния всей системы на основе расчета упругой стадии изгиба по стандартной схеме МКЭ (блок «система»).

6. Повторяются этапы 3, 4, 5 до тех пор, пока не будет достигнута сходимость при заданной точности по какому-либо критерию. В нашем алгоритме используется деформационный критерий.

Блок «сечение» является внутренним блоком по отношению к блоку «связь», а последний в свою очередь является внутренним по отношению к блоку «система».

Приведем некоторые дополнительные разъяснения по содержанию отдельных блоков программы.

Блок «сечение». Учет упруго-пластических деформаций материала, сосредоточен в блоке «сечение», поэтому рассмотрим его более подробно.

Пусть задано произвольное поперечное сечение элемента стержня, для которого известны его геометрические размеры, а также положение центра тяжести, через который проходит нейтральная ось в случае упругой стадии работы материала.

В каждом из поперечных сечений балки, находящейся под действием поперечной нагрузки, должны соблюдаться следующие два уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma dF &= 0, \\ \int \sigma (y - \eta) dF &= M(x), \end{aligned} \right\} (13.1)$$

где F — площадь поперечного сечения балки; $\sigma = \sigma(y, \eta)$ — нормальные напряжения в точке сечения, отстоящей от центра тяжести на расстоянии y ; η — отстояние нейтральной оси от центра тяжести сечения при работе материала в упруго-пластической области; $M(x)$ — изгибающий момент в сечении x балки.

Заметим, что при записи уравнений равновесия (13.1) предполагалось, что осевая сила $T(x) = 0$.

Выражение для напряжений σ запишем через осевый модуль E_c в виде:

$$\sigma = E_c \epsilon, \quad (13.2)$$

где деформации ϵ , согласно гипотезе плоских сечений, могут быть найдены по уравнению

$$\epsilon = v''(x)(y - \eta), \quad (13.3)$$

здесь $v''(x)$ — кривизна.

Подставляя выражение (13.2) в зависимость (13.1), с учетом (13.3) получаем уравнения равновесия для сечения

$$\left. \begin{aligned} \int E_c(x)(y - \eta) dF &= 0, \\ \int E_c(x)(y - \eta)^2 dF &= EI^* v''(x) - M, \end{aligned} \right\} (13.4)$$



Рис. 11.24. Обобщенная схема упруго-пластического изгиба стержневых систем.

1 — подоплавленный блок; 2 — блок «связь»; 3 — блок «сечение»; 4 — блок «сечение»; 5 — блок «сечение».

$$I^* = \int \frac{E_0(x)}{E} (\psi - \eta)^2 dF, \quad (13.5)$$

E — модуль нормальной упругости материала.

Уравнения (13.4) содержат два неизвестных параметра (v^* и η), подлежащих определению. Так как эти уравнения не разделяются, то их приходится решать совместно итерационным методом, который заключается в следующем:

- разбиваем все сечение балки по высоте на n участков;
- задаем некоторым значением для изгибающего момента M_1 ;
- задаем нулевым приближением (например, используя упругое состояние) для $v^{(0)}$ и $\eta^{(0)}$;
- по этим значениям ($v^{(0)}$, $\eta^{(0)}$) находим все значения деформаций $\epsilon_i^{(0)} = v'(\rho_i - \eta)$ по высоте сечения. Затем по деформациям ϵ_i из диаграммы $\sigma - \epsilon(\epsilon)$ определяем для каждого сечения по высоте все величины сечущих модулей $E_i \epsilon_i$;

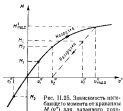


Рис. 11.25. Зависимость изгибающего момента от кривизны $M(\rho^2)$ для заданного поперечного сечения стержня.

д) по полученным в предыдущем этапе данным можно вычислить производные типа

$$\left. \begin{aligned} E_{i1} \Delta F_{i1}, E_{i2} \Delta F_{i2}, \\ E_{i3} \Delta F_{i3}, E_{i4} \Delta F_{i4} \end{aligned} \right\} (13.6)$$

для каждого участка n по высоте сечения. Здесь ΔF_{i1} — площадь части поперечного сечения между уровнями ρ_{i-1} и ρ_i ;

е) вычисляем интегралы, входящие в уравнения (13.4), численным интегрированием (например, по формуле трапеций) после подстановки в них выражений (13.6);

ж) вычисляем из системы уравнений (13.4) новые значения нейтральной оси $\eta^{(1)}$ и кривизну $v'^{(1)}$;

з) этапы а) — ж) повторяются до тех пор, пока на этапе ж) не удовлетворится неравенство

$$\frac{v'^{(1)(1)} - v'^{(0)(1)}}{v'^{(0)(1)}} \leq \delta_1, \quad (13.7)$$

где δ_1 — заданное число, учитывающее требуемую точность расчета.

Таким образом, вычисляется одна точка искомой кривой $M = -M(\rho^2)$, которая дает значения ρ_1^2 и η_1^2 для конкретного поперечного сечения при конкретном значении изгибающего момента M_1 .

Далее берется новое значение изгибающего момента M_2 , и весь процесс повторяется. В результате удается построить кривую $M = -M(\rho^2)$ в интересующих нас пределах изменения M (см. рис. 11.25).

Учет разгрузки. Деформирование пластического материала при увеличении и уменьшении нагрузки происходит по различным законам. При разгрузке упруго-пластический материал является упругим до тех пор, пока напряжение не достигнет σ_0 , сжатия, после чего вновь начинается пластическое течение.

Заметим, что в статически неопределимых системах разгрузка иногда реализуется и при увеличении внешней нагрузки.

Согласно теории о разгрузке [21] связь между изгибающим моментом и кривизной (рис. 11.25) при разгрузке упруго-пластической балки описывается уравнением

$$v''(x) = v''_{max}(x) - \frac{M_{max}(x) - M(x)}{EI}_{упр}, \quad (13.8)$$

где $v''_{max}(x)$ — максимальная кривизна в сечении x к моменту начала разгрузки; $M_{max}(x)$ — соответствующий максимальный изгибающий момент; $M(x)$ — фактическое значение изгибающего момента, до которого понизился $M_{max}(x)$; $(EI)_{упр}$ — жесткость балки в упругом состоянии в i -м сечении.

С помощью уравнения (13.8) легко учесть эффект разгрузки, при этом итерационный процесс, описанный выше, остается без изменения.

Нахождение остаточного прогиба балки при упруго-пластическом изгибе сводится к решению задачи изгиба при упругом состоянии изгиб балки.

Блок «стержень». На основании данных блока «сечение», мы получаем значение кривизны $v''_i(M_i)$ на каждом участке разбиения стержня по длине. По найденным значениям кривизны v''_i уточним моменты инерции сечений I_i (см. формулу (13.5)). Таким образом, весь стержень имеет ступенчато-переменную жесткость.

Найдем в общем виде матрицу жесткости для такого стержня.

Дважды интегрируя основное дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI(x) v''(x) = M(x), \quad (13.9)$$

получаем

$$v'(x) = v'(0) + M(0) \int_0^x \frac{ds}{EI(s)} + N(0) \int_0^x \frac{1 ds}{EI(s)}, \quad (13.10)$$

и

$$v(x) = v(0) + v'(0)x + \frac{M(0)}{EI_0} \int_0^x ds \int_0^s \frac{I_0 ds}{I(s)} + \frac{N(0)}{EI_0} \int_0^x ds \int_0^s \frac{I_0 ds}{I(s)}. \quad (13.11)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 \frac{I_0 ds}{I(s)}, & a_1 &= \int_0^1 \frac{I_0 s ds}{I(s)}, \\ a_2 &= \int_0^1 ds \int_0^s \frac{I_0 ds}{I(s)}, & a_3 &= \int_0^1 ds \int_0^s \int_0^s \frac{I_0 ds}{I(s)}. \end{aligned} \right\} (13.12)$$

I_0 — момент инерции какого-либо сечения стержня.

При $x = a$ уравнения (13.10) и (13.11) с учетом обозначений (13.12) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v'(0) + \frac{\sigma_2}{2EI_2} M(0) + \frac{\sigma_1}{2EI_2} N(0) &= -v'(a), \\ v(0) + v'(0)a + \frac{\sigma_2}{2EI_2} M(0) + \frac{\sigma_1}{2EI_2} N(0) &= -v(a). \end{aligned} \right\} (13.13)$$

По аналогии с (13.13) можем получить

$$\left. \begin{aligned} v'(a) + \frac{\sigma_2}{2EI_2} M(a) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 a}{2EI_2} N(a) &= -v'(0), \\ v(a) + v'(a)a + \frac{\sigma_2}{2EI_2} M(a) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 a}{2EI_2} N(a) &= -v(0). \end{aligned} \right\} (13.14)$$

где $v(0)$, $v'(0)$, $M(0)$, $N(0)$ — соответственно прогиб, угол поворота, момент и перерезывающая сила в сечении $x = 0$; $v(a)$, $v'(a)$, $M(a)$, $N(a)$ — то же для сечения $x = a$.

Положительные направления для узловых перемещений и усилий приведены на рис. 11.4.

Разрешив систему уравнений (13.14) и (13.13) относительно входов и выходов, получим связи и моменты по концам элемента.

Группируя их в таблицу, находим искомого матрицу жесткости для стержня ступенчато-переменного сечения [87]:

$$\begin{pmatrix} N(0) \\ M(0) \\ N(a) \\ M(a) \end{pmatrix} = \frac{EI_2}{\Delta a^3} \begin{pmatrix} a_6 & a_4 & -a_3 & a_2 \\ a_4 a_2 - a_3 & -a_1 & a_6 & \\ & & a_6 & -a_2 \\ \text{Симметрично} & & & a_4 a_2 - a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix}, \quad (13.15)$$

где $\Delta = \frac{1}{2a} |a_6 a_3 - a_2 a_1|$.

В случае $EI(x) = EI = \text{const}$ коэффициенты a_i становятся равными: $a_4 = a_2 = a$, $a_3 = a_1 = a^2/2$, $a_6 = a^3/6$, $\Delta = 1/12$ и матрица жесткости в (13.15) принимает известный вид (10.12) для призматического элемента балки.

Для стержня переменного сечения коэффициенты a_i определяются по формуле (13.12) методами численного интегрирования.

Пример. С использованием аналогичной выше процедуры для системы перекрестных балок (рис. 11.26), жесткостью двух саркоплаточных стоек, была найдена узловая жесткость и перемещения. Расчетная схема по МКЭ приведена на рис. 11.27.

В качестве материала для балок использовалась обожжен углеродистая сталь с пределом текучести $\sigma_s = 2000$ кгс/см².

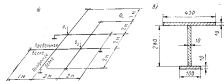


Рис. 11.26. Система перекрестий и вид системы перекрестящихся балок (а) и поперечное сечение балки (б); размеры указаны в миллиметрах.



Рис. 11.27. Расчетная схема перекрестия.

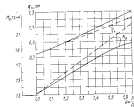


Рис. 11.28. Нормированная прогиба v_0 в миллиметрах и приближенного момента M_0 в килоньютонах в заданной 8-го стержня при работе материала в упруго-пластической области ($\sigma = P_1/P_0 > 1$).
— — — упругий материал; — упруго-пластический материал.

Расчеты показывают, что при $P_1 = P_2 = P_3 = 14,8 \text{ т}$ возникает фибрация стержня и задняя 8-го стержня, где критический момент достигает значения $M_{кр} = 12,15 \text{ кг·м}$. Максимальный прогиб при этом в направлении 4-го перемещения $q_4 = 7,53 \text{ мм}$.

Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к развитию и распространению пластической деформации внутри осевой стержня. Характер изменения прогиба в критическом моменте показан на рис. 11.28.

§ 14

Учет геометрической нелинейности при расчете стержневых систем

1. При учете геометрической нелинейности возможно применение одного из итерационных методов, изложенных в § 7.

При использовании, например, метода последовательных приближений расчет включает следующие основные этапы:

а) вычисление перемещений и внутренних усилий от заданной нагрузки в обобщенной линейной постановке;

б) определение новых жесткостных свойств элементов с учетом изгибов, обусловленных большими перемещениями, геометрией конструкции;

в) повторение этапов а) и б) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

2. Учет геометрической нелинейности приводит к изменению матриц жесткости элементов конструкции по мере роста внешней нагрузки. Изменения матриц жесткости связаны с изменением геометрической схемы конструкции и связаны только обобщенными перемещениями узловых точек системы. Связь между компонентами деформаций и компонентами перемещений предполагается линейной. Таким образом, учет больших перемещений связан с построением матриц жесткости в новой обобщенной системе координат (x', y') , тогда как матрица жесткости в местной системе координат (x, y) остается без изменений.

Для переноса сил и перемещений из местной системы координат (x, y) в общую систему координат (x', y') воспользуемся зависимостями § 4. Для i -го элемента можно записать:

$$\{R\}_i = [T]_i \{R'\}_i, \quad (14.1)$$

$$\{q\}_i = [T]_i \{q'\}_i, \quad (14.2)$$

$$[K]_i = [T]_i [K']_i [T]_i^T. \quad (14.3)$$

Матрица преобразования координат $[T]_i$ в уравнении (14.3) зависит от деформаций элемента $\{q\}_i$, которые считаются достаточно большими.

Расчетную процедуру можно упростить, если воспользоваться шаговым методом нагружения.

Пусть на какой-то стадии нагружения конструкция находится в равновесии. Приращение внешней нагрузки $\{dP\}$ вызывает приращение узловых усилий $\{dR\}$ и узловых перемещений $\{dq\}$. Для получения мгновенной матрицы жесткости, которая могла бы связать

между собой приращенные узловых усилий $\{dR\}$ и узловых перемещений $\{dq\}$, воспользуемся разложением матрицы узловых усилий R $\{q^{(0)} + dq\}$ в ряд Тейлора относительно начальной точки $\{0\}$, определяемой узловыми перемещениями $\{q\}_i = \{q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}\}$ и конечной приращения $\{dq\} = \{dq_1, dq_2, \dots, dq_n\}$:

$$\begin{aligned} \{R\} [\{q_1^{(0)} + dq_1\} \{q_2^{(0)} + dq_2\} \dots \{q_n^{(0)} + dq_n\}] &= \\ &= [R \{q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}\}] \cdot \left\{ \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_1} \right)_0 dq_1 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_2} \right)_0 dq_2 + \dots + \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_n} \right)_0 dq_n \right\}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Тогда приращение вектора усилий $\{dR\}$ определится так:

$$\{dR\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)_0 dq_i, \quad (14.5)$$

или

$$\{dR\} = [K]_{\text{мгн}} \{dq\}, \quad (14.6)$$

где $[K]_{\text{мгн}}$ — мгновенная матрица жесткости, элементы которой определяются зависимостью

$$\begin{aligned} k_{ij}^{\text{мгн}} &= \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_j} \right)_0 = \\ &= \left(k_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial k_{ij}^{(0)}}{\partial q_k} : \dots : q_k \right)_0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

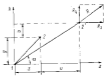


Рис. 11.29. Деформированное состояние стержня, работающего в условиях растяжения-сжатия.

3. В качестве примера приведем вывод матрицы $[K]_{\text{мгн}}$ для стержня, испытывающего осевое растяжение (рис. 11.29).

В недеформированном и деформированном состояниях длина стержня соответственно равна

$$a_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (14.8)$$

$$a = \sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2}. \quad (14.9)$$

Тогда внутренние усилия в стержне R определятся по формуле

$$R = EF\varepsilon = EF \frac{a - a_0}{a_0} = EF \frac{\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (14.10)$$

Проекция усилия R на оси координат:

$$R_x = R \cos \alpha = EF \frac{\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x+u}{\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2}}; \quad (14.11)$$

$$R_y = R \sin \alpha = EF \frac{\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y+v}{\sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2}}. \quad (14.12)$$

Из полученных выражений видно, что внутренние усилия являются нелинейными функциями от компонентов перемещений λ и α .

Коэффициенты матрицы жесткости определяются на основании формул (14.7) с помощью зависимости

$$k_{11} = \frac{\partial R_x}{\partial \alpha}, \quad k_{12} = \frac{\partial R_x}{\partial \lambda}, \quad k_{21} = \frac{\partial R_y}{\partial \alpha}, \quad k_{22} = \frac{\partial R_y}{\partial \lambda}. \quad (14.13)$$

Найдем, например, k_{11} :

$$k_{11} = \frac{\partial R_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \cos \alpha + R \frac{\partial}{\partial \alpha} \cos \alpha = \frac{EF}{a_0} \cos^2 \alpha - \frac{R}{a} \sin^2 \alpha. \quad (14.14)$$

Аналогично могут быть получены значения трех остальных коэффициентов матрицы жесткости.

Окончательные выражения для приращений внутренних усилий запишутся так:

$$\begin{pmatrix} \Delta R_{x1} \\ \Delta R_{x2} \\ \Delta R_{y1} \\ \Delta R_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{Симметрично} \\ \Delta \alpha & \Delta \lambda \\ -1 & -\Delta \alpha \\ \Delta \alpha & \Delta \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \text{Симметрично} \\ -\Delta \alpha & 1 - \Delta \alpha^2 \\ 1 - \Delta \alpha & \Delta \alpha \\ \Delta \alpha & \Delta \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{pmatrix}. \quad (14.15)$$

Выражение в скобках в зависимости (14.15) определяет мгновенную матрицу жесткости $[K]_{\text{мгн}}$ для стержня, произвольно ориентированного на плоскости, воспринимающего только осевую силу.

Заметим, что первая часть $[K]_{\text{мгн}}$ определяет изменение внутренних усилий в связи с изменением геометрии стержня, а вторая часть учитывает влияние внутренних сил — факторов на жесткость конструкции.

4. Введение матрицы $[K]_{\text{мгн}}$ позволяет записать следующее основное уравнение для шагового метода нагружения (см. формулу (7.23)):

$$[K]_{\text{мгн}} \{\varphi\} = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) [P]. \quad (14.16)$$

С помощью зависимости (14.7), последовательно переходя от нулевой ступени нагружения ($\alpha = 0$) к первой ($\alpha = 1$), от второй ко второй ($\alpha = 2$) и т. д., можно получить значение вектора узловых перемещений $\{\varphi\}$ при интересующем нас значении нагрузки, разном $\lambda = 1$.

Процедура операций шагового метода нагружения изложена в § 7 и прослеживается из рис. 11.26.

Как видно из рис. 11.30, при большом интервале по нагрузке точность оказывается низкой. Так, например, при $\lambda = \lambda_1$ истинное

перемещение соответствует точке φ , а приближенное — φ_1 . С увеличением нагрузки погрешность постепенно накапливается.

Для уменьшения погрешности результатов целесообразно внутри каждого шага по нагрузке выполнить итерационный процесс по уточнению значений мгновенных жесткостей. При этом значения $[K]_{\text{мгн}}$

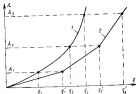


Рис. 11.30. Шаговой процесс по нагрузке при постоянной геометрии стержня

для каждого интервала изменения нагрузки (например, для $\lambda_{i+1} - \lambda_i$) следует определять по среднему значению вектора узловых перемещений в этом интервале:

$$\{\varphi\}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (\{\varphi\}_{i+1} + \{\varphi\}_i). \quad (14.17)$$

§ 15

Нагиб и кручение конструкций, состоящих из тонкостенных элементов

Многие несущие судовые конструкции собираются из тонкостенных элементов открытых и закрытых профилей, в которых в силу конструктивных особенностей и специфических нагрузок, кроме усилий изгиба, сдвига и растяжения возникают также и значительные деформационные усилия.

Общая теория кручения и изгиба тонкостенных стержней подробно разработана в многочисленных трудах советских ученых. Вместе с тем, задача кручения и изгиба тонкостенных стержней на уровне современных достижений расчета конструкций еще не решена.

Построение общей теории метода конечных элементов позволяет достаточно просто решить эту задачу в общем матричном виде и довести ее до конкретных численных решений.

Наконец, по аналогии с предыдущим изложением материала, будет получена матрица жесткости для тонкостенного стержня открытого профиля, выписаны необходимые матричные зависимости и приведены численные примеры [88].

При нахождении матрицы жесткости для тонкостенного стержня мы воспользуемся общей теорией вопроса, изложенной в работах [12,

14, 91]. Расчетный узел будет иметь четыре степени свободы; линейное перемещение, угол поворота, угол закручивания и прокрутка от угла закручивания (депланшю).

Дифференциальное уравнение равновесия для тонкостенного стержня (рис. 11.31) относительно угла закручивания $\theta(x)$ запишется в виде

$$\theta^{IV}(x) - \frac{k^2}{a^2} \theta''(x) = \frac{\pi(x)}{EI_a}; \quad (15.1)$$

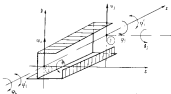


Рис. 11.31. Тонкостенный элемент открытого профиля.

здесь

$$k = a \sqrt{\frac{GI_x}{EI_a}},$$

где a — длина стержня; I_x — момент инерции свободного кручения;

$$I_x \approx \frac{1}{3} \sum d_j^3 t_j, \quad (15.2)$$

(d_j и t_j — соответственно ширина и толщина пластинчатых элементов сечения).

Секториальный момент инерции

$$I_a = \int \omega^2 dF, \quad (15.3)$$

где ω — секториальная координата; $\pi(x)$ — интенсивность крутящего внешнего момента.

Соответствующие силовые факторы (биоммент \bar{B} и изгибно-крутильный момент \bar{M}) определяются согласно зависимостям

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= -EI_a \theta'', \\ \bar{M} &= GI_x \theta' - EI_a \theta'. \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Общее решение однородного уравнения (15.1) можно записать в следующем виде:

$$\theta(x) = A_1 + A_2 k \frac{x}{a} + A_3 \operatorname{sh} k \frac{x}{a} + A_4 \operatorname{ch} k \frac{x}{a} \quad (15.5)$$

или

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^4 q_i \mathcal{D}_i(x), \quad (15.6)$$

здесь q_i — узловые перемещения стержня:

$$q_1 = \theta(0), \quad q_2 = \theta'(0), \quad q_3 = \theta(a), \quad q_4 = \theta'(a);$$

$\mathcal{D}_i(x)$ — функции Эрмита:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_1(x) &= \frac{1}{g} \left[(1 - \operatorname{ch} k) \operatorname{ch} \frac{kx}{a} + \operatorname{sh} k \operatorname{sh} \frac{kx}{a} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{kx}{a} \operatorname{sh} k + 1 - \operatorname{ch} k + k \operatorname{sh} k \right]; \\ \mathcal{D}_2(x) &= \frac{1}{g^2 k} \left[(k \operatorname{ch} k - \operatorname{sh} k) \operatorname{ch} \frac{kx}{a} + \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{ch} k - 1 - k \operatorname{sh} k) \operatorname{sh} \frac{kx}{a} + \frac{kx}{a} (\operatorname{ch} k - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} k - k \operatorname{ch} k \right]; \\ \mathcal{D}_3(x) &= \frac{1}{g} \left[(\operatorname{ch} k - 1) \operatorname{ch} \frac{kx}{a} - \operatorname{sh} k \operatorname{sh} \frac{kx}{a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{kx}{a} \operatorname{sh} k + 1 - \operatorname{ch} k \right]; \\ \mathcal{D}_4(x) &= \frac{1}{g^2 k^2} \left[(\operatorname{sh} k - k) \operatorname{ch} \frac{kx}{a} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \operatorname{ch} k) \operatorname{sh} \frac{kx}{a} + \frac{kx}{a} + \frac{kx}{a} (\operatorname{ch} k - 1) + \right. \\ &\quad \left. + k - \operatorname{sh} k \right], \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где

$$g = 2 + k \operatorname{sh} k - 2 \operatorname{ch} k. \quad (15.8)$$

Потенциальная энергия тонкостенного стержня с учетом депланшю

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a EI_a [\theta''(x)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a GI_x [\theta'(x)]^2 dx. \quad (15.9)$$

Подставляя выражение (15.6) в формулу (15.9), получаем

$$V = \frac{1}{2} \left[EI_0 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \int_0^l \mathcal{Z}_i^T(x) \mathcal{Z}_j(x) dx + \right. \\ \left. + GI_c \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \int_0^l \mathcal{Z}_i^T(x) \mathcal{Z}_j(x) dx \right] \varphi_0 \varphi_0. \quad (15.10)$$

Перепишем последнее выражение в матричном виде:

$$V = \frac{1}{2} (\varphi)^T [K]_{\text{вн}} (\varphi), \quad (15.11)$$

где $[K]_{\text{вн}}$ — матрица жесткости (4×4) с учетом деформации:

$$k_{ij} = \int_0^l EI_0 \mathcal{Z}_i^T \mathcal{Z}_j dx + \int_0^l GI_c \mathcal{Z}_i^T \mathcal{Z}_j dx, \quad (15.12)$$

$$(\varphi) = \{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4\} \quad (15.13)$$

— вектор узловых перемещений.

С помощью матрицы жесткости $[K]_{\text{вн}}$ можно теперь записать внутренние силовые факторы в следующем матричном виде:

$$\{R\}_{\text{вн}} = [K]_{\text{вн}} (\varphi) \quad (15.14)$$

или в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \frac{GI_c}{l} \begin{pmatrix} \frac{l}{a} \sin k & ch k - 1 & -\frac{l}{a} \sin k & ch k - 1 \\ \frac{a}{k} (k ch k - sh k) & 1 - ch k & \frac{a}{k} (sh k - k) & 0 \\ \frac{l}{a} \sin k & 1 - ch k & 0 & 0 \\ \frac{a}{k} (k ch k - sh k) & 0 & \frac{a}{k} (sh k - k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad (15.15)$$

В случае малых прогибов, перемещения от изгиба и кручения не зависят друг от друга, поэтому общая матрица жесткости для тонкостенного стержня может быть получена путем комбинации жесткостей при изгибе (10.12) и жесткостей при кручении с изгибом (15.14):

$$[K] = \begin{pmatrix} [K]_{\text{из}} & 0 \\ 0 & [K]_{\text{вн}} \end{pmatrix} \quad (15.16)$$

Тогда общие внутренние условия могут быть записаны с помощью (15.16) в следующем виде:

$$\{R\} = [K] \{\varphi\} \quad (15.17)$$

или в развернутой форме [88]:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C & & -D & C & & & \\ & A & & -C & B & & & \\ & & S & P & & -S & P & \\ & & & M & & -P & R & \\ & & & & D & -C & & \\ & & & & & A & & \\ & & & & & & S & -P \\ & & & & & & & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \end{pmatrix} \quad (15.18)$$

где коэффициенты матрицы $[K]$ вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{4EI}{a}, & B &= \frac{2EI}{a}, & C &= \frac{GI_c}{a^2}, & D &= \frac{32EI}{a^3}, \\ S &= \frac{GI_c l}{l}, & P &= \frac{GI_c a}{l}, & M &= \frac{GI_c a^2}{l}, & R &= \frac{GI_c l}{l} \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{l}{a} \sin k, & \rho &= ch k - 1, \\ \alpha &= \frac{a}{k} (k ch k - sh k), & \tau &= (sh k - k) \frac{a}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Положительные направления узловых усилий и соответствующих им узловых перемещений показаны на рис. 11.32. Связь между двумя концами показаны биномы.

Матрицей жесткости (15.18) описываются изгиб балки в плоскости yz и кручение ее в местной системе координат (рис. 11.32, а).

Матрица жесткости $[K^*]$ для тонкостенного стержня в общей системе координат (рис. 11.32, б) может быть получена с помощью преобразования

$$[K^*] = [T]^T [K] [T], \quad (15.21)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [1] & 0 \\ 0 & [1] \end{bmatrix} \quad (15.22)$$

При расчете плоского перекрытия, отдельные балки которого изгибаются поперечной нагрузкой с одновременным их закручиванием, оси z в местной и z' в общей системах координат совпадают.

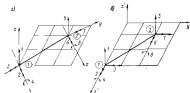


Рис. 15.32. Положительные изгибные моменты и скрутки в местной (а) и общей (б) системах координат.

В этом частном случае, который мы и ограничим наше дальнейшее рассмотрение, подматрица $[T]$ в выражении (15.22) будет иметь следующий вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & m & & & & \\ & & l & & & \\ & l & & m & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (15.23)$$

где m и l — направляющие косинусы:

$$m = \frac{x_2' - x_1'}{a}, \quad l = \frac{y_2' - y_1'}{a} \quad (15.24)$$

В окончательном виде матрица жесткости $[K^*]$ для изгиба и кручения тонкостенного элемента и матрица усилий $[E]_{1d}$ в зависимости $[R^*] = [E]_{1d} [q^*]$ (15.25) выписаны ниже [см. выражения (15.26) и (15.27)].

$$[K^*] = \begin{bmatrix} D & C_{\alpha} & -D & C_{\alpha} & -D & C_{\alpha} \\ C_{\alpha} & A\alpha^2 + 3I^2 & -C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 & -C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 \\ -D & -C_{\alpha} & D & -C_{\alpha} & D & -C_{\alpha} \\ -C_{\alpha} & (S-A)I\alpha & C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 & -C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 \\ C_{\alpha} & A\alpha^2 + 3I^2 & -C_{\alpha} & -B\alpha^2 + 3I^2 & -C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 \\ -C_{\alpha} & (S-A)I\alpha & -C_{\alpha} & -D & -C_{\alpha} & B\alpha^2 - 3I^2 \end{bmatrix} \quad (15.26)$$

Симметрично

$$[C]_n = \begin{bmatrix} D & C_{0n} & -C1 & & -D & C_{0n} & -C1 \\ C & A_{0n} & -A1 & & -C & A_{0n} & -B1 \\ & S1 & S_{0n} & P & -S1 & -S_{0n} & P \\ P1 & P_{0n} & M & & -P1 & -P_{0n} & R \\ -D & -C_{0n} & C1 & & D & -C_{0n} & C1 \\ C & A_{0n} & -B1 & & -C & A_{0n} & -A1 \\ & -S1 & -S_{0n} & -P & S1 & S_{0n} & -P \\ P1 & P_{0n} & R & & -P1 & -P_{0n} & M \end{bmatrix} \quad (15.27)$$



Рис. 11.38. Круговая рама для torsionных расчетов элемента открытого профиля.

Таблица 11.6

Некоторые результаты расчета рамы (рис. 11.38) на кручение с учетом отставания деформации на стержнях

№ ст.	Поперечная, α , и углы закручивания, рад. поперек расчетной связи с коэффициентом 10^{-4}			Вращение, уг. в стержнях 1 и 2 около z -оси стержня соответственно		
	По МКЭ	Точное решение [10]	Относит. %	По МКЭ	Точное решение [10]	Относит. %
1	-0,5183	-0,5183	—	0,006699	0,003203	0,9
2	-0,7154	-0,7157	0,04	0,006804	0,003603	0,4
3	0,7886	0,7886	—	-0,006803	-0,003831	0,4
4	2,792	2,737	2,0	-0,007391	-0,007960	0,2

Общая матрица жесткости конструкции $[R]$ определяется с помощью зависимостей § 4.

Положительные направления узловых перемещений и усилий для элемента в местной и общей системах координат показаны на рис. 11.82.

Пример. Чтобы продемонстрировать точность вычислений, полученных с помощью вычислительной матрицы жесткости и усилий, проведем расчет для стальной рамы (рис. 11.38), для которой известны точные решения [14]. На рисунке указаны размеры отсечки стержней рамы в сантиметрах.

Моменты инерции осевых стержней равны:

$$J = 1000 \text{ см}^4, \quad J_x = 3,2 \text{ см}^4, \quad J_y = 17 \cdot 908 \text{ см}^4.$$

Результаты вычислений в табл. 11.6.

§ 16

Колесные стержневые системы и изгиб балок на упругом основании

Перейдем к рассмотрению задач о колебаниях стержневых систем и изгиба балок на упругом основании.

Сначала найдем матрицы масс для динамического анализа стержневых систем. Затем по аналогии получим матрицу жесткости для изгиба балок на упругом основании.

1. Потенциальная и кинетическая энергии для элемента стержня с учетом поперечных и продольных сил инерция соответственно запишется в виде

$$V = \frac{1}{2} EF \int_0^l [\theta'(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} EF \int_0^l [u'(x, t)]^2 dx, \quad (16.1)$$

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^l \dot{u}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} m \int_0^l \dot{v}^2(x, t) dx, \quad (16.2)$$

где $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — перемещения сечения стержня соответственно в продольном и поперечном направлениях; m — погонная масса.

Внося в формулы (16.1) и (16.2) выражения для $u(x, t)$ и $v(x, t)$, из выражений (10.5) и (10.17), получим

$$V = \frac{1}{2} \{\dot{q}(t)\}^T [K] \{\dot{q}(t)\}, \quad (16.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}(t)\}^T [M] \{\dot{q}(t)\}. \quad (16.4)$$

Здесь

$$[M_2] = [IM^1_1, IM^1_2, \dots, IM^1_n], \quad (16.13)$$

где IM^1_i — матрица масс i -го конечного элемента в общей системе координат, а структура $[M]$ аналогична (4.9а).

При рассмотрении свободных колебаний

$$[\bar{P}(t)] = 0, \quad [\bar{q}(t)] = |q| \sin \lambda t,$$

а уравнение (16.11) перепишется в виде

$$[\bar{K} - \lambda^2 \bar{M}] |q\rangle = 0. \quad (16.14)$$

Приравняв определитель системы (16.14) к нулю, получим уравнение для определения частот свободных колебаний λ :

$$|\bar{K} - \lambda^2 \bar{M}| = 0. \quad (16.15)$$

Для определения значений λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) из уравнения (16.15) может быть рекомендован один из наиболее эффективных приемов, изложенных ниже (см. § 41).

3. Подстановка в формулы (16.5) аппроксимирующих полиномов Эрмита с учетом сдвига (10.6б) позволяет получить матрицу масс с учетом сдвига (продольные колебания не учитываются):

$$[M]_{\text{Эр}} = \frac{\rho a}{(1+12\beta)^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + \frac{42}{5}\beta & \left(\frac{11}{210} - \beta \frac{11}{16}\right)a & \frac{9}{70} - \frac{18}{5}\beta & \left(-\frac{13}{420} + \frac{9}{10}\beta\right)a \\ & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{5}\beta\right)a^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{9}{16}\beta\right)a & \left(-\frac{1}{140} - \frac{1}{5}\beta\right)a^2 \\ & & \frac{13}{35} + \frac{42}{5}\beta & \left(-\frac{11}{210} - \frac{11}{16}\beta\right)a \\ \text{Симметрично} & & & \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{5}\beta\right)a^2 \end{bmatrix} \quad (16.16)$$

где β — параметр сдвига, определяемый по формуле (10.6б).

Для учета инерции вращения выражение для кинетической энергии элемента стержня (16.2) следует дополнить членом, учитывающим эту поправку:

$$\frac{1}{2} I_{\text{Эр}} \int_0^a [\dot{\omega}_1(x)]^2 dx,$$

где $I_{\text{Эр}}$ — момент инерции массы стержня.

Тогда матрица масс для инерции вращения с учетом сдвига принимает такой вид (продольные колебания не учитываются):

$$[M]_{\text{Эр}} = \frac{I_{\text{Эр}}}{a(1+12\beta)^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{15} + 6\beta\right)a & -\frac{6}{5} & \left(-\frac{1}{15} + 6\beta\right)a \\ & \left(\frac{2}{15} + 2\beta\right)a^2 & \left(-\frac{1}{15} + 6\beta\right)a & \left(-\frac{1}{30} - 2\beta\right)a^2 \\ & & \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{15} - 6\beta\right)a \\ \text{Симметрично} & & & \left(\frac{2}{15} + 2\beta\right)a^2 \end{bmatrix} \quad (16.17)$$

4. Для учета жесткости упругого основания матрицу жесткости конечного элемента $[K]$ следует дополнить матрицей жесткости упругого основания $[C]$, элементы которой определяются зависимо:

$$c_{ik} = c \int_0^a \partial_i(x) \partial_k(x) dx, \quad (16.18)$$

где c — интенсивность жесткости упругого основания.

Например, матрица жесткости для элемента, лежащего на упругом основании (рис. П.34), в местной системе координат без учета сдвига имеет вид

$$1 - \begin{bmatrix} \frac{12EI}{a^3} + \frac{13ca}{35} & \frac{6EI}{a^2} + \frac{11ca^2}{210} & -\frac{12EI}{a^3} + \frac{9ca}{70} & \frac{6EI}{a^2} - \frac{13ca^2}{420} \\ & \frac{4EI}{a} + \frac{ca^2}{105} & -\frac{6EI}{a^2} + \frac{13ca^2}{420} & \frac{2EI}{a} - \frac{ca^2}{140} \\ \text{Симметрично} & & \frac{12EI}{a^3} + \frac{13ca}{35} & -\frac{6EI}{a^2} + \frac{11ca^2}{210} \\ & & & \frac{4EI}{a} + \frac{ca^2}{105} \end{bmatrix} \quad (16.19)$$

Для иллюстрации точности получаемых решений приведем несколько числовых примеров с использованием полученных выше матриц масс.

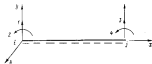


Рис. 11.34. Качовый элемент балки на узле опоры при изгибе.

Пример 1. Получим первые две собственные частоты колебаний для балки на двух опорах с массой, распределенной по закону треугольника (рис. 11.35). Для участка переменной массы $m(x)$ разобьем всю длину балки на четыре участка, во пределах каждого участка будем считать массу постоянной и равной соответствующему среднему значению.

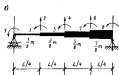


Рис. 11.35. Колебания балки на двух опорах с массой, распределенной по закону треугольника (а); расчетная схема по методу конечных элементов (б).

Результаты расчета представлены в табл. 11.7.

Таблица 11.7
Результаты расчета свободно опертой балки с массой, распределенной по закону треугольника

Номер частоты λ	$\lambda = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{EI}{m}}$		Средняя, %
	Точное значение [1]	По МКЭ	
1	13,90	13,90	0
2	60,90	58,96	2,9

Как видно, приведенные матрицы масс во уравнении (16.6) дают в данном случае весьма высокую точность.

Пример 2. С помощью полученной выше матрицы масс (16.7) найдем первые три собственных частоты продольных колебаний для консольного стержня с равномерно распределенной массой (рис. 11.36).

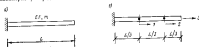


Рис. 11.36. К определению свободных частот продольных колебаний для консоль (а); расчетная схема по МКЭ (б).

Разобьем стержень на три участка и, используя МКЭ, составим уравнение типа (16.6). Кроме определителя этой системы уравнений оказывается равным

$$\lambda_1 = 1,589 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\lambda_2 = 5,196 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\lambda_3 = 9,427 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Точные решения для рассматриваемой задачи известны; λ_1 и частота равна $\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \pi$.

Ошибка приближенного решения по сравнению с точным составляет соответственно 0%, 9% и 20%. Разделение стержня на большее число участков, безусловно, будет давать лучшие результаты.

Пример 3. Найдём первые собственные частоты колебаний рамы с консольным элементом (рис. 11.37). Будем считать жестким всю длину элемента рамы на участке, масса деформативные узловые точки. Для каждой расчетной схемы (рис. 11.38) получим первые две собственные частоты и сопоставим результаты.



Рис. 11.37. Рамы с консольным элементом при определении частот свободных колебаний.

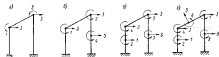


Рис. 11.38. Расчетная схема рамы при последовательном уточнении частот свободных колебаний.

Первое приближение соответствует первоначальному расчетной схеме (рис. 11.38, а); количество узловых расчетных точек — 2, количество неизвестных — 3. Продольные деформации не учитывались, поэтому вертикальные точки будут перемещаться по оси y и z во величину ϕ . Второе приближение (рис. 11.38, б) характеризуется тремя узловыми точками и пятью неизвестными. Третье и четвертое

приближенно имеют соответственно 4 узла в 7 неизвестных и 5 узлов и 9 неизвестных (рис. 11.36, в, д).

Для первого приближения решение нуля перебранных систем уравнений (11.35) дает

$$|\bar{K} - \lambda \bar{M}| = 0,$$

где

$$[\bar{K}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 16 & -9 \\ -6 & -9 & 22,7 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{M}] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 6,31 & -1,74 & -7,42 \\ -1,74 & 15,81 & -88,83 \\ -7,42 & -88,83 & 857,0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в последней "элемент матрицы $[\bar{M}]$ включает решение от оси вращения вращающегося элемента как абсолютное значение частот колебания.

Отсюда получим $\lambda_1 = 3,021 \sqrt{\frac{EI}{m}}$, $\lambda_2 = 21,475 \sqrt{\frac{EI}{m}}$.

Результаты расчета для всех приближенных систем в табл. 11.8. Как видно из таблицы, сходимость к точному значению частот колебания.

Таблица 11.8

Результаты расчета первых двух собственных частот колебаний для рамы с вращающимся элементом при различных расчетных элементах

Номер частоты	Номер приближения	λ_2	Относительная погрешность, %
Первая частота λ_1	1	3,021	—
	2	3,402	11,2
	3	3,580	4,97
	4	3,596	0,50
Вторая частота λ_2	1	21,475	—
	2	20,634	2,98
	3	20,431	1,97
	4	20,224	0,95

§ 17

Устойчивость стержневых систем

Запишем выражение для потенциальной энергии при изгибе призматического элемента стержня с учетом влияния осевой сжимающей силы T :

$$V = \frac{1}{2} EI \int_0^l [v''(x)]^2 dx - \frac{1}{2} T \int_0^l [v'(x)]^2 dx. \quad (17.1)$$

Внося в формулу (17.1) выражение для упругой линии $v(x)$ из (10.6), получаем

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (R_{ik} - S_{ik}) \varphi_i \varphi_k, \quad (17.2)$$

где

$$R_{ik} = EI \int_0^l \mathcal{D}_i''(x) \mathcal{D}_k''(x) dx$$

— элементы матрицы жесткости $[K]$ элемента стержня при его работе на изгиб (см. выражение (10.12)1);

$$S_{ik} = T \int_0^l \mathcal{D}_i'(x) \mathcal{D}_k'(x) dx \quad (17.3)$$

— элементы новой матрицы $[S]$, которую в дальнейшем будем называть матрицей устойчивости [86]:

$\frac{6}{5a}$	Симметрично		
$-\frac{1}{10}$	$\frac{2a}{15}$		
$\frac{6}{5a}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{6}{5a}$	
$-\frac{1}{10}$	$-\frac{a}{30}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2a}{15}$

(17.4)

После введения в рассмотрение вектора узловых перемещений элемента стержня $\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ и с учетом содержания матрицы жесткости $[K]$ и матрицы устойчивости $[S]$, нетрудно переписать выражение (17.2) для потенциальной энергии элемента стержня в следующей комплексной форме

$$V = \frac{1}{2} \{\varphi\}^T [K - S] \{\varphi\}. \quad (17.5)$$

Отсюда связь между узловыми условиями элемента стержня $[R]$ и его узловыми перемещениями $\{\varphi\}$ запишется в виде

$$[R] = [K - S] \{\varphi\}. \quad (17.6)$$

Заметим, что как в векторе узловых перемещений, так и в векторе узловых усилий нумерация отдельных элементов и их положительные направления соответствуют приведенным на рис. 11.4.



Вводя в рассмотрение вектор узловых перемещений всей конструкции в общей системе координат $[\bar{q}]$, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в § 4, для рассматриваемого случая получаем

$$[\bar{K} - \bar{S}] [\bar{q}] = 0, \quad (17.7)$$

где

$$[\bar{S}] = [H]^T [S_2] [H] \quad (17.8)$$

— матрица устойчивости всей конструкции в общей системе координат.

Здесь $[S_2]$ — квадратичная матрица, элементами которой являются матрицы устойчивости конечных элементов конструкции в общей системе координат; $[H]$ аналогична (4.9a).

Если вместо сжимающей силы T_i для i -го конечного элемента ввести величину

$$T_i = t_i \tau_i, \quad (17.9)$$

где

$$\tau_i = T_i H_i \quad (17.10)$$

(H_i — некоторая величина, имеющая размерность силы), то уравнение (17.7) можно придать вид

$$[\bar{K} - t_i \bar{S}_2] [\bar{q}] = 0. \quad (17.11)$$

Приравняв нулю основной определитель уравнений (17.11), получаем искомого уравнение устойчивости конструкции:

$$[\bar{K} - t_i \bar{S}_2] = 0. \quad (17.12)$$

Для определения корней уравнения (17.12) можно воспользоваться методом, изложенным в § 4.

Матрица жесткости $[\bar{K}]$ в сочетании с матрицей устойчивости $[\bar{S}]$ позволяет решать проблему продольно-поперечного изгиба для стержневых систем. В этом случае основное уравнение равновесия конструкции запишется в виде

$$[\bar{K} - \bar{S}] [\bar{q}] = [\bar{P}], \quad (17.13)$$

где $[\bar{P}]$ — вектор узловых внешних усилий стержневой конструкции в общей системе координат.

Решение задачи сложного изгиба стержневых систем представляет для практики значительный интерес, так как при продольно-поперечном изгибе напряжения и перемещения могут превышать допустимые значения раньше, чем произойдет потеря устойчивости по Эйлеру.

В этой главе будут описаны основные проблемы использования электронных вычислительных машин (ЭВМ) при решении задач строительной механики и теории упругости по методу конечных элементов.

Специфика электронных вычислительных машин, связанная, с одной стороны, с большими скоростями, а с другой, — с ограниченной оперативной памятью, накладывает определенные условия на методы и алгоритмы для анализа упругих систем.

Метод конечных элементов в данном случае заслуживает большого внимания, и прежде всего в силу своей универсальности. Кроме того, этот метод удовлетворяет специфике ЭВМ, связанной с дискретностью счета.

§ 18

Некоторые основные проблемы, связанные с машинным счетом задач строительной механики

Одной из важнейших задач, возникающих при расчете конструкций по методу конечных элементов на ЭВМ, является проблема автоматического формирования в машине коэффициентов системы алгебраических уравнений для всей конструкции. Без решения этой проблемы бессмысленно решение задач по МКЭ с помощью ЭВМ.

Действительно, идеализированная схема конструкции состоит из большого числа конечных элементов, соединенных в узлах скважины. Число неизвестных в узле, в зависимости от класса решаемой задачи, равно от одного до шести или более. Поэтому общее число неизвестных становится достаточно большим (от нескольких сотен до нескольких тысяч уравнений). При этом число коэффициентов общей системы уравнений, в зависимости от ширины ленты, будет порядка $10^3 - 10^7$.

Отсюда ясно, что формирование общей матрицы жесткости должно быть автоматизировано. При этом весьма существенным способом автоматизации, так как от него зависит вид, сложность и объем исходной информации, а также затраты машинного времени, т. е. все те условия, которые являются основными критериями эффективности использования ЭВМ.

На первый взгляд, проблема автоматического формирования в машине коэффициентов системы уравнений кажется достаточно тривиальной. Действительно, при ручном счете инженер не задумывается над проблемой формализации идеализированной схемы конструкции, так как перед ним является чертеж основной системы с пронумерованными узлами, элементами и неизвестными в узлах. Он не старается формализовать топологию конструкции, связывать связь одного элемента с другим, описать влияние одного неизвестного на другое, а также граничные условия задачи. Это инженеру не требуется, так как чертеж основной системы снимает все эти вопросы.

Другое дело, когда задача считается за ЭВМ.

Мы не можем зафиксировать в памяти машины (как это мы делаем на листе бумаги) основную систему конструкций*, а обойтись без нее или хотя бы без минимально необходимой информации о ней мы также пока не можем. Поэтому встает вопрос о моделировании основной системы конструкций. Эта проблема достаточно сложна и может быть математически решена с помощью теории графов.

В литературе описан целый ряд приемов для автоматического формирования системы уравнений. В работе [62] используется способ специально закодированных координатных линий, которые образуют сетку. Конструкция проектируется на эту сетку, и с помощью координат узлов сетки описывается основная система. Основным недостатком этого способа является сложность, трудоемкость и большой объем исходной информации. В работе [72] используется прием непосредственного суммирования коэффициентов для отдельных элементов, однако эти коэффициенты предварительно должны быть в общем случае подсчитаны вручную и только для частных случаев (например, для весовых функций) задача решается автоматически.

В целом ряде работ [24, 49, 81] используется сеточно-топологическая формулировка решения задачи на основе теории графов. Это направление является достаточно перспективным, так как кроме решения основной задачи оно позволяет получить оптимальный граф конструкции для получения веса минимальной ширины.

К этому направлению непосредственно примыкает математическая теория электрических сетей [73, 139], использующая аналогии между расчетом электрических сетей и распределением потока напряжений в упругих системах.

Недостатками этих приемов являются необходимость предварительного отыскания графа конструкций и построение матрицы инцидентий.

Наиболее распространенным способом формирования общей матрицы жесткости для конструкции является способ Дж. Аргироса [51], привлекающий своей простотой. Искомая матрица жесткости

* В последнее время в печати появились сообщения о возможности сбора фронтальной информации в машину с помощью специального «парашюта» на фотографии. Однако до возможности его практического использования еще достаточно далеко.

(порядка $n \times n$) является в этом случае в виде произведения трех матриц:

$$[\bar{K}] = [H]^T [K_d] [H], \quad (18.1)$$

где $[K_d]$ — диагональная матрица порядка $(r \times m) \times (r \times m)$; $[H]$ — матрица, связывающая переменные, определяющие поведение данного элемента, с общим вектором перемещений для всей конструкции. Порядок этой матрицы $(r \times m) \times n$, где r — порядок матрицы жесткости для элементов конструкции, m — количество элементов, n — количество неизвестных.

Для регулярной конструкции матрица $[H]$ состоит из единиц и большого числа нулей. И хотя составление этой матрицы — чрезвычайно простая операция, ее объем является весьма большим уже для средних конструкций (порядка сотни конечных элементов). Поэтому матрицу часто невозможно разместить в оперативной памяти машины и даже, если бы такая возможность представлялась, то невыгодно было бы записывать память машины на 80–90% нулями.

Кроме того, на вычисление произведения (18.1) трех больших матриц, требуется много машинного времени. Поэтому в последнее время Аргирос предлагает более эффективные приемы для формирования общей матрицы жесткости.

Во-первых, уравнение (18.1) предельно реализовать в машине в следующем виде:

$$[K] = \sum_{i=1}^m [K_i]^T [K_i] [K_i], \quad (18.2)$$

где $[K_i]$ — матрица жесткости для отдельного i -го элемента; $[H] = [[K_1], [K_2], \dots, [K_m]]$ — матрица связности, разбитая на m -подматрицы, соответствующих матриц жесткостей $[K_i]$.

Это позволяет вместо выполнения одного матричного умножения для больших матриц, согласно (18.1), выполнить m умножений с последующим суммированием для матриц значительно меньшего порядка, что, несомненно, эффективнее.

Во-вторых, в целях экономии памяти из-за большого числа нулей в матрице $[H]$ Аргирос предлагает использовать диагональ разреженных массивов*

Оба эти приема делают метод Аргироса значительно более эффективным.

И тем не менее Аргирос, увлекаясь матричной формулировкой задачи, перешел на наш взгляд, тот оптимальный предел, когда реализация в машине операций матричных перемножений уже не является наиболее эффективным способом формирования матрицы жесткости, так как использование стандартных процедур перемножения матриц приводит к необходимости получения одного числа с помощью пере-

* Это идея в несколько измененном виде была использована с применением программируемой матрицы и сортировки, и реализована для ЭВМ «Маяк-24» в работе [46]. Применением уравнения типа (18.1) приводит к большой затрате машинного времени.

* Так, из формирования квадратной матрицы порядка 500х500 требуется 10 млн. для ЭВМ «Маяк-24».

множества строки на столбцы*, один из которых является почти нулевым, не говоря уже о том, что исходная информация (особенно матрица $[H]$) остается все-таки весьма большой по объему.

Возникает вопрос: а нельзя ли просто, без матричных перемножений, с помощью простой таблицы индексов указать непосредственные адреса в машине, куда надо записать и там просуммировать коэффициенты, выбравшие из соответствующих матриц жесткости два элемента?

Оказывается, что такой способ существует, а идея его весьма проста. Более того, сам Аргирис заметил и даже описал этот способ [5, стр. 88], однако недостаточно и не разъяснил, считая его громоздким и нестандартным. На самом же деле использование таблицы (матрицы) индексов для формирования общей матрицы жесткости является простой и стандартной процедурой, а сама таблица индексов может быть автоматизирована.

Ниже будет раскрыта сущность матрицы индексов, показаны пути ее автоматизации и указаны возможности использования этой матрицы для решения ряда задач, связанных с реализацией МКЭ на ЭВМ, в частности на ЭВМ «Минск-22»; подробная инструкция, алгоритм и программа описаны в работе [11].

§ 18

Универсальный алгоритм метода конечных элементов. Программа для ЭВМ «Минск-22». Исходная информация и формы ее задания

В принципе универсальные алгоритмы для расчета систем произвольной вида оказываются сравнительно простыми и сводятся к последовательности матричных операций, после выполнения которых непосредственно получаются внутренние усилия. Несмотря на простоту структуры матриц исходной информации, их составление достаточно трудно. Кроме того, размеры этих матриц таковы, что их трудно разместить в блоке оперативной памяти машины. Перемножение этих матриц в процессе формирования матрицы жесткости требует большого количества машинного времени.

Учет особенностей структуры матриц позволяет существенно уменьшить объем исходной информации и сократить число вычислений операций и уравнений (18.1). Однако последнее обстоятельство значительно усложняет программу и не дает желаемого эффекта как при подготовке исходной информации, так и в экономии машинного времени.

Для любой конструкции существует определенный минимум исходной информации, без которого невозможно решение задачи и ко-

торый не зависит от применяемого метода. В состав исходной информации входят сведения о физических и геометрических характеристиках. Применение того или иного расчетного метода может потребовать задания дополнительной информации. Для наиболее эффективного использования ЭВМ необходимо стремиться к тому, чтобы эта дополнительная информация была по возможности минимальной.

Ниже будет рассмотрен алгоритм, при разработке которого автору стояла цель сохранить универсальность, характерную для метода конечных элементов, сократить и упростить необходимую исходную информацию, уменьшить время работы машины и расширить круг решаемых задач [11, 60, 89].

Основной программой является метод конечных элементов в варианте метода перемещений.

Максимальное количество неизвестных для ЭВМ «Минск-22» равно 3000. Максимальное число элементов в конструкции зависит от вида конструкции. Так, для плоских конструкций типа ра и перекрестий количество элементов может достигать 1000, в пространственных рамах и задачах изгиба пластин допускается до 300 элементов и т. п. Вообще максимальное количество элементов непосредственно зависит от размерности матрицы жесткости. Матрицы жесткости, включенные в программу, приведены в [11], где для каждой из них дано максимально допустимое число элементов.

Максимальная ширина ленты в системе уравнений по одну сторону от главной диагонали в описываемом алгоритме не должна превышать 60.*

Общая характеристика алгоритма и программы. Как уже отмечалось в гл. I, расчет произвольной конструкции по методу конечных элементов можно разделить на следующие основные этапы:

1. Разбивка конструкции на конечные элементы.
2. Получение матрицы жесткости для элементов, составляющих конструкцию.
3. Формирование общей матрицы жесткости для всей конструкции и матрицы грузовых членов.
4. Решение системы уравнений для определения основных неизвестных.
5. Определение внутренних усилий (напряжений).

Рассмотрим, как выполняются перечисленные этапы по данному алгоритму.

1. Разбивка конструкции на конечные элементы. Тип элементов и их количество зависят от вида конструкции, от требуемой точности результатов, от вида внешней нагрузки и от ограничений, связанных с объемом памяти ЭВМ.

Нагрузка предполагается приложенной в узлах, и поэтому, например, в случае распределенной нагрузки для ее более точного

* В частном случае, когда применяются обобщенные перемещения соотносят с матричным суммированием перемещений в матрице жесткости для элемента, т. е. если в исходной матрице $[H]$ является элементом, то эта операция перемножения строки на столбец фактически превращается в операцию перемножения и сложения отдельных коэффициентов матрицы жесткости для элемента.

* В настоящее время разработана программа, основанная на схеме Халетского, где ширина ленты увеличена вдвое. При этом число неизвестных практически не ограничено. Ширина ленты может быть увеличена до 1000 и более, однако в этом случае обработка системы будет производиться по столбцу строк, что значительно увеличивает время счета.

моделирования бывает необходимо вводить дополнительные узлы.

2. Матрица жесткости. Как известно, элементы матрицы жесткости (МЖ) представляют собой реакции в узлах от единичных перемещений узлов элемента. В зависимости от того, какие факторы необходимо учитывать (диаметр, изгиб, деформацию сдвига, кручение, продольную деформацию и т. п.), порядок МЖ может быть различным для одного и того же типа элементов. Например, для элемента стержня плоской конструкции, если учитывать только изгиб, порядок МЖ равен 4, при учете еще и продольной деформации порядок будет равен 6 и т. д.

Для элемента стержня МЖ получается точкой в пределах обычно принимаемых гипотез (плоские сечения, изотропность материала и т. д.). Для двумерных и трехмерных элементов при использовании различных методов получаются различные матрицы жесткости. Поэтому для таких элементов в программу включено несколько матриц жесткости, полученных различными методами.

Следует еще отметить, что матрицы жесткости для элементов, произвольно ориентированных в пространстве или на плоскости, в данной программе представляются выраженными в общей системе координат. Обобщенные перемещения для элемента нумеруются последовательно и в определенном порядке. В работе [11] приведен порядок нумерации для каждой МЖ, включенной в программу.

Расчеты по МКЭ различных конструкций отличаются принципиально только применяемой матрицей жесткости и матрицей переходов от обобщенных перемещений к внутренним усилиям (напряжениям). Последнюю матрицу будем в дальнейшем для краткости называть матрицей усилий (МУ). Поэтому программа построена таким образом, что основная ее часть остается неизменной; меняются лишь стандартные подпрограммы для вычисления МЖ и МУ. Составлена специальная библиотека стандартных подпрограмм вычисления МЖ и МУ. Подпрограммам в порядке их включения присваиваются порядковые номера 1, 2, 3 и т. д.

Для решения той или иной задачи из специального каталога (см. приложение к [11]) выбираются нужные МЖ и МУ, и их номера указываются в исходных данных. Машина автоматически включает указанные стандартные подпрограммы в состав основной программы.

В общем случае число элементов в матрице жесткости для элемента достаточно велико (например, для элемента пространственной рамы это $12 \times 12 = 144$, для элемента оболочки $24 \times 24 = 576$ и т. д.).

При большом количестве разных элементов конструкции целесообразно вычислять и формировать матрицы жесткости для элемента полностью. Можно учесть ту особенность, что эти матрицы имеют много повторяющихся элементов.

Так, например, в матрице жесткости для элемента стержня на плоскости из 36 элементов матрицы только 9 элементов различаются между собой по величине и знаку; для матрицы жесткости прямоугольного элемента плоской задачи теории упругости из 64 элементов только 12 из них различаются и т. п.

Это позволяет построить соответствующую модель, с помощью которой достаточно просто оформляется процедура формирования матриц жесткости для различных элементов.

При обращении к процедуре формирования матрицы жесткости для элемента вычитаются только различные элементы. Сама же модель является универсальной, с помощью которой вычисляются нужные элементы из числа предварительно вычисленных. Информация о расположении в матрице того или иного элемента задается моделями МЖ и МУ. Модели МЖ и МУ записаны на магнитную ленту,

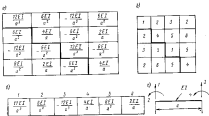


рис. 11. Информация в ROM о матрице жесткости для стержня на плоскости без учета продольной деформации: а — матрица жесткости (МЖ); б — модель МЖ; в — матрица усилий (МУ); г — координатные направления узловых перемещений и сил.

и при указании в исходной информации номера МЖ и МУ машина вместе с подпрограммой МЖ и МУ включает и соответствующую им модель (рис. 11.1).

Для элемента, произвольно ориентированного в пространстве, модель строится с учетом того, что выполнено преобразование МЖ из местной системы координат в общую систему координат.

Такой подход позволяет упростить общий алгоритм, с помощью которого процедура построения матрицы жесткости для элемента будет строго формализована. При этом процесс формирования общей матрицы жесткости для системы произвольного вида будет отличаться только процедурой формирования матрицы жесткости для элемента. Таким набором моделей к процедуре вычисления соответствующих коэффициентов в виде библиотеки стандартных программ, можно по единому алгоритму решать весьма широкий класс задач.

3. Описание топологии конструкции для формирования общей матрицы жесткости. Автоматическое формирование системы уравнений является основным этапом в расчете конструкций по МКЭ и предопределяет вид и количество исходной информации.

В общем случае для формирования системы уравнений необходимо знать взаимную топологическую связь элементов конструкции и крайние условия, геометрические и физические параметры элементов (размеры, жесткости и т. п.), вид, интенсивность и места приложения внешних сил.

Важная связь элементов и крайние условия задаются специальной матрицей индексов Γ . Она имеет размеры $m \times r$, где m — количество элементов конструкции (количество строк), а r — количество объективных параметров для одного элемента (количество столбцов).

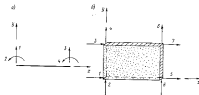


Рис. III.2. Порядки нумерации узловых перемещений: а — для элемента стержня; б — для элемента пластины плоской задачи.

Построение матрицы индексов Γ производится с учетом нумерации узловых перемещений для отдельного элемента в общей и местной системах координат.

В библиотеке матриц жесткости и усилий для всех типов элементов, которые включены в программу, приведен порядок нумерации узловых перемещений. Этого порядка нумерации строго придерживаться при составлении матрицы индексов Γ .

Покажем для примера порядок нумерации узловых перемещений для плоского стержневого элемента (без учета продольных деформаций) и элемента пластинки для плоской задачи теории упругости (рис. III.2).

Построение матрицы индексов начинается с того, что конструкцию разбивают на элементы. Из библиотеки выбирают нужной элемент. Далее нумеруют основные неизвестные конструкции в общей системе координат и элементы конструкции.

На нумерацию неизвестных следует обратить особое внимание. Она должна быть такой, чтобы получаемая система уравнений имела ленточную структуру. Это условие является обязательным и при правильной нумерации неизвестных всегда оказывается выполняемым. Ширина ленты также существенным образом зависит от порядка нумерации.

Чтобы получить ленточную структуру, необходимо все неизвестные в узлах нумеровать последовательно, отделившись от их физиче-

ского смысла (углы поворота, линейные смещения и т. п.). Например, если для системы перекрестных балок, приведенной на рис. III.3, сначала пронумеровать все линейные перемещения $u_1, u_2, u_3, u_{22}, \dots, u_{2n}$, а затем углы поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n}$, то система уравнений не будет ленточной.

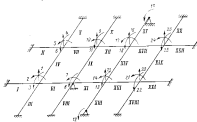


Рис. III.3. Система перекрестных балок. Средними показаны типичные условия перемещений. Римские цифры используются для нумерации элементов.

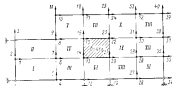


Рис. III.4. Порядки нумерации объективных перемещений для балки-стенки.

Невозможно указать общего правила получения ленты минимальной ширины для разнообразных конструкций. Отметим лишь, что ширина ленты получается меньшей, если узлы обходить последовательно вдоль меньшей стороны конструкции (см. рис. III.3, III.4).

Составление матрицы индексов рассмотрим непосредственно на примере системы перекрестных балок (см. рис. III.3) и балки-стенки, работающей в условиях плоского напряженного состояния (рис. III.4).

Матрица индексов для системы перекрестных балок, изображенной на рис. III.3

Элементы	Обобщенные перемещения			
	1	2	3	4
I	0	0	1	2
II	0	0	4	5
III	0	0	1	3
IV	1	3	4	6
V	4	6	0	0
VI	1	2	0	7
VII	4	5	9	10
VIII	0	0	0	8
IX	0	8	9	11
X	9	11	0	0
XI	0	7	13	14
XII	0	10	16	17
XIII	0	12	13	15
XIV	13	15	16	18
XV	16	18	0	19
XVI	13	14	20	21
XVII	16	17	23	24
XVIII	0	0	20	22
XIX	20	22	23	25
XX	23	25	0	0
XXI	20	21	0	0
XXII	23	24	0	0

Таблица III.2

Матрица индексов для балки-стенки, изображенной на рис. III.4

Элементы	Обобщенные перемещения							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	0	0	1	2	4	5	6	7
II	1	2	0	3	5	7	8	9
III	4	5	6	7	12	0	13	14
IV	6	7	8	9	13	14	15	16
V	8	9	10	11	15	16	17	18
VI	12	0	13	14	19	0	20	21
VII	15	16	17	18	22	23	24	25
VIII	19	0	20	21	25	27	28	29
IX	20	21	22	23	28	29	30	31
X	22	23	24	25	30	31	32	33
XI	25	27	28	29	34	0	35	36
XII	28	29	30	31	35	36	37	38
XIII	30	31	32	33	37	38	39	40

Следует отметить, что приведенная балка-стенка служит только для иллюстрации остальных матриц индексов. Поэтому количество элементов этой относительно небольшим и является недостаточным для получения удовлетворительных результатов.

Каждая строка матрицы индексов показывает для одного элемента, какие известные из общей системы приложены к его узлам, причем их расположение в строке должно соответствовать принятому порядку обхода обобщенных перемещений для элемента.

Выделим, например, элемент XI из системы перекрестных балок (см. рис. III.3). К его концам приложены известные 7, 13, 14 (кручение не учитывается). Сравним теперь нумерацию перемещений выделенного элемента с нумерацией обобщенных перемещений для типового элемента стержня в местной системе координат (см. рис. III.2, а).

Перемещение, соответствующее обобщенному перемещению 1, отсутствует, и в первый столбец одиннадцатой строки матрицы индексов (табл. III.1) следует занести нуль, второму обобщенному перемещению соответствует 7-е неизвестное, третьему — 13-е и четвертому — 14-е неизвестные. Следовательно, одиннадцатая строка матрицы будет иметь вид 0, 7, 13, 14.

Обходя последовательно, начиная с первого, все элементы, получаем матрицу индексов для всей конструкции (в табл. III.1 выделена сплошной линией).

Матрица индексов для балки-стенки (рис. III.4) строится аналогично. Выделим, например, первый элемент и сравним его с элементом плоской задачи теории упругости (см. рис. III.2, б), взятым из библиотечной матрицы жесткости. Известные, соответствующие 1-му и 2-му обобщенным перемещениям, отсутствуют, 3-му и 4-му обобщенным перемещениям соответствуют неизвестные 1, 2 и т. д. В результате первая строка матрицы индексов будет иметь вид 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7. Матрица индексов для всей конструкции выделена в табл. III.2 полуштриховой линией.

Геометрические и физические характеристики задаются в виде матрицы параметров. Каждая строка этой матрицы характеризует один элемент. Количество параметров, необходимых для описания одного элемента, зависит от его типа и приведено в библиотечной матрице жесткостей [11].

Основной язык порядка составления матрицы индексов описывается в конструкции, в которых общие и местные координатные оси параллельны.

Для конструкций с произвольно ориентированными элементами, местные и общие координаты повернуты относительно друг друга. В этом случае задание одной только матрицы индексов является недостаточным для описания взаимного расположения элементов. Необходимо задать еще направляющие косинусы, которые описывают положение главных осей элемента относительно общей координатной системы конструкций. При этом матрица жесткости для элемента должна быть выражена в общей системе координат.

В качестве примера приведем матрицу индексов (табл. III.3) для плоской косугольной рамы (рис. III.5).

Матрица индексов для рамы, изображенной на рис. III.5

Элементы	Обобщенные перемещения					
	1	2	3	4	5	6
I	0	0	0	1	2	3
II	1	2	3	4	5	6
III	4	5	6	0	0	0

Теловой элемент стержня рамы и положительные направления его обобщенных перемещений в общей системе координат приведены на рис. III.6.

Использование матрицы индексов для формирования системы уравнений описано в § 20 настоящей главы.

4. Формирование реакций от внешних нагрузок. Проблема формирования реакций от внешних нагрузок (правой части системы урав-



Рис. III.5. Плоская жесткая рама.

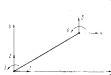


Рис. III.6. Теловой элемент стержня при изгибе в общей системе координат.

нений для определения основных неизвестных) решается просто в случае узловой передачи внешних нагрузок. Распределенные нагрузки заменяются эквивалентной системой — совокупностью сосредоточенных сил. При этом возникает погрешность, для уменьшения которой приходится разбивать конструкцию на более мелкие элементы, что приводит к увеличению числа основных неизвестных.

Матрица индексов позволяет решить задачу автоматического формирования правых частей основной системы уравнений при действии на каждый элемент произвольной распределенной нагрузки. При этом вместо матрицы жесткости для элемента (двухмерной массы) вводится в рассмотрение вектор узловых реакций от внешних нагрузок (одномерной массы) с числом элементов в нем, разным числу обобщенных перемещений для конечного элемента.

Номер столбца матрицы индексов указывает, какой элемент должен быть взят за вектор реакций от нагрузок, а содержимое этого же столбца для рассматриваемого элемента указывает, куда его записать (подробнее см. § 21 этой главы).

5. Решение системы алгебраических уравнений. Как уже было сказано выше, с помощью определенной нумерации узлов элементов можно получить матрица специальной ленточной структуры. При этом на первый план выступает не число совместно решаемых уравнений (хотя оно существенно), а ширина ленты (имеется в виду только симметричная ее часть).

Важнейшей особенностью ленточной структуры матрицы является то, что при решении системы уравнений в оперативной памяти может храниться не вся матрица коэффициентов, а только ее часть. Тем самым число уравнений, решаемых совместно на машинах с той же оперативной памятью, может быть увеличено до 5000—8000. Более того, специализированные программы позволяют решать системы с еще большим числом уравнений; главным образом ограничением является накопление ошибок от округления при числе уравнений более нескольких тысяч. В описываемом варианте программы [11] для решения систем линейных алгебраических уравнений принят метод исключения Гаусса в простейшей форме (другой вариант использует схему Халевского). Как показано в работе [77], метод Гаусса обеспечивает хорошую точность при сравнительно малых затратах машинного времени.

Количественные ограничения для всей программы в целом зависят в большой мере от ограничений, накладываемых на программу решения системы; основные ограничения для программы решения системы уравнений следующие:

1. Максимальная ширина ленты $N = 60$ (по схеме Гаусса) и $H = 115$ (по схеме Халевского).
2. Максимальный порядок системы зависит от ширины ленты и от длины магнитной ленты в одном ленто-протяжном механизме. При максимальной длине магнитной ленты в одном ленто-протяжном механизме (на 63 зоны) получим

n	60	85	50	45	40
N_{\max}	2154	2350	2600	2900	3250

Использование других «матричных» практически снимает ограничения на количество неизвестных.

3. Кроме того, общее число элементов правых частей $N \times Q \ll 3640$ (схема Гаусса);

4. Максимальное число совместно решаемых уравнений при одной правой части (схема Гаусса):

- a) программа решения системы работает автономно: $N \ll 3540$,
- б) программа решения системы работает в составе МКЭ $N \ll 3000$.

Для решения ленты системы разбивается на зоны. Количество строк в зонах зависит от ширины ленты и размера массива, отведенного в МОЗУ для расположения элементов системы уравнений.

Особенности решения систем линейных алгебраических уравнений ленточного типа описаны в § 23—24 этой главы.

6. Вычисление внутренних узловых усилий (напряжений). В результате решения системы уравнений будет получены обобщенные

перемещений (углы поворотов и линейные смещения), которые связаны с внутренними узловыми усилками в общем случае соотношением

$$\{R\}_i = [K]_i \{u_{in}\}_i \quad (19.1)$$

где $\{R\}_i$ — вектор узловых внутренних усилий i -го элемента; $[K]_i$ — матрица жесткости i -го элемента; $\{u_{in}\}_i$ — вектор узловых перемещений для i -го элемента.

В случае двухмерных и объемных элементов с помощью матрицы напряжностей желательно сразу находить напряжения в элементах пластинки или оболочки.

Получить усилия по уравнению (19.1) легко с помощью матрицы индексов. Элементы матрицы индексов указывают, какие перемещения нужно выбрать из общего вектора обобщенных перемещений и перемножить на соответствующую матрицу усилий для элемента.

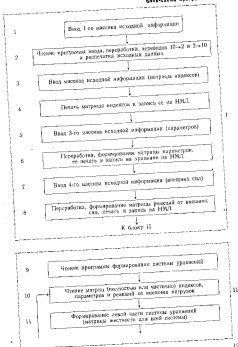
Таким образом, применение метода конечных элементов в сочетании с матрицей индексов позволяет решать самые разнообразные задачи строительной механики и теории упругости при произвольных граничных условиях. Существенным является универсальность такого подхода в сочетании с простотой алгоритма, что позволяет решать системы произвольного вида при минимальной затрате машинного времени, малый объем исходных данных и простота комплексной автоматизации всего хода решения задач.

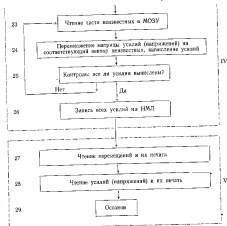
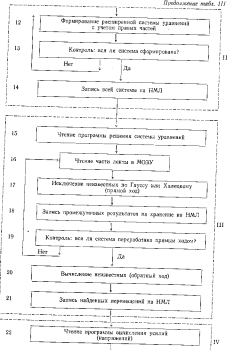
7. Подготовка исходной информации. Исходная информация для программы по МКЭ [11] независимо от типа конструкции включает в общем случае шесть массивов:

- общие характеристики анализируемого объекта;
- матрицу индексов (или информацию о топологии конструкции, если матрица индексов формируется автоматически внутри ЭВМ);
- матрицу параметров (длины, жесткости, толщины и т. п.);
- грузовую матрицу (или информацию о внешних нагрузках, если грузовая матрица формируется автоматически внутри ЭВМ);
- матрицу деления на зоны формирования ИЭЭ, если вся система уравнений не помещается в блок оперативной памяти ЭВМ. Отметим, что для ряда задач эта операция автоматизирована [89];
- матрицу деления на зоны при определении внутренних усилий (напряжений), если все результаты не могут быть размещены в оперативной памяти ЭВМ. Для большинства задач эта матрица формируется автоматически внутри ЭВМ.

Порядок и примеры по подготовке исходной информации описаны в работе [11], поэтому мы их здесь не повторяем. Отметим лишь некоторые характерные особенности:

- исходная информация дается по объему и задается в естественном и привычном для инженера виде;
- параметры повторяющихся элементов не задаются, указывается лишь, что все эти величины уже описаны ранее;
- чем больше элементов в конструкции с различными параметрами (чем сложнее конструкция), тем больший объем занимает исходная информация, и наоборот;





4) для контроля вся исходная информация выводится на печать в виде таблиц;

5) после окончания счета на ЭВМ вся исходная и результирующая информация может быть выведена на печать в виде таблиц. Кроме того, она остается на магнитной ленте и может быть использована в любое время;

6) минимализация исходной информации, например, для гладкой однородной пластины, подвергнутойся изгибу, состоит из нескольких чисел (размеры сетки, толщина пластины, ее жесткость, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, величина нагрузки);

7) время на подготовку исходной информации зависит от объема и сложности объекта и колеблется от 10 мин до 20—30 ч.

В заключение параграфа приведем блок-схему программы расчета конструкций по МКЭ (табл. III.4). Смысл каждого блока ясен из его названия.

В таблице римскими цифрами обозначены следующие укрупненные блоки:

I — блок ввода, печати, хранения и переработки исходной информации; II — блок формирования системы алгебраических уравнений для всей конструкции; III — блок решения системы уравнений; IV — блок вычисления внутренних усилий (напряжений); V — блок печати результатов расчета.

§ 20

Использование матрицы индексов для автоматического формирования системы уравнений к проблеме получения контура минимальной ширины

Известно, что коэффициенты системы уравнений метода конечных элементов в форме метода перемещений представляют собой сумму реакций в рассматриваемом узле по направлению соответствующего неизвестного. Суммируемые реакции представляют собой коэффициенты соответствующих матриц жесткостей для отдельных элементов.

Каждый коэффициент в матрице жесткости для конечного элемента $[K]$ находится на пересечении i -й строки и j -го столбца. Число строк равно числу столбцов и равно порядку этой матрицы l .

Соответственно, каждый коэффициент общей матрицы жесткости $[K]$ находится на пересечении α -й строки и β -го столбца. В общем случае порядок общей матрицы жесткости равен $n \times n$, где n — общее число неизвестных узловых перемещений.

Задача формирования общей матрицы жесткости для конструкции и ее дальнейших обозначений может быть сформулирована таким образом:

- требуется найти значения индексов (адреса) i и j в каждой матрице жесткости для соответствующего элемента конструкции;
- по эти индексы найти значения коэффициентов, подлежащих суммированию и их проиндексировать;
- найти соответствие между индексами i и j , с одной стороны, и индексами α и β , с другой стороны.

Тем самым найдется место в матрице жесткости всей конструкции, куда и должно быть поставлена полученная сумма, т. е. коэффициент общей системы уравнений для определения основных неизвестных.

Иначе говоря, требуется сопоставлять обобщенные перемещения с перемещениями для конечного элемента.

Для того чтобы иметь возможность проводить такое сопоставление в машине, требуется информация о топологии конструкции, о взаимосвязи ее элементов, о геометрических граничных и внутренне-конструктивных условиях задачи, причем вся эта информация должна быть строго формализована. Именно такую информацию о конструкции в полном объеме несет матрица индексов [7].

Еще раз вернемся к построению матрицы индексов и на простом примере (рис. III, 7, а) детально проследим формирование системы уравнений с помощью этой матрицы.

Заданная конструкция расчленяется на дискретные элементы (рис. III.7, б), для которых получены соответствующие матрицы жесткости (рис. III.7, в). В узлах вводятся неизвестные узловые перемещения. Далее, на отдельных дискретных элементах собирается заданная основная система (идеализированная схема конструкции).

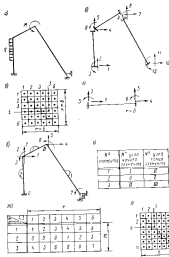


Рис. III.7. Процедура получения матрицы индексов для плоской рамы

Выбор в качестве основных неизвестных перемещений и углов поворота узлов приводит к тождественному удовлетворению условий неразрывности конструкций в узловых точках (римские цифры на рис. III.7, б). Ряд неизвестных (1, 2, 3, 11 и 12) определяется эмпирическими условиями закрепления соответствующих узлов

и из числа неизвестных должны быть исключены. Затем производится переупорядочивание основных неизвестных и нумерация элементов в произвольном порядке (цифры в кружках на рис. III.7, а). На основании этой нумерации составляется таблица соответствия начала и конца элементов (рис. III.7, в). Далее на основании этой таблицы строится матрица индексов (рис. III.7, ж) путем замены номеров узлов номерами неизвестных в этих узлах, причем неизвестные в узлах обходятся в соответствии с обходом, принятым в типовом дискретном элементе (см. рис. III.7, в). Структура МЖ для рамы показана на рис. III.7, з.

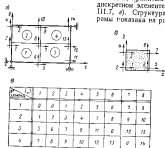


Рис. III.8. Матрица индексов для балки-стержня: а — расчетный стержень; б — corner-элемент элемента; в — сетка индексов.

Как видно, матрица индексов представляет собой построенную последовательность неизвестных, характеризующих каждый элемент конструкции. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 имеют двойной смысл — суть индексы i, j . Числовая последовательность матрицы индексов — суть индексы s и l .

Получение матрицы индексов, показано на рис. III.7, а) — подробно только для выяснения сути вопроса (к этому рисунку мы еще вернемся, когда будем рассматривать проблему автоматизации формирования матрицы индексов для произвольной конструкции). В действительности же матрица индексов строится сразу в один прием, как это показано на рис. III.8.

Задача автоматического формирования общей матрицы жесткости для всей конструкции с помощью матрицы индексов решается следующим образом. Анализируются строки матрицы индексов. Для первого элемента из этой матрицы выбирается первое число (булея пропускаются); номер этого числа есть индекс s (для рис. III.7

возможны следующие значения $s = 1, 2, \dots, 6$). Далее для этой же строки снова выбирается первое число; номер этого числа есть индекс l ($l = 1, 2, \dots, 6$). При каком-то фиксированном значении индекса s , индекс l пробегает все значения, которые встретятся в первой строке ($l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Таким образом отыскиваются места в общей матрице жесткости.

Каждому индексу s и l ставятся в соответствие значения индексов i и j . По значениям i и j отыскиваются необходимые коэффициенты из матрицы жесткостей для отдельных элементов, которые затем переносятся на определенные места поля, заранее подготовленного под матрицу $[K]$, где s суммируются с ранее найденными.

На рис. III.9 показана процедура формирования элемента $k_{s,l}$ общей матрицы жесткости для балки-стержня. Как видно из рисунка, для формирования этого коэффициента надо просуммировать четыре различных коэффициента, найденных на матрице жесткостей для конечных элементов.

С помощью строк индексов, также показанных на рисунке, запишем

$$k_{s,l} = k_{s,l}^{(1)} + k_{s,l}^{(2)} + k_{s,l}^{(3)} + k_{s,l}^{(4)},$$

где цифрами сверху указан номер элемента, из матрицы жесткости которого берутся соответствующие коэффициенты. При этом индексы имеют следующие значения:

$$s = 7; l = 7;$$

$$\begin{cases} i^{(1)} = 7, & i^{(2)} = 5, & i^{(3)} = 3, & i^{(4)} = 1, \\ j^{(1)} = 7; & j^{(2)} = 5; & j^{(3)} = 3; & j^{(4)} = 1. \end{cases}$$

Перебирая таким образом все строки матрицы индексов, машина формирует всю систему уравнений. Следует заметить, что эти коэффициенты получаются не последовательно один за другим и даже не сразу в одной строке общей матрицы жесткости. Здесь все зависит от числовой последовательности в матрице индексов. Так, например, проанализировав первую строку матрицы индексов (рис. III.8), машина сформирует частично коэффициенты общей матрицы жесткости $k_{1,1}; k_{1,2}; k_{2,1}; k_{2,2}; k_{1,3}; k_{2,3}; k_{3,1}; k_{3,2}; k_{3,3}$ и полностью коэффициенты $k_{1,4}; k_{1,6}$.

Ниже описан основной блок процедуры автоматического формирования общей матрицы жесткости для всей конструкции на языке «Алгол-60»

Обозначения

$T [1 : M, 1 : R]$ — двумерный массив матрицы индексов;

$MGE [1 : R, 1 : R]$ — двумерный массив матрицы жесткости для конечного элемента;

$MGR [1 : N \times M]$ — одномерный массив общей матрицы жесткости для всей конструкции;

M — общее число элементов в конструкции;

N — общее число неизвестных в системе.

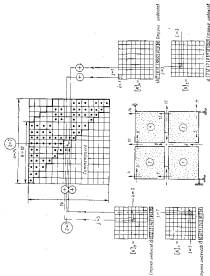


Рис. 11.6. Процедура формирования матрицы жесткости для элемента стержня.

R — порядок матрицы жесткости для элемента конструкции;
 H — ширина ленты общей матрицы жесткости конструкции;
 $N1$ — число строк в одном участке формирования.

Примечания

- 1) $N1$ — зависит от объема памяти конкретной машины;
- 2) массив MGK — массив одномерный для удобства оформления процедуры;
- 3) процедура $MGE(a, b, c)$ — МЖ для элементов — не описана; здесь a, b, c — формальные параметры при формировании МЖ для дискретного элемента;
- 4) процедура $input(I, \dots)$ — ввод информации с перфокарты — не описана. Обычно для конкретного транслятора она является стандартной процедурой.

Procedure Form 1

```

begin integer M, N, K, L, S, A, B, N1, R, H;
input (1, M, N, H, R, N1);
begin integer array T [1 : M, 1 : R];
array MGE [1 : R, 1 : R], MGK [1 : N x H];
input (1, T);
for K := 1 step 1 until M do
begin MG (a, b, c);
E1: for L := 1 step 1 until R do
begin
if T [K, L] <= 0 then goto E1 else
if T [K, L] > 0 then A := T [K, L];
E2: for S := L step 1 until R do
begin
if T [K, S] <= 0 and T [K, S] > N1 then
goto E2; B := T [K, S];
if A > B then MGK [(B - 1) x H + A - B + 1] :=
~ MGK [(B - 1) x H + A - B + 1] + MGE [L, S]
else if B > A then MGK [(A - 1) x H + B - A +
+ 1] := MGK [(A - 1) x H + B - A + 1] +
MGE [S, L]
end S
end L
end K
end
end

```

Часто оказывается удобным формировать общую матрицу жесткости $[K]$ в виде естественного двумерного массива $MGK [1 : N, 1 : H]$ с вычислением только симметричной части системы уравнений. Тогда процедура на языке «Алгол-60» запишется в следующем виде:

Procedure Form 2

```

begin integer M, N, K, R, H, W, U, A, B;
input (1, M, R, N, H);
begin integer array T [1 : M, 1 : R];

```

```

array MGE [1 : R, 1 : R], MGK [1 : N, 1 : R];
input I, T;
for K := 1 step 1 until M do
begin
  MG (a, b, c); comment процедура вычисления матрицы
  жесткости для конечного элемента;
  for W := 1 step 1 until R do
  begin
    for U := 1 step 1 until R do
      if T [K, W] > T [K, U] then goto E1;
      A := T [K, W];
      B := -T [K, U] + 1 - T [K, W];
      MGK [A, B] := -MGK [A, B] + MGE [W, U];
    E1 : end;
  end;
end;
end;

```

Использование матрицы индексов для автоматического формирования только части симметричной ленточной системы уравнений. Система уравнений метода конечных элементов является симметричной относительно главной диагонали: $k_{i,j} = k_{j,i}$.

Кроме того, при правильном порядке нумерации неизвестных матрица получается ленточной, с полонителными коэффициентами на главной диагонали и, как правило, хорошо обусловленной.

Для экономии оперативной памяти машины, которая всегда ограничена, выгодно сразу формировать только симметричную часть ленты коэффициентов (наибольшее число ненулевых элементов в строке правее главной диагонали). К примеру, на рис. III.9 ширина ленты матрицы $N = 10$. Это легко достигается с использованием матрицы индексов.

Очевидно, что в процессе получения общей матрицы жесткости, описанной выше, если для фиксированного индекса S ($S = 1, 2, \dots, R$) в одной строке матрицы индексов индекс L пробегает все значения от 1 до R , то формироваться будут все коэффициенты общей матрицы жесткости без учета симметрии. Если же формировать коэффициенты $k_{i,j}$ при условии $S \leq L$, то будут получиться коэффициенты, расположенные на главной диагонали и правее ее, т. е. только симметричная часть ленты.

Это условие реализуется в программе Form 1 тем, что во внутренних циклах по элементам строки матрицы индексов, помещенном E2, параметру цикла S первоначально присваивается значение L , а не 1.

Если лента системы уравнений (ее симметричная часть) все же не помещается в блок оперативной памяти, то ее придется формировать последовательно по участкам с записью на магнитную ленту. Эта операция также весьма просто может быть реализована с помощью матрицы индексов. При этом можно формировать любую часть ленты, в любой последовательности.

Пусть при определенной ширине ленты N может быть сформировано только n_1 строк ленточной системы уравнений (рис. III.10) объемом $N \times n_1$, равным объему оперативной памяти машины. Для того чтобы начать формирование участка $N \times n_1$, со строки с номером C_1 требуется найти в матрице индексов такую строку, где первый раз встречается индекс C_1 . Номер M этой строки и укажет номер элемента в матрице индексов, с которого следует начать формирование ленты. Для формирования n_1 строк этой части ленты в матрице индексов следует отыскать строку с номером C_{1+n_1} .

Номер этой строки укажет номер элемента в матрице индексов. Эту простую операцию машина выполняет автоматически. Примеры разделения системы на зоны при формировании приведены в работе [11].

Информация состоит из числа участков формирования и размеров каждого участка. Машина формирует на одном и том же поле оперативной памяти ЭВМ отдельные участки матрицы, начиная с первого по счету, и отсылает их на хранение на магнитную ленту.

Для решения системы уравнений в этом же порядке с магнитной ленты считывается участок за участком, и результаты сложения снова записываются на магнитную ленту по то же самое поле.

В порядке нумерации узлов конструкции для получения ленты минимальной ширины. При решении задач по МКЭ структура общей матрицы жесткости существенным образом зависит от порядка нумерации и обхода узлов конструкции, а также от порядка нумерации неизвестных внутри одного элемента. Важнейшей особенностью МКЭ является то, что при правильной нумерации узлов система уравнений имеет ленточную структуру. При этом элементы, расположенные вне ленты, остаются нулевыми и в процессе решения системы уравнений в оперативной памяти машины не присутствуют.

Ширина ленты может быть различной, в зависимости от порядка обхода узлов конструкции. Чем меньше ширина ленты, тем оптимальнее система в смысле ее решения (меньше машинного времени, выше точность решения, меньше исходной информации и т. п.). Кроме того, ширина ленты является одним из главных критериев, связанных с количественными ограничениями для решения задач по МКЭ (в связи с ограниченной оперативной памятью ЭВМ).

На примере рамы, изображенной на рис. III.11, легко проследить, как в зависимости от порядка нумерации неизвестных меняется

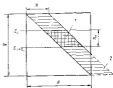


Рис. III.10. К процедуре автоматического формирования любой части системы линейных уравнений. 1 — сформированный участок системы уравнений; 2 — строготомлю, замыкаемый кусок для образования ленточной структуры.

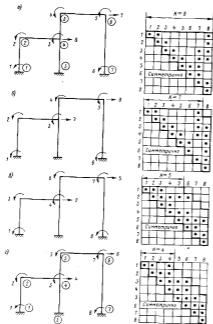


Рис. 11.11. Минимальные структуры системы уравнений для рам с зависимостью от порядка нумерации обобщенных перемещений: а — $N = 8$; б — $N = 7$; в — $N = 5$; г — $N = 4$.

структура общей матрицы жесткости и ширина ленты N . В незаполненных клетках матрицы жесткости стоят нули; точки свидетельствуют о размещении в клетках ненулевых элементов.

Для конструкций с простой топологической структурой нумерация узлов и неизвестных, дающая ленту минимальной ширины, может быть определена путем внимательного обозрения конструкции и соответствующего назначения номеров неизвестных.

Рекомендуется придерживаться следующих подомов:

1) для конструкций с регулярной сеткой обход узлов следует производить вдоль меньшего размера конструкции (рис. 11.12, а, б);

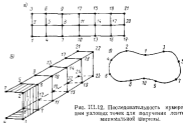


Рис. 11.12. Последовательность нумерации узлов точек для получения ленты минимальной ширины.

для конструкций, имеющих замкнутый контур, обход узлов и их нумерацию производить симметрично относительно некоторого дальнего узла (рис. 11.12, в);

2) в любом другом случае надо стремиться, чтобы разность между соседними номерами узлов была наименьшей (рис. 11.13). Для конструкций с более сложной топологией нумерация узлов и порядок их обхода для получения ленты минимальной ширины становится более сложной задачей, поэтому автоматизация процесса оптимальной нумерации узлов конструкции внутри машины была бы весьма действительным инструментом инженерного труда при решении задач по МКЭ.

Легко заметить, что пере нумерация узлов, а следовательно, и неизвестных в узле означает перестановку строк и столбцов первоначальной матрицы жесткости. Для получения ленты минимальной ширины с помощью машины нужно выполнить полный перебор всех строк. Полный перебор состоит из N этапов, где N — число уравнений. В каждом этапе сравниваются две соседние строки в следующем порядке: первая и вторая, последние и предпоследние, третья и четвертая строки от конца и т. д. Переставлять строки следует только в том случае, если ширина ленты становится меньше или остается

без изменений, а строка, имеющая больше нулей в пределах ленты, отодвигается от центральной строки матрицы.

Описанная выше процедура оптимальной нумерации неизвестных в конструкции для получения ленты минимальной ширины может быть сформулирована как задача линейного целочисленного

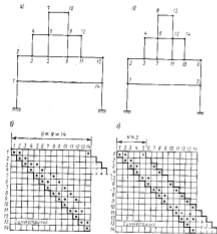


Рис. 11.13. Расчетные нумерации узловых точек для рамы: а, б — случайная, приводимая к ширине ленты $N = 14$; в, г — узловая, приводимая к ширине ленты $N = 5$.

программирования или как задача квадратного программирования с ограничениями, являющимися задачей транспортного типа.

Как показали исследования, эта задача равносильна оптимальной нумерации вершины графа топологической модели расчетной схемы. Однако поиск глобального оптимума требует машинного времени, сопоставимого с временем полного перебора строк и столбцов матрицы системы уравнений. Поэтому целесообразно искать не

оптимальное решение, а близкое к нему достаточно «хорошее» решение, критерием которого является затраты машинного времени.

При переборе строк и перенумерации узлов определяется, равны или не равны нулю элементы матрицы. Если узел B связан с узлом L посредством m крайней мере одного конечного элемента, то в B -й строке и L -столбце матрицы связи узлов ставится единица, если такой связи нет, то в соответствующую клетку ставится нуль. Назовем получаемую таким образом матрицу матрицей связности узлов $[U]$.

Для плоской рамы (рис. 11.11) матрица связности узлов $[U]$ приведена на рис. 11.14.

В нашем примере матрица связности имеет оптимальный вид. В более сложных случаях этого не получается, поэтому перебор строк и столбцов очень удобно производить с помощью матрицы $[U]$, которая является симметричной относительно главной диагонали и имеет размеры $G \times G$, где G — число узлов в конструкции.

Однако в памяти машины каждый элемент матрицы $[U]$ занимает один двоичный разряд, поэтому в машине «Минск-22» можно разместить матрицу $[U]$ с учетом ее симметричности с числом узлов, приблизительно равным, 1700, что вполне достаточно для решения практических задач.

После перебора строк матрицы $[U]$ номера строк в ней укажут, каким образом следует выбрать направление обхода узлов для получения ленты минимальной ширины. Заметим, что с помощью матрицы $[U]$ можно построить численный алгоритм для формирования общей матрицы жесткости без использования матрицы индексов.



Рис. 11.14. Матрица связности узлов $[U]$ для рамы, изображенной на рис. 11.11.

§ 21

Автоматическое формирование с помощью матрицы индексов групповых членов системы уравнений

Проблема формирования узловых реакций от внешних сил (правой части системы уравнений) практически значительно проще задачи формирования общей матрицы жесткости для конструкции. Любая внешняя нагрузка в методе конечных элементов должна быть заменена эквивалентной узловой нагрузкой. При этом для достижения требуемой точности приходится вводить дополнительные узлы, что увеличивает порядок общей матрицы жесткости для всей системы. Последнее хотя и упрощает составление исходной информации, но увеличивает ее объем.

Введение так называемой групповой матрицы — столбца для конечного элемента от внешних сил — позволяет учесть достаточно точно

действием любой распределенной нагрузки без введения дополнительных узлов [89]. Эта матрица представляет собой реакции по направлению единичных перемещений от внешних сил для элемента, закрепленного соответствующими связями. Например, для призматического элемента балки, грузовая матрица от равномерно распределенной нагрузки будет иметь вид

$$[P] = \begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{2} & \frac{ql^3}{12} & -\frac{ql}{2} & \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix}.$$

При воздействии сосредоточенных нагрузок вычислять грузовую матрицу для элемента не нужно, так как ее элементами являются сами силы.



Рис. 11.15. Схема разбивки жесткой плиты при катании на ключевом элементе 4). Такой жесткой элемент 4).

Например, грузовая матрица для элемента 4, описывающая каток жесткой плиты (рис. 11.15), имеет вид

$$[P] = [-12, 0, -5, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0].$$

На рисунке указаны положительные направления обобщенных узловых сил и перемещений (предполагается, что их положительные направления совпадают).

Общая грузовая матрица для всей конструкции получается путем суммирования соответствующих коэффициентов из грузовых матриц для конечных элементов. Для автоматического формирования этой матрицы снова используется матрица индексов. В отличие от процедуры формирования общей матрицы жесткости здесь применяются грузовые матрицы для элементов $[P^{(e)}]$ (однородные массы с числом элементов r) вместо матриц жесткости для тех же элементов.

Номер столбца z соответствующей строке матрицы индексов указывает, какой элемент должен быть выбран из набора грузовых матриц для элемента, а содержимое этого столбца в той же строке укажет место на поле общей грузовой матрицы, куда должен быть послан найденный коэффициент для последующего суммирования его с ранее найденным и посланным в то же место.

«Просматривая» таким образом все строки матрицы индексов, машина автоматически формирует все правые части системы уравнений.

На рис. 11.16 показана вся процедура формирования общей грузовой матрицы для плоской рамы, состоящей из прямоугольных стержней.

На рисунке приведены схема с действующей на нее внешней нагрузкой (рис. 11.16, а), основная расчетная схема с указанием положительных направлений обобщенных узловых неизвестных (рис. 11.16, б), матрица грузовых членов для каждого из трех

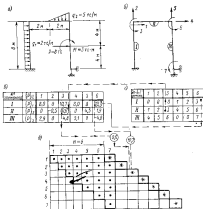


Рис. 11.16. Процедура автоматического формирования грузовой матрицы для плоской рамы.

элементов рамы (рис. 11.16, а), матрица индексов (рис. 11.16, с), структура левых и правых частей (матрица жесткости рамы и грузовые члены) уравнений для определения узловых перемещений.

Пунктирной линией с направляющими стрелками указана последовательность формирования грузового члена в третьем уравнении системы.

Ниже описана основная процедура формирования общей грузовой матрицы для всей конструкции на языке «Алгол-60».

Обозначения

$GRK(I : N)$ — одномерный массив общей грузовой матрицы для всей конструкции;

$GRE(I : R)$ — одномерный массив грузовой матрицы для элемента конструкции.

Остальные обозначения приводятся при описании процедуры формирования общей матрицы жесткости.

Примечание

Процедура $GR(d, e, f)$ — грузовой матрицы для элемента не описана, здесь d, e, f — формальные параметры.

Procedure Grms

```
begin integer M, N, R, K, S, A;  
input (I, M, N, R);  
begin integer array T [1 : M, 1 : R];  
array GRK [1 : N], GRE [1 : R];  
input (I, T);  
for K := 1 step 1 until M do  
begin  
GR (d, e, f); comment процедура вычисления грузовой матрицы для элемента;  
begin  
for S := 1 step 1 until R do  
if T [K, S] = 0 then goto E1  
else if T [K, S] > 0 then  
A := T [K, S];  
GRK [A] := GRK [A] + GRE [S];  
E1: end S  
end K  
end  
end;
```

§ 22

Автоматическое получение матрицы индексов

Выше было показано, что матрица индексов является основой комплексной автоматизации при решении задач методами конечных элементов с помощью ЭВМ. Составление матрицы индексов является чрезвычайно простой операцией и заключается в выписывании номеров неизвестных для узловых точек элементов. Однако при составлении этой матрицы, и особенно при ее перфорации для задач с достаточно большим числом элементов, возможны чисто механические ошибки. Поэтому весьма желательна получение матрицы индексов автоматически непосредственно в машине.

Основная идея автоматического формирования матрицы индексов довольно проста. Она состоит в том, что в определенном порядке нумеруются все узлы конструкции. Затем каждому узлоному номеру

последовательно присваивается группа чисел в возрастающем порядке. Количество чисел в каждой группе зависит от числа степеней свободы данного узла. Так, при решении плоской задачи теории упругости, плоских рамных систем и других, в каждой группе будет по 2 числа (два перемещения в узле u, v), для жестко вращающегося — по 3 числа, для пространственной стержневой системы — по 6 чисел и т. д. В дальнейшем из этих чисел будут сформированы номера неизвестных.

После присвоения каждому узлу группы чисел следует учесть условия закрепления узлов, т. е. кинематические граничные и интруктурные условия. Учет условий закрепления осуществляется в машине следующим образом. Каждому возможному виду закрепления узла ставится в соответствие некоторый двоичный аналог, заданный восьмеричным или десятичным числом. Зная номер закрепленного узла и тип закрепления, полученную числовую последовательность соответствующим образом корректируют. Коррекция состоит в поиске места (по номеру закрепленного узла в последовательности чисел), характеризующего соответствующее направление перемещения в узле. По этому направлению узел закреплен, и, следовательно, перемещение равно нулю. В матрице индексов на этом месте должен стоять нуль. В машину вместо ибнменного числа заносит нуль, а за остальных чисел пишется единица, так как общее число перемещений (известных) становится на единицу меньше. «Просматривая» все закрепленные узлы, каждый раз производим описанное выше задание нулей и вычитание единиц.

На этом заканчивается этап составления неизвестных в узлах с учетом всех граничных и интруктурных условий. Из этой последовательности чисел путем присоединения одних номеров к другим можно построить строки матрицы индексов для всех элементов конструкции.

При конструкциях с простой топологической схемой (например, при регулярных конструкциях), когда имеется закономерность перехода от одного элемента к другому, порядок присоединения одной группы чисел (характеризующей один узел) к другой группе чисел (характеризующей другой узел) оказывается достаточно простым и выполняется внутри машины без дополнительной исходной информации, состоящей в данном случае из номеров закрепленных узлов и типов закрепления.

Если же топология конструкции достаточно сложная (произвольные пространственные конструкции), то указанной выше информации недостаточно и требуется дополнительная исходная информация о номерах и последовательности узлов, описывающих каждый элемент или группу элементов.

Отверстия в конструкциях при таком способе формирования матрицы индексов описываются автоматически. Например, если отверстие находится в пределах элемента, то достаточно толщину этого элемента положить равной нулю: $t = 0$. Если же размеры отверстия таковы, что оно перекрывает несколько элементов и узлов, то толщина этих элементов принимается равной нулю, а соответствующие узлы вообще не нумеруются (машина их пропускает).

Таблица соответствия между видом закрепления узла и номером его типа в программе

Тип узла	Обобщенные перемещения в узле	Дискретный элемент	Номер узла	Примечания
1		011	3	Шарнирно-подвижное опора, отсутствует линейное перемещение
2		010	2	Шарнирно-неподвижное опора, отсутствует линейное перемещение и угол поворота от кручения
3		110	6	Отсутствует угол поворота от кручения
4		001	3	Отсутствует угол поворота от изгиба
5		000	1	Отсутствует угол поворота от изгиба и линейное перемещение
6		100	4	Отсутствуют повороты в узле
7		000	0	Все три перемещения в узле отсутствуют или подобны им узла

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм автоматического формирования матрицы индексов связей системы перекрестных связей. В рассматриваемом перекрестии (рис. III.17) есть особенности: вырез и пиллерсы. Когда базис имеют упругие конструктивные заделки. Будем считать, что для дискретного элемента получения матрицы жесткости шестого порядка, описывающая его сращивание и изгиб под действием поперечной нагрузки (рис. III.17, б). Тогда в перемещении всей конструкции можно описать через обобщенные перемещения внутренних узлов.

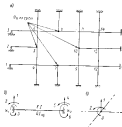


Рис. III.17. Схема перекрестия в виде системы перекрестных базис.

Перекрестие рис. III.17 имеет нерегулярную сетку. Чтобы получить регулярную сетку, необходимую для построения алгоритма, соединим разрезанный стержень и фюз, образовав тем самым фиктивный узел (рис. III.18).

После получения регулярной сетки и последовательной нумерации узлов, в каждом из них расставляются порядковые номера, из которых в дальнейшем будет сформирован вектор неизвестных. Этот этап расчета зафиксирован на рис. III.18.

В начале образуется последовательность чисел 1—78. Для корректировки этой последовательности задается информация о типах особых узлов: узлы 1, 2, 3—2-го типа; узлы 5, 8, 10, 7—1-го типа; фиктивный узел и остальные опоры — 7-го типа.

В информации о физических характеристиках стержней для фиктивных стержней значения E и I задаются равными нулю. Тем самым учитывается вырез и обеспечивается получение простого алгоритма формирования исходной информации для перекрестия.

Последовательно заносим в последовательность чисел (1—78) нули на место отсутствующих перемещений и одновременно вычитаем из оставшихся чисел единицы, получаем окончательную последовательность номеров неизвестных, показанных на рис. III.19.

На рис. III.17, а показан порядок нумерации узлов конструкции: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10 — узлы особые, остальные узлы типовые. В типовых узлах (рис. III.17, в) имеют место все три вида перемещений: линейное перемещение, поворот от изгиба и поворот от кручения. В особых узлах отсутствуют те или иные виды перемещений (табл. III.5).

Наличие пиллерса объясняет 1-й тип узла. К этому типу могут быть отнесены узлы 5, 8, 10, 7. Шарнирно-неподвижные опоры в узлах 1, 2, 3 относятся к типу 2.

При известном числе стержней и флоров легко сформулировать правило для получения номеров узлов, соединяющих стержни.

Ниже приведен алгоритм автоматической расстановки неизвестных в узлах с учетом граничных условий для систем перекрестных связей в плоской задаче теории упругости на языке «Алгол-60» (Procedure Automal).



Рис. III.18. Перевернутый порядок расстановки узловых неизвестных внутри ЭВМ без учета граничных условий для перекрестий.

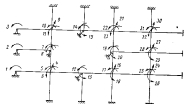


Рис. III.19. Определенный порядок расстановки неизвестных, полученный внутри ЭВМ после учета граничных условий.

Обозначения

G — общее количество узлов в конструкции;
 $N2$ — количество особей (закрепленных) узлов;
 $V [1 : N2, 1 : 3]$ — матрица порядка $N2 \times 2$, описывающая тип закрепления каждого особого узла.
 В этой программе приняты следующие типы закреплений:
 1-й тип — отсутствует вертикальное перемещение узла;
 2-й тип — отсутствует горизонтальное перемещение узла;
 3-й тип — отсутствует горизонтальное и вертикальное перемещение в узле (узел жестко закреплен).
 $NP [1 : 2 \times G]$ — последовательность чисел, из которых образуется последовательность неизвестных для автоматического получения матрицы жесткостей $[T]$.

Procedure Automal;

```
begin integer S, L, G, I, N; integer array NP [1 : 2 * G], V [1 : N,
1 : 2]; input (I, G, N, V);
for L := -1 step 1 until G do
begin NP [2 * L - 1] := -2 * L - 1; NP [2 * L] := 2 * L
end;
for S := -1 step 1 until G do
begin if V [S, 2] = 1 then
begin NP [2 * S - 1] := 0; NP [2 * S] := NP [2 * S]
- 1;
for J := S + 1 step 1 until G do
begin NP [2 * J - 1] := NP [2 * J - 1] - 1;
NP [2 * J] := NP [2 * J] - 1
end
end else if V [S, 2] = 2 then
begin NP [2 * S] := 0;
for J := S + 1 step 1 until G do
begin NP [2 * J - 1] := NP [2 * J - 1] - 1;
NP [2 * J] := NP [2 * J] - 1
end
end else if V [S, 2] = 3 then
begin NP [2 * S - 1] := -NP [2 * S];
for J := S + 1 step 1 until G do
begin NP [2 * J - 1] := -NP [2 * J - 1] - 2;
NP [2 * J] := -NP [2 * J] - 2
end
end
end
end
end;
```

Описанный выше алгоритм был реализован для работы с универсальной программой по МКЭ на ЭВМ «Минск-22» [80] для некоторых классов задач: балочных перекрытий с учетом и без учета симметрии, плоской задачи теории упругости, изгиба пластинков и других.

Заметим, что программа автоматического формирования матрицы индексов работает исключительно быстро. Так, на формирование матрицы индексов для перекрытия с числом элементов 640 потребовалось всего 17 с машинного времени.

§ 23

Решение систем линейных алгебраических уравнений ленточной структуры

Как мы уже говорили, очень важной особенностью метода конечных элементов является то, что при правильной нумерации неизвестных система уравнений имеет ленточную структуру. Все элементы матрицы нулевые. Кроме того, матрица симметрична относительно главной диагонали.

Для таких систем примечательно то, что в процессе их решения методом исключения элементы, расположенные вне ленты, постоянно

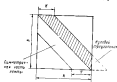


Рис. III.20. Общий вид ленточной симметричной системы уравнений метода конечных элементов.

останется нулевыми и в процессе счета не участвуют. Это дает возможность не записывать их в оперативной памяти. Нулевые элементы внутри ленты при исключении нулевыми не остаются, а заполняются значениями числами, поэтому их следует записывать в память машины.

Такой упорядоченный характер структуры матрицы позволяет описать ее двумя параметрами (рис. III.20): шириной ленты H , представляющей собой число значащих диагоналей, расположенных справа от главной, включая последнюю, и общим числом строк N или общим числом неизвестных системы (число обобщенных перемещений).

При $H = 1$ имеем диагональную матрицу, при $H = 2$ — трехдиагональную, при $H = 3$ — пятидиагональную и т. д. В случае $N = H$ получаем полностью заполненную квадратную матрицу.

В силу симметрии относительно главной диагонали в машине записывается только одна часть ленты (наприхоженные часть ленты на рис. III.20). Массив свободных членов от внешней нагрузки записывается вместе с матрицей коэффициентов, а нижняя часть ленты заполняется нулями (нулевой треугольник), как показано на рис. III.21, а. В данном примере $N = 11$, $H = 4$, $Q = 1$; Q — число столбца реакций от внешней нагрузки.

В машине эта матрица представлена в виде одномерного массива (рис. III.21, б).

Элементы 44, 48, 49, 52, 53, 54 есть элементы нулевого треугольника, а элементы 5, 10, 15, ..., 55 представляют собой

элементы столбца реакций от внешней нагрузки; при $Q > 1$ элементы матрицы реакций от внешней нагрузки записываются построчно и в последовательном порядке вместе с матрицей жесткости для всей системы.

Нумерация членов, где находится тот или иной элемент системы уравнений, вытекает из простых очевидных соотношений, зависящих от ширины ленты H .

Нетрудно заметить, что номера диагональных элементов отличаются друг от друга на величину $(H + Q)$; первый диагональный элемент имеет номер $d_1 = 1$; второй диагональный элемент номер

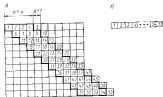


Рис. III.21. Нумерация коэффициентов ленточной системы уравнений (а); массив уравнений, хранившийся в ЭВМ и вид одномерного массива (б).

$d_2 = 1 + H + Q = 1 + 4 + 1 = 6$, третий — $d_3 = 1 + 2(H + Q) = 1 + 2(4 + 1) = 11$ и т. д. Таким же образом, весьма просто, может быть найден номер любого побочного элемента. Иначе говоря, в любой момент времени может быть найден номер любого элемента такой ленточной системы, а следовательно, реализован в машине тот или иной метод ее решения.

Сказать же, какой метод может быть оптимальным при решении той или иной системы уравнений, далеко не просто. Поэтому, прежде чем остановиться на каком-либо методе исключения по Гауссу с прямым и обратным ходом, был сделан предварительный анализ. Коротко остановимся на ходе этих рассуждений при выборе метода Гаусса.

Основная идея гауссовского способа решения симметричных систем уравнений основана на следующей теореме: если матрица $[K]$ — симметричная, положительно определенная матрица, то она имеет единственное разложение вида $[G]^T [G]$, где $[G]$ есть верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами.

Тогда наша система алгебраических уравнений $[K] \{q\} = \{P\}$ может быть записана как

$$[G]^T [G] \{q\} = \{P\} \quad (23.1)$$

и сведена к двум системам с треугольными матрицами

$$|G| \bar{x} = |B|, \quad |G| \bar{y} = \bar{x}, \quad (23.2)$$

которые легко можно решить.

В случае ленточной симметричной матрицы $|K|$, т. е. такой, какой она получается в методе конечных элементов, матрицы $|G|$ и $|B|$ являются делюмыми треугольными матрицами. Это очень важное свойство.

Как уж говорилось, существует две обширные группы методов решения систем уравнений: прямые и итерационные.

Прямые методы характеризуются определением числом арифметических операций, при этом вычисления, выполняемые без погрешностей (это является обычно невыполнимым условием), дают точное решение.

Итерационные методы содержат последовательные приближения. В зависимости от процесса сходимости повторные постановки вектора, получаемого в процессе итераций, приводят к решению с любой установившейся степенью точности.

Очевидно, что должен быть выбран такой метод решения систем высокого порядка, который устойчив по отношению к любым погрешностям вычисления.

Иногда с системами уравнений высокого порядка (более тысячи, например), необходимо учитывать один из важнейших факторов, такой, как влияние погрешностей округления, возникающих в процессе колоссального количества вычислений. Иногда эти погрешности делают полностью невозможным получение решения. Анализа влияния погрешностей для систем высокого порядка крайне сложен.

Зачастую даже для систем 10—20 порядка, вероятно, легче составить программу и решить несколько задач заданным методом, чем провести доскональный анализ погрешностей округления. Поэтому при выборе метода решения систем уравнений приходится опираться на анализ численных примеров, выполняемых с помощью различных методов.

Следует заметить, что для ряда задач строительной механики (например, сжатие пластины с квадратным отверстием, расчет некоторых рамных систем) получаемые системы уравнений решаются методом сопряженных градиентов и итерационным методом Зейделя, при этом иногда получались относительно неудовлетворительные результаты в смысле точности решения. Метод исключения по Гауссу давал при этом более точное решение. Примечательно, что при решении той же пластины без отверстия сходимость метода Гаусса—Зейделя была хорошей и требуемая точность достигалась за то же время, что и при решении по методу Гаусса.

В математике доказано [79], что в общем случае система линейных алгебраических уравнений не может быть решена с помощью меньшего числа операций, чем то, которое требуется в гауссовском исключении.

Метод Гаусса хорошо знаком большинству инженеров. Простота метода позволила сделать довольно простую и компактную про-

грамму, которая для ЭВМ «Минск-22» занимает всего лишь 384 ячейки памяти. При этом скорость решения систем уравнений оказалась довольно высокой. Так, для решения системы с числом уравнений 300 при ширине ленты 13—15 требуется время в пределах одной минуты.

Интересный статистический материал по сопоставлению некоторых методов решения систем уравнений в задачах строительной механики, решаемых конечно-разностными методами, приводится в работе [77], по которой, в частности, мы обратились при выборе метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений ленточной структуры высокого порядка. Что же касается метода последовательных приближений по Гауссу—Зейделю, то он имеет существенные ограничения.

Хотя теоретически для симметричной матриц положительного-определенной формы, характерных для задач строительной механики, процесс обладает неубывающей сходимостью, но это далеко не всегда можно реализовать на практике.

Если главные коэффициенты по модулю меньше суммы побочных коэффициентов (а этот случай иногда встречается в задачах строительной механики), то процесс часто сходится настолько медленно, что порой его трудно осуществить даже на ЭЦММ Прада, в ряде случаев возможно применить то или иное преобразование исходных уравнений или определенное ускорения сходимости. Однако эти преобразования и приемы не носят общего характера, они сугубо индивидуальны и применимы в особых частных случаях.

Отметим, что при исключении известных по Гауссу однопроцентно производится преобразование матрицы правых частей.

Принцип работы программы решения систем уравнений ленточного типа. Сформированная матрица коэффициентов системы уравнений уже готова к решению. Лента системы получается расширением за счет вектора (в общем случае при нескольких нагружениях) или матрицы реакций от внешних сил. Формируется только симметричная часть ленты вместе с главной диагональю.

К концу формирования лента такого вида оказывается записанной на магнитную ленту.

Для решения систем уравнений ленточного типа последняя независимо от общего цикла уравнений разбирается на три зоны (рис. 111.22).

Разбиение производится в машине автоматически по заданной общей информации о всей конструкции.

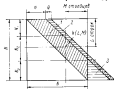


Рис. 111.22. К решению ленточной симметричной системы уравнений методом Гаусса.

Первая зона всегда содержит $(H-1)$ строк и обозначается $N1$, вторая зона состоит из MM стандартных зон и содержит $N2$ строк, третья зона — оставшиеся $N3$ строк.

На рис. III.22 обозначено: N — общее число уравнений; H — ширина ленты; Q — число столбцов реакции от внешних сил; зона 1 — коэффициенты общей матрицы жесткости системы $[K]$; зона 2 — коэффициенты графовых членов; зона 3 — треугольная матрица, заполняемая нулями.

Число строк в стандартной зоне $N2 = MSR$ равно $MSR - (N - H - 1)/2$, а число строк в последней зоне $N3 = N - MSR - N1 = MSR - N1$, при этом $N2 \geq N3$.

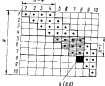


Рис. III.22. Исключение главного элемента 8-й строки. Загнанные элементы $(H-Q)$ строк, необходимые при исключении.

Следовательно, для исключения i -го неизвестного вовсе не требуется держать в памяти все $(i-1)$ преобразованные коэффициенты (и меняется в пределах от 1 до $i-1$), нужна только часть $(H-1)$ вышележащих строк.

Например, для исключения 8-го неизвестного в системе уравнений, изображенной на рис. III.23, не требуется держать в памяти все первые 7 переработанных маш строк, необходимых лямбда $(H-1)$ вышележащих переработанных ранее строк, т. е. 5-ю, 6-ю и 7-ю строки. Первые же 4 ранее переработанные прямым ходом строки не участвуют в исключении коэффициента 8-й строки.

Следовательно, процесс переработки прямым ходом ленточной системы уравнений может быть разбит на отдельные зоны, а связь между последующей и предыдущей зонами будет осуществляться последними $(H-1)$ строками из предыдущей зоны.

Весь процесс прямого хода показан на простом примере при $N = 10$, $H = 3$, $Q = 1$ (рис. III.24).

Первый раз с магнитной ленты считываются $(N1+N2)$ строк, т. е. для нашего примера первые шесть строк объекта $(N1 + N2) \times (H + Q)$ элементов, т. е. $(6 \times 4 = 24)$ 24 элемента.

Так как под рабочей полкой коэффициентов отведен весь 11-й блок МОЗУ ЭВМ «Микш-22», т. е. 4096 ячеек, то для осуществления

процесса прямого хода в машине должно быть выполнено условие

$$(H-1) \times (H+Q) + MSR \times (H+Q) \leq 4096. \quad (23.3)$$

При этом $N2 = MSR$. Если же это условие не выполняется, то всю зону 2 с числом строк $N2$ нужно разделить на MM стандартных зон с числом строк в каждой, равным MSR , с тем, чтобы удовлетворить условию (23.3). Тогда общее число строк зоны $N2 = MM \times MSR$.

После введения первых шести строк (для нашего примера $N1 + MSR$) в оперативную память, эти строки перерабатываются прямым ходом по Гауссу:

$$\bar{a}(i, m) = a(i, m) - k(i, d),$$

$$d] \times a(i, d) / d, d].$$

Затем первые $N2$ строк (первые четыре строки для нашего примера) записываются на магнитную ленту, а 5-я и 6-я строки, т. е. $(H-1)$ из первой переработанной зоны, перемещаются на места 1-й и 2-й строк, т. е. на постоянное рабочее поле для $(H-1)$ строк, осуществляющих связь с последующими зонами.

Далее на поле для стандартной зоны MSR с магнитной ленты считывается очередная стандартная зона. В нашем примере это поле занимает место с 3-й по 6-ю строку.

Затем эти строки, т. е. с 3-й по 6-ю, перерабатываются прямым ходом, опять первые четыре строки готового прямого хода записываются на магнитную ленту, 5-я и 6-я строки опять перемещаются на места 1-й и 2-й строк. Читается очередная стандартная зона, и все снова повторяется.

После того как будут переработаны все стандартные зоны, читается и перерабатывается последняя 3-я зона с числом строк $N3$.

Переработанная 3-я зона на магнитную ленту не записывается, а сразу же используется для обратного хода, при котором последовательно вычисляются все неизвестные, начиная с последней.

Затем с магнитной ленты в обратном порядке записываются все стандартные зоны по то же самое место лямбда, где они перерабатывались прямым ходом, и путем подстановки очередной части вектора неизвестных находят все части искомого объекта матрицы перемещений.

После чего готовая матрица найденных перемещений, начиная с первого, записывается для хранения на магнитную ленту.

Решение системы уравнений с ленточной симметричной матрицей по схеме Калеского. Ленточная структура матрицы коэффициентов системы уравнений дает возможность эффективно использовать метод квадратного корня по схеме Калеского. Этот метод обеспечивает хорошую устойчивость числового алгоритма при решении систем уравнений высокого порядка.

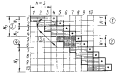


Рис. III.24. Процедура прямого хода при исключении неизвестных по методу Гаусса.

Все основные операции могут быть выполнены за три шага по уравнениям (23.1) и (23.2).

Шаг 1. Нахождение треугольной ленточной матрицы $[G]$, так чтобы произведение ее на транспонированную матрицу $[G]^T$ давало исходную матрицу коэффициентов $[K]$.

Перепирав снова уравнения (23.2), получим

$$[K] = [G]^T [G]. \quad (23.4)$$

Для примера возьмем ленточную симметричную матрицу $[K]$ порядка 5×5 и $N = 3$, тогда подробная запись уравнения (23.4) будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & & \\ & k_{22} & k_{23} & & \\ & & k_{33} & & \\ & & & k_{44} & \\ & & & & k_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & & & & \\ g_{12} & g_{22} & & & \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & & \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} & \\ g_{15} & g_{25} & g_{35} & g_{45} & g_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & & \\ & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \\ & & g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ & & & g_{44} & g_{45} \\ & & & & g_{55} \end{bmatrix} \quad (23.5)$$

Элементы матрицы $[G]^T$ определяются построчно (используется правило умножения двух матриц) слева направо в следующем порядке:

а) находится главный элемент G_{11} первой строки:

$$G_{11} = \sqrt{k_{11}}; \quad (23.6)$$

б) определяются побочные элементы первой строки:

$$G_{1j} = k_{1j}/G_{11} \quad (j = 2, 3, \dots, N); \quad (23.7)$$

в) вычисляются диагональные элементы $[G]_{ii}$ при $i > 1$ как корни квадратные из разности соответствующих диагональных элементов k_{ii} и суммы квадратов всех заранее вычисленных элементов $[G]$, стоящих выше в столбце над этим диагональным элементом:

$$G_{ii} = \sqrt{k_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} G_{ij}^2} \quad \text{при } i > 1. \quad (23.8)$$

Если на этом этапе подкоренное выражение получается отрицательным, то это означает, что исходная матрица вырожденная. Следует отметить, что отрицательное число в формуле (23.8) может быть следствием неустойчивости конструкции в целом.

Вырожденная или отрицательно-определенная матрица может быть также следствием неоптимального выбора расчетной схемы кон-

струкции, например при попытке определения перемещения из плоскости пластины, работающей в условиях плоского напряженного состояния, в случае неазероупругой системы (вызвана перемещения ее как абсолютно твердого тела);

г) вычисляются построчно побочные элементы G_{ij} как разности между соответствующими элементами k_{ij} исходной матрицы и суммой произведений элементов столбцов i и j , разделенных на диагональный элемент G_{ii} по формуле

$$G_{ij} = 1/G_{ii} \left(k_{ij} - \sum_{a=1}^{i-1} G_{ia} G_{aj} \right) \quad \text{при } i, j > 1. \quad (23.9)$$

Операции второго шага являются основными и самыми трудоемкими при решении системы уравнений методом квадратного корня по схеме Халемского, так как после получения матрицы $[G]^T$ все остальные операции сводятся к двум подстановкам по уравнению (23.9).

Шаг 2. Определяют промежуточный вектор неизвестных $[\bar{z}]$ сверху вниз посредством процесса исключения, используя транспонированную треугольную матрицу $[G]^T$:

$$[G]^T [\bar{z}] = \{\bar{P}\}. \quad (23.10)$$

Одновременно с получением матрицы $[G]^T$ преобразуются коэффициенты правой части системы уравнений по уравнению (23.9).

Шаг 2 выделяется только формально, для чистоты описания алгоритма. Фактически элементы вектора $[\bar{z}]$ получаются одновременно с матрицей $[G]^T$ и вносятся на место вектора $\{\bar{P}\}$.

Шаг 3. Определяют вектор неизвестных $[\bar{q}]$ исходной системы уравнений путем обратной подстановки снизу вверх, используя результаты шагов 1 и 2 по уравнению

$$[G] [\bar{q}] = [\bar{z}]. \quad (23.11)$$

При исключении неизвестных по методу Гаусса мы можем держать в памяти не всю ленточную систему уравнений, а только ее часть. Но для переработки коэффициентов системы уравнений в памяти должно все время находиться $(N-1)$ строк для связи частей ленточной системы между собой (см. на рис. 11.24 этап передвигаки).

Схема Халемского позволяет более оптимально использовать память ЭВМ, так как на первом шаге при получении матрицы $[G]^T$ одновременно из каждой строки формируется и запоминается вся информация, необходимая для последующего исключения.

Эта информация характеризуется следующими тремя величинами: а) одномерным массивом [вектор длиной $(B-1)$] для накопления сумм квадратов элементов, стоящих в столбце над искомым диагональным элементом, по уравнению (23.8), где B — ширина ленты;

б) одномерным массивом длиной GP для накопления сумм попарных произведений элементов столбцов i и j по уравнению (23.9), где $GP = (B^2 - 3B + 2)/2$;

в) одномерным массивом длиной $(B-1)$ для преобразования элементов столбца правых частей по уравнению (23.16).

Эти три массива занимают $(B^2 + B - 1)/2$ ячеек памяти, тогда как решение системы уравнений по методу Гаусса в описанном выше варианте требует сохранения $(B + 1) \times (B - 1) = (B^2 - 1)$ ячеек памяти ЭВМ, т. е. почти в два раза больше, чем в варианте метода Халешко.

Ниже приводится Алгоритм-программа решения системы алгебраических уравнений для ленточной симметричной матрицы по методу Халешко с автоматической разбивкой на части.

Обозначения

N — общее количество неизвестных;

B — ширина ленты;

P — количество столбцов нагрузочных членов системы уравнений;

$GP = (B^2 - 3B + 2)/2$;

KP — количество порций при решении системы по частям в случае, если вся система не может быть размещена в блоке оперативной памяти ЭВМ;

T — количество строк в одной порции;

F — объем оперативной памяти ЭВМ «Минск-22» для размещения исходных матриц 16550 — количество слов, оставшихся от всей памяти (8192) после размещения программы;

$K [1 : T, 1 : B + P]$ — матрица системы уравнений;

$G [1 : B - 1]$ — вектор для вычисления коэффициентов на главной диагонали матрицы;

$PP [1 : GP]$ — вектор для вычисления побочных коэффициентов;

$D [1 : P, 1 : B - 1]$ — матрица для вычисления грузочных членов;

$X [1 : P, 1 : T]$ — матрица результирующих перемещений;

$A1$ — начало на магнитной ленте для записи очередной порции полученных неизвестных;

A — начало на магнитной ленте для записи (столбца) очередной порции коэффициентов системы;

div — стандартная процедура деления целого деления;

$tape$ — стандартная процедура записи на магнитную ленту;

$array$ — стандартная процедура ввода числовой информации с перфокарты.

```
begin integer N, B, P, B1, B2, B3, GP, F, KP, T, R, N4, J, S, A, A1;
input (1, N, B, P); A1 := 33408 + N * P; B1 := B - 1; B2 :=
= B - 2;
B3 := B + P; GP := div (B * B - 3 * B + 2, 2);
F := 6550 - GP - P * B1 - B3; T := R := div (F, B3);
if T >= N then
begin T := R := N; KP := -1; N4 := 0; goto L8
end;
KP := div (N, T); N4 := N - KP * T; if N4 > 0 then
KP := KP + 1;
L8: begin array K [1 : T, 1 : B3], G [1 : B1],
PP [1 : GP], D [1 : P, 1 : B1];
for I := 1 step 1 until GP do PP [I] := 0;
for I := 1 step 1 until B1 do G [I] := 0;
for I := 1 step 1 until P do
for S := 1 step 1 until B1 do D [I, S] := 0;
for S := 1 step 1 until KP do
begin comment Начало прямого хода;
if S = KP and N4 > 0 then R := N4;
begin integer J, C1, V, C2, N1, N2, N3, C, L;
A := 320 + (S - 1) * T * B3; tape (0, 2, A, K);
for J := 1 step 1 until R do
begin K [I, J] := arr (K [I, J] - G [I]);
for L := 1 step 1 until P do
K [I, B + L] := (K [I, B + L] - D [L, I])
/ K [I, J];
for J := 2 step 1 until B1 do
begin
K [I, J] := (K [I, J] - PP [J - 1]) / K [I, J];
G [J - 1] := G [J - 1] + K [I, J] * K [I, J];
for L := 1 step 1 until P do
D [L, J - 1] := D [L, J - 1] + K [I, B + L] *
K [I, J];
end;
K [I, B] := K [I, B] / K [I, J];
G [B1] := K [I, B] * K [I, B];
for L := 1 step 1 until P do
D [L, B1] := K [I, B + L] * K [I, B];
C1 := 0;
for V := 2 step 1 until B1 do
begin C1 := C1 + V; C2 := C1 + V + 1;
N1 := (V - 1) * B + 1 - C1; N2 :=
V * B - C2;
N3 := B - V;
for C := N1 step 1 until N2 do
PP [C - N3] := PP [C] + K [I, V1] * K
[I, V + C + 1 - N1];
```

**Ошибки округления
и итерационное уточнение решения системы уравнений**

```

PP [N1 - 1] := K U, V1 × K U, B]
end
end;
if S = KP then goto L1; tape (K, 0, 0, A);
L1: end
end Команд прямого хода;
for J := 1 step 1 until P do for S := 1 step 1
until B1 do D [J, S] := 0;
for S := 1 step 1 until KP do
begin comment Начало обратного хода;
if S = 1 then R := T;
if R < B1 then F := -R else F := B1;
begin integer M, H, G, E1, J, L; real U;
array X [1: P, 1: R]; M := B1;
for J := R step -1 until 0 do
begin if I = 0 then goto L3;
for L := 1 step 1 until P do
begin U := 0; H := B;
for J := M step -1 until 0 do
begin if J = 0 then goto LA
U := U + K [I, H] × D [L, J]; H := H
- 1;
end;
LA: if M < 0 then E1 := B else E1 :=
R - J + 1; for G := 2 step 1 until
E1 do U := U + K [I, G] × X [L, J + G - 1];
X [L, J] := (K [I, B + L] - U/K [I, 1]
end; M := M - 1;
end;
L3: if KP = 1 then goto L5; if S < 2 then
goto L6; if S ≥ 2 and R ≥ B1 then
goto L6; G := S × R + N4 - R; H := R + 1;
for L := 1 step 1 until P do for J := G
step -1 until H do
begin if J > B1 or (J - R) < 1 then
goto L7; D [L, J] := D [L, J - R];
L7: end;
L6: for J := 1 step 1 until F do
for G := 1 step 1 until P do D [G, J] := X [G, J];
A1 := A1 - R × P; A := A - T × B3;
tape (X, 0, 1, A1);
L5: if key (1) then output (3, 'E', X)
end;
if S = KP then goto L2;
tape (0, 2, A, K);
L2: end Команд обратного хода
end
end Команд программы;

```

Несмотря на то что ошибки округления в методе исключения по Гауссу для хорошо масштабированной матрицы очень малы (179, 85), иногда возникает необходимость получить более высокую точность, оценить погрешность и, если потребуется, уточнить полученное решение.

Представление об ошибках округления необходимо потому, что мы будем иметь дело с числом уравнений, превышающим 1000. При этом число операций над числами с плавающей запятой (число сложений, вычитаний, умножений и делений) измеряется уже десятками и сотнями миллионов.

Разрядная сетка для размещения чисел в машине ограничена. Поэтому в каждой элементарной арифметической операции происходит ошибка при округлении.

Вместе с тем важно отметить, что ошибки округления получаются с разными знаками. В силу этого нельзя утверждать, что скорость накопления ошибок округления с увеличением числа уравнений имеет постоянную тенденцию к пропорциональному возрастанию. Однако ясно к то, что при больших системах уравнений эти ошибки могут накапливаться. Поэтому их анализ является чрезвычайно важной задачей.

Поскольку эти вопросы достаточно сложны, мы ограничимся некоторыми важными частными случаями, и в какой-то мере проиллюстрируем свет на поставленные вопросы.

Прежде всего укажем, что используемый в расчетах упругих систем метод конечных элементов при правильной нумерации узлов всегда дает симметричную левостороннюю матрицу коэффициентов. При этом матрица является положительно-определенной, невырожденной и в большинстве случаев хорошо обусловленной, а система уравнений $[A][x] = [b]$ имеет единственное решение $[x]$, которое мы можем записать в виде $[x] = [A]^{-1}[b]$.

Так как с нахождением обратной матрицы $[A]^{-1}$ связано получение решения системы уравнений, становится очевидным, что если матрица системы уравнений имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю, то система не имеет решения. Практически огромные трудности возникают и в том случае, если хотя бы одно собственное значение матрицы оказывается очень малым. При этом система уравнений будет иметь неустойчивое решение, или, как говорят, окажется плохо обусловленной. Для плохо обусловленных матриц ошибки округления при исключении по Гауссу иногда могут дать совершенно неправдоподобный результат.

В работе Уилкинсона [79] показано, что при выборе главного элемента максимальным по абсолютной величине в столбце матрицы ошибки округления резко уменьшаются.

Однако при перестановке столбцов нарушается симметрия матрицы. Для сохранения симметрии требуется одновременно пере-

ставить и строки, а эта операция занимает много машинного времени. В этой же работе Уилкинсон доказал, что если матрица симметрична и положительного определителя, то порестановкой можно опустить без серьезного увеличения ошибок округления.

Рассмотрим некоторые признаки обусловленности матриц.

Число обусловленности $\text{cond}[A]$ равно отношению наибольшего собственного значения матрицы $[A]$ к ее наименьшему собственному значению, т. е. $\text{cond}[A] = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

Если $\text{cond}[A]$ относительно мало, то матрица $[A]$ является хорошо обусловленной по отношению к задаче решения системы уравнений, если же $\text{cond}[A]$ относительно велика, то матрица $[A]$ является плохо обусловленной по отношению к той же задаче.

Для некоторых матриц можно судить о их плохой обусловленности по величине определителя матрицы. Малость определителя $|A|$ иногда влечет за собой плохую обусловленность матрицы $[A]$, так как можно показать, что $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, где λ_i — i -е собственное значение матрицы $[A]$. Однако, с учетом того, что число обусловленности матрицы $[A]$ $\text{cond}[A] = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, может случиться, что матрица $[A]$ хорошо обусловлена, хотя ее определитель мал.

Получение числа обусловленности — весьма трудоемкая задача из-за громадного числа арифметических операций и для больших матриц практически невыполнимо. Для матриц с относительно малым порядком был проделан анализ числа обусловленности, показавший, что метод конечных элементов дает, как правило, хорошо обусловленные матрицы.

Говоря об ошибках округления при решении системы уравнений по Гауссу, мы задержались сейчас не столько на верхней границе возможной ошибки округления (это также сложная задача; к решению этой задачи достаточно близко подошел Уилкинсон [79], Дж. Форсайт и К. Моллер [85]), сколько указать некоторые причины для организации вычислений в машине, которые свели бы эту ошибку к минимуму.

Одной из наиболее общих операций с матрицами является нахождение суммы произведений, т. е. скалярного произведения двух

векторов типа $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 |b_i|$. При перемножении двух матриц эту операцию требуется производить n^2 раз. Значительное уменьшение ошибок округления может быть достигнуто за счет увеличения разрядной сетки ячейки.

При обычном анализе округлений умножение в системе с плавающей запятой рассматривается как операция, аппроксимирующая точное умножение, и дается оценка разности между произведением в системе с плавающей запятой « $a \times b$ » и точным произведением ab . Однако тут возникает трудность такого характера, что умножение с плавающей запятой не является ассоциативной операцией. Более того, сложение и вычитание в системе с плавающей запятой « $a + b$ » и « $a - b$ » не ассоциативны. При этом закон дистрибутивности также не выполняется. Поэтому обычный анализ округлений в данном

случае не может быть использован и требуется построить очень сложный анализ округлений, предложенный в [79].

При некачественной по Гауссу ошибки округления уменьшаются, если каждый раз проводить порестановку строк и столбцов с тем, чтобы деление проходило по элементу с наибольшим абсолютным значением. Однако это значительно усложняет программу и увеличивает время счета. Кроме того, метод конечных элементов дает, как правило, такую систему уравнений, в которой на главной диагонали стоят наибольшие по абсолютному значению коэффициенты.

Отметим еще такую деталь. Так как система уравнений n с симметричной, то при прямой ходе используется только симметричная часть ленты и промежуточные коэффициенты для экономии ячеек памяти не сохраняются. Например, для матрицы 3-го порядка новый коэффициент \bar{a}_{22} , переработанный прямым ходом, вычисляется так:

$$\bar{a}_{22} = a_{22} - (a_{21}^2/a_{11} + \bar{a}_{23}^2/a_{33}).$$

Как было сказано, диагональные коэффициенты \bar{a}_{11} , \bar{a}_{22} , \bar{a}_{33} больше по абсолютной величине, поэтому важно и в данном случае сначала выполнить деление, а затем умножение в последовательности

$$(a_{12}/a_{11} + a_{13} + \bar{a}_{22}/\bar{a}_{22} \times \bar{a}_{23}),$$

что, во-первых, исключит переполнение разрядной сетки при выполнении операций « $a_{12}/a_{11} + a_{13}$ » а в случае очень больших значений типа (E/I) , а во-вторых, уменьшит ошибку округления.

То же самое относится к процедуре над числами с плавающей запятой при обратном ходе.

Нужно также вообще напомним погрешностей, к сожалению, не уделяется. Однако можно, пользуясь итерационными методами, уточнить решение, полученное методом исключения по Гауссу. Решение при этом из-за погрешностей округления получается приближенным.

С другой стороны, итерационный метод может дать любую наперед заданную точность решения.

Вследствие этого вектор неизвестных, найденный с какой-то погрешностью методом исключения по Гауссу и принятый в качестве текущего приближения, последующими итерациями может быть уточнен. На каждом шаге итерации используется тот же метод, с помощью которого получено нулевое приближение.

Если система уравнений имеет вид

$$[A]x = |b|, \quad (24.1)$$

то, подставив сюда найденный вектор $|x^{(k)}|$, получим новую

$$|b^{(k)}| = |b| - [A]|x^{(k)}|, \quad (24.2)$$

которую принимаем за новую правую часть для отыскания вектора $|x^{(k+1)}|$.

Для k -го шага итерации возьмем уравнение

$$[A]|x^{(k+1)}| = |b| - [A]|x^{(k-1)}| = |b^{(k)}|,$$

решение которого ищется тем же способом исключения по Гауссу.

Итерация продолжается до тех пор, пока элементы столбца $\{b^{(k)}\}$ не станут меньше наперед заданного малого значения ϵ . Окончательное решение имеет вид

$$\{x\} = \{x^{(0)}\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\Delta x^{(k)}\}.$$

При этом важно, чтобы вычисление элементов $\{b^{(k)}\}$ выполнялось с более высокой точностью, чем остальные операции.

Ошибка $\{\epsilon_1\}$ в решении $\{x^{(0)}\}$ связана с $\{b^{(0)}\}$ соотношением

$$\{\epsilon_1\} = \{x^{(0)}\} - [A]^{-1} \{b\} = [A]^{-1} ([A] \{x^{(0)}\} - \{b\}) = -[A]^{-1} \{b^{(0)}\}.$$

Если рассмотреть норму ошибки $\{\epsilon_1\}$, то она на основании неравенства Коши—Шварца—Буняковского выражается следующим образом:

$$\|\epsilon_1\| < \|A^{-1}\| \|b^{(0)}\|$$

откуда видно, что ошибка округления будет уменьшаться с увеличением нормы $\|b^{(0)}\|$, так как норма $\|A^{-1}\|$ постоянна.

Это обстоятельство указывает на то, чтобы вектор невязки $\{b^{(0)}\}$ вычислялся более точно, чем $\{x^{(0)}\}$, например с двойной точностью, ибо при вычислениях с плавающей запятой с обычной точностью точность $\{b^{(0)}\}$ будет потеряна в случае вычитания чисел с получением малых разностей типа $\{b^{(0)}\} - [A] \{x^{(0)}\}$, что существенно влияет на скорость сходимости итерационного уточнения решения.

Наконец, остановимся на особенностях вычисления определителя при вычислениях с плавающей запятой.

Необходимость вычисления определителя возникает довольно часто, например при решении задач динамики, устойчивости и других.

Существует одна довольно неожиданная проблема, связанная с необходимостью получения произведения из n чисел из-за неопределенности переполнения разрядной сетки или появления машинного нуля.

Можно показать, что определитель матрицы $[A]$ равен

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}. \quad (24.3)$$

где a_{ii} — коэффициенты, расположенные на главной диагонали после проведения прямого хода при исключении по Гауссу.

Первые коэффициенты a_{11} , a_{22} и т. д. при решении задач по МКЭ имеют порядок $10^8 - 10^9$, т. е. порядок (E^2) , где $E = 2 \cdot 10^9$ тс/м² (конечно, имеется возможность эти коэффициенты масштабировать), а наибольшее часто в машине «Минск-22» имеет порядок $\sim 10^6$.

С увеличением номера i порядок коэффициента a_{ii} заметно снижается, поэтому ясно, что во избежание переполнения следует порядок умножения в (24.3) изменить на следующий:

$$|A| = (a_{11}a_{nn}) \times (a_{22}a_{n-1, n-1}) \times \dots$$

К необходимости решения плоской задачи теории упругости приводит много важные задачи строительной механики корабля: об изгибе широкополых балок и судовых перекрытках со вторым лямом, концентрации напряжений вокруг вырезов в судовых пластинах, напряженном состоянии и шпангоутных рамах супертавернов, об изгибе судового корпуса как пластинчато-оболочечной упругой системы и т. п.

Исключительно широкая область приложения плоской задачи теории упругости в расчетах судовых конструкций требует достаточно подробного рассмотрения метода конечных элементов применительно к решению этой задачи. При этом чаще всего используются два типа конечных элементов: пластины треугольной и прямоугольной формы, которые ниже нами и будут рассмотрены.

Матрица жесткости для треугольного плоского элемента

Треугольный элемент с тремя узловыми точками. Треугольный конечный элемент (рис. IV.1) с вершинами 1, 2, 3 нагружен узловыми силами $\{R\} = \{R_{1x} R_{1y} R_{2x} R_{2y} R_{3x} R_{3y}\}$.

Введем в рассмотрение также вектор узловых перемещений элемента $\{q\} = \{u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3\}$, где u_i , v_i — перемещение i -го узла соответственно в направлениях осей x и y .

Дальнейшей нашей задачей и будет установлена связь

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (25.1)$$

где $[K]$ — некая матрица жесткости конечного элемента.

Уже сама схема идеализации, приводящая исходную конструкцию к совокупности конечных элементов, связанных между собой лишь в узловых точках, требует, чтобы напряженное состояние в каждом из элементов однозначно определялось через значения узловых перемещений. В данном случае положение элемента полностью

определяется заданием шести компонентов узловых перемещений. Это позволяет предположить закон изменения компонентов перемещений для произвольной точки конечного элемента в виде

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (25.2)$$

или

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}. \quad (25.3)$$

Здесь


$$\{U\} = \{u \ v\}; \quad (25.4)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}; \quad (25.5)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\},$$

где α_i — произвольные параметры.

Матрицу $[A]$ можно выразить через $\{q\}$. Для этого, используя (25.2), вычисляем значения компонентов перемещений узловых точек элемента:



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ v_1 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ v_2 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\ v_3 &= \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Рис. IV.1. Треугольный конечный элемент для реакции плоской задачи теории упругости.

или, в матричной форме,

$$\{q\} = [B] \{\alpha\}, \quad (25.7)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (25.8)$$

Отсюда

$$\{\alpha\} = [B]^{-1} \{q\} \quad (25.9)$$

Исключая с помощью (25.9) вектор $\{\alpha\}$ из (25.3), получим искомого связь между $\{U\}$ и $\{q\}$:

$$\{U\} = [C] \{q\}. \quad (25.10)$$

где

$$[C] = [A] [B]^{-1}. \quad (25.11)$$

В скалярной форме зависимость (25.10) перепишется в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2F} \{y_{23}(x-x_2) - x_{23}(y-y_2)\} \alpha_1 + \{y_{23}(x-x_2) - \\ &\quad - x_{23}(y-y_2)\} \alpha_4 + \{1-y_{23}(x-x_2) + x_{23}(y-y_2)\} \alpha_2, \\ v &= \frac{1}{2F} \{y_{23}(x-x_2) - x_{23}(y-y_2)\} \alpha_1 + \{y_{23}(x-x_2) - \\ &\quad - x_{23}(y-y_2)\} \alpha_2 + \{1-y_{23}(x-x_2) + x_{23}(y-y_2)\} \alpha_5, \end{aligned} \quad (25.12)$$

здесь $2F = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$ — удвоенная площадь треугольника;

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j. \quad (25.13)$$

Полученные выражения для компонентов перемещения могут быть использованы для определения компонентов деформаций:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2F} \{y_{23}\alpha_1 + y_{23}\alpha_2 - y_{23}\alpha_5\},$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2F} \{-x_{23}\alpha_1 - x_{23}\alpha_2 + x_{23}\alpha_5\}, \quad (25.14)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2F} \{-x_{23}\alpha_1 - x_{23}\alpha_2 + x_{23}\alpha_5 + \\ + y_{23}\alpha_1 + y_{23}\alpha_2 - y_{23}\alpha_5\}$$

или, в матричной форме,

$$\{\epsilon\} = [D] \{q\}, \quad (25.15)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}. \quad (25.16)$$

$$[D] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{23} & 0 & -y_{23} & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & -x_{23} & 0 & x_{23} \\ -x_{23} & y_{23} & -x_{23} & y_{23} & x_{23} & -y_{23} \end{bmatrix}. \quad (25.17)$$

В матричной форме закон Гука для ортогонного материала может быть записан в виде

$$\{\sigma\} = [E_2] \{\epsilon\}, \quad (25.18)$$

здесь

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}; \quad [E_2] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (25.19)$$

$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$ — параметры, характеризующие упругие свойства ортогонного материала.

Исключая теперь с помощью зависимости (25.15) вектор $\{e\}$ из правой части (25.16), получаем выражение, позволяющее определить напряжения в элементе по известным значениям его узловых перемещений:

$$\{\sigma\} = [E] \{q\}, \quad (25.20)$$

где

$$[E] = [E_0] [D]. \quad (25.21)$$

В методе конечных элементов матрицу $[E]$ обычно называют матрицей напряжений. Выпишем значение этой матрицы:

$$[E] = \frac{E_1}{2F(1-\nu_1\nu_2)} \begin{array}{c|cccccc} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline & \nu_{21} & -\nu_{12}\nu_{21} & \nu_{21} & -\nu_{12}\nu_{21} & -\beta_{11} & \nu_{12}\nu_{21} \\ \hline & \nu_{12}\nu_{21} & -\nu_{11}\nu_{21} & \nu_{12}\nu_{21} & -\nu_{11}\nu_{21} & -\nu_{12}\nu_{21} & \nu_{11}\nu_{21} \\ \hline & -\alpha_1\nu_{21} & \alpha_2\nu_{21} & -\alpha_1\nu_{21} & \alpha_2\nu_{21} & \alpha_1\nu_{21} & -\alpha_2\nu_{21} \end{array} \quad (25.22)$$

здесь

$$\alpha_i = \frac{a_i}{L_1} (1 - \nu_1\nu_2).$$

Переходим теперь непосредственно к вычислению матрицы жесткости $[K]$. Для ее определения можно воспользоваться формулой (3.8):

$$[K] = \int_V [D]^T [E] dV. \quad (25.23)$$

В случае треугольного элемента приняты нами зависимости (25.2) для компонентов перемещений приводят к тому, что элемент матрицы $[D]$ в стоящих под знаком интеграла в правой части зависимости (25.23), не содержит переменных координат x, y . Поэтому выражение (25.23) можно упростить и привести к виду

$$[K] = hF [D]^T [E], \quad (25.24)$$

где h — толщина элемента.

Непосредственно из (25.24) можно получить окончательное выражение для матрицы жесткости треугольного элемента, изготовленного из ортотропного материала [см. выражение (25.25)].

В частном случае, для изотропного материала, матрица упругости $[E_0]$ с помощью (25.19) упрощается, так как $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. При этом компоненты напряжения оказываются постоянными в пределах элемента. И все же применение таких

(25.25)

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3
u_1						
v_1						
u_2						
v_2						
u_3						
v_3						
R_{11}						
R_{12}						
R_{13}						
R_{14}						
R_{15}						
R_{16}						

$\beta_{11} + \alpha_1^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

$\beta_{11} + \alpha_2^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

$\beta_{11} + \alpha_1^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

$\beta_{11} + \alpha_2^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

$\beta_{11} + \alpha_1^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

$\beta_{11} + \alpha_2^2$
 $(\nu_1 + \nu_2) \alpha_1 \alpha_2$
 $\nu_{12} \nu_{21} + \alpha_1 \alpha_2 \nu_{21}$
 $\alpha_1 \nu_{21} \nu_{12} + \nu_{12} \alpha_1$
 $\alpha_1 \nu_{21} + \nu_{12} \alpha_1$

рис. 2F — $\alpha_1 \alpha_2 \nu_{12} - \alpha_2 \alpha_1 \nu_{21}$; $\beta_{11} = \alpha_1^2 - \alpha_2^2$; $\alpha_i = \frac{a_i}{L_1} (1 - \nu_1\nu_2)$; h — толщина элемента.

откуда

$$\{\alpha\} = [B]^{-1} \{q\}.$$

Выписом выражения для компонентов деформаций:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_3 + 2\alpha_4 x + \alpha_{10},$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_{11} x + 2\alpha_{12} y,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_4 x + 2\alpha_5 y + \alpha_6 + 2\alpha_{13} x + \alpha_{14} y \quad (25.28)$$

или, в матричной форме,

$$\{\epsilon\} = [D_0] \{\alpha\}, \quad (25.29)$$

где

$$[D_0] = \begin{array}{c|cccccccccccc} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 \end{array} \end{array} \quad (25.30)$$

Исключив с помощью (25.9) вектор $\{\alpha\}$, запишем вектор деформаций в следующем виде

$$\{\epsilon\} = [D_0] [B]^{-1} \{q\}. \quad (25.31)$$

Напряжения по закону Гука определяются по формуле

$$\{\sigma\} = [E_0] [D_0] [B]^{-1} \{q\}. \quad (25.32)$$

Тогда выражения для матрицы жесткости (12×12) определяются по аналогии с предыдущим в форме (3.8):

$$[K] = \int [B]^{-T} [D_0]^T [E_0] [D_0] [B^{-1}] h \, dx \, dy. \quad (25.33)$$

Так как матрица $[B]$ не зависит от переменных x и y , то ее можно вынести за знак интеграла и проинтегрировать в замкнутом виде. Однако удобнее вычислять коэффициенты матрицы жесткости с помощью ЭВМ путем численного интегрирования.

Возможен и другой путь вычисления коэффициентов МЖ в приближенной форме. Для этого в матрицу (25.30) вместо переменных x и y вводятся средние значения координат шести узловых точек:

$$x_{cp} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i, \quad y_{cp} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 y_i.$$

Полученная таким образом матрица $[D_0]$ не зависит от параметров интегрирования, и выражение для матрицы жесткости примет следующий явный вид:

$$[K] = [B]^{-T} [D_0]^T [E_0] [D_0] [B^{-1}] F h, \quad (25.34)$$

где F — площадь треугольника; h — толщина элемента.

Заметим, что этот прием противоречит основному предположению о линейном законе распределения напряжений и деформаций внутри конечного элемента. Однако на практике оказывается, что

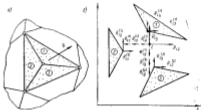


Рис. 4.3. К условиям равновесия для 1 узла: а — общая суммарная реакция узла; б — разложение общей реакции на составляющие узловой силы, складываемые в 4-м узле для 3-х соседних элементов.

числовые коэффициенты в зависимости (25.34) мало отличаются от коэффициентов в выражении (25.33), но вычисляются значительно проще.

В целом треугольные элементы с шестью узловыми точками требуют более мощных ЭВМ, так как программы становятся более длинными.

Вряд ли можно утверждать, что использование этих элементов более эффективно, чем элементов с тремя узлами, но при более мелком делении области на конечные элементы.

Уравнения равновесия узлов. Для определения основных неизвестных (перемещения узловых точек) необходимо составить уравнения равновесия для каждого узла.

Пусть конструкция нагружена сосредоточенными узловыми внешними силами $\{P\} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, где n — число узлов в изолированной схеме конструкции.

Сила, P_i , приложенная в i -м узле, может быть разложена по направлениям осей x и y :

$$P_i = \{P_{ix}, P_{iy}\}.$$

При равновесии i -го узла внешние силы P_{ix} уравновешены суммой реакций от элементов, сходящихся в этом узле (рис. IV.3):

$$P_{ix} = \sum_j R_{ij}^x, \quad P_{iy} = \sum_j R_{ij}^y \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25.35)$$

Суммирование производится по всем элементам, сходящимся в i -м узле.

Введение общей системы координат для узловых перемещений позволяет переписать систему уравнений равновесия (25.35) в виде одного матричного уравнения:

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}, \quad (25.36)$$

здесь $[\bar{K}]$ — общая матрица жесткости пластин в общей системе координат;

$$\{\bar{q}\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n\}$$

— вектор узловых перемещений в общей системе координат (n — число узловых точек); $\{\bar{P}\}$ — вектор узловых внешних нагрузок.

Наконец, непосредственно из выражения (25.36) получаем

$$\{\bar{q}\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{P}\}. \quad (25.37)$$

По найденным узловым перемещениям с помощью матрицы напряжений можем определить компоненты напряжений в каждом элементе, а следовательно, и в конструкции в целом.

§ 28

Матрица жесткости для прямоугольного плоского элемента

Прямоугольный элемент с линейным законом изменения компонентов напряжения. Прямоугольный элемент (рис. IV.4) с вершинами 1, 2, 3, 4 нагружен узловыми усилиями

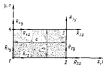


Рис. IV.4. Прямоугольный элемент.

$$[\bar{R}] = [R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}, \dots, R_{4x}, R_{4y}].$$

Элемент имеет восемь степеней свободы — по две степени на каждом узле.

Если учесть, что три степени свободы элемента связаны с его перемещением как абсолютно твердого тела, то становится ясным, что останется пять степеней свободы с изменением его деформированного состояния.

При выводе матрицы жесткости для прямоугольного элемента можно было бы идти путем, который использовался ранее для треугольного элемента. Однако этот путь, хотя и привлекательно и воз-

можен, но ставит нас в затруднительное положение при выборе выражений для компонентов перемещений, если мы хотим удовлетворить уравнениям равновесия внутри элемента. Проще исходить из заданного закона изменения напряженного состояния по площади конечного элемента [5, 52].

Так как общие выражения для компонентов напряжений прямоугольного элемента должны включать пять произвольных параметров, то вполне естественно предположить о линейном характере изменения σ_x и σ_y и постоянстве в пределах конечного элемента τ_{xy} :

$$\sigma_x = \alpha_1 + \alpha_2 y, \quad \sigma_y = \alpha_3 + \alpha_4 x, \quad \tau_{xy} = \alpha_5. \quad (25.1)$$

или, в матричной форме,

$$\{\sigma\} = [A_\sigma] \{\bar{q}\}, \quad (25.2)$$

где

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \{\bar{q}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}. \quad (25.3)$$

Напряженное состояние элемента, выраженное зависимостью (25.1), удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия и условиям совместности деформаций внутри объема элемента.

Компоненты деформаций $\{\epsilon\}$, если воспользоваться зависимостью (25.1) и законом Гука (25.18), можно выразить через $\{\bar{q}\}$:

$$\{\epsilon\} = [E_\epsilon]^{-1} [A_\sigma] \{\bar{q}\}. \quad (25.4)$$

Интегрируем далее зависимости Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}, \quad (25.5)$$

в которых компоненты деформаций определяются с помощью (25.4), после несложных выкладок можно получить следующие выражения для компонентов перемещений точек элемента:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 \frac{x}{E_1} + \frac{\nu y}{E_1} \alpha_2 - \frac{\nu x}{E_1} \alpha_3 - \\ &\quad - \frac{1}{2E_1} (\nu x^2 + y^2) \alpha_4 + y \alpha_5 + \alpha_7, \\ v(x, y) &= -\frac{\nu x}{E_1} \alpha_1 - \frac{1}{2E_1} (\nu y^2 + x^2) \alpha_4 - \\ &\quad + \frac{x}{E_1} \alpha_3 + \frac{\nu y}{E_1} \alpha_4 + \frac{y}{E_1} \alpha_5 - \alpha_7 + \alpha_8 \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

или, в матричной форме,

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}, \quad (25.7)$$

где

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}.$$

P_{10}
P_{20}
P_{30}
P_{40}
P_{50}
P_{60}
P_{70}
P_{80}
P_{90}

$$\frac{E_1}{1-\sqrt{3}i}$$

$\frac{A+C}{2i} + C_1$	$-\frac{A}{2i} + C_1$	$-\frac{B}{2i} - C_1$	$\frac{B}{2i} - C_1$	D	$2i$	$-D$	$-2i$
	$\frac{A}{2i} + C_1$	$\frac{B}{2i} - C_1$	$-\frac{B}{2i} - C_1$	$-2i$	$-D$	$2i$	D
		$\frac{A}{2i} + C_1$	$-\frac{A}{2i} + C_1$	$-D$	$-2i$	D	$2i$
			$\frac{A}{2i} - C_1$	$2i$	D	$-2i$	$-D$
				$2i + \frac{C}{2i}$	$-\frac{C}{2i} - 2i$	$-\frac{C}{2i} + 2i$	$-\frac{C}{2i} - 2i$
				$2i + \frac{C}{2i}$	$-\frac{C}{2i} - 2i$	$-\frac{C}{2i} + 2i$	$-\frac{C}{2i} - 2i$
					$2i + \frac{C}{2i}$	$-\frac{C}{2i} - 2i$	$-\frac{C}{2i} - 2i$
						$2i + \frac{C}{2i}$	$-\frac{C}{2i} - 2i$

racc

(25.8)

$$V = \frac{E_1}{E_1}, \quad \alpha = \frac{E_1}{D}, \quad A = \frac{1-\sqrt{3}i}{12}, \quad B = \frac{2+\sqrt{3}i}{12},$$

$$C = \frac{1-\sqrt{3}i}{48}, \quad D = \frac{3i - \sqrt{3}i + 1}{48}, \quad H = \frac{-3i - \sqrt{3}i + 1}{48}, \quad m = \frac{D}{D}.$$

(25.9)

$$\begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \\ P_{40} \\ P_{50} \\ P_{60} \\ P_{70} \\ P_{80} \\ P_{90} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$
$-\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$	$\frac{E_1(1-\sqrt{3}i)}{48}$

racc

(25.10)

$$\alpha = \frac{E_1}{D}, \quad m = \frac{D}{D}, \quad \eta = \frac{E_1}{E_1}.$$

Новые параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определяют перемещения элемента как абсолютно твердого тела. Элемент матрицы $[A]$ находится непосредственно из зависимостей (26.6).

Связь между вектором узловых усилий $[R]$ и вектором узловых перемещений $[q] = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]$ определяется зависимостью (26.1).

При наличии зависимостей (26.6) для получения матрицы жесткости прямоугольного элемента можно воспользоваться способом, с помощью которого выше была найдена матрица жесткости треугольного элемента. Это даст нам право, опуская все промежуточные выкладки, привести лишь окончательное выражение для искомого матрицы жесткости прямоугольного элемента, изображенного на рис. IV.4. (см. формулу (26.8)).

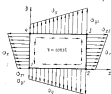


Рис. IV.3. Линейный закон распределения нормальных напряжений для прямоугольного элемента при решении плоской задачи.

Прямоугольный элемент с линейным законом изменения компонентов перемещений вдоль контура. Простейшие выражения для компонентов перемещений прямоугольного элемента (см. рис. IV.4), содержащим 8 сосредоточенных параметров и приводимые к линейному закону изменения компонентов перемещения могут быть записаны в виде

$$u = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4, \quad v = \alpha_5 x + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8. \quad (26.11)$$

Вспользуемся этими выражениями для определения компонентов узловых перемещений:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 x_1 y_1 + \alpha_4 \\ \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 + \alpha_7 x_1 y_1 + \alpha_8 \\ \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 x_2 y_2 + \alpha_4 \\ \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 + \alpha_7 x_2 y_2 + \alpha_8 \\ \alpha_1 x_3 + \alpha_2 y_3 + \alpha_3 x_3 y_3 + \alpha_4 \\ \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 + \alpha_7 x_3 y_3 + \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (26.12)$$

Из решения системы (26.12) можно выразить известные параметры α_i через узловые перемещения. Исключая в уравнениях

(26.12) с помощью найденных зависимостей параметры α_i , можем получить (139):

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) u_1 - \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) u_2 + \\ &\quad + \frac{x}{a} \frac{y}{b} u_3 - \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} u_4; \\ v &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) v_1 + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) v_2 + \\ &\quad + \frac{x}{a} \frac{y}{b} v_3 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} v_4. \end{aligned} \quad (26.13)$$

При рассмотрении выражений (26.13) можно увидеть, что компоненты u и v вдоль любой кромки прямоугольного контура изменяются по линейному закону, который однозначно определяется перемещениями узловых точек рассматриваемой кромки. Например, перемещение u для кромки 2—3 согласно первой зависимости (26.13)

$$u_{2-3} = u(x = a, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) u_2 + \frac{y}{b} u_3.$$

Используя зависимости Коши и найденные выше выражения для компонентов перемещений (26.13), можно определять компоненты деформаций:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} \eta - \nu & \eta - \nu & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta - \nu & -\eta - \nu & \eta - \nu & \eta - \nu \\ -\eta + \nu & -\eta - \nu & \eta - \nu & \eta - \nu & -\eta - \nu & -\eta - \nu & \eta - \nu & -\eta - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (26.14)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \nu = \frac{\nu}{\epsilon}$$

или, в матричной форме,

$$[\epsilon] = [D] [q]. \quad (26.15)$$

Подстановка выражений (26.15) в зависимость закона Гука (25.18) для ортотропного материала позволяет определить связь между компонентами напряжений $[\sigma]$ и узловыми перемещениями $[q]$:

$$[\sigma] = [E] [q], \quad (26.16)$$

которая в развернутой форме записывается в виде (26.17).

Располагая значениями матриц $[D]$ и $[E]$, с помощью зависимости (3.8) можно определить значение матрицы жесткости $[K]$, а следовательно, выписать в окончательной форме связь между узловыми усилиями $[R]$ и узловыми перемещениями $[q]$ (26.18):

Четырехугольный элемент в полярных координатах. Для пластины с круглыми границами и круглыми отверстиями удобно получить матрицу жесткости для прямоугольного плоского элемента в полярных координатах в форме сектора (рис. IV.6).

Форма такого элемента может быть описана двумя параметрами

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1}, \quad \beta = \theta_2 - \theta_1. \quad (26.19)$$

Принимая компоненты перемещений в форме (26.11), решая систему уравнений (26.12) и исключая параметры α , получаем связь между $\{U\}$ и $\{q\}$ в форме (26.13):

$$\{U\} = [C] \{q\}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} u = & \frac{r_1(r_2 - \alpha)}{1 - \alpha} \cdot \frac{\theta_2 - \theta}{\beta} a_1 + \\ & \frac{r_1(r_2 - 1)}{\alpha - 1} \cdot \frac{\theta_2 - \theta}{\beta} a_2 + \\ & + \frac{r_1(r_2 - 1)}{\alpha - 1} \cdot \frac{\theta - \theta_1}{\beta} a_3 + \\ & + \frac{r_1(r_2 - \alpha)}{1 - \alpha} \cdot \frac{\theta - \theta_1}{\beta} a_4. \end{aligned} \quad (26.20)$$

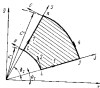


Рис. IV.6. Квадратный элемент пластины в полярной системе координат.

Выпишем теперь выражения для компонентов деформаций $\{\epsilon\}$:

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (26.21)$$

Подставив в (26.21) значения u и v по зависимости (26.20), получим вектор деформаций $\{\epsilon\}$, выраженный через узловые перемещения в форме

$$\{\epsilon\} = [D] \{q\}. \quad (26.22)$$

Располагая матрицами $[D]$ и $[E_c]$ (25.19), можно получить матрицу жесткости $[K]$ в виде выражения (26.18) и матрицу напряжений $[E]$ в виде (26.17).

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для матрицы жесткости $[K]$ элемента, имеющего форму сектора (рис. IV.6):

$$[K] = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} h [D]^T [E_c] [D] r dr d\theta. \quad (26.23)$$

В случае задачи о плоском напряженном состоянии для пластины постоянной толщины, выполнив интегрирование, получаем матрицу жесткости $[K]$ в явном виде:

$$[K] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{pmatrix} \quad (26.24)$$

Симметрично

Коэффициенты в выражении (26.24) определяются следующими формулами **:

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{77} = & \frac{E}{6} \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - 2\nu + \left(\frac{1-3\nu}{2(\alpha-1)} + \frac{\alpha^3 \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(2 + \frac{3-3\nu}{\beta^2} \right) \right]; \\ k_{12} = -k_{23} = & \frac{E}{8} \left[(1+\nu) \left(\frac{6\alpha-2}{\alpha-1} - \frac{2\alpha^3 \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) \right]; \\ k_{13} = k_{56} = & -\frac{E}{6} \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} + \left(\frac{\alpha+1}{2-2\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(2 + \frac{3-3\nu}{\beta^2} \right) \right]; \\ k_{14} = k_{34} = & -\frac{E}{12} \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} + \left(\frac{\alpha+1}{2-2\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(2 - \frac{6(1-\nu)}{\beta^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

* Р. Д. Ж. У. Н. С. Р. Ф. А. К. Матрица жесткости элемента в форме сектора. — Расчетная техника и конструирование, 1969, № 1.

** Заметим, что здесь, как и выше, в случае треугольного элемента, удобно получить МКЖ в явном виде путем численного интегрирования или в приближенной форме (в зависимости от (26.24)).

$$\begin{aligned}
k_{10} = k_{12} &= -\frac{1}{8} \left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} + \frac{3\alpha \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (3-\nu) + 1 + \nu \right]; \\
k_{11} &= \frac{\beta}{12} \left[\left(\frac{1-3\nu}{2(\alpha-1)} + \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (2 - \frac{6(1-\nu)}{\beta}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - 2\nu \right]; \\
k_{13} = -k_{17} &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1-3\nu}{\alpha-1} + \frac{3\alpha^2 \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (3-\nu) + 1 - 3\nu \right]; \\
k_{14} = k_{16} &= \frac{1-3\nu}{2\beta(\alpha-1)} + \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{\beta(\alpha-1)^2} + \frac{(1-\nu)\beta \alpha^2}{6(\alpha-1)^2}; \\
k_{15} = -k_{19} &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha} + \frac{3\alpha \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (1-\nu) + 1 - 3\nu \right]; \\
k_{21} = k_{23} &= \frac{\alpha+1}{2\beta(\alpha-1)} + \frac{\alpha \ln \alpha}{\beta(1-\alpha)^2} + \frac{(1-\nu)\alpha \ln \alpha}{6(1-\alpha)^2}; \\
k_{22} = -k_{24} &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha} + \frac{3\alpha \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (3-\nu) + 1 - \nu \right]; \\
k_{25} = k_{27} &= \frac{\alpha+1}{2\beta(1-\alpha)} + \frac{\alpha \ln \alpha}{\beta(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha \beta \ln \alpha}{12(1-\alpha)^2} (1-\nu); \\
k_{26} &= \frac{\alpha^2 \beta \ln \alpha (1-\nu)}{12(1-\alpha)^2} - \frac{1-3\nu}{2\beta(\alpha-1)} - \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{\beta(\alpha-1)^2}; \\
k_{31} = -k_{35} &= -\frac{1}{8} \left[\left(\frac{2-3\nu}{1-\alpha} + \frac{2 \ln \alpha}{(1-\alpha)^2} \right) (1-\nu) \right]; \\
k_{32} = k_{34} &= \frac{\beta}{8} \left[\left(\frac{1-3\nu}{2(\alpha-1)} + \frac{\ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (2 + \frac{3(1-\nu)}{\beta}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} + 2\nu \right]; \\
k_{33} &= \frac{\beta}{12} \left[\left(\frac{1-3\nu}{2(\alpha-1)} + \frac{\ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (2 - \frac{6(1-\nu)}{\beta}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} + 2\nu \right]; \\
k_{36} = -k_{38} &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1-3\nu}{\alpha-1} + \frac{2 \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (3-\nu) + 3\nu - 1 \right]; \\
k_{37} = k_{39} &= \frac{1-3\nu}{2\beta(\alpha-1)} + \frac{\ln \alpha}{\beta(\alpha-1)^2} + \frac{\beta(1-\nu) \ln \alpha}{6(\alpha-1)^2}; \\
k_{41} &= \frac{\beta(1-\nu) \ln \alpha}{12(\alpha-1)^2} - \frac{3\nu}{\beta(1-\alpha)} - \frac{1-3\nu}{2\beta(\alpha-1)}; \\
k_{42} = -k_{44} &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha} + \frac{2\nu \ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) (1+\nu) + 3\nu - 1 \right].
\end{aligned}$$

(26.25)

Уравнения равновесия узловых точек конструкции записываются аналогично приведенному в предыдущем параграфе.

Оценка степени «совершенности» матриц жесткости. В гл. I были приведены шесть условий получения точного решения в МКЭ. Там же указывалось, что выбор в качестве основных независимых компонентов узловых перемещений приводит к автоматическому выполнению условия непрерывности перемещений в узловых точках (4-е условие). Третье условие удовлетворяется при составлении уравнений равновесия узловых точек в методе перемещений. Степень же выполнения остальных четырех условий полностью зависит от принятого закона изменения по объему конечного элемента компонентов перемещений или напряжений.

При выводе матрицы жесткости треугольного элемента мы исходим из предположения о линейном законе изменения компонентов перемещения внутри элемента (см. формулы (25.2)). Такое предположение приводит к тождественному удовлетворению дифференциальных уравнений равновесия (1-е условие), условий сплошности внутри элемента (2-е условие) и кинематических граничных условий вдоль кромок элемента (6-е условие).

Условие 5 же соблюдается: при переходе из одного элемента в другой через линию разреза компоненты напряжений теряют разрыв. Незыполнение этого условия является основным источником неточности решения плоской задачи с помощью МКЭ при идеализации исходной конструкции совокупностью треугольных конечных элементов. Величина этой погрешности может быть снижена путем уменьшения размеров конечных элементов.

При использовании в МКЭ матрицы жесткости для прямоугольного элемента в форме (26.8) нарушаются условие 1) и кинематические условия стыковки смежных элементов (условия 5 и 6); остальные четыре условия выполняются.

Использование же для прямоугольного элемента матрицы жесткости в форме (26.17) приводит к нарушению уравнений равновесия внутри объема конечного элемента (условие 1) и сплошных граничных условий (условие 5); остальные четыре условия соблюдаются.

Естественно поставить вопрос, какая из приведенных выше трех матриц оптимальней, т. е. дает при одном и том же числе узловых точек наименьшую разницу между результатами приближенного и точного решений. К сожалению, ответить на этот вопрос можно лишь при сопоставлении результатов численного расчета.

При использовании МКЭ безынтересно знать, к какой оценке (сверху или снизу) приводит применение той или иной матрицы жесткости. При ответе на этот вопрос нужно исходить из следующего: а) нарушение сплошных условий при соблюдении кинематических всегда ведет к «ужесточению» рассматриваемой упругой системы, а следовательно, к меньшим расчетным значениям перемещений, компонентов деформаций и напряжений по сравнению с точными их значениями (оценка снизу);

б) нарушение кинематических условий может привести как к «ужесточению» упругой системы, так и наоборот — к ее ослабле-

люк. При этом полученное по МКЭ приближенное решение в одном случае может давать оценку снизу, а в другом — оценку сверху.

Исходя из вышесказанного можно утверждать, что использование в численных расчетах по МКЭ матрицы жесткости для треугольного элемента (25.25) и матрицы жесткости для прямоугольного элемента (26.17) всегда приводит к получению приближенного решения, дающего оценку снизу, так как при использовании этих матриц жесткости все условия неразрывности внутри объема каждого из конечных элементов и по линиям их стыковки тождественно выполняются; нарушениями оказываются лишь уравнения равновесия внутри объема конечного элемента [для матрицы (26.17)] и по линиям стыковки элементов [147, 148].

Применение матрицы (26.8) связано с нарушением кинематических условий стыковки элементов, поэтому полученное на основе использования этой матрицы жесткости решение может оказаться по сравнению с точным как заниженным, так и завышенным.

§ 27

Использование принципа виртуального перемещения деформированного состояния для получения матрицы жесткости

При выводе матрицы жесткости (26.8) число произвольных параметров, входящих в общее выражение компонентов напряжения, принималось равным числу обобщенных координат, связанных с деформацией деформированного состояния тела. При этом нам приходится идти вразрез с действительным кинематическим и статическим граничными условиями вдоль линий мысленных разрезов тела на конечные элементы.

Можно добиться некоторого уточнения матрицы жесткости, если увеличить число варьируемых параметров в формулах (26.6) с тем, чтобы приближенно удовлетворить условиям сплошности внутри элемента и условиям неразрывности перемещений вдоль линий стыковки смежных элементов. При этом выражение (26.1) должно быть выбрано таким образом, чтобы уравнение равновесия внутри объема элемента тождественно удовлетворялось.

Проиллюстрируем изложенный подход примером получения матрицы жесткости [K] для прямоугольного элемента (рис. IV.4).

Зададимся выражениями для компонентов напряжения в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 x + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 x^2 + \dots \\ \sigma_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + \alpha_9 x^2 + \alpha_{10} y^2 + \dots \\ \tau_{xy} &= \alpha_{11} - \alpha_{12} y + \alpha_{13} x - 2\alpha_{14} xy + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

или

$$\{\sigma\} = [A] \{\alpha\}. \quad (27.2)$$

Естественно выбрать такой закон перемещений вдоль контура конечного элемента, который приводил бы к удовлетворению кинематических граничных условий на контуре конечного элемента:

(27.3)

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2} \alpha_2$
0	0	0	0	0	$\frac{1}{2} \alpha_7$	$\frac{1}{2} \alpha_8$	$\frac{1}{2} \alpha_9$	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{2} \alpha_4$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2} \alpha_1$	$\frac{1}{2} \alpha_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2} \alpha_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	$1 - \frac{1}{2} \alpha_1$

$[U_0] =$

или, в матричном виде,

$$\{U_{\alpha}\} = [L] \{q\}. \quad (27.4)$$

Для определения $\{q\}$ в (27.2) воспользуемся виртуальным изменением напряженного состояния

$$\delta \left(V - \int_{\Omega} [S_{\alpha}]^T \{U_{\alpha}\} dS \right) = 0, \quad (27.5)$$

где

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{q\}^T [q] dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{q\}^T [E_d]^{-1} \{q\} dV \quad (27.6)$$

— потенциальная энергия элемента; $[S_{\alpha}]$ — условия на контуре элемента, которые выражаются через $\{q\}$ с помощью следящих зависимостей

$$[S_{\alpha}] = \begin{bmatrix} -\tau_{xy}(x, 0) \\ \sigma_x(x, y) \\ \tau_{xy}(x, b) \\ -\sigma_x(0, y) \\ -\sigma_y(x, 0) \\ \tau_{xy}(a, y) \\ \sigma_y(x, b) \\ -\tau_{xy}(0, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots \\ \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 \sigma + \alpha_4 y^2 + \alpha_5 \sigma y^2 + \dots \\ \alpha_0 - \alpha_1 b - \alpha_2 x - 2\alpha_3 b x + \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ -\alpha_3 + \alpha_4 y + \dots \end{bmatrix} \quad (27.7)$$

или, в матричной форме,

$$\{S_{\alpha}\} = [M] \{q\}. \quad (27.8)$$

С учетом (27.4), (27.6) и (27.8) зависимость (27.5) может быть приведена к виду

$$\delta \left(\frac{1}{2} \{q\}^T [N] \{q\} - \{q\}^T [T] \{q\} \right) = 0, \quad (27.9)$$

где

$$[N] = \int_{\Omega} [M]^T [E_d]^{-1} [M] dV; \quad (27.10)$$

$$[T] = \int_{\Omega} [M]^T [L] dS.$$

Из (27.9) следует

$$[N] \{q\} - [T] \{q\} = 0, \quad (27.11)$$

откуда

$$\{q\} = [N]^{-1} [T] \{q\}. \quad (27.12)$$

Выражение (27.12) с учетом зависимости (27.2) позволяет преобразовать выражение для потенциальной энергии (27.6) к виду

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}. \quad (27.13)$$

где

$$[K] = [T]^T [N^{-1}] [T]. \quad (27.14)$$

Так как V в (27.13) представлена как функция узловых перемещений элемента, то матрица $[K]$ и есть некая матрица жесткости прямоугольного элемента при решении плоской задачи теории упругости.

Изда ограниченное число узлов в рассматриваемом выражении (27.14) в рассмотренном виде.

В заключение отметим, что в рассматриваемом случае дифференциальные уравнения равновесия внутри конечного элемента, уравнения равновесия узловых точек и условия неразрывности перемещений в узловых точках выполняются точно; условия сплошности внутри конечного элемента и компьютерные граничные условия на поверхности элементов могут быть выполнены с любой степенью точности путем увеличения числа произвольных параметров $\{q\}$. И лишь слабые граничные условия на поверхности элементов (узурывы в напряжениях для смежных элементов) остаются вне сферы влияния. Теоретически, конечно, имеются пути внесения уточнений и в это условие, например посредством дополнительных варьируемых параметров и выражений для контурных перемещений элемента $\{U_{\alpha}\}$. Но это теоретически, а практически того же результата можно достигнуть более простым способом — путем уменьшения размеров конечных элементов.

§ 26

Концентрация напряжений в плоской пластине конечной ширины с отверстием

Надежность судовых конструкций в значительной мере определяется качеством проектирования и изготовления различных сварных стыков. Статистика повреждений корпусов морских судов свидетельствует о том, что большинство трещин имеет усталостно-хрупкий характер и располагается в районе углов многоугольных вырезов в обшивке и наборе корпуса.

Решение задачи о концентрации напряжений хотя и не исчерпывает проблемы оценки и обеспечения надежности сварных стыков, но является существенным этапом на пути к количественному определению усталостной долговечности различных судовых узлов и их сопротивлению хрупким разрушением. Вот почему вопросам оценки концентрации напряжений в судостроительной литературе всегда уделялось большое внимание.

В последние годы наряду с развитием теории прерывистых связей Шиманского получили широкое распространение точные методы решения задач о концентрации, основанные на использовании теории функций комплексного переменного [8, 33]. И все же возможности этих методов весьма ограничены; их использование не позво-

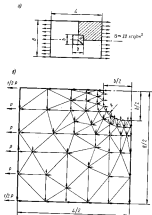


Рис. IV.7. Имитация пластины с вырезом треугольной плоской конечными элементами: а — общий вид; б — схема разбиения на элементы.

лнет получить решение целого ряда важных задач о концентрации напряжений в районе вырезов или подкреплениях вокруг них достаточно сложной формы.

Решение этих задач сравнительно легко можно получать с помощью метода конечных элементов.

В качестве первого примера использования МКЭ приведем решение задачи о концентрации напряжений вокруг квадратного выреза со скругленным в прямоугольной пластине конечной ширины при растяжении (рис. IV.7).

Пластина замещалась совокупностью треугольных элементов. Размеры элементов вокруг выреза принимались достаточно малыми, чтобы обеспечить надлежащую точность определения напряжений по контуре. Вдали от выреза, где возмущения в пластине сглаживаются, размеры конечных элементов увеличивались.

Для пластины с $b/B = 0,25$, $R/b = 0,125$ и $L = 8$ были выполнены с помощью программы [11] численные расчеты на ЭВМ «Минск-22».

На рис. IV.8 пунктирной линией показано распределение нормальных напряжений по контуру выреза. Поскольку растягивающие

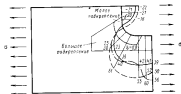


Рис. IV.8. Эпюра напряжений σ_x по контуру выреза при растяжении пластины.

— большое подкрепление; ——— малое подкрепление; - - - малое подкрепление.

напряжения в пластине вдали от выреза равны $\sigma_x = 20$ кг/см², максимальный коэффициент концентрации $\sigma_0/\sigma_x = 3$. Полученный результат хорошо согласуется с теоретическим решением И. М. Буваляцкого [8], которое было основано на использовании теории функций комплексного переменного.

Одним из наиболее эффективных конструктивных мероприятий по снижению коэффициентов концентрации является введение накладных листов в наиболее напряженном районе вокруг выреза. Были рассмотрены два варианта подкрепления пластины: подкрепление выреза малым накладным листом и большим накладным листом, охватывающим значительный район пластины и районе скругления (см. рис. IV.8). Соотношение толщин накладного листа δ_1 и основного δ принималось равным $\delta_1/\delta = 1,6$. Из сопоставления эпюр напряжений следует, что снижение максимальных напряжений возле угла выреза достигается примерно в одинаковой мере как при малом, так и при большом вытиснутом вдоль кромки подкреплении. Однако при малом подкреплении обнаруживается отрицательный эффект — увеличение напряжений на зоне утолщенного листа. Таким образом, снижение концентрации напряжений в углах выреза может быть

получено лишь при введении сравнительно больших накладных листов.

В качестве второго примера использования МКЭ в решении задачи о концентрации напряжений приведем результаты расчета той же пластины при чистом сдвиге. Как видно из сравнения эпюр напряжений (рис. IV.9), введение накладных листов уменьшает концентрацию напряжений в углах прямоугольного выреза при чистом сдвиге пластины примерно на 30%.

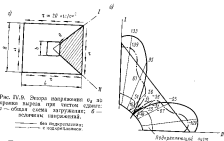


Рис. IV.9. Эпюра напряжений σ_x во время выреза при чистом сдвиге: σ_0 — обобщенная нагрузка; σ — обобщенная нагрузка, включая напряжения

— без подкрепления;
— с подкреплением

Приведенные примеры убедительно показывают большие возможности МКЭ. Его использование позволяет просто и оперативно определять напряженное состояние в пластинах с вырезами, оценить различные варианты подкрепления на концентрацию напряжений, а следовательно, и выбрать среди этих вариантов тот, который при наименьших расходах материала на подкрепление приводит к наибольшему снижению концентрации напряжений в районе выреза.

§ 29

Расчет широкоталых балок. Выбор присоединенного пояска

Расчет конструкций в строительной механике корабля производится, как известно, на основе определенной физической модели, моделирующей во возможности геометрические, жесткостные и механические характеристики конструкции. Модель должна учитывать как можно больше факторов, оказывающих влияние на работу реальной конструкции. Модельное представление судового перекрытия как системы пересекających балок учитывает как дискретность

расположения подкрепляющих связей (флоров и стрингеров), так и плоский характер напряженного состояния, несжимаемого в пластках (в динцовой обшивке и настиле второго дна). Однако при строгой оценке дискретности расположения упругих связей, характер взаимодействия последних с пластинчатыми элементами конструкции учитывается приближенно, путем введения в состав профиля подкрепляющего ребра некоторого «присоединенного» пояска обшивки.

Особенно важен этот вопрос при расчете изгиба динцовых перекрытий со вторым дном на основе рассмотренных переключенных балок. В этом случае на момент ширины поперечного сечения балки большие влияние оказывает присоединенный поясок динцовой обшивки и настила второго дна. Величина присоединенного пояска (в связанного с ним редуцированного коэффициента) зависит от характера распределения напряжений в пластках динца и второго дна между соседними стенками стрингера для флоров.

Кроме динцовых перекрытий в судовом корпусе имеется еще целый ряд конструктивных элементов, расчет которых производится на базе концепции присоединенного пояска: различные бимсы, карлингсы, комингсы люков, балки набора отдельных отсеков и танков. Более того, само судно в целом также представляет собой балку динцовой типа с поясками — палубой и динцем.

Введение пояска присоединенного пояска позволяет использовать элементарную теорию изгиба балок при расчете балок, имеющих широкоталые пояски.

Определяющим элементом присоединенного пояска был поставлен целый ряд работ [48, 53, 54, 64] и др. Во всех этих работах под шириной присоединенного пояска $b_{пр}$ (причем к этому расчету равнозначному сечению) подразумевается такая ширина, при которой поясок в предположении равномерного распределения напряжений по его ширине, равных напряжениям в жестких связях в том же сечении, воспринимает то же усилие, что и действительный поясок:

$$\delta_{пр} = b \frac{1}{\sigma_{ст}} \int_{-b/2}^{+b/2} \sigma_x dy = \Phi \delta, \quad (29.1)$$

где $\sigma_{ст}$ — нормальные напряжения в стенке широкоталой балки по линии ее примыкания к пояску (рис. IV.10).

Введение присоединенного пояска вместо реального позволяет при оценке напряженного состояния широкоталой балки использо-



Рис. IV.10. К определению редуцированного коэффициента для балки широкоталой балки.

вать элементную теорию изгиба балок. Но если, как это имеет место при строгом подходе к определению присоединенного поиска, последний меняется во длине балки, задача сводится к рассмотрению изгиба балок переменного сечения.

В этой связи целесообразно показать под широтой присоединенного поиска такую величину (достаточно по длине), которая приводит при использовании элементной балочной теории к действительным максимальным напряжениям в расчетном сечении [154].

Используемые в настоящее время в судостроении зависимости для определения присоединенного поиска широкополых балок получены П. Ф. Патковичем [48]. Он рекомендует ширину присоединенного поиска свободно опертой балки принимать равной наименьшей из величин: действительной ширине поiska b или одной трети длины балки $l/3$; для жестко заданных широкополых балок за b_0 принимается наименьшая из величин: b для $l/3$.

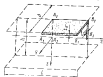


Рис. IV.11. Расчетная схема широкополых балок.

Из анализа имеющихся числовых результатов следует, что существующие рекомендации по выбору присоединенного поиска широкополых балок весьма противоречивы и не учитывают влияния многих факторов. Использование этих рекомендаций может привести к значительным ошибкам при назначении b_0 и как следствие этого — к ошибкам того же порядка при оценке напряженного состояния широкополых балок.

Таким образом, в вопросе о выборе присоединенного поиска имеются значительные проблемы, многие из которых можно ликвидировать, если использовать для расчета широкополых балок метод конечных элементов [160]. При этом широкополая балка (рис. IV.11) заменяется совокупностью плоских прямоугольных элементов, скрепленных между собой в узловых точках (рис. IV.12). Вектор предполагаемой симметрии балки и действующей на нее внешней нагрузки относительно трех координатных плоскостей, можно рассмотреть только ее часть $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$, а на кромках A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 наложить соответствующие силы (см. рис. IV.12).

Заметим, что в отдельных случаях для получения достаточно точного результата приходится идти на введение более мелкой сетки, особенно в местах ожидаемой концентрации напряжений (район приложения внешних сосредоточенных сил, vicinity жесткой заделки торцовых сечений балки и т. п.).

На ЭЦВМ «Минск-22» был рассчитан ряд широкополых балок при разных вариантах нагружения и различных условиях закрепления.

При этом использовалась для прямоугольного элемента матрица жесткости (26.6), основанная на линейном законе распределения компонентов напряжений по толщине элемента. Расчеты проводились для вариантов нагружения, показанных на рис. IV.13.

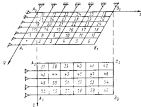


Рис. IV.12. Разбивка широкополых балки на прямоугольные элементарные элементы для поиска матрицы жесткости $l=36$; для сетки $37-69$.

На рис. IV.14 для стальной широкополых свободно опертой балки размерами $l=1200$ см, $b=400$ см, $A=150$ см, $t_0=t_c=1,2$ см (см. рис. IV.11) приведены кривые изменения b_{0opt} , рассчитанные с помощью МКЭ и аналитического метода [48] при нагружении типа показанного на рис. IV.13, а. Сопоставление полученных результатов позволяет заключить, что МКЭ



Рис. IV.13. Схемы нагружения широкополых балок: а — сосредоточенная сила в середине пролета; б — сосредоточенная сила в одной трети пролета; в — распределенная нагрузка.

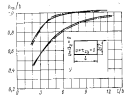


Рис. IV.14. Кривые изменения оптимальной ширины присоединенного поиска. — — — — — вычисленные по МКЭ; — — — — — рассчитанные по методу [48].



Рис. IV.15. Влияние величины распределения внешней нагрузки на величину присоединенного пояска при различных значениях отношения l/b ($L = b$); а, б, в, г — виды поперечной нагрузки.

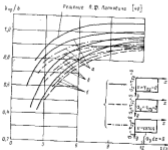


Рис. IV.16. Влияние граничных условий у края длинных краев прямоугольной плиты на величину присоединенного пояска.

является вполне надежным и эффективным методом определения напряженного состояния в широкочелюстных балках.

Из геометрических характеристик элементов широкой балки решающее влияние на $k_{\text{пр}}$ оказывает относительная ширина пояска l/b . Были выполнены численные расчеты для $l/b = 3; 6; 12$.

Преобладающе малое влияние на величину $k_{\text{пр}}$ оказывает параметр $\lambda = H_p/hL_{\text{пр}}$, характеризующий отношение площади продольного сечения пояска к площади поперечного сечения стенки, поэтому в последующих расчетах принято λ , равное 8.

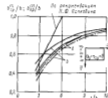


Рис. IV.17. Влияние отношения l/b на величину присоединенного пояска; а, б — варианты нагрузки.



Рис. IV.18. Влияние коэффициента k_0 в зависимости от отношения l/b для двух вариантов внешней нагрузки.

Анализ полученных числовых результатов позволяет сделать следующие выводы:

- уменьшение величины распределения внешней нагрузки приводит к резкому уменьшению $k_{\text{пр}}$ (рис. IV.15);
- наложение на поясok условий Виллянского ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$) вместо условия полной свободы ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$) вызывает незначительное увеличение $k_{\text{пр}}$ (примерно 2–4%);
- поперечный распор на продольных краях поясков ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $y = \pm b/2$) приводит к увеличению присоединенного пояска примерно на 8–12% по сравнению с пояском, на который наложены условия $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $y = \pm b/2$ и на 5–6% по сравнению с балкой, у которой продольные края поясков остаются параллельными при дополнительном условии (см.

$$\text{рис. IV.16): } \int (\sigma_x)_{y=\pm b/2} dx = 0;$$

- для жестко заделанной широкой балки необходимо вводить в рассмотрение два различных присоединенных пояска: для среднего по длине балки сечения — $k_{\text{пр}}^{II}$ и для опорного сечения — $k_{\text{пр}}^{III}$ (рис. IV.17).

Кривые (рис. IV.18) характеризуют коэффициент концентрации напряжения $k_0 = k_{\text{пр}}^{II}/k_{\text{пр}}^{III}$, на который следует умножить величину

напряжения в опорном сечении, вычисленную для балки с присоединенным поперком $b_{op}^{(1)}$. На этот коэффициент в большей степени влияет неравномерность распределения внешней нагрузки;

д) основываясь на характере кривых изменения $\delta_{op}^{(1)}$ и $\delta_{op}^{(2)}$ (рис. IV.19), для широких упруго заделанных балок можно рекомендовать следующие приближенные зависимости:

$$\delta_{op}^{(1)} \approx (1 - \kappa) \delta_{op}^{(1) \text{ св. оп.}} + \kappa \delta_{op}^{(1) \text{ ж. з.}}, \quad \delta_{op}^{(2)} \approx \kappa \delta_{op}^{(2) \text{ ж. з.}},$$

где κ — коэффициент опорной пары; $\delta_{op}^{(1) \text{ св. оп.}}$, $\delta_{op}^{(1) \text{ ж. з.}}$ — ширина присоединенного поперка посередине длины свободно опертой и жестко заделанной балок соответственно;

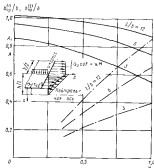


Рис. IV.19. Влияние изменения коэффициента опорной пары κ на величину δ_{op} .

— — — жестко заделанный поперек; — — — свободно опертый.

е) величина b_{op} резко уменьшается (примерно в два раза) для балок, поски которых работают в условиях свободного подвеса, а стенки — в условиях жесткой заделки по сравнению с b_{op} . Для балок с полыми закреплением торцевых секций.

Существующие методы оценки прочности судовых динцевых переборок со вторым дном основаны на одном из следующих модельных представлений:

а) переборки заменяется системой пересекающихся связей с присоединенными поперками. Точность решения в этом случае в основном зависит от выбора ширины присоединяемого поперка. Однако существующие рекомендации по выбору присоединяемых поперков весьма противоречивы. Это может привести к непоследовательным погрешностям в оценке напряженного состояния рассматриваемого переборки;

б) переборки заменяется ортотропной пластинкой [25, 54]. При этом жесткостные параметры дискретно расположенных стенок флюров и стрингеров равномерно «размазываются» соответственно по длине и ширине переборки. В результате получаем трехслойную пластинку, в которой роль несущих слоев играют обшивки динца и настилы второго дна, а роль заполнителя — «размазанные» по площади переборки стенки флюров и стрингеров. При этом модельном представлении, в отличие от первого, пренебрегается влиянием дискретности расположения флюров и стрингеров, но строго учитывается плоский характер напряженного состояния в динцевой обшивке и настиле второго дна. Если число флюров и стрингеров достаточно велико (не менее пяти), то использование последней модели позволяет оценить достаточно точно истинное напряженное состояние в реальной переборке;

в) переборки заменяется совокупностью жестко связанных между собой плоских пластин [54, 61], что позволяет учесть все основные особенности работы реальной переборки: наличие плоского напряженного состояния в настиле второго дна и обшивке динца, а также дискретность расположения стенок флюров и стрингеров. Однако сложность интегрирования дифференциальных зависимостей, полученных с помощью обычного аппарата теории упругости, практически не позволяет найти решение для граничных условий закрепления переборки по его контуру, отличным от свободного опирания.

Нигде для расчета прочности динцевых судовых переборок не применяется метод конечных элементов [61], что позволяет учесть дискретность расположения стрингеров и флюров, а также влияние плоского напряженного состояния в обшивке динца и настиле второго дна. Большим достоинством метода конечных элементов является и то, что при его использовании учитываются негеометрические и упругие свойства в отдельных связях переборки (разрыв в переборке, разное изменение площади сечения балок и т. п.) не создает каких-либо затруднений.

В качестве примера рассмотрим изгиб переборки, жестко заделанного на переборках и свободно опертого на бортах. Нагрузка,

действующая на перекрытие, равномерно распределена по всей его площади.

Перекрытие имеет следующие размеры: длина и ширина — 10 м, расстояние между стрингерами и флорами соответственно 2,5 м и 1 м; толщина клеа, флоров, стрингеров, наружной обшивки и второго дна — 1 см; высота двойного дна — 1 м; жесткость внешней нагрузки — 1 кгс/см².

При расчете по методу конечных элементов использовались матрицы жесткости элемента $[K_1]$ (26.8) и матрица жесткости $[K_2]$ (26.18).

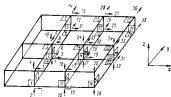


Рис. IV.20. Расчетная сетка перекрытия при пластичной деформации.

Для каждой матрицы было получено четыре решения: для элементов, размеры которых определялись линиями пересечения стенок флоров и перекрестных связей с пластинками второго дна и динца (крупная сетка, см. рис. IV.20); при делении каждого элемента на четыре части (средняя сетка); при делении первоначального элемента на 16 равных частей (мелкая сетка); при использовании средней сетки в середине перекрытия и очень мелкой сетки в районе заделки

(соединяющая сетка). Мелкая сетка получалась делением первоначального элемента на 64 равные части.

В табл. IV.1 дается сопоставление некоторых расчетных величин.

При оценке эффективности МКЭ важным фактором является машинное время. При крупной сетке на расчет одного варианта перекрытия потребовалось 12 мин машинного времени, при использовании же самой мелкой сетки — 50 мин.

В силу полной симметрии перекрытия относительно середины его длины и ширины при расчете рассматривалась лишь одна четверть плавного перекрытия.

Анализ приведенных в табл. IV.1 числовых результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) при достаточной мелкой сетке результаты расчета перекрытия не зависят от типа матрицы жесткости;

2) с уменьшением размера конечного элемента наблюдается быстрый сходимость в результатах расчета;

3) приближенные методы оценки прочности деформируемых перекрытий при определении отдельных элементов изгиба могут привести к значительной погрешности;

4) метод конечных элементов является наиболее эффективным методом оценки прочности судовых перекрытий сложных конструктивных форм.

Заметим также, что разработанная авторами программа [11, 89] для ЭЦВМ «Минск-22» позволяет произвести расчет любого вставочного динцевого перекрытия при действии произвольной внешней нагрузки. С помощью этой программы был рассчитан ряд деформируемых перекрытий со вторым дном (табл. IV.2, IV.3).

В этих таблицах используются следующие обозначения: σ_1^0 , σ_2^0 — максимальные фибровые напряжения соответственно посередине динца клеа и стрингера; $\sigma_{0.5}^0$, $\sigma_{0.25}^0$ — максимальные фибровые напряжения в средней флоре и в месте пересечения с клеом и стрингером соответственно; ω_0 , ω_0' — прогиб соответственно посередине

Таблица IV.1

Результаты расчета перекрытия различными методами



Перекрытие и нагрузка	По МКЭ			
	Матрица жесткости K_2			
	1	2	3	4
Прогиб в центре перекрытия ω_0 , см	0,425	0,475	0,490	0,485
Максимальные нормальные напряжения вертикального клеа, кгс/см ²				
посередине $\sigma_{0.5}^0$, кг	185	250	295	300
в заделке $\sigma_{0.25}^0$, кг	230	285	330	335

Примечание. 1 — крупная сетка; 2 — средняя сетка; 3 — мелкая сетка; 4 — см.

Рис.1	Матрица жесткости K_2				Ориентировочная нагрузка q_0	Средняя прогибающая нагрузка [18]
	1	2	3	4		
	0,415	0,465	0,49	0,49	0,522	0,745
	185	300	310	310	495	590
	280	280	303	305	500	1100

мелкая сетка.

Длины размеров, толщины и условий закрепления стальных стержней сечением σ поперечного сечения на их наружных поверхностях

Алюминиевые стержни	Положения, размеры и условия закрепления стержней	Условия закрепления, кг/см^2 , в процентах, см									
		$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$
1	Осевой зажим	1540	2059	-382	1,37	1186	1697	-306	1,15	-603	-443
2	$0L = 0,7, L = 15 \text{ м}$	614	1694	-250	0,73	618	807	-158	0,53	-569	-375
3	$0L = 1,5, L = 15$	2652	3220	-1154	2,57	2150	3440	-724	2,16	-462	-444
4	$F_{\text{ср}} = 70 \text{ см}^2$	1552	2051	-601	1,60	1293	1839	-382	1,28	-593	-447
5	$F_{\text{ср}} = 150 \text{ см}^2$	1519	1975	-529	1,52	1162	1457	-351	1,11	-601	-433
6	$F_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} = 100 \text{ см}^2$	2187	1925	-537	1,77	1624	1435	-333	1,29	-600	-438
7	$F_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} = 200 \text{ см}^2$	1790	2032	-604	1,45	164	1315	-365	1,06	-592	-410
8	$F_{\text{ср}} = 100 \text{ см}^2$	1792	2201	-587	1,69	1337	1351	-407	1,25	-584	-444
9	$F_{\text{ср}} = 10 \text{ см}^2$ (всплошной поперечный)	2352	3369	-962	2,33	-	-	-	-	-753	-
10	$L = 0,7 \text{ м}$ 	1553	1704	-458	1,46	1103	1451	-362	1,10	-524	-435
11	$L = 0,7 \text{ м}$ 	1555	1755	-484	1,47	1156	1430	-360	1,09	-523	-434

Условия закрепления стальных стержней сечением σ поперечного сечения на их наружных поверхностях

Алюминиевые стержни	Положения, размеры и условия закрепления стержней	Условия закрепления, кг/см^2 , в процентах, см									
		$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{ср}}^{\text{ср}}$
1	$F_{\text{ср}} = 200 \text{ см}^2, F_{\text{ср}} = 200 \text{ см}^2$	1302	2330	-666	1,40	1126	1625	-354	1,09	-677	-440
2	$F_{\text{ср}} = 100 \text{ см}^2, F_{\text{ср}} = 150 \text{ см}^2$	1666	2172	-596	1,65	1223	1322	-326	1,21	-636	-484
3	$F_{\text{ср}} = 1,0$ (всплошной поперечный)	1540	2019	-582	1,37	1189	1497	-308	1,15	-593	-443
4	$\sigma_{\text{ср}} = 0,5$	1308	1469	-504	1,50	969	1044	-369	1,32	-782	-453
5	$\sigma_{\text{ср}} = 0,25$	1300	730	-607	1,91	913	520	-467	1,46	-763	-596
6	$\sigma_{\text{ср}} = 0,6$	1321	0,0	-645	2,08	859	0,0	-629	1,63	-641	-600
7	Средний фтор жестко зажат	444	1829	-495	1,39	1116	1383	-171	0,96	-603	-672
8	Стержень зажат и стержень жестко зажат; стержень флюорооборудован; стержень стальной свободный	1304	2494	-548	1,74	930	6194	-388	1,25	-630	-463
9	Стержень зажат стержнем; стержень стальной свободный; стержень стальной свободный	1004	2026	-616	1,89	718	0,0	-596	1,70	-730	-590
10	Стержень зажат и флюорооборудован; стержень стальной свободный; стержень стальной свободный	606	0,0	-626	1,96	1222	7050	-426	1,35	-719	-657

длины килля и стрингера; $\sigma_x^{2,3}, \sigma_y^{2,3}, \tau_{xy}^{2,3}$ — максимальные нормальные и касательные напряжения соответственно в стенках килля и стрингера в их опорных сечениях.

За основной вариант в табл. IV.2 принято перекрытие, имеющее следующие геометрические параметры: длина перекрытия $L = 15$ м; ширина $B = 10$ м; расстояние между стрингерами $b = 2,5$ м; расстояние между флорами $a = 0,75$ м; толщина днищевой обшивки в настиле второго дна $L_{21} = L_{22} = 1$ см.

Продольные кромки перекрытия основного варианта свободно оперты ($\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ при $y = \pm b/2$), поперечные кромки — жестко заделаны ($u = 0, \tau_{xy} = 0$ при $x = \pm L/2$).

Остальные варианты перекрытий получены из основного варианта путем изменения в нем либо одного из его геометрических параметров, либо условий закрепления по контуру его отдельных связей (стенки флоров, стрингеров и килля, обшивка днища и настила второго дна).

Каждое из рассмотренных перекрытий загружалось равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 1,0$ кгс/см². Анализ числовых результатов расчета 11 вариантов днищевых перекрытий, приведенных в табл. IV.2, позволяет сделать следующие выводы:

а) изменение жесткости на сдвиг балок перекрытия (изменение приведенной площади сечения их стенок) в исследуемом интервале приводит к незначительным (до 5%) изменениям нормальных напряжений и значительным изменениям прогиба и касательных напряжений в опорных сечениях продольных связей перекрытия (см. варианты 1, 4, 5, 6, 7, 8);

б) отклонение сторон опорного контура перекрытия оказывает очень большое влияние на его прогиб и напряженное состояние (см. варианты 1, 2, 3);

в) утолщение поясков килля уменьшает все элементы изгиба перекрытия (см. вариант 10).

Повыши способ расчета перекрытия, когда стенка упругого заделывается его продольных балок характеризуется заданными значениями коэффициентов опорных пар (см. табл. IV.3). Предварительно по программе МКЭ производится расчет жестко заделанного на поперечных кромках перекрытия. Результаты расчета позволяют найти изгибающие моменты в опорных сечениях продольных связей (килля и стрингеров): $M_{21}^{2,3}$ и $M_{22}^{2,3}$. После чего элементы изгиба упруго заделанного на поперечных кромках днищевой обшивки (χ_x — коэффициент опорной пары для килля, χ_y — то же для стрингера) определяются суммированием элементов изгиба свободно опертого на поперечных кромках перекрытия, нагруженного заданной внешней поперечной нагрузкой, с соответствующими элементами изгиба того же перекрытия, у которого опорные сечения килля и стрингера нагружены моментами $\chi_x M_{21}^{2,3}$ и $\chi_y M_{22}^{2,3}$ соответственно.

Покажем, что опорные моменты в основном воспринимаются сечениями соответствующих поясков днищевой обшивки и настила

второго дна, можно заменить эти моменты эквивалентными нормальными напряжениями, действующими в сечениях поперечных кромок днищевой обшивки и настила второго дна. Находимые значения нормальных напряжений используются в качестве внешних заданных нагрузок при расчете перекрытия по МКЭ.

Числовые результаты табл. IV.3 свидетельствуют о большом влиянии условий закрепления связей перекрытия на опорном контуре на его напряженное состояние.

Интересно сопоставить числовые результаты вариантов 1 и 8. Видно, что при замене жесткой заделки поперечных кромок перекрытия (заделка лишь стенок килля и стрингера) по сравнению с полной их заделкой (вариант 1) приводит к резкому увеличению нормальных напряжений в опорных сечениях продольных балок (примерно в 4 раза), тогда как в центре перекрытия прогиб увеличивается всего на 10%, а напряжения практически не изменяются.

§ 31

Плоская задача в упруго-пластической области

В определенных условиях эксплуатации в отдельных судовых пластинках можно ожидать появления зон упруго-пластических деформаций. Эти зоны чаще всего появляются в районах резкой концентрации напряжений (вырезы, резкие изменения геометрических и жесткостных параметров отдельных связей и т. п.).

Как известно, в настоящее время используются два варианта уравнений упруго-пластического состояния тел — теории течения и теории малых упруго-пластических деформаций (деформационная теория А. А. Ильюшина).

Ниже мы ограничимся рассмотрением лишь деформационной теории, получившей в последние годы широкое применение [6, 21, 35, 128].

На основании этой теории, связь между напряжениями $\{\sigma\}$ и деформациями $\{\epsilon\}$ в упруго-пластической области для плоской задачи теории упругости может быть представлена в виде [128]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{3}{2E\sigma_s} (\sigma_x - \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{3}{2E\sigma_s} (\sigma_x - \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} + \frac{3}{E\sigma_s} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

где $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$; $\frac{1}{E} = \frac{1}{E_c} - \frac{2(1+\nu)}{3E}$ (индекс «с» указывает на пластическую стадию работы материала);

$$E_c = \frac{\sigma_s}{\epsilon_s} \quad (31.2)$$

текущий модуль;

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

— интенсивность касательных напряжений;

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

— интенсивность касательных деформаций.

При упругом материале $U E_{\text{ка}} = 0$, и зависимости (31.1) принимают вид закона Гука для изотропного материала.

В матричной форме зависимости (31.1) можно переписать в виде

$$\{\epsilon\} = [E_{\text{ка}}]^{-1} \{\sigma\}, \quad (31.3)$$

здесь

$$[E_{\text{ка}}]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 + \nu & -\nu & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ -\nu & 1 + \nu & -\frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 3\nu \\ 0 & 0 & 0 & 3\nu \end{bmatrix}. \quad (31.4)$$

где $\nu = E/E_{\text{ка}}$.

Связь между приращенными деформациями $\{d\epsilon\}$ и приращенными напряжениями $\{d\sigma\}$, которая потребуется нам в дальнейшем, может быть получена непосредственно из (31.3):

$$\{d\epsilon\} = [E_{\text{ка}}]^{-1} \{d\sigma\}, \quad (31.5)$$

где

$$[E_{\text{ка}}]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}; \quad (31.6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu}{3E} + \frac{S_x^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_c} \right), \\ A_{12} &= \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu}{3E} + \frac{S_y^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_c} \right), \\ A_{13} &= A_{21} = A_{22} = A_{23} = 0, \quad A_{24} = \frac{3}{E_c}, \\ A_{34} &= A_{41} = \frac{1-2\nu}{3E} - \frac{1}{3E_c} + \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_c} \right) \frac{S_x S_y}{\sigma_i^2}; \end{aligned} \right\} \quad (31.7)$$

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x - \frac{\sigma_y}{2}, \quad S_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

$E_c = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_i}$ — касательный модуль упругости.

Значения касательного и секущего модулей (E_c и E_s) определяются непосредственно по кривой $\sigma_i - \epsilon_i$, строясь на оско-

жении экспериментальных данных по одноосному растяжению-сжатию образцов, изготовленных из данного материала.

Обратимся теперь к установлению связи между $|R|$ и $|\varphi|$ в методе конечных элементов при решении задачи о поведении тела в упруго-пластической области.

Непосредственно из (3.6) с учетом (3.3) получаем

$$|R| = \int [D]^T |\sigma| dV, \quad (31.9)$$

где $[D]$ — матрица, связывающая $\{\epsilon\}$ и $\{\varphi\}$ [см. (3.3)].

Если далее учесть зависимости (31.3) и (3.3), то (31.9) можно переписать в виде

$$|R| = \int [D]^T [E_{\text{ка}}] [D] dV |\varphi|. \quad (31.10)$$

Откуда и получаем значение матрицы жесткости

$$[K_{\text{ка}}] = \int [D]^T [E_{\text{ка}}] [D] dV, \quad (31.11)$$

связывающей между собой узловые усилия и узловые перемещения при упруго-пластических деформациях.

Пусть теперь состояния $\{\sigma\}$ и $|R|$ в зависимости (31.9) отвечают уровню внешней нагрузки $|P|$. Для нового уровня внешней нагрузки $|P + dP|$ зависимость (31.9) переписывается в виде

$$|R + dR| = \int [D]^T \{\sigma + d\sigma\} dV, \quad (31.12)$$

Предполагается, что дополнительное напряжение не изменяет значения матрицы $[D]$ (геометрическая линейная задача). Отсюда, если учесть (31.9),

$$|dR| = \int [D]^T \{d\sigma\} dV, \quad (31.13)$$

Если далее воспользоваться зависимостью (31.5) и тем, что на основании (3.3)

$$\{d\epsilon\} = [D] \{d\varphi\}, \quad (31.14)$$

правую часть зависимости (31.13) можно преобразовать к виду

$$|dR| = \int [D]^T [E_{\text{ка}}] [D] dV \{d\varphi\} \quad (31.15)$$

или

$$|dR| = [K_{\text{ка}}] \{d\varphi\}, \quad (31.16)$$

где

$$[K_{\text{ка}}] = \int [D]^T [E_{\text{ка}}] [D] dV \quad (31.17)$$

— матрица жесткости, связывающая приращение узловых усилий $\{dR\}$ и приращения узловых перемещений $\{dq\}$. Полученные выражения (31.11), (31.17) справедливы для конечного элемента произвольной формы.

В общем случае вычисление интегралов в правых частях (31.11) и (31.17) осложняется тем, что матрицы $[D]$, $\{E_{\alpha}\}$ и $\{E_{\beta}\}$ зависят от координат точек. Если для треугольного элемента эти матрицы не зависят от координат, поэтому выражения (31.11) и (31.17) для определения $\{K_{\alpha\alpha}\}$ и $\{K_{\alpha\beta}\}$ переищутся соответственно в виде

$$\{K_{\alpha\alpha}\} = [D]^T \{E_{\alpha\alpha}\} [D] Fh, \quad (31.18)$$

$$\{K_{\alpha\beta}\} = [D]^T \{E_{\alpha\beta}\} [D] Fh. \quad (31.19)$$

При простом нагружении, когда деформационная теория пластичности справедлива, расчет по МКЭ может базироваться на использовании матрицы $\{K_{\alpha\alpha}\}$. При этом расчет ведется сразу для заданного значения уровня внешней нагрузки с использованием обычной процедуры метода последовательных приближений:

1. Для заданного значения внешней нагрузки производится определение напряженно-деформированного состояния при E_s и E_{α} , отсчитываемых нулевым значением напряжений.

2. Для каждого элемента определяются новые значения E_s и E_{α} , зависящие от напряженного состояния, полученного на предыдущем шаге.

3. Вновь производится упругий расчет заданной конструкции при фиксированных значениях E_s и E_{α} , найденных на предыдущем шаге.

4. Затем последовательно повторяются вычислительные процедуры 2 и 3 до получения требуемой точности.

В большинстве практических случаев описанный выше процесс последовательных уточнений жесткостных параметров системы оказывается сложившимся. Графическое изображение процесса приведено на рис. 1.24.

Довольно часто при расчете конструкций в упруго-пластической области используют так называемый шаговой метод последовательного нагружения. Шаговой метод позволяет распространить процедуру решения упруго-пластических задач на задачи, в которых учитываются ползучесть материала и изменение внешней нагрузки во времени (циклическое нагружение).

Суть метода состоит в следующем. Весь интервал нагружения $0 - \{P\}$ разбивается на ряд ступеней:

$$\{\Delta P\}_1, \{\Delta P\}_2, \dots, \{\Delta P\}_i, \dots, \{\Delta P\}_n.$$

Предполагается, что в пределах каждой i -й ступени нагружения жесткостные свойства тела, то есть значения E_s и E_{α} , не изменяются и отвечают напряженно-деформированному состоянию в начале интервала $\{\sigma\}_{i-1}$. Приравнивая далее приращения узловых усилий

$\{dR\}_i$ приращению внешних сил $\{dP\}_i$, получаем уравнение для определения приращений узловых перемещений $\{dq\}_i$:

$$\{K_{\alpha\alpha}\}_{i-1} \{dq\}_i = \{dP\}_i. \quad (31.20)$$

Отсюда

$$\{dq\}_i = \{K_{\alpha\alpha}\}_{i-1}^{-1} \{dP\}_i. \quad (31.21)$$

Приращение напряжений в i -м интервале

$$\{d\sigma\}_i = \{E_{\alpha\alpha}\}_{i-1} [D] \{dq\}_i. \quad (31.22)$$

Компоненты напряжений к концу i -го интервала нагружения, отсчитываемого нагрузке $\{P\}_i = \{P\}_{i-1} + \{dP\}_i$,

$$\{\sigma\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + \{d\sigma\}_i. \quad (31.23)$$

Итак, процесс последовательных «догрузений» продолжается вплоть до интересующего нас значения внешней нагрузки $\{P\}$. Графическое представление метода дано на рис. 1.25.

Использование шагового метода нагружения позволяет описать всю историю изменения напряженно-деформированного состояния тела в процессе возрастания внешней нагрузки.

При использовании этого метода следует иметь в виду, что зависимость (31.16) будет справедлива лишь в условиях вращающего нагружения, то есть когда приращение интенсивности касательных напряжений при увеличении внешней нагрузки на величину $\{dP\}_i$ будет положительным:

$$d\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1} > 0. \quad (31.24)$$

Если же $d\sigma_i < 0$, то происходит разгрузка, в процессе которой материал, как известно, работает упруго. Поэтому в зависимости (31.20), (31.21) и (31.22) вместо матрицы $\{K_{\alpha\alpha}\}$ и $\{E_{\alpha\alpha}\}$ следует ввести матрицы $\{K\}$ и $\{E\}$ для конечного элемента, работающего в упругой области.

В рамках изложенного выше метода шагового нагружения легко учесть любой закон поведения материала, в частности зависимость времени и температуры на механические свойства материала.

§ 32

Вынужденные и свободные колебания пластин в своей плоскости

Любая упругая система, подверженная действию статических нагрузок, может быть проанализирована с помощью матричного уравнения метода конечных элементов в форме метода перемещений вида (4.17):

$$\{K\} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}. \quad (32.1)$$

Каждое i -е уравнение системы уравнений (32.1) выражает условие равновесия дискретной системы по направлению i -й связи, равно-

сильное тому, что сумма реакций в этом направлении от всех соприкасающихся в данном узле элементов равна узловой внешней силе. Это условие остается справедливым для любой упругой системы, причем в общем случае нас не интересует природа самих сил, в частности и инерционных, возникающих при действии на систему изменяющихся во времени внешних нагрузок.

Согласно известному принципу Даламбера задача динамики упругой системы может быть сведена к соответствующей задаче статики при условии включения инерционных сил (равных произведению массы на их ускорения, взятых с обратным знаком) в разряд внешних нагрузок.

Следовательно, для решения динамической задачи, в правую часть (32.1) достаточно добавить реакции от инерционных сил:

$$\{\bar{R}\}_n = -[M] \ddot{\{q\}}, \quad (32.2)$$

где индекс n указывает на связь усилий с силами инерции; $[M]$ — так называемая матрица масс для всей упругой конструкции в общей системе координат. Значение этой матрицы будет определено ниже;

$$\{\bar{q}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{q\}. \quad (32.3)$$

Тогда уравнение равновесия (32.1) при рассмотрении динамических задач примет следующий вид:

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\} - [\bar{M}] \ddot{\{q\}}. \quad (32.4)$$

Переходим к вопросу определения матрицы масс для произвольного плоского элемента, положение которого определяется значениями его узловых перемещений

$$\{q\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t)\}.$$

Каждый из конечных элементов под действием внутренних и внешних сил (включая силы инерции и узловые реакции взаимодействия со смежными элементами) находится в равновесии. Следовательно, для определения его неизвестных узловых перемещений $q_i(t)$ можно воспользоваться уравнениями Лагранжа II-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = R_i(t), \quad (32.5)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \iint_F \left[m \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + m \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (32.6)$$

— кинетическая энергия элемента (m — масса единицы площади элемента); x, y, z, v, w — компоненты перемещения; V — потенциальная энергия элемента; R_i — реакция взаимодействия со смежными элементами по направлению i -й связи.

Интеграл в зависимости (32.6) берется по всей площади элемента F .

Выражение для кинетической энергии элемента пластины (32.6) можно представить в следующей форме:

$$T = \frac{1}{2} \iint_F \{\dot{U}\}^T [m] \{\dot{U}\} dx dy, \quad (32.7)$$

где обозначено:

$$\{U\} = \{u, v\}, \quad [m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись далее связью между $\{U\}$ и $\{q\}$ (см., например, выражение (25.10)):

$$\{U\} = [C] \{q\}, \quad (32.8)$$

окончательно получим

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}, \quad (32.9)$$

где

$$[M] = \iint_F [C]^T [m] [C] dx dy \quad (32.10)$$

— искомая матрица масс конечного элемента в местной системе координат.

Принимая во внимание выражение (32.9) и (3.11), непосредственно из системы (32.5) получаем матричное уравнение

$$[M]_k \{\ddot{q}\}_k + [K]_k \{q\}_k = [R]_k, \quad (32.11)$$

которым и устанавливается связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями конечного элемента при учете его инерционных сил. Введенным в (32.11) при каждом члене индексом k указывается связь с рассматриваемым k -м конечным элементом.

Объединив все уравнения (32.11), выписанные для каждого из конечных элементов конструкции, в одно матричное уравнение вида

$$[M_g] \{\ddot{q}\} + [K_g] \{q\} = [R], \quad (32.12)$$

где в дополнение к (4.4) обозначено:

$$[M_g] = [M]_1 [M]_2 \dots [M]_n, \quad (32.13)$$

Исключая далее с помощью (32.12) вектор $[R]$ из уравнения равновесия всей конструкции (4.16) и учитывая зависимость (4.8), получаем

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{K}] \{q\} = \{\bar{P}\} (t), \quad (32.14)$$

здесь

$$[\bar{M}] = [M]^T [M_g] [M] \quad (32.15)$$

— общая матрица масс для всей конструкции в общей системе координат.

Уравнение (32.14) есть матричное уравнение равновесия метода конечных элементов в общей системе координат при учете инерцион-

ных сил конструкции. Оно представляет собою систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для решения этой системы могут быть использованы любые методы решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В частном случае действия на упругую систему гармонической возмущающей силы

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^0\} \sin \omega t \quad (32.16)$$

решение системы (32.14) можно искать в виде

$$\{\bar{q}\} = \{\bar{q}^0\} \sin \omega t. \quad (32.17)$$

Внося (32.16) и (32.17) в (32.14), получим следующее матричное уравнение для определения амплитудных значений узловых перемещений $\{\bar{q}^0\}$:

$$[\bar{K} - \omega^2 \bar{M}] \{\bar{q}^0\} = \{\bar{P}^0\}. \quad (32.18)$$

В случае свободных колебаний внешние силы равны нулю, т. е. $\{\bar{P}^0\} = 0$. Тогда из уравнения (32.18) получим

$$[\bar{K} - \omega^2 \bar{M}] \{\bar{q}^0\} = 0. \quad (32.19)$$

Система уравнений (32.19) будет иметь решение, отличное от нуля, при условии равенства нулю основного определителя:

$$|\bar{K} - \omega^2 \bar{M}| = 0. \quad (32.20)$$

Определение корней, т. е. частот свободных колебаний из уравнения (32.20), весьма трудоемкая и вычислительно дорогостоящая операция, особенно, если порядок определителя (32.20) достаточно высок. На помощь здесь может прийти скалярный прием определения собственных чисел и задач устойчивости и колебаний, изложенный в § 41.

В предыдущих параграфах настоящей главы при решении задач статки использовались два типа плоских конечных элементов: треугольник и прямоугольник. Поэтому именно для этих двух форм конечных элементов целесообразно получить окончательные выражения для матриц масс $\{M\}$ в местной системе координат.

Матрица масс в местной системе координат для треугольного элемента. Для определения матрицы $\{M\}$ следует воспользоваться зависимостью (32.10). Входные силы матрица $\{C\}$ для треугольного элемента, изображенного на рис. IV.1, определяется непосредственно из рассмотренных выражений (25.12). Таким образом,

$$\{C\}^T = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_{21}(x-x_2) - x_{21}(y-y_2) & 0 \\ y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1) & 0 \\ -y_{31}(x-x_2) + x_{31}(y-y_2) & 0 \\ 0 & y_{21}(x-x_2) - x_{21}(y-y_2) \\ 0 & y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1) \\ 0 & -y_{31}(x-x_2) + x_{31}(y-y_2) \end{bmatrix}. \quad (32.21)$$

Внося (32.21) в (32.10) и выполняя все необходимые вычисления, получим следующее выражение для матрицы $\{M\}$:

$$\{M\} = \begin{bmatrix} [P] & 0 \\ 0 & [P] \end{bmatrix}. \quad (32.22)$$

где

$$[P] = \frac{\rho F}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (32.23)$$

Матрица масс в местной системе координат для прямоугольного элемента. Для прямоугольного элемента, изображенного на рис. IV.4, выражение для матрицы $\{C\}$ определяется непосредственно из (25.13):

$$\{C\}^T = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & 0 \\ \frac{x}{a} \frac{y}{b} & 0 \\ \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ 0 & \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ 0 & \frac{x}{a} \frac{y}{b} \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \end{bmatrix}. \quad (32.24)$$

Внося (32.24) в (32.10), получим для матрицы масс выражение (32.22), в котором матрица $\{P\}$ определяется зависимостью

$$[P] = \frac{\rho F}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (32.25)$$

ОБЪЕМНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пусть имеется некоторое объемное тело, нагруженное произвольной внешней нагрузкой. Требуется определить напряженно-деформированное состояние этого тела.

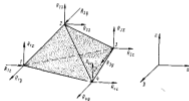


Рис. V.1. Кубический элемент в виде тетраэдра.

При использовании МКЭ, как и в случае решения плоской задачи, на первом этапе необходимо выполнить процедуру идеализации исходного тела, т. е. произвести его замену совокупностью конечных объемных элементов, соединенных между собой лишь в узловых точках. Простейшим конечным элементом будет тетраэдр — фигура, имеющая четыре узловых точки (рис. V.1).

Возможным более сложное модельные схематизация исходной конструкции. В частности, при решении различных практических задач довольно широко используется идеализация объемной конструкции совокупностью

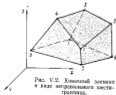


Рис. V.2. Кубический элемент в виде тетраэдрической идеализации.

стью конечных элементов с помощью узловых точек [140] (рис. V.2).

Из всех трех основных этапов использования МКЭ для определения напряженно-деформированного состояния объемных тел требуется более детального рассмотрения лишь вопрос определения матрицы жесткости для объемных элементов различных форм.

Ниже приводятся вывод матрицы жесткостей для ряда объемных элементов.

§ 33

Матрица жесткости для тетраэдра

Тетраэдр с четырьмя узловыми точками. Тетраэдрический конечный элемент (см. рис. V.1) с вершинами 1, 2, 3, 4 нагружен узловыми условиями $\{R\} = \{R_{11}, R_{22}, R_{33}, R_{12}, \dots, R_{14}\}$. Введен в рассмотрение также вектор узловых перемещений элемента $\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_4\}$. Дальнейшей нашей задачей будет установление связи

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (33.1)$$

где $[K]$ — основная матрица жесткости конечного элемента.

В нашем случае положение тетраэдра полностью определяется заданием 12 компонентов узловых перемещений. Это позволяет сделать предположение о линейной зависимости компонентов перемещений для произвольной точки от координат:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned} \right\} \quad (33.2)$$

или, в матричной форме,

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}, \quad (33.3)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}; \quad (33.4)$$

$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}$ — вектор обобщенных координат.

Вектор $\{U\}$ легко выразить через $\{q\}$. Для этого, используя (33.2), записываем выражения для компонентов перемещений узловых точек:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1, \\ v_1 &= \alpha_5 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_8 z_1, \\ &\dots \dots \dots \\ u_4 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 z_4 \end{aligned} \right\} \quad (33.5)$$

$$\{\varphi\} = [B] \{\alpha\}. \quad (33.6)$$

Матрица $[B]$ легко выписывается из непосредственного рассмотрения выражений (33.5).

Из зависимости (33.6) получаем

$$\{\alpha\} = [B]^{-1} \{\varphi\}. \quad (33.7)$$

Приведем в развернутом виде выражение для $u(x, y, z)$ [43, 156]:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{6V} \left\{ (a_1 + b_1x + c_1y + d_1z) u_1 + (a_2 + b_2x + c_2y + d_2z) u_2 + (a_3 + b_3x + c_3y + d_3z) u_3 + (a_4 + b_4x + c_4y + d_4z) u_4 \right\}, \quad (33.8)$$

где

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix},$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \\ 1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad (33.9)$$

$$c_2 = - \begin{vmatrix} x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \\ x_1 & 1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad d_2 = - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (33.10)$$

Значения других постоянных определяются с помощью круговой перестановки узловых индексов 1, 2, 3, 4.

Порядок их расположения определяется так: находясь в одной из вершин (например, 4-й вершине), производим нумерацию вершин противоположной грани путем последовательного обхода их по часовой стрелке (в нашем случае будем иметь, например 1, 2, 3). Дополнив найденный порядок расположения индексов номером вершины 4, получаем приведенный выше порядок индексов 1, 2, 3, 4.

Аналогично получаем выражение для $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$. Дифференцируя компоненты перемещений, можем найти выражения для компонентов деформаций:

$$\{\varepsilon\} = [D] \{\varphi\}, \quad (33.11)$$

где

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}\},$$

$$[D] = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_2 & 0 & c_2 & b_3 & 0 & c_3 & b_4 & 0 & c_4 & b_1 & 0 \\ 0 & d_3 & c_2 & 0 & d_2 & c_4 & 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_4 & c_3 \\ d_1 & 0 & b_3 & d_2 & 0 & b_4 & d_3 & 0 & b_1 & d_4 & 0 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (33.12)$$

В случае тетраэдра принятые нами выражения для компонентов перемещений приводят к тому, что элементы матрицы $[D]$ оказываются постоянными величинами. Поэтому выражение (3.8) можно упростить и привести к виду

$$\{K\} = [D]^T [E_0] [D] V, \quad (33.13)$$

где V — объем тетраэдра, а матрица $[E_0]$ для изотропного тела имеет вид

$$[E_0] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (33.14)$$

где

$$\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad \mu = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (33.14')$$

Матрицу жесткости тетраэдра (33.13) вряд ли целесообразно записывать в развернутом виде. Все целесообразные вычисления в (33.13) целесообразно оформить в виде отдельной подпрограммы, подключаемой к основной программе расчета с помощью ЭВМ рассматриваемой конструкции.

Несколько слов о своей матрице (33.13). При получении этой матрицы мы исходим из предположения о линейном характере изменения компонентов перемещения по объему тетраэдра (см. выражения

(33.2)], что приводит к тождественному выполнению всех условий сплошности по всему объему упругого тела. Из уравнений равновесия не выполняются лишь силовые граничные условия на поверхности контакта граней смежных тетраэдров: имеются разрывы первого рода в значениях компонентов напряжений при переходе через плоскость мысленного раздела смежных тетраэдров.

Вышесказанное позволяет заключить, что использование матрицы жесткости (33.13) приводит к созданию модели, обладающей большей

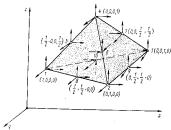


Рис. V.3. Тетраэдр с десятью узловыми точками (в скобках указаны объемные координаты узловых точек).

жесткостью по сравнению с жесткостью реального тела. Найденные при этом значения компонентов напряжений будут меньше их истинных значений.

Тетраэдр с десятью узловыми точками. Чтобы найти удовлетворительные результаты при расчете произвольного объемного тела с помощью полученной выше матрицы жесткости для тетраэдра с четырьмя узловыми точками, требуется достаточно большое количество конечных элементов, так как напряжения и деформации внутри объема элемента постоянны, а следовательно, при переходе от элемента к элементу они будут изменяться скачкообразно и претерпевать разрывы.

Более естественно предположить о линейном характере изменения напряжений и деформаций внутри объема тетраэдра, что в свою очередь требует задания функций перемещений по квадратичному закону.

Это последнее обстоятельство влечет за собой необходимость задания дополнительной информации о геометрии тетраэдра. Кроме всего для тетраэдра, имеющего четыре узловые точки, известны рас-

смотрение еще шесть узловых точек, расположенных посередине дуги каждого из шести его ребер (рис. V.3). В результате получим десять узловых точек, что приводит к увеличению числа степеней свободы элемента до 30. Аналогичный подход был использован ранее при рассмотрении плоской задачи теории упругости для треугольного элемента.

Дальнейшую процедуру вычисления матрицы жесткости удобнее производить, используя естественные объемные координаты тетраэдра L_i (109).

Координата L_i соответствует отношению расстояния от точки A внутри тетраэдра до плоскости, противоположной углу i , к расстоя-

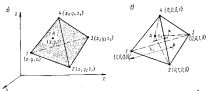


Рис. V.4. Узлы tetраэдра: x — в декартовых координатах; L — в естественных координатах.

нию от противоположного угла до той же плоскости (рис. V.4), например, $L_1 = x_1/h_1$. Кроме того, L_1 может быть интерпретировано как отношение объема подэлементов $A234$ к объему всего элемента 1234 , т. е. $L_1 = V_1/V$, или в общем случае

$$L_i = V_i/V. \quad (33.15)$$

Связь между декартовыми координатами (x, y, z) и объемными координатами (L_1, L_2, L_3, L_4) записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}. \quad (33.16)$$

Из первой строки выражения (33.16) следует, что $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$.

Обрабатывая матрицу, входящую в (33.16), получаем связь объемных координат и декартовых:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (33.17)$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются равенствами (33.10) с круговой перестановкой индексов.

Основным преимуществом объемных координат является простота и удобство вычисления интегралов по объему тетраэдра. Основная формула для вычисления интегралов от произведений объемных координат в произвольных степенях m, n, p и q по объему V имеет вид [100]:

$$\int_V L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q dV = 6V \frac{m!n!p!q!}{(m+n+p+q+3)!}. \quad (33.18)$$

Из выражения (33.8) с помощью объемных координат L_i легко записывается связь между $\{U\}$ и $\{q\}$:

$$\{U\} = \{C\} \{q\}, \quad (33.19)$$

где

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{\Phi\}^T \{\Phi\} \{\Phi\}^T \\ \{\Phi\} &= [L_1 L_2 L_3 L_4]. \end{aligned} \quad (33.20)$$

Выражения для компонента перемещения u (x, y, z) тетраэдра с десятию узловыми точками можно записать, например, в виде

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} z^2. \quad (33.21)$$

Выражения для α_i могут быть выписаны по аналогии с (33.21). Тринадцать произвольных параметров в зависимостях для u, v, w могут быть выражены через соответствующие компоненты перемещений узловых точек аналогично (33.19):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \{\Psi\}^T & 0 & 0 \\ 0 & \{\Psi\}^T & 0 \\ 0 & 0 & \{\Psi\}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{u_{j0}\} \\ \{v_{j0}\} \\ \{w_{j0}\} \end{pmatrix}, \quad (33.22)$$

где векторы $\{\Psi\}$ и $\{u_{j0}\}$ размерами (1×10) равны

$$\{\Psi\} = [L_1, L_2, L_3, L_4, 4L_1L_2, 4L_1L_3, 4L_1L_4, 4L_2L_3, 4L_2L_4, 4L_3L_4], \quad (33.23)$$

$$\{u_{j0}\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}. \quad (33.24)$$

Аналогично запишутся векторы $\{v_{j0}\}$ и $\{w_{j0}\}$.

Вектор деформаций $\{e\}$ через обобщенные узловые координаты $\{q\}$ точек выражается так:

$$\{e\} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [e] & 0 & 0 \\ 0 & [e] & 0 \\ 0 & 0 & [f] \\ [e] & [d] & 0 \\ 0 & [f] & [e] \\ [f] & 0 & [d] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{q_{j0}\} \\ \{q_{j0}\} \\ \{q_{j0}\} \end{pmatrix}, \quad (33.25)$$

здесь

$$\begin{aligned} [d] &= \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{6V} [a_1, a_2, a_3, a_4, 4(L_2a_3 + L_3a_2), \\ &4(L_1a_4 + L_4a_1), 4(L_2a_4 + L_4a_2), 4(L_1a_3 + L_3a_1), \\ &4(L_2a_3 + L_3a_2), 4(L_2a_4 + L_4a_2)]. \end{aligned} \quad (33.26)$$

а векторы $[e]$ и $[f]$ зависят аналогично (33.26) с заменой a_i соответственно на b_i и c_i .

Так как все компоненты деформаций изменяются линейно внутри объема тетраэдра, целесообразно выразить их путем линейной интерполяции через функции от узловых деформаций, которые могут быть вычислены через координаты четырех основных узлов тетраэдра с помощью выражения (33.25). Так например, узловые деформации $\{e_{j0}\}$ из первой строки выражения (33.25) запишутся в форме

$$\{e_{j0}\} = [N] \{u_{j0}\}, \quad (33.27)$$

где

$$\{e_{j0}\} = \{e_{10}, e_{20}, e_{30}, e_{40}\} \quad (33.28)$$

— линейные деформации по оси x в четырех основных узловых точках; матрица $[N]$ вычисляется путем последовательной подстановки в (33.26) координат этих узлов:

$$[N] = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_1 & 0 & 0 & 4a_2 & 0 & 4a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 4a_1 & 0 & 4a_1 & 4a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 4a_1 & 0 & 4a_2 & 4a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 4a_1 & 4a_2 & 4a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33.29)$$

С помощью зависимостей (33.27) и (33.29) можно выразить узловые деформации через узловые перемещения:

$$\{\epsilon\}_{30} = \begin{pmatrix} \{\epsilon_x\}_{30} \\ \{\epsilon_y\}_{30} \\ \{\epsilon_z\}_{30} \\ \{\gamma_{xy}\}_{30} \\ \{\gamma_{yz}\}_{30} \\ \{\gamma_{zx}\}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [W] [0] [0] \\ [0] [M] [0] \\ [0] [0] [L] \\ [M] [N] [0] \\ [0] [L] [M] \\ [L] [0] [N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{q_{30}\} \\ \{p_{30}\} \\ \{w_{30}\} \end{pmatrix} \quad (33.30)$$

где матрицы $[M]$ и $[L]$ вычисляются аналогично матрице $[W]$ путем последовательной подстановки в $\{e\}$ и $\{f\}$ координат основных узлов, а $[0]$ есть нулевая матрица размером (4×10) .

Выражение (33.30) перепишем в матричной форме:

$$\{\epsilon\}_{30} = [S] \{q\}; \quad (33.31)$$

вид матрицы $[S]$ порядка (24×30) и вектора $\{q\}$ порядка (30×1) ясны из выражения (33.30).

Используя теперь линейную интерполляцию (33.19), примененную нами выше при аппроксимации перемещений $[U]$ через узловые перемещения $\{q\}$, для аппроксимации деформаций $\{e\}$ через узловые деформации $\{\epsilon\}_{30}$ можем записать

$$\{e\} = [P]_0 \{\epsilon\}_{30}, \quad (33.32)$$

где

$$[P]_0 = \begin{pmatrix} |\Phi_1\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\Phi_1\rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\Phi_1\rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\Phi_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\Phi_1\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |\Phi_1\rangle \end{pmatrix} \quad (33.33)$$

а $|\Phi\rangle$ — определяется согласно (33.20).

Подставляя $\{e\}_{30}$ из выражения (33.31) в (33.32), получаем

$$\{e\} = [P]_0 [S] \{q\}. \quad (33.34)$$

С учетом связи между напряжениями и деформациями с помощью матрицы $[E_c]$ по (33.14) и приняв во внимание (33.34), запишем окончательную матрицу жесткости порядка (30×30) для тетраэдра с 10-ю узловыми точками [см. (3.8)]:

$$[K] = \int_V [S]^T [P]_0^T [E_c] [P]_0 [S] dV. \quad (33.35)$$

Так как матрица $[S]$ не зависит от параметров интегрирования, то ее можно вынести за знак интеграла:

$$[K] = [S]^T \left(\int_V [P]_0^T [E_c] [P]_0 dV \right) [S]. \quad (33.36)$$

Несмотря на некоторое усложнение записей основных зависимостей в объемных координатах (кратким, больше психологического характера в силу непрактичности, чем математического), преимущество их использования на последующем этапе интегрирования является решающим.

Для интегрирования по объему V выражения в круглых скобках (33.36) воспользуемся формулой (33.18), что приведет нас к простой зависимости для матрицы жесткости и записанной в виде:

$$[K] = [S]^T [Q] [S], \quad (33.37)$$

где

$$[Q] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} \langle r \rangle & \lambda \langle r \rangle & \lambda \langle r \rangle & 0 & 0 & 0 \\ & \langle r \rangle & \lambda \langle r \rangle & 0 & 0 & 0 \\ & & \langle r \rangle & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu \langle r \rangle & 0 & 0 \\ \text{Симметрично} & & & & \mu \langle r \rangle & 0 \\ & & & & & \mu \langle r \rangle \end{pmatrix} \quad (33.38)$$

(24 × 24)

$\langle r \rangle$ — матрица числовых коэффициентов, получаемая в результате интегрирования по формуле (33.18):

$$\langle r \rangle = \frac{V}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (33.39)$$

В матрице (33.38) λ и μ определяются по формулам (33.14'). Необходимо заметить, что принятие для компонентов перемещений выражений в форме (33.21) приводит к тождественно выполняемой условию неразрывности перемещений при переходе через общую грань из одного тетраэдра в другой. В самом деле, каждая из компонент перемещений для точек, лежащих в любой из граней тетраэдра, должна однозначно выражаться через шесть перемещений узловых точек, расположенных по контуру рассматриваемой грани. С другой стороны, квадратичная парабола от двух перемещений в своем общем случае будет содержать шесть произвольных параметров. Следовательно, перемещения точек грани однозначно определяются через перемещения узловых точек, расположенных по контуру данной грани. Отсюда воспроизводится и следует наше утверждение об отсутствии разрывов в перемещениях на поверхности раздела двух смежных элементов. Видно, что использование получаемой при этом матрицы жесткости (33.37) в расчетах по МКЭ должно приводить к несколько заниженным значениям напряжений по сравнению с их действительными значениями.

**Матрица жесткости
для конечного объемного элемента, имеющего восемь узлов**

Объемный элемент с восемью узлами (см. рис. V.2) имеет 24 степени свободы и, следовательно, позволяет существенно увеличить число неизвестных параметров и выражений для компонентов перемещений, а тем самым и обеспечить лучшую аппроксимирующую действительного напряженно-деформированного состояния в пределах объема конечного элемента.

Например, можно представить компоненты перемещений в форме следующих полиномов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 x^2, \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \\ &\quad + \alpha_{14} xz + \alpha_{15} yz + \alpha_{16} y^2, \\ w &= \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \\ &\quad + \alpha_{22} xz + \alpha_{23} yz + \alpha_{24} z^2 \end{aligned} \right\} \quad (34.1)$$

или в матричной форме.

$$[U] = [A] \{\alpha\}. \quad (34.2)$$

Дальнейший путь получения матрицы жесткости совершенно идеален тому, который был использован выше при нахождении матрицы жесткости для тетраэдра. Общее выражение для матрицы жесткости имеет вид (см. выражение (3.8)):

$$[K] = \int_V [D]^T [E_d] [D] dV. \quad (34.3)$$

Чтобы определить матрицу $[D]$, которая входит в подынтегральное выражение (34.3), необходимо сначала с помощью зависимостей Коши найти из зависимости (34.2) значения компонентов деформаций

$$\{\epsilon\} = [D_d] \{\alpha\}. \quad (34.4)$$

Рис. V.5. Прямоугольный конечный элемент (параллелепипед).

Затем непосредственно из (34.2) можно определить вектор узловых перемещений

$$\{\varphi\} = [B] \{\alpha\}. \quad (34.5)$$

Используя зависимость (34.5), можно привести выражение (34.4) к виду

$$\{\epsilon\} = [D] \{\varphi\}. \quad (34.6)$$

где

$$[D] = [D_d] [B]^{-1}. \quad (34.7)$$

Если все грани объемного элемента параллельны координатным плоскостям, то он переходит в параллелепипед (рис. V.5).

Для параллелепипеда компоненты перемещения в функции от узловых перемещений будут иметь следующий вид [132]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} \frac{z}{c} u_0 + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} u_1 + \\ &+ \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{c} u_2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \frac{z}{c} u_3 + \\ &+ \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_4 + \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_5 + \\ &+ \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_6 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{c}\right) u_7. \end{aligned} \quad (34.8)$$

Выражение для $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ можно выписать по аналогии с (34.8), если в последнюю зависимость вместо u_i соответственно ввести v_i и w_i .

Это дает нам право считать, что связь между перемещениями произвольной точки параллелепипеда $[U]$ и его узловыми перемещениями $\{\varphi\}$ известна:

$$[U] = [C] \{\varphi\}. \quad (34.9)$$

Из рассмотренных зависимостей (34.8) можно заключить, что каждый из компонентов перемещения выписывается по линейному закону вдоль любой прямой, параллельной одной из координатных осей. Это приводит к тому, что условия непрерывности перемещений (кинематические граничные условия) при переходе через плоскости разреза одного элемента в смежный элемент автоматически выполняются.

Используя зависимость (34.6), смежно определить компоненты деформаций $\{\epsilon\}$, компоненты напряжений $\{\sigma\}$ и, наконец, матрицу жесткости параллелепипеда $[K]$.

Хотя компоненты деформации и напряжений и выписываются линейно в зависимости от координат, однако все необходимые интегралы в выражении для $[K]$ вычисляются без особых затруднений, вследствие простоты пределов интегрирования.

В заключение отметим, что использование в МКЭ матрицы $[K]$ для параллелепипеда, основанной на аппроксимации компонентов перемещения в форме (34.8), приводит к точному удовлетворению условий сплошности внутри объема элемента и кинематических условий на его поверхности; условия же равновесия внутри и на поверхности элемента оказываются нарушенными.

Использование получающейся при этом матрицы жесткости приводит к построению модели тела, обладающей большей жесткостью по сравнению с жесткостью реального тела. Следовательно, при оценке напряженного состояния рассматриваемого объемного тела будем получать для компонентов напряжения несколько заниженные значения против действительных.

На этом можно закончить рассмотрение вопроса, связанных с использованием МКЭ для решения объемной задачи теории упругости.

Мы не касались целого ряда важных вопросов, таких как: составление уравнения равновесия узловых точек, сведение поверхностных и объемных распределенных внешних нагрузок к эквивалентным узловым силам, решение объемной задачи для упруго-пластического материала и т. д. Все эти вопросы были подробно рассмотрены в предыдущих главах.

§ 35

Осесимметрично напряженное состояние тел вращения

При рассмотрении осесимметричной деформации тело вращения обычно разбивается на совокупности колец с треугольным или четырехугольным поперечным сечением (рис. V.6).

Все основные зависимости МКЭ для осесимметричного тела можно было бы получить как частный случай объемных зависимостей для



Рис. V.6. Осесимметрично тело вращения.



Рис. V.7. Плановые узлы перемещений для кольцевого элемента с треугольным поперечным сечением.

объемного напряженного состояния тел произвольной формы. Однако оказывается проще получить эти зависимости непосредственно [103, 143, 151].

При осесимметричной деформации напряженное состояние будет функцией лишь r и z . В этом отношении данная задача во многом аналогична плоской задаче теории упругости, которая подробно

рассмотрена выше. Это позволит нам в дальнейшем опустить многие промежуточные выкладки без ущерба для понимания излагаемого материала.

Матрица жесткости для кольцевого элемента с треугольным поперечным сечением. При выводе матрицы жесткости для кольца треугольного сечения (рис. V.7) будем исходить из следующих предположений относительно поля перемещений внутри объема конечного элемента:

$$u(r, z) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z, \quad w(r, z) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \quad (35.1)$$

или, в матричной форме,

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}, \quad (35.2)$$

где

$$\{U\} = \{u \ w\}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix}; \quad (35.3)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6\}.$$

Используя выражения (35.1), можно определить узловые перемещения элемента (см. рис. V.7):

$$\{q\} = [B] \{\alpha\}, \quad (35.4)$$

здесь

$$\{q\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ w_1 \ w_2 \ w_3\}; \quad (35.5)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}. \quad (35.6)$$

Исключая с помощью (35.4) вектор $\{\alpha\}$ из правой части (35.2), получаем

$$\{U\} = [C] \{q\}, \quad (35.7)$$

где

$$[C] = [A] [B]^{-1}. \quad (35.8)$$

Зависимости Коши для осесимметричной задачи теории упругости запишутся в виде

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ w(r, z) \end{Bmatrix}. \quad (35.9)$$

Отсюда, если учесть (35.2) и (35.4), можно получить

$$[\sigma] = [D] [\varepsilon], \quad (35.10)$$

где

$$[D] = [D_0] [B]^{-2}, \quad (35.11)$$

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 1 & 2/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35.12)$$

Закон Гука для изотропного тела в матричной форме запишем в виде

$$[\sigma] = [E_d] [\varepsilon], \quad (35.13)$$

где

$$[\sigma] = \{\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}\}; \quad (35.14)$$

$$[E_d] = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_0 & 1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}; \quad (35.15)$$

$$\alpha_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \alpha_3 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (35.16)$$

Для определения матрицы жесткости можно воспользоваться выражением (3.8), которое приблизительно к рассматриваемому случаю переадресуется в виде

$$[K] = [B]^{-1} \Gamma \int_0^{2\pi} \int_0^{\ln r_2} [D_0] \Gamma [E_d] [D_0] r \, d\theta \, dF [B]^{-1} \quad (35.17)$$

или

$$[K] = [B]^{-1} \Gamma [T] [B]^{-1}, \quad (35.18)$$

где

$$[T] = \int_0^{2\pi} \int_0^{\ln r_2} [D_0] \Gamma [E_d] [D_0] r \, d\theta \, dF, \quad (35.19)$$

F — площадь сечения кольцевого элемента.

Непосредственно из (35.19) можно получить [59]

$$[T] = \text{diag.} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_0 \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_0 \Gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \Gamma_1 + \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35.20)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} N_1 &= (b_3 - b_1) \frac{r_1^2}{2} + (b_3 - b_2) \frac{r_2^2}{2} + (b_1 - b_2) \frac{r_3^2}{2} + \\ &+ (c_3 - c_1) \frac{r_1^2}{2} + (c_3 - c_2) \frac{r_2^2}{2} + (c_1 - c_2) \frac{r_3^2}{2}; \\ N_2 &= (b_3 - b_1) \frac{r_1^2}{2} + (b_3 - b_2) \frac{r_2^2}{2} + (b_1 - b_2) \frac{r_3^2}{2} + \\ &+ (c_3 - c_1) r_1 + (c_3 - c_2) r_2 + (c_1 - c_2) r_3; \\ N_3 &= (b_3 - b_2) r_1 + (b_3 - b_1) r_2 + (b_1 - b_2) r_3 + \\ &+ (c_3 - c_1) \ln r_1 + (c_3 - c_2) \ln r_2 + (c_1 - c_2) \ln r_3; \\ N_4 &= \frac{1}{2} \left[(b_1^2 - b_2^2) \frac{r_1^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_2^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_3^2}{2} + \right. \\ &+ 2(b_3 c_1 - b_2 c_2) \frac{r_1^2}{2} + 2(b_3 c_2 - b_2 c_1) \frac{r_2^2}{2} + \\ &+ 2(b_3 c_3 - b_2 c_3) \frac{r_3^2}{2} + (c_1^2 - c_2^2) r_1 + (c_2^2 - c_1^2) r_2 + (c_3^2 - c_1^2) r_3 \left. \right]; \\ N_5 &= \frac{1}{2} \left[(b_1^2 - b_2^2) \frac{r_1^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_2^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_3^2}{2} + \right. \\ &+ 2(b_3 c_3 - b_2 c_3) r_1 + 2(b_3 c_3 - b_2 c_3) r_2 + 2(b_3 c_3 - b_2 c_3) r_3 + \\ &+ (c_1^2 - c_2^2) \ln r_1 + (c_2^2 - c_1^2) \ln r_2 + (c_3^2 - c_1^2) \ln r_3 \left. \right]; \\ N_6 &= \frac{1}{3} \left[(b_1^2 - b_2^2) \frac{r_1^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_2^2}{2} + (b_1^2 - b_2^2) \frac{r_3^2}{2} + \right. \\ &+ 3(b_3 c_3 - b_2 c_3) \frac{r_1^2}{2} + 3(b_3 c_3 - b_2 c_3) \frac{r_2^2}{2} + \\ &+ 3(b_3 c_3 - b_2 c_3) \frac{r_3^2}{2} + 3(b_3 c_1^2 - b_2 c_1^2) r_1 + 3(b_3 c_2^2 - b_2 c_2^2) r_2 + \end{aligned} \quad (35.21)$$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{2} (z_0 - z_1) (r_1^2 - r_0^2), & H_2 &= \frac{1}{2} (z_0 - z_1) (r_1^2 - r_0^2), \\
 H_3 &= \frac{1}{4} (z_0 - z_1) (r_1^2 - r_0^2), & H_4 &= (z_0 - z_1) (r_1 - r_0), \\
 H_5 &= (z_0 - z_1) \ln \frac{r_1}{r_0}, & H_6 &= \frac{1}{6} (z_0^2 - z_1^2) (r_1^2 - r_0^2), \\
 H_7 &= \frac{1}{2} (z_0^2 - z_1^2) (r_1 - r_0), & H_8 &= \frac{1}{2} (z_0^2 - z_1^2) \ln \frac{r_1}{r_0}, \\
 H_9 &= \frac{1}{3} (z_0^2 - z_1^2) (r_1 - r_0), & H_{10} &= \frac{1}{3} (z_0^2 - z_1^2) \ln \frac{r_1}{r_0}, \\
 H_{11} &= \frac{1}{4} (z_0^2 - z_1^2) (r_1^2 - r_0^2), & H_{12} &= \frac{1}{6} (z_0^2 - z_1^2) (r_1^2 - r_0^2).
 \end{aligned}
 \tag{35.27}$$

Основные неизвестные (узловые перемещения) определяются из решения уравнений равновесия узлов (см. выражение (4.18)):

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = [\bar{P}], \tag{35.28}$$

где $[\bar{K}]$ — общая матрица жесткости для всего упругого тела (см. зависимость (4.18)); $\{\bar{q}\}$ — матрица-столбец узловых перемещений

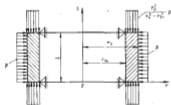


Рис. V.9. Толстая круглая цилиндрическая оболочка под действием равномерных нагрузок.

для упругого тела в целом в общей системе координат; $\{\bar{P}\}$ — матрица-столбец узловых нагрузок.

Следует заметить, что компоненты узловых сил в $\{\bar{P}\}$ приложены равномерно по всему периметру узловой линии элемента. Поэтому при составлении уравнений равновесия в узлах нелинейны введенные нагрузки, действующих вдоль узловых линий, включаются полностью. Например, для i -го узла

$$P_i = 2\pi r_i p_i, \tag{35.29}$$

здесь p_i — нагрузка на единицу длины кольцевого периметра.

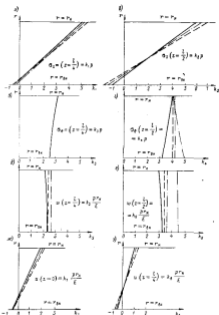


Рис. V.10. Сравнительно резульгаты расчета толстой оболочки по МКЭ и аналитическому методу: а, б — σ_r в четверти и по всей длине оболочки; в, г — u в той же оболочке; д, е — прогибы оболочки в той же оболочке; ж, з — деформации u на уровнях $z = 0$ и $z = h/4$.

Если помимо узловых сил на тело действуют объемные силы интенсивностью $\{F_v\} = \{R_p, Z_p\}$ и поверхностные силы $\{F_n\} = \{R_n, Z_n\}$, то для приведения их к узлам следует воспользоваться соответственно формулами (6.4) и (6.5). Влияние начальных деформаций в теле $\{e\} = \{e_r, e_\theta, e_\phi, \gamma\}$ также учитывается в расчете путем введения дополнительных фиктивных внешних узловых сил, вычисленных по формуле (6.6).

После определения из решения системы (35.26) узловых перемещений $\{\bar{q}\}$ находят напряжения в интересующих нас элементах тела по формуле

$$\{\sigma\} = [E_n] [D_n] [B]^{-1} \{\bar{q}\}. \quad (35.30)$$

Пример. С помощью МКЭ были выполнены некоторые численные расчеты по определению напряженного состояния в толстой круглой цилиндрической оболочке, нагруженной внешним равномерным давлением интенсивностью p (рис. V.9).

Размеры оболочки: $l = 30$ см; $r_0 = 22,5$ см; $r_{00} = 17,5$ см. В качестве конечных элементов, из которых разбиты оболочка, были взяты кольца с произвольными поперечными сечениями. Разбивка по элементам производилась сеткой с шагом по оси z , равным $(r_0 - r_{00})/3$ и по оси ϕ , равным $2\pi/3$.

Трехмерные условия, а также влияние связи между элементами учитывались с помощью матриц жесткости (см. § 22).

На рисунке даны результаты расчета, выполненного на ЭВМ «Минск-22», за рас. V.30 построены кривые, характеризующие распределение по толщине оболочки перемещений u , w и напряжений σ_r , σ_θ (сплошные линии); оговорено на этом рисунке название результатов расчета тех же величин с использованием теории тонких оболочек (пунктир) и с использованием теории оболочки средней толщины по системе прямой линии (гиперэластичные линии). Штриховая линия с двумя пунктирами отражает результаты расчета для бесконечно длинной толстой оболочки.

Анализ полученных численных результатов позволяет заключить:

- 1) в рассматриваемом случае использовались все три расчетных метода дает достаточно близкие результаты;
- 2) влияние на линейное распределение по толщине перемещений u и компонент σ_r и σ_θ оказывает в основном ряд тонких теорий оболочки средней толщины, следовательно оправданы для сравнительно толстой оболочки.

§ 36

Решение осесимметричной задачи теории упругости для упруго-пластической области

Решение упруго-пластической задачи по методу конечных элементов рассматривалось в работах [1, 6, 38, 59, 69, 128, 141].

Ниже приводятся основные зависимости МКЭ для геометрически линейной осесимметричной задачи теории упругости в упруго-пластической области, пусть ее решение и некоторые результаты численных расчетов для одной частной задачи. Предполагается, что рассматриваемое тело идеализировано совокупностью кольцевых элементов с треугольными поперечными сечениями. Расчет производится шаговым методом по нагрузке с линеаризацией зависимостей между напряжениями и деформациями в пределах одного шага приращения нагрузки.

Для материала, работающего в упруго-пластической области, вид формулы (35.16) сохраняется. Изменяется лишь содержание

матрицы $[E_n]$ в зависимости (35.19), которая теперь должна определять связь между компонентами напряжений $\{\sigma\}$ и деформаций $\{e\}$ в упруго-пластической области.

Для осесимметричной задачи теории упругости связь между напряжениями и деформациями, согласно деформационной теории пластичности, запишется следующим образом [21]:

$$\{\sigma\} = [E_n^*] \{e\}, \quad (36.1)$$

где

$$[E_n^*] = [E_n] + [E_n^{pl}]; \quad (36.2)$$

$[E_n]$ — матрица связи между $\{\sigma\}$ и $\{e\}$ при работе материала в упругой области, вычисляемая по формуле (35.15);

$$[E_n^{pl}] = \frac{4}{3} \left(E_c \frac{3E}{2(1+\nu)} \right) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \quad (36.3)$$

Заметим, что для упругого материала $E_c = \frac{3E}{2(1+\nu)}$ и, следовательно, $[E_n^{pl}] = 0$.

При использовании метода шагового нагружения нам требуется знать связь между приращениями напряжений $\{d\sigma\}$ и приращениями деформаций $\{de\}$:

$$\{d\sigma\} = [E_n^*] \{de\}. \quad (36.4)$$

Значение матрицы $[E_n^*]$ легко установить непосредственно из (36.2):

$$[E_n^*] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}, \quad (36.5)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = b_{33} = 2G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} + 2\lambda \right); \\ b_{44} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \lambda \right) 2G; \\ b_{12} &= b_{13} = b_{23} = b_{31} = b_{32} = 2G \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \lambda \right); \\ b_{14} &= b_{24} = b_{34} = b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0; \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_c - 3G}{2G}, \quad E_c = \frac{3E_c}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (36.6)$$

Переходим теперь к определению матрицы жесткости $[\bar{K}_{\text{эл}}]$, устанавливающей связь между приращениями узловых усилий $\{dR\}$ и узловых перемещений $\{dq\}$:

$$\{dR\} = [\bar{K}_{\text{эл}}] \{dq\}. \quad (36.7)$$

Переписывая зависимость (35.18) применительно к рассматриваемому случаю, будем иметь

$$[\bar{K}_{\text{эл}}] = [B^{-1}]^T [\bar{T}_{\text{эл}}] [B]^{-1}, \quad (36.8)$$

здесь

$$[\bar{T}_{\text{эл}}] = \int_0^l \int_F [D_{\text{эл}}]^T [E_{\varepsilon}] [D_{\text{эл}}] r \, dF \, dF. \quad (36.9)$$

Вычисление интеграла в правой части (36.9) можно упростить, если пренебречь изменчивостью значений матриц $[D_{\text{эл}}]$ и $[E_{\varepsilon}]$ по сечению конечного элемента. Относим значения этих матриц к центральной точке сечения с координатами

$$r_{\text{ср}} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, \quad z_{\text{ср}} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}, \quad (36.10)$$

получим

$$[D_{\text{эл}}^{\text{ср}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r_{\text{ср}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36.11)$$

и, следовательно,

$$[\bar{K}_{\text{эл}}] \approx 2\pi r_{\text{ср}} F [D_{\text{эл}}^{\text{ср}}]^T [E_{\varepsilon}] [D_{\text{эл}}^{\text{ср}}], \quad (36.12)$$

где F — площадь поперечного сечения кольцевого элемента.

При выполнении расчетов шаговой метод с использованием матрицы жесткости $[\bar{K}_{\text{эл}}]$ удобно исходить из следующих допущений:

1. В пределах каждого шага нагружения матрица жесткостных параметров $[E_{\varepsilon}]$ не изменяется и отвечает напряженному состоянию в конце предыдущего шага нагружения.

2. Матрица жесткостных параметров $[E_{\varepsilon}]$, интенсивности напряжений σ , и деформаций ε , постоянны в пределах каждого элемента.

Пример. При исследовании влияния концентрации напряжений на устойчивость цилиндрического образца с кольцевой выточкой (рис. V.11). Напряженно-деформированное состояние такого образца при действии осевой нагрузки P определяется из решения осесимметричной задачи теории упругости.

Приближенное решение этой задачи для упруго-пластической области при исследовании особенностей разрушения в условиях квазистатического трещинового карбонильного состояния было получено в работе Г. В. Уманя [78].

Допущения, на которых основаны эти решения, сузят сферу их применения и справедливы только для глубокой выточки. Эти решения не позволяют рассмотреть напряженное состояние в окрестностях дна выточек и устьев кольцевых выточек материала.

Наиболее полно исследовать напряженно-деформированное состояние образца, изображенного на рис. V.11, позволяют метод конечных элементов.

Расчет производится на ЭЦММ «Минск-22» [29, 11] по следующей схеме (рис. V.12).

1. Составляем матрицу жесткости для всей конструкции

$$[K] = [B]^T [\bar{K}_{\text{эл}}] [B], \quad (36.13)$$

где $[\bar{K}_{\text{эл}}]$ — матрица жесткости матрица, блочная матрица является матрица жесткости $[\bar{K}_{\text{эл}}]$ для элементов, входящих в конструкцию; $[B]$ — матрица связи между узловыми перемещениями отдельных элементов и узловыми перемещениями всей конструкции.

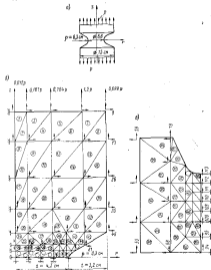


Рис. V.11. Цилиндрический образец с кольцевой выточкой в упруго-пластической области: а — схема нагружения; б — схема дискретизации на конечных элементах; в — деталь дискретизации в районе выточки.

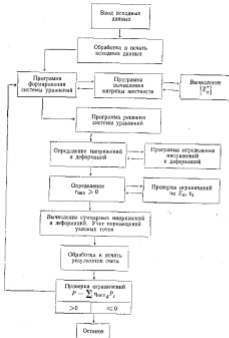


Рис. V.12. Блок-схема программы МДС для упруго-пластического анализа толстых оболочек вращения.

2. Предположим вектор нагрузки $\{\Delta \bar{P}\}$ и, считая при вычислении матрицы жесткости элементов $\{E_{ij}^{(k)}\} = 0$, решим систему уравнений

$$\{\bar{R}\} \{\Delta \bar{q}\} = \{\Delta \bar{P}\}, \quad (35.14)$$

где $\{\Delta \bar{q}\}$ — преобразование узловых перемещений в общей системе координат для конструкции в целом; $\{\Delta \bar{P}\}$ — преобразование узловых элементов узелов.

По найденным элементам $\{\Delta \bar{q}\}$ определяются узловые деформации $\{\Delta \epsilon\}$ и напряжения $\{\Delta \sigma\}$.

3. Определяем коэффициент нагружения $\eta_{max} = (\sigma_y - \sigma_y^0) / \Delta \sigma_y^{max}$, где σ_y — условия текучести Мизеса; $\Delta \sigma_y^{max}$ — преобразование пластичности напряжений в эле-

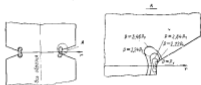


Рис. V.18. Расширение кон пластичности по сетке образца в процессе нагружения.

менту нагружаемым элементом (НЭЭ), работающим в упругой области; σ_y^0 — значение пластичности напряжений, полученное в предыдущем шаге нагружения в НЭЭ.

4. Умножаем полученные в п. 2 преобразования перемещений, деформаций и напряжений на η_{max} (тем самым образуем НЭЭ в заданном положении и запоминаем их).

5. Определяем для каждого элемента элементную $E_{ij} = E_{ij}(\sigma_{ij})$ и матрицу $\{K_{ij}^e\}$. Затем формируем матрицу жесткости для всей конструкции $\{K\}$. Примечательно, что значение E_{ij} определяется непосредственно по деформации $\epsilon_{ij} = -\sigma_{ij} / E_{ij}$, полученной из основанных экспериментальных данных по одностороннему нагружению элемента.

6. Повторим п. 2. Запомним, что при этом в некоторый элемент $\{E_{ij}^0\} \neq 0$.

7. Суммируем полученные на предыдущем шаге полные преобразования, деформации и напряжения с соответствующими им значениями преобразования.

8. Остаток по достижению условия

$$P = \sum \eta_{max,i} \Delta P_i \quad (35.15)$$

(P — заданное значение полной силы, приложенной к образцу); $\eta_{max,i} \Delta P_i$ — коэффициент η_{max} и преобразование полной нагрузки на i -м шаге нагружения) для повторения п. 2 для каждого следующего наиболее нагруженного элемента с постоянной текучестью.

В программе расчета предусматривались две ситуации возможных проблем:

а) если при увеличении нагрузки в пластической области какой-либо модели E_{ij} для какого-то элемента является таковой с, близкой к нулю, то коэффициент η_{max} соответствующим образом;

б) определяем, достигли ли ограничения з. а), заданного и для ϵ_{ij} .



Рис. V.14. Распределение напряжений в работе пластины при нагрузке $P = P_y$.

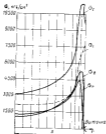


Рис. V.15. Распределение напряжений в работе пластины при нагрузке $P = 3,46 P_y$.

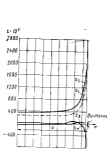


Рис. V.16. Распределение деформаций в работе пластины при нагрузке $P = P_y$.



Рис. V.17. Распределение деформаций в работе пластины при нагрузке $P = 3,46 P_y$.

В качестве материала образца выбран сплав 25, диаграмма деформирования которого построена по результатам испытаний, выполненных А. С. Фелюдиным [8]. На рис. V.13—V.17 показано распределение зон пластичности во времени образца в процессе нагружения и распределение напряжений и деформаций при разных нагрузках.

Характер распределения компонент напряжений по изменению сечения образца (рис. V.14, V.15) совпадает с данными рисунков, приведенных в работе [78].

Численные результаты показывают рост коэффициента концентрации деформаций с увеличением нагрузки и распространением зон пластичности. Обнаружено также, что при увеличении деформации в основании выточки, что связано с увеличением доли рывковой составляющей деформации ϵ_p .

В заключение отметим, что изложенный выше метод и рабочая программа решения объемной задачи теории упругости для упруго-пластической области позволяют исследовать изменение напряженного и деформированного состояний образца в процессе двустороннего деформирования. Это позволяет в дальнейшем более строго оценить влияние указанных факторов при оценке долговечности судовых конструкций в условиях концентрации напряжений.

§ 37

Качество гал

Матричное уравнение для нахождения вектора узловых перемещений в общей системе координат $\{\bar{q}\}$ при действии на тело совокупности внешних сил записывается в виде (см. выражение (32.14))

$$[\bar{M}] \{\bar{q}\} + [\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\} \quad (37.1)$$

Матрица масс для всего тела в общей системе координат $[\bar{M}]$ определяется через значения матриц масс конечных элементов тела $[M_i]$ по формуле (32.15).

Матрицу масс конечного объемного элемента можно найти по формуле (32.10):

$$[M] = \iiint_V [C]^T [m] [C] dx dy dz \quad (37.2)$$

где

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad (37.3)$$

m — масса единицы объема.

Интегрирование в выражении (37.2) производится по всему объему тетраэдра.

Ниже дается вывод матриц масс для элементарных тетраэдра и параллелепипеда. Именно для этих двух типов объемных элементов в § 33, 34 были получены матрицы жесткости.

Матрица масс для элементарного тетраэдра. Матрица $[C]$ связывает компоненты перемещения $[U] = [u \ v \ w]^T$ для произвольной точ-

ки тетраэдра (см. рис. V.1) с вектором узловых перемещений тетраэдра $\{q\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$:

$$\{U\} = [C] \{q\}. \quad (37.4)$$

При составлении выражений (37.4) и (33.8) легко определить элементы матрицы $[C]$. Мы же приводим выражения для матрицы $[C]$ в силу ее производности.

Внося найденное выражение для $[C]$ в (37.2) и проведя все необходимые вычисления, получаем следующее выражение для матрицы масс элементарного тетраэдра:

$$[M] = \begin{bmatrix} |P| & 0 & 0 \\ 0 & |P| & 0 \\ 0 & 0 & |P| \end{bmatrix}. \quad (37.5)$$

Здесь

$$|P| = \frac{\pi V}{30} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (37.6)$$

V — объем элементарного тетраэдра.

Матрица масс для элементарного параллелепипеда. Для элементарного параллелепипеда, изображенного на рис. V.3, матрица масс может быть получена аналогичным путем. Заметим лишь, что в рассматриваемом случае вектор узловых перемещений в (37.4) имеет вид

$$\{q\} = \{u_1, u_2, \dots, u_6, v_1, v_2, \dots, v_6\},$$

а матрица $[C]$ определяется из составления выражений (34.1) и (37.4). Внося используемую формулу (37.2), получаем для матрицы масс параллелепипеда выражение (37.5), где

$$[P] = \frac{\pi V}{316} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ & & & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 8 & 4 & 2 & 4 \\ & & & & & 8 & 4 & 2 \\ & & & & & & 8 & 4 \\ & & & & & & & 8 \end{bmatrix}, \quad (37.7)$$

Симметрично

здесь $V = abc$ — объем элементарного параллелепипеда.

ИЗГИБ, УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

Классическая теория изгиба тонких пластин основана на кинематической гипотезе прямых нормалей. Выделение этой гипотезы существенно упрощает проблему изгиба пластин, но вносит определенную погрешность по сравнению с точным решением задачи с помощью аппарата объемной задачи теории упругости. И все же, в дальнейшем, решение, основанное на использовании классической теории изгиба пластин, условно будем называть точным.

Основной гипотезой теории изгиба пластин используются и при выводе зависимостей метода конечных элементов. Поэтому точность МКЭ должна оцениваться путем сопоставления числовых результатов, полученных при его использовании, с тем, что дает классическая теория изгиба пластин.

При использовании МКЭ для решения задачи изгиба пластин применяется та же идеализация, которая рассматривалась выше в плоской задаче теории упругости: пластины представляются в виде совокупности плоских конечных элементов, соединяющихся между собой в узловых точках.

Если прогибы пластины малы по сравнению с ее толщиной, поперечные перемещения $w(x, y)$ не зависят от перемещений точек срединной поверхности пластины $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ и полностью определяются при этом, независимо от напряженного состояния в срединной поверхности, что существенно упрощает решение задачи.

Обратим внимание на некоторые трудности, которые возникают при использовании МКЭ в задачах изгиба пластин.

Первая трудность связана с аппроксимацией функции прогиба $w(x, y)$. Для получения матрицы жесткости конечного элемента пластины при изгибе мы должны задаться каким-либо выражением для $w(x, y)$ в виде полинома. В простейшем случае количество неизвестных коэффициентов в полном $w(x, y)$ равно числу степеней свободы конечного элемента пластины.

Если в ранее рассмотренных задачах вид такого полинома был единственным (например, линейные полиномы для плоского напряженного состояния треугольного элемента), то при изгибе пластин вид этих полиномов не является единственным.

Ниже будет показано, что в нашем случае применяемый полином 4-й степени может содержать различные члены; это влечет за собой получение различных матриц жесткости. Остается пока открытым вопрос о том, какая же из указанных матриц жесткости лучшая в смысле точности решения задачи.

Вторая «трудность» связана с удовлетворением условий непрерывности между элементами.

При изгибе пластины непрерывность между элементами должна быть в общем случае удовлетворена не только для функции прогиба, но и для первых ее производных, так чтобы были исключены изломы между элементами.

Требование непрерывности углов поворота по всей линии контакта между смежными элементами приводит к значительным математическим трудностям.

На практике, однако, показано, что приравнение некоторых «несовместных» функций, когда непрерывность вдоль кромок элементов сохраняется только для прогибов (в узловых точках все три условия совместности удовлетворяются), иногда обеспечивает сходимость к точному решению. Правда, для получения той же точности количество элементов должно быть больше, чем в случае использования совместных функций.

При расчете пластин за изгиб по МКЭ наибольшее распространение получили простейшие конечные элементы: прямоугольный и треугольный. Для этих двух форм конечных элементов ниже дается вывод их матриц жесткости [45, 60, 67, 92, 104, 155].

§ 38

Прямоугольный и треугольный элементы пластин при изгибе

Рассмотрим сначала прямоугольный элемент пластины в плоскости x, y , показанный на рис. VI.1.

В каждой узловой точке элемента вводятся по три обобщенных перемещения: перемещение и направления оси z и два угла поворота соответственно вокруг оси x и y . Тогда положение срединной поверхности прямоугольного элемента пластины приблизительно определяется 12 обобщенными узловыми координатами (по три координаты по каждому узлу). Следовательно, поверхность элемента пластины можно аппроксимировать некоторым степенным полиномом, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (38.1)$$

или

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i \varphi_i(x, y). \quad (38.2)$$

Заметим, что полином (38.1) удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению изгиба жестких пластин:

$$\nabla^4 w(x, y) = 0. \quad (38.3)$$

Выбранный полином (38.1) является ненулевым полиномом 4-й степени, так как в нем отсутствуют еще члены с $x^4 y^2$, $x^2 y^4$.

Следовательно, возможны еще и другие полиномы с 12 неопределенными коэффициентами (первая «трудность», о которой говорилось во введении к главе).

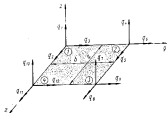


Рис. VI.1. Прямоугольный конечный элемент пластины при изгибе. Положительные направления узловых сил и перемещений.

Полином (38.1) имеет ряд положительных качеств. При $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ перемещение $w(x, y)$ описывается параболой 3-й степени вида

$$\bar{w} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 x + \bar{\alpha}_3 x^2 + \bar{\alpha}_4 x^3.$$

Следовательно, границы раздела элементов описываются полиномами 3-й степени. Каждая такой парабола, определяющей прогиб линии стыка двух смежных элементов между двумя соседними узловыми точками однозначно выражается через значения прогибов и их первых производных в направлении линии стыка в упомянутых двух узловых точках. Но так как узловые перемещения и их первые производные выбираются в дальнейшем в качестве основных неизвестных в общей системе координат и являются общими для элементов, принадлежащих к данному узлу, то любые две соседние кромки двух смежных элементов получат одинаковые прогибы.

Отсюда следует, что использование выражения (38.1) для прогиба $w(x, y)$ конечного элемента обеспечивает непрерывность перемещения в любой точке пластины. К сожалению, не выполняется условие непрерывности угла поворота вдоль каждой стыковки смежных элементов.

Выражение (38.1) не вполне удобно для практического использования. Целесообразно вести вместо α координаты ξ, η , выражающие перемещения и углы поворота узловых точек:

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{Z}_i(x, y). \quad (38.4)$$

где q_i — узловые перемещения конечного элемента в соответствии с их нумерацией на рис. VI.1, т. е.

$$\begin{aligned} q_1 = w(0, 0), \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0), \quad q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0), \dots, q_{12} = \\ = -\frac{\partial w}{\partial x}(a, b). \end{aligned} \quad (38.5)$$

$\mathcal{Z}_i(x, y)$ — функции Эрмита, обладающие следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}_1(0, 0) &= 1, \\ \frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial y}(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial x}(0, 0) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial x}(a, 0) = 0; \\ \mathcal{Z}_2(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{Z}_2}{\partial y}(0, 0) &= 1, \quad \frac{\partial \mathcal{Z}_2}{\partial x}(0, 0) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{Z}_2}{\partial x}(a, 0) = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \mathcal{Z}_{12}(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{Z}_{12}}{\partial y}(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{Z}_{12}}{\partial x}(0, 0) = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{Z}_{12}}{\partial x}(a, 0) = -1. \end{aligned} \right\} \quad (38.6)$$

Выражение для каждой i -й функции Эрмита $\mathcal{Z}_i(x, y)$ можно искать в форме зависимости (38.4):

$$\mathcal{Z}_i(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{12} a_{\alpha i} \varphi_{\alpha}(x, y). \quad (38.7)$$

Подняв (38.7) условия (38.6), получим необходимую систему уравнений для определения $a_{\alpha i}$, а следовательно, и $\mathcal{Z}_i(x, y)$.

Приведем окончательные выражения для $\mathcal{Z}_i(x, y)$ [139]:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi^2\eta + \\ &+ 3\xi\eta^2 + 2\eta^3 - 2\xi^3\eta - 2\xi^2\eta^2, \\ \mathcal{Z}_2(\xi, \eta) &= b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^2), \\ \mathcal{Z}_3(\xi, \eta) &= a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^2\eta), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}_4(\xi, \eta) &= 3\eta^3 - \xi\eta - 2\eta^2 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + 2\xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2, \\ \mathcal{Z}_5(\xi, \eta) &= b(-\eta^2 + \eta^3 + \xi\eta^3 - \xi\eta^4), \\ \mathcal{Z}_6(\xi, \eta) &= a(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta), \\ \mathcal{Z}_7(\xi, \eta) &= -2\xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta - 2\xi^2\eta^2, \\ \mathcal{Z}_8(\xi, \eta) &= b(-\xi\eta^2 + \xi^2\eta), \\ \mathcal{Z}_9(\xi, \eta) &= a(\xi^2\eta - \xi^3\eta), \\ \mathcal{Z}_{10}(\xi, \eta) &= 3\xi^3 + \xi\eta - 2\xi^3 - 3\xi^2\eta + 2\xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - 3\xi^3\eta, \\ \mathcal{Z}_{11}(\xi, \eta) &= b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3), \\ \mathcal{Z}_{12}(\xi, \eta) &= a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta). \end{aligned} \right\} \quad (38.8)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}. \quad (38.9)$$

В рассматриваемом случае при определении $[K]$, по-видимому, проще исходить из общего выражения для потенциальной энергии элемента пластины [45, 60].

Для жестких пластин, нагруженных поперечной нагрузкой, при определении потенциальной энергии можно ограничиться нахождением лишь потенциальной энергии изгиба:

$$V_{\kappa} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\nabla^2 w(x, y) \right]^2 - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy, \quad (38.10)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; h — толщина плиты.

Если воспользоваться для $w(x, y)$ выражением (38.4), то правую часть (38.10) можно представить в следующем виде:

$$V_{\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} k_{ij} q_i q_j, \quad (38.11)$$

где

$$\begin{aligned} k_{ij} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \nabla^2 \mathcal{Z}_i \nabla^2 \mathcal{Z}_j + 2(1-\nu) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2 \mathcal{Z}_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_j}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_j}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_j}{\partial x^2} \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (38.12)$$

Коэффициенты k_{ij} и являются элементами основной матрицы жесткости элемента пластины:

$$[K] = [k_{ij}]. \quad (38.13)$$

В развернутом виде матрица жесткости прямоугольного элемента пластины запишется в виде

(38.14)

Симметрично											
a_1											a_7
a_2	a_7										
a_3	a_4	a_5									
a_4	a_4	a_{11}	a_6								
a_5	a_{10}	a_{10}	$-a_6$	a_8							
$-a_6$	a_{10}	$-a_{10}$	a_6	$-a_8$	a_9						
a_7	a_7	a_{11}	a_6	$-a_8$	a_9	a_{12}	a_1				
$-a_{12}$	a_{12}	a_{12}	a_9	$-a_9$	a_{16}	a_{16}	$-a_1$	a_2			
$-a_{13}$	$-a_{13}$	$-a_{13}$	a_{16}	$-a_{16}$	$-a_{22}$	$-a_{22}$	a_2	a_3			
a_{14}	$-a_{14}$	$-a_{14}$	a_3	$-a_3$	a_{22}	a_{22}	a_3	a_4	a_{18}	a_{18}	a_4
$-a_{15}$	a_{15}	$-a_{15}$	a_4	$-a_4$	$-a_{22}$	$-a_{22}$	a_4	a_5	a_{18}	a_{18}	$-a_5$
$-a_{17}$	a_{17}	$-a_{17}$	$-a_{18}$	a_{18}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_5$	a_{18}	a_{18}	$-a_5$	a_6
	a_{19}	a_{19}	$-a_{19}$	$-a_{19}$	a_{22}	a_{22}	a_6	a_{19}	a_{19}	$-a_6$	a_7
	$-a_{20}$	$-a_{20}$	a_{20}	a_{20}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_7$	$-a_{20}$	$-a_{20}$	a_7	$-a_8$
	a_{21}	a_{21}	$-a_{21}$	$-a_{21}$	a_{22}	a_{22}	a_8	a_{21}	a_{21}	$-a_8$	$-a_9$
	$-a_{22}$	$-a_{22}$	a_{22}	a_{22}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_9$	$-a_{22}$	$-a_{22}$	a_9	$-a_{10}$
	a_{23}	a_{23}	$-a_{23}$	$-a_{23}$	a_{22}	a_{22}	a_{10}	a_{23}	a_{23}	$-a_{10}$	a_{11}
	$-a_{24}$	$-a_{24}$	a_{24}	a_{24}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{11}$	$-a_{24}$	$-a_{24}$	a_{11}	$-a_{12}$
	a_{25}	a_{25}	$-a_{25}$	$-a_{25}$	a_{22}	a_{22}	a_{12}	a_{25}	a_{25}	$-a_{12}$	$-a_{13}$
	$-a_{26}$	$-a_{26}$	a_{26}	a_{26}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{13}$	$-a_{26}$	$-a_{26}$	a_{13}	$-a_{14}$
	a_{27}	a_{27}	$-a_{27}$	$-a_{27}$	a_{22}	a_{22}	a_{14}	a_{27}	a_{27}	$-a_{14}$	a_{15}
	$-a_{28}$	$-a_{28}$	a_{28}	a_{28}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{15}$	$-a_{28}$	$-a_{28}$	a_{15}	$-a_{16}$
	a_{29}	a_{29}	$-a_{29}$	$-a_{29}$	a_{22}	a_{22}	a_{16}	a_{29}	a_{29}	$-a_{16}$	$-a_{17}$
	$-a_{30}$	$-a_{30}$	a_{30}	a_{30}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{17}$	$-a_{30}$	$-a_{30}$	a_{17}	$-a_{18}$
	a_{31}	a_{31}	$-a_{31}$	$-a_{31}$	a_{22}	a_{22}	a_{18}	a_{31}	a_{31}	$-a_{18}$	$-a_{19}$
	$-a_{32}$	$-a_{32}$	a_{32}	a_{32}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{19}$	$-a_{32}$	$-a_{32}$	a_{19}	$-a_{20}$
	a_{33}	a_{33}	$-a_{33}$	$-a_{33}$	a_{22}	a_{22}	a_{20}	a_{33}	a_{33}	$-a_{20}$	$-a_{21}$
	$-a_{34}$	$-a_{34}$	a_{34}	a_{34}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{21}$	$-a_{34}$	$-a_{34}$	a_{21}	$-a_{22}$
	a_{35}	a_{35}	$-a_{35}$	$-a_{35}$	a_{22}	a_{22}	a_{22}	a_{35}	a_{35}	$-a_{22}$	$-a_{23}$
	$-a_{36}$	$-a_{36}$	a_{36}	a_{36}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{23}$	$-a_{36}$	$-a_{36}$	a_{23}	$-a_{24}$
	a_{37}	a_{37}	$-a_{37}$	$-a_{37}$	a_{22}	a_{22}	a_{24}	a_{37}	a_{37}	$-a_{24}$	$-a_{25}$
	$-a_{38}$	$-a_{38}$	a_{38}	a_{38}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{25}$	$-a_{38}$	$-a_{38}$	a_{25}	$-a_{26}$
	a_{39}	a_{39}	$-a_{39}$	$-a_{39}$	a_{22}	a_{22}	a_{26}	a_{39}	a_{39}	$-a_{26}$	$-a_{27}$
	$-a_{40}$	$-a_{40}$	a_{40}	a_{40}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{27}$	$-a_{40}$	$-a_{40}$	a_{27}	$-a_{28}$
	a_{41}	a_{41}	$-a_{41}$	$-a_{41}$	a_{22}	a_{22}	a_{28}	a_{41}	a_{41}	$-a_{28}$	$-a_{29}$
	$-a_{42}$	$-a_{42}$	a_{42}	a_{42}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{29}$	$-a_{42}$	$-a_{42}$	a_{29}	$-a_{30}$
	a_{43}	a_{43}	$-a_{43}$	$-a_{43}$	a_{22}	a_{22}	a_{30}	a_{43}	a_{43}	$-a_{30}$	$-a_{31}$
	$-a_{44}$	$-a_{44}$	a_{44}	a_{44}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{31}$	$-a_{44}$	$-a_{44}$	a_{31}	$-a_{32}$
	a_{45}	a_{45}	$-a_{45}$	$-a_{45}$	a_{22}	a_{22}	a_{32}	a_{45}	a_{45}	$-a_{32}$	$-a_{33}$
	$-a_{46}$	$-a_{46}$	a_{46}	a_{46}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{33}$	$-a_{46}$	$-a_{46}$	a_{33}	$-a_{34}$
	a_{47}	a_{47}	$-a_{47}$	$-a_{47}$	a_{22}	a_{22}	a_{34}	a_{47}	a_{47}	$-a_{34}$	$-a_{35}$
	$-a_{48}$	$-a_{48}$	a_{48}	a_{48}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{35}$	$-a_{48}$	$-a_{48}$	a_{35}	$-a_{36}$
	a_{49}	a_{49}	$-a_{49}$	$-a_{49}$	a_{22}	a_{22}	a_{36}	a_{49}	a_{49}	$-a_{36}$	$-a_{37}$
	$-a_{50}$	$-a_{50}$	a_{50}	a_{50}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{37}$	$-a_{50}$	$-a_{50}$	a_{37}	$-a_{38}$
	a_{51}	a_{51}	$-a_{51}$	$-a_{51}$	a_{22}	a_{22}	a_{38}	a_{51}	a_{51}	$-a_{38}$	$-a_{39}$
	$-a_{52}$	$-a_{52}$	a_{52}	a_{52}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{39}$	$-a_{52}$	$-a_{52}$	a_{39}	$-a_{40}$
	a_{53}	a_{53}	$-a_{53}$	$-a_{53}$	a_{22}	a_{22}	a_{40}	a_{53}	a_{53}	$-a_{40}$	$-a_{41}$
	$-a_{54}$	$-a_{54}$	a_{54}	a_{54}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{41}$	$-a_{54}$	$-a_{54}$	a_{41}	$-a_{42}$
	a_{55}	a_{55}	$-a_{55}$	$-a_{55}$	a_{22}	a_{22}	a_{42}	a_{55}	a_{55}	$-a_{42}$	$-a_{43}$
	$-a_{56}$	$-a_{56}$	a_{56}	a_{56}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{43}$	$-a_{56}$	$-a_{56}$	a_{43}	$-a_{44}$
	a_{57}	a_{57}	$-a_{57}$	$-a_{57}$	a_{22}	a_{22}	a_{44}	a_{57}	a_{57}	$-a_{44}$	$-a_{45}$
	$-a_{58}$	$-a_{58}$	a_{58}	a_{58}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{45}$	$-a_{58}$	$-a_{58}$	a_{45}	$-a_{46}$
	a_{59}	a_{59}	$-a_{59}$	$-a_{59}$	a_{22}	a_{22}	a_{46}	a_{59}	a_{59}	$-a_{46}$	$-a_{47}$
	$-a_{60}$	$-a_{60}$	a_{60}	a_{60}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{47}$	$-a_{60}$	$-a_{60}$	a_{47}	$-a_{48}$
	a_{61}	a_{61}	$-a_{61}$	$-a_{61}$	a_{22}	a_{22}	a_{48}	a_{61}	a_{61}	$-a_{48}$	$-a_{49}$
	$-a_{62}$	$-a_{62}$	a_{62}	a_{62}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{49}$	$-a_{62}$	$-a_{62}$	a_{49}	$-a_{50}$
	a_{63}	a_{63}	$-a_{63}$	$-a_{63}$	a_{22}	a_{22}	a_{50}	a_{63}	a_{63}	$-a_{50}$	$-a_{51}$
	$-a_{64}$	$-a_{64}$	a_{64}	a_{64}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{51}$	$-a_{64}$	$-a_{64}$	a_{51}	$-a_{52}$
	a_{65}	a_{65}	$-a_{65}$	$-a_{65}$	a_{22}	a_{22}	a_{52}	a_{65}	a_{65}	$-a_{52}$	$-a_{53}$
	$-a_{66}$	$-a_{66}$	a_{66}	a_{66}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{53}$	$-a_{66}$	$-a_{66}$	a_{53}	$-a_{54}$
	a_{67}	a_{67}	$-a_{67}$	$-a_{67}$	a_{22}	a_{22}	a_{54}	a_{67}	a_{67}	$-a_{54}$	$-a_{55}$
	$-a_{68}$	$-a_{68}$	a_{68}	a_{68}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{55}$	$-a_{68}$	$-a_{68}$	a_{55}	$-a_{56}$
	a_{69}	a_{69}	$-a_{69}$	$-a_{69}$	a_{22}	a_{22}	a_{56}	a_{69}	a_{69}	$-a_{56}$	$-a_{57}$
	$-a_{70}$	$-a_{70}$	a_{70}	a_{70}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{57}$	$-a_{70}$	$-a_{70}$	a_{57}	$-a_{58}$
	a_{71}	a_{71}	$-a_{71}$	$-a_{71}$	a_{22}	a_{22}	a_{58}	a_{71}	a_{71}	$-a_{58}$	$-a_{59}$
	$-a_{72}$	$-a_{72}$	a_{72}	a_{72}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{59}$	$-a_{72}$	$-a_{72}$	a_{59}	$-a_{60}$
	a_{73}	a_{73}	$-a_{73}$	$-a_{73}$	a_{22}	a_{22}	a_{60}	a_{73}	a_{73}	$-a_{60}$	$-a_{61}$
	$-a_{74}$	$-a_{74}$	a_{74}	a_{74}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{61}$	$-a_{74}$	$-a_{74}$	a_{61}	$-a_{62}$
	a_{75}	a_{75}	$-a_{75}$	$-a_{75}$	a_{22}	a_{22}	a_{62}	a_{75}	a_{75}	$-a_{62}$	$-a_{63}$
	$-a_{76}$	$-a_{76}$	a_{76}	a_{76}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{63}$	$-a_{76}$	$-a_{76}$	a_{63}	$-a_{64}$
	a_{77}	a_{77}	$-a_{77}$	$-a_{77}$	a_{22}	a_{22}	a_{64}	a_{77}	a_{77}	$-a_{64}$	$-a_{65}$
	$-a_{78}$	$-a_{78}$	a_{78}	a_{78}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{65}$	$-a_{78}$	$-a_{78}$	a_{65}	$-a_{66}$
	a_{79}	a_{79}	$-a_{79}$	$-a_{79}$	a_{22}	a_{22}	a_{66}	a_{79}	a_{79}	$-a_{66}$	$-a_{67}$
	$-a_{80}$	$-a_{80}$	a_{80}	a_{80}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{67}$	$-a_{80}$	$-a_{80}$	a_{67}	$-a_{68}$
	a_{81}	a_{81}	$-a_{81}$	$-a_{81}$	a_{22}	a_{22}	a_{68}	a_{81}	a_{81}	$-a_{68}$	$-a_{69}$
	$-a_{82}$	$-a_{82}$	a_{82}	a_{82}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{69}$	$-a_{82}$	$-a_{82}$	a_{69}	$-a_{70}$
	a_{83}	a_{83}	$-a_{83}$	$-a_{83}$	a_{22}	a_{22}	a_{70}	a_{83}	a_{83}	$-a_{70}$	$-a_{71}$
	$-a_{84}$	$-a_{84}$	a_{84}	a_{84}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{71}$	$-a_{84}$	$-a_{84}$	a_{71}	$-a_{72}$
	a_{85}	a_{85}	$-a_{85}$	$-a_{85}$	a_{22}	a_{22}	a_{72}	a_{85}	a_{85}	$-a_{72}$	$-a_{73}$
	$-a_{86}$	$-a_{86}$	a_{86}	a_{86}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{73}$	$-a_{86}$	$-a_{86}$	a_{73}	$-a_{74}$
	a_{87}	a_{87}	$-a_{87}$	$-a_{87}$	a_{22}	a_{22}	a_{74}	a_{87}	a_{87}	$-a_{74}$	$-a_{75}$
	$-a_{88}$	$-a_{88}$	a_{88}	a_{88}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{75}$	$-a_{88}$	$-a_{88}$	a_{75}	$-a_{76}$
	a_{89}	a_{89}	$-a_{89}$	$-a_{89}$	a_{22}	a_{22}	a_{76}	a_{89}	a_{89}	$-a_{76}$	$-a_{77}$
	$-a_{90}$	$-a_{90}$	a_{90}	a_{90}	$-a_{22}$	$-a_{22}$	$-a_{77}$	$-a_{90}$	$-a_{90}$	a_{77}	$-a_{78}$
	a_{91}	a_{91}	$-a_{91}$	$-a_{91}$	a_{22}	a_{22}	a_{78}	a_{91}	a_{91}	$-a_{78}$	

Положительные направления узловых усилий совпадают с положительными направлениями соответствующих им узловых перемещений (см. рис. VI.1).

Связь между вектором узловых перемещений и вектором узловых усилий осуществляется с помощью матрицы жесткости $[K]$:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \\ \vdots \\ R_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{12,1} & k_{12,2} & \dots & k_{12,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ \vdots \\ q_{12} \end{bmatrix} \quad (38.19)$$

Невозможно из выражения (38.19) нетрудно установить физический смысл элементов матрицы жесткости $[K]$: значение производного элемента k_{ik} равно величине реактивной узловой силы в направлении i -го узлового перемещения при единичном k -м узловом перемещении (все остальные узловые перемещения равны нулю).

Матрицы напряжений. Компоненты напряжений от изгиба в элементе пластины определяются на основании известных зависимостей из теории изгиба пластины:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{12z}{E^3} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (38.20)$$

где z расстояние до срединной поверхности по толщине.

Если далее учесть связь единичных моментов с перемещением

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{6(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (38.21)$$

то зависимость (38.20) переписывается в виде

$$\{\sigma\} = [E_2] \{\kappa\}, \quad (38.22)$$

где

$$[E_2] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}, \quad \{\kappa\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (38.23)$$

Компоненты вектора $\{\kappa\}$ определяются дифференцированием функции прогиба элемента пластины $w(x, y)$. В результате можно установить связь

$$\{\kappa\} = [D] \{q\}. \quad (38.24)$$

С учетом зависимости (38.24) из выражения (38.22) получаем окончательную матричную зависимость

$$\{\sigma\} = [E] \{q\}, \quad (38.25)$$

где

$$[E] = [E_2] [D] \quad (38.26)$$

— матрица напряжений.

В общем виде выражение (38.26) весьма громоздко. В практических расчетах вполне достаточно располагать матрицей (38.27), использование которой позволяет определять компоненты напряжений в узловых точках конечного элемента.

Заметим, что нормальные напряжения σ_x и σ_y вдоль сторон опорного контура конечного элемента изменяются по линейному закону, касательные напряжения σ_{xy} — по закону квадратичной параболы.

При достаточно малом размере элемента для оценки напряженного состояния можно пользоваться формулой (38.26), которая вычисляет некоторые осредненные значения для компонентов напряжений, определяемые

«Совместная» матрица жесткости для прямоугольного элемента. При выводе матрицы жесткости (38.14) прямоугольного элемента, изображенного на рис. VI.1, для упругой поверхности использовалось выражение (38.4), которое хотя и удовлетворяет условиям непрерывности самого прогиба по всей области, но приводит к локальной «слабости» при переходе через границу двух смежных элементов.

В работе [139] для прогиба прямоугольного элемента было предложено выражение, которое не приводит к локальной «слабости» элементов. Матрицу жесткости, полученную с помощью такого выражения для прогиба, называют совместной.

Выведем это выражение

$$w(x, y) \approx \sum_{i=1}^8 a_i \mathcal{P}_i(x, y), \quad (38.32)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= (1 - 2\xi)(1 - \xi)^2(1 + 2\eta)(1 - \eta)^2, \\ \mathcal{P}_2 &= (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \eta(1 - \eta)^2 \delta, \\ \mathcal{P}_3 &= -\xi(1 - \xi)^2(1 + 2\eta)(1 - \eta)^2 a, \\ \mathcal{P}_4 &= (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2(3 - 2\eta)\eta^2, \\ \mathcal{P}_5 &= -(1 - 2\xi)(1 - \xi)^2(1 - \eta)\eta^2 b, \\ \mathcal{P}_6 &= -\xi(1 - \xi)^2(3 - 2\eta)\eta^3 a, \\ \mathcal{P}_7 &= (3 - 2\xi)\xi^2(3 - 2\eta)\eta^2, \\ \mathcal{P}_8 &= -(3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta)\eta^2 b, \\ \mathcal{P}_9 &= (1 - \xi)\xi^2(3 - 2\eta)\eta^3 a, \\ \mathcal{P}_{10} &= (3 - 2\xi)\xi^2(1 + 2\eta)(1 - \eta)^2, \\ \mathcal{P}_{11} &= (3 - 2\xi)\xi^2 \eta(1 - \eta)^2 \delta, \\ \mathcal{P}_{12} &= (1 - \xi)\xi^2(1 + 2\eta)(1 - \eta)^2 a. \end{aligned} \quad (38.33)$$

Внося выражение для функций $\mathcal{P}_i(\xi, \eta)$ в формулу (38.12), находим элементы матрицы жесткости. В рассматриваемом случае матрица жесткости может быть представлена в форме (38.14). Входящие в (38.14) величины a_i определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{126}{35} \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{72}{25}, \quad a_2 = \left(\frac{4}{35m^2} + \frac{62}{35} m^2 + \frac{8}{25} \right) \delta^2, \\ a_3 &= \left(\frac{32}{35m^2} + \frac{4}{35} m^2 + \frac{8}{25} \right) a^2, \end{aligned}$$

$$a_4 = \left[\frac{22}{35m^2} + \frac{78}{25} m^2 + \frac{6}{25} (1 + 5\eta) \right] b,$$

$$a_5 = - \left[\frac{78}{35m^2} + \frac{22}{25} m^2 + \frac{6}{25} (1 + 5\eta) \right] a,$$

$$a_6 = - \left[\frac{11}{26} \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{1}{30} (1 + 60\eta) \right] ab,$$

$$a_7 = \frac{54}{35m^2} - \frac{156}{35} m^2 - \frac{72}{25}, \quad a_8 = - \frac{54}{35} \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{72}{25},$$

$$a_9 = \left(\frac{13}{35m^2} - \frac{78}{35} m^2 - \frac{6}{25} \right) \delta, \quad a_{10} = \left(- \frac{3}{35m^2} + \frac{91}{35} m^2 - \frac{2}{25} \right) b^2,$$

$$a_{11} = \left[- \frac{27}{35m^2} + \frac{22}{35} m^2 + \frac{6}{25} (1 + 5\eta) \right] a,$$

$$a_{12} = \left(\frac{18}{35m^2} - \frac{4}{35} m^2 - \frac{6}{25} \right) a^2,$$

$$a_{13} = \left(- \frac{13}{35m^2} - \frac{27}{35} m^2 + \frac{6}{25} \right) b,$$

$$a_{14} = \left(\frac{27}{35m^2} + \frac{13}{35} m^2 - \frac{6}{25} \right) a, \quad a_{15} = - \frac{156}{35m^2} + \frac{54}{35} m^2 + \frac{72}{25},$$

$$a_{16} = \left[\frac{22}{35m^2} - \frac{27}{35} m^2 + \frac{6}{25} (1 + 5\eta) \right] b,$$

$$a_{17} = \left(\frac{78}{35m^2} - \frac{13}{35} m^2 + \frac{6}{25} \right) a, \quad a_{18} = \left(\frac{3}{35m^2} + \frac{9}{35} m^2 + \frac{2}{25} \right) \delta^2,$$

$$a_{19} = \left(- \frac{13}{35m^2} + \frac{78}{35} m^2 + \frac{6}{25} \right) b, \quad a_{20} = \left(- \frac{4}{35m^2} + \frac{16}{35} m^2 - \frac{4}{25} \right) \delta^2,$$

$$a_{21} = \left(\frac{9}{35m^2} + \frac{3}{35} m^2 + \frac{2}{25} \right) a^2, \quad a_{22} = \left(\frac{26}{35m^2} - \frac{3}{35} m^2 - \frac{2}{25} \right) a^2,$$

$$a_{23} = \left[\frac{13}{70m^2} - \frac{11}{35} m^2 - \frac{1}{60} (1 + 5\eta) \right] ab,$$

$$a_{24} = \left[- \frac{13}{70} \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) - \frac{1}{60} \right] ab,$$

$$a_{25} = \left[- \frac{11}{35m^2} + \frac{13}{70} m^2 - \frac{1}{30} (1 + 5\eta) \right] ab,$$

$$m = \frac{a}{b}.$$

Треугольный элемент при загибе пластины. С помощью треугольного элемента можно идеализировать пластину практически любой конфигурации (рис. VI.2), поэтому этот элемент очень важен для практических приложений.

Попытка непосредственного получения матрицы жесткости для треугольного элемента с произвольной ориентацией относительно осей координат приводит к очень громоздким выкладкам. Проще избрать другой путь: сначала получить матрицу жесткости треугольного элемента в местной системе координат, одна из осей которой направлена вдоль одной из сторон треугольника, а затем сделать



Рис. VI.2. Идеализация жесткой плиты произвольной конфигурации треугольными конечными элементами.

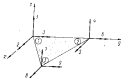


Рис. VI.3. Треугольный конечный элемент пластины при загибе. Показательные направления узловых сил и перемещений.

переход к основной системе координат, преобразовав соответствующим образом матрицу жесткости.

При определении матрицы жесткости треугольного элемента, обладающего девятью степенями свободы (рис. VI.3), выражение для нормального прогиба можно задать в виде полинома 3-й степени:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3 \quad (38.35)$$

или

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i \varphi_i(x, y) \quad (38.36)$$

Значения постоянных α_i в зависимости (38.36) можно выразить через узловые обобщенные перемещения треугольного элемента:

$$\{\varphi\} = [B] \{\alpha\}, \quad (38.37)$$

где

$$\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9\}; \quad (38.38)$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9\}; \quad (38.39)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 + x_2 y_2^2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & 2x_2 y_2 + y_2^2 & 3x_2^2 y_2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -(y_2^2 + 2x_2 y_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (38.40)$$

Обозначения для узловых перемещений в матрице (38.38) соответствуют обозначениям, приведенным на рис. VI.3, т. е. $\varphi_1 = -w(x_1, y_1)$, $\varphi_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}(x_1, y_1)$, $\varphi_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(x_1, y_1)$ и т. д.

Выяс (38.36) в выражение для потенциальной энергии изгиба треугольного элемента

$$V_s = \frac{D}{2} \iint_F \left[(V^2 w(x, y))^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right] dx dy \quad (38.41)$$

получаем

$$V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 k_{ij}^s \alpha_i \alpha_j \quad (38.42)$$

где

$$k_{ij}^s = D \iint_F \left\{ (V^2 \varphi_i V^2 \varphi_j + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right] \right\} dx dy \quad (38.43)$$

Интегрирование в зависимости (38.41) и (38.43) производится по всей площади F рассматриваемого треугольного конечного элемента.

Выражение (38.42) можно переписать более компактно в матричной форме

$$V_s = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [K^s] \{\alpha\} \quad (38.44)$$

Пример 1. Квадратная свободно опираемая пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой независимо от ее сосредоточенной (даны P , приложенной в центре пластины (рис. VI.6). Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Некоторые результаты расчета, полученные при различных размерах сетки (рис. VI.6), приведены в табл. VI.1.

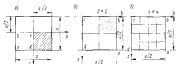


Рис. VI.6. Квадратная свободно опираемая пластина при изгибающей нагрузке: а — сетка 2x2; б — сетка 4x4. Элементы прямоугольные.

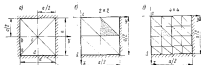


Рис. VI.7. Квадратная жестко заделанная пластина при изгибе (а); б — сетка 2x2; в — сетка 4x4. Элементы треугольные.

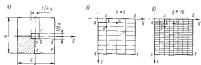


Рис. VI.8. Квадратная свободно опираемая пластина с прямоугольным изгибом (а); б — сетка 4x8; в — сетка 8x16. Элементы прямоугольные.

Пример 2. Квадратная жесткая, жестко заделанная по всем сторонам, изгибная равномерно распределенная нагрузкой независимо от ее сосредоточенной в центре (даны P (рис. VI.7). Остальные условия те же самые, что и в первом примере. Результаты расчетов приведены в табл. VI.2.

Пример 3. Пластина свободно опираемая квадратная жесткая с прямоугольным изгибом, выделенная под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. VI.8). Результаты расчетов приведены в табл. VI.8.

Примеры и моменты квадратной свободно опираемой пластины при изгибе (рис. VI.6) в зависимости от размера сетки (прямоугольный элемент)

Размер сетки	Нагрузка			Среднетемпловая сила		
	Перемещение δ в точке c	Изгибающий момент $M_x = M_y$ в точке c	Кривизна $M_x = M_y$ в точке c	Перемещение δ в точке c	Изгибающий момент $M_x = M_y$ в точке c	Кривизна $M_x = M_y$ в точке c
2x2	0,00444	0,04827	-0,03490	0,0139	0,2318	-0,00566
4x4	0,003945	0,04694	-0,03317	0,0125	0,2472	-0,00184
8x8	0,004040	0,04728	-0,03296	0,0117	0,2518	-0,00022
16x16	0,004058	0,04791	-0,03251	0,0117	0,2534	-0,00005
Точные решения	0,004062	0,04799	-0,03247	0,0116	—	—
Масштабы	qa^4/D	qa^2	qa^2	Pa^4/D	P	P

Таблица VI.2

Примеры и моменты в жестко заделанной квадратной пластине (рис. VI.7) в зависимости от размера сетки (треугольный элемент)

Размер сетки	Нагрузка			Среднетемпловая сила		
	Перемещение в точке c	Момент M_x в точке c	Момент M_y в точке c	Перемещение в точке c	Момент M_x в т.п. в c	Момент M_y в т.п. в c
2x2	0,00694	0,0007	-0,0301	0,00614	0,2060	-0,073
4x4	0,00119	0,0224	-0,0497	0,00574	0,2271	-0,108
8x8	0,00137	0,0230	-0,0494	0,00568	0,2308	-0,122
16x16	0,00128	0,0229	-0,0517	0,00562	0,2314	-0,125
Точные значения	0,00127	0,0231	-0,0514	0,00560	—	-0,128
Масштабы	qa^4/D	qa^2	qa^2	Pa^4/D	P	P

Таблица VI.3

Примеры и моменты в квадратной пластине с вырезом от равномерно распределенной нагрузки (рис. VI.8) в зависимости от размера сетки (прямоугольный элемент)

Размер сетки	Перемещение в точке c	Изгибающий момент M_x в точке c	Изгиб в точке c	
			Изгибающий момент M_x в точке c'	Изгибающий момент M_y в точке c'
4x8	0,00407	0,04827	0,00358	0,02041
8x16	0,00412	0,04834	0,00364	0,02024
Масштабы	qa^4/D	qa^2	qa^4/D	qa^2

Из табл. VI.1, VI.2, VI.3 следует, что использование даже достаточно крупной сетки приводит к малым удовлетворительным результатам.

Увеличение размеров конечных элементов обеспечивает некоторую свободу выбора полученных результатов к точному решению.

Устойчивость пластины. Матрица устойчивости

Классическая проблема устойчивости пластин математически весьма сложна. Ее аналитическое решение возможно лишь при определенной геометрии, условиях закрепления и загрузки внешними усилиями рассматриваемой пластины. Метод конечных элементов позволяет легко преодолеть все эти трудности.

Пусть в рассматриваемой пластине под действием заданных нагрузок усилий, действующих в ее срединной плоскости, возникает напряженное состояние, характеризующееся компонентами напряжений σ_x^0 , σ_y^0 и τ_{xy}^0 . В дальнейшем условимся в задачах устойчивости считать сжимающие напряжения положительными.

Для определения σ_x^0 , σ_y^0 и τ_{xy}^0 могут быть использованы аналитические методы решения плоской задачи теории упругости, либо, если использование последних затруднительно, метод конечных элементов, изложенный для этой задачи в гл. IV.

При некоторой величине внешних сжимающих усилий первоначальное плоское напряженное состояние пластины будет неустойчивым, при этом оказываются возможными существование смежного искривленного равновесного состояния пластины.

Представим пластину в виде совокупности прямоугольных конечных элементов, соединяющихся между собой в узловых точках.

Полная потенциальная энергия элемента будет складываться из энергии изгиба (38.10) и потенциальной энергии срединной поверхности:

$$V = V_{изг} + V_{ср. пов.} \quad (39.1)$$

где

$$V_{ср. пов.} = \frac{h}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sigma_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (39.2)$$

После подстановки $w(x, y)$ в форму (38.4) и (39.1), найдем

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n (k_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}) q_{\alpha\beta}. \quad (39.3)$$

где $k_{\alpha\beta}$ являются элементами матрицы жесткости [см. (38.14)], а

$$t_{\alpha\beta} = h \int_0^a \int_0^b \left[\sigma_x^0 \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial y^2} + \tau_{xy}^0 \left(\frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi_{\alpha}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi_{\beta}}{\partial y^2} \right) \right] dx dy. \quad (39.4)$$

где

Коэффициенты $t_{\alpha\beta}$ образуют матрицу дополнительной жесткости прямоугольного элемента пластины:

$$[T] = [t_{\alpha\beta}]. \quad (39.5)$$

Как видно, значение матрицы $[T]$ зависит от начального напряженного состояния $[\sigma^0]$. Поэтому ее всегда называют матрицей жесткости «начальных напряжений», или матрицей «геометрических жесткостей» (Аррирос), так как она учитывает влияние изменения геометрии системы, вызванного деформацией срединной поверхности, на ее напряженное состояние.

Обобщенные узловые силы i -го элемента пластины определяются на основании следующей зависимости:

$$\{R\}_i = [K_e + T_e] \{q\}_i. \quad (39.6)$$

Нумерации и положительные направления узловых усилий и перемещений соответствуют показанным на рис. VI.1.

Переходя далее с помощью матрицы (4.8) от местной системы координат к общей системе для пластины в целом, составив систему уравнений равновесия узловых точек и принимая во внимание, что суммарная узловая реакция в каждом узле равна нулю, получим уравнение

$$[H] [K_e + T_e] [H]^T \{\bar{q}\} = 0. \quad (39.7)$$

Здесь $[K_e]$ и $[T_e]$ — квадратичные матрицы, составленные соответственно из матриц $[K_e]$ и $[T_e]$:

$$[K_e] = [[K_1], [K_2], \dots, [K_i], \dots, [K_n]], \quad (39.8)$$

$$[T_e] = [[T_1], [T_2], \dots, [T_i], \dots, [T_n]]. \quad (39.9)$$

Перепишем равенство (39.7) в следующем виде:

$$[\bar{K} + \bar{T}] \{\bar{q}\} = 0, \quad (39.10)$$

где $[\bar{K}] = [H]^T [K_e] [H]$ — общая матрица жесткости пластины на изгиб; $[\bar{T}] = [H]^T [T_e] [H]$ — общая матрица геометрических жесткостей пластины.

Условие существования искривленных равновесных состояний пластины на основании уравнения (39.10) будет

$$|\bar{K} + \bar{T}| = 0. \quad (39.11)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{49}{105} m \left(A_1 + \frac{A_2}{m^2} \right) + \frac{43}{450} m \left(A_2 + \frac{A_3}{m^2} \right) + \frac{1}{2} A_4 \\
 a_2 &= b^2 \left(\frac{m}{105} A_1 + \frac{m}{280} A_2 + \frac{2}{45m} A_3 + \frac{1}{30m} A_4 \right); \\
 a_3 &= ab \left(\frac{2}{45} A_1 + \frac{1}{90} A_2 + \frac{1}{105m^2} A_3 + \frac{1}{30m^2} A_4 \right); \\
 a_4 &= m \left(\frac{46}{105} A_1 + \frac{47}{140} A_2 - \frac{46}{105m^2} A_3 + \frac{43}{450m^2} A_4 \right) - \frac{A_5}{2}; \\
 a_5 &= b^2 \left(\frac{m}{105} A_1 + \frac{m}{168} A_2 + \frac{2}{45m} A_3 + \frac{1}{30m} A_4 \right); \\
 a_6 &= ab \left(\frac{2}{45} A_1 + \frac{1}{30} A_2 + \frac{1}{105m^2} A_3 + \frac{1}{280m^2} A_4 \right); \\
 a_7 &= m \left(\frac{46}{105} A_1 + \frac{47}{140} A_2 - \frac{46}{105m^2} A_3 + \frac{47}{190m^2} A_4 \right) + \frac{A_5}{2}; \\
 a_8 &= b^2 \left(\frac{m}{105} A_1 + \frac{m}{168} A_2 + \frac{2}{45m} A_3 + \frac{1}{30m} A_4 \right); \\
 a_9 &= ab \left(\frac{2}{45} A_1 + \frac{1}{30} A_2 + \frac{1}{105m^2} A_3 + \frac{1}{168m^2} A_4 \right); \\
 a_{10} &= \frac{46}{105} m \left(A_1 + \frac{A_2}{m^2} \right) + m \left(\frac{43}{450} A_2 + \frac{47}{140} \frac{A_3}{m^2} \right) - \frac{1}{2} A_4; \\
 a_{11} &= b^2 \left(\frac{m}{105} A_1 + \frac{m}{280} A_2 + \frac{2}{45m} A_3 + \frac{1}{30m} A_4 \right); \\
 a_{12} &= ab \left(\frac{2}{45} A_1 + \frac{1}{90} A_2 + \frac{1}{105m^2} A_3 + \frac{1}{168m^2} A_4 \right); \\
 a_{13} &= -b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{60} mA_2 + \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 \right); \\
 a_{14} &= b \left(\frac{1}{30} A_1 + \frac{1}{120} A_2 + \frac{11A_3}{210m^2} + \frac{1}{60m^2} A_4 \right); \\
 a_{15} &= -\frac{47}{72} A_5; \\
 a_{16} &= \frac{17}{105} mA_1 + \frac{17}{210} mA_2 - \frac{46}{105m} A_3 - \frac{43}{450m} A_4; \\
 a_{17} &= b \left(-\frac{15}{420} mA_1 - \frac{1}{60} mA_2 + \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 \right); \\
 a_{18} &= b \left(\frac{1}{90} A_1 + \frac{1}{120} A_2 - \frac{11}{210m^2} A_3 - \frac{1}{168m^2} A_4 + \frac{1}{10m} A_5 \right); \\
 a_{19} &= b \left(\frac{13}{400} mA_1 + \frac{1}{70} mA_2 - \frac{1}{30m} A_3 - \frac{1}{120m} A_4 \right); \\
 a_{20} &= -b^2 \left(\frac{1}{140} mA_1 + \frac{1}{280} mA_2 + \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{300m} A_4 \right);
 \end{aligned}$$

(39.19)

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= \frac{47}{72} A_5; \\
 a_{22} &= b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{28} mA_2 - \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 \right); \\
 a_{23} &= b \left(\frac{1}{90} A_1 + \frac{1}{120} A_2 - \frac{11}{210m^2} A_3 - \frac{1}{168m^2} A_4 - \frac{1}{10m} A_5 \right); \\
 a_{24} &= \frac{47}{72} A_5; \\
 a_{25} &= ab \left(\frac{1}{45} A_1 + \frac{1}{90} A_2 - \frac{1}{105m^2} A_3 - \frac{1}{280m^2} A_4 \right); \\
 a_{26} &= b \left(\frac{1}{30} A_1 + \frac{1}{40} A_2 + \frac{11}{210m^2} A_3 - \frac{1}{168m^2} A_4 \right); \\
 a_{27} &= -\frac{47}{72} A_5; \\
 a_{28} &= -\frac{17}{105} mA_1 - \frac{17}{210} mA_2 - \frac{17}{105m} A_3 - \frac{17}{210m} A_4 - \frac{A_5}{2}; \\
 a_{29} &= b \left(\frac{13}{400} mA_1 + \frac{1}{50} mA_2 + \frac{1}{60m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 + \frac{1}{10} A_5 \right); \\
 a_{30} &= -b \left(\frac{1}{60} A_1 + \frac{1}{120} A_2 + \frac{13}{420m^2} A_3 + \frac{1}{60m^2} A_4 + \frac{1}{10m} A_5 \right); \\
 a_{31} &= -\frac{46}{30} mA_1 - \frac{47}{140} mA_2 - \frac{17}{105m} A_3 + \frac{17}{210m} A_4; \\
 a_{32} &= -b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{28} mA_2 - \frac{1}{60m} A_3 - \frac{1}{120m} A_4 + \frac{1}{10} A_5 \right); \\
 a_{33} &= -b \left(\frac{1}{30} A_1 + \frac{1}{40} A_2 - \frac{13}{420m^2} A_3 - \frac{1}{60m^2} A_4 \right); \\
 a_{34} &= -b \left(\frac{13}{400} mA_1 + \frac{1}{70} mA_2 + \frac{1}{60m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 + \frac{1}{10} A_5 \right); \\
 a_{35} &= b^2 \left(\frac{m}{140} A_1 + \frac{m}{280} A_2 - \frac{1}{180m} A_3 - \frac{1}{300m} A_4 \right); \\
 a_{36} &= -\frac{47}{72} A_5; \\
 a_{37} &= -b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{28} mA_2 - \frac{1}{60m} A_3 - \frac{1}{120m} A_4 - \frac{1}{10} A_5 \right); \\
 a_{38} &= -b^2 \left(\frac{1}{105} mA_1 + \frac{1}{168} mA_2 - \frac{1}{45m} A_3 - \frac{1}{90m} A_4 \right); \\
 a_{39} &= \frac{47}{72} A_5; \\
 a_{40} &= b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{28} mA_2 + \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{40m} A_4 \right);
 \end{aligned}$$

(39.19)

$$\sigma_{11} = b \left(\frac{1}{60} A_1 + \frac{1}{120} A_2 + \frac{13}{420m^2} A_3 + \frac{1}{70m^2} A_4 + \frac{1}{10m} A_5 \right);$$

$$\sigma_{12} = -\frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{13} = -ab \left(\frac{1}{180} A_3 + \frac{1}{360} A_4 - \frac{1}{140m^2} A_5 - \frac{1}{280m^2} A_6 \right);$$

$$\sigma_{14} = b \left(\frac{1}{30} A_1 + \frac{1}{60} A_2 - \frac{13}{420m^2} A_3 - \frac{1}{70m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{15} = -\frac{ab}{72} A_5; \quad \sigma_{16} = -ab \left(\frac{A_3}{60} + \frac{A_4}{120} + \frac{A_5}{140m^2} + \frac{A_6}{280m^2} \right);$$

$$\sigma_{17} = -b \left(\frac{A_1}{30} + \frac{A_2}{40} + \frac{11A_3}{210m^2} + \frac{A_4}{26m^2} \right); \quad \sigma_{18} = -\frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{19} = -\frac{ab}{105} mA_1 - \frac{ab}{60} mA_2 + \frac{17}{105m} A_3 + \frac{17}{210m} A_4;$$

$$\sigma_{20} = b \left(\frac{11}{210} mA_1 + \frac{1}{60} mA_2 - \frac{1}{60m} A_3 - \frac{1}{120m} A_4 - \frac{A_5}{10} \right);$$

$$\sigma_{21} = b \left(-\frac{A_1}{30} - \frac{A_2}{120} + \frac{13}{420m^2} A_3 + \frac{1}{60m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{22} = -\frac{17}{105} mA_1 - \frac{17}{210} mA_2 - \frac{17}{105m} A_3 - \frac{17}{210} A_4 + \frac{A_5}{2};$$

$$\sigma_{23} = -b \left(\frac{13}{420} mA_1 + \frac{1}{70} mA_2 + \frac{1}{60m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 - \frac{A_5}{10} \right);$$

$$\sigma_{24} = -b \left(\frac{A_1}{60} + \frac{A_2}{120} + \frac{13}{420m^2} A_3 + \frac{1}{10m^2} A_4 - \frac{1}{10m} A_5 \right);$$

$$\sigma_{25} = \frac{17}{105} mA_1 + \frac{17}{210} mA_2 - \frac{17}{105m} A_3 - \frac{17}{140m} A_4;$$

$$\sigma_{26} = b \left(\frac{13m}{420} A_1 + \frac{1}{70} mA_2 - \frac{1}{30m} A_3 - \frac{1}{45m} A_4 \right);$$

$$\sigma_{27} = -b \left(\frac{A_1}{60} + \frac{A_2}{120} - \frac{11}{210m^2} A_3 - \frac{1}{26m^2} A_4 + \frac{1}{10m} A_5 \right);$$

$$\sigma_{28} = b \left(\frac{11}{210} mA_1 - \frac{1}{60m} A_3 - \frac{1}{60m} A_4 - \frac{1}{120m} A_5 + \frac{A_6}{10} \right);$$

$$\sigma_{29} = -b^2 \left(\frac{m}{105} A_1 + \frac{m}{280} A_2 - \frac{1}{45m} A_3 - \frac{1}{90m} A_4 \right);$$

$$\sigma_{30} = \frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{31} = b \left(\frac{13}{420} mA_1 + \frac{1}{60} mA_2 + \frac{1}{10m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 - \frac{A_5}{10} \right);$$

$$\sigma_{32} = b^2 \left(\frac{m}{140} A_1 + \frac{m}{280} A_2 - \frac{1}{180m} A_3 - \frac{1}{300m} A_4 \right);$$

(39.19)

$$\sigma_{33} = -\frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{34} = -b \left(\frac{13}{420} mA_1 + \frac{1}{60} mA_2 - \frac{1}{30m} A_3 - \frac{1}{40m} A_4 \right);$$

$$\sigma_{35} = -b^2 \left(\frac{m}{140} A_1 + \frac{m}{280} A_2 + \frac{1}{60m} A_3 + \frac{1}{120m} A_4 \right);$$

$$\sigma_{36} = \frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{37} = -b \left(\frac{11m}{210} A_1 + \frac{m}{60} A_2 + \frac{1}{30m} A_3 + \frac{1}{40m} A_4 \right);$$

$$\sigma_{38} = b \left(\frac{A_1}{30} + \frac{A_2}{40} - \frac{13}{420m^2} A_3 - \frac{1}{70m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{39} = \frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{40} = -ab \left(\frac{A_1}{60} + \frac{A_2}{360} + \frac{1}{140m^2} A_3 + \frac{1}{280m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{41} = b \left(\frac{A_1}{60} + \frac{A_2}{120} + \frac{13}{420m^2} A_3 + \frac{1}{70m^2} A_4 - \frac{1}{10m} A_5 \right);$$

$$\sigma_{42} = -\frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{43} = -ab \left(\frac{A_1}{180} + \frac{A_2}{360} - \frac{1}{140m^2} A_3 - \frac{1}{280m^2} A_4 \right);$$

$$A_{24} = -b \left(\frac{A_1}{60} + \frac{A_2}{120} - \frac{11}{210m^2} A_3 - \frac{1}{26m^2} A_4 - \frac{1}{10m} A_5 \right);$$

$$\sigma_{45} = \frac{ab}{72} A_5;$$

$$\sigma_{46} = ab \left(\frac{A_1}{45} + \frac{A_2}{90} - \frac{1}{105m^2} A_3 - \frac{1}{105m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{47} = -b \left(\frac{A_1}{30} + \frac{A_2}{120} + \frac{11}{210m^2} A_3 + \frac{1}{26m^2} A_4 \right);$$

$$\sigma_{48} = -\frac{ab}{72} A_5;$$

(39.19)

где

$$m = \frac{b}{a}.$$

(39.20)

Выше выписаны выражения для определения коэффициентов матрицы геометрических жесткостей $[G_c]$, когда доминантное напряженное состояние в пределах конечного элемента изменяется по линейному закону (39.17). При достаточно малых размерах

конечных элементов пластины можно пользоваться осредненными по полу элемента значениями напряжений, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right) &= q_1 = A_1, \\ \sigma_y^0 \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right) &= q_2 = A_2, \\ \tau_{xy}^0 \left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right) &= q_3 = A_3. \end{aligned} \right\} \quad (39.21)$$

Значения коэффициентов матрицы геометрических жесткостей, которые отвечают напряженному состоянию элемента в форме (39.21), определяются непосредственно из (39.19), если в последних выражениях положить $A_2 = A_3 = 0$.

Аналогично может быть получено выражение для матрицы геометрических жесткостей треугольного элемента. Из-за недостатка объема книги мы не приводим эту матрицу.

Для того чтобы продемонстрировать высокую точность и универсальность метода конечных элементов при решении задач об устойчивости пластин, приведем результаты расчета по МКЭ для некоторых задач, точные решения которых известны.

Для простоты ограничимся рассмотрением устойчивости квадратных прямоугольных пластин с размером стороны a , сжатых в одном направлении. При этом для удобства сопоставления результатов сдвигов напряжение будем выражать в следующем виде:

$$\sigma_x = \beta \frac{\pi D}{a^2} \quad (39.22)$$

где β — безразмерный числовой коэффициент; D — цилиндрическая жесткость; b — толщина пластины.

Пример 1. Свободно вращенная квадратная пластина сжата в направлении оси x равномерным усилием $T_x = 0A$ (см. рис. VI.6). Результаты расчета — значения коэффициента β по МКЭ приведены в табл. VI.4 в зависимости от размера сетки [точное значение параметра β в формуле (39.22) дано 4].

Таблица VI.4

Параметр β при устойчивости свободной вращенной квадратной пластины (см. рис. VI.6)

Размер сетки	3x3	4x4	6x6	8x8	10x10	12x12
β	3,645	3,77	3,887	3,993	3,960	3,977
Отклон., %	8,50	5,75	2,80	1,78	1,00	0,58

Пример 2. Жестко заделанная по всему периметру квадратная пластина сжата в обоих направлениях равномерным усилием $T_x = T_y = 0A$ (см. рис. VI.7) (приведем результаты решения задачи по методу конечных элементов и по методу конечных разностей). Заметим, что только значение параметра β в рассматриваемом случае равно 5,315. Видно, что при том же размере сетки метод конечных элементов дает более высокую точность решения, чем метод конечных разностей.

Таблица VI.5

Параметр β при устойчивости жестко заделанной квадратной пластины

Размер сетки	МКЭ		Метод конечных разностей	
	β	Отклон., %	β	Отклон., %
2x2	4,300	7,79	2,439	56
4x4	4,975	6,39	4,385	17,5
6x6	5,078	4,46	4,850	9
8x8	5,160	2,92	—	—
10x10	5,217	1,86	—	—

При решении более сложных задач устойчивости для пластины с разрезами, вырезами, произвольными граничениями в структурных условиях и т. п. метод конечных элементов является предельно универсальной возможностью для получения численных результатов.

§ 40

Поперечные колебания пластин. Матрица масс

Матричное уравнение для определения вектора узловых перемещений в общей системе координат $\{\bar{q}\}$ при действии на жесткую пластину возмущающей внешней поперечной нагрузки запишется в следующем виде (см. зависимость (32.14)):

$$[\bar{M}] \{\bar{q}\} + [\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\} \quad (40.1)$$

Матрица масс для всей пластины в общей системе координат $[\bar{M}]$ определяется через значения матриц масс конечных элементов конструкции $[M]_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) по формуле (32.15).

Матрицу масс для конечного элемента пластины можно найти по формуле (32.10), которая применительно к рассматриваемому случаю поперечных колебаний пластины переищется так:

$$[M] = m \iint [C]^T [C] dx dy \quad (40.2)$$

Здесь предполагается, что в пределах площади конечного элемента $m = \text{const}$.

Матрица масс для прямоугольного элемента пластины [115, 139]. В § 38 при выводе матрицы жесткости было использовано два раз-

личных выражений [см. зависимости (38.4) и (38.6)] для упругой поверхности $z(x, y)$. Первое из этих выражений удовлетворяет условиям неразрывности перемещений при переходе вдоль линий стыковки смежных элементов, но нарушает условия неразрывности вдоль тех же линий углов наклона. Второе выражение также удовлетворяет как условиям неразрывности перемещений, так и условиям неразрывности углов наклона поверхности при переходе через границу между смежными элементами.

Ниже мы приведем матрицы масс соответственно для каждого из упомянутых выше выражений $z(x, y)$.

Непосредственно из (38.4) видно, что элементами матрицы [C] будут функции Эрмита $\mathcal{Z}_i(x, y)$, т. е.

$$[C] = \{[\mathcal{Z}_1(x, y) | \mathcal{Z}_2(x, y) | \dots | \mathcal{Z}_n(x, y)]\}. \quad (40.3)$$

Внося (40.3) в (40.2) и принимая во внимание выражения для функций Эрмита (38.8), после выполнения операции интегрирования по поверхности прямоугольного элемента получаем матрицу масс (40.4), основанную на inconsistentном выражении для прогиба.

Если воспользоваться для функций Эрмита выражениями (38.29), можно получить матрицу масс (40.5), которая уже базируется на consistentном выражении для прогиба.

Заметим, что расположение элементов в матрицах масс (40.4) и (40.5) соответствует азимутации и положительным направлениям для узловых перемещений прямоугольного элемента, которые приведены на рис. VI.1.

Матрица масс для треугольного элемента пластины [146]. Нумерация и положительные направления узловых перемещений элемента показаны на рис. VI.3. Не останавливаясь на выводе, приводим окончательное выражение для матрицы масс треугольного элемента пластины [см. (40.6)].

Для демонстрации точности решений, получаемых при использовании полученных выше матриц масс, приведем числовой пример на свободных поперечных колебаниях жестких пластин.

Пример 1. Для свободной азимутальной пластины требуется получить значения первых четырех частот свободных колебаний и зависимости от размера сетки (см. рис. VI.6).

Для решения были использованы матрица жесткости (38.36) и матрица масс (40.5). Значения 1-4 частот свободных колебаний элементов

$$\omega_i = \alpha_i \sqrt{D/\rho h a^2},$$

где α_i — безразмерный числовой коэффициент; D — изгибная жесткость пластины; ρ — масса единицы длины; h — толщина пластины; a — радиус свободной пластины.

Значения коэффициента α_i для первых четырех частот приведены в табл. VI.6. Видно, что даже достаточно крупная сетка при нахождении первых нескольких частот свободных колебаний может дать вполне удовлетворительную точность.

i	Состояние											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	26,718											
2	2,2713	2693 ²										
3	-2,2719	-66146	3684 ²									
4	0,397	0,993	-1,3314	26,718								
5	-1,993	-62147	29442	-2,2719	2693 ²							
6	-1,016	-29442	2934 ²	-1,3314	-1,3314	8174						
7	7,139	8174	-8174	8,267	8,267	-1,209	3684 ²					
8	-8174	-7913 ²	66146	-1,016	6033	6033	29442	-2,2719	2693 ²			
9	8174	66146	-7913 ²	1,016	-29442	-29442	-2,2719	-2,2719	-1,3314	3684 ²		
10	6,297	6,033	-1,016	2,38	-8174	8174	6,297	6,297	6,033	-1,3314	26,718	
11	1,016	29442	29442	-1,016	-29442	-29442	-1,016	-1,016	-1,016	-1,016	-1,016	2693 ²
12	1,016	29442	-1,016	8174	-8174	8174	1,016	1,016	1,016	1,016	1,016	2693 ²

Значения частного параметра μ_0 при свободных колебаниях свободно вращающейся квадратной пластины

Размер сетки	Почка чисел колебаний			
	1	2	3	4
2x2	20,471	53,071	96,502	127,41
4x4	19,848	51,448	94,620	125,018
8x8	19,754	50,913	93,721	124,314
Точное решение	19,739	49,348	49,348	78,957

§ 41

Определение собственных чисел в задачах устойчивости и колебаний при использовании МКЭ

Основной и самой трудоемкой операцией при исследовании свободных колебаний и устойчивости упругих систем является вычисление частот свободных колебаний и критических нагрузок.

Рассмотрим сначала задачу о свободных колебаниях. Определение частот из уравнения (32.20) производится, как правило, путем подбора, т. е. задаются рядом значений λ , вычисляются значения $\Delta\lambda$, строится график и путем графической интерполяции находят корни. При использовании этого метода можно значительно сократить трудоемкость вычислений и совершенно исключить возможность пропуска какой-либо искомого частоты, если воспользоваться одним эффективным приемом отделения частот [34].

Предположим, что для решения задачи о свободных колебаниях был использован метод конечных элементов и за основные неизвестные выбраны s узловых перемещений (линейные перемещения и углы поворота) q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) и r статически неопределимых усилий R_j ($j = s+1, s+2, \dots, s+r = n$). Для определения этих неизвестных необходимо составить s уравнений равновесия и r уравнений совместности деформаций.

Неизвестные перемещения q_i и статически неопределимые усилия R_j представим в виде

$$q_i(t) = q_i \sin \lambda t, \quad R_j(t) = R_j \sin \lambda t. \quad (41.1)$$

Введя зависимость (41.1) в систему $s+r$ уравнений в приращенной определитель полученной системы n алгебраических линейных однородных уравнений со значениями q_i и R_j нулю, получим искомого частного уравнение:

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (41.2)$$

Здесь $\Delta(\lambda)$ — определитель n -го порядка с симметричной относительно главной диагонали матрицей элементов:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & b_{1,s+1} & b_{1,s+2} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & b_{2,s+1} & b_{2,s+2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & b_{s,s+1} & b_{s,s+2} & \dots & b_{sn} \\ \hline b_{s+1,s+1} & b_{s+1,s+2} & \dots & b_{s+1,n} & c_{s+1,s+1} & c_{s+1,s+2} & \dots & c_{s+1,n} \\ b_{s+2,s+1} & b_{s+2,s+2} & \dots & b_{s+2,n} & c_{s+2,s+1} & c_{s+2,s+2} & \dots & c_{s+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} & c_{n,s+1} & c_{n,s+2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (41.3)$$

где a_{ik} , b_{jk} , c_{kl} — коэффициенты, зависящие от упругих и инерционных свойств рассматриваемой упругой системы и от ненулевого значения λ .

Пологая в (41.3) $\lambda = \lambda_0$ (λ_0 — некоторое произвольное число, о его выборе будет сказано ниже), получим числовой определитель, матрица элементов которого с помощью использования процедуры Гаусса может быть легко преобразована к треугольному виду:

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & \dots & a_{1s}^0 & b_{1,s+1}^0 & b_{1,s+2}^0 & \dots & b_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & \dots & a_{2s}^0 & b_{2,s+1}^0 & b_{2,s+2}^0 & \dots & b_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}^0 & a_{s2}^0 & \dots & a_{ss}^0 & b_{s,s+1}^0 & b_{s,s+2}^0 & \dots & b_{sn}^0 \\ \hline c_{s+1,s+1}^0 & c_{s+1,s+2}^0 & \dots & c_{s+1,n}^0 & c_{s+2,s+1}^0 & c_{s+2,s+2}^0 & \dots & c_{s+2,n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}^0 & c_{n2}^0 & \dots & c_{ns}^0 & c_{n,s+1}^0 & c_{n,s+2}^0 & \dots & c_{nn}^0 \end{vmatrix} \quad (41.4)$$

Предположим далее, что рассматриваемая упругая система имеет частоты

$$\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \dots, \lambda_{m0}, \lambda_{m+10}, \dots \quad (41.5)$$

Тогда можно сформулировать следующее правило для определения местоположения произвольного числа $\lambda = \lambda_0$ в спектре собственных частот системы (41.5):

$$\lambda_{m0} < \lambda_0 < \lambda_{m+10} \quad (41.6)$$

где m — число отрицательных диагональных элементов a_{ii}^0 треугольной матрицы (41.4). Строки, в которых расположены коэффициенты a_{ii}^0 ,

соответствуют уравнениям равновесия; i — число собственных частот некоторой фиктивной упругой системы, получаемой из рассматриваемой путем наложения на нее абсолютно жестких связей $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) и удаления r связей $R_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), значения которых меньше заданного значения λ_0 ; κ — число отрицательных диагональных элементов G_i той же матрицы (41.4). Строки этой матрицы, в которых расположены коэффициенты G_i , соответствуют уравнениям совместности деформаций.

Поясним содержание фиктивной упругой системы на примере решения задачи о свободных колебаниях плоской пластины. Пусть пластина идеализирована совокупностью треугольных конечных элементов. В числе основных неизвестных для каждого конечного элемента должно быть не менее трех неизвестных узловых перемещений, например u_1 , v_1 и w_1 .

В качестве оставшихся трех неизвестных можно принять узловые статически неопределимые усилия R_{20} , R_{30} и R_{40} .

Для получения фиктивной упругой системы необходимо все неизвестные перемещения и узловые усилия системы положить равными нулю. В частности, для рассматриваемого конечного элемента будем иметь

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad R_{20} = R_{30} = R_{40} = 0.$$

В результате получим систему конечных элементов, по существу, изолированных один от другого. Для каждого из этих элементов нужно определить число собственных частот, значения которых меньше λ_0 . Сумма этих частот, подсчитанных для каждого из конечных элементов, и есть i .

Используя зависимость (41.5), легко определить любую собственную частоту упругой системы с любой наперед заданной точностью.

Обычно нас интересуют значения нескольких низших частот. При этом если размеры конечных элементов достаточно малы, то i в методе переисчислений будет равно нулю.

Наложивший выше прием отселения частот с последующим их определением полностью может быть перенесен на задачи по устойчивости консервативных упругих систем.

§ 42

Нагиб пластины средней толщины. Выход матрицы жесткости прямоугольного элемента

При рассмотрении вопроса об использовании метода конечных элементов в расчете пластин средней толщины ограничимся лишь получением матрицы жесткости для прямоугольного конечного элемента [58]. Другая сторона МКЭ при расчете пластин средней толщины совершенно идентична таковой при расчете толстых абсолютно жестких пластин.

Для общности будем предполагать, что пластина изготовлена из анизотропного материала, для которого

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = [E] \{ \epsilon \}, \quad (42.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}; & E_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}; & E_{33} &= \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} = E_{21}; \\ & & E_{44} &= G_{23}; & E_{55} &= G_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (42.2)$$

На основании гипотезы прямой линии, углы φ_x и φ_y представляющие собой полные повороты сечений $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, соответственно будут равны

$$\varphi_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x(x, y), \quad \varphi_y(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y(x, y), \quad (42.3)$$

где γ_x и γ_y — средние деформации поперечного сдвига по толщине пластины. При этом перемещения любой точки пластины будут равны

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\varphi_y(x, y), & v(x, y, z) &= -z\varphi_x(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (42.4)$$

Отсюда получим следующие выражения для компонентов деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} \right) = -z\chi_x, \\ \epsilon_y &= -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} \right) = -z\chi_y, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= -z \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x^2} \right) = -z\chi_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = -\gamma_x, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\gamma_y. \end{aligned} \right\} \quad (42.5)$$

Из рассмотрения выписанных зависимостей видно, что перемещение w и деформации сдвига γ_x и γ_y срединной плоскости.

В случае прямоугольного элемента пластины необходимо для каждого угла ввести по пять степеней свободы, три из которых связаны с его изгибными деформациями, а остальные две — с деформациями сдвига (рис. VI.9).

Для упругой поверхности пластины можно воспользоваться выражением

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{i=12} q_i \mathcal{E}_i(x, y), \quad (42.6)$$

где q_i — узловые перемещения конечного элемента в соответствии с их нумерацией на рис. VI.9, а; функции $\mathcal{E}_i(x, y)$ выражаются зависимостями (38.8).

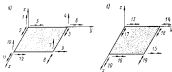


Рис. VI.9. Прямоугольный элемент пластины средней толщиной: а — показаны все возможные перемещения в узлах элемента; б — то же от поперечного сдвига.

Изменение средних деформаций γ_x и γ_y по полю конечного элемента можно представить соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= -q_{12}\mathcal{E}_{12}(x, y) - q_{14}\mathcal{E}_{14}(x, y) - q_{16}\mathcal{E}_{16}(x, y) - q_{18}\mathcal{E}_{18}(x, y), \\ \gamma_y &= q_{17}\mathcal{E}_{17}(x, y) + q_{19}\mathcal{E}_{19}(x, y) + q_{20}\mathcal{E}_{20}(x, y) - q_{22}\mathcal{E}_{22}(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (42.7)$$

где q_i — узловые значения средних деформаций γ_x и γ_y (рис. VI.9, б);

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \mathcal{E}_{14}(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b}, \\ \mathcal{E}_{16}(x, y) &= \frac{x}{a} \frac{y}{b}, \quad \mathcal{E}_{18}(x, y) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{aligned} \right\} \quad (42.8)$$

Внося выражения для $w(x, y)$, $\gamma_x(x, y)$ и $\gamma_y(x, y)$ из (42.6) и (42.7) в (42.5), а затем в (42.1), можно выразить компоненты напряжений $\{\sigma\}$ и деформаций $\{\epsilon\}$ через узловые перемещения $\{q\}$:

$$\{\epsilon\} = [B]^T \{q\}, \quad \{\sigma\} = [E_c][B]\{q\}. \quad (42.9)$$

По найденным $\{\sigma\}$ и $\{\epsilon\}$ подсчитываем значение потенциальной энергии деформации конечного элемента

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}, \quad (42.10)$$

где $[K]$ — жесткая матрица жесткости конечного элемента на изгиб с учетом плоских деформаций поперечного сдвига.

Элементы этой матрицы определяются по формуле

$$k_{ik} = \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} [B]^T [E_c] [B] dx dy dz. \quad (42.11)$$

Другие пути получения матрицы жесткости для пластин средней толщиной (например, при использовании принципа Рейсснера) показаны в работах [16, 117].

РАСЧЕТ ОБЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОЧЕРТАНИЙ

Эффективность метода конечных элементов особенно сильно проявляется при расчете тонких оболочек произвольного очертания [22, 42, 67, 102].

Оболочка может быть идеализирована совокупностью конечных элементов самых разнообразных форм при различных предположениях в отношении напряженного состояния. Простейшим типом конечного элемента, который может быть использован в процедуре идеализации оболочки, является плоский треугольный элемент с настоящими напряжениями в его срединной поверхности и линейным законом изменения кривизны при деформации оболочки (рис. VII.1).

Рис. VII.1. Идеализация оболочки произвольной формы плоскими треугольными элементами.

Для оболочек произвольной формы используется, как правило, треугольный плоский элемент. При идеализации цилиндрических оболочек часто используются прямоугольные плоские или цилиндрические элементы постоянной кривизны.

Основная трудность состоит в построении матриц жесткости конечного элемента и оболочки в целом в общей системе координат.

Проблема, связанная с учетом изменения в оболочке выростов, изменения ее толщины, анизотропии механических свойств ее материала и т. п., решается достаточно просто в рамках общей программы использования МКЭ применительно к расчету оболочки произвольной формы [11].

Важным частным случаем тонких оболочек произвольного очертания являются оболочки вращения. Для оболочек вращения возможны дополнительные упрощения, основанные на замене исходной

двухмерной задачи совокупностью одномерных задач. Это приводит к тому, что оболочка вращения идеализируется уже совокупностью одномерных кольцевых конечных элементов. С рассмотрением этого типа оболочек мы в дальнейшем конкретно изложим в настоящей главе. Затем перейдем к произвольным тонким оболочкам на базе представления их в виде совокупности плоских элементов. В этой же главе будут рассмотрены особенности анализа оболочек средней толщины.

§ 43

Основные принципы использования МКЭ применительно к оболочкам вращения

Оболочка вращения произвольной формы разбивается сечениями, перпендикулярными ее оси, на ряд цилиндрических элементов. При этом каждый элемент может быть заменен усеченным конусом или частью тора или сохранять свою естественную кривизну в меридиональном направлении (рис. VII.2). Толщина каждого элемента может быть принята равной средней толщине оболочки на соответствующем ее участке.

При расчете оболочек вращения методом перемещений в качестве основных независимых выбираются перемещения узловых окружностей.

Перемещение произвольной точки срединной поверхности оболочки в криволинейной системе координат α, φ, z определяется компонентами u, v, w (см. рис. VII.2).

Распределение перемещений и интенсивность внешней нагрузки в радиусе Фурье

$$\left. \begin{aligned} u(\alpha, \varphi) &= u_0(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\alpha) \cos j\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\alpha) \sin j\varphi, \\ v(\alpha, \varphi) &= v_0(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} v_j(\alpha) \cos j\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} v_j(\alpha) \sin j\varphi, \end{aligned} \right\} (43.1)$$

приходим к необходимости решения нескольких осесимметричных задач для каждой гармоники j .

Поэтому в дальнейшем вывод основных зависимостей метода конечных элементов ведется применительно к осесимметричной деформации оболочки вращения.

Поведение элемента оболочки (рис. VII.3) характеризуется следующей матрицей узловых перемещений:

$$[q]^e = [u]^e \alpha^e \omega [\beta] \alpha^e \omega [\beta]^e, \quad (43.2)$$

где β — угол поворота элемента вдоль меридиана.



Рис. VII.2. Идеализация тонкой оболочки совокупностью кольцевых или торцевых элементов оболочки.

Таким образом, число степеней свободы элемента для каждой j -й гармоники * равно восьми. В соответствии с этим для компонентов перемещений точек срединной поверхности внешнего элемента можно принять следующие приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} u(s) &= \alpha_1 + \alpha_2 s, & v(s) &= \alpha_3 + \alpha_4 s, \\ w(s) &= \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3, \\ \beta(s) &= \frac{dw}{ds} = \alpha_6 + 2\alpha_7 s + 3\alpha_8 s^2, \end{aligned} \right\} \quad (43.3)$$

где s — длина дуга меридиана.

При расчете оболочек, напряженное состояние которых близко к безмоментному, различие вкладах на стыке элементов может при-

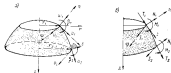


Рис. 11.3. Положительные направления условий перемещений (а) и условий усилий (б) в элементе оболочки, работающей в жесткой системе координат.

вести к заметной ошибке в оценке напряженного состояния. В этих случаях рекомендуется [123] аппроксимировать оболочку круглыми элементами с аркообразной образующей, сохраняя плавно изгибные кривизны меридиана. Эти элементы хорошо показали себя при исследовании изгиба и устойчивости оболочек в упругой и упруго-пластической областях [124, 126, 128, 138].

В качестве основных условий, обеспечивающих хорошую сходимость МКЭ, принято считать [147, 148] выполнение равенства узловых перемещений элементов вдоль их общего края, равенство углов поворота при переходе от элемента к элементу, обеспечение монотонной сходимости полной потенциальной энергии.

Вернемся теперь к выводу матрицы жесткости для оболочки вращения.

Зависимость (43.3) перепишем в матричной форме

$$\{U\} = \{u \ v \ w \ \beta\} = [A] \{\alpha\}. \quad (43.4)$$

Здесь $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_8\}$ — матрица-столбец обобщенных координат; $[A]$ — матрица связи между перемещениями $\{U\}$ и обоб-

щенными координатами $\{\alpha\}$. Элементы матрицы $[A]$ легко определяются непосредственно из зависимостей (43.3).

При выводе матрицы жесткости кольцевого элемента оболочки, представляющей собой связь между узловыми перемещениями элемента $\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \beta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \beta_2\}$ и реактивными условиями усиления $\{R_q\} = \{T_1 S_1 N_1 M_1 \ T_2 S_2 N_2 M_2\}$ (см. рис. VII.3), воспользуемся принципом возможных перемещений. При этом первоначально мы построим матрицу жесткости относительно обобщенных координат $\{\alpha\}$, а затем определим матрицу жесткости относительно вектора узловых перемещений $\{q\}$.

На основании известных зависимостей теории оболочек деформацию элемента $\{\epsilon\}$ можно выразить через вектор перемещений $\{u\}$:

$$\{\epsilon\} = [D] \{U\}, \quad (43.5)$$

где $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{\theta\theta} \ \gamma_{\theta r} \ \kappa_{\theta\theta} \ \kappa_{\theta r}\}$ — матрица-столбец компонентов деформации элемента; $[D]$ — матрица, элементы которой являются известными дифференциальными операторами.

На основании закона Гука

$$\{\sigma\} = [E_2] \{\epsilon\}, \quad (43.6)$$

где $[E_2]$ — матрица связи между компонентами деформаций и напряжений.

Полная энергия деформации элемента запишется в виде

$$V = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV, \quad (43.7)$$

здесь интегрирование ведется по всему объему элемента.

Воспользовавшись далее зависимостями (43.6), (43.5) и (43.4), выражение (43.7) можно привести к виду

$$V = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [K_{\alpha}] \{\alpha\}, \quad (43.8)$$

где

$$[K_{\alpha}] = \int_V \{A\}^T [D]^T [E_2] [D] [A] dV \quad (43.9)$$

— матрица жесткости кольцевого элемента оболочки относительно обобщенных координат $\{\alpha\}$.

Непосредственно из (43.4) имеем

$$\{q\} = [C_{\alpha}] \{\alpha\}, \quad (43.10)$$

* Для упрощения дальнейших выкладок будем считать $\alpha_8 = 0$.

Используем закон Гука для ортотропного материала, получим следующую зависимость для определения компонентов напряжения в произвольной точке элемента оболочки в форме (43.6):

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 & \nu & \nu_{\theta} \\ \nu_2 & 1 & 0 & \nu_{\theta} & \nu_1 \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_2} G_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} \quad (44.3)$$

где E_1 — модуль нормальной упругости материала в направлении образующей элемента; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона в направлении образующей элемента и по кольцевому направлению соответственно; ν — отношение рассматриваемой точки от срединной поверхности оболочки элемента.

Проводя далее выкладки в соответствии с (43.7)—(43.12), находим значения коэффициентов матрицы жесткости элемента оболочки $[K_e]$, которая устанавливает связь между узловыми реакциями $\{R_e\}$ и узловыми перемещениями конечного элемента оболочки в местной системе координат (см. рис. VII.3):

$$\{R_e\} = [K_e] \{q\}. \quad (44.4)$$

Здесь [67]

$$\{R_e\} = \{T_{e1} N_e M_e T_{e2} S_{e1} N_{e2} M_{e2}\}, \quad (44.5)$$

$$\{q\} = \{u_e, v_e, w_e, \beta_{e1}, \beta_{e2}, \beta_{e3}\}, \quad (44.6)$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2A \left\{ \frac{r_x}{r_e} + \frac{\cos \theta_e}{2} - \nu_2 \cos \theta_e + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \cos \theta_e \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\}, \quad k_{12} = 0, \\ k_{22} &= A \left\{ -\nu_2 \sin \theta_e + \frac{1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \sin \theta_e \left(\frac{7}{3} - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\}, \\ k_{33} &= A \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{r_x}{10\nu_1} \cos \theta_e \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\} \nu_2 \frac{b_e}{r_e} \sin \theta_e, \\ k_{13} &= A \left\{ -2 \frac{r_x}{b_e} - \cos \theta_e + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{b_e}{r_e} \cos \theta_e \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\}, \quad k_{23} = 0, \\ k_{44} &= A \left\{ -\nu_2 \sin \theta_e + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{b_e}{r_e} \sin \theta_e \left(\frac{3}{5} - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\}, \\ k_{55} &= A \left\{ \frac{\nu_2 b_e}{6} \sin \theta_e + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{b_e}{15} b_e \sin \theta_e \left(\frac{b_e}{r_e} - 1 \right) \right\}, \\ k_{14} &= B, \quad k_{24} = k_{34} = k_{44} = k_{54} = 0, \quad k_{54} = -B, \end{aligned} \quad (44.7)$$

$$\begin{aligned} k_{15} &= 2A \left\{ \frac{r_x}{30} (1.3 - 3b_e) + \delta_1^2 \left[\frac{r_x}{r_e} \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) + \frac{b_e}{10b_e} \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right] \right\}, \\ k_{25} &= A \left\{ \frac{r_x}{15} b_e \left(\frac{13}{7} - \frac{b_e}{r_e} \right) + \delta_1^2 \left[\frac{r_x}{r_e} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) + \frac{b_e}{30} \left(1 - b_e \right) \right] \right\}, \\ k_{35} &= A \left\{ \nu_2 \sin \theta_e + \frac{2}{3} \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \sin \theta_e \left(\frac{3}{4} - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\}, \quad k_{45} = 0, \\ k_{55} &= A \left\{ \frac{9}{35} b_e \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_1^2 \left[\frac{r_x}{r_e} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) - \frac{b_e}{30} \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right] \right\}, \\ k_{66} &= A \left\{ \frac{b_e}{38} b_e \left(-\frac{13}{6} + b_e \right) + \delta_1^2 \left[\frac{r_x}{b_e} \left(1 + \frac{2}{3} b_e \right) + \frac{b_e}{16} \right] \right\}, \\ k_{77} &= 2A \left\{ \frac{r_x}{30} b_e \left(\frac{2}{3} - \frac{b_e}{r_e} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_1^2 \left[\frac{r_x}{36} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) + \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{b_e}{30} \cos \theta_e \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) - \frac{\nu_2}{12} \cos \theta_e \right] \right\}, \\ k_{88} &= A \left\{ \frac{1}{3} + \frac{b_e}{3\nu_1} \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right\} \frac{\nu_2}{3} \nu_2 \sin \theta_e, \quad k_{89} = 0, \\ k_{99} &= A \left\{ \frac{b_e}{30} b_e \left(\frac{13}{7} - \frac{b_e}{r_e} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \delta_1^2 \left[-\frac{r_x}{r_e} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) + \frac{b_e}{30} (b_e - 1) \right] \right\}, \\ k_{1010} &= A \left\{ -\frac{r_x}{10} b_e \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_1^2}{3} \left[\frac{r_x}{b_e} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) - \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \frac{\cos \theta_e}{10} \left(1 - \frac{b_e}{r_e} \right) \right] \right\}, \\ k_{1111} &= A \left\{ \frac{r_x}{b_e} \left(1 + \frac{b_e}{r_e} \right) + \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \cos \theta_e \left(\frac{1}{3} - \frac{b_e}{r_e} \right) + \nu_2 \cos \theta_e \right\}, \\ k_{1122} &= 0, \\ k_{1212} &= A \left\{ \frac{\nu_2}{\nu_1} b_e \left(0.7 - \frac{3}{15} b_e \right) + 1 \right\} \nu_2 \sin \theta_e, \\ k_{1313} &= A \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{b_e}{3\nu_1} \left(\frac{2}{3} b_e - 1 \right) \right\} \frac{\nu_2}{2} \nu_2 \sin \theta_e, \\ k_{1414} &= B, \quad k_{1515} = k_{1616} = 0, \\ k_{1717} &= 2A \left\{ \frac{2}{7} b_e (1.3 - b_e) + \right. \end{aligned} \quad (44.7)$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta_0^2 \left[\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{h_c}{2} \right) + \frac{h_c}{10\alpha} \left(1 - \frac{h_c}{2} \right) \right], \\
 k_{13} = & A \left[\frac{\alpha}{2} f_c \left(\frac{h_c}{2} - \frac{11}{10} \right) + \delta^2 \left[-\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{h_c}{2} \right) - \frac{h_c}{10} \right] \right], \\
 k_{33} = & 2A \left[\frac{\alpha^2}{21} f_c \left(\frac{1}{3} - \frac{h_c}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + \delta^2 \left[\frac{\alpha}{h_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{h_c}{2} \right) + \frac{3\alpha}{22} \cos \theta_0 + \frac{3\alpha}{4} \frac{h_c}{10} \cos \theta_0 \left(1 - \frac{3}{4} h_c \right) \right] \right].
 \end{aligned} \quad (44.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{2\pi h_c^2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B = 16G_{\text{ш}} \frac{h_c - h_{\text{ш}}}{2\alpha}, \\
 h_c = & \frac{h}{r_c} \cos \theta_0, \quad f_c = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{h_c}{r_c} \sin^2 \theta_0, \quad h_{\text{ш}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{1}{r_c} \cos^2 \theta_0.
 \end{aligned} \quad (44.8)$$

При получении значений коэффициентов матрицы жесткости встречающиеся интегралы типа $J_n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{r^n dr}{r_c + s \cos \theta_0}$ вычислялись после разложения подынтегральной функции в ряд по степеням малого параметра $\frac{h_c}{r_c} \cos \theta_0$ и пренебрежения членом $\left(\frac{h_c}{r_c} \cos \theta_0 \right)^2$ вследствие его малости по сравнению с единицей, что лежит в пределах точности исходных предположений метода.

Для определения эквивалентных узловых усилий действующую на элемент поверхностную нагрузку q следует разложить по направлению образующей конуса (q_s), по радиальному направлению (q_r) и по нормали к средней поверхности (q_n). Тогда узловые усилия, эквивалентные поверхностной нагрузке (q_n, q_r, q_s) согласно принципу возможных перемещений определяются следующими зависимостями [см. (6.5)]:

$$\begin{aligned}
 T_n = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_n(s) \left(1 - \frac{s}{r_c} \right) (r_c + s \cos \theta_0) dr ds; \\
 S_x = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_r(s) \left(1 - \frac{s}{r_c} \right) (r_c + s \cos \theta_0) dr ds; \\
 N_x = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_s(s) \left(1 + \frac{2s^2}{r_c^2} - 3 \frac{s^3}{r_c^3} \right) (r_c + s \cos \theta_0) ds dr; \\
 M_x = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_n(s) \left(s - 2 \frac{s^2}{r_c} + \frac{s^3}{r_c^2} \right) (r_c + s \cos \theta_0) ds dr;
 \end{aligned} \quad (44.9)$$

$$\begin{aligned}
 \dots = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_r(s) \frac{s}{r_c} (r_c + s \cos \theta_0) ds dr; \\
 S_{x1} = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_r(s) \frac{s}{r_c} (r_c + s \cos \theta_0) ds dr; \\
 N_{x1} = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_s(s) \left(3 \frac{s^2}{r_c^2} - 2 \frac{s^3}{r_c^3} \right) (r_c + s \cos \theta_0) ds dr; \\
 M_{x1} = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} q_n(s) \left(-\frac{s^2}{r_c} + \frac{s^3}{r_c^2} \right) (r_c + s \cos \theta_0) ds dr.
 \end{aligned} \quad (44.9)$$

Выше уже отмечалось, что в качестве основных неизвестных удобнее принять узловые перемещения в основной системе координат: $\Delta_0^1, v_n, \Delta_0^2, \beta_c$. Такой выбор неизвестных приводит к автоматическому удовлетворению условий непрерывности линейных и угловых перемещений вдоль узловых окружностей рассматриваемой оболочки и существенно упрощает общий вид уравнений равновесия.

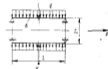
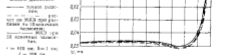


Рис. VIII. Сто- ставление пробы для тонкой цилиндрической оболочки, нагруженной зад действием боковой нагрузки.



Матрица жесткости элемента оболочки по отношению к перемещениям $\{\Delta\}$ определяется с помощью формулы (43.15), эквивалентные же поверхностной нагрузке узловые усилия для n -го конечного элемента оболочки в общей системе координат

$$\{R_{\Delta}\} = [C]_j \{R_q\}. \quad (44.10)$$

$$[R_A] = [R_0^T S_0 R_0^T M_0 R_{0+1}^T S_{0+1} R_{0+1}^T M_{0+1}], \quad (44.11)$$

а элементы вектора $[R_0]$ определяются по формулам (44.9).

Пример. На рис. VIII.6 приведены результаты расчетов для круговой цилиндрической свободно опертой оболочки, находящейся под действием бокового равномерного давления неизвестностью p .

Общей длиной показана кривая элементов гребня оболочки сдвинуто тонкому элементу [31]; пунктиром и стрелкой пунктиром показаны крайние той же оболочки при использовании метода конечных элементов соответственно при числе конечных элементов $n = 10$ и $n = 50$.

Видно, что уже при $n = 10$ метод конечных элементов приводит практически к такому результату в отношении гребня оболочки.

§ 45

Расчет оболочек вращения средней толщиной при асимметричном напряженном состоянии

При расчете на изгиб оболочек средней толщиной необходимо считаться с влиянием поперечного сдвига по толщине оболочки. Влияние деформаций поперечного сдвига при расчете по МКЭ оболочек вращения учитывалось в работах [58, 131].

Ниже для асимметричного напряженного состояния элемента дается вывод матрицы жесткости конического элемента оболочки вращения с учетом деформаций поперечного сдвига согласно гипотезе прямой линии.

Перемещения средней поверхности, как и ранее, аппроксимируем зависимостями (43.3).

Компоненты деформаций оболочки, согласно гипотезе прямой линии, определяются из следующего матричного выражения [47]:

$$[e] = \begin{pmatrix} u_r \\ v_\theta \\ w_z \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \theta}{r_0 + s \cos \theta} & 0 & \frac{\sin \theta}{r_0 + s \cos \theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \theta}{r_0 + s \cos \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad (45.1)$$

или, в матричном виде,

$$[e] = [D_0] [U]. \quad (45.2)$$

В матрице (45.1) введены следующие дополнительные обозначения: T_m — средний угол сдвига по толщине оболочки между направлением вдоль образующей и нормально к средней поверхности; $\Psi_1(\theta)$ — угол поворота сечения оболочки, перпендикулярного до ее деформации к направлению s .

Из числа геометрических рассуждений имеем

$$T_m = \frac{\partial \theta}{\partial s} + \psi_2 = \beta + \psi_2. \quad (45.3)$$

Будем считать, что напряжения поперечного сдвига распределены по толщине оболочки по закону квадратичной параболы

$$\tau_{rs} = \tau_{0s} (1 - 4r^2/k^2). \quad (45.4)$$

Тогда связь между перерезывающей силой N_s и средним углом сдвига выразится следующей зависимостью [29]:

$$N_s = -\frac{5}{8} G_{rs} \tau_{0s}. \quad (45.5)$$

С другой стороны, воспользовавшись уравнениями равновесия бесконечно малого элемента конической оболочки вращения средней толщины [29], можно получить

$$N_s = -\frac{1}{r_0 + s \cos \theta} [(M_s - M_\theta) \cos \theta + (r_0 + s \cos \theta) \frac{\partial M_s}{\partial s}]. \quad (45.6)$$

Откуда, если учесть, что

$$\begin{aligned} M_s &= -\frac{E_s k^2}{12(1-\nu_s \nu_\theta)} (\alpha_s + \nu_s \alpha_\theta), \\ M_\theta &= -\frac{E_s k^2}{12(1-\nu_s \nu_\theta)} (\alpha_\theta + \nu_s \alpha_s) \end{aligned} \quad (45.7)$$

и принять во внимание зависимости (45.1),

$$\begin{aligned} N_s &= -\frac{E_s k^2}{12(1-\nu_s \nu_\theta)} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r_0 + s \cos \theta} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_s}{\nu_2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{(r_0 + s \cos \theta)^2} \psi_1 \right], \end{aligned} \quad (45.8)$$

Приравняв правые части (45.5) и (45.8), получаем уравнение для определения функции ψ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} &= \frac{E_s k^2}{10(1-\nu_s \nu_\theta) G_{rs}} \left[-\frac{\partial \psi_1}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r_0 + s \cos \theta} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_s}{\nu_2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{(r_0 + s \cos \theta)^2} \psi_1 \right] - \psi_1. \end{aligned} \quad (45.9)$$

В практических расчетах размеры конечного элемента обычно таковы, что $\alpha \cos \theta \ll r_e$. Это приводит к существенному упрощению уравнения (45.9), которое принимает вид:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{r_e} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} - \frac{\nu_1}{r_1} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r_1^2} \varphi_1 - A_1 \varphi_1 = A_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial s}, \quad (45.10)$$

где

$$A_1 = \frac{10(1-\nu_1)E}{E_1 r^3} G, \quad (45.11)$$

Правая часть уравнения (45.10), если принять во внимание (43.3), будет степенным полиномом второй степени. Это дает нам основание искать решение уравнения (45.10) в следующем виде:

$$\varphi_1 = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2. \quad (45.12)$$

Подставив (45.12) в выражение для $\omega(\theta)$ из (43.3) в (45.10), можно получить систему трех линейных алгебраических уравнений относительно искомого параметра δ_0 , δ_1 , δ_2 . Решив ее, находим параметры δ_0 , δ_1 , δ_2 , выраженные через α , σ_1 , σ_2 .

Внося найденные значения δ_i в (45.12), получаем искомую связь угла поворота поперечного сечения φ_1 с обобщенными координатами φ_0 :

$$\varphi_1 = -\frac{A_1}{A_2} \alpha_0 - 2 \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{A_3}{A_2} + s \right) \alpha_0 - 6 \frac{A_1}{A_2} \left[\left(1 + \frac{A_3}{A_2} \right) \frac{1}{A_2} + \frac{A_3}{A_2} s + \frac{s^2}{2} \right] \alpha_0, \quad (45.13)$$

где

$$A_2 = A_1 + \frac{\nu_1}{r_1} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r_1^2}; \quad A_3 = \frac{\cos \theta}{r_e}. \quad (45.14)$$

Коэффициент A_2 определяется выражением (45.11). Подставляя (45.13) в выражения для компонент перемещений срединной поверхности (43.3) и используя матричную форму записи, можно записать

$$\{U\} = [A] \{\alpha\}, \quad (45.15)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & s & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}; \quad (45.16)$$

$$B_1 = -\frac{A_1}{A_2}; \quad B_2 = -2 \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{A_3}{A_2} + s \right);$$

$$B_3 = -6 \frac{A_1}{A_2} \left[\left(1 + \frac{A_3}{A_2} \right) \frac{1}{A_2} + \frac{A_3}{A_2} s + \frac{s^2}{2} \right]. \quad (45.17)$$

С помощью зависимости (45.15) легко установить связь между $\{U\}$ и $\{\sigma\}$ в стандартной форме:

$$\{U\} = [C] \{\sigma\}. \quad (45.18)$$

Здесь обозначено:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \varphi_x \varphi_{xx} \varphi_{yy} \varphi_{xy} \varphi_{xz}\}. \quad (45.19)$$

$$[C] = [A] [B]^{-1}. \quad (45.20)$$

Закон Гука для рассматриваемого характера напряженного состояния оболочки должно представать в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E_1}{1-\nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 & 0 & \nu_2 \nu' & 0 \\ \nu_1 & \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1} & 0 & \nu_2 \theta' & \frac{\nu_2}{\nu_1} \nu' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1 \nu_2}{E_1} G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_1 \nu_2}{E_1} G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (45.21)$$

или, в матричной форме,

$$\{\sigma\} = [E_1] \{\varepsilon\}.$$

Теперь для определения матрицы жесткости конечного элемента оболочки остается воспользоваться стандартной зависимостью (3.8), которая в рассматриваемом случае запишется так:

$$[K_0] = 2\pi \int_{-\nu_2}^{\nu_2} \int_{-\nu_1}^{\nu_1} [D]^T [E_1] [D] / (s) ds dy. \quad (45.22)$$

Здесь

$$[D] = [D_0] [A] [B]^{-1}.$$

Пример. Рассмотрим широкую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку при действии внутреннего радиального давления (рис. VII.7). Параметры оболочки и материала: $\delta/r = 1$; $\delta/r' = 0.2$; $E_1 = 1.2 \cdot 10^6$ кгс/см²; $\nu_1 = 1.8 \cdot 10^{-2}$ кгс/см²; $\nu_2 = 0.1$. Модуль сдвига G_{12} принимаем равным

На рис. VII.8 показано влияние изменения модуля поперечного сдвига G_{xy} на нормальный профиль оболочки. Здесь же приведены векторы результирующего жесткого элемента, полученные с помощью метода гармонизации дифференциальных уравнений теории расслоенной оболочки.

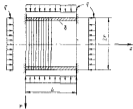


Рис. VII.7. Жестко объединенная точка расслоенной оболочки.

Видно, что использование МКЭ позволяет получить, по существу, точное решение расслоенной задачи. Оболочка разбивалась по длине на 20 равных конечных элементов.

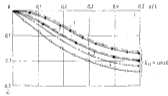


Рис. VII.8. Распределение по длине оболочки (см. рис. VII.6) профиля с учетом сдвига $hV = 0,5$; $E = 1,2 \cdot 10^6$ кг/см²; $E_p/E = 1,0$ при заданных Φ_{1p} .

$l = 0,1$ м (то же поле сдвига); $z = 0,11 = 0,2h$; $z = 0,22 = 0,4h$; $z = 0,33 = 0,6h$; $z = 0,44 = 0,8h$; $z = 0,55 = 1,0h$ — расчет по МКЭ при числе элементов $n = 20$; $\bullet-\bullet-\bullet$ — расчет по МКЭ при $n = 10$; $---$ — расчет по «старому» методу.

§ 48

Плоский треугольный элемент в местной системе координат для расчета оболочек произвольных очертаний

Предполагается, что напряженное состояние оболочки может быть определено в рамках линейной теории оболочек с использованием гипотезы Карлгоффа. Это приводит к тому, что напряженное

состояние в срединной плоскости элемента может быть описано с помощью обычного аппарата плоской задачи теории упругости, а напряженное состояние, возникающее при изгибе элемента, — на базе обычной теории изгиба жестких пластин.

Рассмотрим плоский треугольный элемент, подверженный воздействию усилий, вызывающих в нем одновременно плоское напряженное состояние и изгиб.

Будем полагать, что срединная плоскость элемента в местной системе координат xy располагается в координатной плоскости x_0y_0 (рис. VII.9).

В качестве основных узловых независимых перемещений в каждом из узлов конечного элемента вводим по три линейных u_i, v_i, w_i и по три угловых перемещения $\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \Phi_{3i}$. Таким образом, треугольный плоский элемент будет обладать 18 степенями свободы (1331).

Введем в рассмотрение вектор узловых перемещений конечного элемента (см. рис. VII.9):

$$\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, \Phi_{11}, \Phi_{21}, \Phi_{31}, u_2, v_2, w_2, \Phi_{12}, \Phi_{22}, \Phi_{32}, u_3, v_3, w_3, \Phi_{13}, \Phi_{23}, \Phi_{33}\} \quad (46.1)$$

и соответствующий ему вектор узловых усилий:

$$\{R\} = \{R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}, M_{1x}, M_{1y}, M_{1z}, \dots, R_{3x}, \dots, M_{3z}\}, \quad (46.2)$$

Между этими двумя векторами можно установить зависимость вида

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (46.3)$$

где $[K]$ — матрица жесткости конечного элемента в местной системе координат.

Полагая, что перемещения оболочки малы по сравнению с ее толщиной, при выводе матрицы жесткости можно использовать аппарат линейной теории плоской задачи теории упругости и линейной теории изгиба жестких пластин. Это позволяет узловые усилия, действующие в срединной плоскости конечного элемента, связать с соответствующими узловыми перемещениями с помощью

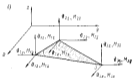


Рис. VII.9. Плоскопараллельные напряжения и соответствующие усилия (а), угловые перемещения и усилия (б) для плоского треугольного элемента в местной системе координат.

матрицы жесткости (25.25) для треугольного элемента, которая была получена ранее при решении плоской задачи теории упругости:

$$[K^*] = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & k_{13}^* & k_{14}^* & k_{15}^* & k_{16}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* & k_{23}^* & k_{24}^* & k_{25}^* & k_{26}^* \\ k_{31}^* & k_{32}^* & k_{33}^* & k_{34}^* & k_{35}^* & k_{36}^* \\ k_{41}^* & k_{42}^* & k_{43}^* & k_{44}^* & k_{45}^* & k_{46}^* \\ k_{51}^* & k_{52}^* & k_{53}^* & k_{54}^* & k_{55}^* & k_{56}^* \\ k_{61}^* & k_{62}^* & k_{63}^* & k_{64}^* & k_{65}^* & k_{66}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} \quad (46.4)$$

или, в более краткой записи,

$$[R^*] = [K^*] \{q^*\}. \quad (46.5)$$

Индексом 0^* обозначается плоское напряженное состояние.

Используя далее матрицу жесткости (38.49), можно установить связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями, связанными с выбором плоского треугольного элемента:

$$[K^*] = [K^0] \{q^*\}, \quad (46.6)$$

где

$$[K^*] = [R_{22} M_{11} M_{12} R_{21} M_{12} M_{22} R_{22} M_{21} M_{22}], \\ \{q^*\} = [\omega_1 \theta_{1x} \omega_1 \theta_{1y} \omega_2 \theta_{2x} \omega_2 \theta_{2y}], \\ [K^0] = \begin{pmatrix} k_{11}^0 & k_{12}^0 & \dots & k_{16}^0 \\ k_{21}^0 & k_{22}^0 & \dots & k_{26}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{61}^0 & k_{62}^0 & \dots & k_{66}^0 \end{pmatrix} \quad (46.7)$$

— матрица жесткости на выбрив треугольного плоского элемента. Объединяя матричные зависимости (46.5) и (46.6), получаем

$$\begin{pmatrix} [K^*] \\ [R^*] \\ M_{11} \\ M_{12} \\ M_{21} \\ M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [K^*] & 0 & 0 & 0 \\ [K^0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{q^*\} \\ \{q^*\} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \end{pmatrix}. \quad (46.8)$$

Три последние строки и три последних столбца общей матрицы жесткости состоят из нулей. Это связано с тем, что повороты узловых

точек вокруг оси z не включены в число неизвестных узловых перемещений при решении плоской задачи теории упругости.

Пусть вместо нулевых строк и столбцов в матрице жесткости (46.8) нетрудно получить выражение для матрицы жесткости (46.9), где векторы узловых усилий и перемещений рассматриваемого конечного элемента определяются соответственно выражениями (46.1) и (46.2).

Векторы (46.1) и (46.2) для удобства дальнейших выкладок перепишем в следующем виде:

$$\{R\} = \{R_{11} \{R\}_2 \{R\}_3\}, \quad (46.9)$$

$$\{q\} = \{q_{11} \{q\}_2 \{q\}_3\}, \quad (46.10)$$

где

$$\{R\}_i = \{R_{1i} R_{2i} R_{3i} M_{1i} M_{2i} M_{3i}\}, \quad (46.11)$$

$$\{q\}_i = \{u_i v_i \theta_{iz} \theta_{iy}\}. \quad (46.12)$$

— векторы узловых усилий и перемещений в i -й узловой точке конечного элемента соответственно.

Используя введенные выше обозначения (46.11) и (46.12), зависимость (46.3) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \{R\}_1 \\ \{R\}_2 \\ \{R\}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{q\}_1 \\ \{q\}_2 \\ \{q\}_3 \end{pmatrix}. \quad (46.13)$$

Вид каждой матрицы $[K]_{ij}$ легко установить по ранее выписанным выражениям для матриц $[K^0]$ и $[K^*]$.

Использование построенной матрицы жесткости (46.13) при анализе напряженного состояния произвольных оболочек не приводит к какому-либо затруднению. Исключением является частный случай, когда в отдельных узлах оболочки все сходящиеся конечные элементы лежат в одной плоскости. Жесткость такой оболочки при вращении относительно общей оси z будет равна нулю, и общая матрица жесткости становится особой (ее определитель равен нулю). В этом случае при анализе напряженного состояния по методу конечных элементов в упомянутых узловых точках следует ввести дополнительные кинематические закрепления, препятствующие вращению вокруг нормали к оболочке в этих узловых точках.

Указанное затруднение можно избежать и другим способом, а именно, путем включения в число неизвестных узловых пере-

шей угол поворота вокруг нормали к срединной поверхности элемента

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (46.14)$$

при определении его матрицы жесткости для плоской задачи теории упругости. Такой путь приводит к увеличению числа степеней свободы конечного элемента, а следовательно, и к увеличению трудоемкости вычислительных операций.

Заслуживает внимания предложение О. Зинквича [355] о введении в расчет некоторой конечной жесткости элемента при повороте узловых точек вокруг оси x согласно зависимости

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{22} \end{pmatrix} = \alpha B F \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{1}{2} \\ \text{Симметрично} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{3x} \end{pmatrix} \quad (46.15)$$

где α — постоянная величина; B , F — соответственно толщина и площадь элемента.

Видно, что элементы матрицы жесткости «вращающая» выбрана так, что обеспечивают выполнение уравнения равновесия моментов при вращении относительно оси x :

$$\sum_{i=1}^3 M_{ix} = 0. \quad (46.16)$$

Заметим, что узловые повороты θ_{ix} не входят в выражения для определения компонентов напряжений. Параметр α в числовых расчетах, на основании рекомендации О. Зинквича, можно принять равным 0,03.

§ 47

Матрица жесткости плоского треугольного элемента в общей системе координат для расчета произвольных оболочек

Усилия и перемещения i -го узла в местной и общей системах координат связываются с помощью матрицы преобразования $[L]$:

$$[R]_i = [L] [R']_i, \quad [q]_i = [L] [q']_i, \quad (47.1)$$

где

$$[L] = \begin{pmatrix} | & | \\ | & 0 \\ 0 & | \\ | & | \end{pmatrix}; \quad (47.2)$$

$$[R] = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix}; \quad (47.3)$$

$$L_{ij} = \cos(x, x'_j) \text{ и т. д.} \quad (47.4)$$

— векторы узловых перемещений и усилий в i -м узле в общей системе координат;

$$[q']_i = [a'_1 a'_2] \begin{pmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{3x} \end{pmatrix}; \quad (47.5)$$

$$[R']_i = [R_{11} R_{12} R_{21} R_{22} M_{11} M_{12} M_{21} M_{22}]; \quad (47.6)$$

Тогда для всей совокупности узловых усилий, относящихся к рассматриваемому конечному элементу, можно выписать следующие зависимости перехода от общей системы координат к местной:

$$\begin{pmatrix} |R|_1 \\ |R|_2 \\ |R|_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |L| & 0 & 0 \\ 0 & |L| & 0 \\ 0 & 0 & |L| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |R'|_1 \\ |R'|_2 \\ |R'|_3 \end{pmatrix} \quad (47.7)$$

или

$$[R] = [T] [R'], \quad (47.8)$$

где

$$[T] = \begin{pmatrix} |L| & 0 & 0 \\ 0 & |L| & 0 \\ 0 & 0 & |L| \end{pmatrix} \quad (47.9)$$

— квазидиагональная матрица преобразования узловых усилий конечного элемента из общей к местной системе координат.

По аналогии с зависимостью (47.8) можно выписать матричные уравнение связи между узловыми перемещениями конечного элемента в общей и местной системах координат:

$$[q] = [T] [q']. \quad (47.10)$$

Непосредственно из выражений (47.8) и (47.10) с учетом зависимости (46.3) можно установить связь между вектором узловых усилий и вектором узловых перемещений конечного элемента в общей системе координат:

$$\{R\} = [K'] \{q\}, \quad (47.11)$$

где

$$[K'] = [T]^T [K] [T] \quad (47.12)$$

— жесткая матрица конечного элемента в общей системе координат.

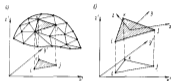


Рис. VII.10. Идентификация произвольной треугольной оболочки элементом треугольного элемента a — оболочка в общей системе координат, b — треугольный элемент в общей жесткой системе координат.

При определении местной системы координат возможны в ряде случаев некоторые упрощения. Пусть местная и общая системы координат имеют общее начало. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [H] \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (47.13)$$

Для однородного материала, свойства которого не зависят от координат точек тела, при определении матрицы жесткости $[K]$ элемента необходимо знать лишь расположение осей местной системы координат, т. е. матрицу $[H]$. Таким образом, возможно для этого частного случая при определении положения точек элемента в местной системе координат можно воспользоваться зависимостью (47.13).

Приведем необходимые зависимости, позволяющие на основании информации о положении узловых точек конечного элемента в общей системе координат определить значения направляющих косинусов для местной системы.

Пусть произвольная оболочка идеализирована совокупностью треугольных элементов (рис. VII.10). Рассмотрим какой-либо конечный элемент, например элемент i/jk . Условимся в дальнейшем нумерацию узловых точек конечного элемента производить в направлении

для против часовой стрелки при взгляде на элемент, например, извне оболочки.

Уравнение плоскости, проходящей через узловые точки i/jk конечного элемента [155], в общей системе координат может быть представлено так:

$$\begin{vmatrix} x' - x'_i & y' - y'_i & z' - z'_i \\ x'_j - x'_i & y'_j - y'_i & z'_j - z'_i \\ x'_k - x'_i & y'_k - y'_i & z'_k - z'_i \end{vmatrix} = 0 \quad (47.14)$$

или

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0, \quad (47.15)$$

где

$$\begin{cases} A = y'_j z'_{ki} - y'_{ki} z'_{ij} \\ B = -x'_j z'_{ki} + x'_{ki} z'_{ij} \\ C = x'_{ij} y'_{ki} - x'_{ki} y'_{ij} \\ x'_{ij} = x'_j - x'_i \text{ и т. д.} \end{cases} \quad (47.16)$$

Направляющие косинусы нормали к плоскости рассматриваемого элемента (ось z) определяются во известным формулам аналитической геометрии:

$$\begin{cases} l_{z'x'} = \cos(\widehat{z', x'}) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ l_{z'y'} = \cos(\widehat{z', y'}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ l_{z'z'} = \cos(\widehat{z', z'}) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{cases} \quad (47.18)$$

Далее следует выбрать оставшиеся две оси x и y . Можно положить, что ось x параллельна плоскости $x'y'$. Тогда в качестве оси x можно принять, в частности, прямую, определенную уравнением

$$Ax' + By' = 0. \quad (47.19)$$

Направляющие косинусы прямой (47.19), т. е. оси x ,

$$\begin{cases} l_{x'x'} = \cos(\widehat{x', x'}) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ l_{x'y'} = \cos(\widehat{x', y'}) = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ l_{x'z'} = \cos(\widehat{x', z'}) = 0. \end{cases} \quad (47.20)$$

На условии перпендикулярности осей x, y, z следуют две известные зависимости для направляющих косинусов

$$\begin{cases} l_{x'y'} + l_{y'z'} + l_{z'x'} = 0, \\ l_{y'x'} - l_{x'z'} + l_{z'y'} = 0. \end{cases} \quad (47.21)$$

Дополняя (47.21) зависимостью

$$l_{xy}^2 + l_{yz}^2 + l_{zx}^2 = 1, \quad (47.22)$$

получим три уравнения для определения направляющих косинусов оси y . Окончательно

$$\left. \begin{aligned} l_{yx} &= \frac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \\ l_{yz} &= \frac{BC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \\ l_{zx} &= \frac{A+B}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (47.23)$$

Направляющие косинусы, получаемые по приведенным выше формулам, будут определять правую систему координат xyz .

Необходимо заметить, что если $A = B = 0$, т. е. плоскость конечного элемента параллельна плоскости xz , то за ось x и y можно принять два любых взаимно перпендикулярных направления в плоскости xz .

Итак, направляющие косинусы для каждой из осей местной системы координат конечного элемента можно теперь считать известными величинами. Это позволяет далее определить значения матрицы $[G]$, а следовательно, и получить матрицу жесткости конечного элемента оболочки в общей системе координат.

§ 48

Некоторые дополнительные замечания по расчету оболочек произвольной формы при использовании треугольного плоского элемента

Определение узловых нагрузок. Для определения узловых нагрузок, эквивалентных поверхностной нагрузке, действующей на рассматриваемый конечный элемент оболочки, можно воспользоваться формулами приведения, основанными на равенстве работы внешних нагрузок работе узловых усилий на возможном перемещении конечного элемента. При этом нетрудно получить формулы, аналогичные тем, которые приводились выше в главе по плоской задаче теории упругости и изгибу жестких пластин. Однако в практических расчетах узловых усилий можно принимать равными $\frac{1}{2}$ от соответствующих результирующих составляющих внешней нагрузки, действующей на элемент. Получаемые при этом узловые усилия, эквивалентные по способу действия поверхностной внешней нагрузке, направляем по осям местной системы координат.

Обозначим матрицу внешних узловых усилий в i -м узле рассматриваемого элемента в местной системе координат через $\{P\}_i$. Вектор тех же усилий в общей системе координат определяется на основании зависимости (47.1):

$$\{P'\}_i = [L^{-1}] \{P\}_i, \quad (48.1)$$

Уравнения равновесия. Уравнение равновесия i -го узла составляется на основе того, что внешние узловые силы должны быть уравновешены суммой реакций от элементов, соприкасающихся в этом узле:

$$\sum_j \{P^e\}_i = \sum_j \{R^e\}_i, \quad (48.2)$$

Суммирование в выражении (48.2) производится по всем элементам, соприкасающимся в i -м узле.

Дальнейшая процедура составления общей системы уравнений оболочки аналогична изложенной выше при решении плоской задачи теории упругости.

Определение компонент напряжений. Знак компоненты узловых перемещений i -го элемента в местной системе координат, без особых затруднений можно определить напряженное состояние этого элемента.

Напряжения на внешних поверхностях элемента оболочки вычисляются по известным зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \sigma_x^0 \pm \sigma_x^1 \\ \sigma_y \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \sigma_y^0 \pm \sigma_y^1 \\ \tau_{xy} \left(\pm \frac{h}{2} \right) &= \tau_{xy}^0 \pm \tau_{xy}^1 \end{aligned} \right\} \quad (48.3)$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — средние напряжения; $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ — фибровые напряжения изгиба.

Для определения средних напряжений $\{\sigma^0\} = \{\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0\}$ следует воспользоваться зависимостью (25.20):

$$\{\sigma^0\} = [E^0] \{\varphi^0\}, \quad (48.4)$$

Здесь $[E^0]$ — матрица напряжений, определяемая по формуле (25.22); $\{\varphi^0\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ — матрица узловых перемещений в плоскости рассматриваемого конечного элемента.

Изгибные напряжения $\{\sigma^1\} = \{\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1\}$ определяются с помощью зависимости (28.25):

$$\{\sigma^1\} = [E^1] \{\varphi^1\}, \quad (48.5)$$

где $[E^1]$ — матрица напряжения изгиба;

$$\{\varphi^1\} = \{\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_2, \beta_3, \beta_4, \alpha_3, \beta_5, \beta_6\}, \quad (48.6)$$

— матрица узловых перемещений элемента, характеризующая его изгиб.

Известно, что для треугольного элемента центые и изгибные компоненты напряжения оказываются постоянными величинами. Поэтому и суммарные напряжения (48.3) также будут постоянными.

§ 49

Матрица жесткости для прямоугольного плоского элемента оболочки

При расчете по МКЭ цилиндрических оболочек вместо треугольных элементов значительно удобнее использовать прямоугольные плоские элементы.

Все промежуточные выкладки при получении матрицы жесткости прямоугольного элемента будут аналогичны приведенным в предыдущих параграфах при выводе матрицы жесткости треугольного элемента.

Матрицы узловых усилий и узловых перемещений для прямоугольного элемента

$$\{R\} = \{R^u\} \{R^e\} \{M_z\}; \quad \{q\} = \{q^u\} \{q^e\} \{\theta_z\}, \quad (49.1)$$

здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \{R^u\} &= \{R_{1x} \ R_{1y} \ R_{2x} \ \dots \ R_{4x} \ R_{4y}\}, \\ \{q^u\} &= \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ \dots \ u_4 \ v_4\}, \\ \{R^e\} &= \{R_{1x} \ M_{1x} \ M_{1y} \ R_{2x} \ \dots \ M_{4y}\}, \\ \{q^e\} &= \{w_1 \ \theta_{1x} \ \theta_{1y} \ w_2 \ \dots \ \theta_{4y}\}, \\ \{M_z\} &= \{M_{1z} \ M_{2z} \ M_{3z} \ M_{4z}\}, \\ \{\theta_z\} &= \{\theta_{1z} \ \theta_{2z} \ \theta_{3z} \ \theta_{4z}\}. \end{aligned} \right\} \quad (49.2)$$

Оставаясь в рамках линейной теории оболочек, можно выписать следующие зависимости:

$$\{R^u\} = [K^u] \{q^u\}, \quad (49.3)$$

$$\{R^e\} = [K^e] \{q^e\}, \quad (49.4)$$

где $[K^u]$ — матрица жесткости прямоугольного элемента при решении плоской задачи теории упругости; $[K^e]$ — матрица жесткости того же элемента при его изгибе. Обе эти матрицы были получены выше в § 26 и § 28.

Используя обозначения (49.1), а также зависимости (49.3) и (49.4), можно записать

$$\begin{Bmatrix} \{R^u\} \\ \{R^e\} \\ \{M_z\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K^u] & 0 & 0 \\ 0 & [K^e] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^u\} \\ \{q^e\} \\ \{\theta_z\} \end{Bmatrix}. \quad (49.5)$$

Матричное уравнение (49.5) для удобства дальнейших рассуждений переписем в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} \{R^u\} \\ \{R^e\} \\ \{R^i\} \\ \{R^i\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q^1\} \\ \{q^2\} \\ \{q^3\} \\ \{q^4\} \end{Bmatrix} \quad (49.6)$$

Здесь через $\{R^i\}$ и $\{q^i\}$ обозначены матрицы, содержание которых определяется соответственно зависимостями (46.11) и (46.12).

Вид каждой из матриц $[K]_{ij}$ нетрудно установить, если воспользоваться матрицами $[R^u]$ и $[K^e]$ для прямоугольного элемента. Тогда зависимость (49.6) можно переписать так:

$$\{R\} = [K] \{q\}, \quad (49.7)$$

где $[K]$ — искомая матрица жесткости плоского прямоугольного элемента оболочки в местной системе координат.

Как уже отмечалось выше, построение для рассматриваемой оболочки общей матрицы жесткости может быть значительно упрощено, если выразить выражение для отдельного элемента матрицы жесткости в общей системе координат. Оно может быть получено по аналогии с преобразованием к общей системе координат матрицы жесткости для треугольного плоского элемента.

Можно видеть, что практически все из сказанного выше в отношении треугольного элемента переносится на прямоугольный элемент.

В заключение приведем значение матрицы направляющих косинусов [1].

Пусть произвольная цилиндрическая оболочка идеализирована совокупностью прямоугольных плоских конечных элементов (рис. VII.11).

Рассмотрим произвольный конечный элемент i -й. Здесь оси x' и x совпадают.



Рис. VII.11. Идеализация тонкой цилиндрической оболочки совокупностью плоских прямоугольных элементов.

Для элементов матрицы $[K]$ нетрудно получить [155]:

$$k_{xx} = 1; \quad k_{xy} = 0; \quad k_{yx} = 0;$$

$$k_{yy} = \frac{y_1' - y_2'}{\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}}; \quad k_{xy} = \frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}};$$

$$k_{yx} = -\frac{x_1' - x_2'}{\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}}; \quad k_{yy} = \frac{y_1' - y_2'}{\sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2}}.$$

(49.6)

Следует обратить внимание на порядок нумерации узловых точек конечного элемента. Лишь при соблюдении выбранного порядка можно избежать ошибок в запись знаков при выражении (49.6) для направляющих косинусов.

В предыдущих главах было рассмотрено применение метода конечных элементов для решения задач упругости и пластичности. При этом широко использовались принцип минимума потенциальной энергии для упругой системы.

В инженерных науках и физике существует достаточное количество проблем, решение которых основано на принципе максимизации функционалов с соответствующими граничными условиями.

Функционалы, как правило, имеют смысл энергии или работы, а математическая запись соответствующих уравнений идентична. Для решения таких задач оказывается весьма эффективным применение конечно-элементной процедуры. Ниже будут рассмотрены некоторые из этих задач.

Все увеличивающийся тоннаж и габариты судовых конструкций приводят к необходимости разбиения их на весьма большое число конечных элементов. Однако емкость памяти ЭВМ (как оперативной, так и внешней) не может быть увеличена до бесконечности. В связи с этим в последнее время стали широко использоваться так называемые суперэлементы [94, 95]. В качестве их применяются совокупности обычных конечных элементов в виде отдельных «кусков» корпуса судна (части двутавровых рам, днища, борта и т. п.). Предварительно эти суперэлементы обобщивают с помощью стандартной конечно-элементной процедуры.

Сборка конструкции осуществляется путем стыковки суперэлементов в узловых точках. Количество таких точек, как правило, значительно меньше общего числа узлов, поэтому порядок последующих матриц существенно понижается.

Метод суперэлементов (или метод подконструкций) аналогичен известной в строительной механике стержневых систем методике расчета на основе выбора основной системы. Некоторые вопросы использования суперэлементов описаны в настоящей главе.

Наконец, одна из важнейших проблем использования метода конечных элементов — проблема сходимости, устойчивости и точности получаемых решений. Эта проблема будет бы послушать пред-

местом самостоятельной монографии. Поэтому в настоящей работе будут рассмотрены только отдельные ее аспекты, не претендуя на полноту и корректность в математическом смысле. Однако не коснуться их вообще мы не можем.

§ 50

Использование конечно-элементной процедуры для решения задач теплопроводности

При решении задач упругости и пластичности особое место занимает вопрос о температурных напряжениях и температурных деформациях. Решение практических задач об определении температурных напряжений при сварке, при работе плавильных и дробильных установок, деформаций корпусов танкеров вследствие соленого обледенения и водного охлаждения днища и т. п. является исключительно важным.

Для решения указанных задач с помощью метода конечных элементов требуется задать в узловых точках конструкции значения температур. Зная их, можно с помощью методов начальных деформаций (см. § 6) вычислить соответствующие узловые силы, а далее обычным способом получить искомые результаты.

Поэтому на первый план выступает задача о распределении температур при посюде (или оттоке) тепла; на этой задаче ниже мы подробно и остановимся.

Исходные зависимости. Принимая систему обозначений, аналогичную принятой в работе [116], вводим функционал

$$\Omega_0(\theta) = \frac{1}{2} \int_V \rho c \dot{\theta}^2 - 2\rho \theta \dot{\theta} - 2\rho r \dot{\theta} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \kappa_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} dV - \int_S [\lambda (\theta_c - \frac{1}{2} \dot{\theta}) \dot{\theta}] dS, \quad (50.1)$$

где $\theta(x, y, z, t)$ — температурное поле как функции координат и времени t ; ρ — плотность среды; c — теплоемкость на единицу массы; $\theta_c(x, y, z)$ — распределение начальной температуры; ρ — скорость, с которой тепло генерируется на единицу массы; κ_{ij} — элементы тензора теплопроводности; V — объем; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Интеграл по поверхности S в выражении (50.1) учитывает эффект теплоотдачи через граничный слой. Здесь λ — коэффициент теплоотдачи слоя; θ_c — известная температура среды.

Из условия стационарности функционала (50.1)

$$\delta \Omega_0(\theta) = 0 \quad (50.2)$$

после несложных преобразований можно получить систему уравнений нестационарной теплопроводности:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho r = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (50.3)$$

Конечно-элементная идеализация [153]. В дальнейшем, чтобы конкретизировать выкладки, рассмотрим задачу теплопроводности для тел вращения на базе объемных коллинеарных конечных элементов треугольного сечения.

Пусть температурное поле по треугольному сечению элемента аппроксимируется полиномом

$$\theta \sim \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z. \quad (50.4)$$

При использовании зависимости (50.4) нетрудно установить связь между параметрами α_i и значениями температур в узловых точках θ_i , что, в свою очередь, позволяет переписать выражение (50.4) для k -го элемента в виде

$$\theta^k = \{b\}_k \{\theta_{in}\}_k. \quad (50.5)$$

Дифференцируя (50.5) по координатам, получаем вектор-столбец температурных градиентов:

$$\{\theta^k\}_k = \{b\}_k \{\theta_{in}\}_k, \quad (50.6)$$

где

$$\{\theta^k\}_k = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\}, \quad (50.7)$$

Подставляя (50.5) и (50.6) в функционал (50.1) и заменив общий интеграл суммой интегралов по каждому из элементов, приходим к следующему матричному виду:

$$\Omega = \frac{1}{2} \{\bar{\theta}_{in}\}^T \{\bar{C}\} \{\bar{\theta}_{in}\} - \frac{1}{2} \{\bar{\theta}_{in}\}^T \{\bar{K}\} \{\bar{\theta}_{in}\} - \{\bar{\theta}_{in}\}^T \{\bar{C}\} \{\bar{\theta}_c\} - \{\bar{\theta}_{in}\}^T \{\bar{Q}\}, \quad (50.8)$$

здесь $\{\bar{\theta}_{in}\}$ — вектор узловых температур в общей системе координат;

$$\{\bar{C}\} = [H]^T [C] [H], [C]_1, \dots, [C]_k [H]; \quad (50.9)$$

$$\{\bar{K}\} = [H]^T \{ [K^*]_1, [K^*]_2, \dots, [K^*]_k \} [H]; \quad (50.10)$$

$$[C]_k = \int_V \rho c [b]^T [b] dV \quad (50.11)$$

— матрица теплоемкости k -го элемента;

$$[K^*]_k = \int_V \{ \lambda [b]^T \{\bar{K}\}_k \{b\} dV + \int_S \{b\}^T \{\delta\} dS \quad (50.12)$$

— матрица теплопроводности k -го элемента;

$$\{\bar{Q}\} = [H]^T \{Q_1\}_1, \{Q_1\}_2, \dots, \{Q_1\}_k; \quad (50.13)$$

$$\{Q_1\}_k = \int_V \{b\}_k [b]^T dS - \int_S \rho r [b]^T dV \quad (50.14)$$

— вектор тепловой нагрузки k -го элемента.

Первая вариация от функционала (50.8) по $\{\bar{\theta}^k\}$ дает матричное уравнение для определения вектора температур $\{\bar{\theta}_{in}\}$:

$$(\{\bar{K}\} + \{\bar{C}\}) \{\bar{\theta}_{in}\} - \{\bar{C}\} \{\bar{\theta}_c\} + \{\bar{Q}\}. \quad (50.15)$$

Дальнейшие операции аналогичны общей процедуре метода конечных элементов, а получение исходных матриц по уравнениям (50.9)–(50.12), (50.14) не представляет затруднений.

Пример. Для демонстрации точности полученных матриц приведем аналогичный пример задачи теплопроводности, имеющий простое решение.

К телу вращающегося (рис. VIII.1) снаружи подводится тепло с температурой конца $t_{c2} = 400^\circ\text{C}$, а внутри соприкасаясь с температурой $t_{c1} = 80^\circ\text{C}$. Определим температуры по длине конечных элементов, разбив тело вращения на четыре

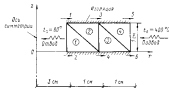


Рис. VIII.1. Определение температурных полей по МКЭ.

конечных элемента (номера в кружках), имеющих шесть узловых точек, в которых в определенном порядке заданы температуры. Коэффициент теплопроводности $\bar{\kappa}_{11} = \bar{\kappa} = 40 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}$; коэффициент теплового расширения $\bar{\alpha} = 1000$ в тех же единицах; коэффициент теплоемкости $c = 0$.

Для упрощения процедуры вычисления интегрирования в выражениях (50.9)–(50.14) введем средний радиус $r_{cp} = \frac{1}{8}(r_1 + r_2 + r_3)$. Тогда все эти выражения сводятся к постоянным величинам.

Выполнив с помощью формул (50.9)–(50.14) все необходимые матрицы, составим систему уравнений (50.15). Получим

3,324	1,368	-0,109				
	3,255	0	-0,140			
		0,834	-0,404	-0,263		
			0,780	0	-0,236	
				Симметрично	1,829	
					0,302	
						1,803

$$\begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \\ \bar{r}_4 \\ \bar{r}_5 \\ \bar{r}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 361,9 \\ 361,9 \\ 0 \\ 0 \\ 785,0 \\ 785,0 \end{pmatrix} \quad (50.16)$$

система

$$\{\bar{b}_{12}\} = \{37,5; 85,0; 370; 272; 385; 387\}. \quad (50.17)$$

Точное решение:

$$\{\bar{b}_{12}\} = \{92; 92; 241; 241; 392; 392\}. \quad (50.18)$$

Видно, что даже столь грубые приближения к истинным значениям коэффициентов матриц (50.15) приводят к вполне удовлетворительным результатам.

Узловые силы от действия температуры. На основании полученных по МКЭ температурных полей можно вычислить узловые силы $\{R\}_k$ для k -го элемента от действия температуры (рис. VIII.2). Вычисление вектора $\{R\}_k$ значительно упрощается, если снова ввести r_{cp} и $\bar{\theta}_{cp} = \frac{1}{2}(\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3)$ — среднюю температуру в элементе.

На основании уравнения (6.6) $\{R\}_k = [B]^T [D_0] [E] \{e_0\} 2\pi r_{cp} S$, (50.19) здесь $\{e_0\} = \{\alpha \bar{\theta}_{cp}, \alpha \bar{\theta}_{cp}, \alpha \bar{\theta}_{cp}, 0\}$ — вектор температурных деформаций (α — коэффициент линейного расширения материала); S — площадь треугольника.

Значения остальных матриц, входящих в выражение (50.19), были приведены в гл. V.



Рис. VIII.2. К определению узловых сил от температуры.

§ 51

Использование МКЭ в задачах динамики

Метод конечных элементов может быть использован для расчета систем, движение которых является функцией времени t [111, 152]. При этом интервал времени, в течение которого прослеживается поведение системы, разбивают на ряд конечных отрезков времени.

Движение системы с одной степенью свободы. Рассмотрим движение точечной массы m , подвешенной на пружине жесткости k , под действием внешней возмущающей силы $f(t)$. Дополнительно предположим наличие в системе сил сопротивления, пропорциональных скорости в первой степени. Тогда уравнение для определения перемещения точечной массы запишется в виде

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = f(t), \quad (51.1)$$

где c — коэффициент сопротивления среды.

Вместо уравнения (51.1) для определения функции $q(t)$ можно воспользоваться известным приемом Гамильтона:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \alpha (f - c\dot{q} - kq) \right] dt - \min, \quad (51.2)$$

Функция $u(t)$, если она является решением уравнения (51.2), минимизирует функционал F по всем интервалам изменения времени t .

Если интервал изменения времени $t_n - t_0$ разбить на ряд n элементов $t_j - t_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то условие (51.2) можно будет переписать так:

$$F = \sum_{j=1}^n F_j - m \dot{v}_0, \quad (51.3)$$

здесь

$$F_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + u(t - \sigma t - \omega x) \right] dt \quad (51.4)$$

Предполагая, что характер изменения функции $u(t)$ в каждом j -м участке времени ($t_{j-1} \leq t \leq t_j$) достаточно медленно меняется через нулевые значения первообразной и скорости:

$$u^{(0)}(t) = q^{(0)}(1 - 3t^2 - t^3) + a^{(0)}(t - 2t^2 + t^3) + \\ + q^{(1)}(3t^2 - 2t^3) + q^{(2)}(t - t^2 + t^3), \quad (51.5)$$

где введены дополнительные обозначения:

$$\Delta_j = t_j - t_{j-1}, \quad \tau = \frac{t - t_{j-1}}{\Delta_j}; \quad (51.6)$$

$$q^{(0)} = u_{t_0}^{(0)}, \quad q^{(1)} = \dot{u}^{(0)}(0), \quad q^{(2)} = \dot{u}^{(0)}(1), \quad q^{(3)} = \ddot{u}^{(0)}(1). \quad (51.7)$$

Зависимость (51.5) можно переписать так:

$$u^{(0)}(t) = \sum_{\alpha=0}^3 \mathcal{E}_\alpha(t) q^{(\alpha)} = [\mathcal{E}]^T [q], \quad (51.8)$$

Функции Эрмита $\mathcal{E}_\alpha(t)$ обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1(0) = 1; \quad \dot{\mathcal{E}}_1(0) = 0; \quad \mathcal{E}_1(1) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_1(1) = 0; \\ \mathcal{E}_2(0) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_2(0) = 1; \quad \mathcal{E}_2(1) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_2(1) = 0; \\ \mathcal{E}_3(0) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_3(0) = 0; \quad \mathcal{E}_3(1) = 1; \quad \dot{\mathcal{E}}_3(1) = 0; \\ \mathcal{E}_4(0) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_4(0) = 0; \quad \mathcal{E}_4(1) = 0; \quad \dot{\mathcal{E}}_4(1) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (51.9)$$

Непосредственно из выражения (51.5) с учетом обозначений (51.8) найдем скорость точечной массы

$$\dot{u}^{(0)}(t) = [\dot{\mathcal{E}}]^T [q], \quad (51.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [\dot{\mathcal{E}}]_1 = \left\{ \frac{1}{\Delta_j} (-6\tau - 6\tau^2), (1 - 4\tau + 3\tau^2), \right. \\ \left. \frac{1}{\Delta_j} (6\tau - 6\tau^2), (-2\tau - 3\tau^2) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (51.11)$$

Внося выражение для $u^{(0)}(t)$ из (51.8) в (51.10) и (51.4), после несложных выкладок получим

$$F_j = [q]^T \left[\frac{1}{2} m \dot{A}_j^{(0)} - c \dot{A}_j^{(1)} - m \dot{A}_j^{(2)} \right] [q] + [q]^T [A_j^{(0)}] [q]. \quad (51.12)$$

Здесь $[A_j^{(0)}]$, $[A_j^{(1)}]$, $[A_j^{(2)}]$ — матрицы, элементы которых определяются зависимостями

$$A_{11}^{(0)} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}_1 \dot{x}_1 dt, \quad A_{22}^{(0)} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}_2 \dot{x}_2 dt, \quad A_{33}^{(0)} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{x}_3 \dot{x}_3 dt, \quad (51.13)$$

$$[A_j^{(1)}] = [A_{j-1} \dot{A}_{j-1} \dot{A}_j \dot{A}_j]; \quad (51.14)$$

$$[A_j^{(2)}] = [A_j \dot{A}_{j-1} \dot{A}_j \dot{A}_j], \quad [A_j^{(3)}] = [\dot{A}_j \dot{A}_j]. \quad (51.15)$$

Используя выражение (51.12), найдем

$$[A_j]^* = \Delta_j [A_j^{(0)}] [M_j]^* [A_j^{(0)}] \quad (s=0, 1; \quad r=0, 1), \quad (51.16)$$

где

$$[M_j]^* = \begin{bmatrix} \Delta_j & 1 & \Delta_j \end{bmatrix}; \quad (51.17)$$

$$\left. \begin{aligned} [A_j^{(0)}] = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}; \\ [A_j^{(1)}] = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -36 & 6 & 36 & -6 \\ -6 & 2 & 6 & -1 \\ -30 & -6 & 30 & 6 \\ 6 & 1 & -6 & 6 \end{bmatrix}; \\ [M_j^{(0)*}] = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (51.18)$$

В рассматриваемом интервале $t_n - t_0$, разбитом на l конечных элементов времени, можно сформировать вектор

$$[\bar{q}] = [u_0 \dot{u}_0 u_1 \dot{u}_1 u_2 \dot{u}_2 \dots u_{l-1} \dot{u}_{l-1} u_l \dot{u}_l]. \quad (51.19)$$

Дополнительно найдем в рассмотренные вектор

$$[q] = [q_1 | q_2 | \dots | q_l | \dots | q_l]. \quad (51.20)$$

Из непосредственного рассмотрения структуры вектора $[q]$ и $[\bar{q}]$ нетрудно установить связь между ними (по аналогии с уравнением (4.9)):

$$[q] = [a] [\bar{q}]. \quad (51.21)$$

Суммируя выражение F_j по всем j и учитывая обозначения (51.19), (51.20) и зависимость (51.21), получаем выражение для полной энергии системы:

$$F = \frac{1}{2} \kappa (\dot{q})^T [H] \dot{q} - c (\dot{q})^T [H]^{1/2} \dot{q} - \kappa (\dot{q})^T [H]^{1/2} \dot{q} + (\dot{q})^T [H]^{1/2} \dot{f}, \quad (51.22)$$

где

$$[H]^{1/2} = [a]^{1/2} [A]^{1/2} [a]; \quad (51.23)$$

$$[A]^{1/2} = [1] [A]^{1/2} [1] \cdots [1] [A]^{1/2} [1]; \quad (51.24)$$

$$\dot{f} = f_{10} \dot{f}_1 f_2 \cdots f_j \dot{f}_j \cdots f_n \dot{f}_n. \quad (51.25)$$

Условие минимума функционала F

$$\frac{\delta F}{\delta (\dot{q})^T} = 0 \quad (51.26)$$

приводит к следующему матричному уравнению для определения вектора $\{\dot{q}\}$:

$$[m] \ddot{q} - c \dot{q} - \kappa H^{1/2} \dot{q} + [H]^{1/2} \dot{f} = 0. \quad (51.27)$$

Уравнение (51.27) нетрудно распространить на случай переменных значений $\kappa(t)$ и $c(t)$.

Если учесть, что входящие в вектор $\{\dot{q}\}$ величины a_n и m_n определяются на начальных условиях движения системы, то уравнение (51.27) представляет систему $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения $2n$ неизвестных:

$$m_1, \dot{a}_1, a_2, \dot{a}_2, \dots, m_j, \dot{a}_j, \dots, m_n, \dot{a}_n.$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид левой дроби, позволяющей использовать процедуру последовательного определения неизвестных: по начальным значениям m_n, \dot{a}_n определяются m_j, \dot{a}_j и т. д. вплоть до значений m_1, \dot{a}_1 .

Движение системы с n степенями свободы. Введем в рассмотрение вектор узловых перемещений системы

$$\{\hat{q}\} = \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \hat{q}_4, \hat{q}_5, \hat{q}_6, \hat{q}_7, \hat{q}_8, \hat{q}_9, \hat{q}_{10}, \hat{q}_{11}, \hat{q}_{12}, \hat{q}_{13}, \hat{q}_{14}, \hat{q}_{15}, \hat{q}_{16}, \hat{q}_{17}, \hat{q}_{18}, \hat{q}_{19}, \hat{q}_{20}\}, \quad (51.28)$$

где \hat{q}_{2j-1} и \hat{q}_{2j} — соответственно векторы обобщенных перемещений и скоростей системы в момент $t = t_j$.

Основное матричное уравнение для определения вектора перемещений $\{\hat{q}\}$ может быть получено из условия минимума полной энергии системы.

Не приводя здесь всех промежуточных громоздких выкладок, сразу напишем следующее матричное уравнение:

$$[H]^{1/2} \times \hat{M} - H^{1/2} \times \hat{C} - H^{1/2} \times \hat{K} \{\hat{q}\} + [H]^{1/2} \times E_n \dot{f} = 0. \quad (51.29)$$

Входящие в уравнение (51.29) матрицы $[H]^{1/2}$ вычисляются по формуле (51.23); $[\hat{M}] = [H]^{1/2} [M_n] [H]$ — матрица масс, описанная неоднократно в предыдущих главах при рассмотрении задач свободных колебаний упругих систем; $[\hat{C}] = [H]^{1/2} [C_n] [H]$ — матрица демпфирования; $[\hat{K}] = [H]^{1/2} [K_n] [H]$ — общая матрица жесткости системы; $[E_n]$ — единичная матрица порядка n .

Матрица усилий \dot{f} по своей структуре аналогична $\{\dot{q}\}$ в (51.26). В (51.29) использована ранее не встречавшаяся процедура умножения двух матриц:

$$[A] \times [B] = [C] = [C]_{ij}, \quad (51.30)$$

где $[C]_{ij}$ — субматрица, определяемая из зависимости

$$[C]_{ij} = a_{ij} [B]. \quad (51.31)$$

Если размер матрицы $[A]$ равен $n \times m$, а матрицы $[B]$ — $s \times r$, то размер матрицы $[C]$ будет равен $(n \times s) \times (m \times r)$.

Отсюда следует, что матричное уравнение (51.29) после подстановки в него начальных условий, т. е. значений $\{\hat{q}_n\}$ и $\{\dot{q}_n\}$, окажется эквивалентным системе $2n$ алгебраических уравнений, которая позволит определить по $2n$ неизвестных перемещений и скоростей системы для каждого фиксированного момента времени $t = t_j$ ($j = 1, 2, \dots, J$). Как и в случае системы с одной степенью свободы, здесь также применима процедура последовательного перехода от момента времени t_1 к t_2 от t_2 к t_3 и т. д. при определении основных неизвестных в уравнении (51.29).

§ 52

Использование МКЭ в задачах гидромеханики и гидроупругости

Основные уравнения движения идеальной жидкости. Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается известными уравнениями Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left[a \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \\ Y - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \\ Z - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (52.1)$$

где X, Y, Z — проекции интенсивностей обобщенных сил соответственно на оси x, y, z ; u, v, w — проекции вектора скорости на оси координат; ρ — плотность жидкости; $p(x, y, z, t)$ — давление в данной точке жидкости.

В дальнейшем координатным ускорением, т. е. членами в квадратных скобках в уравнении (52.1), будем пренебрегать. Следова-

вообще оправдано, например, в задачах гидроупругости судовых конструкций.

Дополним систему (52.1) уравнением сплошности сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (52.2)$$

(E — модуль нормальной упругости жидкости), получаем систему четырех уравнений для определения неизвестных u, v, w и p .

Дифференцируем уравнение (52.2) по t и используем систему (52.1) для исключения в полученном уравнении неизвестных u, v и w , находим

$$\nabla^2 p - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0, \quad (52.3)$$

После нахождения из (52.3) $p(x, y, z, t)$ проекция вектора скорости можем определить из уравнения (52.1), пренебрегая членами в квадратных скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X, \text{ и т. д.} \quad (52.4)$$

Условие для p на границе рассматриваемого объема жидкости в общем случае запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = -\rho \frac{\partial v_n}{\partial t}, \quad (52.5)$$

где ν — нормаль к поверхности объема жидкости; v_n — скорость в направлении нормали ν .

Метод конечных элементов [156]. Разобьем рассматриваемый объем жидкости на совокупность элементарных конечных элементов, сгруппированных лишь в узловых точках. В качестве основных неизвестных примем значения узловых давлений. Предполагая далее, что давление в любой точке элементарного объема жидкости однозначно выражается через его узловое значение p_i , записываем

$$p(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^r T_i(x, y, z) p_i(t), \quad (52.6)$$

где $T_i(x, y, z)$ — функции Эрмита для рассматриваемого элемента объема жидкости; r — число степеней свободы, равное числу узловых точек.

Например, для параллелепипеда (см. рис. V.5) выражение (52.6) по форме будет аналогично выражению (34.8).

Для решения краевой задачи, описываемой уравнением (52.3) и граничным условием (52.5), воспользуемся обобщенным методом Бубнова—Галеркина:

$$\int_V \left[\nabla^2 p - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \rho \right] \delta p \, dV - \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial \nu} + \rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{\text{задан.}} \delta p \, dS = 0, \quad (52.7)$$

S — поверхность элемента жидкости.

Откуда после подстановки выражения для $p(x, y, z, t)$ из (52.6) получим

$$\int_V \left[\nabla^2 \sum T_i \bar{p}_i - \frac{1}{E} \sum T_i \ddot{\bar{p}}_i - f(x, y, z, t) \right] T_k \, dV - \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial \nu} + \rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{\text{задан.}} T_k \, dS = 0, \quad (52.8)$$

($k = 1, 2, \dots, r$)

где обозначено

$$f(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \rho, \quad (52.9)$$

Используя теорему Грина, уравнение (52.8) можно преобразовать к виду

$$\int_V \left[\sum \left(\frac{\partial T_k}{\partial x} \frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{\partial T_k}{\partial y} \frac{\partial T_i}{\partial y} + \frac{\partial T_k}{\partial z} \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) \rho_i \right] dV + \frac{1}{E} \int_V \sum T_k T_i \ddot{\rho}_i \, dV - \int_V T_k \sum \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} l + \frac{\partial T_i}{\partial y} m + \frac{\partial T_i}{\partial z} n \right) \rho_i \, dS + \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial \nu} + \rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{\text{задан.}} T_k \, dS + \int_V f(x, y, z, t) T_k \, dV = 0, \quad (52.10)$$

($k = 1, 2, \dots, r$)

Замечая далее, что

$$\sum \left(\frac{\partial T_i}{\partial x} l + \frac{\partial T_i}{\partial y} m + \frac{\partial T_i}{\partial z} n \right) \rho_i = \frac{\partial p}{\partial \nu}, \quad (52.11)$$

и введе обозначения*

$$a_{ki} = \frac{1}{E} \int_V T_k T_i \, dV, \\ b_{ki} = \int_V \left(\frac{\partial T_k}{\partial x} \frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{\partial T_k}{\partial y} \frac{\partial T_i}{\partial y} + \frac{\partial T_k}{\partial z} \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) dV, \\ c_k = - \int_V T_k \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dS, \quad d_k = \int_S T_k \left(\rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{\text{задан.}} \, dS, \\ e_k = \int_V f(x, y, z, t) T_k \, dV, \quad (52.12)$$

можно переписать уравнение (52.10) в виде

$$\sum a_{ki} \ddot{\bar{p}}_i + \sum b_{ki} \bar{p}_i + c_k + d_k + e_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (52.13)$$

* Через S' обозначим часть поверхности рассматриваемого элемента жидкости, совпадающая с внешней поверхностью объема жидкости в целом; S'' — оставшаяся часть поверхности элемента.

Система уравнений (52.13) определяет равновесие эластичного элемента конечного элемента жидкости.

Для каждого i -го элемента жидкости систему (52.13) можно переписать в виде одного матричного уравнения:

$$[A]_i \{\bar{p}\}_i + [B]_i \{p\}_i + [C]_i + [D]_i + [E]_i = 0, \quad (52.14)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Элементы матриц $[A]_i$, $[B]_i$, $[C]_i$, $[D]_i$ и $[E]_i$ определяются с помощью зависимостей (52.12).

Система уравнений (52.14) может быть переписана в форме одного матричного уравнения:

$$[\bar{A}] \{\bar{p}\} + [\bar{B}] \{p\} + [C] + [D] + [E] = 0, \quad (52.15)$$

где обозначено:

$$[\bar{A}] = [[A]_1, [A]_2, \dots, [A]_n]; \quad [\bar{B}] = [[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_n]; \quad (52.16)$$

$$\{p\} = \{ \{p\}_1, \{p\}_2, \dots, \{p\}_n \}. \quad (52.17)$$

Матрицы $[C]$, $[D]$ и $[E]$ выписываются по аналогии с матрицей $\{p\}$.

Введем в рассмотрение вектор $\{\bar{p}\} = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$. Здесь n — число узловых точек.

Нетрудно установить связь между векторами $\{\bar{p}\}$ и $\{p\}$:

$$\{p\} = [G] \{\bar{p}\}, \quad (52.18)$$

Исключая в (52.15) с помощью (52.18) вектор $\{p\}$ и умножив полученное при этом уравнение слева на матрицу $[G]^{-1}$, получаем

$$[\bar{A}] \{\bar{p}\} + [\bar{B}] \{\bar{p}\} + [\bar{C}] + [\bar{D}] + [E], \quad (52.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} [\bar{A}] &= [G]^{-1} [A] [G], \\ &\dots \\ [\bar{C}] &= [G]^{-1} [C]. \end{aligned} \right\} \quad (52.20)$$

Уравнение (52.19) является искомым матричным уравнением метода конечных элементов. Оно соответствует системе n дифференциальных уравнений 2-го порядка с n неизвестными узловыми давлениями p_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Взаимодействие жидкости с упругим телом. Уравнение вынужденных колебаний упругого тела, представленного в виде совокупности конечных элементов (см. § 37), записывается так:

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} + [\bar{N}] \{\dot{\bar{q}}\} + [\bar{M}] \{\ddot{\bar{q}}\} = \{\bar{R}\}, \quad (52.21)$$

где $[\bar{K}]$, $[\bar{N}]$, $[\bar{M}]$ — соответственно матрица жесткости упругого тела, матрица сил затухания и матрица масс в общей системе координат; $\{\bar{q}\}$ — вектор узловых перемещений в общей системе координат.

При взаимодействии упругого тела с жидкостью вектор обобщенных узловых усилий $\{\bar{R}\}$ может быть представлен в виде суммы вектора узловых усилий $\{\bar{F}\}$ от действия внешних возмущающих сил и вектора $\{\bar{T}\}$ от действия сил давления жидкости на соприкасающуюся с ней поверхность упругого тела:

$$\{\bar{R}\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{T}\}. \quad (52.22)$$

Векторы $\{\bar{F}\}$ и $\{\bar{T}\}$ в (52.22) определяются с помощью зависимостей

$$\{\bar{F}\} = [H]^{-1} \{F\}, \quad \{\bar{T}\} = [H]^{-1} \{T\}, \quad (52.23)$$

здесь

$$\{F\} = \{ \{F\}_1, \{F\}_2, \dots, \{F\}_n \}, \quad \{T\} = \{ \{T\}_1, \{T\}_2, \dots, \{T\}_n \}. \quad (52.24)$$

Элементы вектора узловых усилий $\{F\}_i$ для i -го конечного элемента упругого тела, имеющего грани, соприкасающиеся с жидкостью,

$$F_i = \int_{S_i} \mathcal{E}_k \rho \, dS, \quad (52.25)$$

где \mathcal{E}_k — k -я функция Эрмита в общем выражении для вектора перемещений конечного элемента в местной системе координат, S_i — площадь наружной поверхности конечного элемента упругого тела, соприкасающаяся с жидкостью.

Введем в выражении (52.25) значение ρ из (52.6):

$$F_i = \int_{S_i} \mathcal{E}_k \sum_j T_{kj} \rho_j \, dS, \quad (52.26)$$

откуда

$$\{F\}_i = [L]_i \{p\}_i, \quad (52.27)$$

где

$$[L]_i = [L_{kj}]_i, \quad L_{kj} = \int_{S_i} \mathcal{E}_k T_{kj} \, dS. \quad (52.28)$$

Аналогично, замечая, что на поверхности контакта упругого тела с жидкостью

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho v_n = -\rho \sum_j \mathcal{E}_j \dot{q}_j, \quad (52.29)$$

получаем

$$\{D\}_i = [S]_i \{\dot{q}\}_i, \quad (52.30)$$

здесь

$$[S]_i = [s_{kj}]_i, \quad s_{kj} = \rho \int_{S_i} T_{kj} \mathcal{E}_j \, dS. \quad (52.31)$$

Отсюда, если сопоставить выражения для k_{ij} из (52.28) и для k_{ij} из (52.31), можно заключить, что

$$p \{L\}_i = \{S\}_i. \quad (52.32)$$

Используя зависимости (52.27) и (52.30), включаем в уравнения (52.19) и (52.21) соответственно векторы $\{D\}$ и $\{F\}$. Полученные при этом два уравнения, дополненные начальными условиями для упругого тела в жидкости, описывают движение этого тела в жидкости, т. е. задачу гидроупругости.

§ 53

Расчет конструкций при использовании суперэлементов

Как было уже сказано в начале настоящей главы, емкость оперативной памяти ЭВМ ограничена и нередко расчет больших пространственных конструкций в силу этого становится затруднительным. Это обстоятельство требует разложения конструкции на суперэлементы. Суперэлементы (СЭ) повторяют форму и размеры некоторых частей реальных конструкций (узлов, соединений набора, частей шпандерных рам, перекрытий, бортов и т. п.). В СЭ объединяются несколько базисных конечных элементов с широким спектром характеристик материала, различными закреплениями, внутренними и внешними силами, с большим числом внутренних и внешних степеней свободы.

При сборке конструкции из СЭ последние соединяются так же, как и в МКЭ, в узловых точках, называемых суперузлами (СУ).

Естественно, что общее число степеней свободы, а следовательно, и порядок анализируемых матриц в этом случае значительно меньше, чем при использовании базисных конечных элементов в МКЭ. Это является основным преимуществом применения СЭ.

Решая задачу на основе использования СЭ, получаем предваренную в суперузлах. Дальнейший анализ производится отдельно для каждого СЭ обычным методом конечных элементов с учетом заданных (полученных выше) перемещений на границах (в СУ), причем требуемые для этого матрицы имеют относительно небольшие размеры.

Суперэлемент есть обобщение понятия «конечный элемент», причем это обобщение может идти еще дальше, если ввести понятие суперэлемент n -го уровня [94, 95, 144]: СЭ нулевого уровня, по существу, совпадает с базисным конечным элементом (тетраэдром и т. п.). Суперэлемент 1-го уровня строится только из базисных конечных элементов в противоположность СЭ 2-го, 3-го и т. д. уровней, которые образуются из СЭ низших уровней (рис. VIII.3).

Суперэлемент в виде реального бракетного соединения показан на рис. VIII.4. С учетом симметрии вся конструкция этого узла разбита на шесть суперэлементов, соединенных в 39 суперузлах. При использовании базисных конечных элементов (пластинки прямоугольного и треугольного сечений) уравнения равновесия следует записать

относительно всех 217 узловых точек; при использовании СЭ каждый суперэлемент анализируется (формируется матрица жесткости и грузовой вектор) отдельно, исходя из предположения, что все связи в общих суперузлах полностью закреплены. Затем эти связи полностью освобождаются. Этот факт математически описывается следующим матричным уравнением:

$$(\bar{K}) \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}, \quad (53.1)$$

где (\bar{K}) — матрица жесткости всей конструкции для всех СУ; $\{\bar{q}\}$ — вектор узловых перемещений конструкции для всех СУ; $\{\bar{P}\}$ — вектор внешних узловых сил, приложенных в СУ.

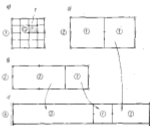


Рис. VIII.3. Суперэлементы разных уровней: а — СЭ 0-го уровня, собранный из базисных конечных элементов (СЭ 0-го уровня); б — СЭ 1-го уровня, собранный из двух СЭ 0-го уровня; в — СЭ 2-го уровня, собранный из одного СЭ 1-го уровня и одного СЭ 0-го уровня; г — объект конструкции, собранный из одного СЭ 1-го уровня, одного СЭ 2-го уровня и одного СЭ 3-го уровня (два СЭ 4-го уровня); д — СЭ 4-го уровня, базисный конечный элемент в виде прямоугольной пластинки для решения плоской задачи теории упругости.

Все матрицы и векторы для СЭ и СУ в уравнении (53.1) обладают теми же свойствами, что и для обычных узловых точек и базисных конечных элементов, т. е. для СЭ действительны все приемы формирования системы уравнений, вычисления напряжений и т. п., описанные выше для базисных конечных элементов.

Остается только показать компоненты матриц и векторов, входящих в уравнение (53.1). Для этого рассмотрим простой пример в виде плоской задачи теории упругости.

Пусть пластинка (рис. VIII.5, а) нагружена наружными узловыми силами $\{P_n\}$ и внутренними узловыми силами $\{P_s\}$. Конструкция нагружается также наружными распределенными (или начальными,

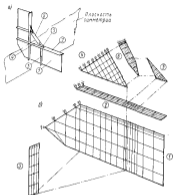


Рис. VIII.4. Разбивка узла квадратной конструкции на супер-узлы: а — общий вид узла; б — суперэлементы узла.

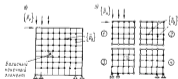


Рис. VIII.5. К выводу матрицы жесткости суперэлемента.

температурными нагрузками $\{P_s^t\}$ и аналогичными внутренними распределенными нагрузками $\{P_s^d\}$. Последние на рис. VIII.5 не показаны.

Разобьем нашу конструкцию на четыре суперэлемента (рис. VIII.5, б), который будет связан 17 суперузлами (показаны кружками). Остальные суперузлы (их 15; они помечены крестиками) не являются смежными, однако уравнение типа (53.3) следует составлять для всех 32 суперузлов. Оставшиеся внутренние узлы (их 36) показаны точками.

При получении уравнения (53.1) для нашей задачи требуется составить матрицы жесткости и грузовые векторы для каждого суперэлемента относительно только наружных узлов. Рассмотрим эту процедуру.

Пусть для i -го СЭ заданы наружные и внутренние сосредоточенные $\{P_s^{(i)}\}$, $\{P_s^{(i)'}\}$ и распределенные $\{P_s^{(i)d}\}$, $\{P_s^{(i)t}\}$ нагрузки*. Разобьем полный вектор узловых перемещений $\{q\}$ для СЭ на чисто «наружную» и чисто «внутреннюю» части:

$$\{q\} = \{q_s\} + \{q_s'\} \quad (53.2)$$

Аналогично разобьем полную матрицу жесткости $[K]$ для СЭ на четыре части (чисто «наружную», чисто «внутреннюю» и «смешанные»). Тогда обычное уравнение равновесия для суперэлемента $[K]\{q\} = \{P\}$ можно представить в следующей расчлененной форме:

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{ss}'] \\ [K_{ss}'] & [K_{ss}'] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_s\} \\ \{q_s'\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_s^d\} \\ \{P_s^t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_s\} \\ \{P_s'\} \end{Bmatrix} \quad (53.3)$$

или

$$\{P_s\} - \{P_s^d\} = [K_{ss}]\{q_s\} + [K_{ss}']\{q_s'\} \quad (53.4)$$

$$\{P_s'\} - \{P_s^t\} = [K_{ss}']\{q_s\} + [K_{ss}']\{q_s'\} \quad (53.5)$$

Для того чтобы из общего вектора перемещений для СЭ $\{q\}$ исключить вектор перемещений для внутренних узловых точек $\{q_s'\}$, умножим уравнение (53.3) на множитель $[K_{ss}][K_{ss}']^{-1}$ и результат почленно просуммируем с уравнением (53.4). В итоге получим

$$\begin{aligned} \{P_s\} - \{P_s^d\} - [K_{ss}][K_{ss}']^{-1}\{P_s'\} + [K_{ss}][K_{ss}']^{-1}\{P_s^t\} = \\ = [K_s]\{q_s\} - [K_{ss}][K_{ss}']^{-1}[K_{ss}']\{q_s'\} \end{aligned} \quad (53.6)$$

или

$$\{P_s'\} = [K_s']\{q_s\}, \quad (53.7)$$

где $\{P_s'\}$ — вектор внешних сил (грузовой вектор СЭ), равный левой части уравнения (53.6):

$$[K_s'] = \{P_s'\} - [K_{ss}][K_{ss}']^{-1}[K_{ss}'] \quad (53.8)$$

* Надпись i ниже опущена для краткости.

и есть матрица жесткости для суперэлемента относительно только наружных суперузловых перемещений $\{q_i\}$.

Таким образом, мы получили все компоненты, необходимые при формировании системы уравнений для конструкции, разбитой на суперэлементы произвольного уровня, относительно наружных суперузлов типа, описываемых выражением (53.1).

Из-за ограниченного объема книги пример, иллюстрирующий применение суперэлементов для расчета судовых конструкций, опускаем.

Заметим лишь, что получение матрицы жесткости $[K]$ по аналогии (53.8) аналогично операции блочного исключения по Гауссу, т. е. непосредственно и в этом случае может быть использована программа МКЭ [11] для блочных конечных элементов.

§ 54

Вопросы сходимости и точности МКЭ

Погрешность в результатах расчета при использовании метода конечных элементов складывается главным образом из погрешности самого метода, в котором тело, обладающее бесконечным числом степеней свободы, заменяется моделью с конечным числом степеней свободы, и погрешности округления чисел (сохранение в матрице числа лишь до 7 значащих цифр) при выполнении вычислительных операций на ЭВМ [79, 83, 85].

Погрешность, вносимая самим методом, зависит от целого ряда факторов:

- выбора предполагаемого закона изменения перемещений или напряжений и обобщенных узловых координат;

- точности приведения внешней нагрузки к узловым усилиям; размера конечного элемента.

Если выбранный закон изменения перемещений (напряжений) приводит к удовлетворению кинематических условий стыковки смежных элементов, то применение матрицы жесткости, полученной на основе данного закона изменения перемещений (напряжений), всегда приводит к получению решения, которое приближается к точному с увеличением числа конечных элементов [147, 148]. Если же кинематические условия стыковки смежных элементов строго не выполняются, то использование полученной при этом матрицы жесткости не может гарантировать сходимость решения по МКЭ к точному решению при увеличении числа конечных элементов. Таких матриц жесткости в практических расчетах следует избегать.

Ошибка округления всегда возрастает при увеличении числа конечных элементов. Это связано, во-первых, с тем, что увеличение числа элементов приводит к резкому возрастанию числа арифметических операций, а во-вторых, с уменьшением размера конечного элемента доли деформационных составляющих в значениях обобщенных координат уменьшается по отношению к той их части, которая связана с движением элемента как абсолютно твердого тела.

Поясним последнее утверждение на простом примере растяжения призматического стержня под действием силы P (рис. VIII.6).

При использовании метода конечных элементов стержень разбивается на n отдельных элементов (для простоты предполагается, что все элементы имеют один и тот же размер).

Перемещение i -го элемента определяется узловыми перемещениями

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{q_i + q_{i+1}}{2} - \frac{q_{i+1} - q_i}{2} = q_{i+1} - q_i \\ q_{i+1} &= \frac{q_i + q_{i+1}}{2} + \frac{q_{i+1} - q_i}{2} = q_{i+1} + q_i \end{aligned} \right\} \quad (54.1)$$

Первые слагаемые в этих выражениях q_{i+1} определяют перемещение i -го элемента как абсолютно твердого тела и зависят лишь от

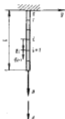


Рис. VIII.6. Разбивка растянутого стержня на конечные элементы.

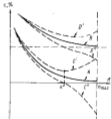


Рис. VIII.7. Кривые элементов ошибок дискретизации и округления в МКЭ с ростом числа конечных элементов.

положения элемента по длине тела, второе слагаемое q_i определяет напряжительно-деформированное состояние элемента:

$$e_i = \frac{q_i}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{l}{n}. \quad (54.2)$$

Отсюда получаем

$$q_i = e_i \Delta = \frac{e_i l}{n}. \quad (54.3)$$

Таким образом, при увеличении числа конечных элементов слагаемые q_i в правых частях выражений (54.1) уменьшаются пропорционально n , что приводит при больших значениях n к появлению малой разности близких величин при вычислении $q_i = \frac{1}{2} (q_{i+1} - q_i)$.

На рис. VIII.7 приведены кривые изменения ошибок дискретизации (A, B) и ошибок округления (C, D). При этом ошибка округления

ния отсчитывают непосредственно от кривых A и B . Таким образом, кривые C и D определяют значения суммарных ошибок при использовании метода конечных элементов [142].

Кривая A соответствует использованию матриц жесткости, обеспечивающей сходимость решения по МКЭ к точному решению теории упругости. Кривая B связана с использованием в МКЭ матриц жесткости, которая не обеспечивает сходимость решения к точному. Кривые C и D' соответствуют случаю, когда ошибки дискретизации и округления имеют один и тот же знак; в противном случае кривые C'' и D'' . Непосредственно из рис. VIII.7 видно, что не всегда следует стремиться к разбавлению тела на максимальное возможное число конечных элементов, так как максимальная суммарная погрешность оказывается при $n^* \leq n_{\max}$ (n_{\max} — максимальное число конечных элементов, при котором еще хватает мощности используемой ЭВМ).

Быстрота сходимости к точному решению при использовании МКЭ зависит от того, насколько удачно при выборе матриц жесткости выбраны функции перемещений. Приведем некоторые из условий, соблюдение которых при выборе функций перемещений обеспечивает сходимость решения по МКЭ к точному:

а) перемещения узловых перемещений, соответствующие смещениям конечного элемента как абсолютно жесткого тела, не должны вызывать изменений в его напряженно-деформированном состоянии;

б) уменьшение размера конечного элемента должно приводить к тому, чтобы его напряженно-деформированное состояние оказывалось постоянным;

в) функции перемещения должны быть такими, чтобы деформации по линиям (поверхности) контакта смежных элементов имели конечные значения. Последнее требует соблюдения определенных условий непрерывности перемещений между элементами. Например, при решении плоской задачи, в которой деформации определяются вершинами производными по координатам от перемещений, достаточно обеспечить непрерывность самих перемещений; при рассмотрении изгиба пластин и оболочек, когда деформации определяются через вторые производные функции прогиба, против и его первые производные должны удовлетворять условиям непрерывности при переходе через линии стыковки смежных элементов.

Соблюдение вышеперечисленных условий обеспечивает сходимость решения по МКЭ к точному решению теории упругости при увеличении числа конечных элементов, т. е. погрешность дискретизации асимптотически стремится к нулю (см. рис. VIII.7, кривую A).

Примечательно, что в МКЭ часто успешно используются матрицы жесткости, полученные на основе функций перемещений, которые не удовлетворяют условию непрерывности в). Это условие выполняется лишь в пределе при увеличении числа конечных элементов, если соблюдается условие постоянства деформаций б).

Можно констатировать, что использование для решения задач, описываемых уравнениями 2-го порядка, метода конечных элементов на базе интерполяционных полиномов степени p для описания поведе-

ния исковой функции внутри конечного элемента, приводит к относительной ошибке

$$\delta = \left(\frac{a}{l}\right)^{2(p-1)+1}, \quad (54.4)$$

где a — характерный размер конечного элемента; l — то же для конструкции.

В самом деле, пусть внутри элемента искомая функция интерполируется полиномом p -й степени. Тогда, согласно теореме Тейлора, решение МКЭ аппроксимирует истинное решение с относительной ошибкой $\left(\frac{a}{l}\right)^{2p+1}$. В задачах 2-го порядка выражение для энергии включает производные n -го порядка. Эти производные аппроксимируются уже с погрешностью $\left(\frac{a}{l}\right)^{2p+1-n}$, и если далее учесть, что в общем выражении энергии входят квадраты производных, то относительная ошибка в определении энергии, а следовательно, и самого решения будет равна $\left(\frac{a}{l}\right)^{2(p-1)+1}$.

Таким образом, путем достаточного увеличения размера элемента теоретически можно было бы получить любую требуемую точность решения.

Ошибки округления. Ошибки округления при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\} \quad (54.5)$$

возникают из-за округления исходных данных для матрицы $[\bar{K}]$ и вектора $\{\bar{P}\}$, а также из-за накопления погрешностей в ходе самого процесса решения.

При точном решении системы уравнений (54.5) число операций умножения равно $n^2/3$. И очень сложно оценить эффект влияния некого большого числа округлений.

Исследования по этому вопросу показали, что для получения решения системы (54.5) с точностью до t десятичных знаков по методу Гаусса необходимо элементов в матрицах $[\bar{K}]$ и $\{\bar{P}\}$ задавать с точностью до $t + r$ десятичных знаков, где

$$r = \lg n \quad (54.6)$$

(n — число уравнений системы).

Заметим, что указанная граница является верхней; она соответствует самому неблагоприятному случаю влияния округлений на результат. При статистическом накоплении ошибок в формуле (54.6) вместо n можно ввести \sqrt{n} [83, стр. 76]:

$$r = \lg \sqrt{n}. \quad (54.7)$$

Устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений. Одним из затруднений, которое может встретиться при решении системы алгебраических уравнений, является неустойчивость

решения, состоящая в том, что малые изменения элементов матрицы $[K]$ вызывают значительные изменения в величинах неизвестных. При этом матрица $[K]$ называется плохо обусловленной, а обратная матрица $[K]^{-1}$ — неустойчивой. Очень важно уметь оценить обусловленность матрицы.

В качестве меры обусловленности матрицы можно принять отношение ее основного определителя $|K|$ к наибольшему его элементу K_{\max}^* в степени, равной порядку определителя:

$$\frac{|K|}{|K_{\max}^*|^n} \quad (54.8)$$

Чем больше это отношение, тем лучше обусловлена матрица. Использование такого способа оценки обусловленности матрицы требует нахождения значения определителя системы, что в общем случае является весьма трудоемкой операцией.

Значительно удобнее оценку обусловленности матрицы $[K]$ приводить с помощью спектрального числа обусловленности $c_s(K)$, тем более, что непосредственно через $c_s(K)$ определяется относительная погрешность решения системы уравнений (54.5):

$$\delta = \frac{|\Delta y|}{|y|} = 10^{-\epsilon} c_s(K), \quad (54.9)$$

где ϵ — число десятичных значащих цифр, которыми оперирует вычислительная машина.

Спектральное число обусловленности $c_s(K)$ определяется отношением

$$c_s(K) = \frac{\lambda_{\max}^*}{\lambda_{\min}^*}, \quad (54.10)$$

здесь λ_{\min}^* и λ_{\max}^* — соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы $[K]$, определяемые из уравнения

$$|\bar{K} - \lambda E| = 0. \quad (54.11)$$

Ввиду известных трудностей определение собственных чисел для матриц высокого порядка, вместо точного определения $c_s(K)$ по формуле (54.10) часто ограничиваются определением предела изменения $c_s(K)$ [110]:

$$\frac{\lambda_{\max}^*}{\lambda_1 \lambda_{\max}^{*P}} \leq c_s(K) \leq \frac{\lambda_{\max}^* P}{\lambda_1 \lambda_{\min}^*}, \quad (54.12)$$

где λ_{\max}^* — максимальное собственное число матрицы жесткости по всем конечным элементам; λ_1 — наименьшее собственное число рассматриваемой конструкции; λ_{\max}^{*P} и λ_{\min}^{*P} — соответственно максимальное и минимальное собственные числа матриц масс по всем конечным элементам.

При использовании МКЭ к расчету конкретных задач все величины, входящие в (54.12), легко определяются.

При равномерной сетке элементов спектральное число обусловленности

$$c_s(\bar{K}) \approx c \left(\frac{n}{l} \right)^{-2m}, \quad (54.13)$$

где c — некоторое число, зависящее от степени интерполирующих функций внутри конечного элемента.

Из рассмотрения результатов (54.4) и (54.9) с учетом выражения (54.13) можно видеть, что задача более высокого порядка (например, изгиб пластины, где $m = 2$) является в большей степени от погрешностей округления, чем задачи более низкого порядка (плоская задача, $m = 1$).

Уменьшение размера конечного элемента, т. е. отношения a/l , приводит, с одной стороны, к уменьшению погрешности дискретизации (54.4), а с другой стороны, к возрастанию погрешностей округления (54.9). Поэтому при практических расчетах следует выбирать такой размер конечных элементов, который привел бы к допустимой погрешности округления. Получаемую при этом ошибку дискретизации можно уменьшить с помощью использования элементов с большим числом степеней свободы, для которых степень p интерполяционного полинома будет выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материал этой книги дает основание утверждать, что МКЭ, по существу, является универсальным методом анализа практических инженерных задач, для которых должно быть получено числовое решение.

Инженер сталкивается в основном с необходимостью расчета сложных конструкций, имеющих вырезы, усиления, сложные пересечения и т. п., для которых использование аналитических методов оказывается затруднительным.

Нельзя, конечно, рассматривать МКЭ как средство, пригодное для абсолютно всех случаев инженерной практики. Однако уже сейчас можно указать области науки, в которых использование МКЭ может дать решения до сегодняшнего времени не решенных задач. Укажем, к примеру, такие области, как газодинамика, биомеханика, теплопроводность, теплообмен, концентрации напряжений, теория пластичности и ползучести, механика грунтов. На-из сжатого объема книги некоторые задачи из перечисленных областей решены только в принципе, другие лишь только упомянуты.

Еще раз подчеркнем особую важность решения с помощью МКЭ объемных задач теории упругости и задач, зависящих от времени, решение которых до настоящего момента еще не получило нужной степени разработки.

Вместе с тем, следует указать, что в будущем вряд ли можно ожидать появления принципиально новых приемов в МКЭ для решения проблем механики твердых тел. В дальнейшем основные усилия следует направить на разработку программно-модульного обеспечения для ЭВМ. При этом существенную роль должны сыграть суперэлементы, так как объем памяти и скорость ЭВМ неограничены.

Разработка программ-модулей для суперэлементов (подструктур) различного уровня даст возможность, с одной стороны, формализовать все расчеты, а следовательно, ввести определенные стандарты и в эту сугубо творческую деятельность, а с другой стороны, определенным образом довести и на мировоззрение конструкторов и технологов.

Введение подструктур позволяет учитывать конструкции с естественной геометрией (использование краевых линейных базисных конечных элементов), а также упростить порядок и снизить объем информации, вводимой в ЭВМ. Последнее является в настоящее время решающим в процессе внедрения МКЭ в практику научно-исследовательских институтов, конструкторских бюро и проектных организаций.

Наконец, следует направить усилия математиков и инженеров на разработку ряда вычислительных процедур, от которых зависит возможность эффективного использования МКЭ. И в первую очередь следует указать на проблему собственных значений для ленточных симметричных матриц высокого порядка, решение системы алгебраических уравнений и обращение матриц для того же класса задач. Существенным ограничением для практической реализации МКЭ может иногда оказаться (например, при объемных элементах) процедура вычисления МКЭ для элемента. Тогда целесообразно построить программный модуль для реализации процедуры численного интегрирования по объему конечного элемента. При этом следует отказаться от прямого получения МКЭ в явном виде и вычислять ее коэффициенты внутри ЭВМ, задаваясь той или иной функцией для перемещений или напряжений.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акаши Ф. А., Мираки Дж. Е. Решение алгебраической задачи минимизации количества элементов. — «Ракетная техника и космонавтика», 1966, № 10.
2. Акаши Ф. А., Утсу С. Алгоритмы для оптимизационного перебора задач для минимизации количества элементов в матрицах жесткости. — «Ракетная техника и космонавтика», 1968, № 4.
3. Александров А. В., Шапошников Н. Н. Об использовании дискретной модели при расчете плановых систем управления ЗВМ. — «Труды МИИТ», 1966, вып. 194.
4. Аргиров Дж. Матричный анализ массы и больших переменных в трехмерных узлах систем. — «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 1.
5. Аргиров Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М., Стройиздат, 1968.
6. Арнес Х., Айзексон Дж., Пиффо Э. Метод дискретного элемента для численного расчета конструкций, параметрически описываемых шарнирами. «Механика. Перевод сб. работ. иностр. стран», М., «Мир», 1971, № 1.
7. Барнштейн С. А. Основы линеаризации сооружений. М., Наркомстройиздат, 1940.
8. Будякский Н. М. О концентрации напряжений в пластине, обладающей анизотропными свойствами. — «Судостроение», 1948, № 4.
9. Воевакко В. С. Прямой метод конечных элементов в параметрических и расчете оболочек, стенок, корабельных и массовых систем. — «Труды ЦНИИСК», 1970, вып. 13.
10. Владимилья Ю. К. Получение уравнений метода конечных элементов методом вариационно-дискретного метода. — «Труды Ташк. политех. ин-та», 1969, стр. А., № 278.
11. Владимилья Ю. К., Хархурин Н. Я. Расчет упругих систем по методу конечных элементов. М., Гипротех, 1969, вып. 1—108.
12. Власов В. С. Тонкостенные упругие стержни. М., изд-во АН СССР, 1963.
13. Галлахер Р. Вывод соотношений для матриц жесткости элементов, основанный на выборе закона распределения напряжений. — «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 1.
14. Гербушов В. П., Стрельбицкий А. И. Теория раки тонкостенной стержней. М., Гостехиздат, 1948.
15. Гордон Л. А. и др. Расчет и экспериментальные исследования пластины средней толщины (МКЭ). — «Изв. ВНИИ гидротех. им. Б. Е. Введенского», 1971, т. 93.
16. Гужа Б. Е. и др. Обобщенные параметрические уравнения и методы конечных элементов. — «Ракетная техника и космонавтика», 1969, № 7.
17. Дженс Р. Обобщение принципа метода жесткости анализа конструкций. — «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 3.
18. Длугош И. Н. Расчетные методы метода сеток. — «Приватная механика», 1956, т. 2, вып. 3.
19. Ефимов Ю. М., Савинов Л. Б., Трояцкий А. П. Реализация метода конечных элементов на ЭВМ для решения задачи теории упругости. — «Изв. ВНИИ гидротех. им. Б. Е. Введенского», 1970, т. 93.
20. Зиневич О. К. Метод конечных элементов от излучения в оболочку. — «Механика. Перевод сб. работ. иностр. стран», М., «Мир», 1970, № 6.
21. Ильяшин А. А. Пластичность. М., изд-во АН СССР, 1963.
22. Коупер Г. Р., Линдберг Г. М., Олсон М. Д. Кольчатый элемент треугольной формы для расчета головок оболочки. — «Ракетная техника и космонавтика», 1970, № 8.
23. Клоф Р. Метод конечных элементов в решении задачи теории упругости. — В сб.: «Расчет строительных конструкций с применением ЭВМ», Под ред. А. Ф. Смирнова, М., Стройиздат, 1967.
24. Клементс Ю. Э. Алгоритмы статического анализа упругих стержневых систем произвольного вида. Автореферат канд. дисс. ЛПИИКТ, 1968.
25. Козляков В. В. О расчете динамичеи прерывной с релейным демп. — «Труды ЛПИ», 1965, вып. 18.
26. Козляков В. В., Постнов В. А., Хархурин Н. Я. Применение метода конечных элементов для расчета прочности стержневых конструкций. — «Судостроение», 1972, № 6.
27. Козляков В. В., Хархурин Н. Я., Шимонин Е. А. Исследование совместногогибко-сдвига и планового действия мезоэлементов конечных элементов. — «Труды ЛПИ», 1971, вып. 75.
28. Корнев В. Г. О методе конечных элементов для решения задач упругости пластин. — «Строительная механика сооружений». Сб. вып. 100-летие со дня рожд. В. Г. Галактико, Л., изд-во ЛПИ, 1971.
29. Корнев В. И. Совместно деформированные пластины и оболочки из анизотропных материалов. М., «Машиностроение», 1965.
30. Короткий И. И., Локинов А. Э., Свиридов Л. Игиб и условия жесткости и круглая цилиндрическая оболочка. Л., Судостроение, 1965.
31. Короткий И. И., Постнов В. А., Свиридов Л. Строительная механика корабля и теории упругости. Ч. 1, Л., «Судостроение», 1968.
32. Круда К. Анализ гибки и круглыми тонкостенными стержнями методом конечных элементов. — «Ракетная техника и космонавтика», 1967, № 5.
33. Курдюмов А. А. Прочность корабля. Л., «Судостроение», 1966.
34. Курдюмов А. А., Постнов В. А. Применение метода Гаусса для определения и расчета корабельных жестких элементов конструкций систем. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1961, вып. 40.
35. Халпина Д. Критерий выбора матриц жесткости. — «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 10.

36. Казанка Д., Гудин Н. Сравнение и оценка матриц жесткости. — «Работы техники и космонавтики», 1966, № 12.
37. Ивкс-Корняк С. Решение плоской задачи теории упругости. — В сб.: «Расчет строительных конструкций с применением ЭВМ». Под ред. А. Ф. Смирнова, М., Стройиздат, 1967.
38. Маржол П. Сравнительное исследование численных методов упруго-пластического расчета. — «Работы техники и космонавтики», 1968, № 1.
39. Масленников А. М. Расчет обечайки плит методом конечных элементов. — «Труды ЛКИ», 1968, № 57.
40. Масленников А. М. Матрица жесткости и матрица масс корабельного элемента. — «Новости вузов, сир. «Строительство и архитектура», 1971, № 6.
41. Мельмед Э. Ш. Получение матриц жесткости конечных элементов для анализа плоских пространственных систем. — «Труды Хабаровского ин-та инж. м.-д. транспорта», 1968, вып. 34.
42. Исламов Э. Ш. Расчет тонких оболочек с использованием конечного элемента отсеченной арки. — «Труды МИИТ», 1969, вып. 342.
43. Медови Р. Основы получения матриц для прямого метода жесткости. — «Работы техники и космонавтики», 1963, № 7.
44. Назарова Д. Р., Пала Т. К. Х., Уайнер Р. Расчет устойчивости оболочек вращения методом дискретных элементов. — «Работы техники и космонавтики», 1968, № 2.
45. Мароз Л. К. Расчет пластинки по Э-методу. «Труды Тамо, подлинн. изданий», 1967, сер. А, № 237.
46. Мароз Л. К., Хархурин И. Я. Расчет стержневых систем по Э-методу. М., Гизгостех, 1966, вып. 1—44.
47. Новожилев В. В. Теория оболочек. Л., «Судостроение», 1962.
48. Палкин П. Ф. Теория упругости. Мурманск, Л., 1936.
49. Поредактуер А. В. О применении теории графов к векторным задачам строительной механики. — «Строительная механика и расчет сооружений», 1965, № 3.
50. Перси Д. Дискретный четырехугольный элемент при расчете упруго-пластических плоских конструкций. — «Работы техники и космонавтики», 1967, № 2.
51. Перси Д. Х. и др. Прямой метод конечного элемента и алгоритм упругому плоскому оболочке вращения. — «Работы техники и космонавтики», 1965, № 11.
52. Пили Т. Х. Х. Получение матриц жесткости элементов. — «Работы техники и космонавтики», 1966, № 3.
53. Постнов В. А. О присоединении плоской шарообразной балки, лежащей на сплошном упругом основании с учетом влияния сдвига в стали. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1966, вып. 63.
54. Постнов В. А. Изгиб двояковогнутого перегиба как шаровой пластины. — «Труды ЛКИ», 1966, вып. 43.
55. Постнов В. А. Устойчивость пластины в оболочке в упруго-пластической области. — «Труды ЛКИ», 1966, вып. 33.
56. Постнов В. А., Кельман Б. Е., Черенков Н. И. Решения осесимметричной задачи теории упругости в упруго-пластической области. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1971, вып. 161.
57. Постнов В. А., Корнеев В. С., Слезинин Н. Г. Расчет тонких оболочек вращения произвольной формы методом конечных элементов. — В сб.: «Строительная механика корабля», «Судостроение», Л., 1970, вып. 149.
58. Постнов В. А., Слезинин Н. Г. Учет деформаций пластичного слоя при расчете оболочек вращения с помощью метода конечных элементов. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1971, вып. 161.
59. Постнов В. А., Чарушков П. И. Расчет осесимметричной деформации толстых оболочек вращения с помощью метода конечных элементов. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1970, вып. 149.
60. Постнов В. А., Хархурин И. Я. Использование метода конечных элементов в строительной механике корабля. — В сб.: «Строительная механика корабля», Л., «Судостроение», 1971, вып. 154.
61. Постнов В. А., Хархурин И. Я., Хегазы С. Х. Использование метода конечных элементов для расчета судовых аппаратов. — «Судостроение», 1971, № 1.
62. Резякин Р. А. Методы решения задач строительной механики на компьютере. Хабаровск издатель. М., Стройиздат, 1964.
63. Резякин Р. А. Представление сплошного упругого изогнутого тела в виде шарообразно-сферической системы. — Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности. ЦНИИПЭС, М., Гостройиздат, 1966.
64. Рикунд В. П. Пятиугольный вопрос расчета шарообразных балок. — «Труды ЛКИ», 1962, вып. 38.
65. Розин Л. А. Некоторые вопросы расчета и дискретизации утонченной теории оболочек. — В сб.: «Исследования по упругости и пластичности», Л., изд-во Ленинградского университета, 1966.
66. Розин Л. А. О способ метода конечных элементов с помощью Губкина-Галеркина и Рунге. — «Строительная механика сооружений». Сб., посл. 100-летия со дня рожд. В. Г. Галеркина, Л., изд-во ЛПИ, 1971.
67. Розин Л. А. Метод конечных элементов. Расчет гидротехнических сооружений по ЭВМ. Л., «Энергия», 1971.
68. Розин Л. А., Гордон Л. А. Метод конечных элементов в теории пластичности и оболочек. — Изв. ВНИИ гидротехники им. Б. Е. Введенского, Л., 1971, т. 96.
69. Санков Е. И., Горичев А. П. Решение двумерных плоских задач методом конечного элемента. — Изв. зап. Горьк. ун-та, сер. «Математика», 1970, вып. 108.
70. Симоню Г., Авети Д. Исследования плоских оболочек методом конечных элементов. — В сб.: «Исследования в области», М., Стройиздат, 1969, т. 1.
71. Смирнов М. Методы расчета плоских статических гидротехнических систем (Сб. статей). Пер. с англ. Под ред. проф. А. П. Филина, Л., «Судостроение», 1961.
72. Соколов П. М. Статическое взаимодействие систем. «Наука и жизнь», Киев, 1968.
73. Соколов П. М. Применение топологии в расчетах конструкций. — В сб.: «Расчет строительных конструкций с применением ЭВМ». Под ред. А. Ф. Смирнова, М., Стройиздат, 1967.
74. Тевкин С. С. Новейший расчет тонких пластин методом решеток. — «Работы техники и космонавтики», 1967, № 10.
75. Тохт Л. Точное решение изогнутой задачи методом дискретных элементов. — «Работы техники и космонавтики», 1969, № 1.
76. Трояцкий А. П. Определение напряженного состояния плоски на жесткой материале методом конечных элементов. — Изв. ВНИИ гидротехники им. Б. Е. Введенского, Л., 1971, вып. 100.

77. Уайт Р. Н. Оптимальные методы решения уравнений в конечных элементах. — В сб.: «Расчет пространственных конструкций с применением ЭВМ». Под ред. А. Ф. Савина, М., Стройиздат, 1967.
78. Уайт Р. В. Сопротивление скручу и прочность стыков. М., Гостехиздат, 1960.
79. Уилкинсон Д. Проблемы собственных значений. М., изд-во ИЛ, 1970.
80. Федоров А. С. Исследование диаграмм деформирования металла при девиации напряжений осевыми. Автореферат канд. дисс. ЛКИ, 1960.
81. Феллерс С. Д., Брайант Ф. Г. Формулы для метода расчета конструкций с помощью тензочувствительной бумаги. — В сб.: «Расчет пространственных конструкций с применением ЭВМ». Под ред. А. Ф. Савина, М., Стройиздат, 1967.
82. Флави А. П. Расчет пространственных стержневых конструкций типа системы перекрестных стержней и его применение к оболочкам для космопланов ЗВМ. — Труды ЛНИИОТ, 1962, вып. 196.
83. Филан А. П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы калкуляций СВМ. Л., Стройиздат, 1966.
84. Филан А. П. Расчет оболочек на основе дискретной расчетной схемы (МКЭ) с применением ЭВМ. — В сб.: «Большоразмерные оболочки», М., Стройиздат, 1969, т. 1.
85. Форсайт Дж., Моллер К. Методы решения алгебраических систем уравнений. М., изд-во ИЛ, 1969.
86. Хархурин И. Я. О возможности развития Э-метода с применением 2-мерных. — Труды Талл. политех. ин-та, 1967, сер. А, № 257.
87. Хархурин И. Я. Расчет стержневых систем на прочность, устойчивость и колебания с применением ЭВМ. Канд. диссертация. Таллин, 1967.
88. Хархурин И. Я., Иляков А. А. Прямые методы конечных элементов в анализе конструкций, состоящих из тонкостенных элементов. — Зап. Ленингр. областного политех. ин-та, 1972, к. 174, к. 1, вып. 4.
89. Хархурин И. Я., Русская А. З. Расчет перекрестных систем конечных элементов [Технический отчет]. Изд-во ЦНИИ им. академика А. Н. Крылова, 1973.
90. Хрекицкий А., Ткачки С. Расчет гидроэлектрических оболочек методом конечных элементов. — В сб.: «Большоразмерные оболочки», М., Стройиздат, 1969, т. 1.
91. Цивьякин Е. С. Матричный метод расчета пространственных рам из тонкостенных стержней. — Прикладная механика, Киев, 1968, т. V, вып. 4.
92. Швабманников Н. Н. Расчет пластин на гибкость по методу конечных элементов. — Труды МННТ, 1968, вып. 203.
93. Швабманников Н. Н. К расчету пластин на устойчивость и колебания по методу конечных элементов. — Труды МННТ, 1970, вып. 311.
94. Aaråsder P. O. The Application of the Superposition Method in Analysis and Design of Ship Structures and Machinery Components. (National Symp. on computerized Structural Analysis and Design, Norway, March, 1972).
95. Aaråsder P. O., Røsten E. M. O. The Finite Element Method using Superposition. The SESAM-69 System. (Conf. on Modern Techniques of Ship Struct. Analysis and Design, University of California, Berkeley, September, 1970).
96. Arantelo O. J. E. R. The theoretical Foundations of the Finite Element Method. — Intern. J. of Solids and Structures, 1968, vol. 4, N 10.
97. Archer J. S. Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems. — J. Struct. Div. Proc. ASCE, 1962, vol. 89, N 4.
98. Bessit G. C. A General Formula for Stiffness Matrices of Structural Elements. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1962, vol. 3, N 8.
99. Carlson W. G., Newton R. E. Bending Analysis Using a Fully Compatible Finite Element. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1969, vol. 7, N 3.
100. Clough R. W. Comparison of Three Dimensional Finite Elements. (Proc. of Application of Finite Element Methods in Civil Eng., November, 1969. Van. derbilt Univ. in Nashville, Tennessee).
101. Clough R. W. The Finite Element Method in Structural Mechanics. (Stress Analysis, N. Y., John Wiley, 1966).
102. Clough R. W., Johnson C. P. A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells. — Intern. J. of Solids Structures, 1968, vol. 4, N 1.
103. Clough R. W., Rashid Y. R. Finite Element Analysis of Anisotropic Solids. — J. Engng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1968, vol. 91, N 1.
104. Clough R. W., Toucher L. L. Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending. (Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Ohio, 1968).
105. Dowe D. I. A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems. — J. Mech. Eng. Sci., 1965, vol. 7, N 1.
106. Donke P. H. The Matrix Solution of Certain Nonlinear Problems in Structural Analysis. — J. Aeron. Sci., 1959, vol. 33.
107. De Veubeke B. F. A Conforming Finite Element for Plate Bending. — Intern. J. of Solids and Structures, 1968, vol. 4, N 1.
108. Finite Element Methods in Stress Analysis. Edited by I. Holland and K. Hell. The Technical University of Norway, Trondheim, 1969.
109. Fraays De Veubeke B. F. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. (Stress Analysis, N. Y., John Wiley, 1966).
110. Fried I. The Condition of Finite Element Stiffness Matrices Generated from Nonuniform Meshes. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1972, vol. 10, N 2.
111. Fried I. Finite Element analysis of time dependent phenomena. Int. Report. Stuttgart University, 1969.
112. Gallagher R. H. Techniques for the Derivation of Element Stiffness Matrices. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1963, vol. 1, N 6.
113. Gallagher R. H., Padlog J. Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1962, vol. 1, N 6.
114. Grattan P. E., Strome D. R. Analysis of Anisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Method. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1963, vol. 1, N 1.
115. Gujan R. J. Distributed Mass Matrix for Plate Element bending. — J. Am. Inst. Aeron. and Astron., 1963, vol. 3, N 2.
116. Gurtin M. E. Variational principles for linear initial - value problems. — Quart. Appl. Maths., 1954, vol. 12, N 3.
117. Herrmann L. R. A Bending Analysis for Plates. (Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Ohio, 1965).
118. Hylarides S. Finite Element Technique in Ship Vibration Analysis. — Intern. Shipbuilding Progress, 1966, vol. 35, N 108.
119. Irigoien B. A Conforming Quartic Triangular Element for Plate bending. — Int. J. for Num. Meth. in Eng., 1969, vol. 1, N 1-2.
120. Jennings A. Natural Vibrations of a Free Structure. — (Aircraft Eng., 1962, N 34).
121. Jones R. E. A Generalization of the Direct Stiffness Method of Structural Analysis. — J. Am. Inst. Aeron., 1964, vol. 2, N 5.

129. Johnson Jr, M. W., Mc Lay R. W. Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity. — *J. Trans. ASME*, 1968, vol. 90, N 2.
130. Jones R. E., Strong D. R. Direct Stiffness Method Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements. — *J. Am. Inst. Aeron. and Astron.*, 1969, vol. 4, N 9.
131. Kayser K. K., Hartz B. I. Stability of Plates Using the Finite Element Method. — *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 1966, vol. 92, N 4.
132. Kármán J. Criteria for Selecting Stiffness Matrices. — *J. Am. Inst. Aeron. and Astron.*, 1965, vol. 3, N 10.
133. Klein S., Sylvester R. I. The Linear Elastic Dynamic Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method. *Proc. Conf. Matrix Struct. Mech.*, Ohio, 1965.
134. Livesley R. K. Matrix Methods of Structural Analysis. N. Y., *McGraw-Hill* Press, 1964.
135. Marcal P. V., King I. P. Elastic-Plastic Analysis of Two-Dimensional Stress Systems by the Finite Element Method. — *Intern. J. Mech. Sci.*, 1967, vol. 9, N 3.
136. Martin H. C. Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis. N. Y., *McGraw-Hill* Book Company, 1966.
137. Mc Cormick G. W. Plane Stress Analysis. — *J. Struct. Div. ASCE*, 1963, vol. 89.
138. Melosh R. J. A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending. — *J. Aerospace Sci.*, 1961, vol. 28.
139. Melosh R. J. Matrix Methods of Structural Analysis. — *J. Aerospace Sci.*, 1962, vol. 29.
140. Melosh R. J. A Flat Triangular Shell Element Stiffness Matrix. *Proc. Conf. Matrix Struct. Mech.*, Ohio, 1965.
141. Moo J. Finite Element Techniques in Ship Structures Design. *Proc. ISD/ISSC Symp. on Finite Element Techniques*, University of Stuttgart, Germany, June, 1969.
142. Paulling J. R. Applications of Finite Element Computations to some Ship Structural Problems. *Proc. ISD/ISSC Symp. on Finite Element Techniques*, University of Stuttgart, Germany, June, 1969.
143. Pian T. H. H. Derivation of Element Stiffness. — *J. Am. Inst. Aeron. and Astron.*, 1964, vol. 2, N 2.
144. Page G. G. A Discrete Element Method for the Analysis of Plane Elastic-Plastic Stress Problems. — *Aerospace Quart.*, 1964, vol. 17, N 1.
145. Pagou E. P., Pencil J. Finite Element Solution for Axisymmetric Shells. — *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASME*, 1964, vol. 90.
146. Przemieniecki J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. N. Y., *McGraw-Hill* Book Company, 1968.
147. Proceedings of the ISD/ISSC Symp. on Finite Element Techniques. University of Stuttgart, Germany, June, 1969.
148. Proceedings of the International Ship Structural Congress in Tokyo, Japan, September, 1970.
149. Ramsdell B. Convergence and Numerical Accuracy with Special Reference to Plate Bending. *Finite Element Methods in Stress Analysis*, Edited by J. Holland and K. Bell, Norway, 1970.
150. Rashid Y. R. Analysis of Axisymmetric Composite Structures by the Finite Element Method. — *Nuclear Engineering and Design*, 1966, vol. 3, N 163.
151. Rosen E. M. Q. Impact of Finite Element Techniques on Practical Design of Ship Structures. *Proc. ISD/ISSC Symp. on Finite Element Techniques*, University of Stuttgart, Germany, 1969.
152. Rosen E. M. Q. Transverse Strength of Tankers — Finite Element Applications. — *Europ. Shipbuild.*, 1968, vol. 17, N 8, 4.
153. Stryker H. A. Development of Explicit Stiffness and Mass Matrices for a Triangular Plate Element. — *Intern. J. of Solids and Struct.*, 1969, vol. 5, N 3.
154. Tong P. In. Exact Solution of Certain Problems by Finite Element Method. — *J. Am. Inst. Aeron. and Astron.*, 1969, vol. 7, N 1.
155. Tong P. In, Pian T. H. H. The convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems. — *Intern. J. of Solids and Struct.*, 1967, vol. 3, N 5.
156. Turner H. I., Gough R. W., Martin H. C., Toppl. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. — *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23.
157. Wempner G. New Concepts for Finite Elements of Shells. — *Z. Angew. Math. and Mech.*, 1968, 48, N 8.
158. Wilson E. L. Structural Analysis of Axisymmetric Solids. — *J. Am. Inst. Aeron. and Astron.*, 1965, vol. 3, N 12.
159. Wilson E. L., Clough R. W. Dynamic response by step matrix Analysis. *Symp. on Use of Computers in Civil Eng.*, Lisbon, 1969.
160. Wilson E. L., Nickell H. E. Application of the Finite Element Method to heat Conduction Analysis. — *Nuclear Engineering and Design*, 1966, N 4.
161. Zienkiewicz O. C. Finite Element Procedures in the Solution of Plate and Shell Problems. — *Stress Analysis*, N. Y., *John Wiley*, 1968.
162. Zienkiewicz O. C., Cheung Y.-K. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. N. Y., *McGraw-Hill* Book Company, 1967.
163. Zienkiewicz O. C., Newton R. E. Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a compressible Fluid. *Proc. of the ISD/ISSC Symp. on Finite Element Techniques*, University of Stuttgart, Germany, June, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
I.	
Основные элементы метода конечных элементов	
1. Основные сведения о методах и методах окрестности	7
2. Принципы общей конструкции	11
3. Матрица жесткости в единичности	15
4. Метод перемещений	24
5. Метод сил	30
6. Применение объектов и элементов сетки, а также начальных деформаций и неупругих условий конечных элементов	38
7. Учет геометрической и физической нелинейности при расчете конструкций	39
8. Общая схема использования метода конечных элементов в расчете конструкций	44
9. Связь метода конечных элементов с методом Рунге	46
II.	
Расчет стержней и стержневых систем	
10. Матрица жесткости трехмерного элемента стержня	53
11. Расчет судовых веревчат при стержневой идеализации	72
12. Расчет объемного судового блока по стержневой идеализации	76
13. Уруго-пластический изгиб стержневых систем	80
14. Учет геометрической нелинейности при расчете стержневых систем	86
15. Изгиб в кручение конструкций, основанных на тонкостенных элементах	89
16. Колебания стержневых систем в изгибе балки по упругим условиям	97
17. Устойчивость стержневых систем	104
III.	
Использование ЭВМ в методе конечных элементов	
18. Некоторые основные проблемы, связанные с решением систем задач пространственной механики	107
19. Универсальный алгоритм метода конечных элементов. Программа для ЭВМ «Манс-22». Исходная информация и формы ее задания	110

20. Использование матрицы жесткости для автоматического формирования системы уравнений в проблеме минимума энергии	124
21. Автоматическое формирование и запись матрицы жесткости трехмерных элементов системы уравнений	130
22. Автоматическое решение задачи минимума энергии	138
23. Решение систем линейных алгебраических уравнений жесткой структуры	144
24. Анализ сходимости и итерационное уточнение решения системы уравнений	155

IV.

Плоская задача теории упругости

25. Матрица жесткости для треугольного плоского элемента	159
26. Матрица жесткости для прямоугольного плоского элемента	168
27. Использование принципа виртуальной работы элементов четырехугольного состояния для получения матрицы жесткости	180
28. Контактная и надрезанная в плоской пластине контактная задача с вырезом	183
29. Расчет аэродинамического балла. Выбор присоединяемого элемента	186
30. Изгиб судовых веревчат по второму закону. Оценка погрешности структурных расчетных схем	189
31. Плоская задача в упруго-пластической области	199
32. Накрученные и свободные деформации пластин в слое плоскости	203

V.

Объемная задача теории упругости

33. Матрица жесткости для тетраэдра	208
34. Матрица жесткости для объемного элемента, состоящего из двух узлов	209
35. Осесимметричное напряженное состояние тела вращения	218
36. Решение осесимметричной задачи теории упругости для упруго-пластической области	228
37. Колебания тела	235

VI.

Изгиб, устойчивость и колебания пластин

38. Прямой и изогнутый элемент пластины при изгибе	237
39. Устойчивость пластины. Матрица устойчивости	238
40. Поверхность изгиба пластины. Матрица масс	267
41. Определение собственных чисел в задаче устойчивости и колебаний при использовании МКЭ	272
42. Изгиб пластины средней толщиной. Выявление матрицы жесткости трехмерного элемента	274

VII.

Расчет оболочек произвольных очертаний

43. Основные принципы использования МКЭ архаистически в оболочках вращения	278
44. Матрица жесткости конического элемента оболочки вращения при асимметричной деформации	288
	291

§ 45. Расчет оболочек вращения средней толщины при несимметричном азимутальном состоянии	290
§ 46. Плоский треугольный элемент в местной системе координат для расчета оболочек произвольных очертаний	294
§ 47. Матрица жесткости плоского треугольного элемента в общей системе координат для расчета произвольных оболочек	298
§ 48. Некоторые дополнительные замечания по расчету оболочек произвольной формы при использовании треугольного плоского элемента	302
§ 49. Матрица жесткости для прямоугольного плоского элемента оболочки	304

VII.

Метод конечных элементов при решении задач теплопередачи, динамики и гидромеханики. Использование суперэлементов. Вопросы сходимости и точности

§ 50. Использование конечных-элементной процедуры для решения задачи теплопроводности	308
§ 51. Использование МКЭ в задачах Даламбера	311
§ 52. Использование МКЭ в задачах гидродинамики и гидротрубопроводности	315
§ 53. Расчет конструкций при скалярном суперэлементе	320
§ 54. Вопросы сходимости и точности МКЭ	324
Заключение	330
Указатель литературы	332

БАЛЕРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
ПОСТНОВ
ИДЕЯ ПЛОСКОГО
КАРКАСНОГО
МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ
в расчетах
судовых
конструкций

Автор: *Б. А. Балерий*
Технический редактор: *А. П. Старина*
Корректоры: *Е. П. Сажина, Л. Г. Давыдова*
Свердловское книжное издательство

Сдано в печать 1/VIII 1973 г. Подписано к печати 5/IV 1973 г.
9-2187. Формат бумаги 148/216. Бумага для слепков сорта
Фил. № 2. ЦД 187. Ч. весовой, 74-ая. А. 25. 1. Тираж 340 экз.
Цена 24 коп. Цена 1 экз. 35 коп. Изд. № 3703-73.
Издательство «Судостроение», 100065, Ленинград, ул. Голоса 6.

Дизайнерская мастерская № 4 Состроительского
участка Государственного комитета Министров СССР по делам
высокой школы, полиграфии и книжной торговли
100114, Ленинград, СМ, пр. Урицкого, 35

Постнов В. А., Хархурим Н. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1974.

344 с.

В книге изложены основы метода конечных элементов применительно к расчету стержневых, пластинчатых и оболочечных конструкций.

Приводятся в явном виде матрицы жесткости, масс и упругости для типовых одно-, двух и трехмерных конечных элементов, основы которых используются во в расчетах прочности, деформации и устойчивости произвольных упругих систем. Наилучшим образом реализован ДМЭ в расчетах по МКЭ. Приводятся алгоритмы на языке «Алгол-60» для составления и решения систем алгебраических уравнений методом Гаусса, методами Ньютона-Рафсона, автоматизации построения матриц жесткости и т. д. Даны ссылки на вторичные методы в программе «Селена» по МКЭ физическая и геометрическая нелинейная задачи, а также методы теплопередачи, температурного, гидродинамичекого и др. Содержатся большие численные примеры примеров.

П $\frac{24804-038}{018(01)-74}$ 7-74

629.12.018.001.74