У. СМАРТ

Небесная механика

CELESTIAL MECHANICS

by

W. M. SMART, M. A., D. Sc.
Regius Professor of Astronomy
in the University of Glasgow

LONGMANS, GREEN AND CO
LONDON — NEW YORK — TORONTO

1953

У. М. СМАРТ

Небесная механика

Перевод с английского Е. П. Аксенова

Под редакцией А. А. Орлова

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“ • МОСКВА 1965

УДК 521.1 (07)

После запуска искусственных спутников Земли резко расширился круг лиц, интересующихся небесной механикой — наукой, изучающей законы движения небесных тел.

Книга известного английского астронома У. Смарта представляет собой современный курс небесной механики, написанный автором на основе курса лекций, читанных им в Кембриджском университете.

Первые четыре главы книги посвящены общим интегралам движения и разложениям в ряды. В гл. 5 рассматриваются уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов, в гл. 6 — различные возмущения, в гл. 7 — разложения возмущающей функции. Гл. 8—11 посвящены каноническим переменным и каноническим уравнениям. В гл. 12 излагается общая теория Луны, в последующих главах рассмотрены более тонкие вопросы теории Луны и больших планет. Заключительная глава посвящена теории нутации и прецессии.

Книга рассчитана на студентов физико-математических и механико-математических факультетов и педвузов, а также на инженерно-технических работников, желающих ознакомиться с небесной механикой.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики.

Предисловие к русскому изданию

„Небесная механика" Смарта вышла на английском языке в 1953 г., т. е. еще до запуска первых искусственных спутников Земли и космических ракет. Поэтому не удивительно, что автор начал свое предисловие к ней словами: «Эта книга была задумана как вводный курс к предмету, которым в последние годы несколько пренебрегают».

Нельзя полностью согласиться с автором предлагаемой книги в оценке отношения ученых к небесной механике в начале 50-х годов нынешнего столетия. Однако в известной степени он прав. В период времени, когда писалась эта книга, в развитии небесной механики наблюдалось некоторое затишье. Объясняется это в первую очередь тем, что тогда перед небесной механикой не стояло задач, требовавших безотлагательного решения. Задачи о движении естественных небесных тел, представляющих наибольший интерес для астрономии (движение больших планет и Луны), к тому времени уже были решены с достаточной степенью точности, а задачи, решение которых необходимо для развития космических полетов, еще не были достаточно четко определены и сформулированы.

Однако вскоре после выхода в свет „Небесной механики" Смарта положение дел резко изменилось. В связи с созданием искусственных спутников Земли, запуском ракет к Луне, Венере, Марсу перед небесной механикой возник целый ряд новых разнообразных задач. Часть этих задач по своему характеру сходна с задачами механики естественных небесных тел (например, задача о движении искусственных спутников Земли). Однако возникли и принципиально новые задачи, которые не рассматривались в классической небесной механике (например, задача о выборе траекторий межпланетных перелетов и др.).

Развитие учения о космических полетах привело к возникновению нового раздела механики, который в настоящее время получил наименование „астродинамика". Этот раздел науки занимается самыми общими вопросами динамики искусственных небесных тел, включая их поступательное движение, вращательное движение, исследование влияния гравитационных сил, сил сопротивления окружающей среды, реактивных сил и т. д.

Очевидно, что небесная механика, в классическом понимании этого термина как учения о движении небесных тел под действием их взаимного тяготения, играет очень важную роль в астродинамике. Поэтому начиная со второй половины 50-х годов небесная механика вышла за рамки интересов астрономов и стала привлекать к себе все большее и большее внимание широких кругов научных и инженерно-технических работников, соприкасающихся с вопросами проектирования и движения искусственных небесных тел.

Это, с одной стороны, дало новый толчок развитию небесной механики, а с другой — вызвало резкое повышение интереса ученых-неастрономов к изучению достижений классической небесной механики.

Классическая небесная механика представляет для астродинамики двоякий интерес. Прежде всего для исследования движения искусственных небесных тел необходимо знать в любой момент времени точные положения главнейших естественных небесных тел солнечной системы. Но задача о движении планет солнечной системы и Луны решена классической небесной механикой, и астродинамика может пользоваться этим решением. Кроме того, богатство и разнообразие методов решения задач о движении естественных небесных тел, разработанных астрономами в течение нескольких столетий, позволяет при исследовании новых задач, поставленных астродинамикой, идти изведанными путями, выбирая для каждого конкретного случая тот или иной готовый метод.

„Небесная механика" Смарта является весьма полезным пособием для изучения практических методов классической небесной механики. При своем сравнительно небольшом объеме она содержит очень значительный материал, изложенный предельно кратко. В то же время стиль изложения этой книги является вполне доступным не только для студентов и аспирантов, специализирующихся в области небесной механики, но и для лиц, владеющих основами теоретической механики, но не являющихся специалистами-астрономами.

Как мы уже говорили, материал, содержащийся в книге, весьма обширен. Добавим к этому, что в ней изложен ряд важнейших вопросов, не освещавшихся до настоящего времени в учебниках и учебных пособиях по небесной механике на русском языке. Сюда относится, например, систематическое изложение теории движения Луны Делонэ, вопрос о вековом ускорении Луны, теория прецессии и нутации и пр. Очень поучительной является теория открытия Нептуна. В предлагаемой книге обстоятельно изложены теоретические предпосылки и практические приемы, которыми пользовались Леверье и Адамс в своих предвычислениях положения этой, гипотетической в то время, планеты.

В заключение можно сказать, что издание „Небесной механики" Смарта на русском языке является делом весьма полезным. Эта книга, безусловно, найдет широкий круг читателей.

При подготовке к русскому изданию в книге Смарта не делалось никаких изменений. Исправлялись лишь очевидные опечатки.

А. Орлов

Предисловие

Эта книга была задумана как вводный курс к предмету, которым в последние годы несколько пренебрегают. Почти вся первая половина книги посвящена основным астрономическим и динамическим принципам, а вторая половина — применению этих принципов к основным проблемам небесной механики, имеющим важное значение в современной астрономии или представляющим самостоятельный интерес. По своему содержанию книга почти совпадает с курсами лекций, читаемых автором в последние годы в Глазго, а еще ранее в Кембридже.

Вопрос обозначений вызывает известные трудности, которые уходят своими корнями в обширные мемуары прошлого, в каждом из которых обычно используется своя система обозначений. Однако я пытался сохранить, насколько это возможно, однородность в обозначениях. Эта книга является по своему характеру в основном теоретической и не претендует ни на изложение наблюдательной астрономии, ни на описание новых вычислительных методов, так как каждый из этих разделов представляет собой самостоятельную дисциплину.

Первые четыре главы книги посвящены общим уравнениям движения тел, представляющих изолированную систему, известным интегралам, основным формулам эллиптического движения и разложению различных функций в гипергеометрические ряды и по функциям Бесселя. В гл. 5 достаточно подробно излагаются уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов, чтобы читатель мог ознакомиться с основными процессами перехода от эллиптической орбиты к возмущениям планет. В гл. 6 рассматриваются различные классы „неравенств" — вековые, короткопериодические и долгопериодические. Гл. 7 посвящена разложению в ряд возмущающей функции, сначала в теории Луны, а затем в теории движения планет. В гл. 8 — о канонических уравнениях — шаг за шагом излагаются различные теоретические положения и приводятся простые примеры. В гл. 9 подробно рассматривается решение уравнений эллиптического движения при помощи метода Гамильтона — Якоби. В следующих двух главах излагаются элементы теории контактных преобразований. Гл. 12 посвящена теории Луны Делонэ; в ней подробно описывается „основная операция" и дается практический метод получения решения в желаемой форме. В следующих двух главах рассматриваются вековые неравенства, включая и числовые результаты Стокуэлла, относящиеся к эксцентриситетам и наклонностям орбит планет. Вследствие близости аналитических методов в гл. 15 рассматривается и влияние сопротивления среды и движение перигелия Меркурия. Следующая гл. 16 посвящена исследованиям Адамса и Леверье, приведшим к открытию Нептуна. В гл. 17 излагается теория Луны Понтекулана с той целью, чтобы показать, каким образом непосредственно из уравнений движения выводятся такие главные неравенства, как эвекция, вариация, параллактическое неравенство и движение узла и перигея лунной орбиты. В гл. 18, в основу которой положены три классических исследования Хилла и последующие работы Брауна, рассматриваются принципиальные особенности теории Луны Хилла — Брауна. В следующей главе излагается замечательное исследование Адамса о вековом ускорении Луны и его связь с приливным трением. Последняя гл. 20 посвящена динамической теории прецессии и нутации; она заканчивается параграфом, в котором рассмотрено одно из новых астрономических понятий — „эфемеридное“ время.

Тот, кто пишет в настоящее время книги по небесной механике, обязан отдать должное Тиссерану, который в четырех величественных томах своей „Небесной механики“ с большим мастерством исчерпывающе изложил работы классиков, а также Брауну за его „Теорию Луны“ и за другие его исследования. Я также очень обязан Плюммеру за „Динамическую астрономию“ и Пуанкаре за его „Лекции по небесной механике“ и за „Новые методы небесной механики“. Я очень благодарен профессору Людвигу Беккеру, моему предшественнику в Глазго, и профессору Х. Ф. Бейкеру в Кембридже за их лекции, которые вызвали у меня большой интерес к небесной механике. Д. Х. Садлер весьма доброжелательно предоставил мне материалы о современном развитии вычислительной техники и другие материалы. Я очень обязан доктору Портеру за вычисление фундаментальных постоянных для эпохи 1950,0, которые включены в главу о прецессии и нутации. Я искренне благодарю Д. Г. Эварта, одного из моих аспирантов, который помог мне проверить многие доказательства. Наконец, я выражаю благодарность работникам издательства за их превосходную работу.

В. М. С.

Университетская обсерватория в Глазго,
август 1953 г.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.01. Проблемы небесной механики

Для удобства, а также по традиции основные проблемы небесной механики разделяют на две части. Это, во-первых, *теория планет*, в которой изучается движение планет вокруг Солнца, и, во-вторых, *теория спутников*, которая имеет дело с движением спутников вокруг их планет. Наиболее известным примером последней является теория движения Луны. Вариантом теории спутников является теория движения тесной двойной звезды с далеким третьим компонентом. Эти две части имеют по существу один и тот же общий характер и базируются на одних и тех же динамических принципах. Они различаются лишь практическими методами, при помощи которых удобнее получить решения их различных собственных задач. Основной целью теории планет является изучение движения отдельной планеты относительно Солнца под действием главной силы — силы притяжения Солнца, и менее значительных сил притяжения всех других планет и тел солнечной системы. В теории спутников, и в частности в теории Луны, наша цель заключается в исследовании движения Луны относительно Земли под действием главной силы — силы притяжения Земли, и менее значительных сил притяжения Солнца, планет и других тел солнечной системы. В этой главе мы будем почти исключительно интересоваться основами теории планет. Однако общие принципы, которые здесь будут рассматриваться, в равной степени применимы и в теории спутников.

§ 1.02. Законы Кеплера

Большие планеты, в порядке увеличения их расстояний от Солнца, следующие: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран (1781), Нептун (1846) и Плутон (1930), причем в скобках указан год открытия трех последних. Кроме того, имеется огромное число более мелких тел — малых планет, движущихся в области между орбитами Марса и Юпитера. До сих пор их было открыто около двух тысяч, но, возможно, что общее число их в этой области достигает и двадцати тысяч.

В первых десятилетиях семнадцатого столетия Кеплер сформулировал три своих знаменитых закона движения планет. Эти законы были выведены из наблюдений, наиболее точные из которых получил учитель Кеплера Тихо Браге.

1) *Первый закон.* Первый закон утверждает, что орбита планеты относительно Солнца есть эллипс, в фокусе которого находится Солнце.

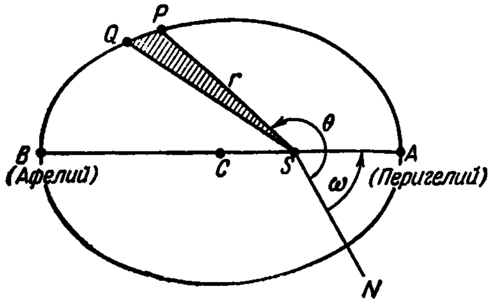

Рис. 1.

Аналитически, если S — положение Солнца в фокусе (рис. 1) и P — положение планеты на ее орбите в данный момент, то уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)}, \tag{1}$$

где r — *радиус-вектор* SP, θ — *полярный угол*, измеряемый в направлении движения планеты от надлежащим образом выбранного основного направления SN в плоскости эллипса до SP, ω — угол между SN и SA, где A — наименее удаленная от S точка эллипса, a — *большая полуось* и e — *эксцентриситет* эллипса. На рис. 1 C — центр эллипса, $CA = CB = a$, $CS = ae$.

Как видно из уравнения (1), минимальное значение r равно $a(1-e)$, что соответствует точке A, для которой полярный угол равен ω; точка A называется *перигелием*. Максимальное значение r равно $a(1+e)$, что соответствует точке B, называемой *афелием*.

2) *Второй закон.* Второй закон утверждает, что для всех частей орбиты секториальная скорость планеты есть величина постоянная. Таким образом, если на рис. 1 $P(r, \theta)$ есть положение планеты в момент t и $Q(r+dr, \theta+d\theta)$ — положение планеты в момент $t+dt$, то секториальная скорость равна dA/dt, где dA представляет собой заштрихованную площадь SPQ. Так как $dA/dt = {}^1/_2 r^2\dot{\theta}$, а секториальная скорость постоянна, то мы можем написать

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{2}$$

где h есть постоянная, равная *удвоенной* секториальной скорости.

Обозначим через T время, требуемое для того, чтобы планета совершила полный оборот. Это время называется ***периодом обращения***. Так как площадь эллипса равна πab, где $b = a\sqrt{1-e^2}$ — малая полуось эллипса, то постоянная h, согласно второму закону, будет равна $2\pi ab/T$, так что

$$h = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2}. \tag{3}$$

За время T радиус-вектор опишет угол, равный 2π. ***Среднее угловое движение***, обозначаемое через n, определяется формулой

$$n = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

Следовательно, уравнение (3) можно записать в виде

$$h = na^2 \sqrt{1-e^2}. \tag{5}$$

3) ***Третий закон***. Первые два закона относились к орбите отдельной планеты. Третий закон устанавливает зависимость между большими полуосями и периодами обращения двух или большего числа планет. Эта зависимость записывается следующим образом:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} = \ldots = \text{const}, \tag{6}$$

или, согласно формуле (4), в виде

$$n_1^2 a_1^3 = n_2^2 a_2^3 = \ldots = \text{const}, \tag{7}$$

где индексы 1, 2, ... соответственно относятся к планетам P_1, P_2 и т. д.

Как мы покажем в § 2.05, третий закон не является вполне точным. Однако точность наблюдений, имевшихся в распоряжении Кеплера, едва ли позволяла обнаружить неравенства порядка минуты.

Третий закон Кеплера в его исправленном виде легко получается из следующей формулы, которая будет выведена в § 2.04:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = G(m_0 + m) \tag{8}$$

или

$$n^2 a^3 = \mu, \tag{9}$$

где m_0, m — соответственно массы Солнца и планеты, G — постоянная тяготения и

$$\mu = G(m_0 + m). \tag{10}$$

Так как массы планет малы по сравнению с массой Солнца, то, пренебрегая величиной m/m_0, мы приведем формулы (8) и (9) к виду

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{Gm_0}{4\pi^2} \quad \text{и} \quad n^2a^3=Gm_0,$$

откуда третий закон Кеплера в форме (6) и (7) следует немедленно.

Нужно заметить, что эти три закона представляют собой три различных утверждения, которые не имеют явной связи друг с другом. Ньютон нашел общий и простой принцип — закон всемирного тяготения, из которого каждый из трех законов (третий — в исправленной форме) может быть легко выведен.

§ 1.03. Закон всемирного тяготения

Небесная механика основывается на законе всемирного тяготения и трех законах движения Ньютона. Закон всемирного тяготения утверждает, что частица P_1 с массой m_1 притягивает частицу P_2 с массой m_2 с силой F, действующей по прямой, соединяющей P_1 и P_2, и пропорциональной произведению масс частиц и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между частицами. Алгебраически этот закон выражается следующей формулой:

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1}$$

где G называется *постоянной тяготения*.

Это выражение дает также силу притяжения частицы P_2 на частицу P_1. Ускорение f_1 массы m_1, обусловленное силой F, дается формулой $f_1=Gm_2/r^2$, а ускорение f_2 массы m_2 определяется из формулы $f_2=Gm_1/r^2$.

При помощи метода, который мы здесь не будем описывать, найдено, что если $f=1$ *см/сек*^{2}, $m=1$ *г* и $r=1$ *см*, то в системе единиц СГС постоянная тяготения равна

$$G=6{,}66\cdot10^{-8}. \tag{2}$$

Для небесной механики система единиц СГС явно не удобна, но при любых других принятых единицах длины, времени и массы соответствующее значение G в этих единицах может быть легко получено из его численного значения (2) и размерности G, именно $L^3T^{-2}M^{-1}$. Следует заметить, что после выбора подходящих единиц длины и времени мы можем подобрать единицу массы так, чтобы $G=1$. Такие единицы иногда называются *астрономическими единицами*.

В теории планет наиболее удобными являются следующие единицы:

единица длины — большая полуось земной орбиты, принятая в качестве *астрономической единицы* длины;
единица времени — средние солнечные сутки;
единица массы — масса Солнца.

Рассмотрим орбиту Земли. В этих единицах $a = 1$, $T = 365{,}2564$ и $m = 1/329390$. Соответственно этому из формулы (8) § 1.02 для G получаем

$$G = \frac{329390}{329391}\,\frac{4\pi^2}{(365{,}2564)^2}.$$

В более ранней литературе постоянная тяготения обозначалась через k^2, причем величина k называется *постоянной Гаусса*, так что $k = \sqrt{G}$. Исходя из значений m и T, имевшихся в то время, Гаусс получил для k следующее численное значение:

$$k = 0{,}017202099.$$

Так как это значение k на протяжении долгого времени использовалось в численных исследованиях, то его оставили без изменения, а единицу длины изменили так, чтобы сохранилось согласие с более точными значениями m и T, которые имеются ныне. Если большую полуось земной орбиты обозначить через a_1 астрономических единиц, то найдем $\ln a_1 = 0{,}000000013$.

Кроме того, нужно заметить, что одну из единиц можно выбрать так, что $k = 1$, $G = 1$, и тем самым получить упрощение аналитических формул. В такой системе наиболее удобными единицами являются следующие:

единица длины — астрономическая единица;
единица массы — масса Солнца;
единица времени — 58,132441 средних солнечных суток.

В задачах, связанных со звездными системами, наиболее удобными единицами являются астрономическая единица, один год и масса Солнца. Поэтому из формулы (8) § 1.02, полагая в ней $a = 1$, $T = 1$, $m_0 = 1$ и пренебрегая m, мы найдем, что $G = 4\pi^2$.

При последующем аналитическом изложении мы будем вообще сохранять G как алгебраический символ, не связывая его с какой-либо определенной системой единиц.

§ 1.04. Потенциал

Мы будем предполагать, что возможно выбрать инерциальную систему осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, в которой может быть определено положение небесного тела (см. рис. 2). Пусть P и P_1 — два тела, которые, по предположению, представляют собой материальные точки с координатами (ξ, η, ζ) и (ξ_1, η_1, ζ_1) и массами m и m_1.

Сила притяжения тела P телом P_1 равна Gmm_1/r_1^2 и действует в направлении $\overrightarrow{PP}_1$, где r_1—расстояние PP_1. Пусть mX_1, mY_1, mZ_1—

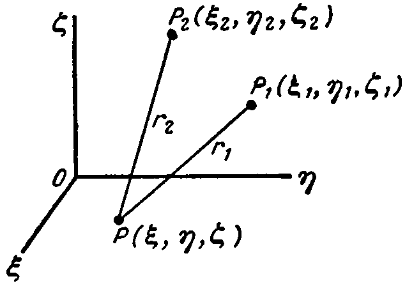

Рис. 2.

составляющие силы притяжения по положительным направлениям осей. Тогда

$$mX_1 = \frac{Gmm_1}{r_1^2}\,\frac{\xi_1-\xi}{r_1}.$$

Но

$$r_1^2 = (\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2$$

и

$$r_1\frac{\partial r_1}{\partial\xi} = \xi-\xi_1.$$

Поэтому

$$X_1 = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\,\frac{\partial r_1}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{Gm_1}{r_1}\right).$$

Если имеются другие тела $P_2, P_3, \ldots, P_n$ с массами $m_2, m_3, \ldots, m_n$ и если mX — сумма составляющих по оси $O\xi$ сил притяжения тела P телами $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то

$$X = \frac{\partial}{\partial\xi}\sum_1^n \frac{Gm_i}{r_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Аналогичные формулы получаются для Y и Z.

Мы определим *потенциал* V в точке P, создаваемый материальными точками $P_1, P_2, \ldots, P_n$, формулой

$$V = \sum_1^n \frac{Gm_i}{r_i}. \tag{1}$$

Заметим, что функция V зависит только от расстояний между телами P и $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и, следовательно, не зависит от выбора системы координат. Мы имеем

$$X = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial \zeta}. \tag{2}$$

Таким образом, потенциал в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ обладает тем свойством, что его производные по ξ, η, ζ дают составляющие силы притяжения частицы ***единичной массы***, расположенной в точке P, массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

§ 1.05. Потенциал шара на внешнюю точку

Предположим, что шар является однородным или, в более общем случае, что плотность в любой его точке есть функция лишь расстояния от центра шара. Закон тяготения Ньютона применим к частицам. Солнце, планеты и спутники не являются частицами в ньютонианском смысле с массами, сконцентрированными в точках, а являются огромными сферическими, или близкими к сферическим, телами. Во многих задачах достаточно рассматривать эти тела как строго сферические. Ньютон доказал замечательную теорему о том,

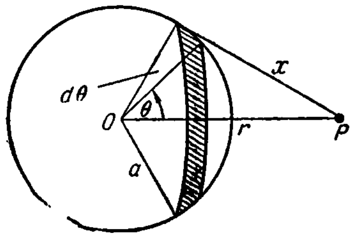

Рис. 3.

что притяжение однородного шара или шара, плотность внутри которого есть функция лишь расстояния до его центра, является таким же, как и притяжение ***частицы***, которая помещена в центр шара и имеет ту же массу, что и шар. Чтобы найти силу притяжения шара (рис. 3) на внешнюю точку P единичной массы, нам потребуется выражение потенциала в точке P, создаваемого бесчисленным множеством частиц, из которых состоит шар.

Рассмотрим сначала бесконечно тонкий однородный сферический слой с центром в точке O, радиус которого равен a. Обозначим через σ массу, приходящуюся на единицу площади, и возьмем кольцо, ограниченное углами θ и $\theta + d\theta$. Плоскости малых кругов, ограничивающих это кольцо, перпендикулярны OP. Масса кольца равна

$2\pi a^2\sigma \sin\theta\, d\theta$. Так как каждый элемент кольца находится на одном и том же расстоянии x от P, то потенциал кольца в точке P будет равен

$$\frac{2\pi G a^2\sigma \sin\theta\, d\theta}{x}.$$

Следовательно, потенциал V_1 однородного сферического слоя в точке P будет выражаться формулой

$$V_1 = 2\pi G a^2\sigma \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{x}.$$

Так как

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

то

$$x\,dx = ar\sin\theta\, d\theta.$$

Поэтому

$$V_1 = 2\pi G\sigma \frac{a}{r}\int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi G\sigma \frac{a}{r}(x_2 - x_1),$$

где x_1 и x_2 соответствуют $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Но $x_1 = r - a$, а $x_2 = r + a$. Следовательно,

$$V_1 = \frac{4\pi G\sigma a^2}{r},$$

или так как масса слоя равна $M_1 = 4\pi a^2\sigma$, то

$$V_1 = \frac{GM_1}{r}.$$

Таким образом, потенциал слоя в точке P равен потенциалу частицы с массой M_1, расположенной в центре слоя.

Так как шар может быть разделен на очень большое количество однородных тонких концентрических слоев, то потенциал шара в точке P будет таким же, как и потенциал частицы, масса которой равна сумме масс всех слоев, т. е. равна массе шара, и которая расположена в его центре. Следовательно, мы имеем следующую формулу для потенциала V шара на внешнюю точку:

$$V = \frac{GM}{r}.$$

Таким образом, при аналитических исследованиях мы можем, например, заменить Солнце материальной точкой, расположенной в его центре. В частности, притяжение Солнца (масса m_1) на планету (масса m_2) будет тем же, что и притяжение материальной точки m_1, расположенной в центре Солнца, на материальную точку m_2, находящуюся в центре планеты. Сила этого притяжения равна Gm_1m_2/r^2, где r

— расстояние между их центрами. Поэтому в динамических задачах мы можем рассматривать Солнце и планеты как материальные точки, координаты которых совпадают с координатами центров рассматриваемых тел.

§ 1.06. Уравнения движения

Ради простоты мы ограничимся сначала рассмотрением только трех тел, именно P_0, P, P_1, и предположим, что они являются точками с массами m_0, m, m_1. Для того чтобы воспользоваться вторым

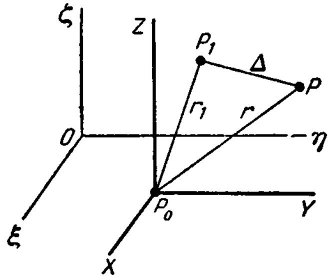

Рис. 4.

законом Ньютона, мы примем в качестве основной гипотезы возможность выбора в евклидовом пространстве инерциальной системы осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, в которой этот закон является справедливым. Для краткости мы будем называть такую систему осей *системой Ньютона*. На рис. 4 координаты точек P_0, P, P_1 относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ суть соответственно (ξ_0, η_0, ζ_0), (ξ, η, ζ) и (ξ_1, η_1, ζ_1).

Рассмотрим прежде всего движение точки P. Согласно равенству (1) § 1.04, потенциал тяготения масс m_0 и m_1 в точке P дается формулой

$$V = \frac{Gm_0}{r} + \frac{Gm_1}{\Delta},$$

где r и Δ суть соответственно расстояния точки P от P_0 и P_1.

Параллельная $O\xi$ составляющая силы притяжения точками P_0 и P_1 *единичной массы*, находящейся в точке P, вследствие формулы (2) § 1.04, равна $\partial V/\partial\xi$. Следовательно, составляющая этой силы, действующая на массу m, помещенную в точке P, будет равна $m(\partial V/\partial\xi)$. Скорость изменения проекции количества движения точки P на направление $O\xi$ будет $d(m\dot{\xi})/dt$. Поэтому на основании второго закона движения будем иметь

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\xi}) = m\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

или

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi} = Gm_0 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + Gm_1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\Delta}\right). \tag{1}$$

Так как

$$r^2 = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2,$$
$$\Delta^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\xi - \xi_0}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = -\frac{\xi - \xi_1}{\Delta^3}.$$

Следовательно, из уравнения (1) имеем

$$\ddot{\xi} = -Gm_0 \frac{\xi - \xi_0}{r^3} - Gm \frac{\xi - \xi_1}{\Delta^3}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь движение точки P_0. Потенциал V_0 тяготения масс m и m_1 в точке P_0 дается формулой

$$V_0 = \frac{Gm}{r} + \frac{Gm_1}{r_1}.$$

Поэтому, как и раньше, будем иметь

$$\ddot{\xi}_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \xi_0} = Gm \frac{\partial}{\partial \xi_0}\left(\frac{1}{r}\right) + Gm_1 \frac{\partial}{\partial \xi_0}\left(\frac{1}{r_1}\right). \tag{3}$$

Далее,

$$r_1^2 = (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + (\zeta_0 - \zeta_1)^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_0}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{\xi_0 - \xi_1}{r_1^3}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\xi_0 - \xi}{r^3}.$$

Поэтому уравнение (3) примет вид

$$\ddot{\xi}_0 = -Gm \frac{\xi_0 - \xi}{r^3} - Gm_1 \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_1^3}. \tag{4}$$

Уравнения для η и ζ аналогичны уравнениям (2) и (4).

Нужно заметить, что эти уравнения выведены относительно гипотетических осей. Дальнейшее исследование станет возможным только тогда, когда мы скомбинируем эти уравнения таким образом, что исключим первоначальные координатные оси. В теории планет это достигается тем, что движение планет P и P_1 относится к осям P_0X, P_0Y, P_0Z с началом в точке P_0, под которой понимается Солнце. Аналогично в теории Луны в качестве начала координат берется Земля. Эти оси показаны на рис. 4. Иногда выбранные таким образом оси относятся к плоскости эклиптики, иногда — к плоскости, которая является наиболее удобной в данной задаче. Например, в теории спутников — к плоскости орбиты планеты.

§ 1.07. Основные уравнения движения планет

Пусть на рис. 4 P_0 означает начало новой системы координат P_0X, P_0Y и P_0Z и пусть x, y, z — координаты точки P, а x_1, y_1, z_1 — координаты точки P_1. Тогда

$$x = \xi - \xi_0, \quad x_1 = \xi_1 - \xi_0.$$

Аналогичные равенства имеют место и для y, y_1, z, z_1. Мы имеем

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Далее,

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} - \ddot{\xi}_0,$$

и на основании уравнений (1) и (4) § 1.06 находим

$$\ddot{\xi} = -Gm_0 \frac{x}{r^3} - Gm_1 \frac{x - x_1}{\Delta^3}, \quad \ddot{\xi}_0 = Gm \frac{x}{r^3} + Gm_1 \frac{x_1}{r_1^3}.$$

Составив разность этих выражений, получим уравнение

$$\ddot{x} + G(m_0 + m) \frac{x}{r^3} = -Gm_1 \frac{x - x_1}{\Delta^3} - Gm_1 \frac{x_1}{r_1^3}. \tag{1}$$

Положим

$$\mu = G(m_0 + m). \tag{2}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{x - x_1}{\Delta^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

и так как r_1 и координаты x_1, y_1, z_1 не зависят от x, y, z, то мы можем написать

$$\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right).$$

Уравнение (1) тогда примет вид

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{3}$$

где функция R определяется формулой

$$R = Gm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right). \tag{4}$$

Соответствующие уравнения для y и z имеют вид

$$\ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z}.$$

В этих формулах R называется *возмущающей функцией*, соответствующей „возмущающей“ планете P_1. Если бы точки P_1 не существовало, то, согласно первому закону Кеплера, орбита точки P относительно P_0 была бы эллипсом, а так как тогда $R=0$, уравнения движения имели бы вид

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=0 \tag{5}$$

и т. д.

Действие тела P_1 сводится к появлению *возмущений*, т. е. сравнительно малых изменений в орбите точки P, величина которых пропорциональна массе m_1 возмущающей планеты. Но если m_1 является малой величиной по сравнению с массой Солнца m_0, то множитель Gm_1 мал по сравнению с $\mu\equiv G(m_0+m)$, так что в уравнении (3) член, зависящий от R, производит сравнительно малые изменения в кеплеровом эллипсе. Однако определение этих малых эффектов, или возмущений, и является главной задачей теории планет.

Легко показать, что если имеется n возмущающих планет, то уравнения движения точки P запишутся в виде

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{1}^{n} R_i \tag{6}$$

и т. д., где

$$R_i=Gm_i\left(\frac{1}{\Delta_i}-\frac{xx_i+yy_i+zz_i}{r_i^3}\right). \tag{7}$$

Если S_i означает угол между P_0P и P_0P_i, то

$$\cos S_i=\frac{xx_i+yy_i+zz_i}{rr_i}. \tag{8}$$

Мы можем тогда R_i записать и в такой форме:

$$R_i=Gm_i\left(\frac{1}{\Delta_i}-\frac{r}{r_i^2}\cos S_i\right). \tag{9}$$

§ 1.08. Массы планет

Для решения уравнений теории движения планет численные значения масс всех возмущающих тел должны быть известны и выражены в долях солнечной массы, принятой за единицу. Только тогда положения планет на небе могут быть точно предсказаны для любых данных моментов времени. Как мы увидим в § 2.06, исправленный третий закон Кеплера дает возможность точно определить из соответствующих наблюдений массы тех планет, которые обладают спутниками. В случае Меркурия и Венеры, которые не имеют спутников, определение масс достигается путем сравнения теоретических возмущений, которые они вызывают в орбите другой планеты, с наблюдаемыми эффектами. Масса Плутона не известна с достаточной степенью точности. В 1950 г. Койпер, проводивший наблюдения на 200-дюймовом телескопе обсерватории Маунт Паломар, нашел, что угловой диаметр планетного диска был равен $0'',2$, что дает для линейного диаметра планеты 5800 *км*. При разумных предположениях относительно средней плотности Плутона его масса вряд ли превосходит $^1/_5$ массы Земли. Следовательно, его возмущающее влияние на орбиту Нептуна должно быть очень малым и не может быть обнаружено еще в течение многих лет.

§ 1.09. Область применимости теории Ньютона

Согласно теории относительности, пространство не является евклидовым, как предполагается в схеме Ньютона. Однако во всех задачах, с которыми мы имеем дело в небесной механике, за некоторыми исключениями, метод Ньютона является исчерпывающим. Исключение, например, составляют особенности в движении перигелия орбиты планеты Меркурий, которые долго оставались необъяснимыми и были выяснены только в общей теории относительности. Мы рассмотрим этот вопрос подробно в одной из последующих глав (стр. 317).

Глава 2

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 2.01. Уравнения движения

В этой главе мы займемся задачей двух тел, рассматриваемых как материальные точки, изолированные от гравитационного влияния всех других тел.

Рассмотрим тело P_0 с массой m_0 и тело P с массой m. Наша задача заключается в определении орбиты тела P относительно тела P_0. Возьмем невращающиеся оси P_0x, P_0y, P_0z с началом в P_0. Координаты тела P относительно этой системы осей будут x, y, z.

Уравнения движения тела P относительно P_0, согласно уравнению (5) § 1.07, запишутся в виде

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=0, \quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=0, \quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=0, \tag{1}$$

где

$$\mu=G(m_0+m). \tag{2}$$

Эти уравнения описывают движение планеты вокруг Солнца, движение Луны около Земли, движение одной компоненты двойной звезды относительно другой ее компоненты, разумеется при условии, что в каждом таком случае система двух тел не подвержена гравитационному влиянию никаких других тел.

Умножая второе уравнение (1) на z, а третье — на y и вычитая, получаем

$$y\ddot{z}-\ddot{y}z=0,$$

откуда

$$y\dot{z}-\dot{y}z=A, \tag{3}$$

где A — постоянная интегрирования. Аналогично находим

$$z\dot{x}-\dot{z}x=B, \tag{4}$$

$$x\dot{y}-\dot{x}y=C, \tag{5}$$

где B и C — постоянные интегрирования.

Умножим равенства (3) — (5) соответственно на x, y и z и сложим. Мы тогда получим

$$Ax+By+Cz=0. \tag{6}$$

Последнее равенство показывает, что координаты точки P удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через P_0. Другими словами, орбита точки P лежит в некоторой плоскости, проходящей через точку P_0.

§ 2.02. Положение плоскости орбиты относительно основной плоскости

На рис. 5 изображена небесная сфера с центром в точке P_0. Оси P_0x, P_0y, P_0z пересекают небесную сферу в точках X, Y, Z.

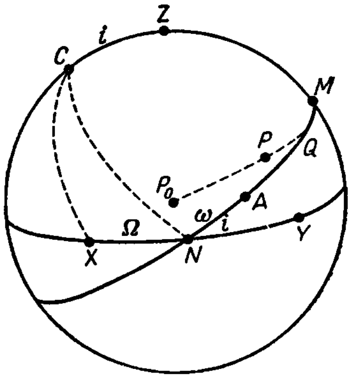

Рис. 5.

Мы будем рассматривать плоскость большого круга XY как основную плоскость, а точку X — как основную точку на этом большом круге.

Предположим, что плоскость орбиты, уравнение которой дается формулой (6) § 2.01, пересекает небесную сферу по большому кругу NAM. Полюс этого большого круга (в том полушарии, где находится Z) совпадает с точкой C. Направляющие косинусы радиуса P_0C пропорциональны постоянным интегрирования A, B и C, введенным в § 2.01.

Пусть радиус-вектор P_0P пересекает сферу в точке Q. Мы предположим, что движение тела P относительно P_0 происходит в направлении от N к Q и что в момент времени τ радиус-вектор пересекает сферу в точке A, удаленной от N на угловое расстояние ω.

Положение плоскости орбиты относительно основной плоскости определяется а) угловым расстоянием точки N от X, обозначаемым через Ω, б) наклонностью плоскости орбиты к основной плоскости, которая обозначается через i и измеряется двугранным углом ANY или угловым расстоянием CZ.

В теории планет, например, за основную плоскость часто принимается плоскость эклиптики, точка X отождествляется с точкой весеннего равноденствия Υ, а в качестве точки Z принимается северный полюс эклиптики. Так как радиус-вектор планеты переходит из южного полушария в северное через N в направлении NAQ, то точка N называется *восходящим узлом* (обычно просто *узлом*), а дуга XN (или ΥN) — *долготой узла.*

Мы можем выразить постоянные A, B и C интегралов (3), (4) и (5) § 2.01 через Ω и i и наоборот. Выражение $x\dot{y}-\dot{x}y$ представляет собой удвоенную скорость, которая характеризует изменение площади, описываемой проекцией радиус-вектора r на плоскость XY. Если h — удвоенная секториальная скорость планеты ($h=r^2\dot{\theta}$, где θ — полярный угол), то

$$x\dot{y}-\dot{x}y=h\cos CZ,$$

где CZ — угол между нормалями к плоскости орбиты и плоскости XY, т. е. $CZ=i$. Следовательно, из формулы (5) § 2.01 имеем

$$C=h\cos i.$$

Аналогично

$$A=h\cos CX, \quad B=h\cos CY.$$

Из сферических треугольников CXN и CYN находим, что

$$\cos CX=\sin\Omega\sin i,$$
$$\cos CY=-\cos\Omega\sin i,$$

откуда

$$A=h\sin\Omega\sin i, \quad B=-h\cos\Omega\sin i, \quad C=h\cos i. \tag{1}$$

Поэтому

$$h^2=A^2+B^2+C^2.$$

Таким образом, h — величина постоянная, и второй закон Кеплера тем самым подтвержден.

Из формулы (1) находим

$$\operatorname{tg}\Omega=-\frac{A}{B}, \quad \operatorname{tg} i=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}.$$

§ 2.03. Уравнения движения в плоскости орбиты

Возьмем прямоугольную систему координат с осями P_0N, P_0M, лежащими в плоскости орбиты так, чтобы P_0N имела направление на узел. Пусть координаты точки P на рис. 6 будут x_1, y_1. Пусть, кроме того, θ означает полярный угол между P_0N и P_0P. Тогда, принимая временно плоскость орбиты за основную, запишем уравнения движения точки P в виде

$$\ddot{x}_1 + \frac{\mu x_1}{r^3} = 0, \quad \ddot{y}_1 + \frac{\mu y_1}{r^3} = 0$$

или

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{m\mu}{r^2} \cdot \frac{x_1}{r}, \quad m\ddot{y}_1 = -\frac{m\mu}{r^2} \cdot \frac{y_1}{r}.$$

Последние уравнения являются ньютоновскими уравнениями движения частицы с массой m, подверженной силе притяжения $m\mu/r^2$ в напра-

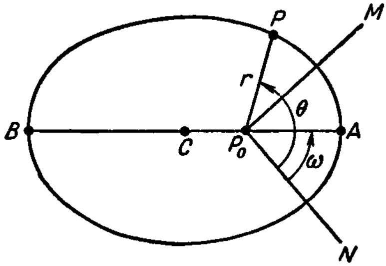

Рис. 6.

влении PP_0. Обозначив составляющие ускорения вдоль P_0P и перпендикулярно P_0P через α и β, получим

$$\alpha = -\frac{\mu}{r^2}, \quad \beta = 0,$$

но $\alpha = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ и $\beta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$. Следовательно, уравнения движения точки P в полярных координатах имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{1}$$

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{2}$$

где h — произвольная постоянная.

Уравнение (2) — аналитическое выражение второго закона Кеплера, причем h — удвоенная секториальная скорость, равная

$$\frac{2\pi ab}{T}.$$

Так как в § 1.02 мы определили среднее угловое движение n при помощи формулы

$$n = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

то

$$h = na^2\sqrt{1 - e^2}. \tag{4}$$

§ 2.04. Уравнение орбиты в полярных координатах

Чтобы получить уравнение орбиты в полярных координатах, мы исключим t из уравнений

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{1}$$

$$r^2\dot{\theta} = h. \tag{2}$$

Положим $u = 1/r$. Тогда из формулы (2) найдем, что $\dot{\theta} = hu^2$. Следовательно,

$$\dot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\dot{\theta} = -h\frac{du}{d\theta}$$

и

$$\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Уравнение (1) тогда примет вид

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{3}$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \omega)],$$

в которой e и ω суть постоянные интегрирования. Следовательно,

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \tag{4}$$

Последнее уравнение является уравнением эллипса с эксцентриситетом e, если $0 < e < 1$, и фокальным параметром, равным h^2/μ. Следовательно,

$$h^2 = \mu a(1 - e^2). \tag{5}$$

Однако, согласно формуле (4) § 2.03,

$$h = na^2\sqrt{1 - e^2}. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) находим

$$\mu = n^2a^3, \tag{7}$$

или так как $n = 2\pi/T$ и $\mu = G(m_0 + m)$, то

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_0 + m)}{4\pi^2}, \tag{8}$$

что является уточненной формой третьего закона Кеплера.

Заметим, что равенство (4) представляет собой общее уравнение конического сечения. Следовательно, орбита тела P относительно P_0 в соответствии с законом тяготения может быть:

а) эллипсом, если $0 < e < 1$ (или кругом, если $e = 0$);

б) параболой, если $e = 1$;

в) гиперболой, если $e > 1$.

Мы будем иметь дело главным образом со случаем (а), которому соответствует эллиптическая орбита с фокусом в P_0. Таким образом, вывод формулы (4) и составляет доказательство первого закона Кеплера.

§ 2.05. Уточненная форма третьего закона Кеплера

Из предыдущего параграфа мы имеем

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = G(m_0 + m), \tag{1}$$

где под P_0 мы будем понимать Солнце с массой m_0, а под P — планету с массой m.

Если a_1 и T_1 относятся к орбите какой-либо другой планеты с массой m_1, обращающейся вокруг Солнца, то имеем

$$4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = G(m_0 + m_1). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) находим

$$\frac{a^3/T^2}{a_1^3/T_1^2} = \frac{1 + (m/m_0)}{1 + (m_1/m_0)}. \tag{3}$$

Отношения m/m_0 и m_1/m_0 являются малыми. Максимальное значение такого отношения, равное 1/1047, соответствует планете Юпитер.

Если этими малыми отношениями пренебречь, то равенство (3) примет вид

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2},$$

что представляет собой третий закон Кеплера, записанный для двух планет. Очевидно, этот закон может быть распространен на любое число планет. Когда в дальнейшем будем ссылаться на третий закон Кеплера, мы будем иметь в виду формулу (1), которая выражает этот закон точно.

§ 2.06. Массы планет

Мы проиллюстрируем метод определения масс планет, которые обладают спутниками, на примере Марса и его спутника Деймоса.

Предположим, что невозмущенная орбита Деймоса (масса m_1), определяемая притяжением Марса (масса m), является эллипсом с большой полуосью a_1 и периодом T_1. Применяя третий закон Кеплера в его уточненной форме к орбите спутника Марса, получаем

$$4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = G(m + m_1). \tag{1}$$

Если a и T относятся к орбите Марса относительно Солнца (масса m_0), то

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = G(m_0 + m). \tag{2}$$

Так как m_1 является очень малой величиной по сравнению с m, то мы можем в формуле (1) m_1 отбросить. Тогда из формул (1) и (2) будем иметь

$$\frac{m_0 + m}{m} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T}\right)^2. \tag{3}$$

Отношения a/a_1 и T/T_1 получаются из исследования орбит. Следовательно, с помощью формулы (3) мы легко определяем отношение массы Марса к массе Солнца.

Как мы заметили в § 1.08, масса планеты, не имеющей спутника, определяется другими методами.

§ 2.07. Элементы эллиптической орбиты

Согласно формулам (4) и (5) § 2.04, уравнение орбиты в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)},$$

где $a(1 - e^2)$ равно h^2/μ. Величина r принимает наименьшее значение, когда $\cos(\theta - \omega)$ достигает максимума, т. е. когда $\theta = \omega$. Следовательно, минимальное значение r равно $a(1 - e)$, что соответствует перигелийному расстоянию P_0A (рис. 6, стр. 25). Аналогично максимальное значение r имеет место при $\theta - \omega = \pi$. Оно равно $a(1 + e)$, что соответствует афелийному расстоянию P_0B. Угол ω, таким образом, определяет ориентацию большой оси BA относительно направления P_0N, от которого измеряется полярный угол θ.

Величины a, e и ω являются тремя *элементами* орбиты. Четвертым элементом является τ — момент времени, когда планета проходит через перигелий. Для того чтобы полностью определить положение орбиты относительно основной плоскости и основного направления в этой плоскости, требуются еще два элемента. Если основной плоскостью является плоскость эклиптики (рис. 5, стр. 23), то этими элементами будут Ω (долгота узла) и i (наклонность орбиты к плоскости эклиптики).

Для удобства разобьем шесть элементов на две группы, каждая из которых будет содержать по три элемента. Первую группу составляют элементы a, e, τ, которые характеризуют эллипс независимо от его положения относительно основной плоскости. Вторую группу составляют элементы Ω, ω, i. Элементы Ω и i определяют положение плоскости эллипса относительно эклиптики и точки весеннего равноденствия, а элемент ω определяет ориентацию большой оси орбиты относительно направления на восходящий узел N.

Эти элементы появляются естественным образом из простых геометрических соображений. Однако может оказаться более удобным рассматривать в качестве постоянных эллиптического движения любые шесть независимых функций от a, e, ..., i. Например, в некоторых теориях в качестве независимого элемента принимается постоянная $h \equiv [\mu a (1-e^2)]^{1/2}$, которая столь же естественным образом появляется при решении динамической задачи.

§ 2.08. Истинная и эксцентрическая аномалии

Истинная аномалия, обозначаемая через f, определяется как полярный угол планеты, отсчитываемый от P_0A (рис. 7). Согласно

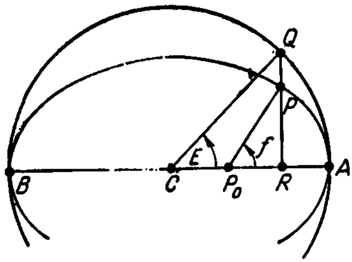

Рис. 7.

нашим предыдущим обозначениям, мы можем написать $f = \theta - \omega$. Уравнение орбиты тогда примет вид

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}. \tag{1}$$

Очевидно, интеграл площадей может быть записан в виде

$$r^2 \dot{f} = h. \tag{2}$$

Полярные координаты точки P относительно P_0A как основного направления будут r, f; соответствующие прямоугольные координаты — P_0R и RP. Обозначая их через ξ, η, найдем

$$\xi = r\cos f, \qquad \eta = r\sin f. \tag{3}$$

Проведем из центра C окружность радиуса a. Ордината точки P пересечет эту окружность в точке Q. Угол QCA называется *эксцентрической аномалией* и обозначается через E. Мы имеем

$$CR = a\cos E, \qquad RQ = a\sin E. \tag{4}$$

Так как уравнение эллипса с центром в точке C и с полуосью CA, расположенной вдоль оси x, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2(1 - e^2)$, то ордината PR выражается через E следующим образом:

$$PR = \frac{b}{a}(a^2 - a^2\cos^2 E)^{1/2} = b\sin E.$$

Следовательно,

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{b}{a}. \tag{5}$$

Так как $CP_0 = ae$, то имеем

$$\xi \equiv r\cos f = a(\cos E - e), \tag{6}$$

$$\eta \equiv r\sin f = b\sin E. \tag{7}$$

Радиус-вектор r определится как функция E, если возвести в квадрат формулы (6) и (7) и сложить. Тогда получим

$$r = a(1 - e\cos E). \tag{8}$$

Из формулы (6) находим

$$r\left(2\cos^2\frac{f}{2} - 1\right) = a(\cos E - e) \tag{9}$$

или, используя формулу (8),

$$r\cos^2\frac{f}{2} = a(1 - e)\cos^2\frac{E}{2}.$$

Аналогично из равенства (7) получаем

$$r\left(1 - 2\sin^2\frac{f}{2}\right) = a(\cos E - e),$$

откуда, используя формулу (8), находим

$$r\sin^2\frac{f}{2} = a(1 + e)\sin^2\frac{E}{2}. \tag{10}$$

Из формул (9) и (10) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \qquad (11)$$

Последнее уравнение выражает истинную аномалию через эксцентрическую аномалию, и наоборот.

§ 2.09. Средняя аномалия

Предположим, что в момент t планета находится в точке P (рис. 7). За интервал времени $t-\tau$ радиус-вектор перейдет из положения P_0A в положение P_0P. Если радиус-вектор в момент τ совпадает с P_0A и в дальнейшем вращается со средней угловой скоростью n, то угол PP_0A, на который он повернется за время $t-\tau$, называется *средней аномалией*. Если обозначить среднюю аномалию через M, то

$$M=n(t-\tau). \qquad (1)$$

§ 2.10. Уравнение Кеплера

Это уравнение связывает между собой эксцентрическую аномалию E и среднюю аномалию M. Оно имеет вид

$$E-e\sin E=M.$$

Мы выведем его следующим образом.

Из формулы

$$r=a(1-e\cos E)$$

имеем

$$\dot{r}=ae\sin E\cdot\dot{E}. \qquad (1)$$

Из равенства

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos f}{a(1-e^2)}$$

находим

$$\frac{\dot{r}}{r^2}=\frac{e\sin f\cdot\dot{f}}{a(1-e^2)},$$

откуда, так как

$$r^2\dot{f}=h=na^2\sqrt{1-e^2},$$

получаем

$$\dot{r}=\frac{nae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) имеем

$$\dot{E}=\frac{n\sin f}{\sqrt{1-e^2}\sin E}.$$

Но, согласно формуле (3) § 2.08,

$$\eta \equiv r \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Следовательно,

$$r\dot{E} = na$$

или

$$(1 - e \cos E)\dot{E} = n.$$

Интегрируя, получаем

$$E - e \sin E = nt + c,$$

где c — постоянная интегрирования. Однако $E=0$, когда $t=\tau$. Поэтому $c = -n\tau$. Следовательно, мы получаем

$$E - e \sin E = M \equiv n(t-\tau), \tag{3}$$

что и является уравнением Кеплера, связывающим между собой эксцентрическую и среднюю аномалии.

§ 2.11. Решение уравнения Кеплера

Предположим, что элементы e и τ орбиты и среднее движение n нам известны. В таком случае мы можем вычислить значение M для момента t. Для определения значения E для момента t мы имеем уравнение

$$E - e \sin E = M. \tag{1}$$

а) Если e мало, скажем порядка 0,1, как в случае большинства планетных орбит, то E можно вычислить с помощью весьма удобного метода, предложенного Брауном [1]). Положим

$$E = M + x, \tag{2}$$

где x нужно определить.

Тогда из формулы (1) имеем

$$x = e \sin(M + x). \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, очевидно, что x имеет порядок e. Далее,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots =$$
$$= e \sin(M+x) - \frac{e^3}{6}\sin^3(M+x) + \frac{e^5}{120}\sin^5(M+x) - \ldots$$

или

$$\sin x(1 - e\cos M) - e \sin M \cos x =$$
$$= -\frac{e^3}{6}\sin^3(M+x) + \frac{e^5}{120}\sin^5(M+x) - \ldots . \tag{4}$$

[1]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 92, 104 (1931).

Пусть C и x_0 определяются уравнениями

$$C \sin x_0 = e \sin M, \tag{5}$$

$$C \cos x_0 = 1 - e \cos M, \tag{6}$$

из которых находим

$$\operatorname{tg} x_0 = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}, \tag{7}$$

$$C \sin (M + x_0) = \sin M, \tag{8}$$

$$C^2 = 1 - 2e \cos M + e^2. \tag{9}$$

Мы вычислим x_0 по формуле (7) и C по формуле (8), если только M не является близким к 90° или к 270°, когда для определения C может быть использована формула (9). Следует заметить, что x_0 имеет порядок e. Используя формулы (5) и (6), запишем разложение (4) в виде

$$\sin (x - x_0) = -\frac{e^3}{6C} \sin^3 (M + x) + \frac{e^5}{120C} \sin^5 (M + x) + \ldots . \tag{10}$$

Формула (9) показывает, что C имеет порядок единицы. Следовательно, согласно разложению (10), $x - x_0$ имеет порядок e^3, так что если мы подставим x_0 вместо x в первый член правой части равенства (10) и отбросим второй член, то получим уравнение

$$\sin (x - x_0) = -\frac{e^3}{6C} \sin^3 (M + x_0), \tag{11}$$

которое справедливо с точностью до членов порядка e^4. Это уравнение может быть записано и в другой форме. Из формул (5) и (6) имеем

$$\sin x_0 (1 - e \cos M) = e \cos x_0 \sin M.$$

Отсюда

$$\sin x_0 = e \sin (M + x_0),$$

и из уравнения (11) получаем

$$\sin (x - x_0) = -\frac{1}{6C} \sin^3 x_0. \tag{12}$$

По формуле (11) или (12) значение x может быть легко вычислено. Обозначим его через x'. Для планетных орбит с малыми e это значение x' обычно оказывается достаточно точным. Решение уравнения Кеплера тогда принимает вид

$$E = M + x'.$$

Если e имеет несколько большее значение или если требуется бóльшая точность, то можно получить требуемое значение x путем подстановки x' вместо x в первый член правой части формулы (10) и x_0 вместо x во второй член. Тогда x будет вычисляться по формуле

$$\sin(x - x_0) = -\frac{e^3}{6C}\sin^3(M + x') + \frac{e^5}{120C}\sin^5(M + x_0). \qquad (13)$$

Если x'' — значение x, найденное по формуле (13), то решение уравнения Кеплера имеет вид

$$E = M + x''.$$

б) Если e не является сравнительно малым, как в случае (а), то процедура решения начинается с определения исходного значения E, которое представляет собой приближенное решение уравнения Кеплера. Такое значение может быть получено одним из многих графических методов, предложенных для этой цели (их имеется около 120), или с помощью специальных таблиц [1]). В этих таблицах даются значения M, вычисленные для отдельных значений E и e, например E с интервалом в 1° и e с интервалом 0,05.

Путем интерполяции по этим таблицам легко получить значение E_0, которое приближенно удовлетворяет уравнению Кеплера при данных значениях e и M.

Пусть $E_0 + dE$ обозначает величину E, которая точно удовлетворяет этому уравнению. Тогда

$$E_0 + dE - e\sin(E_0 + dE) = M. \qquad (14)$$

С точностью до членов первого порядка мы получаем для dE формулу

$$dE = \frac{M - M_0}{1 - e\cos E_0}, \qquad (15)$$

где $M_0 \equiv E_0 - e\sin E_0$, а поэтому dE легко вычисляется. Таким образом, можно получить более точное значение $E_0 + dE$. Для дальнейшего уточнения значения E, удовлетворяющего уравнению Кеплера, можно повторить этот прием, принимая $E_0 + dE$ в качестве нового приближенного значения.

---

[1]) Например, J. Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig, 1901, или J. J. Astrand, Hülfstafeln, Leipzig, 1890. [См. также: М. Ф. Субботин, Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид. Приложение к курсу небесной механики, Гостехиздат, М.—Л., 1941; А. Я. Орлов и Б. А. Орлов, Курс теоретической астрономии, Гостехиздат, М.—Л., 1940. — *Прим. ред.*]

§ 2.12. Скорость движения планеты по ее орбите

Пусть v — орбитальная скорость планеты. Тогда

$$v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2.$$

Но

$$\xi = a(\cos E - e), \qquad \eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E.$$

Поэтому

$$v^2 = a^2(1 - e^2\cos^2 E)\dot{E}^2.$$

Из уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e\cos E)\dot{E} = n. \tag{1}$$

Следовательно,

$$v^2 = n^2a^2\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} = \frac{\mu}{r}[2-(1-e\cos E)]$$

или

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{2}$$

Это и есть та формула, которую требовалось вывести.

§ 2.13. Модификация эллиптических элементов

Элементы орбиты, с которыми мы пока имели дело, таковы:

$$a,\ e,\ \tau \quad \text{и} \quad \Omega,\ \omega,\ i.$$

Последняя группа элементов, отнесенных к основной плоскости и осям, обозначенным через X, Y и Z, показана на рис. 8.

а) Элемент τ, входящий в уравнение Кеплера

$$E - e\sin E = n(t - \tau),$$

иногда бывает удобнее заменить элементом χ, равным $-n\tau$, так что уравнение Кеплера принимает вид

$$E - e\sin E = nt + \chi. \tag{1}$$

Элементами орбиты тогда будут:

$$a,\ e,\ \chi \quad \text{и} \quad \Omega,\ \omega,\ i.$$

б) Имеющая более широкое применение модификация основных элементов включает в себя замену ω и τ (или χ). Когда основной плоскостью является плоскость эклиптики, то *долгота* некоторой точки большого круга MAQ в теории планет определяется как угол, измеренный от основной точки X (или Υ) до восходящего узла N

и далее вдоль большого круга орбиты до интересующей нас точки. Таким образом, *долгота перигелия*, обозначаемая через $\tilde{\omega}$, — это долгота точки A и она выражается через Ω и ω следующим образом:

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega. \tag{2}$$

Следовательно, мы можем заменить ω на $\tilde{\omega} - \Omega$.

Если на рис. 8 Q — точка пересечения радиус-вектора P_0P со сферой, а AQ — истинная аномалия f этой точки, то *истинная*

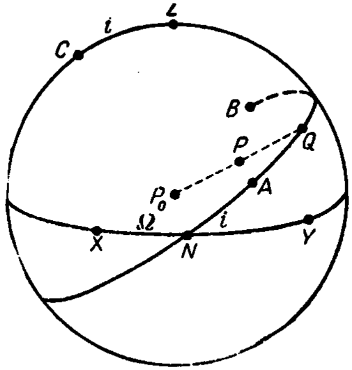

Рис. 8.

долгота планеты, обозначаемая через L, — это долгота точки Q. Следовательно,

$$L = \Omega + \omega + f$$

или

$$L = \tilde{\omega} + f. \tag{3}$$

Аналогично *средняя долгота* планеты, обозначаемая через l, связана со средней аномалией $M = n(t - \tau) = nt + \chi$ формулой

$$l = \tilde{\omega} + n(t - \tau). \tag{4}$$

Вместо элемента τ (или χ) часто вводится элемент ε, называемый *средней долготой в эпоху*. Это средняя долгота в начальный момент времени $t = 0$; она дается формулой (4), если положить в ней $t = 0$. Следовательно,

$$\varepsilon = \tilde{\omega} - n\tau. \tag{5}$$

Исключая τ из равенств (4) и (5), мы для средней долготы l найдем формулу

$$l = nt + \varepsilon. \tag{6}$$

Согласно формуле (4), средняя аномалия M определится так:

$$M = l - \tilde{\omega}.$$

Следовательно, используя равенство (6), получаем

$$M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}. \tag{7}$$

Эта система содержит следующие элементы:

$$a,\ e,\ \varepsilon,\ \Omega,\ \tilde{\omega},\ l.$$

§ 2.14. Сводка формул эллиптического движения

Соберем здесь для справок основные формулы, полученные в предыдущих параграфах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \tag{1}$$

$$n^2a^3 = \mu = G(m_0 + m), \tag{2}$$

$$h^2 = \mu a(1-e^2), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E - e\sin E &= Mn(t-\tau) = \\ &= nt + \chi = \\ &= nt + \varepsilon - \tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$r = a(1 - e\cos E), \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{6}$$

Эти формулы важны для теоретических исследований, которые мы рассмотрим в следующих главах.

При помощи их можно также вычислить положение планеты на ее орбите, т. е. значения r и f для любого момента времени, если известны элементы a, e и τ, ω (или ε и $\tilde{\omega}$), а следовательно, и период обращения T. Сначала мы находим $n \equiv 2\pi/T$, затем вычисляем M. Соответствующее значение E определяется из уравнения Кеплера одним из способов, описанных в § 2.11. По этому значению E величины r и f вычисляются посредством формул (5) и (6). Формула (1) может быть использована для контроля.

§ 2.15. Вычисление прямого восхождения и склонения по известным элементам орбиты

Эти вычисления состоят из четырех этапов.

1. Обратимся к рис. 8 на стр. 36. Относительно осей P_0A, P_0B, лежащих в плоскости орбиты, координаты точки P суть ξ, η,

Пусть (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2) — направляющие косинусы соответственно осей P_0A и P_0B относительно осей X, Y и Z на этом рисунке и пусть x, y, z — координаты точки P относительно этих же осей. Тогда

$$\begin{aligned} x &= l_1\xi + l_2\eta, \\ y &= m_1\xi + m_2\eta, \\ z &= n_1\xi + n_2\eta, \end{aligned} \tag{1}$$

или, так как $\xi = a(\cos E - e)$ и $\eta = a\sqrt{1-e^2}\cdot\sin E$, то

$$\begin{aligned} x &= al_1\cos E + bl_2\sin E - ael_1, \\ y &= am_1\cos E + bm_2\sin E - aem_1, \\ z &= an_1\cos E + bn_2\sin E - aen_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $b = a\sqrt{1-e^2}$.

Из треугольников AXN, AYN, AZN имеем:

$$\begin{aligned} l_1 &\equiv \cos AX = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i, \\ m_1 &\equiv \cos AY = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i, \\ n_1 &\equiv \cos AZ = \sin\omega\sin i. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} l_2 &\equiv \cos BX = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, \\ m_2 &\equiv \cos BY = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i, \\ n_2 &\equiv \cos BZ = \cos\omega\sin i. \end{aligned} \tag{4}$$

Если элементы известны, то E можно определить из уравнения Кеплера способом, описанным ранее. Направляющие косинусы $l_1, \ldots, n_2$ вычисляются по формулам (3) и (4). Гелиоцентрические эклиптические координаты x, y и z тогда определятся по формулам (2).

2. На этом этапе мы определим гелиоцентрические экваториальные координаты планеты относительно экваториальных осей, обозначенных на рис. 9 через X (или Υ), F и G. Пусть ε_0 — наклонность эклиптики. Если x_1, y_1, z_1 — координаты планеты в экваториальной системе координат, то

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y\cos\varepsilon_0 - z\sin\varepsilon_0, \\ z_1 &= y\sin\varepsilon_0 + z\cos\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда, поскольку ε_0 известно, определятся значения x_1, y_1, z_1.

С другой стороны, мы можем скомбинировать формулы первого и второго этапов следующим образом. Из формул (2) и (5) имеем:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= aP_x \cos E + bQ_x \sin E - aeP_x,\\
y_1 &= aP_y \cos E + bQ_y \sin E - aeP_y,\\
z_1 &= aP_z \cos E + bQ_z \sin E - aeP_z,
\end{aligned} \tag{6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
P_x &= l_1, & Q_x &= l_2,\\
P_y &= m_1 \cos \varepsilon_0 - n_1 \sin \varepsilon_0, & Q_y &= m_2 \cos \varepsilon_0 - n_2 \sin \varepsilon_0,\\
P_z &= m_1 \sin \varepsilon_0 + n_1 \cos \varepsilon_0, & Q_z &= m_2 \sin \varepsilon_0 + n_2 \cos \varepsilon_0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

Величины $P_x, \ldots, Q_z$ вычисляются по значениям $l_1, \ldots, n_2$ и ε_0. Затем, после того как соответствующее значение E найдено, вычисляются x_1, y_1 и z_1.

3. На третьем этапе мы определим гелиоцентрические экваториальные координаты Земли, которые обозначим через x_1', y_1', z_1'.

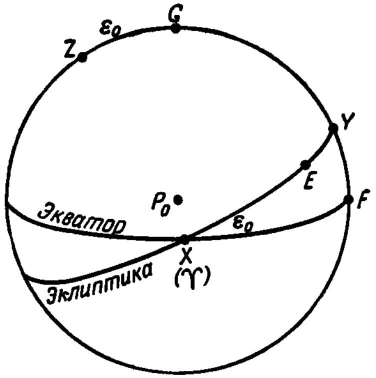

Рис. 9.

Пусть на рис. 9 E — точка на эклиптике, соответствующая положению Земли в момент t, и пусть r', f' и $\tilde{\omega}'$ — величины, относящиеся к орбите Земли. Тогда $XE = \tilde{\omega}' + f'$, и так как

$$
x_1' = r' \cos EX, \quad y_1' = r' \cos EF, \quad z_1' = r' \cos EG,
$$

то получаем

$$
\begin{aligned}
x_1' &= r' \cos(\tilde{\omega}' + f'),\\
y_1' &= r' \sin(\tilde{\omega}' + f') \cos \varepsilon_0,\\
z_1' &= r' \sin(\tilde{\omega}' + f') \sin \varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

Поскольку элементы орбиты Земли известны, эксцентрическая аномалия E' может быть вычислена обычным путем. Тогда r' и f' вычисляются по формулам § 2.14.

Если X, Y, Z — геоцентрические экваториальные координаты Солнца, то $X = -x_1'$, $Y = -y_1'$, $Z = -z_1'$, причем соответствующие координатные оси параллельны экваториальным осям, изображенным на рис. 9, и таким же образом направлены. Координаты X, Y, Z

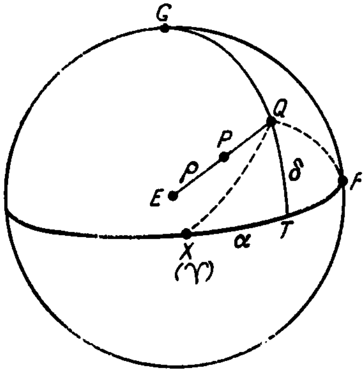

Рис. 10.

табулированы в Nautical Almanac[1]) на начало каждого дня на протяжении года. Следовательно, они могут быть найдены путем интерполяции для любого момента t.

4. Пусть ξ, η, ζ — геоцентрические экваториальные координаты планеты P в момент t (рис. 10). Тогда

$$\xi = x_1 - x_1', \quad \eta = y_1 - y_1', \quad \zeta = z_1 - z_1',$$

или

$$\xi = x_1 + X, \quad \eta = y_1 + Y, \quad \zeta = z_1 + Z,$$

откуда могут быть получены значения ξ, η и ζ.

Пусть радиус-вектор EP пересекает сферу в точке Q. Пусть, кроме того, GQT — меридиан, проходящий через Q, XT — прямое восхождение α и TQ — склонение δ. Обозначая EP через ρ, мы имеем

$$\xi = \rho \cos Q\Upsilon, \quad \eta = \rho \cos QF, \quad \zeta = \rho \cos QG,$$

откуда получаем

$$\xi = \rho \cos\alpha \cos\delta, \quad \eta = \rho \sin\alpha \cos\delta, \quad \zeta = \rho \sin\delta.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{\xi}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

---

[1]) Английский астрономический Ежегодник. — *Прим. ред.*

Таким образом, координаты α и δ получены.

5. *Заключение*. Формулы, выведенные в этом параграфе, легко применить для вычисления *эфемериды* планеты, т. е. ее координат (α, δ) с интервалом, например, в 10 суток. Исходя из известных элементов орбиты, вычисляем величины $P_x, \ldots, Q_z$, которые являются функциями только элементов и наклонности эклиптики и поэтому имеют одни и те же значения при вычислениях для всех моментов $t_1, t_2, \ldots$. Величины $E_1, E_2, \ldots$, соответствующие этим моментам, конечно, вычисляются отдельно способом, описанным в § 2.11. После окончания этих вычислений мы по формулам (6) можем найти гелиоцентрические экваториальные координаты для каждого из моментов $t_1, t_2, \ldots$. Формулы третьего и четвертого этапов дают возможность получить прямые восхождения и склонения для требуемых моментов.

Глава 3

РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

§ 3.01. Введение

В этой главе мы займемся разложениями в ряды различных функций, относящихся к эллиптическому движению. Большая часть наших результатов будет представлять подготовку для получения (в гл. 7) разложения возмущающей функции R [определяемой формулой (4) § 1.07] в виде, пригодном для решения уравнений движения планеты P, возмущаемой планетой P_1, или уравнений возмущенного движения спутника вокруг планеты.

В § 2.14 дана следующая группа формул эллиптического движения:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{2}$$

$$r=a(1-e\cos E), \tag{3}$$

$$E-e\sin E=M=n(t-\tau). \tag{4}$$

Формула (1) выражает r через истинную аномалию f, а формула (3) — через эксцентрическую аномалию E. Уравнение Кеплера (4) дает возможность выразить E через среднюю аномалию M. Чтобы выразить некоторую функцию $\psi(r, f)$ непосредственно через среднюю аномалию, т. е. по существу через t, мы используем тот факт, что обычно в теориях планет и спутников эксцентриситет e мал, и, следовательно, мы можем разложить $\psi(r, f)$ в периодический ряд по степени e. Этот процесс разложения обычно состоит из двух частей. Сначала $\psi(r, f)$ разлагается в ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' (A_n\cos nE+B_n\sin nE),$$

коэффициенты которого обычно являются рядами по степеням e. Затем $\cos nE$ и $\sin nE$ разлагаются соответственно в периодические ряды вида

$$a_0+a_1\cos M+a_2\cos 2M+\ \ldots$$

и

$$b_1\sin M+b_2\sin 2M+\ \ldots,$$

причем коэффициенты a и b обычно также являются рядами по степеням e.

Перед тем как перейти к разложению в ряды, мы посвятим ближайшие три параграфа рассмотрению ряда Лагранжа, функций Бесселя и гипергеометрического ряда, которые будут использованы в дальнейшем.

§ 3.02. Ряд Лагранжа

Рассмотрим соотношение между x и y, выражаемое формулой

$$y = x + \alpha\varphi(y), \tag{1}$$

в которой φ — заданная функция, α — малый параметр, под которым в будущем будем понимать $e/2$. Теорема Лагранжа состоит в том, что функция $F(y)$ может быть разложена в ряд по степеням α следующим образом:

$$F(y) = F_x + \frac{\alpha}{1!}\left(\varphi_x \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_x^2 \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi_x^n \frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \ldots, \tag{2}$$

где $F_x \equiv F(x)$ и $\varphi_x \equiv \varphi(x)$. При этом предполагается, что φ, F и их производные являются непрерывными функциями.

Рассматривая формулу (1) как уравнение относительно y, мы в принципе можем выразить y через α и x; например, если пренебречь α^2, то мы получим приближенно $y = x + \alpha\varphi(x)$. Предположим теперь, что $y = f(\alpha, x)$ есть решение уравнения (1). Тогда $F(y)$ может быть выражена через α и x, и применение теоремы Маклорена дает

$$F(y) = F_0 - \frac{\alpha}{1!}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_0 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_0 + \ldots,$$

где индекс „нуль" означает, что после дифференцирования нужно положить $\alpha = 0$.

Пусть A означает оператор $\partial/\partial\alpha$; тогда предыдущее разложение примет вид

$$F(y) = F_x + \frac{\alpha}{1!}(AF)_0 + \frac{\alpha^2}{2!}(A^2F)_0 + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}(A^nF)_0 + \ldots. \tag{3}$$

Из формулы (1) также следует

$$Ay = \varphi(y) + \alpha\frac{d\varphi}{dy}Ay. \tag{4}$$

Пусть D означает оператор $\partial/\partial x$. Тогда из формулы (1) имеем

$$Dy = 1 + \alpha \frac{d\varphi}{dy} Dy. \tag{5}$$

Умножим уравнение (5) на $\varphi(y)$ и вычтем из уравнения (4); тогда

$$(Ay - \varphi Dy)\left(1 - \alpha \frac{d\varphi}{dy}\right) = 0.$$

Однако

$$1 - \alpha \frac{d\varphi}{dy} \neq 0, \quad \text{ибо если} \quad 1 - \alpha \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

то $\alpha\varphi = y + \mathrm{const}$, что противоречит уравнению (1), в котором, по предположению, φ — произвольная функция от y. Следовательно,

$$Ay = \varphi Dy. \tag{6}$$

Равенство (6) является соотношением между операторами A и D, совместимое с уравнением (1).

С другой стороны, при помощи равенства (6) находим

$$AF(y) \equiv \frac{\partial F(y)}{\partial \alpha} = \frac{dF}{dy} Ay = \varphi \frac{\partial F}{\partial y} Dy,$$
$$DF(y) \equiv \frac{\partial F(y)}{\partial x} = \frac{dF}{dy} Dy.$$

Поэтому

$$AF = \varphi DF. \tag{7}$$

Докажем теперь справедливость следующей формулы:

$$A^n F = D^{n-1}\left(\varphi^n DF\right). \tag{8}$$

Предположим, что она верна и применим к ней оператор A. Тогда, так как α и x являются независимыми, а поэтому операторы A и D также будут независимыми, подчиненными закону коммутативности, то мы получим

$$A^{n+1}F = D^{n-1}\left\{A\left(\varphi^n DF\right)\right\}.$$

Далее, используя равенство (6), будем иметь

$$\begin{aligned} A(\varphi^n DF) &= DF \cdot A(\varphi^n) + \varphi^n \cdot D(AF) = \\ &= DF \cdot \varphi D(\varphi^n) + \varphi^n \cdot D(AF) = \\ &= \varphi DF \cdot D(\varphi^n) + \varphi^n \cdot D(\varphi DF) = \\ &= D(\varphi^{n+1} DF). \end{aligned}$$

Поэтому

$$A^{n+1}F = D^n\left(\varphi^{n+1} DF\right).$$

Следовательно, если формула (8) верна при некотором n, то она будет также верна и при замене n на $n+1$. Но эта формула справедлива при $n=1$, так как она тогда приводится к формуле (7); следовательно, формула (8) справедлива при любом n.

Теперь, если перейти к производным, то формула (8) примет вид

$$\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi^n \frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_0=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi_x^n \frac{\partial F_x}{\partial x}\right).$$

Подставляя последнее равенство в разложение (3), мы видим, что теорема, выражаемая формулой (2), доказана.

Предыдущее доказательство формулы (2) заимствовано из «Теории планет» Брауна и Шука[1]). Этими авторами дано также некоторое обобщение этой теоремы.

§ 3.03. Функции Бесселя

Рассмотрим выражение

$$U\equiv e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}=e^{\frac{x}{2}z}\cdot e^{-\frac{x}{2}z^{-1}}, \tag{1}$$

или

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n z^n}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^m z^{-m}}{m!}. \tag{2}$$

Пусть $J_p(x)$ означает коэффициент при z^p ряда, полученного перемножением рядов в формуле (2). Тогда имеем

$$\begin{aligned}U=J_0(x)+J_1(x)z+J_2(x)z^2+\ldots+\\+J_{-1}(x)z^{-1}+J_{-2}(x)z^{-2}+\ldots,\end{aligned} \tag{3}$$

или

$$U=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n. \tag{4}$$

Из формулы (2) легко увидеть, что

$$J_n(x)=\frac{(x/2)^n}{n!}\left[1-\frac{(x/2)^2}{1\cdot(n+1)}+\frac{(x/2)^4}{1\cdot 2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}-\ldots\right]. \tag{5}$$

---

[1]) E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, 1933, p. 37.

Функция $J_n(x)$ называется *функцией Бесселя первого рода порядка n*.

Приступим к выводу некоторых соотношений между функциями Бесселя.

1) Из формулы (1) видно, что U остается неизменной, если вместо z написать $-z^{-1}$. Следовательно, из разложения (3) находим

$$U = J_0(x) - J_1(x) z^{-1} + J_2(x) z^{-2} - \ldots - \\ - J_{-1}(x) z + J_{-2}(x) z^2 - \ldots . \tag{6}$$

Сравнивая ряды (3) и (6), получаем

$$J_{-1}(x) = -J_1(x); \quad J_{-2}(x) = J_2(x); \quad \ldots$$

и вообще

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{7}$$

2) Из равенства (1) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x}{2}(1 + z^{-2}) U,$$

а из формулы (4) находим

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1) J_{n+1}(x) z^n.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{2}(1 + z^{-2}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} (n+1) J_{n+1}(x) z^n. \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в равенстве (8), получаем

$$\frac{x}{2}[J_n(x) + J_{n+2}(x)] = (n+1) J_{n+1}(x),$$

или, заменяя n на $n-1$,

$$n J_n(x) = \frac{x}{2}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \tag{9}$$

3) Пусть $J'(x)$ означает $(d/dx) J(x)$. Из формул (1) и (4) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) U = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n'(x) z^n$$

или

$$\frac{1}{2}(z-z^{-1})\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\,z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} J'_n(x)\,z^n.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^n, находим

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \tag{10}$$

4) Покажем теперь, что $J_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка — уравнению Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{11}$$

Из формулы (10) имеем

$$J''_n(x) = \frac{1}{4}\{[J_{n-2}(x) - J_n(x)] - [J_n(x) - J_{n+2}(x)]\} =$$
$$= -J_n(x) + \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) + J_n(x)] + \frac{1}{4}[J_n(x) + J_{n+2}(x)],$$

и далее, при помощи соотношений (9) и (10) находим

$$J''_n(x) + J_n(x) = \frac{1}{2x}[(n-1)J_{n-1}(x) + (n+1)J_{n+1}(x)] =$$
$$= \frac{n^2}{x^2}J_n(x) - \frac{1}{x}J'_n(x).$$

Тем самым проверено, что $J_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (11).

5) Функция Бесселя порядка n может быть представлена в интегральной форме следующим образом.

Сделаем в равенствах (1) и (4) подстановку $z = e^{i\theta}$, где $i^2 = -1$. Тогда

$$U \equiv e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\,e^{in\theta}.$$

Умножим обе части на $e^{-in\theta}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π. Тогда, так как

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta = 2\pi \quad \text{или } 0$$

(что соответствует случаям $k=0$ или k — положительное или отрицательное целое число), то мы получим

$$2\pi J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)}\,d\theta.$$

Представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов, в первом из которых пределы интегрирования равны 0 и π, а во втором — π и 2π. Во втором интеграле заменим θ на $2\pi-\theta$. Тогда получим

$$2\pi J_n(x) = \int_0^{\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)}\,d\theta + e^{-2in\pi}\int_0^{\pi} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}\,d\theta,$$

откуда

$$\pi J_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta. \tag{12}$$

§ 3.04. Гипергеометрический ряд

Гипергеометрический ряд, обозначаемый через $F(a, b, c; x)$, определяется формулой

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \ldots . \tag{1}$$

Этот ряд сходится, если $|x|<1$. В приложениях x имеет порядок e^2, так что условие сходимости удовлетворяется.

Функция F может принимать различные формы, из которых мы отметим для будущего использования следующую:

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{-a}F\left(a, c-b, c; -\frac{x}{1-x}\right). \tag{2}$$

Легко проверить, что F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(a+b+1)x - c]\frac{dy}{dx} + aby = 0. \tag{3}$$

§ 3.05. Метод разложения некоторых функций r и f в периодические ряды

Пусть

$$\xi = e^{if}, \qquad \eta = e^{iE}, \tag{1}$$

где $i^2 = -1$ и e — основание неперовых логарифмов. Тогда

$$\xi^k \equiv e^{ikf} = \cos kf + i\sin kf, \qquad \xi^{-k} = \cos kf - i\sin kf. \tag{2}$$

Аналогичные формулы справедливы и для η^k и η^{-k}.

Представим эксцентриситет e в виде

$$e = \sin\varphi \tag{3}$$

и обозначим

$$\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi. \tag{4}$$

Тогда

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \tag{5}$$

и

$$\beta = \frac{1}{e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right). \tag{6}$$

Последняя формула показывает, что β имеет порядок $e/2$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \frac{1+\beta}{1-\beta}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E. \tag{7}$$

Но

$$i\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \frac{e^{if}-1}{e^{if}+1} = \frac{\xi-1}{\xi+1}.$$

Подобным же образом имеем

$$i\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \frac{\eta-1}{\eta+1}.$$

Поэтому формула (7) принимает вид

$$\frac{\xi-1}{\xi+1} = \frac{1+\beta}{1-\beta}\cdot\frac{\eta-1}{\eta+1},$$

откуда

$$\xi = \frac{\eta-\beta}{1-\beta\eta} = \frac{\eta\left(1-\beta\eta^{-1}\right)}{1-\beta\eta} \tag{8}$$

и

$$\eta = \frac{\xi\left(1+\beta\xi^{-1}\right)}{1+\beta\xi}. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$r = a(1 - e\cos E) = a\left[1 - \frac{2\beta}{1+\beta^2}\left(\eta + \eta^{-1}\right)\right].$$

Поэтому

$$\frac{r}{a} = \frac{(1-\beta\eta)\left(1-\beta\eta^{-1}\right)}{1+\beta^2}. \tag{10}$$

Через ξ величина r выражается следующей формулой:

$$\frac{r}{a} \equiv \frac{1-e^2}{1+e\cos f} = \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{1+\beta^2}\,\frac{1}{(1+\beta\xi)\left(1+\beta\xi^{-1}\right)}. \tag{11}$$

§ 3.06. Разложение β^m в ряд по степеням e

Напишем формулу (5) предыдущего параграфа в виде

$$\beta = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\beta^2,$$

или

$$\beta = x + \alpha\varphi(\beta),$$

где $\alpha = e/2$ и $\varphi(\beta) = \beta^2$, так что $\varphi(x) = x^2$. В ряде Лагранжа для $F(\beta) \equiv \beta^m$ мы должны отождествить x с $e/2$.

На основании теоремы Лагранжа § 3.02 мы имеем

$$\beta^m = x^m + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{2n}\frac{d}{dx}(x^m)\right] =$$

$$= x^m + m\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{2n+m-1}) =$$

$$= x^m + m\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(2n+m-1)!}{(n+m)!}x^{n+m},$$

или, выражая через e,

$$\beta^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1 + m\sum_1^\infty \frac{(2n+m-1)!}{n!\,(n+m)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\right]. \qquad (1)$$

Выпишем несколько первых членов этого разложения

$$\beta^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1 + \frac{m}{4}e^2 + \frac{m(m+3)}{4^2\cdot 2!}e^4 + \frac{m(m+4)(m+5)}{4^3\cdot 3!}e^6 + \ldots\right]. \qquad (2)$$

§ 3.07. Выражение f через E

Мы будем исходить из формулы (8) § 3.05, а именно:

$$\xi = \frac{\eta(1-\beta\eta^{-1})}{1-\beta\eta}. \qquad (1)$$

Логарифмируя эту формулу и имея в виду, что $\xi = e^{if}$, $\eta = e^{iE}$, получаем

$$if = iE + \ln(1-\beta\eta^{-1}) - \ln(1-\beta\eta) =$$

$$= iE + \beta(\eta - \eta^{-1}) + \frac{\beta^3}{2}(\eta^2 - \eta^{-2}) + \ldots .$$

Следовательно,

$$f = E + 2\beta\sin E + \beta^2\sin 2E + 2\frac{\beta^3}{3}\sin 3E + \ldots,$$

или

$$f = E + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE. \tag{2}$$

Примечание. Выражение E через f получается немедленно из равенства (2) при помощи формулы (9) § 3.05:

$$\eta = \frac{\xi(1+\beta\xi^{-1})}{1+\beta\xi} \equiv \frac{\xi(1-\beta_1\xi^{-1})}{1-\beta_1\xi}, \tag{3}$$

где $\beta_1 \equiv -\beta$. Так как формулы (1) и (3) имеют один и тот же аналитический вид, то мы выразим E через f, если поменяем местами f и E в равенстве (2) и напишем $(-\beta)$ вместо β. Следовательно,

$$E = f + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{n} \sin nf. \tag{4}$$

§ 3.08. Разложение $r^p \cos pf$ и $r^p \sin pf$

Из формул (8) и (10) § 3.05 мы имеем

$$r\xi = \frac{a\eta(1-\beta\eta^{-1})^2}{1+\beta^2}.$$

Поэтому

$$r^p\xi^p = a^p(1+\beta^2)^{-p}\eta^p(1-\beta\eta^{-1})^{2p}, \tag{1}$$

где p — положительное или отрицательное целое число. Пусть

$$C_j^k = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-j+1)}{j!}, \tag{2}$$

где j — положительное целое число, а k — положительное или отрицательное целое число.

Если k и j — целые положительные числа, то C_j^k — коэффициент при x^j в разложении бинома $(1+x)^k$. При этом предполагается, что $j < k$.

Из формулы (1) мы тогда получим

$$r^p\xi^p = a^p(1+\beta^2)^{-p}\eta^p\left\{1 - C_1^{2p}(\beta\eta^{-1}) + C_2^{2p}(\beta\eta^{-1})^2 - \ldots\right\} =$$
$$= a^p(1+\beta^2)^{-p}\left\{\eta^p - C_1^{2p}\beta\eta^{p-1} + C_2^{2p}\beta^2\eta^{p-2} - \ldots\right\}.$$

Поэтому, беря в этом равенстве отдельно действительную и мнимую части, мы найдем

$$r^p \cos pf =$$
$$= a^p (1+\beta^2)^{-p} \left[\cos pE - \beta C_1^{2p} \cos (p-1) E + \beta^2 C_2^{2p} \cos (p-2) E - \ldots\right],$$
$$r^p \sin pf =$$
$$= a^p (1+\beta^2)^{-p} \left[\sin pE - \beta C_1^{2p} \sin (p-1) E + \beta^2 C_2^{2p} \sin (p-2) E - \ldots\right].$$

Каждый из этих рядов будет конечным, если p — целое положительное число.

§ 3.09. Разложение $r^p \cos qf$ и $r^p \sin qf$

Из формул (8) и (10) § 3.05 имеем

$$r^p \zeta^q = a^p \eta^q (1+\beta^2)^{-p} (1-\beta\eta)^{p-q} (1-\beta\eta^{-1})^{p+q}. \tag{1}$$

Здесь мы предположим, что p — положительное или отрицательное целое число и что q — положительное целое число (это последнее предположение не приводит к нарушению общности).

Мы имеем

$$(1-\beta\eta)^{p-q} (1-\beta\eta^{-1})^{p+q} =$$
$$= \left[1 + \sum_{n=1} (-1)^n C_n^{p-q} \beta^n \eta^n\right] \left[1 + \sum_{m=1} (-1)^m C_m^{p+q} \beta^m \eta^{-m}\right] =$$
$$= 1 + \beta^2 C_1^{p-q} C_1^{p+q} + \beta^4 C_2^{p-q} C_2^{p+q} + \ldots +$$
$$+ \sum_{n=1} (-1)^n \eta^n \left(C_n^{p-q} \beta^n + C_{n+1}^{p-q} C_1^{p+q} \beta^{n+2} + \ldots\right) +$$
$$+ \sum_{m=1} (-1)^m \eta^{-m} \left(C_m^{p+q} \beta^m + C_{m+1}^{p+q} C_1^{p-q} \beta^{m+2} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1} C_k^{p+q} C_k^{p-q} \beta^{2k} + \tag{2}$$
$$+ \sum_{n=1} (-\beta\eta)^n \left(C_n^{p-q} + \sum_{k=1} C_{n+k}^{p-q} C_k^{p+q} \beta^{2k}\right) + \tag{3}$$
$$+ \sum_{n=1} (-\beta\eta^{-1})^n \left(C_n^{p+q} + \sum_{k=1} C_{n+k}^{p+q} C_k^{p-q} \beta^{2k}\right). \tag{4}$$

Далее, по определению C_{n+k}^j имеем

$$C_{n+k}^j = C_n^j \cdot \frac{(j-n)(j-n-1) \ldots (j-n-k+1)}{(n+1)(n+2) \ldots (n+k)} =$$
$$= C_n^j C_k^{j-n} \frac{k!}{(n+1)(n+2) \ldots (n+k)}, \tag{5}$$

где n и k — положительные целые числа.

Выражение, заключенное во второй скобке в формуле (3), при помощи равенства (5) приводится к виду

$$C_n^{p-q}\left[1+\sum_{k=1} C_k^{p+q} C_k^{p-q-n} \frac{k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \beta^{2k}\right]. \qquad (6)$$

Далее, если в формуле (1) § 3.04 для F написать $-a_1$ вместо a и $-b_1$ вместо b, то получим

$$F(a, b, c; x)=$$
$$=1+\sum_{k=1}(-1)^k \frac{a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k+1)}{k!}\cdot(-1)^k \frac{b_1(b_1-1)\ldots(b_1-k+1)}{c(c+1)\ldots(c+k-1)} x^k=$$
$$=1+\sum_{k=1} C_k^{a_1} C_k^{b_1} \frac{k!}{c(c+1)\ldots(c+k-1)} x^k. \qquad (7)$$

Поэтому выражение (6) принимает вид

$$C_n^{p-q} F(-p-q,\ -p+q+n,\ n+1;\ \beta^2).$$

Положим

$$G_n(p, q) \equiv F(-p-q,\ -p+q+n,\ n+1;\ \beta^2). \qquad (8)$$

Тогда выражение (3) запишется в виде

$$\sum_{n=1}(-\beta\eta)^n C_n^{p-q} G_n(p, q). \qquad (9)$$

Аналогично выражение (4) примет вид

$$\sum_{n=1}(-\beta\eta^{-1})^n C_n^{p+q} G_n(p, -q), \qquad (10)$$

а выражение (2) с учетом формулы (7) — вид

$$G_0(p, q). \qquad (11)$$

Таким образом, мы получаем

$$(1-\beta\eta)^{p-q}(1-\beta\eta^{-1})^{p+q}=G_0(p, q)+\sum_{n=1}(-\beta\eta)^n C_n^{p-q} G_n(p, q)+$$
$$+\sum_{n=1}(-\beta\eta^{-1})^n C_n^{p+q} G_n(p, -q). \qquad (12)$$

Посредством преобразования (2) § 3.04 мы можем равенство (12) записать в другой форме, а именно

$$G_n(p, q)=(1-\beta^2)^{p+q} F\left(-p-q,\ p-q+1,\ n+1;\ -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)$$

или, вводя обозначение

$$T_n(p, q) \equiv F\left(-p-q, p-q+1, n+1; -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right),$$

так:

$$G_n(p, q) = (1-\beta^2)^{p+q} T_n(p, q).$$

Мы теперь имеем

$$\begin{aligned}(1-\beta\eta)^{p-q}(1-\beta\eta^{-1})^{p+q} &= (1-\beta^2)^{p+q} T_0(p, q) + \\ &+ (1-\beta^2)^{p+q} \sum (-\beta\eta)^n C_n^{p-q} T_n(p, q) + \\ &+ (1-\beta^2)^{p-q} \sum (-\beta\eta^{-1})^n C_n^{p+q} T_n(p, -q).\end{aligned} \tag{13}$$

Преимущество функции T по сравнению с G состоит в том, что ее разложение сходится быстрее, чем разложение функции G, когда n является сравнительно большим числом.

Так как

$$\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \sqrt{1-e^2},$$

то формула (1) примет вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^p \xi^q = (1-e^2)^{p/2}\Big[&(1-\beta^2)^q T_0(p, q)\,\eta^q + \\ &+ (1-\beta^2)^q \sum_{n=1} (-1)^n \beta^n C_n^{p-q} T_n(p, q)\,\eta^{q+n} + \\ &+ (1-\beta^2)^{-q} \sum_{n=1} (-1)^n \beta^n C_n^{p+q} T_n(p, -q)\,\eta^{q-n}\Big].\end{aligned} \tag{14}$$

Приравнивая действительные и мнимые части, отсюда находим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qf = A_0 \cos qE + \sum_{n=1} A_n \cos(q+n)E + \sum_{n=1} B_n \cos(q-n)E, \tag{15}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \sin qf = A_0 \sin qE + \sum_{n=1} A_n \sin(q+n)E + \sum_{n=1} B_n \sin(q-n)E, \tag{16}$$

где

$$A_0 = (1-e^2)^{p/2}(1-\beta^2)^q T_0(p, q), \tag{17}$$

$$A_n = (-1)^n (1-e^2)^{p/2}(1-\beta^2)^q C_n^{p-q} T_n(p, q)\,\beta^n, \tag{18}$$

$$B_n = (-1)^n (1-e^2)^{p/2}(1-\beta^2)^{-q} C_n^{p+q} T_n(p, -q)\,\beta^n. \tag{19}$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1) *Разложение* $(r/a)^p$.

Здесь $q=0$. Поэтому

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p = A'_0 + 2\sum A'_n \cos nE, \tag{20}$$

где

$$A'_0 = (1-e^2)^{p/2} F\left(-p,\ p+1,\ 1;\ -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right), \tag{21}$$

$$A'_n = (-1)^n (1-e^2)^{p/2} F\left(-p,\ p+1,\ n+1;\ -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) C_n^p \beta^n. \tag{22}$$

2) *Разложение* a/r.

Здесь $p=-1$, $q=0$. Поэтому $C_n^p=(-1)^n$ и $T_n(-1,\ 0)=1$. Из формул (20) — (22) находим

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+2\sum_1 \beta^n \cos nE\right). \tag{23}$$

3) *Разложение* a^2/r^2.

В этом случае $p=-2$, $q=0$. Поэтому $C_n^p=(-1)^n(n+1)$ и

$$T_n(p,\ 0) = F\left(2,\ -1,\ n+1;\ -\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right) =$$
$$= 1+\frac{2\beta^2}{(n+1)(1-\beta^2)} = \frac{1}{n+1}\left[n+(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Из формулы (20) получаем

$$\frac{a^2}{r^2} = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\left[1+2\sum_1 \left(1+n\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n \cos nE\right]. \tag{24}$$

4) *Разложения* $\cos qf$ *и* $\sin qf$.

Из формул (15) и (16) при $p=0$ находим

$$\cos qf = A''_0 \cos qE + \sum_1 A''_n \cos(q+n)E + \sum_1 B''_n \cos(q-n)E, \tag{25}$$

$$\sin qf = A''_0 \sin qE + \sum_1 A''_n \sin(q+n)E + \sum_1 B''_n \sin(q-n)E, \tag{26}$$

где

$$A''_0 = (1-\beta^2)^q T_0(0,\ q), \tag{27}$$

$$A''_n = (-1)^n (1-\beta^2)^q C_n^{-q} T_n(0,\ q)\beta^n, \tag{28}$$

$$B''_n = (-1)^n (1-\beta^2)^{-q} C_n^q T_n(0,\ -q)\beta^n. \tag{29}$$

5) *Разложения* $\cos f$ *и* $\sin f$.

Из формулы

$$1+e\cos f=\frac{a}{r}(1-e^2)$$

посредством равенства (23) получаем

$$\cos f=-\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}+\frac{2\beta\sqrt{1-e^2}}{e}\sum_1 \beta^{n-1}\cos nE,$$

что может быть записано в виде

$$\cos f=-\beta+(1-\beta^2)\sum_1 \beta^{n-1}\cos nE. \tag{30}$$

Это последнее равенство можно получить, выделяя действительную часть в формуле

$$\xi=-\beta+(1-\beta^2)\sum_1 \beta^{n-1}\eta^n.$$

Взяв мнимую часть этой формулы, найдем

$$\sin f=(1-\beta^2)\sum_1 \beta^{n-1}\sin nE. \tag{31}$$

§ 3.10. Разложения некоторых функций от r и M в ряды, содержащие f

1) Согласно формуле (9) § 3.05, имеем

$$\eta=\frac{\xi(1+\beta\xi^{-1})}{1+\beta\xi}.$$

Сравним эту формулу с формулой (8) § 3.05, а именно:

$$\xi=\frac{\eta(1-\beta\eta^{-1})}{1-\beta\eta}.$$

Очевидно, что разложение любой функции от η в ряд, зависящий от ξ, можно получить, если в разложении такой же функции от ξ в ряд, зависящий от η, подставить вместо η величину ξ (т. е. поменять местами f и E) и заменить β на $-\beta$. Например, из формул (25) и (26) § 3.09 получаем

$$\cos qE=A_0''\cos qf+\sum_{n=1} D_n\cos(q+n)f+\sum_{n=1} E_n\cos(q-n)f, \tag{1}$$

$$\sin qE=A_0''\sin qf+\sum_{n=1} D_n\sin(q+n)f+\sum_{n=1} E_n\sin(q-n)f, \tag{2}$$

где A_0'' дается формулой (27) § 3.09 и

$$D_n=(-1)^n A_n'',\quad E_n=(-1)^n B_n''.$$

В частности, при $q=1$, мы из формулы (30) § 3.09 получаем

$$\cos E=\beta+(1-\beta^2)\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\beta^{n-1}\cos nf, \tag{3}$$

а из формулы (31) § 3.09 находим

$$\sin E=(1-\beta^2)\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\beta^{n-1}\sin nf. \tag{4}$$

Далее, чтобы получить разложение $(r/a)^{-p}$ по косинусам кратных f, мы поступим следующим образом. Из формулы (11) § 3.09 имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{a}\right)^{-p}&=\frac{(1+\beta^2)^p}{(1-\beta^2)^{2p}}(1+\beta\xi)^p\left(1+\beta\xi^{-1}\right)^p=\\&=\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{2p}\left[(1+\beta^2)^{-p}(1+\beta\xi)^p\left(1+\beta\xi^{-1}\right)^p\right].\end{aligned} \tag{5}$$

Но, согласно формуле (10) § 3.05, $(r/a)^p$ выражается через η следующим образом:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p=(1+\beta^2)^{-p}(1+\beta\eta)^p\left(1-\beta\eta^{-1}\right)^p,$$

или, согласно формуле (20) § 3.09,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p=A_0'+2\sum A_n'\cos nE,$$

где A_0' и A_n' соответственно даются формулами (21) и (22) § 3.09. Легко видеть, что выражение, стоящее внутри квадратных скобок формулы (5), можно представить в виде функции f, если написать ξ вместо η, т. е. f вместо E, и $-\beta$ вместо β. В результате будем иметь

$$\beta_0'+2\sum_{n=1}B_n'\cos nf,$$

где

$$B_0'=A_0'=(1-e^2)^{p/2}T_0(p,\ 0),$$

$$B_n'=(-1)^n A_n'=(1-e^2)^{p/2}T_n(p,\ 0)\,C_n^p\beta^n.$$

Поэтому, так как $(1-\beta^2)/(1+\beta^2)=\sqrt{1-e^2}$, то из формулы (5) получим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-p}=\frac{1}{(1-e^2)^{p/2}}\left[T_0(p,\ 0)+2\sum_{n=1}T_n(p,\ 0)\,C_n^p\beta^n\cos nf\right]. \tag{6}$$

Если $p=-2$, то последнее равенство примет вид

$$r^2=a^2\sqrt{1-e^2}\left[1+2\sum_{n=1}(-1)^n\left(1+n\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\cos nf\right]. \tag{7}$$

2) Выразим среднюю аномалию M через f. Мы имеем

$$\frac{a}{r}=\frac{1+e\cos f}{1-e^2}, \qquad \frac{dr}{df}=\frac{er^2\sin f}{a(1-e^2)}.$$

Но

$$r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin E.$$

Следовательно,

$$\frac{dr}{df}=\frac{er\sin E}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$r=a(1-e\cos E) \quad \text{и} \quad E-e\sin E=M.$$

Поэтому

$$\frac{dr}{dM}=ae\sin E\frac{dE}{dM}=\frac{a^2e}{r}\sin E. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) находим

$$\frac{dM}{df}=\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}.$$

Используя равенство (7) и интегрируя последнее уравнение при условии, что M обращается в нуль вместе с f, мы получим

$$M=f+2\sum_{n=1}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-e^2}\right)\beta^n\sin nf. \tag{10}$$

Угол $f-M$ называется *уравнением центра*. Формула (10) дает его выражение через истинную аномалию.

До членов порядка e^4 найдено

$$M=f-2e\sin f+\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4\right)\sin 2f-\frac{1}{3}e^3\sin 3f+\frac{5}{32}e^4\sin 4f.$$

Обращая этот ряд, можно выразить f через M и e определить по формуле

$$f=M+\left(2e-\frac{1}{4}e^3\right)\sin M+$$
$$+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4\right)\sin 2M+\frac{13}{12}e^3\sin 3M+\frac{103}{96}e^4\sin 4M. \tag{11}$$

§ 3.11. Разложения в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии

Пусть $F(M)$ — периодическая функция M, которую предполагается разложить в сходящийся ряд вида

$$F(M)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nM+\sum_{r=1}^{\infty}B_n\sin nM. \tag{1}$$

Умножим обе части равенства (1) на $\cos nM$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π. Тогда при $n \neq 0$ получим

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(M)\cos nM\,dM. \tag{2}$$

Умножим равенство (1) на $\sin nM$ и проинтегрируем в тех же пределах. Мы найдем

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(M)\sin nM\,dM. \tag{3}$$

Кроме того, проинтегрировав равенство (1) в пределах от 0 до π, получим

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(M)\,dM. \tag{4}$$

Если $F(M)$ — *четная* функция M, то коэффициенты B_r в формуле (1) равны нулю ($r = 1, 2, \ldots$).

Если $F(M)$ — *нечетная* функция M, то коэффициенты A_r в формуле (1) будут равны нулю ($r = 0, 1, 2, \ldots$).

Выведем теперь требуемые разложения.

1) *Разложение* $\cos kE$.

E связана с M посредством уравнения Кеплера

$$E - e\sin E = M. \tag{5}$$

Так как $\cos kE$ является четной функцией E, а следовательно, и M, то мы имеем

$$\cos kE = \frac{1}{2}A_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n}\cos nM.$$

На основании формулы (2) пишем

$$A_{k,n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kE\cos nM\,dM =$$

$$= \frac{2}{n\pi}[\cos kE\sin nM]_0^\pi + \frac{2k}{n\pi}\int\limits_0^\pi \sin kE\sin nM\,dE =$$

$$= \frac{k}{n\pi}\int\limits_0^\pi \cos(nM - kE)\,dE - \frac{k}{n\pi}\int\limits_0^\pi \cos(nM + kE)\,dE,$$

или, согласно формуле (5),

$$A_{k,n}=\frac{k}{n\pi}\int\limits_0^\pi \cos[(n-k)E-ne\sin E]\,dE-$$
$$-\frac{k}{n\pi}\int\limits_0^\pi \cos[(n+k)E-ne\sin E]\,dE.$$

Но на основании формулы (12) § 3.03 каждый из этих интегралов выражается через функции Бесселя:

$$A_{k,n}=\frac{k}{n}[J_{n-k}(ne)-J_{n+k}(ne)]. \tag{6}$$

Далее,

$$A_{k,0}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kE\,(1-e\cos E)\,dE=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos kE\,dE-\frac{e}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(k+1)E\,dE-\frac{e}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(k-1)E\,dE=$$
$$=0, \quad \text{если} \quad k>0,$$
$$=-e, \quad \text{если} \quad k=1.$$

Поэтому, если $k>1$, то

$$\cos kE=k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-k}(ne)-J_{n+k}(ne)]\cos nM. \tag{7}$$

Если $k=1$, то

$$\cos E=-\frac{1}{2}e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n-1}(ne)-J_{n+1}(ne)]\cos nM, \tag{8}$$

или, принимая во внимание формулу (10) § 3.03,

$$\cos E=-\frac{1}{2}e+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\cos nM. \tag{9}$$

2) *Разложение* $\sin kE$.

Эта функция является нечетной, и мы имеем

$$\sin kE=\sum_{n=1}^{\infty}B_{k,n}\sin nM. \tag{10}$$

Поэтому на основании формулы (3), следуя процедуре п. (1), находим

$$B_{k,n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kE\sin nM\,dM=$$
$$=\frac{k}{n\pi}\int_0^{\pi}[\cos(kE+nM)+\cos(nM-kE)]\,dE=$$
$$=\frac{k}{n}[J_{k+n}(ne)+J_{n-k}(ne)]. \tag{11}$$

В частности, когда $k=1$, будем иметь

$$\sin E=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[J_{n+1}(ne)+J_{n-1}(ne)]\sin nM, \tag{12}$$

или, согласно формуле (9) § 3.03,

$$\sin E=\frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \tag{13}$$

3) *Разложение r/a.*

Так как $r=a(1-e\cos E)$, то при помощи формулы (9) получаем

$$\frac{r}{a}=1+\frac{1}{2}e^2-2e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d}{de}[J_n(ne)]\cos nM=$$
$$=1+\frac{1}{2}e^2-\left(e-\frac{3}{8}e^3\right)\cos M-$$
$$-\frac{1}{2}e^2\cos 2M-\frac{3}{8}e^3\cos 3M-\ \ldots\ . \tag{14}$$

4) *Разложение E.*

Исходя из уравнения Кеплера

$$E=M+e\sin E,$$

посредством формулы (13) находим

$$E=M+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM. \tag{15}$$

5) *Разложение a/r.*

Из уравнения Кеплера мы имеем

$$\frac{dE}{dM}=\frac{a}{r}.$$

Поэтому, дифференцируя равенство (15), получаем

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne)\cos nM. \tag{16}$$

6) *Разложение* r^2/a^2.

Имеем

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{2r}{a^2}\frac{dr}{dE}\cdot\frac{dE}{dM} = 2e\sin E = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nM.$$

Следовательно,

$$\frac{r^2}{a^2} = C - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}J_n(ne)\cos nM,$$

где C — некоторая постоянная. Но так как

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e\cos E + \frac{1}{2}e^2\cos 2E,$$

то на основании формулы (9) непериодическая часть r^2/a^2 есть

$$1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e\left(-\frac{1}{2}e\right) \quad \text{или} \quad 1 + \frac{3}{2}e^2.$$

Поэтому

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}J_n(ne)\cos nM. \tag{17}$$

7) *Разложение* $\cos f$.

При помощи формулы (16) находим

$$e\cos f = -1 + (1-e^2)\frac{a}{r} = \\ = -1 + (1-e^2)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM\right].$$

Поэтому

$$\cos f = -e + \frac{2(1-e^2)}{e}\sum_{n=1}^{\infty}J_n(ne)\cos nM. \tag{18}$$

8) *Разложение* $\sin f$.

Имеем

$$r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin E = \frac{1}{e}\sqrt{1-e^2}\frac{dr}{dE}.$$

Но

$$\frac{dr}{dE} = \frac{dr}{dM} \cdot \frac{dM}{dE} = \frac{r}{a} \frac{dr}{dM}.$$

Следовательно,

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a}\right)$$

и вследствие формулы (14)

$$\sin f = 2\sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{de} [J_n(ne)] \sin nM. \tag{19}$$

9) *Разложения* $\cos f/r^2$ *и* $\sin f/r^2$.

Пусть ξ, η — координаты планеты в плоскости орбиты. Тогда

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Поэтому, принимая во внимание формулы (9) и (13), имеем

$$\frac{\xi}{a} = -\frac{3}{2} e + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} [J_n(ne)] \cos nM, \tag{20}$$

$$\frac{\eta}{a} = \frac{2}{e} \sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM. \tag{21}$$

Но

$$\xi = r\cos f, \quad \eta = r \sin f,$$

поэтому

$$\frac{\xi}{r^3} = \frac{\cos f}{r^2}, \quad \frac{\eta}{r^3} = \frac{\sin f}{r^2}.$$

Кроме того, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\xi} + \frac{\mu\xi}{r^3} = 0, \quad \ddot{\eta} + \frac{\mu\eta}{r^3} = 0,$$

или, так как $M = n(t-\tau) = (\mu a^{-3})^{1/2}(t-\tau)$, то

$$\frac{d}{dt} = n\frac{d}{dM} \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dt^2} = n^2 \frac{d^2}{dM^2} = \mu a^{-3} \frac{d^2}{dM^2}.$$

Поэтому

$$\frac{d^2\xi}{dM^2} + \frac{a^3\xi}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dM^2} + \frac{a^3\eta}{r^3} = 0.$$

Следовательно, из выражений (20) и (21) находим

$$\frac{\xi}{r^3} \equiv \frac{\cos f}{r^2} = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{de} [J_n(ne)] \cos nM, \tag{22}$$

$$\frac{\eta}{r^3} \equiv \frac{\sin f}{r^2} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{a^2 e} \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(ne) \sin nM. \tag{23}$$

В Дополнении (стр. 490) приводится несколько первых членов рядов, представляющих функции $J_n(ne)$ и $(d/de)[J_n(ne)]$.

Указания, касающиеся числовых таблиц функций Бесселя, можно найти в «Указателе математических таблиц» Флетчера, Миллера и Розенхеда [1]).

---

[1]) A. Fletcher, J. C. P. Miller, L. Rosenhead, An Index of Mathematical Tables, 244—270, London, 1946. [Таблицы функций Бесселя см. также в книгах: Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Изд. 2-е, Гостехиздат, М. — Л., 1949; Б. И. Сегал, К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, Изд-во АН СССР, 1948. — *Прим. ред.*]

Глава 4

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ ИЗВЕСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 4.01. Силовая функция

В этой главе мы займемся задачей нескольких тел (материальных точек), образующих в пространстве изолированную систему. Предположим, что имеется n таких тел: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами m_1, $m_2, \ldots m_n$ и координатами (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), $\ldots$, $(\xi_n, \eta_n, \ldots, \zeta_n)$ относительно инерциальной системы осей (системы Ньютона). Если P_i — тело с массой m_i и Δ_{ij} — расстояние между P_i и P_j в момент t, то потенциал в точке P_i будет выражаться формулой

$$G\left(\frac{m_1}{\Delta_{i1}}+\frac{m_2}{\Delta_{i2}}+\ldots+\frac{m_n}{\Delta_{in}}\right)$$

или

$$G\sum_{1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i).$$

Тогда уравнение движения тела P_i в проекции на ось ξ будет иметь вид

$$m_i\ddot{\xi}_i = G\frac{\partial}{\partial\xi_i}m_i\sum_{1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j \neq i \tag{1}$$

и, в частности, уравнение для тела P_1 запишется в виде

$$m_1\ddot{\xi}_1 = G\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}}+\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}}+\ldots+\frac{m_1m_n}{\Delta_{1n}}\right).$$

Если $i \neq 1$ и $j > i$, то Δ_{ij} не содержит координат тела P_1. Поэтому предыдущее уравнение не изменится, если к его правой части прибавить следующее выражение:

$$\begin{aligned}G\frac{\partial}{\partial\xi_1}\Big(\frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}&+\frac{m_2m_4}{\Delta_{24}}+\ldots+\frac{m_2m_n}{\Delta_{2n}}+\\&+\frac{m_3m_4}{\Delta_{34}}+\ldots+\frac{m_3m_n}{\Delta_{3n}}+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{m_{n-1}m_n}{\Delta_{n-1,n}}\Big).\end{aligned}$$

Пусть U определяется формулой

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j} \frac{G m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j > i. \tag{2}$$

Здесь U — симметричная функция всех рассматриваемых материальных точек. Следует заметить, что двойное суммирование включает член, содержащий произведение масс $m_i m_j$ только однажды.

Уравнение для координаты ξ массы m_1 теперь представится в виде

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}.$$

Очевидно, что уравнение для координаты ξ массы m_i будет

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i},$$

а вся система уравнений движения массы m_i запишется в виде

$$\begin{gathered} m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{gathered} \tag{3}$$

Функция U, определяемая формулой (2), называется *силовой функцией*.

Итак, имеется $3n$ уравнений движения, которые нужно решить, и поскольку каждое уравнение второго порядка, полное число произвольных постоянных, которые должны появиться в общем решении уравнений, равно $6n$. Система уравнений (3) обладает только 10 известными первыми интегралами, которые будут получены в § 4.03—4.06. В случае, когда $n = 3$, такая задача называется *задачей трех тел*.

Важное метрическое свойство силовой функции U состоит в том, что она не зависит от выбора системы координат, так как в нее входят только взаимные расстояния Δ_{ij}, определяемые формулой

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Например, если изменить начало координат или ввести новую систему осей, полученную путем произвольного поворота первоначальной системы, то Δ_{ij} не будет зависеть от новой системы, так же как оно не зависело от старой.

§ 4.02. Интерпретация U

Мы покажем, что U представляет собой полную работу сил притяжения в системе n материальных точек, необходимую для приведения системы из состояния, при котором все эти точки бесконечно удалены друг от друга, к той конфигурации, которую образуют точки $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ в момент t. Кроме того, мы введем определение потенциальной энергии системы, согласно которому она равна $-U$.

Предположим, что масса m_1 закреплена в точке P_1 и что масса m_2 под действием силы притяжения к m_1 переходит из положения A в положение B, причем все остальные массы находятся на бесконечном расстоянии. Пусть X, Y, Z — составляющие силы, действующей на материальную точку m_2, координаты которой для простоты обозначим через (ξ, η, ζ); если U_2 — силовая функция, связанная с массами m_1 и m_2, то

$$X = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial U_2}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}, \tag{1}$$

где

$$U_2 = \frac{Gm_1m_2}{\Delta_{12}}. \tag{2}$$

Работа, проделанная при движении m_2 из положения A в положение B под действием притяжения массы m_1, равна

$$\int_A^B (X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta)$$

или, согласно формулам (1),

$$\int_A^B \left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial U_2}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\,d\zeta\right).$$

Так как U_2 — функция от ξ, η, ζ (координаты m_1 являются фиксированными), то проделанная работа будет равна $(U_2)_B - (U_2)_A$. Если точка A бесконечно удалена от точки P_1, то, согласно формуле (2), $(U_2)_A = 0$. Следовательно, если под B понимать точку P_2, то работа, проделанная при движении m_2 из бесконечности до P_2 под действием притяжения массы m_1, равна U_2, где U_2 дается формулой (2).

Рассмотрим теперь работу, которую производят силы притяжения массы m_3 к массам m_1 и m_2 (теперь предполагается, что обе эти массы находятся в фиксированных положениях) при перемещении m_3 из бесконечности в точку P_3. Составляющая силы притяжения по оси ξ (ξ теперь обозначает координату ξ точки P_3) равна

$$G\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right)$$

и, повторяя предыдущие рассуждения, для проделанной работы, очевидно, получаем следующее выражение:

$$G\left(\frac{m_1m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_2m_3}{\Delta_{23}}\right). \tag{3}$$

Следовательно, полная работа, проделанная совместно массами m_2 и m_3 при их перемещении относительно m_1, равна

$$U_2 + \text{выражение (3)}$$

или, обозначая эту сумму через U_3, имеем

$$U_3 = G\left(\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}}\right).$$

Таким образом, U_3 есть силовая функция первых трех тел.

Продолжая эти рассуждения, мы, очевидно, придем к тому, что полная работа, проделанная совместно n телами при перемещении их из бесконечности в те положения, которые они занимают в данный момент t, равна U, где

$$U = G\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \qquad (j > i).$$

Потенциальная энергия системы определяется как работа, которую необходимо затратить, чтобы перевести эту систему из того положения, которое она занимает в данный момент, в положение, когда взаимные расстояния между массами, ее составляющими, будут бесконечными. Таким образом, потенциальная энергия системы равна $-U$.

§ 4.03. Интегралы движения центра масс системы

Для частного значения i имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{m_1}{\Delta_{i1}} + \frac{m_2}{\Delta_{i2}} + \ldots + \frac{m_n}{\Delta_{in}}\right) =$$

$$= Gm_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\Delta_{ij}} \qquad (j \neq i).$$

Далее,

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{\Delta_{ij}}\right) = -\frac{\xi_i - \xi_j}{\Delta_{ij}^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} = Gm_i \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\xi_j - \xi_i)}{\Delta_{ij}^3} \qquad (j \neq i). \tag{1}$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = G m_i \sum_{1}^{n} \frac{m_j(\eta_j - \eta_i)}{\Delta_{ij}^3} \qquad (j \neq i). \tag{2}$$

Из уравнений (1) путем суммирования по всем значениям i от 1 до n получаем

$$\sum_{1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{m_i m_j (\xi_j - \xi_i)}{\Delta_{ij}^3},$$

где $j \neq i$. Двойная сумма в правой части равна нулю. Действительно, два члена, например, соответствующие $i=2$, $j=3$ и $i=3$, $j=2$, равны

$$\frac{G m_2 m_3}{\Delta_{23}^3}(\xi_3 - \xi_2) \quad \text{и} \quad \frac{G m_3 m_2}{\Delta_{23}^3}(\xi_2 - \xi_3),$$

и их суммирование даст нуль. А поскольку это справедливо для всех других пар индексов i и j, то

$$\sum_{1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0. \tag{3}$$

При помощи уравнений (3) § 4.01 последнее равенство приводится к виду

$$\sum_{1}^{n} m_i \ddot{\xi}_i = 0. \tag{4}$$

Аналогично

$$\sum_{1}^{n} m_i \ddot{\eta}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{1}^{n} m_i \ddot{\zeta}_i = 0.$$

Эти уравнения могут быть немедленно проинтегрированы, что даст

$$\sum m_i \dot{\xi}_i = \alpha_1, \quad \sum m_i \dot{\eta}_i = \beta_1, \quad \sum m_i \dot{\zeta}_i = \gamma_1 \tag{5}$$

и затем

$$\sum m_i \xi_i = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad \sum m_i \eta_i = \beta_1 t + \beta_2, \tag{6}$$
$$\sum m_i \zeta_i = \gamma_1 t + \gamma_2,$$

где α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 — постоянные.

Уравнения (5) показывают, что сумма проекций количеств движения тел системы на любое направление есть величина постоянная, Пусть точка (X, Y, Z) означает центр масс системы n тел и пусть M равно $\sum_{1}^{n} m_i$. Тогда

$$MX = \sum_{1}^{n} m_i \xi_i. \tag{7}$$

Аналогичные два уравнения запишутся для Y и Z. Согласно формулам (5), имеем следующие равенства:

$$M\dot{X} = \alpha_1, \quad M\dot{Y} = \beta_1, \quad M\dot{Z} = \gamma_1,$$

которые показывают, что центр масс системы имеет постоянную скорость. Кроме того, на основании формул (6) и (7) имеем

$$MX = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad MY = \beta_1 t + \beta_2, \quad MZ = \gamma_1 t + \gamma_2. \tag{8}$$

А эти равенства показывают, что центр масс системы движется по прямой.

Число постоянных интегрирования в формулах (6) и (8) равно шести.

Очевидно, что система осей с началом в центре масс является по своему характеру системой Ньютона. Если x_i, y_i, z_i — координаты тела P_i относительно этой системы осей, то мы будем иметь

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

и аналогичные уравнения для y и z.

§ 4.04. Интегралы площадей

Из уравнений (1) и (2) § 4.03 получаем

$$\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = Gm_i \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{\Delta_{ij}^3} (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) \quad (j \neq i).$$

Отсюда с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при выводе уравнения (3) § 4.03, мы получили следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = 0,$$

которое вследствие уравнений (3) § 4.01 принимает вид

$$\sum_{1}^{n} m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i \eta_i) = 0.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\sum_1^n m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \dot{\xi}_i \eta_i) = c_3. \tag{1}$$

Аналогично

$$\sum_1^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \dot{\eta}_i \zeta_i) = c_1, \tag{2}$$

$$\sum_1^n m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \dot{\zeta}_i \xi_i) = c_2. \tag{3}$$

В этих уравнениях c_1, c_2 и c_3 — постоянные. Формулы (1) — (3) иногда называют *интегралами площадей*. Их полная интерпретация заключается в том, что сумма моментов количества движения n масс относительно каждой оси координат есть величина постоянная.

§ 4.05. Другие доказательства результатов § 4.03 и 4.04

1. Предположим, что начало координат смещено в точку (α, β, γ) и что новые оси координат параллельны старым. Пусть x_i, y_i, z_i — координаты тела P_i относительно новых осей. Тогда

$$\xi_i = x_i + \alpha, \quad \eta_i = y_i + \beta, \quad \zeta_i = z_i + \gamma \tag{1}$$

и $U(\xi, \eta, \zeta)$ преобразуется в функцию $U_1(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)$. Поэтому, используя уравнения (1), получаем

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i}. \tag{2}$$

Далее,

$$\Delta_{ij}^2 = \sum_{\xi\eta\zeta} (\xi_i - \xi_j)^2 = \sum_{xyz} (x_i - x_j)^2$$

и, следовательно, U_1 не содержит α, β или γ; поэтому $\partial U_1/\partial \alpha = 0$, так что равенство (2) принимает вид

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = 0.$$

Отсюда и следуют интегралы (8) § 4.03.

2. Предположим, что оси ξ и η повернуты в их плоскости на некоторый положительный угол θ и что координаты тела P_i относительно этих новых осей суть x_i, y_i, z_i. Тогда, опуская на время индексы, запишем

$$\xi = x \cos\theta - y \sin\theta, \quad \eta = x \sin\theta + y \cos\theta, \quad \zeta = z, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \xi. \tag{4}$$

При помощи формулы (3) $U(\xi, \eta, \zeta)$ преобразуется в функцию $U_2(x, y, z, \theta)$ и на основании формулы (4) будем иметь

$$\frac{\partial U_2}{\partial \theta} = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta} \right) = \sum_i \left(-\eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right). \tag{5}$$

Но, как и в п. (1), $\Delta_{ij}^2 = \sum_{x, y, z} (x_i - x_j)^2$, так что U_2 не содержит θ. Поэтому $\partial U_2/\partial\theta = 0$, и формула (5) принимает вид

$$\sum_i \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_i m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = 0,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$\sum_i m_i \, (\xi_i \dot{\eta}_i - \dot{\xi}_i \eta_i) = c_3,$$

что совпадает с равенством (1) § 4.04. Интегралы площадей (2) и (3) § 4.04 получаются аналогично.

§ 4.06. Интеграл энергии

U является функцией только координат ξ_i, η_i, ζ_i ($i=1, 2, \ldots, n$). Кроме того, U не зависит явно от времени. Поэтому

$$\frac{dU}{dt} = \sum_1^n \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i \right) = \sum_1^n m_i (\ddot{\xi}_i \dot{\xi}_i + \ddot{\eta}_i \dot{\eta}_i + \ddot{\zeta}_i \dot{\zeta}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_1^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \tag{1}$$

Кинетическая энергия T системы n тел запишется так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \tag{2}$$

Таким образом, формула (1) принимает вид

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

откуда

$$T - U = C, \tag{3}$$

где C — постоянная.

Поскольку на основании § 4.02 $-U$ есть потенциальная энергия системы, формула (3) выражает собой постоянство полной энергии системы.

Формула (3) дает последний, десятый из известных интегралов в общей задаче n тел.

Следует заметить, что в небесной механике метод решения, который был использован при выводе известных интегралов, не дает возможности получить многого. Поэтому решение отыскивается методом последовательных приближений, который оказывается практически удобным методом либо вследствие геометрических обстоятельств, таких, например, как в теории Луны (где отношение геоцентрического расстояния Луны к ее расстоянию до Солнца мало), либо обстоятельств, имеющих место в теории планет, где используется незначительность масс планет по сравнению с массой Солнца.

§ 4.07. Формула $(d^2/dt^2)\sum_1^n m_i R_i^2 = 2U + 4C = 2T + 2C$

В этой формуле R_i — расстояние тела P_i от начала координат, которым может быть центр масс системы n тел.

Умножая уравнения (3) § 4.01 на ξ_i, η_i и ζ_i и суммируя, получаем

$$\sum_1^n m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i + \eta_i\ddot{\eta}_i + \zeta_i\ddot{\zeta}_i) = \sum_1^n \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right).$$

Однако U является однородной функцией координат порядка -1, и поэтому на основании теоремы Эйлера имеем

$$\sum_{\xi\eta\zeta} \sum_1^n \xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = -U \tag{1}$$

или

$$\sum_{\xi\eta\zeta} \sum_1^n m_i \xi_i \ddot{\xi}_i + U = 0. \tag{2}$$

Но

$$\xi\ddot{\xi} = \frac{d}{dt}(\xi\dot{\xi}) - \dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\xi^2) - \dot{\xi}^2. \tag{3}$$

Поэтому соотношение (2) принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_1^n m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum_1^n m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + U = 0.$$

Согласно формуле (2) § 4.06, второй член левой части последнего соотношения равен $-2T$. Кроме того,

$$\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2=R_i^2.$$

Следовательно, мы получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i R_i^2-4T+2U=0,$$

или, используя равенство (3) § 4.06,

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum m_i R_i^2=2U+4C=2T+2C. \qquad (4)$$

В этой формуле U и T являются величинами положительными. Поэтому, если C положительно, или отрицательно, но при этом $|C|<T$ или $|C|<{}^1/_2U$, то правая часть равенства (4) будет положительной и, следовательно, $(d^2/dt^2)\sum m_i R_i^2$ положительно. Поэтому $(d/dt)\sum m_i R_i^2$ будет увеличиваться неограниченно, откуда заключаем, что по крайней мере одно из R_i будет неограниченно возрастать. А это приведет к тому, что по меньшей мере одна из масс покинет систему. Для устойчивости системы в смысле отсутствия ее рассеивания необходимо, чтобы C было отрицательным и таким, чтобы выполнялось условие $|C|>T$ или $|C|>{}^1/_2U$. Это условие, однако, не является достаточным для устойчивости системы.

§ 4.08. Неизменная плоскость

Обратимся к интегралам площадей (см. § 4.04). Они имеют вид

$$\begin{aligned}\sum m_i(\eta_i\dot\zeta_i-\dot\eta_i\zeta_i)&=c_1,\\ \sum m_i(\zeta_i\dot\xi_i-\dot\zeta_i\xi_i)&=c_2,\\ \sum m_i(\xi_i\dot\eta_i-\dot\xi_i\eta_i)&=c_3.\end{aligned} \qquad (1)$$

Выражения, стоящие в левых частях этих равенств, являются направленными величинами, представляющими собой проекции полного момента количества движения системы на оси ξ, η и ζ соответственно. Поэтому можно найти некоторую ось OB, которая совпадала бы с направлением *полного* момента количества движения A системы. Если l_1, m_1, n_1 — направляющие косинусы OB, то

$$l_1A=c_1,\quad m_1A=c_2,\quad n_1A=c_3,$$

откуда

$$\frac{l_1}{c_1}=\frac{m_1}{c_2}=\frac{n_1}{c_3}. \qquad (2)$$

Если центр масс системы находится в начале координат O, то плоскость, проходящая через O, направляющие косинусы нормали которой удовлетворяют равенствам (2), называется *неизменной пло-*

скостью системы. Неизменная плоскость может быть определена, если c_1 c_2, c_3 известны, для чего, согласно формулам (1), требуется, чтобы были известны массы всех n тел, а также их координаты и составляющие скоростей для некоторого момента t. Исходя из наших современных знаний о солнечной системе, полученных при помощи методов, которые будут описаны в последующих главах, постоянные c_1, c_2, c_3 могут быть получены с большой точностью. Следовательно, положение неизменной плоскости может быть определено относительно обычной основной плоскости. Можно сказать с почти полной уверенностью, что любое уточнение значений c_1, c_2, c_3 в соотношении (2) в будущем явится только результатом определения более точных значений масс планет.

Если мы выберем новые оси, проходящие через центр масс, так, чтобы нормаль к неизменной плоскости являлась осью Z, а оси X и Y были взяты в этой плоскости, то мы получим равенства того же типа, что и равенства (1). Но теперь c_3 будет равно полному моменту количества движения системы, а $c_1 = c_2 = 0$. Преимущество такого выбора осей состоит, конечно, в том, что две постоянные интегрирования равны нулю, а это ведет к упрощению аналитических выражений в общей математической теории. Использование неизменной плоскости в качестве основной координатной плоскости пропагандировалось Лапласом, но эта идея не получила большого распространения в практических приложениях.

Постоянство момента количества движения относительно нормали к неизменной плоскости предполагает определенные оговорки. Солнце и планеты являются не материальными точками, а сферическими (или почти сферическими) телами, каждое из которых вращается вокруг некоторой оси, и это вращение должно изменять момент количества движения системы. Если бы эти тела являлись твердыми сферами, плотность каждой из которых была бы функцией лишь расстояния от центра сферы, то момент количества движения системы оставался бы постоянным и неизменную плоскость можно было бы определить и она была бы действительно неизменной. Эти условия не выполняются строго для большинства планет и выполняются только приближенно для Солнца. Кроме того, даже вращательный момент количества движения некоторых планет (например, Земли) подвергается прогрессивным изменениям вследствие прецессии и приливного трения. Например, вследствие прецессии ось Земли изменяет свое положение относительно основной плоскости, и, следовательно, составляющие ее момента количества движения относительно осей координат непрерывно изменяются. Что же касается приливного трения, то оно постепенно замедляет вращение Земли, хотя и с очень незначительной скоростью.

Подсчитано, что полный момент количества движения солнечной системы на 98% обусловлен орбитальными движениями четырех больших планет: Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Следовательно, изменения, о которых мы только что упоминали, составляют почти неощутимую часть от полного момента количества движения системы. Неизменная плоскость, таким образом, практически является фиксированной плоскостью по отношению к центру масс системы.

§ 4.09. Системы координат, используемые в теории Луны и при изучении движений звезд

В качестве примера выбора системы координат в конкретном случае мы выведем уравнения движения в задачах о движении Луны или звезд. Эти уравнения составят основу для дальнейших исследований. В теории Луны мы главным образом имеем дело только

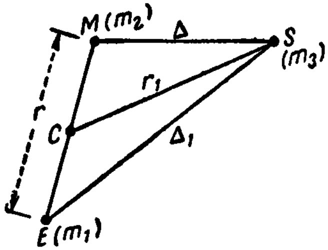

Рис. 11.

с тремя телами: с Землей (масса m_1), Луной (масса m_2) и сравнительно далеким Солнцем, с массой m_3, значительно превосходящей m_1 и m_2. В задаче о движении звезд мы имеем дело с аналогичной конфигурацией, состоящей из двух тесных звезд и сравнительно удаленной третьей звездой, причем массы всех трех тел имеют один и тот же порядок.

На рис. 11 изображены три тела E, M и S с координатами (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) и (ξ_3, η_3, ζ_3) относительно обычной инерциальной системы координат. Силовая функция U выражается формулой

$$U = G\left(\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_2 m_3}{\Delta} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_1}\right), \tag{1}$$

где $r = EM$, $\Delta = MS$ и $\Delta_1 = ES$.

Пусть x, y, z — координаты тела M по отношению к системе координат с началом в E, а x_1 y_1, z_1 — координаты тела S относительно осей, начало которых находится в точке C — центре масс тел E и M. Кроме того, пусть X, Y, Z — координаты точки C относительно инерциальных осей. Тогда

$$X = \frac{m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Мы имеем

$$x = \xi_2 - \xi_1 \tag{3}$$

и

$$x_1 = \xi_3 - X = \xi_3 - \frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Отсюда при помощи формулы (3) получаем

$$\xi_3 - \xi_1 = x_1 + \frac{m_2 x}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\xi_3 - \xi_2 = \xi_3 - \xi_1 - (\xi_2 - \xi_1) = x_1 - \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

В дальнейшем достаточно будет ограничиться рассмотрением уравнений движения в направлении, параллельном оси ξ. Эти уравнения имеют вид

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \quad \ddot{\xi}_2 = \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial \xi_2}, \quad \ddot{\xi}_3 = \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial \xi_3}. \tag{7}$$

Из этих уравнений мы выведем соответствующие уравнения для x и x_1. Из формул (3) и (7) немедленно получаем уравнение

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial \xi_2} - \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \tag{8}$$

а из формул (5) и (7) — уравнение

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial \xi_3} - \frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \frac{m_2\ddot{x}}{m_1 + m_2},$$

которое, с учетом формулы (8), принимает вид

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial \xi_3} - \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right).$$

Однако, согласно равенству (3) § 4.03, при $n = 3$ имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\partial U}{\partial \xi_3} = 0.$$

Поэтому

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3(m_1 + m_2)}\frac{\partial U}{\partial \xi_3}. \tag{9}$$

Далее, из формул (5) и (6) следует:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\Delta^2 = \sum(\xi_3 - \xi_2)^2 = \sum\left(x_1 - \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}\right)^2,$$

$$\Delta_1^2 = \sum(\xi_3 - \xi_1)^2 = \sum\left(x_1 + \frac{m_2 x}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Следовательно, функция U выражена через x и x_1, y и y_1, z и z_1. Используя формулы (3) и (4), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial U}{\partial x_1}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_2} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi_3} = \frac{\partial U}{\partial x_1}.$$

На основании этих равенств уравнения (8) и (9) принимают вид

$$\ddot{x} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3 (m_1 + m_2)} \frac{\partial U}{\partial x_1}. \tag{11}$$

Положим

$$\mu = G (m_1 + m_2). \tag{12}$$

Тогда, подставляя в уравнение (10) выражение для U из формулы (1), получаем

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

где R — возмущающая функция для Луны, определяемая формулой

$$R = \frac{G m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left(\frac{m_2}{\Delta} + \frac{m_1}{\Delta_1} \right). \tag{13}$$

Поскольку r не зависит от x_1, y_1, z_1, то уравнение движения Солнца для оси x на основании уравнения (11) имеет вид

$$\ddot{x}_1 = \frac{G (m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{m_2}{\Delta} + \frac{m_1}{\Delta_1} \right).$$

Удобно использовать функцию F, определяемую формулой

$$F = \frac{m_2}{\Delta} + \frac{m_1}{\Delta_1},$$

и заменить m_1, m_2 и m_3 соответственно на E, M и S. Тогда получим

$$F = \frac{M}{\Delta} + \frac{E}{\Delta_1} \tag{14}$$

и уравнения движения Луны и Солнца принимают вид

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{GS(E+M)}{EM} \frac{\partial F}{\partial x}, \tag{15}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{G(E+M+S)}{E+M} \frac{\partial F}{\partial x_1}. \tag{16}$$

Эти уравнения являются основными уравнениями в теории Луны, и, как мы покажем в § 7.03, их преимущество заключается в том, что с высокой степенью точности движение Солнца относительно C (рис. 11) можно рассматривать как эллиптическое и, следовательно, координаты x_1, y_1, z_1, от которых зависит функция F, могут быть выражены при помощи формул гл. 3 через время посредством средней аномалии Солнца.

Глава 5

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

§ 5.01. Замена переменных

Уравнения движения планеты P (масса m) под действием центрального притяжения Солнца (масса m_0) и притяжения планет $P_1, P_2, \ldots$ (массы $m_1, m_2, \ldots$) были получены в § 1.07. Они имеют вид

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{1}$$

где $\mu=G(m_0+m)=n^2a^3$ и R — возмущающая функция. Мы будем предполагать, что в качестве основной плоскости взята плоскость эклиптики, а ось x направлена в точку ♈.

В этой главе мы изложим метод, предложенный Лагранжем и часто применяемый в теории движения планет. Этот метод основан на преобразовании уравнений (1) к виду, удобному для их окончательного решения.

Рассмотрим сначала решение уравнений *невозмущенного* движения планеты P. Эти уравнения имеют вид

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=0, \quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=0, \quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=0. \tag{2}$$

Решение уравнений (2) дается формулами (2) § 2.15 в виде функций эксцентрической аномалии E и направляющих косинусов (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2), которые выражаются через элементы Ω, ω, i формулами (3) и (4) § 2.15. В частности,

$$x=al_1\cos E+bl_2\sin E-ael_1, \tag{3}$$

а аналогичные формулы для y и z содержат m_1, m_2 и n_1, n_2 соответственно.

Формулы (9) и (13) § 3.11 показывают, что $\cos E$ и $\sin E$ можно представить в виде

$$\cos E=-\frac{1}{2}e+\sum_{s=1}^{\infty}G_s\cos sM,$$

$$\sin E=\sum_{s=1}^{\infty}D_s\sin sM,$$

где M — средняя аномалия и C_s и D_s зависят от функций Бесселя, содержащих эксцентриситет e.

Если подставить эти выражения в формулу (3), то можно легко увидеть, что разложение для x имеет вид

$$x = A + \sum B \cos(l_1 M + j\Omega + k\omega),$$

где A и B — некоторые функции a, e, i, а l_1, j, k — положительные или отрицательные целые числа, включая и нуль. Для y и z имеют место аналогичные формулы. Пока мы не будем вникать в подробности этих разложений, поскольку нам важно сейчас только то, что x, y, z даются в виде *известных* функций времени и шести элементов орбиты, причем время t входит посредством средней аномалии M. Нужно заметить, что в ближайших параграфах этой главы для удобства при аналитических выкладках мы будем иметь дело не с элементами τ или ϵ, а с элементом χ, который входит в уравнение Кеплера следующим образом:

$$E - e\sin E = nt + \chi. \tag{4}$$

Кроме того, удобно обозначить элементы a, e, χ через α_i ($i = 1, 2, 3$), а элементы Ω, ω, i — через β_i ($i = 1, 2, 3$).

Тогда решение уравнений (2) может быть представлено следующим образом:

$$x = F_1(t, \alpha_i, \beta_i), \quad y = F_2(t, \alpha_i, \beta_i), \quad z = F_3(t, \alpha_i, \beta_i), \tag{5}$$

где F_1, F_2, F_3 — известные функции времен и элементов.

Аналогичным образом составляющие скорости ($\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial t$, $\partial z/\partial t$) планеты P в невозмущенном движении можно представить в виде

$$\frac{\partial x}{\partial t} = G_1(t, \alpha_i, \beta_i), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = G_2(t, \alpha_i, \beta_i), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = G_3(t, \alpha_i, \beta_i), \tag{6}$$

где $\partial/\partial t$ означает дифференцирование по времени, причем, конечно, α и β рассматриваются как постоянные. Так как

$$(1 - e\cos E)\dot{E} \equiv \frac{r}{a}\dot{E} = n, \tag{7}$$

то, например, для функции G_1 найдем, согласно формуле (3), следующее выражение:

$$G_1 = -\frac{na}{r}(al_1 \sin E - bl_2 \cos E), \tag{8}$$

которое может рассматриваться как *известная* функция t и шести элементов того же вида, что и разложение, найденное ранее для x.

Для решения уравнений (1) мы возьмем в качестве новых переменных шесть элементов α_i и β_i так, чтобы x, y и z *опять определялись формулами* $x = F_1(t, \alpha_i, \beta_i)$ и т. д. Из этих трех соотношений любые *три* элемента α_l, β_l могут быть выражены через x, y и z. Для того чтобы полностью определить остающиеся элементы, мы потребуем, чтобы выполнялись три дополнительных соотношения. Выберем их таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \equiv G_1(t, \alpha_l, \beta_l), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} \equiv G_2(t, \alpha_l, \beta_l), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} \equiv G_3(t, \alpha_l, \beta_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь d/dt означает дифференцирование по времени при условии, что новые переменные α_l, β_l рассматриваются как функции времени. Этот метод обычно называют ***методом вариации произвольных постоянных.***

Из первого соотношения (9) имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial G_1}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_l}\frac{d\alpha_l}{dt} + \sum_l \frac{\partial G_1}{\partial \beta_l}\frac{d\beta_l}{dt}, \tag{10}$$

где суммирование производится по l от 1 до 3.

Однако из равенств (6), заменяя $\dot{x}$ на $\partial x/\partial t$, имеем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_l}$$

и

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_l} = \frac{\partial G_1}{\partial \beta_l}.$$

Следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_l}\cdot\dot{\alpha}_l + \sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_l}\cdot\dot{\beta}_l. \tag{11}$$

Поскольку функция $x = F_1(t, \alpha_l, \beta_l)$, где α и β — постоянные, удовлетворяет первому из уравнений (2), то мы можем переписать его следующим образом:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \tag{12}$$

и уравнение (11) тогда примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_l}\cdot\dot{\alpha}_l + \sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_l}\cdot\dot{\beta}_l.$$

Из уравнений (1) мы получаем

$$\sum_i \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_i} \cdot \dot{\alpha}_i + \sum_i \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_i} \cdot \dot{\beta}_i = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{13}$$

Кроме того, так как $x = F_1(t, \alpha_i, \beta_i)$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_i} \cdot \dot{\alpha}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \beta_i} \cdot \dot{\beta}_i.$$

Но

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \beta_i} = \frac{\partial x}{\partial \beta_i}$$

и поскольку, согласно формуле (9), $dx/dt = \partial x/\partial t$, мы получаем

$$\sum_i \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \cdot \dot{\alpha}_i + \sum_i \frac{\partial x}{\partial \beta_i} \cdot \dot{\beta}_i = 0. \tag{14}$$

(13) и (14) являются важными формулами, из которых, как мы увидим ниже, будут выведены уравнения, связывающие $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \ldots, \dot{\beta}_3$ и производные возмущающей функции R.

§ 5.02. Оскулирующий эллипс

Пусть на рис. 12 P означает положение планеты в момент t_0. Если предположить, что в этот момент возмущающие планеты прекращают свое действие на тело P, то его орбита будет эллипсом PQ с постоянными элементами $a_0, e_0, \ldots, l_0$. Координаты планеты P тогда будут выражаться $x = F(t_0, a_0, \ldots, l_0)$ и двумя аналогичными

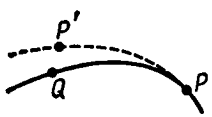

Рис. 12.

функциями для y и z. Аналогично составляющие скорости в эллиптическом движении в момент t_0 при использовании обозначений предыдущего параграфа определяются соотношением $\partial x/\partial t \equiv \dot{x} = G_1(t_0, a_0, \ldots, l_0)$ и соответствующими выражениями для $\dot{y}$ и $\dot{z}$. Кроме того, если мы предположим, что x, y, z и $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в момент t_0 известны, то мы будем иметь необходимое число уравнений для определения шести элементов $a_0, \ldots, l_0$ эллипса.

Действительная орбита планеты, когда принято во внимание действие возмущающих планет, будет отличаться от эллипса. На рис. 12 показана часть действительной орбиты PP'. Поскольку в момент t_0

составляющие скорости в действительном движении те же самые, что и при эллиптическом движении ($dx/dt = \partial x/\partial t$ и т. д.), то касательная к действительной орбите в точке P будет совпадать с касательной к эллипсу в этой же точке. Эллипс PQ называется *оскулирующим эллипсом* для момента t_0, а постоянные a_0, e_0, ..., i_0 — *оскулирующими элементами* для момента t_0. Плоскость оскулирующего эллипса называется *оскулирующей плоскостью* для момента t_0 и может быть использована в качестве основной плоскости вместо плоскости эклиптики.

Моменту t_1, следующему непосредственно за t_0, будет соответствовать новый оскулирующий эллипс с элементами a_1, ..., i_1, связанными с новыми координатами и составляющими скорости планеты в ее действительном движении. То же самое мы будем иметь и для моментов t_2, t_3, ... Разности $a_1 - a_0$, ..., $i_1 - i_0$ называются *возмущениями* элементов за время $t_1 - t_0$. Скорости изменения этих элементов в точности равны производным $\dot{\alpha}_i$, $\dot{\beta}_i$, о которых говорилось в предыдущем параграфе. *Возмущения* в координатах x, y, z определяются аналогично.

§ 5.03. Использование оскулирующего эллипса для эфемеридных целей

Покажем, что для малых интервалов времени положение планеты на ее действительной орбите незначительно отличается от соответствующего положения на оскулирующем эллипсе. Это обстоятельство используется при вычислении эфемерид планет для малых интервалов времени.

Пусть на рис. 12 $P'(x, y, z)$ — истинное положение планеты в момент t и $Q(x', y', z')$ — соответствующее положение на оскулирующем эллипсе. Будем отмечать значком нуль значение какой-либо величины в момент t_0. Полагая $\Delta t \equiv t - t_0$, получаем

$$x' = x'_0 + \Delta t\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)_0 + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\right)_0 + \dots$$

и

$$x = x_0 + \Delta t\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_0 + \dots .$$

Тогда, поскольку в момент t_0 $x_0 = x'_0$ и $(dx'/dt)_0 = (\partial x'/\partial t)_0$, приближенно имеем

$$x - x' = \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\right)_0,$$

или, учитывая равенства (1) и (12) § 5.01,

$$x - x' = \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0. \qquad (1)$$

Пусть a означает большую полуось эллиптической (оскулирующей) орбиты, соответствующей точке P, выраженную в астрономических единицах, а T — период в годах. Тогда, если пренебречь отношением m/m_0, получим

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = Gm_0,$$

где m_0 — масса Солнца. Поэтому

$$(\Delta t)^2 \equiv \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_0}\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2.$$

Для удобства положим $R = Gm_1 R_1$, где

$$R_1 = \frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3};$$

откуда

$$\frac{\partial R_1}{\partial x} = \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$x - x' = 2\pi^2 a^3 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)\left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2 \frac{\partial R_1}{\partial x}. \tag{3}$$

В качестве примера рассмотрим орбиту Земли, возмущаемую наиболее массивной планетой — Юпитером. Тогда $a = 1$, $m_1/m_0 \approx 10^{-3}$, $2\pi^2 \approx 20$. Предположим, что $\Delta t = 0{,}1$ года. В таком случае $\Delta t/T = 0{,}1$ и формула (3) принимает вид

$$x - x' \approx 2 \cdot 10^{-4}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)_0.$$

Пренебрегая наклонностью орбиты Юпитера к эклиптике, мы можем выбрать эклиптические оси координат так, чтобы в момент t_0 координаты Юпитера были $(r_1, 0)$, а если к тому же пренебречь эксцентриситетом, то они будут — $(a_1, 0)$. Выражение, стоящее в правой части равенства (2), имеет максимум в противостоянии, когда $x \approx a \approx 1$ и $\Delta \approx a_1 - 1$.

Далее $a_1 \approx 5$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{9}{400}.$$

Следовательно,

$$x - x' \approx 4{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ а. е.} \approx 670 \textit{ км}.$$

При сделанных предположениях, что $y = z = 0$ и $y_1 = z_1 = 0$, возмущения в координатах y и z равны нулю. Все возмущения, таким образом, падают на координату x. Только что полученное возмущение в x имеет порядок минуты, и для многих целей этой величиной можно пренебречь. Таким образом, для малых значений Δt оскулирующий эллипс будет давать достаточно точные значения координат Земли на любые моменты, близкие к t_0.

Возмущения орбиты Земли, вызываемые другими планетами солнечной системы, много меньше, чем только что найденные возмущения от Юпитера. Это объясняется главным образом тем, что массы этих планет значительно меньше массы Юпитера.

§ 5.04. Уравнения для $\dot{\alpha}_l$ и $\dot{\beta}_l$

Обратимся к уравнениям (14) и (13) § 5.01, именно:

$$\sum_l \frac{\partial x}{\partial \alpha_l} \dot{\alpha}_l + \sum_l \frac{\partial x}{\partial \beta_l} \dot{\beta}_l = 0 \tag{1}$$

и

$$\sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_l} \dot{\alpha}_l + \sum_l \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_l} \dot{\beta}_l = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{2}$$

где l принимает значения 1, 2 и 3.

Умножая уравнение (2) на $\partial x/\partial \alpha_1$, а (1) на $\partial \dot{x}/\partial \alpha_1$ и вычитая, мы будем иметь

$$\sum_l \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_l} - \frac{\partial x}{\partial \alpha_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_1} \right) \dot{\alpha}_l + \\ + \sum_l \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \beta_l} - \frac{\partial x}{\partial \beta_l} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_1} \right) \dot{\beta}_l = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}$$

или, используя обозначения якобианов,

$$\sum_l \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (\alpha_1, \alpha_l)} \dot{\alpha}_l + \sum_l \frac{\partial (\dot{x}, x)}{\partial (\alpha_1, \beta_l)} \dot{\beta}_l = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}. \tag{3}$$

Так же можно получить аналогичные уравнения, содержащие y и z. Складывая эти последние уравнения с уравнением (3) и полагая

$$[\alpha_1, \alpha_l] \equiv \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (\alpha_1, \alpha_l)} + \frac{\partial (y, \dot{y})}{\partial (\alpha_1, \alpha_l)} + \frac{\partial (z, \dot{z})}{\partial (\alpha_1, \alpha_l)}, \tag{4}$$

получаем

$$\sum_{l=1}^{3} [\alpha_1, \alpha_l] \dot{\alpha}_l + \sum_{l=1}^{3} [\alpha_1, \beta_l] \dot{\beta}_l = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha_1}. \tag{5}$$

Выражения вида $[\alpha_1, \alpha_l]$, определяемые равенством (4), называются *скобками Лагранжа* относительно α_1, α_l.

Но R — функция координат x, y, z рассматриваемой планеты и координат x_1, y_1, z_1 возмущающих планет. Если выражения (5) § 5.01 для x, y, z, которые имеют вид $x = F_1(t, \alpha_l, \beta_l)$, $y = F_2(t, \alpha_l, \beta_l)$, $z = F_3(t, \alpha_l, \beta_l)$, и аналогичные выражения для x_1, y_1, z_1, и т. д. подставить в возмущающую функцию, то R станет функцией t, α_l, β_l и соответствующих α и β, связанных с орбитами возмущающих планет. Далее, элемент α_1 входит в R посредством x, y, z. Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}.$$

Уравнение (5) теперь примет вид

$$[\alpha_1, \alpha_2]\dot{\alpha}_2+[\alpha_1, \alpha_3]\dot{\alpha}_3+$$
$$+[\alpha_1, \beta_1]\dot{\beta}_1+[\alpha_1, \beta_2]\dot{\beta}_2+[\alpha_1, \beta_3]\dot{\beta}_3=\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}. \tag{6}$$

Мы будем иметь три уравнения вида (6). Запишем их следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{3}\{[\alpha_r, \alpha_l]\dot{\alpha}_l+[\alpha_r, \beta_l]\dot{\beta}_l\}=\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}, \tag{7}$$

где r принимает значения 1, 2 и 3.

Аналогично мы можем получить уравнения, содержащие производные от R по всем β. Они имеют вид

$$\sum_{l=1}^{3}\{[\beta_r, \alpha_l]\dot{\alpha}_l+[\beta_r, \beta_l]\dot{\beta}_l\}=\frac{\partial R}{\partial \beta_r}. \tag{8}$$

Как мы покажем ниже, каждая скобка Лагранжа вообще является функцией лишь шести элементов. Таким образом, имеется три уравнения (7) и три уравнения (8), причем каждое из этих уравнений является линейным относительно $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$, ..., $\dot{\beta}_3$. Решая эти уравнения, мы выразим, например, $\dot{\alpha}_1$ через производные R и различные скобки. Очевидно, выражения для $\dot{\alpha}_2$, ..., $\dot{\beta}_3$ имеют аналогичную структуру.

Точное алгебраическое выражение R известно. Ниже будет показано, каким образом функция R может быть разложена в ряд, члены которого зависят от α_l и β_l, а также от времени и элементов возмущающей планеты α и β. Но сейчас достаточно заметить, что для $\partial R/\partial \alpha_1$ и т. д. могут быть найдены вполне определенные выражения. Для того чтобы закончить предварительное рассмотрение равенств, которые дают $\dot{\alpha}_1$ и т. д., выразим скобки Лагранжа через α и β.

Примечание. Из метода, при помощи которого был установлен общий вид шести уравнений для $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\beta}_3$, очевидно следует, что мы получили бы уравнения точно в той же форме, если бы величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_3$ рассматривались с самого начала как независимые функции одного или более эллиптических элементов.

§ 5.05. Свойства скобок Лагранжа

Обозначим через p и q два любых элемента из шести α_i, β_i или вообще две независимые функции этих элементов.

Тогда по определению

$$[p, q] = \sum_{xyz} \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (p, q)}.$$

1) $[p, q] = -[q, p]$.

Это свойство следует из свойства якобиана, именно

$$\frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (p, q)} = -\frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (q, p)}.$$

2) $[p, p] = 0$.

Это свойство является очевидным в силу определения якобиана.

3) $\frac{\partial}{\partial t}[p, q] = 0$.

Это равенство в сжатой форме выражает следующее: если x, y, z и $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ выразить через t и элементы α, β посредством равенств $x = F_1(t, \alpha_i, \beta_i), \ldots, \dot{z} = G_3(t, \alpha_i, \beta_i)$ (или через t и шесть функций p, q от элементов) и выполнить соответствующее дифференцирование, то $[p, q]$ не будет зависеть от времени.

При доказательстве мы будем исходить из трех уравнений типа (12) § 5.01, именно

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0.$$

Пусть $V = \mu/r$. Тогда эти три уравнения примут вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{1}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (p, q)}\right] = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial \ddot{x}}{\partial p},$$

где

$$\ddot{x} \equiv \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

На основании первого уравнения (1) предпоследнее равенство запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(p, q)}\right] = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q] = \frac{\partial}{dq}\sum_{xyz}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\sum_{xyz}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}.$$

Но

$$\sum_{xyz}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p},$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q}.$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q] = 0, \tag{2}$$

что и требовалось доказать.

Значение этого свойства может быть кратко проиллюстрировано теперь же. С широким же применением его мы встретимся ниже. Для того чтобы вычислить скобки Лагранжа $[p, q]$, мы должны найти производные $\partial x/\partial p$, $\partial\dot{x}/\partial p$, $\partial y/\partial p$, $\partial\dot{y}/\partial p$, $\partial z/\partial p$, $\partial\dot{z}/\partial p$ и соответствующие производные по q. После дифференцирования мы можем, согласно свойству (3), придать t любое желаемое значение. На практике находят наиболее удобным полагать $t = \tau$, где τ — момент прохождения через перигелий, так как при этом эксцентрическая аномалия E, которая входит в выражения для $x, \ldots,$ $\dot{x}, \ldots,$ согласно формулам (3) и (8) § 5.01, равна нулю.

§ 5.06. Различные формулы, необходимые для вычисления скобок Лагранжа

1) *Выражение скобок Лагранжа через* ξ, η.

Пусть x, y, z — координаты планеты относительно осей координат X, Y, Z (рис. 13) с началом в точке O, означающей Солнце. Положение плоскости оскулирующего эллипса и направление на перигелий относительно этих осей определяется с помощью обычных элементов Ω, ω и i.

Возьмем оси прямоугольной системы координат OA, OB в плоскости эллипса так, чтобы точка A совпадала с перигелием, и обозначим через C полюс большого круга NAB. Обозначим далее через ξ, η координаты планеты относительно OA и OB.

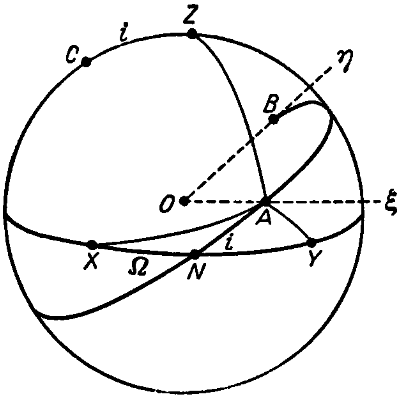

Рис. 13.

Пусть, как и в § 2.15, (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) и (l_3, m_3, n_3) означают соответственно направляющие косинусы прямых OA, OB и OC по отношению к осям OX, OY и OZ. Тогда

$$x = l_1\xi + l_2\eta, \quad y = m_1\xi + m_2\eta, \quad z = n_1\xi + n_2\eta, \tag{1}$$

откуда, так как $\dot{x} \equiv \partial x/\partial t$ и т. д., находим

$$\dot{x} = l_1\dot{\xi} + l_2\dot{\eta}, \quad \dot{y} = m_1\dot{\xi} + m_2\dot{\eta}, \quad \dot{z} = n_1\dot{\xi} + n_2\dot{\eta}. \tag{2}$$

При помощи формул (1) и (2) скобки Лагранжа могут быть выражены через ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ и $l_1, l_2, \ldots, n_2$. Получение формальных выражений скобок через эти величины мы отложим на будущее.

2) *Выражения направляющих косинусов через* Ω, ω, i. Мы имеем

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos AX, & m_1 &= \cos AY, & n_1 &= \cos AZ, \\ l_2 &= \cos BX, & m_2 &= \cos BY, & n_2 &= \cos BZ, \\ l_3 &= \cos CX, & m_3 &= \cos CY, & n_3 &= \cos CZ. \end{aligned}$$

Мы уже нашли выражения для $l_1, m_1, \ldots, n_2$ [см. формулы (3) и (4) § 2.15]. Ниже они приведены под номерами (3) и (4). Выражения для l_3, m_3 и n_2 легко находятся из треугольников CXN,

CYN, CZN и приводятся ниже под номером (5). Полная сводка этих формул такова:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i, \\ m_1 &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i, \\ n_1 &= \sin\omega\sin i; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i, \\ m_2 &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i, \\ n_2 &= \cos\omega\sin i; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} l_3 &= \sin\Omega\sin i, \\ m_3 &= -\cos\Omega\sin i, \\ n_3 &= \cos i, \end{aligned} \tag{5}$$

3) *Производные от направляющих косинусов.*

Найдем производные от l_1, l_2, ..., n_2 по Ω, ω, i. Например,

$$\frac{\partial l_1}{\partial\Omega} = -\sin\Omega\cos\omega - \cos\Omega\sin\omega\cos i = -m_1.$$

Аналогично мы получим остальные производные. Соберем эти формулы в виде следующей таблицы:

Производные от направляющих косинусов по Ω, ω, i

	l_1	m_1	n_1	l_2	m_2	n_2
Ω	$-m_1$	l_1	0	$-m_2$	l_2	0
ω	l_2	m_2	n_2	$-l_1$	$-m_1$	$-n_1$
i	$l_3\sin\omega$	$m_3\sin\omega$	$n_3\sin\omega$	$l_3\cos\omega$	$m_3\cos\omega$	$n_3\cos\omega$

4) *Формулы для $\partial l_2/\partial p$ и т. д.*

Для последующей работы нам потребуются производные от l_2, m_2, n_2 по p, где p — в общем случае любая функция шести элементов, но, в частности, может быть просто элементом.

Так как l_2 является функцией лишь Ω, ω, i, то

$$\frac{\partial l_2}{\partial p} = \frac{\partial l_2}{\partial\Omega}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{\partial l_2}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial p} + \frac{\partial l_2}{\partial i}\cdot\frac{\partial i}{\partial p}.$$

Используя данные таблицы пункта (3), мы можем эту формулу переписать так:

$$\frac{\partial l_2}{\partial p} = -m_2\frac{\partial\Omega}{\partial p} - l_1\frac{\partial\omega}{\partial p} + l_3\cos\omega\frac{\partial i}{\partial p}. \tag{6}$$

Аналогично

$$\frac{\partial m_2}{\partial p} = l_2 \frac{\partial \Omega}{\partial p} - m_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} + m_3 \cos\omega \frac{\partial i}{\partial p}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial p} = -n_1 \frac{\partial \omega}{\partial p} + n_3 \cos\omega \frac{\partial i}{\partial p}. \tag{8}$$

5) *Формула для* $\sum\limits_{lmn} l_1 \frac{\partial l_2}{\partial p}$.

Так как

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 \equiv n_3 = \cos i$$

и

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \quad l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0,$$

то из формул (6) — (8) имеем

$$l_1 \frac{\partial l_2}{\partial p} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial p} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial p} = -\cos i \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial p}. \tag{9}$$

6) *Формула для* $\sum\limits_{lmn} \frac{\partial (l_1, l_2)}{\partial (p, q)}$.

Продифференцируем соотношение (9) по q, где q в общем случае является функцией элементов. Тогда

$$\sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial p} + l_1 \frac{\partial^2 l_2}{\partial p \partial q} \right) = -\cos i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial q} + \sin i \frac{\partial \Omega}{\partial p} \cdot \frac{\partial i}{\partial q} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial p \partial q}. \tag{10}$$

Заменяя в формуле (9) p на q, будем иметь

$$l_1 \frac{\partial l_2}{\partial q} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial q} + n_1 \frac{\partial n_2}{\partial q} = -\cos i \frac{\partial \Omega}{\partial q} - \frac{\partial \omega}{\partial q}.$$

Продифференцируем последнее равенство по p. Тогда

$$\sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial q} + l_1 \frac{\partial^2 l_2}{\partial p \partial q} \right) = \\ = -\cos i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial q} + \sin i \frac{\partial \Omega}{\partial q} \cdot \frac{\partial i}{\partial p} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial p \partial q}. \tag{11}$$

Вычитая равенство (10) из равенства (11), получаем

$$\sum_{lmn} \frac{\partial (l_1, l_2)}{\partial (p, q)} = -\sin i \frac{\partial (\Omega, i)}{\partial (p, q)}. \tag{12}$$

§ 5.07. Вычисление $[\beta_r, \beta_s]$

Пусть β_r, β_s—два любых элемента из Ω, ω, i. Так как ξ, $\dot{\xi}$ и η, $\dot{\eta}$ не содержат этих элементов, то $\sum$ будет означать суммирование по l, m и n:

$$[\beta_r, \beta_s] = \sum \left[\left(\xi \frac{\partial l_1}{\partial \beta_r} + \eta \frac{\partial l_2}{\partial \beta_r} \right) \left(\dot{\xi} \frac{\partial l_1}{\partial \beta_s} + \dot{\eta} \frac{\partial l_2}{\partial \beta_s} \right) \right] -$$
$$- \sum \left[\left(\xi \frac{\partial l_1}{\partial \beta_s} + \eta \frac{\partial l_2}{\partial \beta_s} \right) \left(\dot{\xi} \frac{\partial l_1}{\partial \beta_r} + \dot{\eta} \frac{\partial l_2}{\partial \beta_r} \right) \right] =$$
$$= (\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) \sum \frac{\partial (l_1, l_2)}{\partial (\beta_r, \beta_s)}.$$

Но $\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = h$, где h — постоянная интеграла площадей, определяемая формулами (5) или (6) § 2.04. Поэтому, используя равенство (12) § 5.06, мы получаем

$$[\beta_r, \beta_s] = -h \sin i \frac{\partial (\Omega, i)}{\partial (\beta_r, \beta_s)}. \tag{1}$$

Если $\beta_r \equiv \omega$ и $\beta_s \equiv \Omega$ или i, то из формулы (1) найдем

$$[\omega, \Omega] = [\omega, i] = 0.$$

Если $\beta_r \equiv \Omega$ и $\beta_s \equiv i$, то $\partial (\Omega, i)/\partial (\Omega, i) = 1$. Поэтому на основании формулы (1) получаем

$$[\Omega, i] = -h \sin i.$$

Сводка результатов. Значения скобок типа $[\beta_r, \beta_s]$ таковы:

$$[\Omega, i] = -h \sin i, \quad [\omega, \Omega] = 0, \quad [\omega, i] = 0. \tag{2}$$

§ 5.08. Вычисление [α, β]

Здесь α — любой из элементов a, e, χ; β — любой из элементов Ω, ω, i; ξ, $\dot{\xi}$ и η, $\dot{\eta}$ — функции α, а l_1, l_2, ..., n_2 — функции β. Следовательно, мы имеем

$$[\alpha, \beta] = \sum \left[\left(l_1 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + l_2 \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \left(\dot{\xi} \frac{\partial l_1}{\partial \beta} + \dot{\eta} \frac{\partial l_2}{\partial \beta} \right) \right] -$$
$$- \sum \left[\left(l_1 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \alpha} + l_2 \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \alpha} \right) \left(\xi \frac{\partial l_1}{\partial \beta} + \eta \frac{\partial l_2}{\partial \beta} \right) \right]. \tag{1}$$

Но $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$. Поэтому

$$\sum l_1 \frac{\partial l_1}{\partial \beta} = 0.$$

Аналогично

$$\sum l_2 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} = 0.$$

Кроме того, так как $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, то

$$\sum l_1 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} = -\sum l_2 \frac{\partial l_1}{\partial \beta}.$$

Таким образом, формула (1) принимает вид

$$[\alpha, \beta] = \left(\dot{\eta}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \eta\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \alpha} - \dot{\xi}\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \xi\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \alpha}\right)\sum l_1 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\sum l_1 \frac{\partial l_2}{\partial \beta}.$$

Но из равенства (9) § 5.06 имеем

$$\sum l_1 \frac{\partial l_2}{\partial \beta} = -\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial \beta}.$$

Кроме того,

$$h = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = [\mu a(1 - e^2)]^{1/2}.$$

Поэтому

$$[\alpha, \beta] = -\left(\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right)\frac{\partial h}{\partial \alpha}.$$

Если $\alpha \equiv \chi$, то $\partial h/\partial \chi = 0$; следовательно,

$$[\chi, \Omega] = [\chi, \omega] = [\chi, i] = 0.$$

Если $\beta \equiv i$, то $[\alpha, i] = 0$; следовательно,

$$[a, i] = [e, i] = [\chi, i] = 0.$$

Если $\beta \equiv \Omega$, то $[\alpha, \Omega] = -\cos i(\partial h/\partial \alpha)$; следовательно, так как $\mu = n^2a^3$, имеем

$$[a, \Omega] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}\cos i,$$
$$[e, \Omega] = \frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}\cos i.$$

Если $\beta \equiv \omega$, то $[\alpha, \omega] = -\partial h/\partial \alpha$. Поэтому

$$[a, \omega] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}, \quad [e, \omega] = \frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Таким образом, вычисление всех скобок вида $[\alpha, \beta]$ закончено.

Сводка результатов.

$$[a, i] = [e, i] = [\chi, \Omega] = [\chi, \omega] = [\chi, i] = 0,$$
$$[a, \Omega] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}\cos i, \quad [a, \omega] = -\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}, \tag{3}$$
$$[e, \Omega] = \frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}\cos i, \quad [e, \omega] = \frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

§ 5.09. Вычисление $[\alpha_r, \alpha_s]$

Поскольку направляющие косинусы не содержат α, то

$$[\alpha_r, \alpha_s] = \sum\left[\left(l_1\frac{\partial\xi}{\partial\alpha_r} + l_2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha_r}\right)\left(l_1\frac{\partial\dot\xi}{\partial\alpha_s} + l_2\frac{\partial\dot\eta}{\partial\alpha_s}\right)\right] - \\ - \sum\left[\left(l_1\frac{\partial\xi}{\partial\alpha_s} + l_2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha_s}\right)\left(l_1\frac{\partial\dot\xi}{\partial\alpha_r} + l_2\frac{\partial\dot\eta}{\partial\alpha_r}\right)\right],$$

или

$$[\alpha_r, \alpha_s] = \frac{\partial(\xi, \dot\xi)}{\partial(\alpha_r, \alpha_s)} + \frac{\partial(\eta, \dot\eta)}{\partial(\alpha_r, \alpha_s)}. \tag{1}$$

Воспользуемся теперь свойством $(\partial/\partial t)\,[\alpha_r, \alpha_s] = 0$. Скобки Лагранжа постоянны при всех значениях t и, в частности, при таких значениях t, при которых $n(t-\tau)$ мало. Тогда E будет также малым и мы можем написать уравнение Кеплера следующим образом:

$$E - e\left(E - \frac{1}{6}E^3 + \ldots\right) = n(t-\tau).$$

Отсюда с точностью до членов третьего порядка относительно $n(t-\tau)$ находим

$$E = \frac{n(t-\tau)}{1-e} + A(t-\tau)^3,$$

причем значение A нас не интересует.

Следовательно, мы имеем

$$\cos E = 1 - \frac{n^2}{2(1-e)^2}(t-\tau)^2, \quad \sin E = \frac{n(t-\tau)}{1-e} + B(t-\tau)^3$$

и поэтому

$$\xi = a(1-e) - \frac{an^2}{2(1-e)^2}(t-\tau)^2 + \ldots, \tag{2}$$

$$\eta = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}(t-\tau) + C(t-\tau)^3 \tag{3}$$

и

$$\dot\xi = -\frac{an^2}{(1-e)^2}(t-\tau) + D(t-\tau)^3, \tag{4}$$

$$\dot\eta = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e} + E(t-\tau)^2, \tag{5}$$

где значения B, C, D и E для нас не представляют интереса.

Мы сначала примем, что α суть a, e и τ. Обозначим через $(\partial\xi/\partial a)$ значение $\partial\xi/\partial a$ при $t-\tau=0$. Из формул (2) и (4) имеем

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)=1-e,\quad \left(\frac{\partial\xi}{\partial e}\right)=-a,\quad \left(\frac{\partial\xi}{\partial\tau}\right)=0$$

и

$$\left(\frac{\partial\dot\xi}{\partial a}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial\dot\xi}{\partial e}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial\dot\xi}{\partial\tau}\right)=\frac{an^2}{(1-e)^2}.$$

Поэтому интересующие нас якобианы, вычисленные при $t=\tau$, равны

$$\frac{\partial(\xi,\dot\xi)}{\partial(a,e)}=0,\quad \frac{\partial(\xi,\dot\xi)}{\partial(e,\tau)}=-\frac{a^2n^2}{(1-e)^2},\quad \frac{\partial(\xi,\dot\xi)}{\partial(\tau,a)}=-\frac{an^2}{1-e}. \tag{6}$$

Кроме того, из формул (3) и (5) находим

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial e}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)=-\frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}$$

и

$$\left(\frac{\partial\dot\eta}{\partial a}\right)=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e}\frac{\partial(na)}{\partial a},\quad \left(\frac{\partial\dot\eta}{\partial e}\right)=\frac{na}{(1-e)\sqrt{1-e^2}},\quad \left(\frac{\partial\dot\eta}{\partial\tau}\right)=0.$$

Поэтому якобианы, вычисленные при $t=\tau$, равны

$$\frac{\partial(\eta,\dot\eta)}{\partial(a,e)}=0,\quad \frac{\partial(\eta,\dot\eta)}{\partial(e,\tau)}=\frac{a^2n^2}{(1-e)^2},\quad \frac{\partial(\eta,\dot\eta)}{\partial(\tau,a)}=\frac{an^2(1+e)}{2(1-e)}. \tag{7}$$

Из формул (1), (6) и (7) имеем

$$[a,\ e]=0,\quad [e,\ \tau]=0 \tag{8}$$

и

$$[\tau,\ a]=-\frac{1}{2}\frac{\mu}{a^2}=-\frac{1}{2}an^2. \tag{9}$$

Легко видеть, что если ξ, η, $\dot\xi$, $\dot\eta$ в формуле (1) выражены через a, e и χ вместо a, e и τ, где $\chi=-n\tau$, то

$$[a,\ e]=0,\quad [e,\ \chi]=0,\quad [a,\ \chi]=-\frac{1}{2}na. \tag{10}$$

§ 5.10. Уравнения движения планет

1) Итак, мы вычислили все скобки Лагранжа. Понимая под α_1, α_2, α_3 соответственно a, e, χ и под β_1, β_2, β_3 соответственно Ω, ω, i, найдем, что если значения скобок, вычисленных в § 5.07—5.09, под-

ставить в уравнения (7) и (8) § 5.04, то эти уравнения примут вид

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}na\dot{\chi}-\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}(\cos i\cdot\dot{\Omega}+\dot{\omega}) &= \frac{\partial R}{\partial a},\\
\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}(\cos i\cdot\dot{\Omega}+\dot{\omega}) &= \frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{1}{2}na\dot{a} &= \frac{\partial R}{\partial \chi},\\
\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\cos i\left(\dot{a}-\frac{2ae}{1-e^2}\cdot\dot{e}-2a\operatorname{tg} i\cdot\frac{di}{dt}\right) &= \frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\left(\dot{a}-\frac{2ae}{1-e^2}\cdot\dot{e}\right) &= \frac{\partial R}{\partial \omega},\\
na^2\sqrt{1-e^2}\sin i\cdot\dot{\Omega} &= \frac{\partial R}{\partial i}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$\dot{a}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \chi}, \tag{1}$$

$$\dot{e}=\frac{1}{na^2e}\left[(1-e^2)\frac{\partial R}{\partial \chi}-\sqrt{1-e^2}\frac{\partial R}{\partial \omega}\right], \tag{2}$$

$$\dot{\chi}=-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}, \tag{3}$$

$$\dot{\Omega}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{4}$$

$$\dot{\omega}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\operatorname{ctg} i\frac{\partial R}{\partial \omega}-\operatorname{cosec} i\frac{\partial R}{\partial \Omega}\right). \tag{6}$$

Эти уравнения и являются уравнениями движения планет в переменных a, e, χ, Ω, ω, i.

2) В теории планет обычно заменяют элементы ω и χ на $\tilde{\omega}$ и ε. Если R' означает возмущающую функцию, когда она выражена через a, e, i, Ω, $\tilde{\omega}$, ε, то мы тождественно имеем

$$R(a, e, i, \Omega, \omega, \chi)\equiv R'(a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon),$$

где в правой части $\tilde{\omega}$ и ε соответственно равны

$$\tilde{\omega}\equiv\omega+\Omega \quad \text{и} \quad \varepsilon\equiv\omega+\Omega+\chi.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R'}{\partial \Omega}+\frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}}\cdot\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \Omega}+\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Omega}=\frac{\partial R'}{\partial \Omega}+\frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon},\\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}}\cdot\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \omega}+\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}=\frac{\partial R'}{\partial \tilde{\omega}}+\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon},\\
\frac{\partial R}{\partial \chi} &= \frac{\partial R'}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial \chi}=\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Если эти выражения для $\partial R/\partial\Omega$, $\partial R/\partial\omega$, $\partial R/\partial\chi$ подставить в правые части уравнений (1) ... (6) и если $\dot\omega$ и χ заменить на $\dot{\tilde\omega} - \Omega$ и $\dot\varepsilon - \dot{\tilde\omega}$ соответственно, то мы получим следующие уравнения (опуская штрих при R'):

$$a = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}, \tag{7}$$

$$\dot\varepsilon = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos\varphi}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\cos\varphi}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{8}$$

$$\dot e = -\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\tilde\omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\cos\varphi}{na^2}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}, \tag{9}$$

$$\dot\Omega = \frac{1}{na^2\cos\varphi\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{10}$$

$$\dot{\tilde\omega} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\cos\varphi}\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{na^2\cos\varphi\sin i}\frac{\partial R}{\partial\Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{na^2\cos\varphi}\left(\frac{\partial R}{\partial\tilde\omega} + \frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right), \tag{12}$$

в правых частях которых мы заменили e на $\sin\varphi$.

3) Бывает полезно вместо элементов e, $\tilde\omega$, i, Ω использовать другие величины.

Пусть

$$h = e\sin\tilde\omega, \qquad k = e\cos\tilde\omega,$$
$$p = \sin i\sin\Omega, \qquad q = \sin i\cos\Omega.$$

Здесь h и k имеют порядок e, а p и q — порядок i.

Пусть R_1 означает возмущающую функцию, выраженную через h, k и p, q. Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \sin\tilde\omega\frac{\partial R_1}{\partial h} + \cos\tilde\omega\frac{\partial R_1}{\partial k}, \qquad \frac{\partial R}{\partial\tilde\omega} = k\frac{\partial R_1}{\partial h} - h\frac{\partial R_1}{\partial k}$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{1}{\gamma}\left(p\frac{\partial R_1}{\partial p} + q\frac{\partial R_1}{\partial q}\right), \qquad \frac{\partial R}{\partial\Omega} = q\frac{\partial R_1}{\partial p} - p\frac{\partial R_1}{\partial q},$$

где $\gamma = \operatorname{tg} i$.

Уравнения (9) и (11) тогда заменяются следующими:

$$\dot{h}=\frac{\cos\varphi}{na^2}\frac{\partial R_1}{\partial k}+\frac{k\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{\gamma na^2\cos\varphi}\left(p\frac{\partial R_1}{\partial p}+q\frac{\partial R_1}{\partial q}\right)-\frac{h\cos\varphi\cdot(\partial R/\partial\varepsilon)}{2na^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}, \tag{13}$$

$$\dot{k}=-\frac{\cos\varphi}{na^2}\frac{\partial R_1}{\partial h}-\frac{h\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{\gamma na^2\cos\varphi}\left(p\frac{\partial R_1}{\partial p}+q\frac{\partial R_1}{\partial q}\right)-$$

$$-\frac{k\cos\varphi}{2na^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{\partial R_1}{\partial\varepsilon}, \tag{14}$$

где $\cos\varphi$ и $\cos{}^1/_2\,\varphi$, γ и $\operatorname{tg}{}^1/_2\,i$ нужно выразить через h, k и p, q. Аналогично уравнения (10) и (12) преобразуются в такие:

$$\dot{p}=\frac{\cos i}{na^2\cos\varphi}\frac{\partial R_1}{\partial q}-\frac{p\cos i}{2na^2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}i}\left(k\frac{\partial R_1}{\partial h}-h\frac{\partial R_1}{\partial k}+\frac{\partial R_1}{\partial\varepsilon}\right), \tag{15}$$

$$\dot{q}=-\frac{\cos i}{na^2\cos\varphi}\frac{\partial R_1}{\partial p}-\frac{q\cos i}{2na^2\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}i}\left(k\frac{\partial R_1}{\partial h}-h\frac{\partial R_1}{\partial k}+\frac{\partial R_1}{\partial\varepsilon}\right). \tag{16}$$

В случае возмущений орбиты Земли, вызванных действием планет, i мало, так что, пренебрегая i^3, мы можем написать

$$p=i\sin\Omega, \quad q=i\cos\Omega.$$

Когда рассматриваются только вековые члены, то, как было найдено, p и q выражаются следующими формулами:

$$i\sin\Omega=gt+ht^2, \tag{17}$$

$$i\cos\Omega=g_1t+h_1t^2, \tag{18}$$

где g, h (не нужно смешивать с $e\sin\tilde{\omega}$), g_1 и h_1 — малые количества. Мы воспользуемся уравнениями (17) и (18) в гл. 20 при изучении прецессии.

§ 5.11. Метод Кемпбелла вычисления скобок Лагранжа[1]

Положим $V=\mu/r$ и напишем уравнения невозмущенного движения

$$\ddot{x}=\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y}=\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \ddot{z}=\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{1}$$

[1]) См. A. Y. G. Campbell, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 57, 118 (1897).

где $\ddot{x} \equiv \partial^2 x/\partial t^2$ и т. д. Если v — орбитальная скорость в эллиптическом движении, то, согласно формуле (2) § 2.12, мы будем иметь

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Положим

$$T = \frac{1}{2} v^2, \quad V_0 = -\frac{\mu}{2a}. \tag{2}$$

Тогда

$$T = V + V_0.$$

Пусть p, q — любые два элемента или любые две независимые функции от элементов. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V_0}{\partial p}$$

или, так как V — функция от x, y, z, то

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \sum_{xyz} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial V_0}{\partial p} = \sum \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial V_0}{\partial p}.$$

Кроме того, согласно формуле (2),

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \sum \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p}.$$

Поэтому, складывая последние два уравнения, находим

$$2 \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial V_0}{\partial p} + \sum \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial p} + \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \right) = \frac{\partial V_0}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} \sum \dot{x} \frac{\partial x}{\partial p},$$

где суммирование производится по x, y, z.

Интегрируя это равенство в пределах от τ до t, мы будем иметь

$$2 \int_\tau^t \frac{\partial T}{\partial p} dt = (t - \tau) \frac{\partial V_0}{\partial p} + \sum \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial p} \right)_t - \sum \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial p} \right)_\tau. \tag{3}$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial p} \int_\tau^t T\, dt = \int_\tau^t \frac{\partial T}{\partial p} dt - T(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

Поэтому соотношение (3) принимает вид

$$2 \frac{\partial}{\partial p} \int_\tau^t T\, dt - t \frac{\partial V_0}{\partial p} - \sum \dot{x} \frac{\partial x}{\partial p} = -2T(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial p} - \tau \frac{\partial V_0}{\partial p} - \sum \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial p} \right)_\tau, \tag{4}$$

где при суммировании в левой части мы опустили значок t.

Далее,

$$2T = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

и, поскольку $r = a(1 - e\cos E)$ и $E = 0$ при $t = \tau$, мы будем иметь

$$2T(\tau) = \frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}. \tag{5}$$

Кроме того, так как

$$V_0 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \text{то} \quad \frac{\partial V_0}{\partial p} = \frac{\mu}{2a^2}\frac{\partial a}{\partial p}. \tag{6}$$

Из равенств (4) — (6) имеем

$$2\frac{\partial}{\partial p}\int_{\tau}^{t} T\,dt - t\frac{\partial V_0}{\partial p} - \sum \dot{x}\frac{\partial x}{\partial p} = C_p, \tag{7}$$

где

$$C_p = -\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial p} - \frac{\mu\tau}{2a^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} - \sum \left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\tau}. \tag{8}$$

Заметим, что C_p — функция элементов и она не зависит от времени.

Аналогично, если q — один из элементов или функция элементов, то мы будем иметь

$$2\frac{\partial}{\partial q}\int_{\tau}^{t} T\,dt - t\frac{\partial V_0}{\partial q} - \sum \dot{x}\frac{\partial x}{\partial q} = C_q, \tag{9}$$

где C_q дается выражением, аналогичным (8).

Продифференцируем формулы (7) и (9) по q и p соответственно и вычтем; тогда получим

$$\sum \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(p, q)} = \frac{\partial C_q}{\partial p} - \frac{\partial C_p}{\partial q},$$

т. е.

$$[p, q] = \frac{\partial C_q}{\partial p} - \frac{\partial C_p}{\partial q}. \tag{10}$$

Так как C_p и C_q не зависят от времени, то равенство (10) дает независимое доказательство характеристического свойства скобок, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}[p, q] = 0.$$

§ 5.12. Вычисление C_p

Согласно формуле (8) предыдущего параграфа,

$$C_p = -\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial p} - \frac{\mu\tau}{2a^2} \cdot \frac{\partial a}{\partial p} - \sum \left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\tau}. \tag{1}$$

Вычислим сначала последний член в формуле (1). Координаты x, y, z выражаются через ξ, η посредством равенств

$$x = l_1\xi + l_2\eta, \quad y = m_1\xi + m_2\eta, \quad z = n_1\xi + n_2\eta,$$

где l_1, l_2, ..., n_2 — направляющие косинусы, определяемые формулами (3) и (4) § 5.06. Таким образом,

$$\sum_{xyz} \dot{x}\frac{\partial x}{\partial p} = \sum_{lmn} (l_1\dot{\xi} + l_2\dot{\eta})\left(l_1\frac{\partial \xi}{\partial p} + l_2\frac{\partial \eta}{\partial p} + \xi\frac{\partial l_1}{\partial p} + \eta\frac{\partial l_2}{\partial p}\right) =$$

$$= \dot{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \dot{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p} - (\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\sum l_1\frac{\partial l_2}{\partial p}.$$

Но $\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = h$. Поэтому, используя равенство (9) § 5.06, мы получим

$$\sum\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p}\right)_\tau = \left(\dot{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \dot{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_\tau + h\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial p} + h\frac{\partial \omega}{\partial p}. \tag{2}$$

Далее, согласно формуле (4) § 5.09,

$$(\dot{\xi})_\tau = 0,$$

согласно формуле (5) § 5.09,

$$(\dot{\eta})_\tau = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}$$

и, как показывает формула (3) § 5.09,

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_\tau = -\frac{na\sqrt{1-e^2}}{1-e}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

Поэтому, так как $\mu = n^2a^3$, то

$$\left(\dot{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \dot{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_\tau = -\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial p}. \tag{3}$$

Если использовать равенства (2) и (3), то формула (1) примет вид

$$C_p = -\frac{\mu\tau}{2a^2}\frac{\partial a}{\partial p} - h\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial p} - h\frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{4}$$

или, заменяя $-\tau$ на χ/n, а μ на n^2a^3,

$$C_p = \frac{1}{2}na\chi\frac{\partial a}{\partial p} - h\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial p} - h\frac{\partial \omega}{\partial p}. \tag{5}$$

§ 5.13. Общая формула для $[p, q]$

Запишем формулу (4) предыдущего параграфа следующим образом:

$$C_p = -\tau\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\mu}{2a}\right) - h\frac{\partial \omega}{\partial p} - h\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial p}. \tag{1}$$

Аналогично

$$C_q = -\tau \frac{\partial}{\partial q}\left(-\frac{\mu}{2a}\right) - h\frac{\partial\omega}{\partial q} - h\cos i\,\frac{\partial\Omega}{\partial q}. \tag{2}$$

Так как, согласно равенству (10) § 5.11,

$$[p, q] = \frac{\partial C_q}{\partial p} - \frac{\partial C_p}{\partial q},$$

то из формул (1) и (2) мы получаем общую формулу для скобок Лагранжа

$$[p, q] = \frac{\partial\left(-\tau, -\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\omega, h)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, h\cos i)}{\partial(p, q)}, \tag{3}$$

где $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$.

Заменяя $-\tau$ на χ/n, мы представим эту формулу в другом виде:

$$[p, q] = \frac{\partial\left(\frac{\chi}{n}, -\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\omega, h)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, h\cos i)}{\partial(p, q)}. \tag{4}$$

Если заменить τ (или χ) и ω на ε и $\tilde\omega$, так что

$$\tau = -\frac{\varepsilon - \tilde\omega}{n} \quad \text{и} \quad \omega = \tilde\omega - \Omega,$$

то формула (1) примет вид

$$C_p = \frac{\varepsilon - \tilde\omega}{n}\cdot\frac{\mu}{2a^2}\frac{\partial a}{\partial p} - h\frac{\partial\tilde\omega}{\partial p} + h(1-\cos i)\frac{\partial\Omega}{\partial p}, \tag{5}$$

а формула (3) запишется следующим образом:

$$[p, q] = \frac{\partial\left(\frac{\varepsilon-\tilde\omega}{n}, -\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\tilde\omega - \Omega, h)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, h\cos i)}{\partial(p, q)}. \tag{6}$$

§ 5.14. Вычисление скобок Лагранжа

Любая скобка Лагранжа может быть легко вычислена по общим формулам (3) или (4) предыдущего параграфа. Например, если $p = a$, $q = \Omega$, то

$$[a, \Omega] = \frac{\partial(\Omega, h\cos i)}{\partial(a, \Omega)},$$

т. е.

$$[a, \Omega] = -\cos i\,\frac{\partial h}{\partial a} = -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\cos i,$$

что согласуется с формулой (3) § 5.08.

Другой метод вычисления скобок следует из определения C_p по формулам (5) или (4) § 5.12. Придавая p по очереди значения a, e, χ, Ω, ω, i, получаем

$$C_a = \frac{1}{2} na\chi, \qquad C_e = 0, \qquad C_\chi = 0,$$
$$C_\Omega = -h\cos i, \quad C_\omega = -h, \quad C_i = 0.$$

Поэтому, как и раньше, найдем, например,

$$[a, \Omega] = \frac{\partial C_\Omega}{\partial a} - \frac{\partial C_a}{\partial \Omega} = -\cos i\,\frac{\partial h}{\partial a} = -\frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\cos i.$$

Мы можем, таким образом, вычислить значения пятнадцати скобок Лагранжа, которые были найдены в предыдущих параграфах.

Если в качестве элементов приняты a, e, i, ε, $\tilde{\omega}$ и Ω, то соответствующие значения C_p, согласно формуле (6) § 5.13, равны

$$C_a = \frac{\varepsilon - \tilde{\omega}}{n}\cdot\frac{\mu}{2a^2}, \qquad C_e = C_i = C_\varepsilon = 0,$$
$$C_{\tilde{\omega}} = -h, \qquad C_\Omega = (1-\cos i)\,h.$$

Девять скобок равны нулю. Выпишем не равные нулю скобки:

$$[a, \varepsilon] = -\frac{1}{2} na, \qquad [a, \tilde{\omega}] = \frac{1}{2} na\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),$$
$$[a, \Omega] = \frac{1}{2} na\sqrt{1-e^2}\,(1-\cos i), \qquad [e, \omega] = \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{1}$$
$$[e, \Omega] = -na^2 e\,\frac{(1-\cos i)}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad [i, \Omega] = na^2\sqrt{1-e^2}\sin i.$$

§ 5.15. Вывод канонических уравнений

В предыдущем параграфе мы брали в качестве p (или q) один из элементов. Однако если взять в качестве p (или q) некоторые функции от элементов, то мы можем получить более простые уравнения.

Пусть α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3 означают независимые функции одного или большего числа элементов, определяемые формулами

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \qquad \alpha_2 = h, \qquad \alpha_3 = h\cos i, \tag{1}$$

$$\beta_1 = -\tau, \qquad \beta_2 = \omega, \qquad \beta_3 = \Omega. \tag{2}$$

Согласно примечанию на стр. 88, уравнения Лагранжа в самой общей форме имеют вид

$$\sum_{i=1}^{3}[\alpha_r, \alpha_i]\dot{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{3}[\alpha_r, \beta_i]\dot{\beta}_i=\frac{\partial R}{\partial \alpha_r},$$

$$\sum_{i=1}^{3}[\beta_r, \alpha_i]\dot{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{3}[\beta_r, \beta_i]\dot{\beta}_i=\frac{\partial R}{\partial \beta_r},$$

где r принимает значения 1, 2 и 3.

Выражение для C_p через новые постоянные α_i и β_i, согласно формуле (1) § 5.13, имеет вид

$$C_p=\beta_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial p}-\alpha_2\frac{\partial \beta_2}{\partial p}-\alpha_3\frac{\partial \beta_3}{\partial p}.$$

Аналогично

$$C_q=\beta_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial q}-\alpha_2\frac{\partial \beta_2}{\partial q}-\alpha_3\frac{\partial \beta_3}{\partial q}.$$

Поэтому

$$[p, q]\equiv\frac{\partial C_q}{\partial p}-\frac{\partial C_p}{\partial q}=-\frac{\partial(\alpha_1, \beta_1)}{\partial(p, q)}-\frac{\partial(\alpha_2, \beta_2)}{\partial(p, q)}-\frac{\partial(\alpha_3, \beta_3)}{\partial(p, q)}, \tag{3}$$

откуда

$$[\alpha_1, \beta_1]=[\alpha_2, \beta_2]=[\alpha_3, \beta_3]=-1,$$

а все остальные скобки равны нулю.

Уравнения Лагранжа тогда приводятся к виду

$$\dot{\beta}_1=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, \quad \dot{\beta}_2=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, \quad \dot{\beta}_3=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}; \tag{4}$$

$$\dot{\alpha}_1=\frac{\partial R}{\partial \beta_1}, \quad \dot{\alpha}_2=\frac{\partial R}{\partial \beta_2}, \quad \dot{\alpha}_3=\frac{\partial R}{\partial \beta_3}. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) называются *каноническими уравнениями*, а переменные α_i, β_i называются *сопряженными каноническими элементами*. Мы встретимся с каноническими уравнениями, их свойствами и их решением в последующих главах.

Заменяя $-\beta_i$ на γ_i, мы можем записать формулу (3) в виде

$$[p, q]=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\alpha_i, \gamma_i)}{\partial(p, q)}. \tag{6}$$

Следует помнить, что вообще p и q — любые независимые функции элементов. Однако в качестве них могут быть приняты любые два элемента, скажем a_m и a_s. Тогда мы будем иметь такое выражение для скобки Лагранжа:

$$[a_m, a_s] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\alpha_i, \gamma_i)}{\partial(a_m, a_s)}, \tag{7}$$

которое будет использовано в следующей главе.

§ 5.16. Вывод Уиттекера общей формулы для скобок Лагранжа[1])

Если p и q — любые два элемента или вообще любые две функции элементов и если A_p определяется формулой

$$A_p = \dot{x}\frac{\partial x}{\partial p} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial p} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial p}, \tag{1}$$

то, очевидно,

$$[p, q] = \frac{\partial A_p}{\partial q} - \frac{\partial A_q}{\partial p}. \tag{2}$$

Здесь x, y, z — координаты планеты P относительно осей OX, OY, OZ с обычной основной плоскостью и началом O в Солнце (рис. 14).

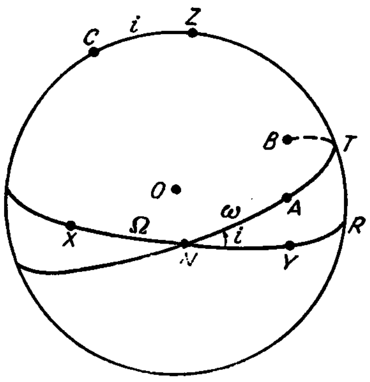

Рис. 14.

Пусть x_1, y_1, z_1 означают координаты P по отношению к осям ON, OR, OZ, которые получаются путем поворота осей OX, OY на угол Ω. Тогда

$$x = x_1 \cos\Omega - y_1 \sin\Omega, \quad y = x_1 \sin\Omega + y_1 \cos\Omega, \quad z = z_1.$$

---

[1]) См. E. T. Whittaker, The Messenger of Mathematics, New Series, No. 309 (January, 1897).

Пусть, далее,

$$u = x + iy, \quad v = x - iy; \quad u_1 = x_1 + iy_1, \quad v_1 = x_1 - iy_1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Тогда

$$u = u_1 e^{i\Omega}, \quad v = v_1 e^{-i\Omega}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = e^{-i\Omega}\left(\frac{\partial v_1}{\partial p} - iv_1 \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right)$$

и

$$\dot{u}\frac{\partial v}{\partial p} = \dot{u}_1 \frac{\partial v_1}{\partial p} - i\dot{u}_1 v_1 \frac{\partial \Omega}{\partial p}.$$

Взяв в этом равенстве действительную часть, мы найдем

$$\dot{x}\frac{\partial x}{\partial p} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial p} = \dot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} + \dot{y}_1 \frac{\partial y_1}{\partial p} + (x_1\dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1)\frac{\partial \Omega}{\partial p}. \tag{3}$$

Но выражение $(x_1\dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1)$ равно $h \cos i$, т. е. равно проекции удвоенной секториальной скорости на основную плоскость.

Следовательно, из формул (1) и (3) получаем

$$A_p = \dot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial p} + \dot{y}_1 \frac{\partial y_1}{\partial p} + \dot{z}_1 \frac{\partial z_1}{\partial p} + h \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial p}. \tag{4}$$

Осуществим теперь поворот осей y_1 и z_1 на угол i. Пусть X, Y, Z — координаты планеты относительно новых осей ON, OT, OC. Тогда $x_1 = X$, и по аналогии с формулой (3) пишем

$$\dot{y}_1 \frac{\partial y_1}{\partial p} + \dot{z}_1 \frac{\partial z_1}{\partial p} = \dot{Y}\frac{\partial Y}{\partial p} + \dot{Z}\frac{\partial Z}{\partial p} + (Y\dot{Z} - \dot{Y}Z)\frac{\partial i}{\partial p}. \tag{5}$$

Но $Z = 0$, поэтому из формул (4) и (5) получаем

$$A_p = \dot{X}\frac{\partial X}{\partial p} + \dot{Y}\frac{\partial Y}{\partial p} + h \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial p}. \tag{6}$$

Повернем теперь оси ON, OT на угол ω так, чтобы они совпали с OA и OB, где A — перигелий. Пусть ξ, η — координаты планеты относительно осей OA и OB. По аналогии с формулой (3) имеем

$$\dot{X}\frac{\partial X}{\partial p} + \dot{Y}\frac{\partial Y}{\partial p} = \dot{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \dot{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p} + (\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\frac{\partial \omega}{\partial p}.$$

Но $\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = h$. Поэтому

$$A_p = \dot{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \dot{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial p} + h\frac{\partial \omega}{\partial p} + h \cos i \frac{\partial \Omega}{\partial p}. \tag{7}$$

Далее,

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a(1 - e^2)^{1/2} \sin E \equiv b \sin E$$

и

$$\dot{\xi} = -a\dot{E}\sin E, \quad \dot{\eta} = b\dot{E}\cos E.$$

Если через F обозначить первые два члена правой части формулы (7), то легко видеть, что

$$\frac{F}{\dot{E}}=a^2\frac{\partial E}{\partial p}(1-e^2\cos^2 E)+a\sin E(1-e\cos E)\left(e\frac{\partial a}{\partial p}+a\frac{\partial e}{\partial p}\right).$$

Но из уравнения Кеплера имеем

$$\dot{E}(1-e\cos E)=n=\mu^{1/2}a^{-3/2}.$$

Поэтому

$$\mu^{-1/2}F=a^{1/2}(1+e\cos E)\frac{\partial E}{\partial p}+a^{-1/2}e\sin E\frac{\partial a}{\partial p}+a^{1/2}\sin E\frac{\partial e}{\partial p}.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mu^{-1/2}F=&-\frac{1}{2}a^{1/2}(1-e\cos E)\frac{\partial E}{\partial p}-\frac{3}{4}a^{-1/2}(E-e\sin E)\frac{\partial a}{\partial p}+\\&+\frac{1}{2}a^{1/2}\sin E\frac{\partial e}{\partial p}+\frac{1}{2}a^{1/2}(3+e\cos E)\frac{\partial E}{\partial p}+\\&+\frac{1}{4}a^{-1/2}(3E+e\sin E)\frac{\partial a}{\partial p}+\frac{1}{2}a^{1/2}\sin E\frac{\partial e}{\partial p}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}F=&-\frac{\mu^{1/2}}{2a}\frac{\partial}{\partial p}[a^{3/2}(E-e\sin E)]+\\&+\frac{\mu^{1/2}}{2}\frac{\partial}{\partial p}[a^{1/2}(3E+e\sin E)]\equiv-\frac{\mu^{1/2}}{2a}\frac{\partial G}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial p}.\end{aligned}\tag{8}$$

Далее,

$$G\equiv a^{3/2}(E-e\sin E)\equiv na^{3/2}\left(t+\frac{\chi}{n}\right)=\mu^{1/2}\left(t+\frac{\chi}{n}\right),$$

так что

$$\frac{\partial G}{\partial p}=\mu^{1/2}\frac{\partial(\chi/n)}{\partial p}.\tag{9}$$

Из формул (7)—(9) получаем

$$A_p=-\frac{\mu}{2a}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\chi}{n}\right)+\frac{\partial H}{\partial p}+h\frac{\partial\omega}{\partial p}+h\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial p}.\tag{10}$$

A_q дается аналогичной формулой. Теперь при помощи равенства (2) мы найдем общую формулу для скобок Лагранжа, именно:

$$[p,q]=\frac{\partial\left(\frac{\chi}{n},-\frac{\mu}{2a}\right)}{\partial(p,q)}+\frac{\partial(\omega,h)}{\partial(p,q)}+\frac{\partial(\Omega,h\cos i)}{\partial(p,q)},\tag{11}$$

что согласуется с формулой (4) § 5.13.

Глава 6

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

§ 6.01. Введение

Мы будем пользоваться уравнениями для элементов a, e, i, Ω, $\tilde{\omega}$ и ε, которые получены в § 5.10. Эти уравнения описывают движение планеты P с массой m, возмущаемой планетой P_1 с массой m_1. В частности, мы займемся уравнениями

$$\dot{a} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + P\frac{\partial R}{\partial e} + Q\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{2}$$

$$\dot{\Omega} = A\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{3}$$

Здесь n определяется из формулы

$$n^2a^3 = \mu = G(m_0 + m), \tag{4}$$

где m_0 — масса Солнца, R — возмущающая функция, которая выражается формулой

$$R = Gm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right), \tag{5}$$

причем x, y, z и x_1, y_1, z_1 — гелиоцентрические координаты планет P и P_1 соответственно, A, P и Q — функции a, e, i, которые не нуждаются в пояснениях. Наконец,

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \tag{6}$$

Решение уравнений, определяющих $\dot{e}$, i и $\dot{\tilde{\omega}}$, имеет те же общие особенности, что и решение уравнения для $\dot{\Omega}$. Поэтому в настоящей главе можно ограничиться подробным рассмотрением уравнения (3).

Рассмотрим возмущающее действие планеты P на планету P_1. Если a_1, e_1, ..., ε_1 — элементы орбиты планеты P_1, то уравнение, аналогичное уравнению (1), будет

$$\dot{a}_1 = \frac{2}{n_1a_1}\frac{\partial R_1}{\partial \varepsilon_1}, \tag{7}$$

где

$$R_1 = Gm\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3}\right). \tag{8}$$

Можно написать также уравнения, аналогичные уравнениям (2) и (3).

Очевидно, что это рассуждение можно распространить на любое число планет.

Практический метод решения уравнений Лагранжа основан на том факте, что e, e_1, I и I_1 малы, так что возмущающие функции R и R_1 можно разложить в ряды по степеням e, e_1, γ, γ_1, где

$$\gamma = \operatorname{tg} I, \quad \gamma_1 = \operatorname{tg} I_1. \tag{9}$$

Мы можем добавить, что в теории Луны отношение геоцентрических расстояний Луны и Солнца мало, и при разложении возмущающей функции (главным возмущающим телом является Солнце) эта особенность также принимается во внимание.

§ 6.02. Общий вид разложения возмущающей функции

В следующей главе мы будем заниматься во всех деталях разложением возмущающей функции, но пока для читателя важно, не входя в излишние подробности, ознакомиться с предварительными идеями о том, каким образом R принимает форму, удобную для практических целей, и каковы общие свойства этой формы. В этом параграфе мы будем отбрасывать члены, содержащие третьи и более высокие степени эксцентриситетов и наклонностей.

В предыдущей главе мы записывали формулы эллиптического движения тела P в виде

$$x = F_1(t, \alpha_i, \beta_i), \quad y = F_2(t, \alpha_i, \beta_i), \quad z = F_3(t, \alpha_i, \beta_i),$$

где α_i и β_i $(i = 1, 2, 3)$ представляют собой шесть элементов эллиптической орбиты, а F_1, F_2, F_3 — известные функции времени (или средней аномалии M) и шести элементов. Уравнения движения планет теперь будут получены методом вариации произвольных постоянных (см. § 5.01). Для этого следует вышеприведенные функции x, y и z подставить в R и принять α и β в качестве новых переменных.

Общая формула для F_1, например, дается, согласно равенству (3) § 5.01, в виде

$$x = al_1 \cos E + bl_2 \sin E - ael_1. \tag{1}$$

Если мы выразим $\cos E$ и $\sin E$ через среднюю аномалию M и эксцентриситет e, то получим, с точностью до членов порядка e^2,

$$\cos E = -\frac{1}{2} e + \left(1 - \frac{3}{8} e^2\right) \cos M + \frac{1}{2} e \cos 2M + \frac{3}{8} e^2 \cos 3M, \tag{2}$$

$$\sin E = \left(1 - \frac{1}{8} e^2\right) \sin M + \frac{1}{2} e \sin 2M + \frac{3}{8} e^2 \sin 3M. \tag{3}$$

Далее при помощи формулы (3) § 5.06 l_1 можно представить в виде

$$l_1 = \cos(\Omega + \omega) + 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\Omega\sin\omega,$$

или, с точностью до членов порядка γ^2,

$$l_1 = \cos\tilde{\omega} + \frac{1}{4}\gamma^2[\cos(2\Omega - \tilde{\omega}) - \cos\tilde{\omega}]. \qquad (4)$$

Аналогично

$$l_2 = -\sin\tilde{\omega} + \frac{1}{4}\gamma^2[\sin(2\Omega - \tilde{\omega}) + \sin\tilde{\omega}]. \qquad (5)$$

Легко показать, что посредством равенств (2)—(5) формула (1) для x принимает вид

$$x = -\frac{3}{2}ae\cos\tilde{\omega} + \sum A\cos(iM + j\Omega + k\tilde{\omega}), \qquad (6)$$

где i, j и k — положительные или отрицательные числа, включая нуль для j, а A — функция a, e и γ.

Точно таким же образом формула для координаты x_1 возмущающей планеты P_1 может быть записана в виде

$$x_1 = -\frac{3}{2}a_1e_1\cos\tilde{\omega}_1 + \sum A_1\cos(i_1M_1 + j_1\Omega_1 + k_1\tilde{\omega}_1), \qquad (7)$$

где i_1, j_1 и k_1 — положительные или отрицательные числа, включая нуль для j_1, а A_1 зависит от a_1, e_1 и γ_1.

Рассмотрим теперь множитель x_1/r_1^3, содержащийся при x во втором члене формулы (5) § 6.01 для R. Уравнение невозмущенного движения для координаты x_1 планеты P_1 имеет вид

$$\ddot{x}_1 = -\mu_1\frac{x_1}{r_1^3} = -n_1^2a_1^3\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Далее, так как $M_1 = n_1t + \chi_1$, то

$$\ddot{x}_1 = n_1^2\frac{d^2x_1}{dM_1^2},$$

откуда

$$\frac{x_1}{r_1^3} = -\frac{1}{a_1^3}\frac{d^2x_1}{dM_1^2}.$$

Используя формулу (7), мы можем получить

$$\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{1}{a_1^3}\sum i_1^2A_1\cos(i_1M_1 + j_1\Omega_1 + k_1\tilde{\omega}_1),$$

где $l_1 \neq 0$. Из последнего уравнения и из равенства (6) видно, что xx_1/r_1^3 принимает вид

$$\sum C \cos(lM + l_1 M_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1), \tag{8}$$

где C зависит от a, a_1, e, e_1, γ и γ_1, l, но не зависит от l_1 и может принимать нулевое значение. yy_1/r_1^3 и zz_1/r_1^3 также представляются рядами такого же вида, что и (8).

Разложение $1/\Delta$ выполняется гораздо более сложным образом, и поэтому мы не будем здесь пытаться давать даже поверхностное его описание. Мы просто примем, что $1/\Delta$ может быть разложено в ряд вида (8) с оговоркой, что l и l_1 могут принимать нулевые значения раздельно или одновременно. Таким образом, полное разложение R может быть записано в виде

$$R = m_1 \sum c \cos\theta_0 + m_1 \sum C \cos\theta, \tag{9}$$

причем θ_0 и θ даются формулами

$$\theta_0 = j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1, \tag{10}$$

где $j, \ldots, k_1$ могут принимать нулевые значения порознь или вместе, и

$$\theta = lM + l_1 M_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1, \tag{11}$$

где l и l_1, в частности, могут быть равны нулю. В формуле (9) c и C — функции a, a_1, e, e_1, γ и γ_1; при этом предполагается, что постоянная тяготения включена в c и C.

Проблема сходимости рядов типа (9) (когда рассматриваются все степени эксцентриситета и наклонности) сложна, и мы не будем пытаться здесь ее рассматривать, а примем, что общие ряды вида (9) (и другие ряды, полученные аналогичными методами) представляют возмущающую функцию для практических целей.

Заметим, что элемент ε входит в выражение (11) для θ только вместе с nt, так как $M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$.

Вместо M удобнее иметь дело со средней долготой l, которая выражается формулой

$$l = nt + \varepsilon. \tag{12}$$

Тогда θ будет иметь вид

$$\theta = il + i_1 l_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) мы замечаем, что

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial l}. \tag{14}$$

§ 6.03. Важная модификация уравнений движения планет

Рассмотрим первое уравнение движения

$$\dot{a} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial l}.$$

Из формул (9) и (13) § 6.02 имеем

$$\dot{a} = -\frac{2m_1}{na}\sum iC\sin\theta. \tag{1}$$

Так как каждый член правой части этого уравнения содержит множитель m_1, который является малым по сравнению с массой Солнца, то для получения a в первом приближении мы можем считать, что элементы a, a_1, ..., $\tilde{\omega}$ в правой части уравнения (1) постоянны и что

$$\theta = (in + i_1 n_1)t + g, \tag{2}$$

где g — постоянная. Тогда, интегрируя, мы получаем

$$a = a_0 + \frac{2m_1}{na}\sum \frac{iC}{in + i_1 n_1}\cos\theta. \tag{3}$$

Формула (3) показывает, что a колеблется около среднего значения a_0, и мы кратко запишем

$$a = a_0 + \text{п. ч.},$$

где п. ч. означает ряд с периодическими членами.

Рассмотрим теперь уравнение (3) § 6.01, именно

$$\dot{\Omega} = A\frac{\partial R}{\partial i}.$$

Так как i ($\equiv \operatorname{arctg}\gamma$) входит в коэффициенты c и C формулы (9) § 6.02, то

$$\dot{\Omega} = Am_1\sum\frac{\partial c}{\partial i}\cos\theta_0 + Am_1\sum\frac{\partial C}{\partial i}\cos\theta.$$

В первом приближении мы получим

$$\Omega = \Omega_0 + Am_1 t\sum\frac{\partial c}{\partial i}\cos\theta_0 + Am_1\sum\frac{1}{in + i_1 n_1}\frac{\partial C}{\partial i}\sin\theta,$$

где θ дается формулой (2). Обозначим через λ постоянный коэффициент при t. Тогда

$$\Omega = \Omega_0 + \lambda t + \text{п. ч.} \tag{4}$$

Из соответствующих уравнений легко видеть, что e, i и $\tilde{\omega}$ в первом приближении выражаются формулами, аналогичными (4).

Картина меняется, когда мы переходим к оставшемуся уравнению движения планеты, т. е. к уравнению для $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + P\frac{\partial R}{\partial e} + Q\frac{\partial R}{\partial i}. \tag{5}$$

Интегрирование последних двух членов даст часть решения в виде $\lambda t +$ п. ч., которая, как мы видим, совпадает с результатом для других элементов, кроме элемента a, для которого $\lambda = 0$. Следовательно, мы можем опустить в дальнейшем рассмотрение двух последних членов в правой части уравнения (5).

Рассмотрим теперь первый член в правой части этого уравнения. Величина a входит в коэффициенты c и C разложения для R, а ***также*** в n и тем самым в аргумент θ, поскольку $n = \mu^{1/2}a^{-3/2}$. Найдя производную $\partial R/\partial a$, мы получим

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2m_1}{na}\sum\frac{\partial c}{\partial a}\cos\theta_0 - \\ -\frac{2m_1}{na}\sum\frac{\partial C}{\partial a}\cos\theta + \frac{2m_1}{na}\cdot\frac{dn}{da}t\sum iC\sin\theta. \tag{6}$$

Интегрирование первых двух членов правой части этого уравнения даст члены вида $\lambda t +$ п. ч., которые можно объединить с ранее полученными членами, содержащими P и Q в правой части уравнения (5).

Новую особенность, на которую нужно обратить внимание, составляет вид последнего члена в правой части уравнения (6), содержащего периодический ряд с амплитудами, увеличивающимися со временем. Это нежелательное осложнение может быть преодолено следующим образом. Если мы обозначим через $(\partial R/\partial a)$ производную от R по a, входящему ***только в коэффициенты*** c и C, то

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + \frac{\partial R}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial n}\cdot\frac{dn}{da}$$

или, согласно формулам (12) и (14) § 6.02,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + t\frac{dn}{da}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \tag{7}$$

Далее, на основании уравнения (1) § 6.01

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{da}\cdot\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dn}{da}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \tag{8}$$

поэтому, опуская члены с P и Q и используя равенства (7) и (8), уравнение (5) можно записать в виде

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) - t\frac{dn}{dt}$$

или

$$\dot{\varepsilon} + t\,\frac{dn}{dt} = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right).$$

Пусть $\dot{\varepsilon}'$ определяется формулой

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon} + t\,\frac{dn}{dt}. \tag{9}$$

Тогда

$$\dot{\varepsilon}' = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) = -\frac{2m_1}{na}\sum\frac{\partial c}{\partial a}\cos\theta_0 - \frac{2m_1}{na}\sum\frac{\partial C}{\partial a}\cos\theta. \tag{10}$$

Интегрируя уравнение (10), мы в первом приближении найдем для ε' следующее выражение:

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + \lambda t + \text{п. ч.} \tag{11}$$

Согласно формуле (9),

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon} + \frac{d}{dt}(nt) - n,$$

так что

$$l \equiv nt + \varepsilon = \int n\,dt + \varepsilon'. \tag{12}$$

Как легко заметить, ε входит в R только вместе с l. Следовательно, если вместо $nt + \varepsilon$ подставить в R выражение $\int n\,dt + \varepsilon'$, то мы будем иметь

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon'} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

так что

$$\dot{a} = \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}.$$

Все другие уравнения при этом преобразовании остаются неизменными. Принимая ε' в качестве нового элемента вместо ε, мы видим, что, согласно формулам (5) и (10), уравнение для ε' имеет вид

$$\dot{\varepsilon}' = -\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right) + P\frac{\partial R}{\partial e} + Q\frac{\partial R}{\partial i}, \tag{13}$$

так что в первом приближении ε' будет выражаться формулой (11).

Таким образом, если p означает любой элемент (включая ε'), то решение уравнений движения планет в первом приближении дается в виде

$$p = p_0 + \lambda t + \text{п. ч.} \tag{14}$$

с важной оговоркой, что для элемента a соответствующее значение λ в формуле (14) равно нулю.

Поступая аналогичным образом с уравнениями движения планеты P_1, возмущаемой планетой P, мы получаем в первом приближении для какого-либо элемента p_1 следующее выражение:

$$p_1 = (p_1)_0 + \lambda_1 t + \text{п. ч.}$$

с той же оговоркой, что соответствующее значение λ_1 для элемента a_1 равно нулю.

Следует заметить, что периодические члены в элементах a, e, i зависят только от косинусов θ, в то время как в Ω, $\tilde{\omega}$ и ε' — только от синусов θ [это видно из уравнений (7)—(12) § 5.10 и формулы (9) § 6.02 для R].

Таким образом, мы можем написать

$$\left.\begin{matrix} a \\ e \\ i \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} a_0 \\ e_0 \\ i_0 \end{matrix} + \lambda t + m_1 \sum J \cos\theta, \tag{15}$$

$$\left.\begin{matrix} \Omega \\ \tilde{\omega} \\ \varepsilon' \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} \Omega_0 \\ \tilde{\omega}_0 \\ \varepsilon_0 \end{matrix} + \lambda t + m_1 \sum K \sin\theta, \tag{16}$$

причем в первой формуле (15) $\lambda = 0$.

§ 6.04. Общий метод вычисления приближений высших порядков

Введем функцию ρ посредством формулы

$$\rho = \int n\, dt. \tag{1}$$

Тогда, согласно равенству (12) § 6.03, получим

$$l \equiv nt + \varepsilon = \rho + \varepsilon'. \tag{2}$$

Соответственно этому в разложении для R мы заменим l на $\rho + \varepsilon'$ или, опуская ради простоты штрих, — на $\rho + \varepsilon$. Мы должны, конечно, помнить о значении ε, которое теперь ему приписывается. При этих обозначениях θ будет определяться формулой

$$\theta = i(\rho + \varepsilon) + i_1(\rho_1 + \varepsilon_1) + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1, \tag{3}$$

где индексом 1 обозначены величины, связанные с планетой P_1.

Помня, что n есть функция a, мы видим, что ρ, определяемое по формуле (1), в точности совпадает с

$$\rho = \mu^{1/2} \int a^{-3/2}\, dt, \tag{4}$$

откуда

$$\ddot{\rho} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \tag{5}$$

Интеграл $\int n\,dt$, т. е. ρ, называется *средним движением по возмущенной орбите.*

Как мы видели, формальное решение уравнений движения планет в первом приближении, например для a, дается формулой

$$a = a_0 + \frac{2m_1}{na}\sum\frac{iC\cos\theta}{in + i_1 n_1}, \tag{6}$$

в правой части которой все элементы рассматриваются как постоянные, равные a_0, e_0 и т. д. Чтобы упростить обозначения, мы опускаем индекс нуль при каждом из элементов в правой части формулы (6), за исключением, конечно, первого члена. Совокупность всех членов, стоящих под знаком суммы в формуле (6), составляет возмущения в элементе a, и их порядок таков же, как и порядок малой величины m_1. Решение соответствующего уравнения для возмущений в a_1 будет иметь ту же форму, что и (6), причем малой величиной в этом случае будет m.

Для простоты мы будем считать, что порядок величины m совпадает с порядком величины m_1. Запишем равенство (6) в виде

$$a = a_0 + \Delta' a, \tag{7}$$

где $\Delta' a$ представляет собой возмущения первого порядка относительно m. Аналогичные равенства будут иметь место и для других элементов планеты P и для всех элементов планеты P_1. Когда все эти выражения будут подставлены в функцию R, которая сама содержит множитель m, то мы получим ряды, содержащие множители m и m^2. Решение уравнений движения планет будет тогда включать члены второго порядка, и мы запишем

$$a = a_0 + \Delta' a + \Delta'' a,$$

где через $\Delta'' a$ обозначены члены второго порядка относительно m.

Вообще мы можем написать

$$a = a_0 + \Delta' a + \Delta'' a + \Delta''' a + \ldots, \tag{8}$$

где $\Delta''' a$ означает члены третьего порядка относительно m и т. д.

Так как $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$, то, ограничиваясь только членами второго порядка относительно m, получим

$$n = \mu^{1/2}\,[a_0 + \Delta' a + \Delta'' a]^{-3/2}. \tag{9}$$

Поэтому можно написать

$$n = n_0 + \Delta' n + \Delta'' n. \tag{10}$$

Разлагая правую часть формулы (9) в ряд и ограничиваясь членами порядка m^2, можно найти

$$n_0 = \mu^{1/2} a_0^{-3/2},$$

$$\Delta' n = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}\Delta' a, \tag{11}$$

$$\Delta'' n = n_0\left[\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta' a}{a_0}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{\Delta'' a}{a_0}\right]. \tag{11'}$$

Точно так же имеем

$$\rho = \rho_0 + \Delta'\rho + \Delta''\rho.$$

Из равенства

$$\rho = \int n\,dt$$

следует, что

$$\rho_0 = \int n_0\,dt = n_0 t,$$

$$\Delta'\rho = \int \Delta' n\,dt, \tag{12}$$

$$\Delta''\rho = \int \Delta'' n\,dt,$$

где $\Delta' n$, $\Delta'' n$ даются формулами (11) и (11′).

§ 6.05. Свойства возмущений первого порядка

Исследование настоящего параграфа мы проведем на примере уравнения для Ω. Его решение, согласно формуле (4) § 6.03, имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 + \lambda t + \text{п. ч.}, \tag{1}$$

где λ — постоянная, определяемая формулой

$$\lambda = m_1 A \sum \frac{\partial c}{\partial i}\cos\theta_0, \tag{2}$$

причем n, a, ... рассматриваются как постоянные, равные n_0, a_0, ..., а периодический член в общем случае имеет вид

$$\frac{m_1 A}{in + i_1 n_1}\,\frac{\partial C}{\partial i}\sin\theta. \tag{3}$$

Формула (1) содержит члены трех типов, которые мы сейчас и рассмотрим более подробно.

1) *Вековые члены.*

Член λt называется *вековым членом.* Если, например, коэффициент λ положителен, то долгота узла (поскольку рассматривается этот элемент) будет увеличиваться с постоянной угловой скоростью λ, где λ — малая величина порядка m_1. Если λ отрицательно, то долгота узла будет уменьшаться с постоянной скоростью λ. Аналогичные замечания можно сделать относительно каждого из остальных элементов, исключая a, который не имеет векового члена. Следствие из этого последнего результата имеет важное значение. Так как в первом приближении решение дается в виде $a = a_0 +$ п. ч., то большая полуось колеблется с малой амплитудой около среднего значения a_0. Если бы имелся вековой член, скажем Xt, и если *предположить на время, что решение является точным*, то большая полуось прогрессивно увеличивалась бы или уменьшалась в зависимости от того, положительно или отрицательно X. В первом случае a стремилось бы к бесконечности, т. е. планета вышла бы из-под влияния Солнца. Во втором случае a уменьшалось бы до такого размера, что планета в конце концов была бы поглощена Солнцем (если бы она предварительно не испарилась). Отсутствие такого векового члена обеспечивает общую устойчивость планетных орбит (если только наше предположение справедливо), так как возмущения большой полуоси приведут только к ее колебаниям с малой амплитудой около среднего значения a_0. Из этого также следует, что в первом приближении среднее движение n не имеет векового члена.

2) *Короткопериодические неравенства.*

Рассмотрим какое-либо слагаемое в сумме периодических членов формулы (1). Согласно формуле (3), мы можем его записать в виде

$$\frac{m_1 D}{in + i_1 n_1} \sin [(in + i_1 n_1)\, t + q], \tag{4}$$

где

$$q = i\varepsilon + i_1\varepsilon_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1$$

и D имеет определенный порядок относительно e, e_1, γ и γ_1. Для простоты предположим, что эти элементы имеют один и тот же порядок малости, так что D может рассматриваться как величина порядка e^p, где p — положительное число. Тогда, если $in + i_1 n_1$ *не является малой величиной*, то амплитуда члена (4) будет иметь порядок $m_1 e^p$. Предполагая, что это условие имеет силу для некоторой пары значений i и i_1, мы назовем соответствующий ей член *короткопериодическим неравенством* [1]). Происхождение этого названия связано с тем фактом, что период такого члена является

---

[1]) „Неравенство" является архаическим термином, означающим *отклонение от эллиптического движения*, и эквивалентным в данном случае понятию „возмущение" рассматриваемого элемента.

малым — самое большее равным периоду планеты P или планеты P_1. Пусть T' означает период члена (4). Тогда

$$T' = \frac{2\pi}{in + i_1 n_1}.$$

Так как $n = 2\pi/T$ и $n_1 = 2\pi/T_1$, то

$$\frac{1}{T'} = \frac{i}{T} + \frac{i_1}{T_1}. \tag{5}$$

Например, если под P понимается Юпитер, под P_1 — Сатурн, то приблизительно $T = 11{,}86$ и $T_1 = 29{,}46$, причем в качестве единицы времени взят 1 год. Из соотношения (5) мы имеем:

$$\begin{aligned} i &= 1, \quad i_1 = 1, \quad T' = 8{,}46, \\ i &= 1, \quad i_1 = -1, \quad T' = 19{,}85, \\ i &= 2, \quad i_1 = 1, \quad T' = 4{,}94. \end{aligned}$$

Амплитуды таких членов равны $m_1 DT'/2\pi$, и соответствующие возмущения по своему характеру ничем не будут примечательны, если упомянутые ранее условия имеют силу.

3) *Долгопериодические неравенства.*

Это возмущения, периодические по своему характеру. Их наличие обусловлено, в некоторых случаях, приблизительной соизмеримостью средних угловых движений n и n_1. Если n/n_1 приблизительно равно i_1/i, где i и i_1 — некоторые целые числа, то $in - i_1 n_1$ будет малой величиной, а амплитуды соответствующих периодических членов станут при прочих равных условиях много больше, чем в случае, рассмотренном в п. 2.

При более точных значениях орбитальных периодов Юпитера и Сатурна находим, что

$$n = 299'',13, \quad n_1 = 120'',45,$$

так что, если $i = -2$ и $i_1 = 5$, то

$$in + i_1 n_1 = 3'',99.$$

Если через T'' обозначить период соответствующего неравенства, то мы найдем, что T'' приблизительно равно 75 орбитальным периодам Юпитера, что составляет около 890 лет.

Если D_1 есть то значение D, которое соответствует этому члену, то амплитуда такого неравенства равна $m_1 D_1 T''/2\pi$.

Такой член, возникающий из-за близости к соизмеримости n и n_1, называется *долгопериодическим неравенством.*

Из рассcмотрения свойств возмущающей функции в следующей главе будет найдено, что D (когда $i = 2$, $i_1 = 1$) и D_1 (когда

$l = -2$ и $l_1 = 5$) имеют один и тот же порядок e^p. Если для простоты мы предположим, что D и D_1 равны, то амплитуда долгопериодического неравенства будет в T''/T' раз больше амплитуды соответствующего короткопериодического неравенства. Здесь $T''/T \approx \approx 890/4{,}94 \approx 180$. Таким образом, очевидно, что долгопериодическим неравенствам соответствуют очень большие возмущения.

Различие в величинах периодических возмущений этих двух классов становится еще более заметным, когда мы рассматриваем возмущения в средней долготе l. Так как $l = \rho + \varepsilon$, то возмущения первого порядка $\Delta' l$ выражаются суммой $\Delta'\rho + \Delta'\varepsilon$. Теперь, как это следует из п. 2, типичный периодический член в $\Delta'\varepsilon$ будет иметь вид

$$\frac{m_1 L}{in + i_1 n_1} \sin [(ln + l_1 n_1) t + q] \tag{6}$$

и ему соответствуют короткопериодическое или долгопериодическое неравенства, которые уже были исследованы.

Рассмотрим теперь $\Delta'\rho$. Из формул (11) и (12) § 6.04 находим

$$\Delta'\rho = -\frac{3n}{2a} \int \Delta' a \, dt.$$

Но

$$\Delta' a = m_1 \sum \frac{M}{in + i_1 n_1} \cos [(ln + l_1 n_1) t + q],$$

и поэтому типичный член в $\Delta'\rho$ будет иметь вид

$$\frac{m_1 M}{(in + i_1 n_1)^2} \sin [(ln + l_1 n_1) t + q]. \tag{7}$$

Обратимся еще раз к случаю Юпитера и Сатурна. Пусть T' — период короткопериодического члена, для которого $l = 2$, $l_1 = 1$, и пусть T'' — период долгопериодического члена, для которого $l = -2$, $l_1 = 5$. Как и раньше, предположим, что M имеет порядок e^p для каждого из этих членов. Предположим далее для простоты, что эти значения M одинаковы. Тогда, согласно формуле (7), амплитуда долгопериодического неравенства будет в $(T''/T')^2$ раз больше амплитуды соответствующего короткопериодического неравенства. Из найденных выше численных результатов получаем, что это отношение равно $(180)^2 : 1$. Очевидно, что влияние долгопериодических неравенств является наиболее значительным.

Найдено, что средняя долгота Сатурна под действием возмущений от Юпитера может изменяться в пределах до $50'$ под влиянием долгопериодических неравенств типа, рассмотренного нами.

§ 6.06. Троянцы

Другой, еще более интересный пример преобладающего влияния долгопериодических возмущений имеет место в троянской группе малых планет, из которых известны пятнадцать (1952 г.). Первая из этих планет, Ахиллес, была открыта в 1906 г. Свои названия они получили в честь героев греко-троянской войны, описанной Гомером в «Илиаде». Троянцы — малые планеты, движущиеся почти на том же расстоянии от Солнца, что и Юпитер, так что их средние движения

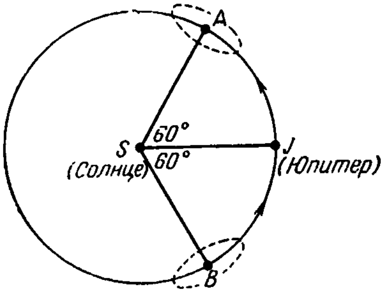

Рис. 15.

мало отличаются от среднего движения Юпитера. Несколько троянцев идут впереди Юпитера приблизительно на 60° по долготе, в то время как остальные примерно на 60° по долготе находятся позади Юпитера. Орбитальные плоскости большинства Троянцев составляют с плоскостью орбиты Юпитера углы всего лишь в несколько градусов, хотя для пяти планет этот угол достигает 20°.

Если на рис. 15 A и B — точки, лежащие на орбите Юпитера, такие, что углы ASJ и BSJ равны 60°, то A и B называются *треугольными точками либрации*. С грубой степенью приближения, пренебрегая упомянутой выше наклонностью, траектория Троянца *относительно Юпитера*, так называемый *либрационный эллипс*, указана пунктирной кривой около A или B. Отношение осей этого эллипса одно и то же для всех Троянцев. Возможно, что названия этим планетам были даны неудачно, ибо друзей и врагов поместили в тесной близости друг к другу около каждой точки либрации. В интересах небесного мира и гармонии было бы более целесообразно поместить греков вблизи одной точки либрации, а героев Трои вблизи другой. Однако с полным пренебрежением к национальным предубеждениям вся группа малых планет, которыми мы теперь интересуемся, называется *троянской группой*.

Более чем за полтора столетия до открытия первого Троянца Лагранж рассмотрел задачу движения трех материальных точек, когда они находятся в положении относительного равновесия, образуя равносторонний треугольник. Открытие Троянцев превратило эту задачу из первоначально чисто теоретической и академической в задачу, представляющую большой практический интерес.

Возмущения Троянцев Юпитером весьма значительны и могут доходить в долготе до 20°. Если, например, мы рассмотрим планету Нестор, то для этого Троянца $n = 301'',00$, в то время как n_1 (для Юпитера) равно $299'',13$; поэтому член в возмущающей функции с аргументом $i(n-n_1)t+q$, где $i=1, 2, \ldots$, очевидно, вызывает долгопериодические неравенства, ибо $n-n_1 = 1'',87$, так что T'', когда $i=1$, приблизительно равен 1900 годам. Так как соответствующая величина D в формуле (4) имеет порядок e^0, то эти возмущения значительно больше, чем возмущения, рассмотренные в системе Юпитер — Сатурн. По этой причине уравнения Лагранжа не годятся для детального исследования движения Троянцев и, следовательно, должны быть использованы более сильные методы.

§ 6.07. Второе приближение для Ω

Уравнение для $\dot{\Omega}$ в принятых выше обозначениях имеет вид

$$\dot{\Omega} = A\frac{\partial R}{\partial i} = Am_1\sum\frac{\partial c}{\partial i}\cos\theta_0 + Am_1\sum\frac{\partial C}{\partial i}\cos\theta, \tag{1}$$

где

$$\theta = i(\rho+\varepsilon) + i_1(\rho_1+\varepsilon_1) + \ldots + k_1\tilde{\omega}_1. \tag{2}$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$\dot{\Omega} = m_1 F(\rho+\varepsilon,\ \rho_1+\varepsilon_1;\ a,\ a_1;\ \ldots;\ \tilde{\omega},\ \tilde{\omega}_1), \tag{3}$$

где через F обозначена функция, выражаемая формулой

$$F = A\sum\frac{\partial c}{\partial i}\cos\theta_0 + A\sum\frac{\partial C}{\partial i}\cos\theta. \tag{4}$$

Пусть

$$\rho = \rho_0 + \Delta'\rho + \Delta''\rho, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta'\varepsilon + \Delta''\varepsilon$$

и т. д., где $\Delta'\rho$ и т. д. — малые величины порядка m, а $\Delta''\rho$ и т. д. — малые величины порядка m^2. Для простоты предположим, что m и m_1 имеют один и тот же порядок.

Разложим теперь F в ряд Тейлора. Тогда, если α — любой из шести элементов орбиты планеты P или из шести элементов орбиты планеты P_1, то для второго приближения мы будем иметь

$$\frac{d}{dt}(\Omega_0 + \Delta'\Omega + \Delta''\Omega) = m_1F_0(\rho,\ \rho_1,\ \ldots,\ \tilde{\omega}_1) + \\ + m_1\left[\Delta'\rho\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)_0 + \Delta'\rho_1\left(\frac{\partial F}{\partial\rho_1}\right)_0 + \sum\Delta'\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}\right)_0\right], \tag{5}$$

где „нуль" в выражениях F_0, $(\partial F/\partial \rho)_0, \ldots, (\partial F/\partial \alpha)_0$ означает, что F, $\partial F/\partial \rho, \ldots,$ вычислены при $\rho_0, \ldots, \alpha_0$. *Здесь мы предположили*, что $\Delta'\rho$, $\Delta'\rho_1$ и $\Delta'\alpha$ являются столь малыми величинами, что их квадратами и более высокими степенями можно пренебречь.

Уравнение для членов второго порядка таково:

$$\frac{d}{dt}(\Delta''\Omega) = m_1\left[\Delta'\rho\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 + \ldots + \sum \Delta'\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_0\right]. \tag{6}$$

При нашем предположении относительно m и m_1 правая часть будет малой величиной порядка m^2.

§ 6.08. Общий вид возмущений второго порядка в Ω

Установим прежде всего *вид* различных членов, которые появляются в правой части уравнения (6) § 6.07.

В соответствии с формулой (4) § 6.07 F имеет следующий вид:

$$F = X + \sum Y \cos\theta, \tag{1}$$

где $X \equiv X(a, e, \ldots, \tilde{\omega}, t)$, $Y \equiv Y(a, e, t)$, $\theta \equiv \theta(\rho, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon)$, причем в эти функциональные зависимости включается ρ_1 и соответствующие элементы планеты P_1.

Согласно формулам (15) и (16) § 6.03, элементы разделяются на две категории. Для определенности будем считать, что e характеризует первую группу, а $\tilde{\omega}$ — вторую. Ниже мы будем интересоваться только *видом* различных функций.

1) $\Delta' e = \lambda t + m_1 \sum J \cos\theta$

и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e}\right)_0 = G + \sum H \cos\theta.$$

Поэтому, так как λ — величина порядка m, то

$$m_1 \Delta' e\left(\frac{\partial F}{\partial e}\right)_0 = m_1^2\left(A + Bt + \text{п. ч.} + t\sum D\cos\theta\right). \tag{2}$$

2) $\Delta'\tilde{\omega} = \lambda t + m_1 \sum K \sin\theta$

и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}\right)_0 = G' + \sum H' \sin\theta.$$

Поэтому

$$m_1 \Delta'\tilde{\omega}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}\right)_0 = m_1^2\left(A' + B't + \text{п. ч.} + t\sum D'\sin\theta\right). \tag{3}$$

3) На основании формул (5) § 6.04 или (7) § 6.05 имеем

$$\Delta'\rho = m_1 \sum L \sin \theta, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 = \sum L' \sin \theta.$$

Поэтому

$$m_1 \Delta'\rho \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_0 = m_1^2 (A'' + \text{п. ч.}). \tag{4}$$

Постоянные A, A' и A'' появляются в результате перемножения членов, имеющих один и тот же аргумент.

Формулы (2) — (4) устанавливают общий вид правой части уравнения (6) § 6.07. Интегрируя это уравнение, находим

$$\Delta''\Omega = A_2 t + B_2 t^2 + \text{п. ч.} + t \sum (D_2 \sin \theta + E_2 \cos \theta), \tag{5}$$

где индекс 2 означает, что коэффициенты имеют второй порядок малости.

Первый член правой части формулы (5) является частью векового члена и имеет второй порядок малости. Второй член, с t^2, называется *вековым ускорением*. В случае планет этот член является чрезвычайно малым и из наблюдений он не получается. Долгота Луны, однако, имеет член такого вида, коэффициент которого уже не является пренебрежимо малой величиной и обнаруживается при наблюдениях, проведенных в течение значительного промежутка времени (мы встретимся с этим членом в гл. 19). Последние слагаемые в формуле (5), содержащие множитель t, представляют собой тригонометрический ряд, амплитуды членов которого увеличиваются со временем. Такие члены называются *смешанными*.

Уравнения для $\tilde{\omega}$, ε, e и i, как легко видеть, будут давать члены второго порядка в таком же виде, что и формула (5).

§ 6.09. Возмущение второго порядка в a

Из формулы (1) § 6.03 имеем

$$\dot{a} = -\frac{2m_1}{na} \sum iC \sin \theta \equiv m_1 F' (\rho + \varepsilon, \ldots, \alpha),$$

где F' имеет следующий вид:

$$F' = \sum M \sin \theta.$$

Члены второго порядка в a определяются из уравнения

$$\frac{d}{dt} (\Delta'' a) = m_1 \left[\Delta'\rho \left(\frac{\partial F'}{\partial \rho}\right)_0 + \ldots + \sum \Delta'\alpha \left(\frac{\partial F'}{\partial \alpha}\right)_0\right]. \tag{1}$$

Мы поступим так же, как и в предыдущем параграфе. Прежде всего имеем

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial e}\right)_0 = m_1 \sum N \sin \theta.$$

Поэтому

$$m_1 \Delta' e \left(\frac{\partial F'}{\partial e}\right)_0 = m_1^2 \left(\text{п. ч.} + t \sum P \sin \theta\right).$$

Аналогично из равенства

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial \tilde{\omega}}\right)_0 = m_1 \sum Q \cos \theta$$

следует, что

$$m_1 \Delta' \tilde{\omega} \left(\frac{\partial F'}{\partial \tilde{\omega}}\right)_0 = m_1^2 \left[\text{п. ч.} + t \sum P' \cos \theta\right].$$

Кроме того, поскольку

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial \rho}\right)_0 = \sum Q' \cos \theta,$$

то

$$m_1 \Delta' \rho \left(\frac{\partial F'}{\partial \rho}\right)_0 = m_1^2 [\text{п. ч.}].$$

Интегрирование уравнения (1) дает

$$\Delta'' a = m_1^2 [\text{п. ч.}] + t \sum (S_2 \sin \theta + T_2 \cos \theta). \tag{2}$$

§ 6.10. Рассмотрение возмущений второго порядка в Ω и a

Из предыдущих параграфов следует, что полные выражения для Ω и a с точностью до членов порядка m^2 включительно имеют вид

$$\Omega = \Omega_0 + A_1 t + B_2 t^2 + \text{п. ч.} + t \sum (D_2 \sin \theta + E_2 \cos \theta), \tag{1}$$

$$a = a_0 + \text{п. ч.} + t \sum (S_2 \sin \theta + T_2 \cos \theta). \tag{2}$$

Присоединим сюда также следующее равенство:

$$a = a_0 + m_1 \sum J \cos \theta. \tag{3}$$

Возмущения в долготе узла, определяемые формулой (1), влияют только на положение оскулирующего эллипса относительно основной плоскости в каждый момент времени t. Эти возмущения сами по себе не изменяют гелиоцентрических расстояний планет, а влияют на них лишь через посредство своих членов первого порядка, входящих в формулу (2). Аналогичные замечания можно сделать о возмущениях в $\tilde{\omega}$ и ε.

Рассмотрим теперь формулу (3), которая дает возмущения первого порядка a. Коэффициенты J вообще представляют собой, ряды по степеням e, e_1, γ и γ_1. Если эти ряды абсолютно сходятся, то значение a лежит между $a_0 + \delta a$ и $a_0 - \delta a$, где $\delta a = m_1 \sum |J|$.

Границы, внутри которых должно лежать a, таким образом вполне определены, что справедливо также и для каждой другой планеты. С этой степенью приближения (поскольку это касается больших полуосей) планетная система должна была бы быть *устойчивой* в том смысле, что она продолжала бы существовать с этими особенностями, не изменяясь.

Если же мы будем исходить из второго приближения, представленного формулой (2), то предыдущее утверждение уже не будет справедливым, так как при каком-либо заданном значении t величина a лежит в пределах, которые мы можем записать в виде

$$a_0 + \delta a_1 + t\,\delta a_2; \qquad a_0 - \delta a_1 - t\,\delta a_2.$$

Поэтому область изменения a, очевидно, не будет ограниченной для всех значений t, как это было в первом приближении, и устойчивость в прежнем смысле будет отсутствовать.

Рассмотрим теперь возмущения e. Возмущения второго порядка e имеют вид (1). Предположим, что формула (1) является точной. Тогда наличие членов $A_1 t + B_2 t^2$ укажет на то, что e может неограниченно увеличиваться, если для простоты считать, что A_1 и B_2 положительны, или неограниченно убывать, если A_1 и B_2 отрицательны. Если A_1 и B_2 имеют противоположные знаки, то те же самые выводы будут справедливы, когда t превзойдет $|A_1|/|B_2|$. При этом орбита, очевидно, стала бы сначала параболической, затем гиперболической и планета покинула бы солнечную систему.

На первый взгляд кажется, что устойчивость солнечной системы не является гарантированной. Однако такое заключение было бы поспешным — мы забыли бы о предположении, сделанном относительно ряда Тейлора для возмущающей функции, а именно что $\Delta'\rho$, $\Delta'\rho_1$, $\Delta'\alpha$ являются столь малыми величинами, что их квадратами, произведениями и более высокими степенями можно пренебречь. Но вследствие появления вековых членов в $\Delta'\Omega$, $\Delta'e$, ..., $\Delta'\gamma$ это ограничение только обязывает сделать вывод, что значение t, для которого эти результаты справедливы, является ограниченным, например, одним или двумя столетиями. Таким образом, на основе анализа, изложенного выше, можно получить возмущения второго порядка с определенной степенью точности для ограниченных интервалов времени и возмущения третьего порядка с еще большей точностью. Но этот анализ не будет проливать свет на проблему устойчивости (или неустойчивости) планетной системы. Другими словами, невозможность сделать выводы, связанные с проблемой устойчивости, является прямым следствием применения метода последовательных приближений.

В гл. 13 мы увидим, что есть серьезные основания считать, что изменения e и других элементов носят периодический характер с периодами в несколько тысяч лет. На протяжении короткого промежутка времени, скажем столетия, истинная кривая изменения, например e, является почти прямой линией. Поэтому такие изменения интерпретируются как вековые. Обратно, вековой член вида λt в формуле (1) можно мыслить как приближение к $\sin \lambda t$, когда λt мало. И это справедливо для любого элемента. Следовательно, так называемые вековые члены оказываются включенными в общие тригонометрические ряды. Кроме того, исследование показывает, что в этом случае не появились бы и смешанные члены во втором приближении для всех элементов. Но нужно подчеркнуть, что эти аргументы сами по себе не дают доказательства устойчивости планетной системы.

Пуанкаре[1]) разработал следующие условия устойчивости:

1) гелиоцентрическое расстояние каждой планеты не может неограниченно возрастать или убывать;

2) тесные сближения в каждой паре планет исключены;

3) в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ система может повторно проходить через конфигурацию, которую она имела в момент t_0.

Условие (2) требует некоторого пояснения. Если бы две планеты прошли очень близко друг к другу, то взаимные возмущения тогда стали бы гораздо бóльшими, чем те, которыми мы занимаемся в этой главе. Тогда во время близкого прохождения могло бы оказаться, что эксцентриситет орбиты одной из планет изменился бы от нормального значения до величины, превышающей единицу, и в этом случае рассматриваемая планета могла бы быть выброшена в межзвездное пространство. Такие близкие прохождения действительно случались. Например, комета Морхауза тесно сблизилась с Юпитером, в результате чего ее эллиптическая орбита была превращена в гиперболическую.

Сделаем одно заключительное замечание. В определении устойчивости не принято во внимание влияние сил трения на движение тел солнечной системы. Одним из примеров таких сил является приливное трение в земных морях.

---

[1]) Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, III, 1899, p. 141.

Глава 7

РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

§ 7.01. Введение

В этой главе мы подробно изложим методы разложения возмущающей функции R в теории Луны и теории планет. В частности, мы будем предполагать, что эксцентриситеты и наклонности малы и имеют один и тот же порядок малости. Конечно, способ, с помощью которого R разлагается в ряд, зависит от выбора переменных, к которым преобразуются уравнения движения. Во многих теориях время t обычно берется в качестве независимой переменной. С другой стороны, в теории Луны (и не только в ней) за независимую переменную принимается истинная долгота Луны ν. Так как время обычно вводится в возмущающую функцию явно посредством средней аномалии возмущающего тела, то в принципе t может быть выражено (методом последовательных приближений) через ν в виде ряда.

В последующем мы ограничимся рассмотрением только такого разложения R, когда в качестве независимой переменной принимается время. Мы сначала рассмотрим разложение R в теории Луны, так как здесь имеются обстоятельства, упрощающие это разложение и отсутствующие в случае теории планет. Одна из причин, облегчающих разложение, состоит в особом условии, связанном с движением Солнца относительно центра масс Земли и Луны. Этот вопрос будет специально рассмотрен в § 7.03.

§ 7.02. Разложение функции $\left(\frac{M}{\Delta}+\frac{E}{\Delta_1}\right)$ в теории Луны

Уравнения движения Луны и Солнца (15) и (16) § 4.09 имеют вид

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{GS(E+M)}{EM}\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\ddot{x}_1=\frac{G(E+M+S)}{E+M}\frac{\partial F}{\partial x_1}, \tag{2}$$

причем уравнения для y, z и y_1, z_1 аналогичны этим. Здесь x, y, z — координаты Луны относительно осей с началом в E (рис. 16), а x_1, y_1, z_1 — координаты Солнца по отношению к системе координат с началом в точке C, являющейся центром масс E и M, и осями, параллельными осям Ex, Ey, Ez. Кроме того, F на основании формулы (14) § 4.09 выражается так:

$$F = \frac{M}{\Delta} + \frac{E}{\Delta_1}. \tag{3}$$

В этих равенствах E, M и S — массы Земли, Луны и Солнца соответственно.

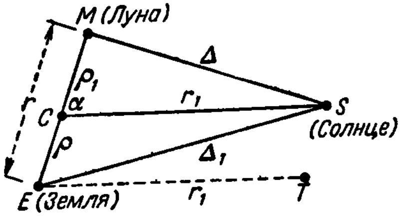

Рис. 16.

На рис. 16 обозначим EC через ρ, MC — через ρ_1 и угол MCS — через α. По определению, мы имеем

$$\rho = \frac{Mr}{E+M}, \quad \rho_1 = \frac{Er}{E+M}. \tag{4}$$

Затем

$$\Delta^2 = r_1^2 - 2\rho_1 r_1 \cos\alpha + \rho_1^2$$

или

$$\frac{r_1}{\Delta} = \left[1 - \frac{2\rho_1}{r_1}\cos\alpha + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Далее, ρ_1/r_1 является малой величиной, так как отношения r/Δ, r/Δ_1 и r/r_1 имеют порядок 1/400. Поэтому

$$\frac{r_1}{\Delta} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^l P_l(\alpha), \tag{5}$$

где $P_l(\alpha)$ — полином Лежандра l-го порядка. Если через c обозначить $\cos\alpha$, то мы сможем написать хорошо известные формулы:

$$\begin{gathered} P_1 = c, \quad P_2 = \frac{3}{2}c^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3 = \frac{5}{2}c^3 - \frac{3}{2}c, \quad P_4 = \frac{35}{8}c^4 - \frac{15}{4}c^2 + \frac{3}{8}. \end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того,

$$\Delta_1^2 = r_1^2 + 2\rho r_1 \cos\alpha + \rho^2,$$

откуда

$$\frac{r_1}{\Delta_1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^i P_i(\alpha). \tag{7}$$

Вследствие равенств (5) и (7) формула (3) принимает вид

$$r_1 F = E + M + \frac{P_1}{r_1}(M\rho_1 - E\rho) + \frac{P_2}{r_1^2}(M\rho_1^2 + E\rho^2) + \\ + \frac{P_3}{r_1^3}(M\rho_1^3 - E\rho^3) + \frac{P_4}{r_1^4}(M\rho_1^4 + E\rho^4) + \ldots$$

или, согласно формулам (4),

$$F = \frac{E+M}{r_1} + \frac{ME}{E+M}\left[\frac{r^2}{r_1^3} P_2 + \frac{E-M}{E+M}\frac{r^3}{r_1^4} P_3 + \right. \\ \left. + \frac{E^2 - EM + M^2}{(E+M)^2}\frac{r^4}{r_1^5} P_4 + \ldots\right]. \tag{8}$$

§ 7.03. Орбита Солнца

Из уравнений (2) и (8) § 7.02 мы имеем

$$\ddot{x}_1 = G(E + M + S)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{r_1} + \frac{ME}{(E+M)^2}\frac{r^2}{r_1^3} P_2 + \ldots\right].$$

Отношение второго члена в скобках к первому имеет порядок

$$\frac{ME}{(E+M)^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2.$$

Но $M/E \approx 1/81$ и $r/r_1 \approx 1/400$. Следовательно, это отношение приблизительно равно $8 \cdot 10^{-8}$. Таким образом, второй член не оказывает значительного влияния, что справедливо также для последующих членов. Поэтому запишем уравнения движения Солнца в виде

$$\ddot{x}_1 + G(E + M + S)\frac{x_1}{r_1^3} = 0$$

плюс два аналогичных уравнения для y_1 и z_1. Движение Солнца относительно C, таким образом, является эллиптическим. Если n_1 и a_1 суть среднее движение и большую полуось этой эллиптической орбиты, то

$$G(E + M + S) = n_1^2 a_1^3 \tag{1}$$

Нормаль к плоскости орбиты Солнца имеет фиксированное направление, и мы выберем ось z так, чтобы она проходила через E параллельно этой нормали. Тогда основной плоскостью xy будет плоскость эклиптики. Проведем на рис. 16 отрезок прямой ET ($\equiv r_1$) параллельно CS. Тогда T будет двигаться в плоскости эклиптики. Координаты T относительно E те же самые, что и координаты Солнца относительно C.

Мы можем затем выразить координаты Солнца (относительно C), входящие в F, по формулам эллиптического движения через a_1, e_1 и т. д., где a_1, e_1 и т. д. — *постоянные*. Отметим в этой связи различие между теорией Луны и теорией планет. В последнем случае координаты возмущающего тела подставляются в возмущающую функцию в виде алгебраических функций, представляющих решение уравнений невозмущенного движения, но a_1, e_1 и т. д. являются уже не постоянными, а фактически новыми переменными, удовлетворяющими уравнениям Лагранжа. Это будет сказываться на членах второго порядка в возмущениях рассматриваемой планеты.

§ 7.04. Возмущающая функция в теории движения Луны

Согласно соотношению (1) § 7.02, возмущающая функция R выражается формулой

$$R = \frac{GS\,(E+M)}{EM}\,F. \tag{1}$$

Так как r_1 не зависит от координат Луны, то первый член в правой части формулы (8) § 7.02, определяющей F, может быть отброшен. Кроме того, поскольку $E/S \approx 3 \cdot 10^{-6}$, формула (1) § 7.03 может быть с достаточной степенью точности записана в виде

$$GS = n_1^2 a_1^3. \tag{2}$$

Пусть n означает среднее угловое движение Луны и пусть

$$m = \frac{n_1}{n}. \tag{3}$$

Это отношение, приближенно равное $^1/_{13}$, будет рассматриваться как малая величина первого порядка. Формулу (2) запишем теперь в виде

$$GS = m^2 n^2 a_1^3. \tag{4}$$

Посредством равенств (4) и (8) § 7.02 формула (1) для R приводится к виду

$$R = m^2 n^2 r^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \left[P_2 + \frac{E-M}{E+M}\left(\frac{r}{r_1}\right) P_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{E^2 - EM + M^2}{(E+M)^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 P_4 + \ldots \right]. \tag{5}$$

Если мы здесь в последнем члене правой части напишем $(E-M)^2$ вместо E^2-EM+M^2, то введем ошибку порядка $\frac{EM}{(E+M)^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$, которая, как показано в § 7.03, приближенно равна $8\cdot 10^{-8}$. Влияние этой ошибки на величину возмущений будет незначительным.

Вводя a, мы запишем формулу (5) следующим образом:

$$R=m^2n^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[P_2+\left(\frac{E-M}{E+M}\,\frac{a}{a_1}\right)\frac{r}{a}\cdot\frac{a_1}{r_1}\cdot P_3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{E-M}{E+M}\,\frac{a}{a_1}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2P_4+\ldots\right]. \qquad (6)$$

Удобно записать выражение $\left(\frac{E-M}{E+M}\cdot\frac{a}{a_1}\right)$ просто как a/a_1, но помнить, что отныне a/a_1 — упрощенная запись более сложного выражения в формуле (6). Мы, таким образом, имеем

$$R=m^2n^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[P_2+\frac{a}{a_1}\,\frac{r}{a}\,\frac{a_1}{r_1}P_3+\left(\frac{a}{a_1}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2P_4+\ldots\right]. \qquad (7)$$

В скобках порядок коэффициента при P_3 тот же, что и порядок a/a_1, так как r/a и a_1/r_1 приблизительно равны единице. Далее, a/a_1 есть отношение синуса параллакса Солнца к синусу параллакса Луны, если под a мы будем понимать большую полуось орбиты Луны, или, весьма приближенно, отношение солнечного параллакса к лунному. Поэтому удобно член, содержащий P_3, назвать *параллактическим членом*.

§ 7.05. Порядок величин e, e_1, γ, a/a_1 и m

Малые величины, входящие в выражение для R, приближенно имеют следующие значения:

$$e=\frac{1}{20},\quad e_1=\frac{1}{60},\quad \gamma\equiv\operatorname{tg} I=\frac{1}{11},\quad m=\frac{1}{13},\quad \frac{a}{a_1}=\frac{1}{400}.$$

Мы будем считать первые четыре величины малыми первого порядка, а a/a_1 — величиной второго порядка. В дальнейшем в выражении R мы будем опускать члены, имеющие порядок более высокий, чем член, содержащий P_3, и для удобства положим

$$R=R_2+R_3, \qquad (1)$$

где

$$R_2=m^2n^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3P_2 \qquad (2)$$

и

$$R_3 = m^2 n^2 r^2 \frac{a}{a_1} \frac{r}{a} \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^4 P_3. \qquad (3)$$

Следовательно, величина R_2, содержащая множитель m^2, имеет второй порядок, а величина R_3, содержащая множители m^2 и a/a_1, имеет четвертый порядок малости.

§ 7.06. Разложение возмущающей функции в теории движения Луны

1) *Выражение возмущающей функции через r, λ и s.*

На рис. 17 изображена небесная сфера с центром в Земле E. Большой круг ΥNT с полюсом в K соответствует основной плоскости

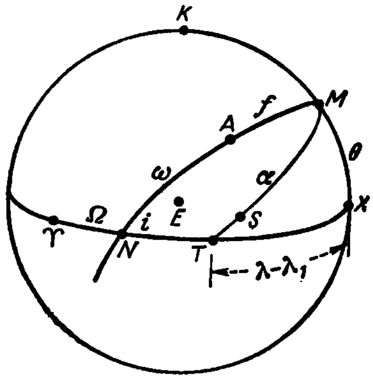

Рис. 17.

(плоскость эклиптики), которая была определена в § 7.03, Υ — фиксированная точка в этой плоскости, от которой измеряется долгота, M — положение Луны и T — точка в основной плоскости, лежащая на прямой, проходящей через E параллельно CS (рис. 16). Кроме того, S — *геоцентрическое* положение Солнца на этой сфере.

N — узел мгновенной орбиты Луны, наклонность которой равна i. Долгота Луны, обозначаемая через λ, в основной плоскости есть ΥX, а широта Луны θ равна XM. Долгота точки T есть λ_1. Поэтому $TX = \lambda - \lambda_1$. Кроме того, дуга MT равна углу α (см. рис. 16).

Из прямоугольного треугольника MTX имеем

$$\cos\alpha = \cos(\lambda - \lambda_1)\cos\theta.$$

Положим

$$s = \operatorname{tg}\theta, \qquad (1)$$

Тогда в обозначениях § 7.02

$$c \equiv \cos \alpha = \frac{\cos(\lambda - \lambda_1)}{\sqrt{1+s^2}}. \tag{2}$$

Это равенство дает нам возможность выразить полиномы Лежандра P_2, P_3 через λ, λ_1 и s.

Далее, из треугольника MNX находим

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \Omega)$$

или

$$s = \gamma \sin(\lambda - \Omega), \tag{3}$$

где

$$\gamma = \operatorname{tg} i. \tag{4}$$

Таким образом, величина s имеет порядок γ. Поэтому мы можем разложить c в ряд по степеням s и затем получить таким же образом разложения для P_2 и P_3. Мы тогда найдем, что R_2 и R_3, определенные формулами (2) и (3) § 7.05, даются в виде

$$R_2 = \frac{1}{4} m^2 n^2 r^2 \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 [1 - 3s^2 + 3(1 - s^2)\cos 2(\lambda - \lambda_1)] \tag{5}$$

и

$$R_3 = \frac{m^2 n^2 r^3}{8a} \left(\frac{a}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^4 \left[3\left(1 - \frac{11}{2} s^2\right)\cos(\lambda - \lambda_1) + \right.$$
$$\left. + 5\left(1 - \frac{3}{2} s^2\right)\cos 3(\lambda - \lambda_1)\right]. \tag{6}$$

В невозмущенном движении радиус-вектор r и истинная аномалия f с точностью до членов порядка e^3 включительно даются формулами (14) § 3.11 и (11) § 3.10, т. е.

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \left(e - \frac{3}{8} e^3\right)\cos M - \frac{1}{2} e^2 \cos 2M - \frac{3}{8} e^3 \cos 3M, \tag{7}$$

$$f = M + \left(2e - \frac{1}{4} e^3\right)\sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M, \tag{8}$$

где M — средняя аномалия, определяемая по формуле

$$M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}. \tag{9}$$

2) *Выражение через элементы.*

Из $\triangle MNX$ (рис. 17) находим

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(f + \omega).$$

Положим для простоты

$$V = \lambda - \Omega, \quad F = f + \omega, \quad x = \operatorname{tg} \frac{i}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} V = \frac{(1-x^2)\operatorname{tg} F}{1+x^2},$$

откуда

$$\frac{e^{2iV}-1}{e^{2iV}+1} = \frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{e^{2iF}-1}{e^{2iF}+1},$$

где $i=\sqrt{-1}$.
Далее получаем

$$e^{2i(V-F)} = \frac{1+x^2e^{-2iF}}{1+x^2e^{2iF}}.$$

Прологарифмируем обе части этого равенства и разложим в ряд по степеням x. Мы получим

$$V = F - x^2\sin 2F + \frac{1}{2}x^4\sin 4F - \ldots . \tag{10}$$

Но

$$\gamma \equiv \operatorname{tg} i = \frac{2x}{1-x^2},$$

откуда с точностью до γ^4 находим

$$x^2 = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{1}{8}\gamma^4.$$

С точностью до членов порядка γ^3 формула (10) примет вид

$$\lambda - \Omega = f + \omega - \frac{1}{4}\gamma^2\sin 2(f+\omega).$$

Так как $\omega = \tilde{\omega} - \Omega$, то из формулы (8) с точностью до членов третьего порядка получим

$$\begin{aligned}\lambda = nt + \varepsilon + \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M &+ \\ + \frac{13}{12}e^3\sin 3M - \frac{1}{4}\gamma^2\sin 2\eta - \frac{1}{2}e\gamma^2\sin(M+2\eta) &- \\ - \frac{1}{2}e\gamma^2\sin(M-2\eta)&,\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\eta = nt + \varepsilon - \Omega. \tag{12}$$

Аналогично для координат Солнца относительно C (рис. 16) или координат T относительно E (рис. 16) имеем

$$r_1 = a_1\left(1 - e_1 \cos M_1 + \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2M_1\right), \tag{13}$$

$$\lambda_1 = n_1 t + \varepsilon_1 + 2e_1 \sin M_1 + \frac{5}{4} e_1^2 \sin 2M_1. \tag{14}$$

Из формул (3) и (11) с точностью до членов третьего порядка находим

$$\begin{aligned} s = \left(1 - e^2 - \frac{1}{8}\gamma^2\right)\gamma \sin\eta + e\gamma \sin(M+\eta) + \\ + e\gamma \sin(M-\eta) + \frac{1}{2} e^2\gamma \sin(2M-\eta) + \\ + \frac{9}{8} e^2\gamma \sin(2M+\eta) - \frac{1}{8}\gamma^3 \sin 3\eta. \end{aligned} \tag{15}$$

Нужно заметить, что r_1 и λ_1 отличаются очень мало от *геоцентрического* радиуса-вектора Солнца Δ_1 и его геоцентрической долготы λ'. Из рис. 16 видно, что $\Delta_1 \approx r_1(1 + \varkappa\cos\alpha)$, где $\varkappa = \rho/r_1$. Но так как $M/E = 1/81{,}5$, $r \approx 384\,000$ *км*, то $\rho \approx 4600$ *км* и $\varkappa \approx 3 \cdot 10^{-5} \approx 6''$. Если $\Delta\alpha$ означает на рис. 16 угол ESC, то $\Delta\alpha = \varkappa \sin\alpha$. На рис. 17 $MT = \alpha$, $ST = \Delta\alpha$. Если ψ означает угол MTX, то, пренебрегая γ^2 и эксцентриситетом, получаем

$$\lambda' - \lambda_1 = \Delta\alpha \cos\psi = \varkappa \sin\alpha \cos\psi = -\varkappa \sin(\eta - \eta_1).$$

Кроме того, широта Солнца θ' дается формулой

$$\theta' = \Delta\alpha \sin\psi = \varkappa \sin\alpha \sin\psi = \varkappa\gamma \sin\eta,$$

в которой $\varkappa\gamma \approx 3 \cdot 10^{-6} \approx \left(\frac{3}{5}\right)''$.

3) Пусть ξ определяется формулой

$$\xi = (n - n_1)t + \varepsilon - \varepsilon_1. \tag{16}$$

Тогда из равенств (11) и (14) имеем

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda_1 = \xi + 2(e \sin M - e_1 \sin M_1) + \\ + \frac{5}{4}\left(e^2 \sin 2M - e_1^2 \sin 2M_1\right) - \frac{1}{4}\gamma^2 \sin 2\eta. \end{aligned} \tag{17}$$

Если равенства (7), (13), (15) и (17) подставить в формулы (5) и (6), то первые два слагаемых возмущающей функции R_2 и R_3

примут вид

$$R_2 = m^2n^2a^2 \Big\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{8}(e^2 + e_1^2 - \gamma^2) +$$
$$+ \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{8}e^2 - \frac{15}{8}e_1^2 - \frac{3}{8}\gamma^2\right)\cos 2\xi +$$
$$+ e\left[\frac{3}{4}\cos(2\xi + M) - \frac{1}{2}\cos M - \frac{9}{4}\cos(2\xi - M)\right] +$$
$$+ e_1\left[\frac{21}{8}\cos(2\xi - M_1) + \frac{3}{4}\cos M_1 - \frac{3}{8}\cos(2\xi + M_1)\right] +$$
$$+ e^2\left[\frac{15}{8}\cos(2\xi - 2M) + \frac{3}{4}\cos(2\xi + 2M) - \frac{1}{8}\cos 2M\right] +$$
$$+ e_1^2\left[\frac{51}{8}\cos(2\xi - 2M_1) + \frac{9}{8}\cos 2M_1\right] +$$
$$+ ee_1\Big[\frac{9}{8}\cos(2\xi - M + M_1) + \frac{21}{8}\cos(2\xi + M - M_1) -$$
$$- \frac{3}{4}\cos(M + M_1) - \frac{3}{8}\cos(2\xi + M + M_1) -$$
$$- \frac{3}{4}\cos(M - M_1) - \frac{63}{8}\cos(2\xi - M - M_1)\Big] +$$
$$+ \frac{3}{8}\gamma^2[\cos(2\xi - 2\eta) + \cos 2\eta]\Big\} \tag{18}$$

и, с достаточной для наших целей точностью,

$$R_3 = \frac{m^2n^2}{8a}\left(\frac{a}{a_1}\right)(3\cos\xi + 5\cos 3\xi). \tag{19}$$

Если разложение для R требуется довести до более высоких степеней e, e_1 и γ, то легко видеть, что R может быть представлена рядом с общим членом вида

$$Ar^p \cos qf \cdot r_1^{-p_1}\cos q_1 f_1 + Br^p \sin qf \cdot r_1^{-p_1}\sin q_1 f_1,$$

где p, p_1, q и q_1 — положительные числа, такие, что $p > 1$ и $p_1 > 2$. С помощью формулы (15) § 3.09 член $r^p \cos qf$, например, может быть представлен рядом вида $\sum A_j \cos jE$. Затем $\cos jE$ в соответствии с формулой (7) § 3.11 можно представить в виде ряда $\sum B_k \cos kM$. Окончательный результат запишется в виде ряда $\sum C\cos\theta$, где C — функция от a, a_1, e, e_1 и γ, а

$$\theta = iM + i_1M_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1.$$

Здесь величины i, i_1, j, j_1, k, k_1 — положительные или отрицательные целые числа, в том числе и нуль.

§ 7.07. Возмущающая функция в теории движения планет

В теории Луны, как мы только что видели, разложение возмущающей функции начинается с разложения по степеням r/r_1, а затем производится разложение по степеням e, e_1, γ и γ_1. В теории движения планет отношение r/r_1 (или a/a_1) может быть значительным по величине. Например, для Венеры и Земли это отношение равно 0,72, а для Юпитера и Сатурна оно близко к 0,5. Очевидно, чтобы получить точность, сравнимую с той, которую дают наблюдения, нужно было бы взять очень большое число членов в рядах степеней a/a_1 (или a_1/a, если $a > a_1$). Поэтому *сначала* R разлагается в ряд по степеням эксцентриситетов и наклонностей, которые рассматриваются как величины первого порядка малости (обычно самое большее 0,1), а *затем* переходят к разложениям по степеням a/a_1 или a_1/a.

Величина Δ выражается через гелиоцентрические координаты следующей формулой:

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

причем z/a и z/a_1 имеют первый порядок малости относительно γ и γ_1 соответственно.

Пусть M на рис. 17 изображает теперь планету P, эклиптическая долгота которой $\lambda \equiv NX$, широта $\theta \equiv XM$, а λ_1 и θ_1 — соответствующие величины, относящиеся к планете P_1.

Пусть ρ и ρ_1 — проекции r и r_1 на плоскость эклиптики; тогда

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2, \quad xx_1 + yy_1 = \rho\rho_1 \cos(\lambda - \lambda_1).$$

Пусть, далее,

$$\lambda - \lambda_1 = \sigma, \quad \Delta_1^2 = \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos\sigma + \rho_1^2. \tag{1}$$

Тогда

$$\Delta^2 = \Delta_1^2 + (z - z_1)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{2}\frac{(z - z_1)^2}{\Delta_1^3} + \frac{3}{8}\frac{(z - z_1)^4}{\Delta_1^5}. \tag{2}$$

С другой стороны, второй член в R равен

$$-Gm_1 \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} = -Gm_1 \frac{\rho\rho_1 \cos\sigma + zz_1}{(\rho_1^2 + z_1^2)^{3/2}} =$$

$$= -Gm_1 \left(\frac{\rho\cos\sigma}{\rho_1^2} + \frac{zz_1}{\rho_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\rho z_1^2 \cos\sigma}{\rho_1^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\frac{zz_1^3}{\rho_1^5} + \frac{15}{8}\frac{\rho z_1^4 \cos\sigma}{\rho_1^6} - \dots \right). \tag{3}$$

Разложения (2) и (3) могут быть получены с любой степенью точности относительно малых величин z/a и z_1/a_1. В последующем мы разложим R до второго порядка относительно малых величин и в соответствии с этим из разложений (2) и (3) будем иметь

$$\frac{R}{Gm_1} = \frac{1}{\Delta_1} - \frac{\rho\cos\sigma}{\rho_1^2} - \frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2}{\Delta_1^3} - \frac{zz_1}{\rho_1^3} + \frac{3}{2}\frac{\rho z_1^2\cos\sigma}{\rho_1^4}. \qquad (4)$$

§ 7.08. Разложение ρ, σ и z

1) Из рис. 17 (стр. 134) имеем

$$\sin\theta = \sin i \sin(L - \Omega),$$

где L — истинная долгота планеты, равная $\Upsilon N + NM$. Далее, с точностью до малых второго порядка находим

$$\rho = r\cos\theta = r - \frac{1}{2} r \sin^2 i \sin^2(L - \Omega).$$

Во втором члене, не изменяя порядок величин, мы можем заменить r на a, L на $nt + \varepsilon$ и $\sin i \equiv (\operatorname{tg} i \cos i)$ на γ; таким образом, с точностью до членов порядка γ^2 будем иметь

$$\rho = r - \frac{1}{2} a\gamma^2 \sin^2(nt + \varepsilon - \Omega) \equiv r - \frac{1}{2} a\gamma^2 \sin^2\eta.$$

Тогда, используя формулу (7) § 7.06, мы с точностью до членов порядка e^2 получаем

$$\frac{\rho}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 - e\cos M - \frac{1}{2}e^2\cos 2M + \frac{1}{4}\gamma^2\cos 2\eta. \qquad (1)$$

2) Выражение для λ с точностью до членов второго порядка дается формулой (11) § 7.06. Выражение для λ_1 дается аналогичной формулой. Тогда σ $(\equiv \lambda - \lambda_1)$ определяется по формуле

$$\sigma = nt + \varepsilon - (n_1 t + \varepsilon_1) + 2e\sin M - 2e_1\sin M_1 +$$
$$+ \frac{5}{4}e^2\sin 2M - \frac{5}{4}e_1^2\sin 2M_1 - \frac{1}{4}\gamma^2\sin 2\eta + \frac{1}{4}\gamma_1^2\sin 2\eta_1. \qquad (2)$$

3) Так как $z = r\sin\theta$, то можно написать

$$z = r\sin i \cdot \sin(L - \Omega).$$

Далее, так как R, согласно формуле (4) § 7.07, содержит только z^2, zz_1 и z_1^2, то нам нужно найти выражение для z только до членов первого порядка включительно. Поэтому

$$z = a\gamma\sin\eta. \qquad (3)$$

Аналогично

$$z_1 = a_1\gamma_1\sin\eta_1. \qquad (4)$$

§ 7.09. Метод разложения R

Мы положим

$$\rho = a\,(1+u), \quad \rho_1 = a_1(1+u_1), \tag{1}$$

$$\sigma = \varphi + v, \tag{2}$$

где [1])

$$\varphi = nt + \varepsilon - (n_1 t + \varepsilon_1). \tag{3}$$

Из формул (1) и (2) предыдущего параграфа следует, что u, u_1 и v — все величины первого порядка малости. Фактические выражения для u, u_1, v через e, e_1, γ и γ_1 могут быть получены из этих двух только что упомянутых формул.

Согласно формуле (4) § 7.07, R есть функция ρ, ρ_1, σ, z и z_1; и если мы обозначим через R_0 такое значение возмущающей функции, которое она принимает при нулевых значениях u, u_1, v, z и z_1, то из равенств (1) получим, например,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial R_0}{\partial a},$$

где $(\partial R/\partial\rho)$ означает величину производной $\partial R/\partial\rho$ при нулевых значениях u, u_1, v, z и z_1. Аналогично

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\rho\,\partial\sigma}\right) = \frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial\varphi}$$

и т. д.

Разлагая R в ряд Тейлора, мы с точностью до малых величин второго порядка будем иметь

$$\begin{aligned} R = R_0 &+ au\frac{\partial R_0}{\partial a} + a_1u_1\frac{\partial R_0}{\partial a_1} + v\frac{\partial R_0}{\partial\varphi} + \\ &+ \frac{1}{2}(au)^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial a^2} + \frac{1}{2}(a_1u_1)^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1^2} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial\varphi^2} + \\ &+ (au)(a_1u_1)\frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial a_1} + (au)v\frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial\varphi} + (a_1u_1)v\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1\,\partial\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

плюс члены, зависящие от z и z_1. При этом

$$\frac{R_0}{Gm_1} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{a\cos\varphi}{a_1^2}, \tag{5}$$

где

$$\Delta_0^2 = a^2 - 2aa_1\cos\varphi + a_1^2. \tag{6}$$

---

[1]) В теории Луны, как видно из формулы (16) § 7.06, вместо φ была принята величина ξ.

Члены в R/Gm_1, зависящие от z и z_1, имеют второй порядок и на основании формулы (4) § 7.07 они могут быть теперь записаны в виде

$$-\frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2}{\Delta_0^3}-\frac{zz_1}{a_1^3}+\frac{3}{2}\frac{az_1^2\cos\varphi}{a_1^4}. \tag{7}$$

Разложим $1/\Delta_0$ [первый член в формуле (5)] в ряд Фурье:

$$\frac{1}{2}B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\varphi. \tag{8}$$

Аналогично множитель $1/\Delta_0^3$, входящий в первый член формулы (7), будет представлен рядом вида

$$\frac{1}{2}C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos n\varphi. \tag{9}$$

Далее, если мы, например, найдем $\partial R_0/\partial a$ и $\partial^2 R_0/\partial a^2$, то мы получим выражения, содержащие $1/\Delta_0^3$ и $1/\Delta_0^5$. Кроме того, из формул (4) и (6) следует, что, если нам потребуется разложение для R до порядка выше второго, мы будем иметь члены, содержащие множители $1/\Delta_0^7$, $1/\Delta_0^9$ и т. д., которые могут быть представлены рядами вида (8) или (9).

Мы будем считать, что $a>a_1$ и положим

$$\frac{a_1}{a}=\alpha \tag{10}$$

и

$$D=1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2. \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{1}{\Delta_0}=\frac{1}{aD^{1/2}},\quad \frac{1}{\Delta_0^3}=\frac{1}{a^3D^{3/2}}\ \text{и т. д.} \tag{12}$$

Будет полезно получить разложение функции

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-s},$$

где s имеет вид $n+{}^1/_2$, причем n — положительное целое число, включая и нуль.

Перед тем как заняться в следующем параграфе этой частной задачей, мы приведем с точностью до членов второго порядка разложения для величин u, u_1, v, u^2, ..., u_1v, входящих в качестве множителей в разложение (4) для R. Эти разложения имеют вид

$$u=-e\cos M+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2-\frac{1}{2}e^2\cos 2M+\frac{1}{4}\gamma^2\cos 2\eta, \tag{13}$$

$$u_1=-e_1\cos M_1+\frac{1}{2}e_1^2-\frac{1}{4}\gamma_1^2-\frac{1}{2}e_1^2\cos 2M_1+\frac{1}{4}\gamma_1^2\cos 2\eta_1, \tag{14}$$

$$u^2=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2M, \tag{15}$$

$$u_1^2=\frac{1}{2}e_1^2+\frac{1}{2}e_1^2\cos 2M_1, \tag{16}$$

$$uu_1=\frac{1}{2}ee_1\cos(\varphi-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}_1)+\cos(M+M_1), \tag{17}$$

$$v=2e\sin M-2e_1\sin M_1+\frac{5}{4}e^2\sin 2M-\frac{5}{4}e_1^2\sin 2M_1-$$
$$-\frac{1}{4}\gamma^2\sin 2\eta+\frac{1}{4}\gamma_1^2\sin 2\eta_1, \tag{18}$$

$$uv=-e^2\sin 2M-ee_1\sin(\varphi-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}_1)+ee_1\sin(M+M_1), \tag{19}$$

$$u_1v=e_1^2\sin 2M_1-ee_1\sin(\varphi-\tilde{\omega}+\tilde{\omega}_1)-ee_1\sin(M+M_1) \tag{20}$$

и далее

$$z_1^2=\frac{1}{2}a_1^2\gamma_1^2-\frac{1}{2}a_1^2\gamma_1^2\cos 2\eta_1, \tag{21}$$

$$zz_1=\frac{1}{2}aa_1\gamma\gamma_1\cos(\varphi-\Omega+\Omega_1)-\frac{1}{2}aa_1\gamma\gamma_1\cos(\eta+\eta_1), \tag{22}$$

$$(z-z_1)^2=\frac{1}{2}a^2\gamma^2+\frac{1}{2}a_1^2\gamma_1^2-\frac{1}{2}a^2\gamma^2\cos 2\eta-\frac{1}{2}a_1^2\gamma_1^2\cos 2\eta_1. \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в формулу (4) и предполагая, что величины

$$\frac{\partial R_0}{\partial a}, \ \ldots \ \frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1\,\partial\varphi}$$

разложены в периодические относительно φ ряды, мы путем перемножения таких величин, как u и $\partial R_0/\partial a$, получим разложение R в виде периодического ряда до второго порядка малости относительно эксцентриситетов и наклонностей.

§ 7.10. Разложение $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-s}$

Пусть $z=e^{i\varphi}$. Тогда $2\cos\varphi=z+z^{-1}$ и

$$D=(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1}), \tag{1}$$

поэтому

$$D^{-s} \equiv (1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-s} = (1-\alpha z)^{-s}(1-\alpha z^{-1})^{-s} =$$
$$= \left[1+s\alpha z+\frac{s(s+1)}{2!}\alpha^2z^2+\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\alpha^3z^3+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1+s\alpha z^{-1}+\frac{s(s+1)}{2!}\alpha^2z^{-2}+\frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\alpha^3z^{-3}+\ldots\right] \quad (2)$$

или

$$D^{-s} = \frac{1}{2}B_0^s+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^s\left(z^n+z^{-n}\right), \quad (3)$$

где

$$\frac{1}{2}B_0^s = 1+s^2\alpha^2+\frac{[s(s+1)]^2}{(2!)^2}\alpha^4+\ldots \quad (4)$$

и

$$\frac{1}{2}B_n^s = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\alpha^n\times$$
$$\times\left[1+\frac{s}{1}\cdot\frac{s+n}{n+1}\alpha^2+\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\,\frac{(s+n)(s+n+1)}{(n+1)(n+2)}\alpha^4+\ldots\right]. \quad (5)$$

Так как $\alpha<1$, то ясно, что ряды (4) и (5) сходятся.

Очевидно, что равенство (3) может быть записано в виде

$$D^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n^s z^n, \quad (6)$$

где n принимает все целые положительные и отрицательные значения, включая и нуль. Также очевидно, что

$$B_{-n}^s = B_n^s.$$

Из равенства (3) мы имеем

$$D^{-s} = \frac{1}{2}B_0^s+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^s\cos n\varphi, \quad (7)$$

а это и является требуемым разложением.

Коэффициенты B_n^s называются *коэффициентами Лапласа*. Из формулы (5) видно, что все они положительны.

Разложение (5) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}B_n^s = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\alpha^nF(s,\ s+n,\ n+1;\ \alpha^2), \quad (8)$$

или, на основании формулы (2) § 3.04,

$$\frac{1}{2}B_n^s = \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\cdot\frac{\alpha^n}{(1-\alpha^2)^s}\times$$
$$\times F\left(s,\ 1-s,\ n+1;\ -\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right). \tag{9}$$

Разложение (2) может быть немедленно получено из формулы (12) § 3.09, если положить в ней $q=0$ и заменить p на $-s$, а β — на α.

§ 7.11. Интегральные формулы для коэффициентов Лапласа

Умножая обе части равенства (7) § 7.10 на $\cos n\varphi$ и интегрируя в пределах от 0 до π, получаем

$$B_n^s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^s}. \tag{1}$$

В частности, когда $s=1/_2$, имеем

$$B_n^{1/2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{1/2}}. \tag{2}$$

Затем из формулы (5) § 7.10, полагая в ней $s=1/_2$, находим

$$\frac{1}{2}B_n^{1/2} = \left[\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots(2n+2)}\alpha^2+\ldots\right]\alpha^n$$

и, принимая во внимание известную формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n},$$

получаем

$$\frac{\pi}{2}B_n^{1/2} = \alpha^n\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\varphi+\frac{3}{8}\sin^4\varphi+\ \ldots\right)d\varphi,$$

так что

$$B_n^{1/2} = \frac{2}{\pi}\alpha^n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}. \tag{3}$$

Интересно заметить, что из равенств (2) и (3) мы имеем

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}} = \alpha^n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}. \tag{4}$$

Из формулы (3) при $n=0$ находим

$$B_0^{1/2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}=\frac{4}{\pi}F(\alpha), \tag{5}$$

где

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} \tag{6}$$

представляет собой эллиптический интеграл первого рода. Кроме того, когда $n=1$, то

$$\begin{aligned} B_1^{1/2}&=\frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}=\\ &=\frac{4}{\pi\alpha}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi\right]=\\ &=\frac{4}{\pi\alpha}[F(\alpha)-E(\alpha)], \end{aligned} \tag{7}$$

где $E(\alpha)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Численные значения $E(\alpha)$, $F(\alpha)$ могут быть найдены по таблицам для этих функций, библиография которых приводится в «Указателе математических таблиц» Флетчера, Миллера и Розенхеда (см. примечание на стр. 64)[1].

§ 7.12. Различные формулы для коэффициентов Лапласа

1) Из формулы (6) § 7.10, заменяя в выражении для D $2\cos\varphi$ на $z+z^{-1}$, мы имеем

$$[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-s}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}B_n^s z^n. \tag{1}$$

Продифференцировав это равенство по z, получим

$$\alpha s(1-z^{-2})[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-s-1}=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}nB_n^s z^{n-1}, \tag{2}$$

откуда

$$\alpha s(z-z^{-1})\sum_{-\infty}^{\infty}B_n^s z^n=[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]\sum_{-\infty}^{\infty}nB_n^s z^n. \tag{3}$$

---

[1]) См. также: А. В. Лебедев, Р. М. Федорова, Справочник по математическим таблицам. Изд-во АН СССР, 1956. — *Прим. ред.*

Приравняем в обеих частях равенства коэффициенты при z^{n-1}. Тогда

$$\alpha s\left(B_{n-2}^{s}-B_{n}^{s}\right)=(n-1)\left(1+\alpha^{2}\right)B_{n-1}^{s}-\alpha\left[(n-2)B_{n-2}^{s}+nB_{n}^{s}\right],$$

откуда

$$B_{n}^{s}=\frac{n-1}{n-s}\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)B_{n-1}^{s}-\frac{n+s-2}{n-s}B_{n-2}^{s}. \tag{4}$$

Стало быть, если значения B_{0}^{s}, B_{1}^{s} известны, то значения B_{2}^{s}, B_{3}^{s}, ... могут быть последовательно вычислены. В частности, когда $s=1/2$, значения $B_{2}^{1/2}$, $B_{3}^{1/2}$, ... могут быть легко найдены последовательно из значений коэффициентов $B_{0}^{1/2}$, $B_{1}^{1/2}$, полученных из таблиц эллиптических функций, как уже упоминалось в предыдущем параграфе.

2) Мы можем записать равенство (2) в виде

$$\alpha s\left(1-z^{-2}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}B_{n}^{s+1}z^{n}=\sum_{-\infty}^{\infty}nB_{n}^{s}z^{n-1}. \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n-1}, находим, что

$$nB_{n}^{s}=\alpha s\left(B_{n-1}^{s+1}-B_{n+1}^{s+1}\right). \tag{6}$$

Заменяя в формуле (4) n на $n+1$ и s на $s+1$, мы будем иметь

$$\alpha B_{n+1}^{s+1}=\frac{1}{n-s}\left[n\left(1+\alpha^{2}\right)B_{n}^{s+1}-\alpha(n+s)B_{n-1}^{s+1}\right].$$

Поэтому формула (6) примет вид

$$B_{n}^{s}=\frac{s}{n-s}\left[2\alpha B_{n-1}^{s+1}-\left(1+\alpha^{2}\right)B_{n}^{s+1}\right]. \tag{7}$$

Заменим в этой формуле n на $n+1$. Тогда она запишется в виде

$$B_{n+1}^{s}=\frac{s}{n-s+1}\left[2\alpha B_{n}^{s+1}-\left(1+\alpha^{2}\right)B_{n+1}^{s+1}\right]. \tag{8}$$

Исключив B_{n-1}^{s+1} и B_{n+1}^{s+1} из формул (6) — (8), мы получим

$$B_{n}^{s+1}=\frac{(n+s)\left(1+\alpha^{2}\right)B_{n}^{s}-2(n-s+1)\alpha B_{n+1}^{s}}{s\left(1-\alpha^{2}\right)^{2}}. \tag{9}$$

Эта формула дает возможность нам вычислить значение B_{n}^{s+1}, когда значения B_{n}^{s} и B_{n+1}^{s} известны.

Совокупность формул (4) и (9) дает возможность вычислять коэффициенты Лапласа, когда численные значения $B_{0}^{1/2}$ и $B_{1}^{1/2}$ получены из таблиц эллиптических функций или каким-либо другим способом.

Заменяя в формуле (4) n на $n+1$ и используя затем эту формулу для исключения B_{n+1}^s из формулы (9), найдем, что последняя примет вид

$$B_n^{s+1}=\frac{2\alpha(n+s-1)B_{n-1}^s-(n-s)(1+\alpha^2)B_n^s}{s(1-\alpha^2)^2}. \tag{10}$$

Эта формула и может быть использована вместо формулы (9) для вычисления B_n^{s+1}.

Кроме того, из формулы (9) и формулы, полученной из (9) путем замены n на $n+1$, мы легко найдем, что

$$s(1+\alpha^2)B_n^{s+1}-2\alpha sB_{n+1}^{s+1}=(n+s)B_n^s. \tag{11}$$

§ 7.13. Производные от B_n^s по α

1) Продифференцируем формулу (1) § 7.12 по α. Тогда будем иметь

$$-s(2\alpha-z-z^{-1})\sum_{-\infty}^{\infty}B_n^{s+1}z^n=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{dB_n^s}{d\alpha}z^n,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при z^n, получаем

$$\frac{dB_n^s}{d\alpha}=s\left(B_{n-1}^{s+1}+B_{n+1}^{s+1}-2\alpha B_n^{s+1}\right). \tag{1}$$

Используя равенство (9) § 7.12, выразим B_{n-1}^{s+1} через B_{n-1}^s и B_n^s. Далее, по формуле (10) § 7.12 выразим B_{n+1}^{s+1} через B_n^s и B_{n+1}^s и B_n^{s+1} через B_{n-1}^s и B_n^s. Наконец, по формуле (4) § 7.12 выразим B_{n+1}^s через B_{n-1}^s и B_n^s. Тогда формула (1) примет вид

$$\frac{dB_n^s}{d\alpha}=\frac{s}{1-\alpha^2}\left\{2(n+s-1)B_{n-1}^s+\left[2\alpha s-n\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)\right]B_n^s\right\}. \tag{2}$$

Как формула (1), так и формула (2) могут быть использованы для вычисления $dB_n^s/d\alpha$.

2) Чтобы найти вторую производную от коэффициента Лапласа, воспользуемся прежде всего формулой (7) § 7.10, именно

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-s}=\frac{1}{2}B_0^s+\sum_{1}^{\infty}B_n^s\cos n\varphi.$$

Продифференцируем ее по α. Тогда

$$\frac{2s(\cos\varphi-\alpha)}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{s+1}}=\frac{1}{2}\frac{dB_0^s}{d\alpha}+\sum_{1}^{\infty}\frac{dB_n^s}{d\alpha}\cos n\varphi.$$

Продифференцировав по α вторично, будем иметь

$$\frac{4s(s+1)(\cos\varphi-\alpha)^2-2s(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{s+2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d^2B_0^s}{d\alpha^2}+\sum_1^\infty\frac{d^2B_n^s}{d\alpha^2}\cos n\varphi. \qquad (3)$$

Левая часть этого равенства может быть записана в виде

$$\frac{2s(2s+1)}{D^{s+1}}-\frac{4s(s+1)\sin^2\varphi}{D^{s+2}}. \qquad (4)$$

Первый член выражения (4) равен

$$2s(2s+1)\left(\frac{1}{2}B_0^{s+1}+\sum_1^\infty B_n^{s+1}\cos n\varphi\right). \qquad (5)$$

Продифференцировав выражение

$$D^{-s-1}\equiv\frac{1}{2}B_0^{s+1}+\sum_1^\infty B_n^{s+1}\cos n\varphi$$

по φ, получим

$$\frac{2\alpha(s+1)\sin\varphi}{D^{s+2}}=\sum_1^\infty nB_n^{s+1}\sin n\varphi.$$

Умножим обе части этого равенства на $\sin\varphi$ и выразим $\sin n\varphi\cdot\sin\varphi$ через разность двух косинусов. Тогда второй член в формуле (4) примет вид

$$-\frac{s}{\alpha}\sum_1^\infty nB_n^{s+1}[\cos(n-1)\varphi-\cos(n+1)\varphi]$$

или

$$-\frac{s}{\alpha}\sum_1^\infty\left[(n+1)B_{n+1}^{s+1}-(n-1)B_{n-1}^{s+1}\right]\cos n\varphi. \qquad (6)$$

Поэтому, приравнивая в формуле (3) коэффициенты при $\cos n\varphi$ и используя формулы (5) и (6), мы получаем

$$\frac{d^2B_n^s}{d\alpha^2}=2s(2s+1)B_n^{s+1}-\frac{s}{\alpha}\left[(n+1)B_{n+1}^{s+1}-(n-1)B_{n-1}^{s+1}\right]. \qquad (7)$$

Легко видеть, что эта формула имеет силу также и при $n=0$.

§ 7.14. Разложение функции R

Члены нулевого порядка в разложении (4) § 7.09 для R даются формулой

$$\frac{R_0}{Gm_1} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{a\cos\varphi}{a_1^2}. \tag{1}$$

Разлагая $1/\Delta_0 \equiv (aD)^{-1/2}$ в ряд и полагая $\alpha = a_1/a$, мы для этих членов получим

$$\frac{1}{2a} B_0^{1/2} + \frac{1}{a}\left(B_1^{1/2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cos\varphi + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=2} B_n^{1/2}\cos n\varphi. \tag{2}$$

Для членов первого и второго порядков нам потребуется $\partial R_0/\partial a$ и т. д.

Из формулы (1), опуская временно множитель $1/Gm_1$, имеем

$$\frac{\partial R_0}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\Delta_0}\right) - \frac{1}{a^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{1}{\Delta_0}\right) + \frac{2a}{a_1^3}\cos\varphi$$

и

$$\frac{\partial R_0}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\Delta_0}\right) + \frac{a}{a_1^2}\sin\varphi.$$

Рассмотрим сначала $(\partial/\partial a)(1/\Delta_0)$. Прежде всего имеем

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\Delta_0}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{D^{-1/2}}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}B_0^{1/2} + \sum B_n^{1/2}\cos n\varphi\right)\right].$$

Коэффициенты B являются функциями $\alpha \equiv a_1/a$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\Delta_0}\right) = -\frac{1}{2a^2}\left(B_0^{1/2} + \alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}\right) - \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}\left(B_n^{1/2} + \alpha\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos n\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial R_0}{\partial a} = -\frac{1}{2a^2}\left(B_0^{1/2} + \alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + B_1^{1/2} + \alpha\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos\varphi - $$
$$- \frac{1}{a^2}\sum_{n=2}\left(B_n^{1/2} + \alpha\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos n\varphi.$$

Аналогично

$$\frac{\partial R_0}{\partial a_1} = \frac{1}{2a^2}\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{\alpha^3} + \frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos\varphi + \frac{1}{a^2}\sum_{n=2}\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha}\cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial\varphi} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\alpha^2} - B_1^{1/2}\right)\sin\varphi - \frac{1}{a}\sum_{n=2} nB_n^{1/2}\sin n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a^2} = \frac{1}{2a^3}\left(2B_0^{1/2} + 4\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2}\right) + $$
$$+ \frac{1}{a^3}\sum_{n=1}\left(2B_n^{1/2} + 4\alpha\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2B_n^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1^2} = \frac{1}{2a^3}\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2} - \frac{1}{a^3}\left(\frac{6}{\alpha^4} - \frac{d^2B_1^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos\varphi + \frac{1}{a^3}\sum_{n=2}\frac{d^2B_n^{1/2}}{d\alpha^2}\cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\alpha^2} - B_1^{1/2}\right)\cos\varphi - \frac{1}{a}\sum_{n=2} n^2 B_n^{1/2}\cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial a_1} = -\frac{1}{2a^3}\left(2\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2}\right) + $$
$$+ \frac{1}{a^3}\left(\frac{2}{\alpha^3} - 2\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha} - \alpha\frac{d^2B_1^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos\varphi - $$
$$- \frac{1}{a^3}\sum_{n=2}\left(2\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha} + \alpha\frac{d^2B_n^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial\varphi} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + B_1^{1/2} + \alpha\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\sin\varphi + $$
$$+ \frac{1}{a^2}\sum_{n=2}\left(nB_n^{1/2} + n\alpha\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha}\right)\sin n\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1\,\partial\varphi} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{\alpha^3} + \frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\sin\varphi - \frac{1}{a^2}\sum_{n=2} n\frac{dB_n^{1/2}}{d\alpha}\sin n\varphi.$$

Поскольку значения u, u_1, ..., $u_1 v$ найдены в § 7.09, мы теперь можем представить $au\,(\partial R_0/\partial a)$, ..., $a_1 u_1 v\,(\partial^2 R_0/\partial a\,\partial\varphi)$ в виде периодических рядов вплоть до членов второго порядка относительно малых величин e, e_1, γ и γ_1 и с достаточной степенью точности относительно α. Степень точности зависит от численного значения этой величины.

Рассмотрим теперь члены в возмущающей функции, содержащие z, z_1. Эти члены, согласно формуле (7) § 7.09, таковы:

$$-\frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2}{\Delta_0^3} - \frac{zz_1}{a_1^3} + \frac{3}{2}\frac{az_1^2}{a_1^3}\cos\varphi. \tag{8}$$

Первый член равен

$$-\frac{1}{2a^3}(z-z_1)^2\left(\frac{1}{2}B_0^{3/2} + B_1^{3/2}\cos\varphi + \sum_{n=2} B_n^{3/2}\cos n\varphi\right).$$

и если вместо $(z-z_1)^2$ подставить его выражение из формулы (23) § 7.09, а произведения косинусов преобразовать в суммы косинусов, то в результате получим

$$-\frac{1}{8a}\left(\gamma^2+\alpha^2\gamma_1^2\right)B_0^{3/2}+\frac{\alpha}{4a}\gamma\gamma_1 B_1^{3/2}\cos(\Omega-\Omega_1) \tag{4}$$

плюс различные периодические члены.

Второе слагаемое в формуле (3) дает члены

$$-\frac{1}{2a}\alpha\gamma\gamma_1\left[\cos(\varphi-\Omega+\Omega_1)-\cos(\eta+\eta_1)\right], \tag{5}$$

а третье слагаемое в этой формуле — члены

$$\frac{3\gamma_1^2}{8a\alpha^2}\left[2\cos\varphi-\cos(\varphi-2\eta_1)-\cos(\varphi+2\eta_1)\right]. \tag{6}$$

§ 7.15. Непериодические члены N возмущающей функции

Важную часть разложения R составляют непериодические члены [1]). Обозначим эти члены через N.

Члены нулевого порядка — формула (2) § 7.14 — и члены, которые включают в себя координаты z, z_1, т. е. формулы (4) — (6) § 7.14, дадут в N/Gm_1 следующие слагаемые:

$$\frac{1}{2a}B_0^{1/2}-\frac{1}{8a}\left(\gamma^2+\alpha^2\gamma_1^2\right)B_0^{3/2}+\frac{\alpha}{4a}\gamma\gamma_1 B_1^{3/2}\cos(\Omega-\Omega_1). \tag{1}$$

Непериодическими членами, происходящими от $au\,(\partial R_0/\partial a), \ldots$, являются:

$$au\frac{\partial R_0}{\partial a}:\ -\frac{1}{8a}(2e^2-\gamma^2)\left(B_0^{1/2}+\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}\right),$$

$$a_1u_1\frac{\partial R_0}{\partial a_1}:\ \frac{\alpha}{8a}\left(2e_1^2-\gamma_1^2\right)\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha},$$

$$\frac{1}{2}(au)^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial a^2}:\ \frac{e^2}{8a}\left(2B_0^{1/2}+4\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}+\alpha^2\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2}\right),$$

$$\frac{1}{2}(a_1u_1)^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial a_1^2}:\ \frac{e_1^2}{8a}\alpha^2\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2},$$

[1]) Автор называет „непериодическими“ такие члены разложения возмущающей функции, которые не содержат множителями тригонометрических функций средних аномалий возмущающего и возмущаемого тел. Заметим, что в современной литературе по небесной механике такие члены чаще называются „вековыми“. — *Прим. ред.*

$$\frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 R_0}{\partial\varphi^2}: -\frac{ee_1}{a}\left(\frac{1}{\alpha^2}-B_1^{1/2}\right)\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1),$$

$$au\cdot a_1u_1\frac{\partial^2 R_0}{\partial a\,\partial a_1}: \frac{ee_1}{4a}\left(\frac{2}{\alpha^2}-2\alpha\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}-\alpha^2\frac{d^2B_1^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1),$$

$$au\cdot v\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial\varphi}: -\frac{ee}{2a}\left(\frac{1}{\alpha^2}+B_1^{1/2}+\alpha\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1),$$

$$a_1u_1\cdot v\frac{\partial^2 R}{\partial a_1\,\partial\varphi}: \frac{\alpha ee_1}{2a}\left(\frac{2}{\alpha^3}+\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}\right)\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1).$$

Объединив все эти члены, мы будем иметь

$$\frac{N}{Gm_1}=\frac{1}{2a}B_0^{1/2}+\frac{1}{8a}(e^2+e_1^2)\left(2\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}+\alpha^2\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2}\right)+$$
$$+\frac{ee_1}{4a}\left(2B_1^{1/2}-2\alpha\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}-\alpha^2\frac{d^2B_1^{1/2}}{d\alpha^2}\right)\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)-$$
$$-\frac{\gamma^2}{8a}\left(B_0^{3/2}-B_0^{1/2}-\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}\right)-\frac{\gamma_1^2}{8a}\left(\alpha\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}+\alpha^2B_0^{3/2}\right)+$$
$$+\frac{\gamma\gamma_1}{4a}B_1^{3/2}\cos(\Omega-\Omega_1). \tag{2}$$

Приступим теперь к упрощению выражения (2). Полагая $n=0$, $s=1/2$ в формулах (1) § 7.13 и (7) § 7.13, мы получаем

$$\frac{dB_0^{1/2}}{d\alpha}=B_1^{3/2}-\alpha B_0^{3/2}, \tag{3}$$

$$\frac{d^2B_0^{1/2}}{d\alpha^2}=2B_0^{3/2}-\frac{1}{\alpha}B_1^{3/2}. \tag{4}$$

Аналогично, полагая $n=1$, $s=1/2$ в тех же равенствах, мы будем иметь

$$\frac{dB_1^{1/2}}{d\alpha}=\frac{1}{2}\left(B_0^{3/2}+B_2^{3/2}-2\alpha B_1^{3/2}\right), \tag{5}$$

$$\frac{d^2B_1^{1/2}}{d\alpha^2}=2B_1^{3/2}-\frac{1}{\alpha}B_2^{3/2}. \tag{6}$$

Из формул (3) и (4) следует, что коэффициент при $e^2/8a$ (и при $e_1^2/8a$) в выражении (2) равен $\alpha B_1^{3/2}$, а из формул (5) и (6) — что коэффициент при $ee_1/4a$ равен $-\alpha B_2^{3/2}$. Из равенства (3) видно, что коэффициент при $-\gamma^2/8a$ представляет выражение

$$\left(1+\alpha^2\right)B_0^{3/2}-\alpha B_1^{3/2}-B_0^{1/2}.$$

Но из формул (9) и (10) § 7.12 имеем

$$B_0^{3/2} = \frac{\left(1+\alpha^2\right) B_0^{1/2} - 2\alpha B_1^{1/2}}{(1-\alpha^2)^2},$$

$$B_1^{3/2} = \frac{2\alpha B_0^{1/2} - (1+\alpha^2) B_1^{1/2}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Отсюда

$$\left(1+\alpha^2\right) B_0^{3/2} - 2\alpha B_1^{3/2} = B_0^{1/2}.$$

Следовательно, коэффициент при $-\gamma^2/8a$ в формуле (2) равен $\alpha B_1^{3/2}$, а равенство (3) показывает, что коэффициент при $-\gamma_1^2/8a$ также равен $\alpha B_1^{3/2}$.

Подставляя эти величины в формулу (2), мы найдем, что непериодические члены N возмущающей функции выражаются формулой

$$N = \frac{Gm_1}{8a}\left\{4B_0^{1/2} + \alpha B_1^{3/2}\left[e^2+e_1^2-\gamma^2-\gamma_1^2+2\gamma\gamma_1\cos\left(\Omega-\Omega_1\right)\right] - \right.$$
$$\left. - 2\alpha e e_1 B_2^{3/2}\cos\left(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1\right)\right\}. \tag{7}$$

Так как $\alpha = a_1/a$, то формула (1) § 7.11 может быть записана в виде

$$B_n^s = \frac{2}{\pi}\, a^{2s}\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\left(a^2-2aa_1\cos\varphi+a_1^2\right)^s}.$$

Этот интеграл является функцией, симметричной относительно a и a_1. Запишем его в виде $(\pi/2)P_n^s$. Тогда

$$B_n^s = a^{2s}P_n^s$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{8a}B_0^{1/2} &= \frac{1}{8}P_0^{1/2} \equiv C, \\ \frac{\alpha}{8a}B_1^{3/2} &= \frac{1}{8}\,aa_1P_2^{3/2} \equiv D, \\ \frac{\alpha}{8a}B_2^{3/2} &= \frac{1}{8}\,aa_1P_2^{3/2} \equiv E, \end{aligned} \tag{8}$$

где C, D и E — симметричные функции a и a_1. Мы можем теперь записать N следующим образом:

$$N = Gm_1\left\{4C + \left[e^2+e_1^2-\gamma^2-\gamma_1^2+2\gamma\gamma_1\cos\left(\Omega-\Omega_1\right)\right]D - \right.$$
$$\left. - 2ee_1E\cos\left(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1\right)\right\}. \tag{9}$$

Это выражение N нам потребуется в гл. 13. Нам потребуется также неравенство $D > E$, которое может быть получено следующим образом. Из формулы (9) § 7.12 имеем

$$(1-\alpha^2)^2\left(B_1^{3/2}-B_2^{3/2}\right)=3(1+\alpha^2)B_1^{1/2}-\left[6\alpha+5(1+\alpha^2)\right]B_2^{1/2}+10\alpha B_3^{1/2}.$$

Положив в формуле (4) § 7.12 $n=3$ и $s={}^1/_2$, найдем выражение для $B_3^{1/2}$ и подставим его в последнее равенство. Тогда его правая часть приведется к выражению

$$3(1-\alpha)^2\left(B_1^{1/2}+B_2^{1/2}\right),$$

которое является положительной величиной, ибо все B — положительны. Поэтому $B_1^{3/2} > B_2^{3/2}$, т. е., согласно формулам (8),

$$D > E. \tag{10}$$

§ 7.16. Доказательство того, что часть $Gm_1r\cos S/r_1^2$ возмущающей функции содержит только периодические члены

Во всех разложениях возмущающей функции, которые мы до сих пор получили, среди членов второй части функции R до второго порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей включительно отсутствуют непериодические слагаемые. В теории движения планет непериодические члены представлены формулой (7) § 7.15 для N. Мы теперь покажем, что это частное свойство является общим; другими словами, оно является верным независимо от того, какого бы порядка члены разложения R мы ни рассматривали. Для простоты в обозначениях формулы (9) § 1.07 напишем

$$R'=\frac{r\cos S}{r_1^2}, \tag{1}$$

где S — угол между радиусами-векторами двух планет.

Формулы предыдущих параграфов показывают, что R' может быть разложена в ряд вида

$$R'=\sum_p\sum_q\left[C_{p,q}\cos(pM+qM_1)+S_{p,q}\sin(pM+qM_1)\right], \tag{2}$$

в котором M и M_1 — средние аномалии, коэффициенты C и S не зависят от M и M_1, а являются функциями a, e, i, Ω, $\tilde\omega$ и соответствующих элементов возмущающей планеты, q — положительные и отрицательные целые числа, включая и нуль, а p (без ограничения общности) — положительные целые числа или нуль. Непериодическая часть в формуле (2) равна $C_{0,0}$.

Рассматривая M и M_1 как независимые переменные, мы из равенства (2) немедленно получаем

$$\int_0^{2\pi} R'\,dM_1 = 2\pi \sum_p (C_{p,0}\cos pM + S_{p,0}\sin pM). \tag{3}$$

Далее, для возмущающей планеты имеем

$$r_1^2 \dot{f}_1 = h_1 = n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2} \equiv n_1 c,$$

или так как $\dot{M}_1 = n_1$, то

$$df_1 = \frac{c\,dM_1}{r_1^2}.$$

Поэтому из равенства (1) находим

$$\int_0^{2\pi} R'\,dM_1 = \frac{r}{c}\int_0^{2\pi}\cos S\,df_1. \tag{4}$$

Пусть на рис. 18 A_1BP_1 — большой круг с центром в Солнце, по которому плоскость орбиты планеты P_1 пересекается с небесной

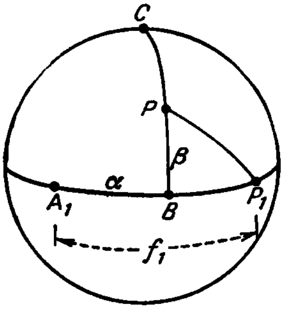

Рис. 18.

сферой и пусть A_1 — перигелий, так что $A_1P_1 = f_1$. Пусть далее α, β суть координаты планеты P относительно A_1BP_1. Тогда $PP_1 = S$, $BP_1 = f_1 - \alpha$ и $BP = \beta$. Следовательно,

$$\cos S = \cos\beta\cos(f_1 - \alpha),$$

и так как α и β не зависят от положения P_1, то

$$\int_0^{2\pi}\cos S\,df_1 = \cos\beta\int_0^{2\pi}\cos(f_1-\alpha)\,df_1 = 0.$$

Поэтому из равенств (3) и (4) будем иметь

$$\sum_p (C_{p,0} \cos pM + S_{p,0} \sin pM) = 0.$$

Последнее равенство справедливо при любом M; поэтому для всех значений p имеем

$$C_{p,0} = S_{p,0} = 0. \qquad (5)$$

В частности,

$$C_{0,0} = S_{0,0} = 0,$$

а это равносильно утверждению, что R' не содержит непериодических членов.

Очевидно, что если бы мы вычислили интеграл $\int\limits_0^{2\pi} R'\,dM$, входящий в равенство (3), то мы пришли бы к результату, аналогичному равенству (5), именно

$$C_{0,q} = S_{0,q} = 0. \qquad (6)$$

Равенства (5) и (6) показывают, что общее разложение R' дается формулой (2), где q — положительное или отрицательное целое число, p — положительное целое число, причем *нулевые значения p и q исключаются.*

§ 7.17. Общие замечания относительно разложения возмущающей функции

Если возмущающая функция разложена в периодический ряд относительно времени как независимой переменной, то рассуждения, приведенные на предыдущих страницах, показывают, что общий член этого ряда имеет вид

$$C \cos (lM + l_1 M_1 + j\Omega + j\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1), \qquad (1)$$

где $M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$, $M_1 = n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1$, C — функция a, a_1, e, e_1, γ и γ_1, а l, l_1, j, j_1, k и k_1 — положительные или отрицательные числа (включая нуль). Легко видеть, что вообще C является рядом по степеням e, e_1, γ и γ_1, и если мы предположим, что каждый из этих элементов имеет один и тот же порядок малости, то порядок малости коэффициента C будет $e^{\alpha} e_1^{\alpha_1} \gamma^{\beta} \gamma^{\beta_1}$, где $\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1$ — наименьшая сумма индексов членов упомянутого ряда.

Уместно выяснить порядок малости отдельного члена вида (1). Для удобства мы запишем выражение (1) в виде

$$C \cos [(ln + l_1 n_1) t + h], \qquad (2)$$

где величина h зависит от ε, ε_1, Ω, Ω_1, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ и не представляет для нас сейчас интереса.

Из предыдущих параграфов ясно, что члены возмущающей функции, не содержащие z и z_1, появляются в результате перемножения выражений

$$u^p u_1^q v^s \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{p+q+s} R_0}{\partial a^p\, \partial a_1^q\, \partial \varphi^s}. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала последнее выражение. Если s четное, то, как легко видеть, это выражение можно разложить в ряд, общий член которого имеет вид $A_k \cos k\varphi$, а если s нечетное, то выражение это можно представить рядом с общим членом $B_k \sin k\varphi$, причем A_s и B_s являются функциями от a и a_1, а

$$\varphi = (n - n_1)t + \varepsilon - \varepsilon_1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь первое выражение (3). Общее разложение радиус-вектора по кратным средней аномали показывает, что порядок коэффициента при $\cos \alpha M$ равен e^α; кроме того, если мы разложим $\rho = r\cos\theta$ и таким образом получим u, то порядок коэффициента каждого члена, содержащего $\cos(\alpha nt + q)$, относительно e или γ будет снова равен α. Рассмотрим теперь величину u^2, которая может быть легко разложена в ряд с общим членом $C\cos(pnt + q)$. Этот член может появиться в трех случаях.

1. При перемножении периодической части в u и члена вида $C_1 \cos(pnt + q)$, если такой член имеется. Порядок величины C тогда будет по меньшей мере равен p.

2. При перемножении членов вида

$$C_1 \cos(\alpha nt + \beta) \quad \text{и} \quad C_2 \cos[(p - \alpha)nt + \delta],$$

где $p > \alpha$. Порядок величин C в этом случае будет равен сумме порядков C_1 и C_2, т. е. сумме α и $(p - \alpha)$, или просто p.

3. При перемножении членов вида

$$C_1 \cos(\alpha nt + \beta) \quad \text{и} \quad C_2 \cos[(\alpha - p)nt + \delta],$$

где $\alpha > p$. Тогда порядок величин C равен сумме α и $(\alpha - p)$, т. е. равен $(2\alpha - p)$, что больше p.

Мы заключаем, таким образом, что порядок члена $C\cos(pnt + q)$ в u^2 *по меньшей мере* равен p. Аналогичные рассуждения применимы к каждой степени u, к каждой степени u_1 и к любой степени v.

Далее, если мы разложим первую из величин (3), то получим при четном s члены вида

$$C_1 \cos[(pn + qn_1)t + \delta] \quad \text{или} \quad C_2 \cos[(pn - qn_1)t + \delta_1],$$

в каждом из которых мы можем рассматривать p и q как положительные целые числа. На основании предыдущих рассуждений легко понять, что порядок C_1 будет по меньшей мере равен $p+q$, а порядок C_2 — по крайней мере $|p-q|$.

Если s нечетное, то, заменяя косинусы на синусы, мы придем к тем же заключениям относительно порядков малости, что и раньше.

Рассмотрим теперь произведение двух величин (3). Если s четное, то мы будем иметь произведение двух рядов по косинусам и их произведение будет рядом, содержащим только косинусы; если s нечетное, то мы будем иметь произведение двух рядов по синусам, а их произведение будет рядом по косинусам. Мы рассмотрим только случай, который содержит произведение двух рядов по косинусам, поскольку рассуждения в случае произведения двух рядов по синусам являются аналогичными.

В результате перемножения двух величин (3) получим члены вида

$$C \cos [(pn+qn_1)t+\zeta] \tag{5}$$

и

$$C' \cos [(pn-qn_1)t+\zeta'], \tag{6}$$

в которых мы считаем p и q положительными целыми числами. Член вида (5) появится в результате перемножения члена

$$C_0 \cos k\varphi \equiv C_0 \cos [(kn-kn_1)t+\zeta_0] \tag{7}$$

и члена

$$C_1 \cos \{[(p-k)+(q+k)n_1]t+\zeta_1\} \tag{8}$$

или

$$C_2 \cos \{[(p+k)n+(q-k)n_1]t+\zeta_2\}. \tag{9}$$

Далее, порядок величин C и C' в выражениях (5) и (6) совпадает с порядком величин C_1 и C_2 в выражениях (8) и (9), так как порядок величин C_0 в (7) нулевой, ибо C_0 есть лишь функция от a и a_1.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $p>k$, $q>k$. Тогда порядок величин C_1 по меньшей мере равен $(p-k)+(q+k)$, или $p+q$. Аналогичный результат имеет место и для C_2.

2) $p<k<q$. Тогда порядок величин C_1 по меньшей мере равен $(q+k)-(k-p)$, или $p+q$, а порядок C_2 по крайней мере равен $(p+k)+(q-k)$, или $p+q$.

3) $p<k$, $q<k$. Порядок величины C_1 по меньшей мере равен $(q+k)-(k-p)$, или $p+q$, а порядок C_2 по крайней мере равен $(p+k)-(k-q)$, или $p+q$.

Следовательно, во всех случаях порядок величины C в выражении (5) по крайней мере равен $p+q$.

Аналогично порядок величины C' в выражении (6) по меньшей мере равен $|p-q|$.

Подобные рассуждения применимы к тем членам в возмущающей функции, которые содержат координаты z и z_1.

Окончательно заключаем, что периодическая часть возмущающей функции может быть представлена в виде ряда по косинусам, общий член которого имеет вид

$$C \cos [(pn+qn_1)t+\zeta],$$

где порядок C, поскольку p и q рассматриваются как целые положительные или отрицательные числа, по меньшей мере равен $|p+q|$.

Глава 8

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8.01. Введение

В ряде параграфов этой главы мы будем заниматься малыми вариациями координат, составляющих скорости и их функций. В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример движения частицы по прямой линии, согласно уравнению движения $\ddot{x} = \varphi(t, x)$, решение которого может быть представлено следующей функциональной зависимостью:

$$x = F(t, \alpha_1, \alpha_2), \tag{1}$$

где α_1 и α_2 — постоянные интегрирования.

Из равенства (1) находим

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial t} \equiv G(t, \alpha_1, \alpha_2). \tag{2}$$

Мы можем, если пожелаем (как это обычно делается во многих практических задачах), в качестве постоянных интегрирования взять начальные условия: $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

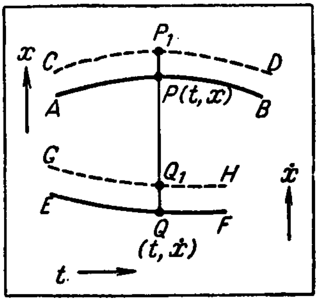

Рис. 19.

Уравнения (1) и (2) определяют два семейства кривых с параметрами α_1 и α_2, причем любой кривой из каждого семейства соответствуют частные значения α_1 и α_2. На рис. 19 кривой AB мы изобразили график функции $F(t, \alpha_1, \alpha_2)$ для частных значений α_1 и α_2, а кривой EF — график функции $G(t, \alpha_1, \alpha_2)$. Линии CD и GH —

соседние кривые, соответствующие значениям $\alpha_1+\delta\alpha_1$ и $\alpha_2+\delta\alpha_2$ параметров,

Для каждого данного момента t точке P на кривой AB будет соответствовать точка P_1 на кривой CD. Таким образом, мы имеем смещение PP_1, соответствующее вариациям $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$. Ордината точки P есть x, и если ордината точки P_1 обозначена через $x+\delta x$, то смещение PP_1, равное δx, будет функцией от $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$, выражаемой формулой

$$\delta x=\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial\alpha_2}\delta\alpha_2. \tag{3}$$

Аналогично смещение точки Q на кривой EF, вызываемое вариациями $\delta\alpha_1$ и $\delta\alpha_2$, равно QQ_1. Ордината точки Q есть $\dot{x}$, и если мы обозначим ординату точки Q_1 через $\dot{x}+\delta\dot{x}$, то смещение QQ_1 будет равно $\delta\dot{x}$. Из формулы (2) имеем

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial G}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial G}{\partial\alpha_2}\delta\alpha_2, \tag{4}$$

или, выражая через функцию F,

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_1\,\partial t}\delta\alpha_1+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_2\,\partial t}\delta\alpha_2\ . \tag{5}$$

Из равенства (3) находим

$$\frac{d}{dt}(\delta x)=\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\alpha_2}\delta\alpha_2.$$

Поэтому, учитывая соотношение (5), можем записать

$$\frac{d}{dt}(\delta x)=\delta\dot{x}=\delta\left(\frac{dx}{dt}\right). \tag{6}$$

Если δ и d рассматривать как операторы, то равенство (6) может быть представлено в виде формулы

$$d\cdot\delta x=\delta\cdot dx, \tag{7}$$

которая показывает, что эти независимые операторы подчиняются коммутативному закону.

§ 8.02. Вариация функции

Рассмотрим сначала движение частицы в трехмерном пространстве. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}=f_1(t,\ x,\ y,\ z),\qquad \ddot{y}=f_2(t,\ x,\ y,\ z),\qquad \ddot{z}=f_3(t,\ x,\ y,\ z).$$

Общее решение этих уравнений будет включать шесть постоянных интегрирования α_l ($l = 1, 2, \ldots, 6$) и может быть представлено в виде

$$x = F_1(t, \alpha), \quad y = F_2(t, \alpha), \quad z = F_3(t, \alpha). \tag{1}$$

Отсюда мы находим

$$\dot{x} = G_1(t, \alpha), \quad \dot{y} = G_2(t, \alpha), \quad \dot{z} = G_3(t, \alpha). \tag{2}$$

Вариациям $\delta\alpha_l$ ($l = 1, 2, \ldots, 6$) соответствуют равенства

$$\delta x = \sum_1^6 \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_l}\delta\alpha_l, \quad \delta\dot{x} = \sum_1^6 \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_l}\delta\alpha_l \tag{3}$$

плюс аналогичные соотношения для y и z. Таким образом, шести независимым вариациям постоянных α будут соответствовать независимые вариации трех координат и трех составляющих скорости. Так как число равенств (3) равно шести, то мы имеем необходимое число уравнений, чтобы однозначно выразить любое $\delta\alpha$ через $\delta x, \ldots, \delta\dot{z}$.

Рассмотрим теперь функцию времени t, координат и составляющих скорости. Обозначим ее через $\varphi(t, x, \ldots, \dot{z})$. После использования уравнений (1) и (2) эта функция примет вид $\varphi(t, \alpha)$, а ее вариация φ будет выражаться формулой

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_l}\delta\alpha_l. \tag{4}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\delta\varphi = \sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right). \tag{5}$$

Если $\delta x, \delta\dot{x}, \ldots$ даются формулами (3), то вариации φ, определяемые формулами (4) и (5), равны друг другу.

Таким образом, мы можем при помощи формулы (5) выразить вариацию функции через независимые вариации $\delta x, \delta\dot{x}, \ldots$, которые в свою очередь *зависят* от вариаций шести параметров α_l.

Эти рассуждения, очевидно, могут быть распространены на любое число материальных точек. Если это число равно n, то полное число координат будет равно $3n$, которое мы обозначим через k, и полное число постоянных интегрирования будет $2k$. В общем случае вариация функции $\varphi(t, x_l, \dot{x}_l, \ldots)$, где $l = 1, 2, \ldots, n$, дается формулой

$$\delta\varphi = \sum_{xyz}\sum_1^n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\delta x_l + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_l}\delta\dot{x}_l\right). \tag{6}$$

в которой δx, $\delta\dot{x}$, ... — независимые вариации, рассматриваемые как функции от вариаций $2k$ постоянных интегрирования, или параметров α_i.

§ 8.03. Обобщенные координаты

Рассмотрим n материальных точек с общим числом координат, равным $k\,(\equiv 3n)$, причем эти координаты являются функциями времени и k независимых переменных, обозначаемых через q_1, q_2, ..., q_k. Тогда мы можем написать

$$x_i = F_i(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_k),\quad y_i = G_i(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_k),$$
$$z_i = H_i(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_k), \tag{1}$$

или, более кратко,

$$x_i = F_i(t,\ q),\quad y_i = G_i(t,\ q),\quad z_i = H_i(t,\ q). \tag{2}$$

Величины q называются *обобщенными координатами.*

Простым примером преобразования (2) является преобразование прямоугольных координат в сферические координаты посредством формул

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\theta.$$

Это преобразование не содержит времени. Здесь r, φ и θ могут рассматриваться как три координаты q.

Простой пример преобразования в двумерном пространстве, содержащего время, дается формулами

$$x = \xi\cos nt - \eta\sin nt,\quad y = \xi\sin nt + \eta\cos nt,$$

где ξ и η — координаты относительно вращающихся осей — могут рассматриваться как две обобщенные координаты q. Мы встретимся с этим частным преобразованием в последующих параграфах.

Из равенств (1) имеем

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^{k}\frac{\partial F_i}{\partial q_r}\dot{q}_r \tag{3}$$

и два аналогичных уравнения для y и z.

Пусть T означает кинетическую энергию системы, так что

$$2T = \sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Тогда из формулы (3) видно, что T преобразуется в функцию $T(q,\ \dot{q},\ t)$, определяемую формулой

$$T = \sum_r A_r\dot{q}_r^2 + 2\sum_r\sum_s B_{r,s}\dot{q}_r\dot{q}_s + \sum C_r\dot{q}_r + D, \tag{4}$$

где двойное суммирование производится при условии, что $s > r$, а коэффициенты A, B, C и D в общем случае являются функциями q и t, определяемыми в любой данной задаче преобразованием вида (3).

Заметим, что первые две суммы в формуле (4), которые мы обозначим через T_2, представляют однородные квадратичные функции относительно производных $\dot{q}$. Что касается третьей суммы $\sum C_r \dot{q}_r$, то она является однородной линейной функцией величин $\dot{q}$, которую мы обозначим через T_1. Последний член D, который обозначим через T_0, не зависит от производных $\dot{q}$. Удобно записать T в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{5}$$

причем T_2 и T_1 — функции q, $\dot{q}$, t, а T_0 — функция q и t.

Если преобразование (1) применить к силовой функции U, которая первоначально была функцией прямоугольных координат, то она превратится в функцию q, t, которую мы обозначим через $U(q, t)$.

§ 8.04. Уравнения Лагранжа

Уравнения движения n материальных точек имеют вид

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{1}$$

где U — силовая функция, а $i = 1, 2, \ldots, n$. Эти уравнения могут быть преобразованы в уравнения для k обобщенных координат q_r ($r = 1, 2, \ldots, k$).

Удобно записать формулы преобразования (2) предыдущего параграфа в виде

$$x_i = x_i(q, t), \quad y_i = y_i(q, t), \quad z_i = z_i(q, t). \tag{2}$$

Тогда равенство (3) § 8.03 запишется следующим образом:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r. \tag{3}$$

Отсюда мы имеем

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial q_r} + \sum_s \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_r\, \partial q_s} \dot{q}_s.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_l}{\partial q_r}\right)=\frac{\partial^2 x_l}{\partial t\,\partial q_r}+\sum_s \frac{\partial^2 x_l}{\partial q_r\,\partial q_s}\dot{q}_s.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial q_r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_l}{\partial q_r}\right). \tag{5}$$

Далее T определяется формулой

$$2T=\sum m_l(\dot{x}_l^2+\dot{y}_l^2+\dot{z}_l^2). \tag{6}$$

Следовательно, учитывая формулу (4), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}=\sum_{xyz}\sum_l m_l\left(\dot{x}_l\frac{\partial \dot{x}_l}{\partial \dot{q}_r}\right)=\sum_{xyz}\sum_l m_l\left(\dot{x}_l\frac{\partial x_l}{\partial q_r}\right).$$

С другой стороны, из этого последнего уравнения и формул (1) и (5) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)=\sum_{xyz}\sum_l m_l\left[\ddot{x}_l\frac{\partial x_l}{\partial q_r}+\dot{x}_l\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_l}{\partial q_r}\right)\right]=$$

$$=\sum_{xyz}\sum_l\left(\frac{\partial U}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial q_r}+m_l\dot{x}_l\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}\right). \tag{7}$$

Но на основании формул (2) $U(x, y, z)\equiv U(q, t)$, поэтому

$$\sum_{xyz}\sum_l\frac{\partial U}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial q_r}=\frac{\partial U}{\partial q_r}$$

и, принимая во внимание формулу (6), уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial U}{\partial q_r}+\frac{\partial T}{\partial q_r}. \tag{8}$$

Функция U не зависит от $\dot{q}$. Поэтому $\partial U/\partial\dot{q}=0$ и уравнение (8) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_r}, \tag{9}$$

где $L=T+U$ есть функция q, $\dot{q}$, t. Функция L иногда называется *кинетическим потенциалом*.

Уравнения (8) или (9) и являются уравнениями движения Лагранжа в обобщенных координатах.

Из формулы (4) § 8.03 видно, что $\partial L/\partial \dot{q}_r$ имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \sum E_r \dot{q}_r + C_r.$$

Поэтому очевидно, что уравнение (9) содержит (при всех r и s) $\ddot{q}_r$, $\dot{q}_r \dot{q}_s$, $\dot{q}_r$ и члены, не зависящие от $\dot{q}$.

§ 8.05. Пример

Для того чтобы проиллюстрировать принципы, лежащие в основе вывода уравнений Лагранжа, а также для подготовки к последующему изложению, мы рассмотрим наглядный пример плоского движения в задаче трех тел.

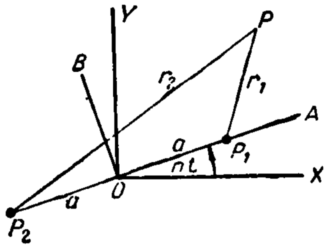

Рис. 20.

Рассмотрим на рис. 20 два тела P_1 и P_2 с одинаковыми массами M, обращающиеся около их центра масс O по круговым орбитам радиуса a с постоянной угловой скоростью n. Пусть P означает третье тело с бесконечно малой массой m, которая не оказывает влияния на движение тел P_1 и P_2. Силовая функция U будет определяться формулой

$$U = \frac{GM^2}{2a} + GmM\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{1}$$

где r_1 и r_2 — расстояния P до P_1 и P_2. Если x, y — координаты P по отношению к фиксированным осям OX, OY, то кинетическая энергия системы определится формулой

$$T = Ma^2n^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{2}$$

В качестве новых осей выберем оси OP_1 (или OA) и OB, которые вращаются с угловой скоростью n. Пусть $\angle AOX = nt$. Если

ξ, η — координаты тела P относительно осей OA, OB, то

$$x = \xi \cos nt - \eta \sin nt, \quad y = \xi \sin nt + \eta \cos nt. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) находим

$$T = Ma^2 n^2 + \frac{1}{2} m \, [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2n(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) + n^2(\xi^2 + \eta^2)]. \tag{4}$$

Кроме того,

$$r_1^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2, \quad r_2^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2.$$

Будем рассматривать теперь ξ и η как обобщенные координаты q_1 и q_2. Нужно заметить, что преобразование (3) имеет вид $x = x(q, t)$ и $y = y(q, t)$.

Из формулы (4) мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m(\dot{\xi} - n\eta), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m(\dot{\eta} + n\xi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = mn(\dot{\eta} + n\xi), \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = mn(-\dot{\xi} + n\eta).$$

Уравнения Лагранжа тогда запишутся в виде

$$m \frac{d}{dt}(\dot{\xi} - n\eta) = mn(\dot{\eta} + n\xi) + \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$m \frac{d}{dt}(\dot{\eta} + n\xi) = mn(-\dot{\xi} + n\eta) + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

или

$$\ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - n^2\xi = GM \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{5}$$

$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - n^2\eta = GM \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{6}$$

Заметим, что при выводе уравнений (5) и (6) было произведено сокращение на массу m. Это стало возможным благодаря тому, что *переменная* часть U в формуле (1) и T в формуле (4) имели множитель m. Следовательно, можно считать, что в уравнениях (5) и (6) роль U и T играют следующие функции:

$$U = GM\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{7}$$

и

$$T = \frac{1}{2} [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2n(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta) + n^2(\xi^2 + \eta^2)]. \tag{8}$$

Эти выражения отличаются от выражений (1) и (4), во-первых, тем, что в них отсутствуют постоянные члены (эти члены пропадают при дифференцировании U и T), и, во-вторых, тем, что в них опущен множитель m.

Следует заметить, что один интеграл уравнений (5) и (6) может быть получен весьма просто: умножим первое уравнение на $\dot{\xi}$, второе — на $\dot{\eta}$ и сложим. После интегрирования мы получим

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)-\frac{1}{2}n^2(\xi^2+\eta^2)=GM\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\text{const}. \qquad (9)$$

Это последнее равенство представляет собой интеграл энергии в обобщенных координатах ξ и η.

§ 8.06. Канонические уравнения Гамильтона

Проделаем теперь следующую замену переменных. Пусть

$$p_i=\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (1)$$

где $i=1, 2, \ldots, k$. Величины p называются *обобщенными импульсами* или просто *импульсами*. Тогда на основании формулы (4) § 8.03 p_i есть линейная функция величин $\dot{q}$, которую мы можем записать в виде

$$p_i=a_{i1}\dot{q}_1+a_{i2}\dot{q}_2+\ldots+a_{ik}\dot{q}_k+c_i. \qquad (2)$$

Здесь величины a и c_i являются вообще функциями величин q и t, причем эти функции бывают известны в любой данной задаче. Так как имеется k уравнений вида (2), то они в принципе могут быть разрешены относительно величин $\dot{q}$, т. е. дают возможность выразить все $\dot{q}$ через k величин p и коэффициенты a и c. Мы можем записать это решение символически в виде

$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(q, p, t), \qquad (3)$$

причем правая часть, как легко видеть, является линейной функцией импульсов p. Посредством формулы (3) функция $T(q, \dot{q}, t)$ может быть теперь преобразована в функцию от q, p, t.

Для того чтобы различать две формы, в которых можно представить функцию кинетической энергии, мы используем для нее обозначение T в том случае, когда она выражена через q, $\dot{q}$, t, и обозначение $\bar{T}$, когда она выражена через q, p, t.

Пусть величины q и $\dot{q}$ получили малые произвольные независимые приращения δq_i и $\delta\dot{q}_i$ ($i=1, 2, \ldots, k$). Тогда, применяя формулу (5) § 8.02, будем иметь

$$\delta T=\sum_{1}^{k}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)$$

или, согласно формуле (1),

$$\delta T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i. \tag{4}$$

Далее, из формулы (5) § 8.03 мы видим, что T можно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{5}$$

где T_2 — однородная квадратичная функция производных $\dot{q}$, T_1 — однородная линейная функция $\dot{q}$, T_0 — функция q и t. Согласно теореме Эйлера, имеем

$$2T_2 = \sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i, \quad T_1 = \sum \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Складывая эти два равенства, получаем

$$2T_2 + T_1 = \sum \frac{\partial (T_2 + T_1)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

так как T_0 не зависит от $\dot{q}$. Тогда, учитывая формулу (1), можем записать

$$2T_2 + T_1 = \sum_i^k p_i \dot{q}_i. \tag{6}$$

Возвращаясь к формуле (2), мы видим, что ее правая часть является функцией q, $\dot{q}$, t. Поэтому независимым вариациям δq и $\delta \dot{q}$ будут соответствовать вариации δp_i импульсов p_i, определяемые формулой

$$\delta p_i = \sum_j (A_{ij} \delta q_j + B_{ij} \delta \dot{q}_j), \tag{7}$$

где в общем случае A и B — функции q, $\dot{q}$, t, или, согласно равенствам (3), функции от q, p, t.

Число уравнений (7) равно k. Поэтому они могут быть разрешены относительно вариаций $\delta \dot{q}$. Это даст

$$\delta \dot{q}_i = \sum_j (C_{ij} \delta q_j + D_{ij} \delta p_j), \tag{8}$$

где C и D — функции q, $\dot{q}$, t или q, p, t.

Первоначально мы рассматривали δq и $\delta \dot{q}$ как независимые вариации. Но ясно, что в качестве независимых вариаций мы можем рассматривать также δq и δp, а вариации $\delta \dot{q}$ будут определяться при этом формулой (8). Кроме того, вариация функции не зависит от того, через какую пару переменных она выражена: q, $\dot{q}$ или q, p.

Далее из равенства (6) будем иметь

$$2\delta T_2 + \delta T_1 = \sum \dot{q}_i \delta p_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i,$$

а из формулы (5) с учетом выражения (1) находим

$$\delta T \equiv \delta T_2 + \delta T_1 + \delta T_0 = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i.$$

Вычитая эти равенства друг из друга и полагая

$$T^* = T_2 - T_0, \tag{9}$$

получаем

$$\delta T^* = \sum \dot{q}_i \delta p_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{10}$$

Теперь функцию T^*, зависящую от q, $\dot{q}$, t, можно при помощи формулы (3) выразить через q, p, t. Мы получим

$$\delta T^* = \sum \frac{\partial T^*(q, p, t)}{\partial p_i} \delta p_i + \sum \frac{\partial T^*(q, p, t)}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{11}$$

Мы теперь имеем для δT^* два выражения — (10) и (11). Они должны быть одинаковыми, и, следовательно, приравнивая коэффициенты при δp и δq, которые являются независимыми, мы получим

$$\dot{q}_i = \frac{\partial T^*(q, p, t)}{\partial p_i} \tag{12}$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial T^*(q, p, t)}{\partial q_i}. \tag{13}$$

Второе из равенств (13) замечательное. Перепишем его подробнее:

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = -\frac{\partial [\overline{T}_2(q, p, t) - T_0(q, p, t)]}{\partial q_i}.$$

Заметим, что, хотя T_2 и есть однородная квадратичная функция производных $\dot{q}$, $\overline{T}(q, p, T)$ *не* является в общем случае однородной квадратичной функцией импульсов p.

Пусть

$$H = T^* - U = \overline{T}_2 - T_0 - U. \tag{14}$$

Тогда H будет функцией от q, p, t. Она называется ***функцией Гамильтона***.

Так как U не содержит $\dot{q}$ и, следовательно, не содержит p, то формула (12) принимает вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}. \tag{15}$$

С другой стороны, согласно формуле (1), имеем

$$\dot{p}_i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Последнее уравнение при помощи формулы Лагранжа (8) § 8.04 принимает вид

$$\dot{p}_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

или, согласно формуле (13),

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Поэтому при помощи формулы (14) получаем

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \tag{16}$$

Из § 8.04 следует, что каждое из уравнений Лагранжа имеет второй порядок, так же как и уравнения (1) § 8.04, записанные в прямоугольных координатах. Прием, использованный в этом параграфе, позволяет заменить $\dot{q}$ новыми переменными p, в результате чего k уравнений Лагранжа второго порядка заменяются $2k$ уравнениями (15) и (16) первого порядка. Перепишем для удобства эти уравнения в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \tag{17}$$

Эти уравнения и называются *каноническими уравнениями Гамильтона.*

В каждой конкретной задаче, в которой известно выражение функции U через прямоугольные координаты, форма функции Гамильтона $H(q, p, t)$ также известна, как это легко видеть, рассматривая последовательные преобразования функции T, определяемой равенством (6) § 8.04.

Теоретические рассуждения этого параграфа будут подробно проиллюстрированы в § 8.08.

§ 8.07. Интеграл энергии

Если преобразование прямоугольных координат в обобщенные координаты не содержит времени, т. е. если $x = x(q)$, то T также не содержит времени явно, так что $T = T_2$ и, кроме того, U будет функцией только величин q. Так как $p = \partial T/\partial \dot{q}$, то выражение для p через q и $\dot{q}$ не будет содержать времени явно и, следовательно, $H = H(q, p)$. Поэтому, используя уравнения (17) § 8.06, получаем

$$\dot{H} = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0.$$

Следовательно,

$$H \equiv T - U = \text{const}.$$

Это равенство и есть интеграл энергии, полученный при указанных условиях, причем T — кинетическая энергия, а $-U$ — потенциальная энергия.

§ 8.08. Пример (продолжение)

В § 8.05 мы получили уравнения Лагранжа, описывающие движение точки P. В этом параграфе мы выведем соответствующие канонические уравнения. Будем исходить из равенств (8) и (7) § 8.05, полагая, однако, как и в общей теории,

$$\xi \equiv q_1, \quad \eta \equiv q_2.$$

Тогда эти равенства примут вид

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2n(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2) + n^2(q_1^2 + q_2^2)\right], \tag{1}$$

$$U = GM\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{2}$$

где r_1 и r_2 — функции q_1 и q_2.

Далее

$$p_1 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - nq_2, \quad p_2 \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 + nq_1.$$

Отсюда

$$\dot{q}_1 = p_1 + nq_2, \quad \dot{q}_2 = p_2 - nq_1. \tag{3}$$

Из формулы (1) находим

$$T_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{4}$$

и

$$T_0 = \frac{1}{2} n^2 (q_1^2 + q_2^2). \tag{5}$$

Используя формулы (3) и (4), получаем

$$T^* = \overline{T}_2 - T_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 2nq_2p_1 - 2nq_1p_2). \tag{6}$$

Функция Гамильтона H будет тогда выражаться формулой

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 2nq_2p_1 - 2nq_1p_2) - U. \tag{7}$$

Применяя теперь формулы (17) § 8.06, получаем канонические уравнения в виде

$$\dot{q}_1 = p_1 + nq_2, \qquad \dot{q}_2 = p_2 - nq_1, \tag{8}$$

$$\dot{p}_1 = np_2 + \frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad \dot{p}_2 = -np_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}. \tag{9}$$

Два уравнения Лагранжа (5) и (6) § 8.05, каждое из которых второго порядка, заменены теперь четырьмя каноническими уравнениями, каждое из которых первого порядка.

Примечание. Из формулы (1), согласно уравнениям (3), находим

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = n\dot{q}_2 + n^2q_1 = np_2.$$

Из равенства (6) имеем

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_1} = -np_2.$$

Мы, таким образом, получаем подтверждение общей формулы (13) § 8.06 для координаты q_1 и (при помощи аналогичного приема) для координаты q_2.

§ 8.09. Формальное решение канонических уравнений

Канонические уравнения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$. Мы покажем, что общее решение этих уравнений может быть получено, если мы знаем некоторую функцию S, удовлетворяющую уравнению в частных производных, которое обычно называют *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Канонические уравнения (1) представляют собой систему $2k$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что они полностью решены. Тогда любое q и любое p будут выражены в виде функций времени и $2k$ постоянных интегрирования, которые мы обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$. Мы можем, таким образом, написать

$$q_i = q_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2k}) \tag{2}$$

и аналогично

$$p_i = p_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2k}). \tag{3}$$

В уравнениях (1) функция Гамильтона H выражена через q, p, t. Если мы подставим вместо q и p их выражения из соотношений (2) и (3), то H станет функцией t и c. Мы тогда будем иметь

$$H(c, t) \equiv H(q, p, t),$$

откуда, дифференцируя по c_j, находим

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial c_j} = -\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial c_j},$$

или, выполняя простое преобразование,

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i. \tag{4}$$

Но из формулы (6) § 8.06 имеем

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T_2 + T_1,$$

а из формулы (14) § 8.06 —

$$H = T_2 - T_0 - U.$$

Поэтому равенство (4) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j}(T_2 + T_1 + T_0 + U) = \frac{\partial}{\partial c_j}(T + U). \tag{5}$$

Пусть функция $S(c, t)$ определяется уравнением

$$\frac{dS}{dt} = T + U. \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j}.$$

Умножим это уравнение на вариацию δc_j и просуммируем все такие уравнения по j от 1 до $2k$. Тогда получим

$$\sum_1^{2k} \frac{\partial}{\partial c_j}\left(\frac{dS}{dt}\right)\delta c_j = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} p_i \left(\sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial c_j}\delta c_j\right). \qquad (7)$$

Из соотношения (2) находим

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial c_j}\delta c_j. \qquad (8)$$

Аналогично найдем, что левая часть уравнения (7) равна $\delta(dS/dt)$ или, на основании равенства (6) § 8.01, $(d/dt)(\delta S)$. Поэтому уравнение (7) примет вид

$$\frac{d}{dt}(\delta S) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} p_i \delta q_i.$$

Интегрируя, получаем

$$\delta S = \sum_{i=1}^{k} p_i \delta q_i + C, \qquad (9)$$

где C — постоянная.

Форма этого уравнения наводит на мысль о преобразовании функции $S(c, t)$.

Мы разделим $2k$ постоянных c на две группы: а) c_j и б) c_{k+j}, где в каждой из групп $j = 1, 2, \ldots, k$. Для удобства обозначим члены первой группы через α_j, а члены второй группы — через γ_j, так что $\alpha_j \equiv c_j$ и $\gamma_j \equiv c_{k+j}$.

Тогда равенство (2) примет вид

$$q_i = q_i(t, \alpha, \gamma). \qquad (10)$$

Число таких уравнений равно k, причем предполагается, что они разрешимы относительно γ, т. е. что мы можем представить любое γ в виде

$$\gamma_j = \gamma_j(q, \alpha, t). \qquad (11)$$

Согласно равенству (10), k вариациям $\delta\alpha$ и k вариациям $\delta\gamma$ соответствует следующее соотношение:

$$\delta q_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\delta\alpha_j + \sum \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_j}\delta\gamma_j. \qquad (12)$$

Таким образом, имеется k уравнений типа (12), из которых каждое $\delta\gamma$ может быть выражено через k вариаций $\delta\alpha$ и k вариаций δq, причем последние могут рассматриваться как независимые.

В наших новых обозначениях функция $S(c, t)$ примет вид $S(\alpha, \gamma, t)$, а затем посредством равенства (11) преобразуется к виду $S(q, \alpha, t)$. Поэтому

$$\delta S = \sum_1^k \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_1^k \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i. \tag{13}$$

Выражения для δS в формулах (9) и (13) должны быть тождественны. В частности, C должно иметь вид

$$C = \sum_1^k \beta_i \delta \alpha_i,$$

где β — постоянные величины.

Так как δq и $\delta \alpha$ представляют произвольные вариации, то сравнение равенств (9) и (13) показывает, что

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \tag{14}$$

и

$$\beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \tag{15}$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$.

Предположим, что каким-либо способом мы нашли функцию $S(q, \alpha, t)$, которую мы назовем *характеристической функцией*. Тогда k уравнений (15) могут быть решены относительно k координат q, которые в результате этого будут выражены через k постоянных α и k постоянных β в виде функциональной зависимости $q = q(t, \alpha, \beta)$. Подставляя ее затем в равенство (14), находим p в виде $p = p(t, \alpha, \beta)$. Это и дает формальное решение канонических уравнений.

Постоянные α и β называются *каноническими постоянными*, причем β является *канонически сопряженной* по отношению к α, и наоборот.

Кроме того, мы можем назвать q_i и p_i парой *сопряженных переменных*.

§ 8.10. Уравнение Гамильтона — Якоби для S

Мы теперь выведем уравнение в частных производных, называемое часто уравнением Гамильтона — Якоби, которому удовлетворяет характеристическая функция $S(q, \alpha, t)$. По определению (6) § 8.09, $dS/dt = T + U$.

Однако

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + \sum_1^k \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i,$$

Поэтому, согласно равенству (14) § 8.09, имеем

$$T+U=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{1}^{k} p_i\dot{q}_i.$$

Но согласно формуле (6) § 8.06,

$$2T_2+T_1=\sum_{1}^{k} p_i\dot{q}_i.$$

Составляя разность этих равенств и учитывая, что $T=T_2+$ $+T_1+T_0$, мы получим

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T_2-T_0-U=0.$$

Но так как, согласно формуле (14) § 8.06, H определяется формулой

$$H(q,\ p,\ t)=T_2-T_0-U,$$

причем

$$T_2=T_2(q,\ p,\ t)=\overline{T}_2,$$

то

$$\frac{\partial S(q,\ \alpha,\ t)}{\partial t}+H(q,\ p,\ t)=0.$$

А согласно формуле (14) § 8.09, имеем

$$p_i=\frac{\partial S(q,\ \alpha,\ t)}{\partial q_i}.$$

Следовательно, S есть решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right)=0, \tag{1}$$

содержащее полное число (т. е. k) постоянных интегрирования α, причем мы отбрасываем аддитивную постоянную, скажем α_0.

В любой конкретной задаче точный вид $H(q,\ p,\ t)$ известен, ибо кинетическая энергия T, которая дается формулой (4) § 8.03, является, как отмечалось, известной функцией $\dot{q}$; и, в частности, $T_2(q,\ \dot{q},\ t)$ — известная функция $\dot{q}$ и T_0 — известная функция q, t. Кроме того, определение импульсов p по формулам (1) и (2) § 8.06 показывает, что любое p_i является известной линейной функцией $\dot{q}$. Из этих k линейных зависимостей величины $\dot{q}_i$ можно выразить в виде линейных функций p. Когда эти последние выражения будут подставлены в $T_2(q,\ \dot{q},\ t)$, мы получим T_2 в виде известной функции от q, p, t. Наконец, так как U — известная функция, то $H (\equiv T_2 - T_0 - U)$ будет также известной функцией от q, p, t.

§ 8.11. Общие замечания о канонических постоянных

В § 8.09 начальная совокупность $2k$ постоянных интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$ носила совершенно общий характер, т. е. не зависела от частного метода получения самого решения.

Рассмотрим сначала простую задачу движения частицы по прямой линии согласно уравнению движения $\ddot{x} = -x$. Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\text{а)}\ x = \alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t,$$

или

$$\text{б)}\ x = b \sin (t + \tau).$$

Постоянными интегрирования, которые должны быть отождествлены с c_1 и c_2, в первом случае являются α_1 и α_2, а во втором — b и τ. Таким образом, постоянные c_1 и c_2 имеют две различные интерпретации в зависимости от двух форм, или методов, получения решения.

Рассмотрим теперь более сложный пример, именно невозмущенное эллиптическое движение планеты. Если мы преобразуем прямоугольные координаты планеты в обобщенные координаты q (например, полярные координаты), то полученные в результате этого канонические уравнения, как будет показано в гл. 9, могут быть легко решены. Принимая для постоянных интегрирования систему обозначений $c_i \equiv \alpha_i$ и $c_{k+i} \equiv \gamma_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, мы можем записать решение в виде

$$q_i = q_i (t, \alpha, \gamma), \quad p_i = p_i (t, \alpha, \gamma), \tag{1}$$

где $i = 1, 2, 3$. В момент t_0

$$(q_i)_0 = q_i (t_0, \alpha, \gamma) \quad \text{и} \quad (p_i)_0 = p_i (t_0, \alpha, \gamma);$$

число этих уравнений равно шести, и легко видеть, что после исключения из них трех величин γ оставшиеся три уравнения могут быть разрешены относительно α_i. Это даст

$$\alpha_i = \alpha_i (t_0, q_0, p_0). \tag{2}$$

Аналогично

$$\gamma_i = \gamma_i (t_0, q_0, p_0). \tag{3}$$

Здесь α и γ — функции от обобщенных координат и импульсов в начальный момент t_0. Легко видеть тогда, что решение (1) может быть записано в виде

$$q_l = q_l(t,\ q_0,\ p_0), \quad p_l = p_l(t,\ q_0,\ p_0).$$

Очевидно, что $2k$ постоянных интегрирования можно интерпретировать а) как k величин $(q_l)_0$ и k величин $(p_l)_0$, или б) как функции α и γ от q_0 и p_0, выражаемые формулами (2) и (3), или в) в еще более общем случае, как *любые* $2k$ независимых функций от q_0 и p_0.

Теорема, которая будет доказана в следующем параграфе, относится к решениям канонических уравнений, когда постоянные интегрирования, входящие в $S(q,\ \alpha,\ t)$, принимают любую из возможных форм, отмеченных ранее.

§ 8.12. Теорема Якоби

Эта теорема состоит в следующем.

Если $S(q,\ \alpha,\ t)$ — *любой* полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ t\right) = 0, \tag{1}$$

выраженный через время t, k величин q и k независимых постоянных интегрирования $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k$, и полученный любым методом, то уравнения

$$\frac{\partial S(q,\ \alpha,\ t)}{\partial \alpha_l} = \beta_l \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial S(q,\ \alpha,\ t)}{\partial q_l} = p_l, \tag{3}$$

где $l = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, определяют общее решение $2k$ канонических уравнений

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H(q,\ p,\ t)}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H(q,\ p,\ t)}{\partial q_l}. \tag{4}$$

В уравнениях (2) величины β — независимые постоянные, и также предполагается, что функции p_l независимы.

Так как функция S известна, то группа уравнений (2) дает нам возможность найти любую координату q в виде

$$q_l = q_l(t,\ \alpha,\ \beta). \tag{5}$$

Тогда из уравнений (3) мы можем получить p_l в виде

$$p_l = p_l(t,\ \alpha,\ \beta). \tag{6}$$

Продифференцируем равенства (2) по t. Тогда, так как q — функция t, мы получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j}\dot{q}_j=0,$$

или, используя уравнение (3),

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{j}\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}\dot{q}_j=0. \tag{7}$$

Подставим вместо p их значения из формул (6) в уравнение

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t}+H(q, p, t)=0 \tag{8}$$

и продифференцируем по α_i. Тогда

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=0. \tag{9}$$

Вычитая равенство (9) из равенства (7), получаем

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=0. \tag{10}$$

Обозначая $\dot{q}_j-(\partial H/\partial p_j)$ через x_j и полагая последовательно $i=1, 2, \ldots, k$, мы будем иметь k уравнений, линейных относительно x:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}x_1+\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}x_2+\ldots+\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1}x_k=0,\\
&\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2}x_1+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_2}x_k=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}x_1+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_k}x_k=0.
\end{aligned}$$

Так как $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — независимые функции, то

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_k)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}\neq 0$$

или, выражаясь иначе, определитель k-го порядка, составленный из коэффициентов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не равен нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$x_1=x_2=\ldots=x_k=0,$$

т. е.

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad (i=1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

С другой стороны, продифференцируем соотношение (3) по t. Тогда

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial q_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j\, \partial q_i} \dot{q}_j,$$

или, используя равенство (11),

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_j\, \partial q_i}. \tag{12}$$

Кроме того, при помощи соотношений (3) можно представить p_i в виде $p_i = p_i(q, \alpha, t)$. Поэтому, дифференцируя уравнение (8) по q_i и замечая, что H содержит q_i как явным образом, так и через посредство p, мы получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0. \tag{13}$$

Так как, согласно формуле (3),

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i\, \partial q_j},$$

то из уравнений (12) и (13) мы немедленно получаем

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{14}$$

Так как уравнения (11) и (14) являются каноническими уравнениями, то теорема доказана.

§ 8.13. Частные случаи уравнения Гамильтона — Якоби

1) *H — функция только q и p.*

В этом случае t не входит явно в H, так что $H \equiv H(q, p)$. Тогда, так как

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

то, как и в § 8.07, существует интеграл энергии

$$H = \text{const} = \alpha_1.$$

Из уравнения Гамильтона — Якоби имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1. \tag{1}$$

Поэтому

$$S = -\alpha_1 t + S_1,$$

где S_1 — функция, не содержащая явно t.

2) *В H отсутствует одна координата q_i.*

Если q_i не входит явно в H, то

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Поэтому $\dot{p}_i = 0$ и, следовательно,

$$p_i = \text{const} = \alpha_j \quad (j \neq 1).$$

Мы тогда имеем

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \alpha_j; \tag{2}$$

поэтому

$$S = \alpha_j q_i + S_2,$$

где S_2 — функция, не содержащая q_i.

3) *H не содержит одной координаты q_i и времени t.*

Очевидно, что S будет иметь вид

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_j q_i + S' \quad (j \neq 1), \tag{3}$$

где S' не содержит ни t, ни q_i.

§ 8.14. Пример

В этом параграфе мы продолжим пояснение общего метода на примере, рассмотренном в §§ 8.05 и 8.08. Перепишем формулу (8) § 8.08 для H в виде

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + 2nq_2p_1 - 2nq_1p_2\right) - U =$$
$$= \frac{1}{2}(p_1 + nq_2)^2 + \frac{1}{2}(p_2 - nq_1)^2 - \frac{1}{2}n^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) - U. \tag{1}$$

Уравнение Гамильтона — Якоби тогда примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1} + nq_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2} - nq_1\right)^2 - \frac{1}{2}n^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) - U = 0. \tag{2}$$

Так как t не входит явно в формулу (1), то, согласно соотношению (1) § 8.13, будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\alpha_1$$

и, таким образом, после подстановки $-\alpha_1$ вместо $\partial S/\partial t$ в уравнение (2) уравнение Гамильтона — Якоби запишется в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1} + nq_2\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} - nq_1\right)^2 = n^2(q_1^2 + q_2^2) + 2U + 2\alpha_1. \tag{3}$$

Так как в этом примере две степени свободы, то общее число постоянных интегрирования будет равно четырем, именно α_1 и α_2 β_1 и β_2.

Математически задача, следовательно, состоит в том, чтобы выразить $\partial S/\partial q_1$ и $\partial S/\partial q_2$, удовлетворяющие уравнению (3), через t, q_1, q_2 и постоянные интегрирования α_1 и α_2. Как оказывается в этом примере, форма зависимости функции U от q_1 и q_2 такова, что мы не можем найти выражений для $\partial S/\partial q_1$ и $\partial S/\partial q_2$, идя по пути, указанному общей теорией. Но формально мы можем определить функцию S, предполагая, что $\partial S/\partial q_1$ и $\partial S/\partial q_2$ получены из уравнения (3) и выражены через постоянные α_1 и α_2. Мы будем иметь при этом

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial S}{\partial q_2}\dot{q}_2,$$

так что S задается формулой

$$S = -\alpha_1 t + \int \frac{\partial S}{\partial q_1} dq_1 + \int \frac{\partial S}{\partial q_2} dq_2,$$

причем аддитивная постоянная отброшена. Формальное решение задачи тогда будет следовать из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i,$$

где $i = 1, 2$.

§ 8.15. Общее применение метода Гамильтона — Якоби

Общее применение метода Гамильтона — Якоби в теориях движения планет и Луны основано на предположении, что канонические уравнения могут быть решены описанным выше методом, если в уравнения входит только некоторая часть функции Гамильтона H. Таким образом, если мы напишем

$$H = H_0 + (H - H_0) \tag{1}$$

и решим уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \tag{2}$$

методом Гамильтона, выразив это решение через канонические постоянные α и β, то мы сможем получить, как скоро увидим, новые канонические уравнения, в которых новой функцией Гамильтона будет служить разность $H - H_0$, фигурирующая в формуле (1). Удобно записать формулу (1) в виде

$$H = H_0 - H_1,$$

где

$$H_1 = -(H - H_0). \tag{3}$$

Для того чтобы решить уравнения (2), нам нужно найти функцию $S(q, \alpha, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{4}$$

Мы предполагаем (как и раньше), что решение уравнения (4) известно. Тогда решение канонических уравнений дается формулами

$$\beta_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_r}, \quad p_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_r}, \tag{5}$$

из которых любое q_i и p_i может быть найдено в виде

$$q_i = q_i(t, \alpha, \beta), \quad p_i = p_i(t, \alpha, \beta). \tag{6}$$

В последних формулах α и β — сопряженные канонические постоянные.

В согласии с формулами (6) мы можем переписать уравнения (2) в виде

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \tag{7}$$

Метод, который теперь будет излагаться, в принципе аналогичен тому, который уже использовался при выводе уравнений Лагранжа в гл. 5.

Пусть α и β рассматриваются как новые переменные, заменяющие первоначальные переменные q и p, согласно формулам (6), т. е. q и p выражаются через новые переменные α и β таким же образом, каким они получались при решении уравнений (2) или (7), т. е. формулами (6).

Первоначальные канонические уравнения таковы:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Эти уравнения посредством формул (6), в которых α и β — новые переменные, и при помощи равенства (3) принимают вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+\sum_r\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=\frac{\partial (H_0-H_1)}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_r\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=-\frac{\partial (H_0-H_1)}{\partial q_1}.$$

Поэтому в силу уравнений (7) имеем

$$\sum_r\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=-\frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \tag{8}$$

$$\sum_r\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r+\frac{\partial p_i}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right)=\frac{\partial H_1}{\partial q_i}. \tag{9}$$

Первоначально H_1 была функцией q, p. При помощи формул (6) она может быть представлена как функция новых переменных α и β. Следовательно,

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}=\sum_i\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial H_1}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j}\right)$$

и, используя уравнения (8) и (9), имеем

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}=\sum_r\left[\dot{\alpha}_r\sum_i\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\alpha_i, \alpha_r)}+\dot{\beta}_r\sum_i\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\alpha_j, \beta_r)}\right]. \tag{10}$$

Обозначим

$$\sum_i\frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\alpha_j, \alpha_r)}\quad\text{через}\quad [\alpha_j, \alpha_r]. \tag{11}$$

Аналогичное обозначение введем и для коэффициента при $\dot{\beta}_r$. Выражения такого вида мы будем называть *обобщенными скобками Лагранжа*. Теперь формула (10) запишется в виде

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}=\sum_r\dot{\alpha}_r\,[\alpha_j, \alpha_r]+\sum_r\dot{\beta}_r\,[\alpha_j, \beta_r]. \tag{12}$$

Аналогично

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}=\sum_r\dot{\alpha}_r\,[\beta_j, \alpha_r]+\sum_r\dot{\beta}_r\,[\beta_j, \beta_r]. \tag{13}$$

Используем далее равенства (5). Пусть $S(q, \alpha, t)$ при помощи первой группы равенств (6) преобразуется в функцию от t, α, β.

Обозначим эту функцию через $S'(t, \alpha, \beta)$. Так как $S(q, \alpha, t)$ содержит α_j явно, то мы имеем

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_j} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j},$$

или, с учетом формул (5),

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \beta_j + \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}. \tag{14}$$

Аналогично

$$\frac{\partial S'}{\partial \beta_j} = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}. \tag{15}$$

Теперь, применив формулу (14), получим

$$[\alpha_j, \alpha_r] = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left(\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \beta_j \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial S'}{\partial \alpha_r} - \beta_r \right).$$

Так как α и β независимы, то $[\alpha_j, \alpha_r] = 0$ и вообще все скобки такого вида равны нулю.

С другой стороны, используя равенство (15), мы найдем, что

$$[\beta_j, \beta_r] = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left(\frac{\partial S'}{\partial \beta_j} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\frac{\partial S'}{\partial \beta_r} \right) = 0.$$

Таким образом, все скобки такого типа обращаются в нуль. Наконец

$$[\alpha_j, \beta_r] \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left(\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \beta_j \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{\partial S'}{\partial \beta_r} \right).$$

Поэтому

$$[\alpha_j, \beta_r] = 0, \quad \text{если} \quad r \neq j$$

и

$$[\alpha_j, \beta_j] = -1$$

или, в соответствии с определением,

$$[\beta_j, \alpha_j] = 1.$$

Из уравнений (12) и (13) мы тогда будем иметь

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \quad \dot{\beta}_j = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}. \tag{16}$$

Эти уравнения являются каноническими. Такие рассуждения, очевидно, могут быть распространены на решение уравнений (16) с новой функцией Гамильтона, в качестве которой принята некоторая часть функции H_1.

§ 8.16. Канонические уравнения возмущенного движения

Будем исходить из уравнений возмущенного движения планеты, заданных в прямоугольных координатах. Для координаты x имеем

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{1}$$

где R — возмущающая функция. R — функция m_1, x_1, y_1, z_1 (массы и координат возмущающей планеты P_1) и координат x, y, z планеты P. Мы предполагаем, что x_1, y_1 и z_1 выражены через время и эллиптические элементы орбиты планеты P_1. Тогда

$$R = R(x, y, z, t).$$

Силовая функция U и кинетическая энергия T, входящие в общую теорию, в данном случае определяются формулами

$$U = \frac{m\mu}{r} + mR, \quad T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В уравнении (1) множитель m отсутствует и поэтому функции U и T (как в примере § 8.05, где на множитель m было произведено сокращение) следует определить формулами

$$U = \frac{\mu}{r} + R = U_0 + R, \tag{2}$$

где

$$U_0 = \frac{\mu}{r}$$

и

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Выражая x, y, z через три обобщенные координаты q_1, q_2, q_3 при помощи уравнений типа $x = x(q, t)$ мы преобразуем три уравнения вида (1) в три пары канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

где

$$H = \bar{T}_2 - T_0 - U = H_0 - R, \tag{4}$$

причем

$$H_0 = \bar{T}_2 - T_0 - U_0.$$

Если пренебречь функцией R, то канонические уравнения будут иметь вид уравнений (3), в которых функция H заменена функцией H_0. Решение для q_i тогда будет выражаться формулами $q_i = q_i(t, \alpha, \beta)$, где α и β — канонические постоянные. Функции p_i определятся аналогичными формулами. Канонические постоянные, таким образом, появляются при решении уравнений невозмущенного движения и, очевидно, в общем случае представляют функции шести элементов орбиты.

Сравнение равенства (4) с равенством (3) § 8.15 показывает, что если α и β рассматривать теперь как переменные, то соответствующие канонические уравнения, аналогичные уравнениям (16) § 8.15, имеют вид

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial R}{\partial \beta_l}, \quad \dot{\beta}_l = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_l}. \tag{5}$$

Этот процесс может быть распространен и дальше. Так, если мы положим $R = R_0 - R_1$ и решим уравнения (5), приняв R_0 в качестве функции Гамильтона, то получатся новые канонические постоянные a_l, b_l, и тогда они, рассматриваемые как новые переменные, будут удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{a}_l = \frac{\partial R_1}{\partial b_l}, \quad \dot{b}_l = -\frac{\partial R_1}{\partial a_l}.$$

Описанный метод был развит Делонэ в его теории Луны, причем указанный им процесс может быть продолжен до тех пор, пока все члены возмущающей функции не будут исчерпаны.

§ 8.17. Соотношения Якоби

Мы предположим, без ограничения общности, что, как и в § 8.15, α_i и β_i представляют k пар канонических постоянных, появляющихся при решении уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Как мы видели, решение тогда дается в виде

$$q_i = q_i(t, \alpha, \beta), \quad p_i = p_i(t, \alpha, \beta). \tag{1}$$

Эти уравнения могут быть в принципе решены относительно величины α и β. В результате α и β будут выражены через q, p, t в виде

$$\alpha_r = \alpha_r(q, p, t), \quad \beta_r = \beta_r(q, p, t). \tag{2}$$

Якоби получил четыре замечательных соотношения между производными q и p (выраженными через α и β) по α и β и производными α и β (выраженными через q и p) по q и p.

Мы предположим, как и в § 8.15, что первоначальная функция представлена в виде $H_0 - H_1$, где H_0 и H_1 — функции q, p, t.

Если α и β рассматриваются как новые переменные, то мы получаем уравнения (8) и (9) § 8.15. Они имеют вид

$$\sum_r \left(\frac{\partial q_l}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_l}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = -\frac{\partial H_1}{\partial p_l}, \tag{3}$$

$$\sum_r \left(\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_l}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = \frac{\partial H_1}{\partial q_l}. \tag{4}$$

Далее из уравнений (16) § 8.15 следует, что величины α и β удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r}, \tag{5}$$

в которых $H_1 = H_1(t, \alpha, \beta)$.

Пусть δq_l и δp_l суть независимые вариации q_l и p_l ($l = 1, 2, \ldots, k$). Тогда вариация δH_1, если $H_1 = H_1(q, p, t)$, будет выражаться формулой

$$\delta H_1 = \sum_l \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial H_1}{\partial p_l} \delta p_l \right),$$

или, согласно формулам (3) и (4),

$$\delta H_1 = \sum_l \sum_r \delta q_l \left(\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_l}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) - \\ - \sum_l \sum_r \delta p_l \left(\frac{\partial q_l}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_l}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right). \tag{6}$$

Согласно соотношениям (2), вариации $\delta\alpha_r$, $\delta\beta_r$ выражаются формулами

$$\delta\alpha_r = \sum_l \left(\frac{\partial \alpha_r}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_l} \delta p_l \right) \tag{7}$$

и

$$\delta\beta_r = \sum_l \left(\frac{\partial \beta_r}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial \beta_r}{\partial p_l} \delta p_l \right). \tag{8}$$

Кроме того, если $H_1 = H_1(t, \alpha, \beta)$, то, согласно формулам (5), имеем

$$\delta H_1 = \sum_r \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r} \delta\alpha_r + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r} \delta\beta_r \right) = \sum_r (\dot{\alpha}_r \delta\beta_r - \dot{\beta}_r \delta\alpha_r).$$

Поэтому при помощи формул (7) и (8) получаем

$$\delta H_1 = \sum_l \sum_r \delta q_l \left(\frac{\partial \beta_r}{\partial q_l} \dot{\alpha}_r - \frac{\partial \alpha_r}{\partial q_l} \dot{\beta}_r \right) + \sum_l \sum_r \delta p_l \left[\frac{\partial \beta_r}{\partial p_l} \dot{\alpha}_r - \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_l} \dot{\beta}_r \right]. \quad (9)$$

Правые части формул (6) и (9) должны быть тождественно равны друг другу; и так как δq_l и δp_l — независимые вариации, то коэффициенты при δq_l в формулах (6) и (9) должны быть равны. Аналогично коэффициенты при δp_l также должны быть равными. Мы тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\sum_r \left(\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial \beta_r}{\partial q_l} \right) \dot{\alpha}_r + \sum_r \left(\frac{\partial p_l}{\partial \beta_r} + \frac{\partial \alpha_r}{\partial q_l} \right) \dot{\beta}_r = 0, \quad (10)$$

$$\sum_r \left(\frac{\partial q_l}{\partial \alpha_r} + \frac{\partial \beta_r}{\partial p_l} \right) \dot{\alpha}_r + \sum_r \left(\frac{\partial q_l}{\partial \beta_r} - \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_l} \right) \dot{\beta}_r = 0. \quad (11)$$

Теперь соотношения (10) и (11) можно рассматривать как k уравнений для $\dot{\alpha}$ и k уравнений для $\dot{\beta}$. Так как эти величины независимы, то коэффициенты при $\dot{\alpha}_r$ и $\dot{\beta}_r$ как в (10), так и в (11) должны быть равны нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \beta_r}{\partial q_l}; \qquad \frac{\partial p_l}{\partial \beta_r} = -\frac{\partial \alpha_r}{\partial q_l}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_l}{\partial \alpha_r} = -\frac{\partial \beta_r}{\partial p_l}; \qquad \frac{\partial q_l}{\partial \beta_r} = \frac{\partial \alpha_r}{\partial p_l}. \quad (13)$$

Эти соотношения, полученные Якоби, связывают пары сопряженных переменных q и p и пары сопряженных постоянных α и β.

Из формул (12) и (13) мы тотчас же получаем

$$\frac{\partial (q_l, p_l)}{\partial (\alpha_r, \beta_r)} = \frac{\partial (\alpha_r, \beta_r)}{\partial (q_l, p_l)}. \quad (14)$$

Глава 9

КАНОНИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 9.01. Определение функции S

В этой главе мы решим уравнения невозмущенного движения планеты методом Гамильтона — Якоби. Это, во-первых, даст возможность проиллюстрировать в деталях сам метод и, во-вторых, получить важные соотношения между элементами орбиты и каноническими

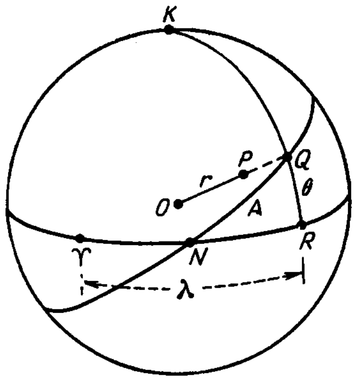

Рис. 21.

постоянными, которые появляются в ходе решения задачи. Сначала мы получим функцию S, удовлетворяющую уравнению Гамильтона — Якоби в частных производных.

Пусть x, y, z — прямоугольные координаты планеты P с массой m относительно эклиптической системы координат с началом O в центре Солнца, причем массу Солнца обозначим через m_0. Пусть на рис. 21 r — радиус-вектор OP, λ — эклиптическая долгота ΥR и θ — соответствующая широта RQ. Тогда

$$x = r\cos\lambda\cos\theta, \quad y = r\sin\lambda\cos\theta, \quad z = r\sin\theta. \tag{1}$$

В качестве обобщенных координат q_1, q_2 и q_3 возьмем соответственно r, λ и θ.

Уравнения движения в прямоугольных координатах имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r}\right) = \frac{\partial U_0}{\partial x}$$

плюс два аналогичных уравнения для y и z. Здесь $\mu = G(m + m_0)$ и в обозначениях § 8.16 $U_0 = \mu/r$. Кроме того, в этих же обозначениях $T = {}^1/_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, или после преобразования по формулам (1)

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \tag{2}$$

Это выражение для T является однородной квадратичной функцией величины $\dot{q}$. Поэтому $T_2 = T$ и $T_0 = 0$.

Как и в общей теории, p_1, p_2 и p_3 определяются следующим образом:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}}, \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}.$$

Следовательно,

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2\cos^2\theta \cdot \dot{\lambda}, \quad p_3 = r^2\dot{\theta}.$$

Если правую часть формулы (2) выразить через q и p, то она примет вид

$$T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2\cos^2\theta} + \frac{p_3^2}{r^2}\right).$$

Функция Гамильтона $H \equiv T_2 - T_0 - U_0$ выражается формулой

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2\cos^2\theta} + \frac{p_3^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}, \tag{3}$$

и уравнение Гамильтона — Якоби тогда запишется в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = 0. \tag{4}$$

Но t и λ не входят явно в уравнение (3), поэтому, согласно равенству (3) § 8.13, положим

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3\lambda + S'(r, \theta), \tag{5}$$

где S' — функция только от r и θ.

С учетом выражения (5) уравнение Гамильтона — Якоби (4) примет вид

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial \theta}\right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2\theta, \tag{6}$$

где переменные r и θ разделены, что позволяет записать S' в виде

$$S'(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta). \tag{7}$$

Очевидно, левая и правая части уравнения (6) равны некоторой постоянной, которую мы обозначим через α_2^2. Тогда

$$r^2\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2-2\alpha_1 r^2-2\mu r+\alpha_2^2=0 \tag{8}$$

и

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2+\alpha_3^2\sec^2\theta=\alpha_2^2. \tag{9}$$

Мы теперь имеем

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_3\lambda+S_1(r)+S_2(\theta), \tag{10}$$

где, согласно формуле (8),

$$S_1=\int\limits_{r_1}^{r}\sqrt{2\alpha_1 r^2+2\mu r-\alpha_2^2}\,\frac{dr}{r}, \tag{11}$$

причем величина r_1 будет выбрана ниже. Из уравнения (9) имеем

$$S_2=\int\limits_{0}^{\theta}\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\sec^2\theta}\,d\theta. \tag{12}$$

В качестве r_1 примем меньший из двух корней r_1 и r_2 уравнения

$$y\equiv 2\alpha_1 r^2+2\mu r-\alpha_2^2=0. \tag{13}$$

Мы будем предполагать, что r_1 и r_2 — действительные и положительные величины. Очевидно, что

$$r_1+r_2=-\frac{\mu}{\alpha_1},\qquad r_1 r_2=-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}, \tag{14}$$

так что, исключая r_2, найдем, что $r_1=r_1(\alpha_1, \alpha_2)$. Таким образом, $S_1(r)$ не вводит новой постоянной в решение (10). Аналогичное замечание относится и к $S_2(\theta)$. Выбор нижних пределов в каждом из интегралов (11) и (12) зависит от нас, так как, согласно теореме § 8.12, нам нужно найти *какую-нибудь* функцию S, удовлетворяющую уравнению (4) и содержащую три независимые произвольные постоянные. Эти последние суть α_1, α_2 и α_3.

Функция y, определяемая формулой (13), должна быть положительной, так как под знаком интеграла (11) содержится $y^{1/2}$. Но r_1 и r_2 положительны. Следовательно, на основании формул (14) α_1 отрицательна. Тогда мы можем написать

$$y^{1/2}=(-2\alpha_1)^{1/2}\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}, \tag{15}$$

и очевидно, что y будет не отрицательным для всех r, лежащих в пределах $r_1\leqslant r\leqslant r_2$.

Это ограничение, которому подчиняется величина радиус-вектора r, дает возможность предположить, что орбита является эллиптической, причем r_1 и r_2 соответствуют перигелию и афелию. Фактическое доказательство того, что орбита является эллиптической, будет дано позже.

§ 9.02. Формальное решение

Координаты r, λ, θ планеты для любого момента t определяются из равенств

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2.$$

Мы рассмотрим эти равенства в указанном порядке. Так как S_2 не содержит α_1, то из формулы (10) § 9.01 имеем

$$-t + \frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_1} = \beta_1. \tag{1}$$

Поскольку S_1 не содержит α_3, то

$$\lambda + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_3} = \beta_3 \tag{2}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_2} = \beta_2. \tag{3}$$

§ 9.03. Интеграл $\partial S/\partial \alpha_1 = \beta_1$

Из равенства (1) предыдущего параграфа имеем

$$t + \beta_1 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1},$$

где S_1 выражается формулой (11) § 9.01. Помня, что нижний предел r_1 интеграла есть функция от α_1, находим

$$t + \beta_1 = \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{y^{1/2}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{r}\sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}\right]_{r=r_1}.$$

Последний член в правой части равен нулю, так как r_1 — корень уравнения $y = 0$. Используя теперь формулу (15) § 9.01, получаем

$$t + \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}}. \tag{1}$$

Так как наша цель пока состоит просто в том, чтобы выразить канонические постоянные через эллиптические элементы, то из формулы (1) находим, что $t+\beta_1=0$, когда $r=r_1$. Следовательно, $\beta_1=-\tau$, где τ — момент прохождения через перигелий.

Выразим r_1 и r_2 через новые постоянные a и e формулами

$$r_1=a(1-e), \qquad r_2=a(1+e),$$

в которых a и e — соответственно большая полуось и эксцентриситет. Из равенств (14) § 9.01 мы тогда будем иметь

$$\alpha_1=-\frac{\mu}{2a}, \qquad \alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)}. \tag{2}$$

Перейдем теперь к вычислению интеграла правой части формулы (1). При этом будем руководствоваться известными формулами эллиптического движения. Пусть r определяется через новую переменную E по формуле

$$r=a(1-e\cos E),$$

так что $E=0$, когда $r=r_1$. Тогда

$$r-r_1=ae(1-\cos E),$$
$$r_2-r=ae(1+\cos E),$$
$$dr=ae\sin E\,dE$$

и формула (1) примет вид

$$\sqrt{-2\alpha_1}\,(t+\beta_1)=a\int\limits_0^E(1-e\cos E)\,dE$$

или

$$E-e\sin E=\frac{1}{a}\sqrt{-2\alpha_1}\cdot(t+\beta_1)\equiv n(t-\tau),$$

что, очевидно, является уравнением Кеплера. Поэтому

$$n=\frac{1}{a}\sqrt{-2\alpha_1},$$

так что из равенств (2) получим

$$\mu=n^2a^3.$$

Таким образом, в этом параграфе получены следующие формулы, выражающие связь между каноническими постоянными и эллиптическими элементами:

$$\beta_1=-\tau\equiv\frac{\chi}{n}, \qquad \alpha_1=-\frac{\mu}{2a}, \qquad \alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)}. \tag{3}$$

§ 9.04. Интеграл $\partial S/\partial\alpha_3 = \beta_3$

Из равенств (12) § 9.01 и (2) § 9.02 мы имеем

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial\alpha_3} = \lambda - \alpha_3 \int_0^\theta \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\theta}} =$$

$$= \lambda - \int_0^\theta \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\dfrac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_3^2} - \operatorname{tg}^2\theta}}. \tag{1}$$

Отсюда видно, что $|\alpha_2| > |\alpha_3|$. Определим φ формулой

$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = \alpha_3^2 \operatorname{tg}^2\varphi \tag{2}$$

и предположим, что φ есть положительный острый угол. Тогда после интегрирования равенство (1) примет вид

$$\beta_3 = \lambda - \arcsin\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right),$$

где $\varphi \geqslant |\theta|$. Отсюда

$$\sin(\lambda - \beta_3) = \operatorname{tg}\theta \operatorname{ctg}\varphi. \tag{3}$$

В прямоугольных координатах, определяемых формулами (1) § 9.01, это уравнение запишется следующим образом:

$$y\cos\beta_3 - x\sin\beta_3 = z\operatorname{ctg}\varphi,$$

откуда видно, что планета движется в плоскости, проходящей через Солнце. На рис. 21 эта плоскость пересекает небесную сферу по большому кругу.

Формула (3) показывает, что когда $\theta = 0$, то $\lambda - \beta_3 = 0°$ или $\lambda - \beta_3 = 180°$. Мы определим β_3 из первого равенства, так что β_3 будет долготой *восходящего* узла. Таким образом,

$$\beta_3 = \Omega. \tag{4}$$

Далее, формула (3) показывает, что максимальное значение θ равно φ. Но максимальное значение θ для точек большого круга есть наклонность большого круга к основной плоскости—плоскости эклиптики. Поэтому φ — наклонность i. Следовательно, из формулы (2) имеем

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i, \tag{5}$$

или, согласно последнему равенству (3) § 9.03,

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}\cos i. \tag{6}$$

Таким образом, связь постоянных β_3 и α_3 с кеплеровскими элементами дается формулами (4) и (6).

§ 9.05. Интеграл $\partial S/\partial\alpha_2 = \beta_2$

Из формул (3) § 9.02 и (11) и (12) § 9.01 имеем

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2\theta}} - \alpha_2 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r y^{1/2}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{y^{1/2}}{r}\right)_{r=r_1}. \tag{1}$$

Последний член в правой части равен нулю.

Рассмотрим первый член, который мы обозначим через I_1. Тогда при помощи равенства (2) § 9.04 найдем, что

$$I_1 = \alpha_2 \int_0^\theta \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \cos^2\theta}} = \int_0^\theta \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\theta}},$$

причем φ заменено на i. Поэтому

$$I_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sin i}\right).$$

Из треугольника QNR на рис. 21 имеем

$$\sin NQ = \frac{\sin\theta}{\sin QNR} = \frac{\sin\theta}{\sin i};$$

следовательно,

$$I_1 = NQ. \tag{2}$$

Пусть I_2 означает второй член в формуле (1); тогда

$$I_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}.$$

Если выразить этот интеграл через E, то он примет вид

$$\frac{1}{a} \int_0^E \frac{dE}{1 - e\cos E}$$

или

$$\frac{1}{a(1-e)} \int_0^E \frac{\sec^2\frac{E}{2}\, dE}{1 + \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}}.$$

Пусть f определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

Тогда легко видеть, что $I_2 = f$,

Из формул эллиптического движения, очевидно, следует, что f — истинная аномалия AQ. Поэтому, возвращаясь к формуле (1), мы видим, что

$$\beta_2 = NQ - AQ = NA,$$

т. е.

$$\beta_2 = \omega.$$

§ 9.06. Сводка формул, связывающих канонические постоянные с кеплеровскими элементами

Результаты предыдущих параграфов можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau \equiv \frac{\chi}{n},\\
\alpha_2 &= \sqrt{\mu a (1-e^2)}, & \beta_2 &= \omega,\\
\alpha_3 &= \sqrt{\mu a (1-e^2)}\cos i. & \beta_3 &= \Omega.
\end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда кеплеровские элементы выражаются через канонические постоянные посредством формул

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, & \tau &\equiv -\frac{\chi}{n} = -\beta_1\\
e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, & \omega &= \beta_2,\\
i &= \arccos\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right), & \Omega &= \beta_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Связь между ε, $\tilde{\omega}$ и Ω и β_1, β_2 и β_3 выражается формулами

$$\beta_1 = \frac{1}{n}(\varepsilon - \tilde{\omega}), \qquad \beta_2 = \tilde{\omega} - \Omega, \qquad \beta_3 = \Omega \tag{3}$$

и

$$\varepsilon = n\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \qquad \tilde{\omega} = \beta_2 + \beta_3, \qquad \Omega = \beta_3. \tag{4}$$

§ 9.07. Скобки Пуассона

Если решение уравнений невозмущенного движения выражено, как это было сделано в предыдущих параграфах, через канонические постоянные α_i и β_i $(i = 1, 2, 3)$, то уравнения возмущенного движения планеты имеют вид

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \tag{1}$$

Обозначим через a_m $(m = 1, 2, \ldots, 6)$ элементы эллиптической орбиты. Каждый элемент выражается через канонические постоянные по формулам (2) и (4) предыдущего параграфа (в качестве „угловых“

элементов мы возьмем ε, $\tilde{\omega}$ и Ω. Перепишем для удобства эти формулы в виде

$$a_1 \equiv a = -\frac{\mu}{2\alpha_1}; \quad a_2 \equiv e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}};$$
$$a_3 \equiv i = \arccos\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right); \tag{2}$$

$$a_4 \equiv \varepsilon = n\beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \quad a_5 \equiv \tilde{\omega} = \beta_2 + \beta_3; \quad a_6 \equiv \Omega = \beta_3. \tag{3}$$

Скобки Пуассона появляются при выводе уравнений движения планет в форме Лагранжа посредством формул (1) — (3). Так как вообще $a_m = a_m(\alpha, \beta)$, то на основании уравнений (1) имеем

$$\dot{a}_m = \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r}\dot{\alpha}_r + \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r}\dot{\beta}_r\right) = \sum_r\left(\frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r}\cdot\frac{\partial R}{\partial \beta_r} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r}\cdot\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}\right).$$

Первоначально R есть функция a_m, но чтобы воспользоваться уравнениями (1), ее нужно преобразовать посредством формул (2) и (3) в $R(\alpha, \beta)$. Тогда получим

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_r} = \sum_{s=1}^{6}\frac{\partial R}{\partial a_s}\cdot\frac{\partial a_s}{\partial \alpha_r}$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_r} = \sum_{s=1}^{6}\frac{\partial R}{\partial a_s}\cdot\frac{\partial a_s}{\partial \beta_r}.$$

Поэтому

$$\dot{a}_m = \sum_{s=1}^{6}\frac{\partial R}{\partial a_s}\sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r}\cdot\frac{\partial a_s}{\partial \beta_r} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r}\cdot\frac{\partial a_s}{\partial \alpha_r}\right).$$

В гл. 5 мы выразили скобки Лагранжа $[a_m, a_s]$ через α_l и γ_l, где $\gamma_l = -\beta_l$, формулами (7) § 5.10:

$$[a_m, a_s] = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial(\alpha_l, \gamma_l)}{\partial(a_m, a_s)}.$$

Определим скобки Пуассона относительно α и γ следующим образом:

$$\{a_m, a_s\} = \sum_{r=1}^{3}\frac{\partial(a_m, a_s)}{\partial(\alpha_r, \gamma_r)}. \tag{4}$$

Тогда

$$\dot{a}_m = -\sum_{s=1}^{6}\{a_m, a_s\}\frac{\partial R}{\partial a_s}. \tag{5}$$

Последнее уравнение является просто одним из уравнений Лагранжа, выраженным через скобки Пуассона. Эти скобки легко вычисляются.

а) $\{a, a_s\} = -\sum\limits_r \frac{\partial a}{\partial \alpha_r} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta_r}$, так как a не зависит от β_r. Кроме того, $a = a(\alpha_1)$. Поэтому эта скобка приводится к виду $-\frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta_1}$. Из формул (3) видно, что β_1 содержится только в ε. Единственной скобкой вида (а) является, таким образом, следующая скобка:

$$\{a, \varepsilon\} = -\frac{n\mu}{2\alpha_1^2} = -\frac{2}{na}.$$

б) $\{e, a_s\} = -\sum \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta_r}$, так как e не зависит от β_r. Легко видеть, что все скобки равны нулю, за исключением тех, в которых $a_s = \varepsilon$ или $\tilde{\omega}$. В этих случаях

$$\{e, \varepsilon\} = -\left(n\frac{\partial e}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial e}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\cos\varphi\,(1-\cos\varphi)}{na^2 e}$$

и

$$\{e, \tilde{\omega}\} = -\frac{\partial e}{\partial \alpha_2} = \frac{\cos\varphi}{na^2 e},$$

где $\varphi \equiv \arcsin e$.

в) $\{i, a_s\} = -\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta_2} - \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial \beta_3}$, так как i есть функция лишь α_2 и α_3. Очевидно, что a_s может быть ε, $\tilde{\omega}$ или Ω, так что

$$\{i, \varepsilon\} = -\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_2} - \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_3} = \frac{\sec\varphi\,(1-\cos i)}{na^2 \sin i},$$

$$\{i, \tilde{\omega}\} = -\frac{\partial i}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = \{i, \varepsilon\},$$

$$\{i, \Omega\} = -\frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = \frac{\sec\varphi}{na^2 \sin i}.$$

Объединим результаты, полученные в случаях (а) — (в):

$$\begin{aligned} &\{a, \varepsilon\} = -\frac{2}{na}, && \{e, \varepsilon\} = \frac{\cos\varphi\,(1-\cos\varphi)}{na^2 e}, \\ &\{\varepsilon, \tilde{\omega}\} = \frac{\cos\varphi}{na^2 e}, && \{i, \varepsilon\} = \frac{\sec\varphi\,(1-\cos i)}{na^2 \sin i}, \\ &\{i, \tilde{\omega}\} = \{i, \varepsilon\}, && \{i, \Omega\} = \frac{\sec\varphi}{na^2 \sin i}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя эти выражения для скобок Пуассона в уравнение (5), можем получить уравнения Лагранжа. В следующем параграфе мы покажем, что выражения (6) можно легко вывести из известных формул для скобок Лагранжа.

§ 9.08. Соотношения между обобщенными скобками Лагранжа и скобками Пуассона

Пусть q и p — сопряженные канонические переменные. Определим обобщенную скобку Лагранжа $[a_m, a_r]$ при помощи формулы

$$[a_m, a_r] = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial q_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial p_l}{\partial a_r} - \frac{\partial q_l}{\partial a_r} \cdot \frac{\partial p_l}{\partial a_m} \right) \tag{1}$$

и обобщенную скобку Пуассона $\{a_m, a_s\}$ при помощи формулы

$$\{a_m, a_s\} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial a_m}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial p_j} - \frac{\partial a_m}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial q_j} \right), \tag{2}$$

где m, r и s могут принимать значения $1, 2, \ldots, 2n$.

Для краткости пусть $L_{m,r}$ и $P_{m,s}$ означают скобку Лагранжа и скобку Пуассона, а X — сумму $\sum_{m=1}^{2n} L_{mr}P_{ms}$. Тогда

$$X = \sum_l \sum_j \left(\frac{\partial a_s}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_l}{\partial a_r} \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial q_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial q_j} + \frac{\partial a_s}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial a_r} \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial p_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial p_j} \right) -$$
$$- \sum_l \sum_j \left[\frac{\partial p_l}{\partial a_r} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial q_j} \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial q_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial p_j} + \frac{\partial q_l}{\partial a_r} \cdot \frac{\partial a_s}{\partial p_j} \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial p_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial q_j} \right].$$

Предположим, что q и p — независимые функции от $2n$ величин a и, обратно, что a — функция q и p. Тогда

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial q_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial q_j} = \frac{\partial q_l}{\partial q_j} = 1, \quad \text{если} \quad j = l,$$
$$= 0, \quad \text{если} \quad j \neq l.$$

Аналогично

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial p_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial p_j} = 1, \quad \text{если} \quad j = l,$$
$$= 0, \quad \text{если} \quad j \neq l.$$

Кроме того,

$$\sum_m \frac{\partial q_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial p_j} = \sum_m \frac{\partial p_l}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial a_m}{\partial q_j} = 0,$$

так как q и p независимы. Поэтому

$$X = \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{\partial a_s}{\partial p_l} \cdot \frac{\partial p_l}{\partial a_r} + \frac{\partial a_s}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial a_r} \right] = 1, \quad \text{если} \quad s = r,$$
$$= 0, \quad \text{если} \quad s \neq r,$$

и мы будем иметь

$$\sum_{m=1}^{2n} L_{mr} P_{mr} = 1 \tag{3}$$

и

$$\sum_{m=1}^{2n} L_{mr} P_{ms} = 0, \quad \text{если} \quad s \neq r. \tag{4}$$

Вспомним, что в этих формулах r и s могут принимать любые целые значения в промежутке от 1 до $2n$. Следовательно, имеется $2n$ уравнений типа (3) и $2n(2n-1)$ уравнений типа (4); при этом на время забудем о существовании свойства $L_{mr} = -L_{rm}$ и т. д. и аналогичного свойства для P_s. Таким образом, будем иметь всего $4n^2$ уравнений.

Предположим, что все L (их всего $4n^2$) известны. Тогда имеется $4n^2$ уравнений (3) и (4), которых достаточно, чтобы они дали нам возможность определить $4n^2$ скобок P.

Напишем уравнение (3) при $r = 1$ и $2n - 1$ уравнений (4) для случаев, когда $s = 1$, а r последовательно принимает значения 2, 3, ..., $2n$; эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} L_{11}P_{11} + L_{21}P_{21} + \ldots + L_{2n,1}P_{2n,1} = 1, \\ L_{12}P_{11} + L_{22}P_{21} + \ldots + L_{2n,2}P_{2n,1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_{1,2n}P_{11} + L_{2,2n}P_{21} + \ldots + L_{2n,2n}P_{2n,1} = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Обозначим через Δ следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & \ldots & L_{2n,1} \\ L_{12} & L_{22} & \ldots & L_{2n,2} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ L_{1,2n} & L_{2,2n} & \ldots & L_{2n,2n} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Решение уравнений (5) тогда будет даваться формулами

$$P_{11} = \frac{L'_{11}}{\Delta}, \quad P_{12} = \frac{L'_{12}}{\Delta}, \ \ldots,$$

где L'_{11}, L'_{12}, ... — алгебраические дополнения элементов L_{11} L_{12}, ... в определителе Δ. Общее решение, очевидно, имеет вид

$$P_{r,s} = \frac{1}{\Delta} L'_{rs}. \tag{7}$$

Аналогичный прием дает возможность нам определить скобки Лагранжа, если известны скобки Пуассона.

Формула (7) может быть записана в несколько измененном виде, если мы предположим, что вообще скобки Лагранжа имеют значения, отличные от нуля. Очевидно, что $L'_{rs} = \partial\Delta/\partial L_{rs}$ и, следовательно,

$$P_{rs} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial\Delta}{\partial L_{rs}}. \tag{8}$$

Если каким-либо способом переставить, например, столбцы в определителе Δ, то полученный в результате этого определитель Δ_1 будет выражаться через определитель Δ следующим образом:

$$\Delta_1 = +\Delta \quad \text{или} \quad \Delta_1 = -\Delta.$$

Следовательно, во всех случаях будем иметь

$$P_{rs} = \frac{1}{\Delta_1} \cdot \frac{\partial\Delta_1}{\partial L_{rs}}, \tag{9}$$

или

$$P_{rs} = \frac{1}{\Delta_1} L'_{rs}, \tag{8$'$}$$

где теперь L'_{rs} — алгебраическое дополнение элемента L_{rs} определителя Δ_1. Итак, мы можем использовать формулы (7) и в том случае, когда в определителе Δ сделана какая-либо перестановка столбцов или строк.

Заметим, что при выводе результатов этого параграфа мы не использовали никаких свойств q и p, кроме того, что q и p являются независимыми функциями от $2n$ величин a и, обратно, что a — независимые функции q и p.

§ 9.09. Вычисление скобок Пуассона по скобкам Лагранжа для эллиптической орбиты

Мы будем под a_m понимать следующие шесть эллиптических элементов:

$$a_1 = a, \quad a_2 = e, \quad a_3 = l,$$
$$a_4 = \Omega, \quad a_5 = \tilde{\omega}, \quad a_6 = \varepsilon.$$

Формулы (1) § 5.14 показывают, что скобки Лагранжа, не равные нулю, запишутся так:

$$[a, \varepsilon] \equiv L_{16} = -\frac{1}{2} na; \quad [a, \tilde{\omega}] \equiv L_{15} = \frac{1}{2} na(1 - \cos\varphi);$$

$$[a, \Omega] \equiv L_{14} = \frac{1}{2} na \cos\varphi (1 - \cos l); \quad [e, \tilde{\omega}] \equiv L_{25} = na^2 \operatorname{tg}\varphi;$$

$$[e, \Omega] \equiv L_{24} = -na^2 \operatorname{tg}\varphi (1 - \cos l); \quad [l, \Omega] \equiv L_{34} = na^2 \cos\varphi \sin l,$$

где положено $e = \sin\varphi$. Кроме того, из определения скобок следует, что $L_{rs} = -L_{sr}$.

Скобка Пуассона P_{rs} тогда будет равна L'_{rs}/Δ_1, где L'_{rs} — алгебраическое дополнение в измененном определителе, полученном из определителя (6) § 9.08 при $n = 3$:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccc} L_{6r} & L_{5r} & L_{4r} & L_{3r} & L_{2r} & L_{1r} \end{array} \\ \Delta_1 = & \begin{vmatrix} L_{61} & L_{51} & L_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{52} & L_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{34} & L_{24} & L_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{25} & L_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{16} \end{vmatrix}, \end{array}$$

где столбцы обозначены L_{6r} и т. д., причем $r = 1, 2, \ldots, 6$ последовательно. Очевидно, определитель Δ_1 равен произведению элементов главной диагонали:

$$\Delta_1 = L_{61}L_{52}L_{43}L_{34}L_{25}L_{16}.$$

Кроме того, алгебраическое дополнение элемента L_{61} равно $L_{52}L_{43}L_{34}L_{25}L_{16}$; поэтому, согласно равенству (8) § 9.08, имеем

$$P_{61} = \frac{1}{L_{61}} \quad \text{или} \quad P_{16} = \frac{1}{L_{16}} = -\frac{2}{na}.$$

Аналогично

$$P_{25} = \frac{1}{L_{25}} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{na^2},$$

$$P_{34} = \frac{1}{L_{34}} = \frac{\sec \varphi}{na^2 \sin i}.$$

Алгебраические дополнения элементов L_{s1} ($s = 5, 4, 3, 2, 1$) первой строки равны нулю, так как каждое алгебраическое дополнение равно определителю пятого порядка, в первом столбце которого стоят элементы, все равные нулю. Поэтому

$$P_{51} = P_{41} = P_{31} = P_{21} = P_{11} = 0,$$

причем P_{11} равно нулю по определению.

Легко заметить, что к алгебраическим дополнениям, не равным нулю, относятся L_{62}, L_{63} и $L_{5;}$. Например, алгебраическое дополнение L_{62} представляет следующий определитель:

$$L'_{62} = \begin{vmatrix} L_{51} & L_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{34} & L_{24} & L_{14} \\ 0 & 0 & 0 & L_{25} & L_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{16} \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$P_{62} = \frac{L_{51}}{L_{52}L_{61}}$$

и, следовательно,

$$P_{26} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi\,(1-\cos\varphi)}{na^2}.$$

Аналогично

$$L'_{63} = -L_{16}L_{25}L_{34}\,(L_{41}L_{52} - L_{42}L_{51}),$$

откуда

$$P_{36} = (L_{14}L_{25} - L_{24}L_{15})/(L_{61}L_{52}L_{43}) = \frac{\sec\varphi\,(1-\cos i)}{na^2\sin i}.$$

Таким же образом находим, что $P_{36} = P_{35}$.

Результаты, полученные в этом параграфе, находятся в согласии с формулами (6) § 9.07.

Глава 10

КОНТАКТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 10.01. Критерий каноничности

Как и в § 8.09, мы будем считать, что решение канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} \tag{1}$$

выражено через t и $2k$ постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$ формулами вида

$$q_i = q_i(c, t), \quad p_i = p_i(c, t). \tag{2}$$

Пусть X определяется формулой

$$X \equiv \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial g_i}{\partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i. \tag{3}$$

Тогда, принимая во внимание равенство (4) § 8.09, получаем

$$X = -\frac{\partial H}{\partial c_j}. \tag{4}$$

Докажем важную теорему, которая заключается в следующем.

Если q_i и p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — такие независимые функции от t и $2k$ постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{2k}$, что для любого c_j выполняется равенство

$$X \equiv \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial c_j}, \tag{5}$$

где H первоначально — функция q, p, t, а затем преобразовывается посредством формул (2) в функцию от t и $2k$ величин c, то q и p являются каноническими сопряженными переменными, удовлетворяющими каноническим уравнениям

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Так как $H(c, t) \equiv H(q, p, t)$, то мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial c_j} \right). \tag{6}$$

Левая часть равенства (5) может быть записана следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{k}\left(\dot{p}_l \frac{\partial q_l}{\partial c_j} - \dot{q}_l \frac{\partial p_l}{\partial c_j}\right).$$

Поэтому при помощи формулы (6) мы можем представить равенство (5) в виде

$$\sum_{l=1}^{k}\left(x_l \frac{\partial p_l}{\partial c_j} + y_l \frac{\partial q_l}{\partial c_j}\right) = 0, \tag{7}$$

где

$$x_l \equiv \frac{\partial H}{\partial p_l} - \dot{q}_l, \quad y_l \equiv \frac{\partial H}{\partial q_l} + \dot{p}_l.$$

Всего имеется $2k$ уравнений такого типа, соответствующих $2k$ значениям c_j ($j = 1, 2, \ldots, 2k$), в которых k величин x и k величин y рассматриваются как неизвестные. Так как q и p — независимые функции величин c, то

$$\frac{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_{2k})} \neq 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = y_1 = y_2 \ldots = y_k = 0.$$

Поэтому

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_l}. \tag{8}$$

Теорема, таким образом, доказана. Она будет использована в качестве критерия каноничности в методе, связанном с контактными преобразованиями, которые мы будем рассматривать в последующих параграфах.

§ 10.02. Контактные преобразования

Мы будем исходить из канонических уравнений (8) предыдущего параграфа. Предположим, что мы перешли от переменных q и p к новым переменным Q и P посредством уравнений вида

$$q_l = q_l(Q, P, t), \tag{1}$$
$$p_l = p_l(Q, P, t), \tag{2}$$

в которых содержится k переменных Q и k переменных P.

Если замена переменных такова, что Q_l и P_l являются сопряженно каноническими по отношению к некоторой функции Гамильтона $H'(Q, P, t)$, то такое преобразование переменных называется *контактным преобразованием*.

Из двух групп уравнений (1) и (2) мы можем в принципе выразить каждое из переменных Q и P через q и p в виде

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \tag{3}$$

Решение уравнений (8) § 10.01 имеет вид

$$q_i = q_i(c, t), \quad p_i = p_i(c, t), \tag{4}$$

причем число постоянных интегрирования c равно $2k$. Следовательно, согласно формулам (3), переменные Q и P могут быть выражены через $2k$ постоянных по формулам

$$Q_i = Q_i(c, t), \quad P_i = P_i(c, t). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь группу уравнений (1). Они могут быть в принципе разрешены относительно P_i так, чтобы $P_i = P_i(q, Q, t)$.

Предположим теперь, что существует такая функция $F(q, Q, t)$, что

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{k} P_i\, dQ_i \equiv \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\, dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\, dQ_i \right) \equiv dF, \tag{6}$$

причем dF есть полный дифференциал по отношению к переменным q и Q. Тогда

$$p_i = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q_i}. \tag{7}$$

Воспользуемся теперь критерием каноничности, который был получен в предыдущем параграфе. Пусть

$$Y \equiv \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} P_i \frac{\partial Q_i}{\partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^{k} P_i \dot{Q}_i.$$

Тогда, используя равенство (3) § 10.01, мы запишем

$$X - Y = \frac{d}{dt} \sum_i \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial c_j} \right) - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_i (p_i \dot{q}_i - P_i \dot{Q}_i),$$

откуда, принимая во внимание формулы (7), находим

$$X - Y = \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial c_j} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right). \tag{8}$$

Далее, функция $F(q, Q, t)$ посредством первой группы формул (4) и первой группы формул (5) может быть преобразована в функцию $F(c, t)$. Мы тогда будем иметь

$$\frac{\partial F(c, t)}{\partial c_j} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial c_j} \right)$$

и

$$\frac{dF(c, t)}{dt} = \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right).$$

Поэтому формула (8) примет вид

$$X - Y = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(c, t)}{\partial c_j}\right] - \frac{\partial}{\partial c_j}\left[\frac{dF(c, t)}{dt} - \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial c_j}\left[\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}\right].$$

Согласно формулам (3) и (4) § 10.01, имеем

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial H}{\partial c_j}, \\ Y &= -\frac{\partial H'}{\partial c_j}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t}. \tag{10}$$

При помощи уравнений (1) и (2) функция H' может быть представлена в виде $H'(Q, P, t)$. Следовательно, формулы (9) представляют собой критерий каноничности. Поэтому

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(Q, P, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(Q, P, t)}{\partial Q_i}. \tag{11}$$

Другими словами, новые переменные Q и P удовлетворяют каноническим уравнениям с функцией Гамильтона H', выражаемой формулой (10), причем функция $F(q, Q, t)$ определяется из уравнения (6).

§ 10.03. Вывод уравнения Гамильтона — Якоби

Предположим, что функция Гамильтона H' в формуле (10) § 10.02 равна нулю, так что

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Тогда, согласно уравнениям (11) § 10.02, $\dot{Q}_i = \dot{P}_i = 0$. Поэтому Q_i и P_i — постоянные, и мы пишем

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = -\beta_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Уравнения (7) § 10.02 тогда примут вид

$$p_i = \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \tag{2}$$

Очевидно, что в этом случае функция F совпадает с функцией S, введенной в § 8.09. Заменим в уравнении (1) F на S и Q на α. Тогда это уравнение примет вид

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

и, таким образом, принимая во внимание первую группу уравнений (2), можно утверждать, что функция S представляет собой решение уравнения

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0,$$

которое является уравнением Гамильтона — Якоби, полученным в § 8.10.

§ 10.04. Дальнейшее применение

В этом параграфе мы выведем при помощи метода контактных преобразований результаты, полученные в § 8.15.

Канонические уравнения, из которых мы исходим, имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1}$$

Как и раньше, мы положим

$$H = H_0 - H_1 \tag{2}$$

и допустим, что канонические уравнения с функцией Гамильтона H уже решены. Пусть решение, полученное из равенств

$$p = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha},$$

имеет вид

$$q = q(t, \alpha, \beta), \quad p = p(t, \alpha, \beta). \tag{3}$$

Здесь S — решение уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \tag{4}$$

Теперь будем считать α и β переменными и предположим, что аналитические выражения (3) для q и p удовлетворяют уравнениям (1). Отождествляя Q_i с α_i и P_i с $-\beta_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\,dq_i - \sum_i P_i\,dQ_i \equiv \sum_i (p_i\,dq_i + \beta_i\,d\alpha_i) = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\,d\alpha_i\right).$$

Правая часть этого равенства есть полный дифференциал dS по отношению к величинам q и α. Поэтому, согласно результатам § 10.02, получаем

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i},$$

где, на основании уравнения (4),

$$H' = H + \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} = H - H_0,$$

или, согласно формуле (2),

$$H' = -H_1.$$

Поэтому

$$\dot{Q}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial H_1}{\partial Q_i}.$$

Если в последних уравнениях заменить Q на α и P на $-\beta$, то они примут вид

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

Это и есть уравнения, выведенные в § 8.15.

Если H_0 — функция Гамильтона, соответствующая эллиптической орбите, в силу чего α и β будут соответствующими каноническими постоянными, то уравнения возмущенного движения выведутся так же, как и в § 8.15, и примут вид

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i},$$

где α и β теперь принимаются в качестве новых канонических переменных.

§ 10.05. Условия контактного преобразования, записанные через скобки Лагранжа и скобки Пуассона

Для контактного преобразования переменных q, p в переменные Q, P мы из формулы (6) § 10.02 получим

$$\sum_{i=1}^{k} p_i\,dq_i - \sum_{i=1}^{k} P_i\,dQ_i \equiv dF(q, Q, t), \tag{1}$$

где dF — полный дифференциал по отношению к переменным q и Q.

Запишем это преобразование в виде

$$q \equiv q(Q, P, t), \quad p \equiv p(Q, P, t).$$

При помощи первой группы этих формул F может быть преобразована в функцию от Q, P, t, так что

$$dF = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i \right). \tag{2}$$

Кроме того,

$$dq_r = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial q_r}{\partial P_i} dP_i \right). \tag{3}$$

В формуле (1) вместо $\sum_{i=1}^{k} p_i \, dq_i$ напишем $\sum_{r=1}^{k} p_r \, dq_r$. Тогда, учитывая равенства (2) и (3), мы будем иметь

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} p_r \left(\frac{\partial q_r}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial q_r}{\partial P_i} dP_i \right) - \sum_{i=1}^{k} P_i \, dQ_i \equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i \right),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при dQ_i и dP_i, получаем

$$\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} - P_i = \frac{\partial F}{\partial Q_i}, \tag{4}$$

$$\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i} = \frac{\partial F}{\partial P_i}. \tag{5}$$

Определим скобки Лагранжа $[u, v]$ при помощи формулы

$$[u, v] = \sum_{r=1} \frac{\partial (q_r, p_r)}{\partial (u, v)}. \tag{6}$$

Из равенства (5) находим

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_j},$$

т. е.

$$\sum_r \frac{\partial (q_r, p_r)}{\partial (P_i, P_j)} \equiv [P_i, P_j] = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, из равенства (4), поскольку P и Q являются независимыми функциями, имеем

$$\frac{\partial}{\partial Q_j} \sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_j},$$

откуда

$$[Q_i, Q_j] = 0. \tag{8}$$

Продифференцируем снова формулы (4) и (5) соответственно по P_i и Q_i и вычтем. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial P_i}\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} - 1 = \frac{\partial}{\partial Q_i}\sum_r p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i},$$

откуда

$$[Q_i,\ P_i] = 1. \tag{9}$$

Соотношения (7) — (9) и составляют всю совокупность условий контактных преобразований.

Возвращаясь к определителю Δ, который фигурирует в § 9.08 в соотношении между скобками Лагранжа и скобками Пуассона, мы увидим, что он приводится к выражению

$$\Delta = \prod_{i=1}^{2n} L_{rr} = \prod_i [Q_i,\ P_i].$$

Из формулы (7) § 9.08 имеем

$$P_{rr} = \frac{1}{\Delta} L'_{rr} = \frac{1}{L_{rr}}.$$

Поэтому вследствие равенства (9) будем иметь

$$\{Q_i,\ P_i\} = 1. \tag{10}$$

С другой стороны, так как $L_{rs} = 0$ $(r \neq s)$, то алгебраическое дополнение элемента L_{rs} равно нулю; поэтому

$$\{Q_i,\ Q_j\} = \{P_i,\ P_j\} = 0.$$

Формулы (10) и (11) дают условия контактных преобразований, записанные через скобки Пуассона.

В частности, если под Q_i и P_i понимать α_i и $-\beta_i$ соответственно, то эти условия, записанные через скобки Лагранжа, примут вид

$$[\alpha_i,\ \beta_i] = -1 \tag{12}$$

и

$$[\alpha_i,\ \alpha_j] = [\beta_i,\ \beta_j] = 0. \tag{13}$$

Эти же условия, выраженные через скобки Пуассона, записываются в виде

$$\{\alpha_i,\ \beta_i\} = -1 \tag{14}$$

и

$$\{\alpha_i,\ \alpha_j\} = \{\beta_i,\ \beta_j\} = 0. \tag{15}$$

§ 10.06. Частный случай контактного преобразования

Рассмотрим важный для дальнейшего специальный случай, когда преобразуется только одна пара канонических переменных, например q_1, p_1, в Q_1, P_1.

Пусть

$$q_1 = q_1(Q_1, P_1, t), \quad p_1 = p_1(Q_1, P_1, t) \tag{1}$$

и

$$q_r = Q_r, \quad p_r = P_r \quad (r = 2, 3, \ldots, k).$$

Согласно предыдущему параграфу, условия контактного преобразования записываются в виде

$$\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(Q_1, P_1)} + \sum_{r=2}^{k} \frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(Q_1, P_1)} = 1 \tag{2}$$

и

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0. \tag{3}$$

Так как q_r и p_r $(r > 1)$ не зависят от Q_1 и P_1, то условия (3) автоматически удовлетворяются, и, кроме того, каждый член в сумме (2) равен нулю. Поэтому требуемое условие примет вид

$$\frac{\partial(q_1, p_1)}{\partial(Q_1, P_1)} = 1. \tag{4}$$

§ 10.07. Другое доказательство

Мы дадим другое доказательство результатов § 10.06, основанное на простых принципах, и, кроме того, установим общую форму новой функции Гамильтона относительно Q_1 и P_1.

Так как q_1 и p_1 — сопряженные переменные, то имеем

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

Решая уравнения (1) § 10.06, получаем

$$Q_1 = Q_1(q_1, p_1, t), \quad P_1 = P_1(q_1, p_1, t). \tag{1}$$

Поэтому, опуская для простоты индекс, находим

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

При помощи формул (1) § 10.06 H можно выразить через Q, P, t, и мы будем иметь

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial p},$$
$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial q}.$$

Следовательно,

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \cdot \frac{\partial (Q, P)}{\partial (q, p)} + \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Аналогично

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} \cdot \frac{\partial (Q, P)}{\partial (q, p)} + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Из этих равенств, восстанавливая индекс, мы найдем

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H'}{\partial P_1}, \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_1},$$

если

$$\frac{\partial (Q_1, P_1)}{\partial (q_1, p_1)} = 1 \tag{2}$$

и H' — такая функция, что

$$H' = H + \varphi, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Q_1} = -\frac{\partial P_1}{\partial t}. \tag{4}$$

Из условия (2) следует, что скобка Пуассона $\{Q_1, P_1\}$ равна единице, так как все члены в выражении $\partial \{Q_1, P_1\}/\partial \{q_r, p_r\}$, для которых $r > 1$, равны нулю. На основании известной теоремы имеем

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{1}{[Q_1, P_1]};$$

поэтому равенство (2) эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial (q_1, p_1)}{\partial (Q_1, P_1)} = 1,$$

совпадающему с равенством (4) § 10.06.

Согласно уравнениям (4), функция $\varphi(Q, P, t)$ дается формулой

$$\varphi = -\int \frac{\partial P_1}{\partial t} dQ_1 + \int \frac{\partial Q_1}{\partial t} dP_1.$$

Далее,

$$dQ_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} dp_1.$$

Выражение для dP_1 имеет аналогичный вид. Поэтому когда φ выражено через q_1, p_1, t, то мы имеем

$$\varphi = -\int \frac{\partial (Q_1, P_1)}{\partial (q_1, t)} dq_1 - \int \frac{\partial (Q_1, P_1)}{\partial (p_1, t)} dp_1. \tag{6}$$

Итак, новая функция Гамильтона определяется равенствами (3) и (6). Новые канонические уравнения тогда будут иметь вид

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H'}{\partial P_1}, \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_1}, \tag{7}$$

где предполагается, что H' выражена через Q_1 и P_1.

Так как φ в формуле (6) *не зависит* от Q_r, P_r ($r = 2, 3, \ldots$), то остальные канонические уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial H'}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H'}{\partial Q_r}.$$

Примечание. Если преобразование переменных q и p в переменные Q и P не содержит явно времени, то обе производные $\partial Q_1/\partial t$ и $\partial P_1/\partial t$ равны нулю. Поэтому $\varphi = 0$ и новые канонические уравнения запишутся в виде

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial H}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r}, \tag{8}$$

причем функция Гамильтона остается прежней.

§ 10.08. Обобщенное точечно-линейное преобразование

Мы будем исходить из канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Если преобразование к новым каноническим переменным Q и P такое, что Q_r, например, есть функция только q, а P_r — функция только p, то преобразование называется *обобщенным точечным преобразованием*.

Пусть

$$Q_r = Q_r(q), \quad P_r = P_r(p).$$

Если $Q_r(q)$ — линейная функция q, а $P_r(p)$ — линейная функция p, то такое преобразование называется *обобщенным точечно-линейным преобразованием*. Его мы сейчас и рассмотрим.

Запишем линейное преобразование в виде

$$Q_r = A_{r1}q_1 + A_{r2}q_2 + \ldots + A_{rn}q_n \equiv \sum_{s=1}^{n} A_{rs}q_s, \tag{1}$$

$$P_r = a_{r1}p_1 + a_{r2}p_2 + \ldots + a_{rn}p_n \equiv \sum_{s} a_{rs}p_s, \tag{2}$$

где $r = 1, 2, \ldots, n$, A и a — постоянные величины.

Для контактного преобразования мы имеем условие

$$\sum_r p_r dq_r - \sum_r P_r dQ_r = dF.$$

Это условие будет справедливым и при $F=0$. В этом случае

$$\sum p_r dq_r - \sum P_r dQ_r = 0; \tag{3}$$

последнее равенство при помощи формул (1) и (2), если заменить в нем s на t, принимает вид

$$\sum_r p_r dq_r - \sum_r \sum_s a_{rs} p_s \sum_t A_{rt} dq_t = 0. \tag{4}$$

Тройную сумму в левой части можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} A_{rs} p_s dq_s + \sum_r \sum_s \sum_t a_{rs} A_{rt} p_s dq_t,$$

где $t \neq s$. Если вместо $\sum\limits_r p_r dq_r$ написать $\sum\limits_s p_s dq_s$, то формула (4) примет вид

$$\sum_s p_s dq_s - \sum_s p_s dq_s \sum_r a_{rs} A_{rs} - \sum_s \sum_t p_s dq_t \sum_r a_{rs} A_{rt} = 0,$$

где r и s могут принимать все значения от 1 до n и $t \neq s$.

Последнее уравнение удовлетворится, если

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rs} A_{rs} = 1 \tag{5}$$

и

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rs} A_{rt} = 0 \quad (t \neq s). \tag{6}$$

Это и есть условия контактного преобразования, и так как $F=0$, то новые канонические уравнения имеют вид

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial H}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r}. \tag{7}$$

Если, например, величины a заданы, то уравнения (5) и (6) дают возможность определить соответствующие значения A, так как имеется n уравнений (5) и $n(n-1)$ уравнений (6), т. е. всего n^2 уравнений, то из них могут быть найдены n^2 величин A. Легко заметить, что если положить в уравнениях (5) $s=1$ и в $n-1$ уравнениях (6) $t=1$ и $s=2, 3, \ldots, n$, то A_{11}, например, будет алгебраическим дополнением элемента a_{11}, деленным на определитель Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вообще

$$A_{rs}=\frac{1}{\Delta}a'_{rs}, \tag{8}$$

где a'_{rs} — алгебраическое дополнение элемента a_{rs}.

Условия (5) и (6) могут быть представлены одной простой и важной формулой. Так как Q_r представляет собой линейное выражение относительно q, то, очевидно, что условие

$$\sum_r p_r q_r - \sum_r P_r Q_r \equiv 0$$

совпадает с условием

$$\sum_r p_r\,dq_r - \sum_r P_r\,dQ_r \equiv 0,$$

причем это последнее условие дается формулами (5) и (6). Поэтому для обобщенного точечно-линейного преобразования достаточное условие записывается в виде

$$\sum_r Q_r P_r = \sum_r q_r p_r. \tag{9}$$

§ 10.09. Ортогональные преобразования

Если в равенствах (2) § 10.08 $a_{rs}=A_{rs}$, то преобразование называется *ортогональным*. Условия (5) и (6) предыдущего параграфа тогда запишутся в виде

$$\sum_{r=1}^{n} A_{rs}^2 = 1 \tag{1}$$

и

$$\sum_{r=1}^{n} A_{rs}A_{rt} = 0 \quad (t \neq s). \tag{2}$$

Если $n=3$, то величины A будут обладать свойствами, присущими направляющим косинусам. Так, если мы положим

$$l_s=A_{1s}, \quad m_s=A_{2s}, \quad n_s=A_{3s},$$

то условия (1) и (2) запишутся в виде равенств

$$l_s^2 + m_s^2 + n_s^2 = 1 \quad (s = 1, 2, 3)$$

и

$$l_s l_t + m_s m_t + n_s n_t = 0 \quad (t \neq s),$$

которые являются хорошо известными формулами, связывающими направляющие косинусы.

§ 10.10. Бесконечно малые преобразования

Пусть

$$Q_i = q_i + \varepsilon x_i, \quad P_i = p_i + \varepsilon y_i, \tag{1}$$

где ε — произвольная бесконечно малая величина, не зависящая от q и p, и квадратом которой можно пренебречь. Для контактного преобразования мы должны иметь

$$\sum_i p_i \, dq_i - \sum_i P_i \, dQ_i = dF,$$

где dF — полный дифференциал. Используя формулы (1), мы получаем

$$\sum_i p_i \, dq_i - \sum_i (p_i + \varepsilon y_i)(dq_i + \varepsilon \, dx_i) = dF$$

или

$$-\varepsilon \sum_i (y_i \, dq_i + p_i \, dx_i) = dF.$$

Можно считать, что функция F содержит множитель ε. Положим $F = \varepsilon W$. Тогда

$$\sum (y_i \, dq_i + p_i \, dx_i) = -dW,$$

что можно записать в виде

$$\sum_i (y_i \, dq_i - x_i \, dp_i) = -d\Big(W + \sum_i p_i x_i\Big) = -dK,$$

где через $K(q, p, t)$ обозначено выражение, заключенное в скобки. Поэтому

$$x_i = \frac{\partial K(q, p, t)}{\partial p_i}, \quad y_i = -\frac{\partial K(q, p, t)}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Заменим ε на Δt, которое не зависит от q и p. Тогда, принимая во внимание формулы (1) и (2), получаем наиболее общее бесконечно малое контактное преобразование в виде

$$Q = q_i + \frac{\partial K(q, p, t)}{\partial p_i} \cdot \Delta t, \tag{3}$$

$$P_i = p_i - \frac{\partial K(q, p, t)}{\partial q_i} \cdot \Delta t, \tag{4}$$

где K — произвольная функция.

Далее, пусть координаты и компоненты импульсов в момент t суть q и p. Тогда, как показывают уравнения (3) и (4), в момент $t + \Delta t$ состояние системы получится путем бесконечно малого контактного преобразования. Все движение системы, таким образом, может рассматриваться как последовательность бесконечно малых преобразований, что в общих чертах сходно с описанием возмущенного движения планеты при помощи последовательности бесконечно малых дуг оскулирующей орбиты.

Глава 11

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЛОНЭ И ПУАНКАРЕ

§ 11.01. Необходимость преобразования канонических переменных

Рассмотрим движение планеты P, возмущаемое планетой P_1. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

где α и β первоначально были каноническими постоянными, появившимися при решении уравнений невозмущенного движения, а теперь в уравнениях (1) являются каноническими переменными.

Возмущающая функция R — функция Гамильтона в уравнениях (1) — содержит как непериодические члены, так и периодические. Сейчас нам необходимо рассматривать лишь те члены, аргументы которых зависят от средней аномалии.

Такие члены имеют вид $C \cos \theta$, где $C = C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\theta = jM + u$, или

$$\theta = jn(t + \beta_1) + u, \tag{2}$$

причем j — положительное целое число, а u — линейная функция β_2, β_3, M_1, $\tilde{\omega}_1$ и Ω_1, где три последние величины относятся к планете P_1.

Далее, в формуле (2) n есть функция α_1, так как

$$n^2 a^3 = \mu, \quad a = -\frac{\mu}{2\alpha_1}. \tag{3}$$

Поэтому если рассматривать только члены вида $C \cos \theta$, то второе из уравнений (1) при $i = 1$ будет иметь вид

$$\dot{\beta}_1 \equiv -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\sum \frac{\partial C}{\partial \alpha_1} \cos \theta + (t + \beta_1) \sum j \frac{dn}{d\alpha_1} \sin \theta. \tag{4}$$

Наличие множителя $t + \beta_1$ вызывает, очевидно, затруднение того же характера, что и уже встречавшееся при рассмотрении уравнения (6) § 6.03 для элемента ε. Нужно заметить, что уравнение (4) является единственным из шести уравнений (1), обладающим такой особенностью. Эта трудность устраняется путем выбора в качестве новой канонической переменной средней аномалии $n(t + \beta_1)$

(которую Делонэ обозначил через l[1])) и определения соответствующей сопряженной переменной, обозначаемой через L. Тогда α_1 и β_1 заменятся на L и l, а все остальные переменные, α_2, β_2, α_3, β_3, останутся неизменными.

§ 11.02. Переменная, сопряженная средней аномалии

Средняя аномалия l дается формулой

$$l \equiv l(\alpha_1, \beta_1, t) = n(t + \beta_1), \tag{1}$$

причем n выражается через α_1 по формуле (3) § 11.01.

Пусть $L \equiv L(\alpha_1, \beta_1, t)$ означает переменную, сопряженную l. Требуется найти такую форму для L, чтобы было

$$\dot{L} = \frac{\partial R'}{\partial l}, \quad \dot{l} = -\frac{\partial R'}{\partial L}, \tag{2}$$

где R' — новая функция Гамильтона.

Условие того, что L и l — сопряженные переменные, было получено в § 10.06 и § 10.07, причем под q_1, p_1 мы понимаем α_1, β_1, а под Q_1 и P_1 — L_1, l_1.

Это условие, выражаемое формулой (2) § 10.07, запишется тогда в виде

$$\frac{\partial(L, l)}{\partial(\alpha_1, \beta_1)} = 1. \tag{3}$$

Функция R' равна $R + \varphi$, где φ определяется формулой (6) § 10.07 и в новых обозначениях имеет вид

$$\varphi = -\int \frac{\partial(L, l)}{\partial(\alpha_1, t)}\, d\alpha_1 - \int \frac{\partial(L, l)}{\partial(\beta_1, t)}\, d\beta_1. \tag{4}$$

Так как l дается формулой (1), то условие (3) принимает вид

$$n\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} - (t + \beta_1)\frac{dn}{d\alpha_1} \cdot \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 1. \tag{5}$$

Это уравнение удовлетворится, если $L \equiv L(\alpha_1)$ такое, что $\partial L/\partial\beta_1 = \partial L/\partial t = 0$. Следовательно, мы можем равенство (5) записать в виде $n\,dL = d\alpha_1$ или, принимая во внимание формулу (3) § 11.01, $dL = d\sqrt{\mu a}$. Поэтому

$$L = \sqrt{\mu a} = \mu\sqrt{-\frac{1}{2\alpha_1}}. \tag{6}$$

---

[1]) Не следует смешивать со средней долготой, уже использованной, например, в формуле (12) § 6.02.

Тогда равенство (4) примет вид

$$\varphi = -\int n \frac{dL}{d\alpha_1} \cdot d\alpha_1 = -\alpha_1. \tag{7}$$

Следовательно, учитывая формулу (6), имеем

$$R' = R - \alpha_1 = R + \frac{\mu^2}{2L^2}. \tag{8}$$

Тогда канонические уравнения, содержащие L и l, будут иметь вид (2), причем R' теперь предполагается преобразованной в $R'(L, l)$.

Так как $\mu^2/2L^2$ не зависит от α_2, β_2, то соответствующие канонические уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial R'}{\partial \beta_2}, \quad \dot{\beta}_2 = -\frac{\partial R'}{\partial \alpha_2}.$$

Уравнения для оставшейся пары переменных (α_3 и β_3) могут быть записаны в аналогичной форме.

§ 11.03. Другой вывод формулы для L

Читатель может рассматривать содержание этого параграфа как пример непосредственного получения результатов предыдущего параграфа без помощи общих формул предыдущей главы.

Будем исходить из условий

$$L \equiv L(\alpha_1, \beta_1, t), \quad l = n(t + \beta_1), \tag{1}$$

где $n \equiv n(\alpha_1)$. Мы тотчас же получим

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_1}\dot{\alpha}_1 + \frac{\partial L}{\partial \beta_1}\dot{\beta}_1 + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\partial L}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2}$$

Аналогично

$$\dot{l} = \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\partial l}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial l}{\partial t}. \tag{3}$$

Далее, при помощи формул (1) получаем $R(\alpha_1, \beta_1, t) \equiv R(L, l, t)$. Поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial R}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \alpha_1},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{\partial R}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \beta_1} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \beta_1}.$$

Подставим эти равенства в соотношение (2). Тогда

$$\dot{L} = \frac{\partial (L, l)}{\partial (\alpha_1, \beta_1)} \cdot \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Аналогично

$$\dot{l} = -\frac{\partial (L, l)}{\partial (\alpha_1, \beta_1)} \cdot \frac{\partial R}{\partial L} + \frac{\partial l}{\partial t}.$$

Следовательно, если

$$\frac{\partial (L, l)}{\partial (\alpha_1, \beta_1)} = 1 \tag{4}$$

и

$$R' = R + \varphi,$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial L}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial L} = -\frac{\partial l}{\partial t}, \tag{5}$$

то

$$\dot{L} = \frac{\partial R'}{\partial l}, \qquad \dot{l} = -\frac{\partial R'}{\partial L}.$$

Если $L \equiv L(\alpha_1)$, то равенство (4) эквивалентно равенству $n\,dL = d\alpha_1$, из которого $L = \sqrt{\mu a}$, т. е. получаем результат, выраженный формулой (6) § 11.02.

Из уравнений (5) находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial L} \equiv \frac{d\varphi}{dL} = -n,$$

поэтому $\varphi = -\alpha_1$. Тогда R' будет выражаться формулой (8) § 11.02.

§ 11.04. Переменные Делонэ

Делонэ ввел следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & l &= n(t + \beta_1), \\ G &\equiv \alpha_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & g &\equiv \beta_2 = \omega, \\ H &\equiv \alpha_3 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i, & h &\equiv \beta_3 = \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

рассматриваемые теперь как стандартные. Канонические уравнения тогда примут вид

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial R'}{\partial l}, & \dot{l} &= -\frac{\partial R'}{\partial L}, \\ \dot{G} &= \frac{\partial R'}{\partial g}, & \dot{g} &= -\frac{\partial R'}{\partial G}, \\ \dot{H} &= \frac{\partial R'}{\partial h}, & \dot{h} &= -\frac{\partial R'}{\partial H}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$R' = R + \frac{\mu^2}{2L^2}. \tag{3}$$

Эти уравнения являются отправной точкой в теории движения Луны, разработанной Делонэ.

Переменные l, g, h называются *угловыми переменными*, а L, G и H — *неугловыми переменными*.

§ 11.05. Модификация переменных Делонэ

Эти переменные связаны с расширенным линейным точечным преобразованием переменных Делонэ L, G, H; l, g, h. Общей теорией такого преобразования мы занимались в § 10.08 и здесь на нее будем ссылаться.

Будем понимать под величинами q_r ($r=1, 2, 3$) переменные L, G, H, под величинами p_r — переменные l, g, h, а под Q_r и P_r — переменные L', G', H' и l', g', h' соответственно.

Согласно формулам (1) и (2) § 10.08, общее линейное преобразование дается уравнениями

$$\begin{aligned} l' &= a_{11}l + a_{12}g + a_{13}h, \\ g' &= a_{21}l + a_{22}g + a_{23}h, \\ h' &= a_{31}l + a_{32}g + a_{33}h \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$L' = A_{11}L + A_{12}G + A_{13}H \tag{2}$$

и двумя аналогичными уравнениями для G' и H'. Переменные L', l'; G', g'; H', h' суть пары канонических переменных. Функция Гамильтона остается неизменной, если, согласно условиям (5) и (6) § 10.08,

$$\sum_{r=1}^{3} a_{rs}A_{rs} = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{r=1}^{3} a_{rs}A_{rt} = 0 \quad (t \neq s), \tag{4}$$

где s и t принимают значения 1, 2 и 3.

Если в уравнениях (1) мы зададим величины a, то величины A в уравнениях (2) определятся при помощи формул (8) § 10.08, т. е.

$$A_{rs} = \frac{1}{\Delta} a'_{rs}, \tag{5}$$

где a'_{rs} — алгебраическое дополнение элемента a_{rs} в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, согласно достаточному условию (9) § 10.08, условия (3) и (4) эквивалентны такому:

$$L'l' + G'g' + H'h' = Ll + Gg + Hh. \tag{6}$$

Цель таких преобразований состоит в том, чтобы упростить, насколько это возможно, уравнение Гамильтона — Якоби. Мы кратко поясним это следующим образом.

Пусть R' означает совокупность членов возмущающей функции вида $C_0 + \sum C_s \cos s\theta$ $(s = 1, 2, \ldots)$, где коэффициенты C зависят от L, G, H и

$$\theta = il + jg + kh + un_1t + v,$$

причем i, j, k, u — положительные или отрицательные целые числа (включая нуль) и v — линейная функция элементов $\tilde{\omega}_1$, Ω_1 и ε_1 возмущающего тела.

Для того чтобы решить канонические уравнения с функцией Гамильтона R_1, положим

$$l' = il + jg + kh,$$

где i, j и k теперь означают a_{11}, a_{12}, a_{13}, входящие в уравнения (1).

Предположим далее, что коэффициенты a в формулах (1) для g' и h' каким-либо образом уже выбраны (на практике при этом выборе стремятся к получению упрощений или к достижению некоторых других преимуществ). Коэффициенты A тогда можно найти при помощи формулы (5), а L, G, H выразить через L', G', H' посредством уравнений (2). Уравнения, подлежащие решению, имеют вид

$$\dot{L}' = \frac{\partial R_1}{\partial l'}, \qquad \dot{l}' = -\frac{\partial R_1}{\partial L'},$$
$$\dot{G}' = \frac{\partial R_1}{\partial g'}, \qquad \dot{g}' = -\frac{\partial R_1}{\partial G'} \tag{7}$$

плюс два аналогичных уравнения для H' и h'. Здесь

$$R_1 = C_0 + \sum C_s(L', G', H') \cos s(l' + un_1t + v).$$

Поэтому $\dot{G}' = \dot{H}' = 0$, так что G' и H' — постоянные, равные, например, α_2, α_3. Уравнение Гамильтона — Якоби приводится к виду

$$\frac{\partial S}{\partial t} + C_0 + \sum C_s(L', \alpha_2, \alpha_3) \cos\left[s\left(\frac{\partial S}{\partial L'} + un_1t + v\right)\right] = 0.$$

Это уравнение содержит только переменную L'. Его решение может быть найдено при помощи методов, которые мы опишем более подробно в гл. 12. В результате этого будет введена третья постоянная α_1.

Решение уравнений (7), таким образом, формально получено, причем сопряженными постоянными являются α_i и β_i ($i=1, 2, 3$).

Когда α_i и β_i приняты в качестве новых канонических переменных, уравнения могут быть немедленно написаны, причем функция Гамильтона будет совпадать с первоначальной функцией Гамильтона, из которой члены вида $\sum C_s \cos s\vartheta$ устранены и к которой прибавлена часть, аналогичная слагаемому $\mu^2/2L^2$, добавленному к R в формуле (3) § 11.04.

Без дальнейшей детализации теперь очевидно, что описанную операцию можно повторить для исключения некоторых других членов или группы членов из первоначальной возмущающей функции.

Практическое значение метода, только что кратко изложенного, состоит в том, что две модифицированные переменные Делонэ G' и H' являются постоянными, вследствие чего уравнение Гамильтона — Якоби принимает более простую форму.

§ 11.06. Важная модификация переменных Делонэ

Из выражений (1) § 11.04, дающих выражения переменных Делонэ через эллиптические элементы, очевидно, следует, что $L-G$ или $G-L$ имеет порядок e^2. Поэтому если в качестве G' взять $L-G$ (или $G-L$), то G' будет иметь порядок e^2.

Аналогично так как

$$G-H\equiv G(1-\cos i)=2G\sin^2\frac{i}{2},$$

то $G-H$ (или $H-G$) имеет порядок γ^2, где $\gamma=\operatorname{tg} i$.

Рассмотрим следующие модифицированные переменные:

$$L'=L,\quad G'=G-L,\ H'=H-G. \tag{1}$$

Чтобы установить вид сопряженных переменных l', g', h', мы воспользуемся условием (6) § 11.05.

Так как $L'=L$, то

$$\begin{aligned}L'(l+g+h)&=L(l+g+h)\equiv\\&\equiv Ll+Gg+Hh-(g+h)(G-L)-h(H-G),\end{aligned} \tag{2}$$

или если воспользоваться формулами (1), то

$$L'(l+g+h)+G'(g+h)+H'h=Ll+Gg+Hh.$$

Поэтому условие

$$L'l'+G'g'+H'h'=Ll+Gg+Hh$$

удовлетворится, если положить

$$l'=l+g+h,\quad g'=g+h,\quad h'=h. \tag{3}$$

Переменные l', g' и h' выражаются через эллиптические элементы следующим образом:

$$l' = l + \tilde{\omega}, \quad g' = \tilde{\omega}, \quad h' = \Omega, \tag{4}$$

где l' — средняя долгота.

Аргументы периодических членов возмущающей функции, таким образом, легко выражаются через l', g' и h'. Из равенства (2) легко убедиться, что если бы мы выбрали G' и H' по формулам

$$G' = L - G, \quad H' = G - H,$$

то соответствующие сопряженные переменные выражались бы равенствами

$$g' = -(g + h) = -\tilde{\omega}, \quad h' = -h = -\Omega.$$

Таким образом, в аргументах периодических членов возмущающей функции необходимо было бы изменить знак там, где входят элементы $\tilde{\omega}$ и Ω. Следовательно, выбор переменных по формулам (1) является, очевидно, более удобным.

Определяя G' согласно (1) мы имеем

$$G' \equiv G - L = L\left(\sqrt{1 - e^2} - 1\right) = L\left(-\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 \ldots\right), \tag{5}$$

т. е. G' отрицательно. В первом приближении

$$e^2 = -\frac{2G'}{L}.$$

Во втором приближении

$$e^2 = -\frac{2G'}{L} - \left(\frac{G'}{L}\right)^2. \tag{6}$$

Более высокие приближения, если они требуются, могут быть получены аналогичным образом. Тем же путем любая степень e может быть представлена в виде ряда степеней $\sqrt{-2G'/L}$. Например,

$$e = \sqrt{-\frac{2G'}{L}}\left(1 + \frac{G'}{4L} + \ldots\right). \tag{7}$$

Аналогично

$$H' \equiv -G(1 - \cos i) = -2(G' + L)\sin^2\frac{i}{2},$$

откуда

$$\sin^2\frac{i}{2} = -\frac{H'}{2L}\left(1 + \frac{G'}{L}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Поэтому $\sin^2(i/2)$ (или γ) может быть выражен с любой степенью приближения степенным рядом относительно $-H/2L$ и G'/L. Возмущающая функция тогда будет иметь вид $C_0 + \sum C' \cos \theta'$, где

$$\theta' = il' + jg' + kh' + un_1 t + v.$$

Мы можем теперь проделать операции, описанные в предыдущем параграфе, выбрав модифицированную переменную l'' по формуле

$$l'' = il' + jg' + kh'.$$

Для справок мы соберем выражения для модифицированных переменных Делонэ через эллиптические элементы:

$$\begin{aligned}
L' &\equiv L = \sqrt{\mu a},\\
G' &\equiv G - L = \sqrt{\mu a}\left(\sqrt{1-e^2} - 1\right),\\
H' &\equiv H - G = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(\cos i - 1),\\
l' &= l + g + h = \text{средней долготе},\\
g' &= g + h = \tilde{\omega},\\
h' &= h = \Omega.
\end{aligned} \tag{9}$$

§ 11.07. Переменные Пуанкаре

Мы обозначим эти переменные пока через L_1, G_1, H_1; l_1, g_1, h_1. Первая пара переменных в обозначениях предыдущего параграфа выбирается следующим образом:

$$L_1 = L' = L, \quad l_1 = l' = l + g + h. \tag{1}$$

Предположим, что вторая пара определяется по формулам

$$G_1 = A \sin g', \quad g_1 = A \cos g', \tag{2}$$

где $g' = g + h$ и A, — вообще говоря, функция G' и g'. Аналогично условию (4) § 11.03 G_1 и g_1 будут сопряженными, если

$$\frac{\partial(G_1, g_1)}{\partial(G', g')} = 1, \tag{3}$$

откуда легко найти, что $A(\partial A/\partial G') = -1$. Поэтому мы можем для A принять следующее выражение: $A = \sqrt{-2G'}$.

Третью пару определим с помощью формул

$$H_1 = B \sin h', \quad h_1 = B \cos h'.$$

Применяя прием, аналогичный только что описанному при нахождении A, мы найдем, что $B = \sqrt{-2H'}$. Полная совокупность переменных тогда будет иметь вид

$$\begin{aligned}
L_1 &= L, & l_1 &= l + g + h,\\
G_1 &= \sqrt{-2G'}\sin g', & g_1 &= \sqrt{-2G'}\cos g',\\
H_1 &= \sqrt{-2H'}\sin h', & h_1 &= \sqrt{-2H'}\cos h',
\end{aligned} \tag{4}$$

Так как эти формулы преобразования не зависят явно от времени, то функция Гамильтона, выраженная в новых переменных, остается неизменной.

Для удобства мы примем следующие обозначения:

для первой пары: λ для l_1; тогда $\lambda = l + \tilde{\omega}$, так что λ — средняя долгота;

для второй пары: ξ для G_1 и η для g_1, ρ для $\sqrt{-2G'}$ и заменим g' на $\tilde{\omega}$; тогда $\xi = \rho \sin\tilde{\omega}$, $\eta = \rho\cos\tilde{\omega}$;

для третьей пары: u для H_1 и v для h_1, σ для $\sqrt{-2H'}$ и заменим h' на Ω; тогда $u = \sigma\sin\Omega$, $v = \sigma\cos\Omega$.

Таким образом, полная система переменных Пуанкаре будет такова:

$$\begin{aligned} &L = \sqrt{\mu a}, \qquad && \lambda = l + \tilde{\omega}, \\ &\xi = \rho\sin\tilde{\omega}, && \eta = \rho\cos\tilde{\omega}, \\ &u = \sigma\sin\Omega, && v = \sigma\cos\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

В предыдущем параграфе мы видели, что G' имеет порядок e^2 и H' — порядок γ^2. Таким образом, ρ имеет порядок e и σ — порядок γ. Следовательно, величины ξ и η будут порядка e, а u и v — порядка γ.

Пуанкаре назвал ξ и η *эксцентрическими* переменными, а u и v — *облическими* переменными.

Нужно заметить, что из новых переменных *только* λ, означающая среднюю долготу, является *угловой переменной*. В § 5.10, п. (3) мы ввели элементы h и k: $h = e\sin\tilde{\omega}$, $k = e\cos\tilde{\omega}$. Эти элементы очень похожи на ξ и η, так как ρ имеет порядок e.

Мы также ввели некоторые функции от l и Ω по формулам

$$p = \sin l \sin\Omega, \qquad q = \sin l \cos\Omega,$$

или, пренебрегая γ^3,

$$p = \gamma\sin\Omega, \qquad q = \gamma\cos\Omega.$$

Видно, что они близки к u и v в формулах (5), так как σ имеет порядок γ.

Если возмущающую функцию разложить в ряд по переменным Пуанкаре, то она примет вид[1])

$$R = \sum A\xi^a\eta^b\xi_1^c\eta_1^d u^e v^f u_1^g v_1^h \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (j\lambda + j_1\lambda_1), \tag{6}$$

где A — функция L, L_1 (индекс 1 относится к возмущающей планете), а

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ j,\ j_1$$

---

[1]) Poincaré, Méthods Nouvelles de la Mécanique Céleste, I, 1892, p. 32.

— положительные целые числа (за исключением j_1, которое может быть отрицательным), одно или более из которых может быть нулем.

В формуле (6) косинус следует писать в том случае, когда

$$a+c+e+g=2s,$$

где s — положительное целое число, а синус — когда

$$a+c+e+g=2s+1.$$

Если мы предположим, ради простоты, что e, e_1, γ и γ_1 — величины одного и того же порядка, то порядок величины O каждого члена в выражении (6) будет равен $a+b+c+d+e+f+g+h$ и связан с числами j и j_1, входящими в аргумент, формулой

$$O=|j+j_1|+2r,$$

где r, — вообще говоря, положительное целое число и может быть равным нулю.

Глава 12

ТЕОРИЯ ЛУНЫ ДЕЛОНЭ

§ 12.01. Введение

Наиболее исчерпывающее применение канонических элементов к небесной механике осуществил Делонэ в своей теории Луны. В результате двадцатилетней работы им была построена самая полная буквенная теория из когда-либо созданных в этой сложной проблеме. Вследствие того, что эта теория буквенная, окончательные формулы Делонэ могут быть использованы при исследованиях движения и других спутников.

Мы будем исходить из канонических уравнений для элементов Делонэ L, G, H; l, g, h, которые запишем в следующей краткой форме:

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = \frac{\partial R'}{\partial(l, g, h)}, \quad \frac{d}{dt}(l, g, h) = -\frac{\partial R'}{\partial(L, G, H)}, \tag{1}$$

где

$$R' \equiv R + \frac{\mu^2}{2L^2}, \tag{2}$$

причем R — первоначальная возмущающая функция.

Напишем также выражения для элементов Делонэ через эллиптические элементы

$$L = \sqrt{\mu a}, \qquad G = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \qquad H = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos I; \tag{3}$$

$$l = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}, \quad g = \tilde{\omega} - \Omega, \quad h = \Omega. \tag{4}$$

Формулы (18) и (19) § 7.06 дают разложение с точностью до членов четвертого порядка малости относительно величин m, e, γ, e_1 и a/a_1, причем последняя принимается за величину второго порядка. В этих формулах ξ, например, определяется равенством

$$\xi = (n - n_1)t + \varepsilon - \varepsilon_1 = l + \tilde{\omega} - n_1 t - \varepsilon_1,$$

а M, так же как и l, — средняя аномалия.

Для примера мы будем рассматривать в формуле (18) § 7.06 периодический член с аргументом $2\xi + M$ или $3l + 2g + 2h - 2n_1 t - 2\varepsilon_1$. Мы можем преобразовать этот аргумент, выразив его через модифицированные элементы Делонэ l', g', h', которые определяются формулами (3) § 11.06, т. е.

$$l' = l + g + h, \quad g' = g + h, \quad h' = h$$

или

$$l' = \text{средней долготе}, \quad g' = \tilde{\omega}, \quad h' = \Omega.$$

Этот аргумент тогда примет вид

$$3l' - g' - 2n_1 t - 2\varepsilon_1.$$

Для удобства мы будем опускать штрихи и писать этот аргумент в виде

$$3l - g - 2n_1 t - 2\varepsilon_1,$$

так что

$$l = \text{средней долготе}, \quad g = \tilde{\omega}, \quad h = \Omega. \tag{5}$$

Согласно формулам (3) настоящего параграфа и (1) § 11.06, соответствующие неугловые элементы, если опустить штрих, выражаются через кеплеровские элементы следующим образом:

$$\begin{gathered} L = \sqrt{\mu a}, \quad G = \sqrt{\mu a}\left(\sqrt{1 - e^2} - 1\right), \\ H = \sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}\,(\cos I - 1). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь G — малая величина порядка e^2 и H — малая величина порядка γ^2.

Канонические уравнения тогда будут иметь форму (1), где L, G, H; l, g, h определяются по формулам (6) и (5).

Согласно формуле (18) § 7.06, амплитуда рассматриваемого члена равна $^3/_4 m^2 n^2 a^2 e$, или $3\mu^2 m^2 e/4L^2$, если положить $n^2 = \mu a^{-3}$. Согласно формуле (7) § 11.06, имеем

$$e = \sqrt{-\frac{2G}{L}}\left(1 + \frac{G}{4L} \ldots\right).$$

Следовательно, амплитуда в рассматриваемом случае будет выражаться через L и G.

Аналогично из формулы (18) § 7.06 находим, что вековая часть в R', необходимо включающая член $\mu^2/2L^2$, равна

$$\frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^2 m^2}{4L^2}\left[1 + \frac{3}{2}\left(e^2 - \gamma^2 + e_1^2\right)\right]. \tag{7}$$

При помощи формул (6) она может быть выражена через L, G, H. Здесь e_1 — постоянная величина.

Метод Делонэ заключается в следующем: а) записываем R' в виде

$$R' = -B - \sum A\cos(il + jg + kh + qn_1 t + q'), \tag{8}$$

где i, j, k и q — положительные или отрицательные целые числа (включая нуль), q' — выражение, линейное относительно $\tilde{\omega}_1$, Ω_1 и ε_1 с числовыми коэффициентами, а B и A — функции L, G и H, определяемые формулами (6); б) выбираем один тригонометрический член из суммы (8); в) заменяем в уравнениях (1) R' функцией R_0, которую мы запишем для члена общего вида следующим образом:

$$R_0 = -B - A\cos(il + jg + kh + qn_1t + q'), \tag{9}$$

и полученную систему уравнений решаем методом Гамильтона — Якоби.

Разложение R' вида (8), использованное Делонэ, включает 320 периодических слагаемых и охватывает все члены до седьмого и некоторые до восьмого (включительно) порядка относительно малых величин.

§ 12.02. Вспомогательная функция S

Введем новые канонические переменные L', G', H'; l', g', h', которые связаны линейно со старыми, так что, согласно равенству (6) § 11.05, имеем

$$L'l' + G'g' + H'h' = Ll + Gg + Hh. \tag{1}$$

Прежде всего выберем l' и L' следующим образом:

$$l' = il + jg + kh, \tag{2}$$

$$L' = \frac{1}{i} L. \tag{3}$$

В формуле (3) предполагается, что $i \neq 0$.

Тогда равенство (1) примет вид

$$G'g' + H'h' = g\left(G - \frac{j}{i} L\right) + h\left(H - \frac{k}{i} L\right).$$

Условие (1) удовлетворится, если положить

$$g' = g, \quad h' = h \tag{4}$$

и

$$G' = G - \frac{j}{i} L, \quad H' = H - \frac{k}{i} L. \tag{5}$$

Следовательно, мы получаем новые канонические уравнения

$$\frac{d(L', G', H')}{dt} = \frac{\partial R_0}{\partial(l', g', h')}, \quad \frac{d}{dt}(l', g', h') = -\frac{\partial R_0}{\partial(L', G', H')}, \tag{6}$$

в которых

$$R_0 = -B - A\cos(l' + qn_1t + q'), \tag{7}$$

причем предполагается, что A и B при помощи равенств (3) и (5) выражены через L', G', H'.

Так как формула (7) не содержит g' и h', то из уравнений (6) мы имеем $\dot{G}' = \dot{H}' = 0$. Таким образом, G' и H' являются постоянными, которые мы в дальнейшем отождествим с двумя каноническими постоянными, появляющимися при решении уравнений (6).

В соответствии со способом выбора новых переменных мы будем рассматривать L' и l' как основные канонические переменные[1]).

Используя обозначения, принятые в общей теории, отождествим величины L', G', H' с обобщенными координатами q_1, q_2, q_3, величины l', g', h' — с соответствующими сопряженными величинами p_1, p_2, p_3 и R_0 — с функцией Гамильтона $H(q, p, t)$.

Мы решим уравнения (6), если найдем *любую* функцию (6)

$$S(q, \alpha, t) \equiv S(L', \alpha, t),$$

содержащую три независимые постоянные α_1, α_2, α_3 и удовлетворяющую уравнению Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - B - A\cos\left(\frac{\partial S}{\partial L'} + qn_1t + q'\right) = 0. \tag{8}$$

Положим

$$S = S' - (qn_1t + q')L'. \tag{9}$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial S'}{\partial t} - qn_1L' - B - A\cos\left(\frac{\partial S'}{\partial L'}\right) = 0. \tag{10}$$

Так как t не входит явно в это уравнение, то $\partial S'/\partial t = C$, где C — постоянная, которую мы отождествим с постоянной α_1, фигурирующей в общей теории.

Пусть

$$B_1 = B + qn_1L'. \tag{11}$$

Тогда из уравнения (10) находим

$$\frac{\partial S'}{\partial L'} = \arccos\left(\frac{C - B_1}{A}\right). \tag{12}$$

Следовательно,

$$S' = Ct + \int\limits_X^{L'} \arccos\left(\frac{C - B_1}{A}\right) dL' + D, \tag{13}$$

где D — постоянная, а нижний предел интегрирования X есть функция C, G', H' и будет определен особо. Подынтегральная функция зависит от L', G', H' и C, причем G', H' и C — постоянные. Таким образом, этот интеграл может быть вычислен по крайней мере в принципе.

В процессе решения уравнения (8) мы ввели пока только одну из трех постоянных α, именно C. Следовательно, D должно быть функцией α_2 и α_3 и, конечно, должно быть постоянным. Простейшая форма D следующая:

$$D = \alpha_2G' + \alpha_3H'. \tag{14}$$

---

[1]) Если бы $i = 0$ и $j \neq 0$, то вместо равенств (2) и (3) мы использовали бы формулы $g' = jg + kh$, $G' = G/j$ и тогда G' и g' рассматривались бы как основные канонические переменные.

Это согласуется с требованием, чтобы S была *любой* функцией, содержащей три произвольные постоянные и удовлетворяющей уравнению (8).

Принимая обозначения Делонэ, мы положим $\alpha_2 = (g)$, $\alpha_3 = (h)$. Тогда из формул (9), (13) и (14) имеем

$$S = Ct - (qn_1t + q')L' + S_1 + (g)G' + (h)H', \tag{15}$$

где через S_1 обозначен следующий интеграл:

$$S_1 = \int\limits_X^{L'} \arccos\left(\frac{C - B_1}{A}\right) dL'. \tag{16}$$

§ 12.03. Формальное решение

Решение уравнений (6) § 12.02, вытекающее из выражения (15) § 12.02, будет

$$\beta_1 \equiv \frac{\partial S}{\partial C} = t + \frac{\partial S_1}{\partial C}, \tag{1}$$

$$\beta_2 \equiv \frac{\partial S}{\partial (g)} = G', \tag{2}$$

$$\beta_3 \equiv \frac{\partial S}{\partial (h)} = H', \tag{3}$$

$$l' \equiv \frac{\partial S}{\partial L'} = \frac{\partial S_1}{\partial L'} - (qn_1t + q'), \tag{4}$$

$$g' \equiv \frac{\partial S}{\partial G'} = (g) + \frac{\partial S}{\partial G'}, \tag{5}$$

$$h' \equiv \frac{\partial S}{\partial H'} = (h) + \frac{\partial S_1}{\partial H'}. \tag{6}$$

Ранее мы видели, что G' и H' — постоянные, а равенства (2) и (3) показывают, что G' и H' суть канонические постоянные, которые являются сопряженными с α_2 и α_3, т. е. (g) и (h).

Здесь будет уместно привести формулы, определяющие введенные канонические постоянные (за исключением β_1, которую мы определим позже):

$$\alpha_1 = C, \quad \alpha_2 = (g), \quad \alpha_3 = (h),$$
$$\beta_2 = G', \quad \beta_3 = H'.$$

Так как S_1 — функция переменной L' и постоянных G', H' и C, то уравнение (1) можно в принципе решить так, чтобы можно было представить L' в виде функции $t - \beta_1$, G', H' и C. Тогда мы сможем написать

$$L' \equiv L'(t - \beta_1;\ G',\ H',\ C). \tag{7}$$

Пусть θ определяется формулой

$$\theta = l' + qn_1 t + q'. \tag{8}$$

Тогда θ будет аргументом косинуса в формулах (7) и (8) § 12.02. Поэтому из равенства (4) мы имеем

$$\theta = \frac{\partial S_1}{\partial L'} = \arccos\left(\frac{C-B}{A}\right) \tag{9}$$

или

$$C - B_1 = A\cos\theta. \tag{10}$$

Таким образом, θ может быть выражена через L', G', H' и C. Мы сможем тогда записать формулу (16) § 12.02 в виде

$$S_1 = \int\limits_X^{L'} \theta\, dL' = \int\limits_X^{L'} \arccos\left(\frac{C-B_1}{A}\right) dL'. \tag{11}$$

Мы теперь определим X как то значение L', которое соответствует нулевому значению θ. В таком случае из формулы (10) найдем, что X есть корень уравнения

$$C - B_1 = A$$

и является, как это следует из предыдущего, функцией от C, G' и H'.

§ 12.04. Форма решения уравнений для L' и l'

Рассмотрим два основных уравнения

$$\dot{L}' = \frac{\partial R_0}{\partial l'}, \quad \dot{l}' = -\frac{\partial R_0}{\partial L'}, \tag{1}$$

где

$$R_0 = -B - A\cos(l' + qn_1 t + q') = -B - A\cos\theta$$

и θ дается формулой (8) § 12.03. Тогда

$$\dot{L}' = A\sin\theta \tag{2}$$

и

$$\dot{l}' = \dot{\theta} - qn_1 = \frac{\partial B}{\partial L'} + \frac{\partial A}{\partial L'}\cos\theta;$$

или, принимая во внимание формулу (11) § 12.02,

$$\dot{\theta} = \frac{\partial B_1}{\partial L'} + \frac{\partial A}{\partial L'}\cos\theta. \tag{3}$$

Это уравнение для удобства запишем в виде

$$\dot{\theta} = B' + A'\cos\theta,$$

где A' и B' — функции L', G', H'.

Далее, выражение для возмущающей функции показывает, что A и, следовательно, A' имеют по крайней мере порядок m^2 и что B и B_1 — величины нулевого порядка, поскольку в R' входит аддитивный член $\mu^2/2L^2$. Так как, согласно сказанному, A — малая величина порядка m^2, то если отбросить члены порядка m^2, мы сможем записать уравнение (2) в виде $\dot{L}'=0$, откуда в первом приближении находим, что $L'=L_0$, где L_0 — постоянная, имеющая нулевой порядок.

Тогда первое приближение для θ может быть найдено из уравнения (3), если отбросить A' и подставить L_0 вместо L' в выражении для B', причем B' теперь будет равно некоторой постоянной B_0'. Тогда, полагая

$$\dot{\theta}=B_0'\equiv\theta_0,$$

получаем

$$\theta=\theta_0(t+c)\equiv\lambda, \tag{4}$$

где c — постоянная интегрирования. Очевидно, что θ_0 — величина нулевого порядка, так как B_0' имеет нулевой порядок.

Рассмотрим теперь второе приближение. Положим

$$L'=L_0+L_1', \quad \theta=\lambda+\theta_1',$$

где L_1' и θ_1' — малые порядка m^2. Тогда с рассматриваемой точностью уравнение (2) примет вид $\dot{L}_1'=A_0\sin\lambda$, причем A_0 — значение A при $L'=L_0$. Поэтому

$$L'=L_0+L_1\cos\lambda, \tag{5}$$

где $L_1=-A_0/\theta_0$ — малая порядка m^2.

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$\dot{\theta}\equiv\dot{\lambda}+\dot{\theta}_1'=B'+A_0'\cos\lambda,$$

и, разлагая B' в ряд Тейлора, находим с точностью членов порядка m^2

$$B'=B_0'+\left(\frac{\partial B'}{\partial L'}\right)_0 L_1'.$$

Но $L_1'=L_1\cos\lambda$. Поэтому

$$\dot{\lambda}+\dot{\theta}_1'=\theta_0+\left[A_0'+\left(\frac{\partial B'}{\partial L'}\right)_0 L_1\right]\cos\lambda,$$

откуда, поскольку в первом приближении $\dot{\lambda}=\theta_0$, находим

$$\theta_1'=\theta_1\sin\lambda,$$

где

$$\theta_1=\frac{1}{\theta_0}\left[A_0'+\left(\frac{\partial B'}{\partial L'}\right)_0 L_1\right].$$

Решение во втором приближении имеет вид

$$L' = L_0 + L_1 \cos\lambda, \quad \theta = \lambda + \theta_1 \sin\lambda,$$

причем

$$\lambda = \theta_0 (t + c).$$

Очевидно, что в более высоких приближениях мы можем представить решения (2) и (3) в виде рядов

$$L' = L_0 + \sum_{p=1} L_p \cos p\theta_0 (t + c), \tag{6}$$

$$\theta = \theta_0 (t + c) + \sum_{p=1} \theta_p \sin p\theta_0 (t + c), \tag{7}$$

где L_0, θ_0, L_p, θ_p — функции C, G' и H'.

Согласно формуле (8) § 12.03, ряд для l' будет иметь вид

$$l' = \theta_0 (t + c) - qn_1 t - q' + \sum \theta_p \sin p\theta_0 (t + c). \tag{8}$$

Нужно иметь в виду, что значительная часть операций состоит в получении рядов (6) и (7) по степеням m и e, e_1, γ, γ_1, a/a_1. Мы рассмотрим более подробно эту часть задачи в § 12.17.

Как уже было показано, θ_0 имеет нулевой порядок, а L_1 и θ_1 — малые величины порядка m^2. В формулах (6) и (7) L_p и θ_p $(p > 1)$ — величины более высокого порядка, чем m^2. Оценивая порядок величин, мы придем к выводу, что A имеет наименьший порядок, т. е. порядок m^2.

§ 12.05. Определение β_1

Рассмотрим уравнение (1) § 12.03, т. е.

$$\beta_1 = t + \frac{\partial S_1}{\partial C}, \tag{1}$$

где

$$S_1 = \int_X^{L'} \theta \, dL'.$$

Мы будем иметь

$$\beta_1 - t = \int_X^{L'} \frac{\partial \theta}{\partial C} dL' - (\theta) \frac{\partial X}{\partial C}, \tag{2}$$

где (θ) равно значению θ при $L' = X$. Следовательно, по определению, $(\theta) = 0$.

Далее, так как $\cos\theta = (C - B_1)/A$, то, принимая во внимание формулу (2) § 12.04, имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial C} = -\frac{1}{A \sin\theta} = -\frac{1}{L'}.$$

Поэтому из уравнения (2) будем иметь

$$\beta_1 - t = -\int_{t_0}^{t} dt = t_0 - t,$$

где $t_0 (\equiv \beta_1)$ есть то значение t, при котором $L' = X$, т. е. $\theta = 0$. Но из формулы (7) § 12.04 следует, что $\theta = 0$, когда $t = -c$. Отсюда находим, что

$$\beta_1 = t_0 = -c.$$

Уравнение (1) теперь можно записать в виде

$$t + c = -\frac{\partial S_1}{\partial C}. \tag{3}$$

Далее, S_1 — функция L', G', H' и C, из которых только L' является переменной. Таким образом, уравнение (3) дает нам возможность в принципе выразить L' через $t+c$, G', H' и C, причем L' фактически будет выражаться рядом (6) § 12.04.

§ 12.06. Формулы для g' и h'

Рассмотрим уравнение (5) § 12.03, т. е.

$$g' = (g) + \frac{\partial S_1}{\partial G'} = (g) + \int_X^{L'} \frac{\partial \theta}{\partial G'} dL' - (\theta) \frac{\partial X}{\partial G'}. \tag{1}$$

Как и в предыдущем параграфе, $(\theta) = 0$. Далее,

$$\cos\theta = \frac{C - B_1}{A},$$

где B_1 и A — функции G'. Поэтому

$$A \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial G_1} = \frac{\partial B_1}{\partial G'} + \frac{C - B_1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial G'} \equiv F(C, L', G', H'). \tag{2}$$

Тогда так как $\dot{L}' = A \sin\theta$ и $t = -c$, когда $L' = X$, то уравнение (1) принимает вид

$$g' = (g) + \int_{-c}^{t} F(C, L', G', H')\, dt.$$

Поскольку L' выражается рядом (6) § 12.04 по косинусам, то, очевидно, функция F может быть разложена в тригонометрический ряд вида

$$F = g_0 + \sum D_p \cos p\theta_0 (t + c). \tag{3}$$

Поэтому, интегрируя, найдем

$$g' = (g) + g_0(t+c) + \sum g_p \sin p\theta_0 (t+c), \tag{4}$$

где

$$g_p = \frac{D_p}{p\theta_0}.$$

Заметим, что постоянная интегрирования в формуле (4) равна $g_0 c$, так что, согласно уравнению (1), $g' = (g)$, когда $L' = X$, т. е. когда $t = -c$. Аналогично

$$h' = (h) + h_0(t+c) + \sum h_p \sin p\theta_0 (t+c).$$

Важно знать порядок величин g_0 и h_0. Мы рассмотрим сначала g_0.

Так как $A\cos\theta = C - B_1$, то функцию F можно представить в виде

$$F = \frac{\partial B_1}{\partial G'} + \frac{\partial A}{\partial G'} \cos\theta. \tag{5}$$

С достаточной для нашей цели точностью мы напишем

$$L' = L_0 + L_1 \cos\lambda,$$

где $\lambda = \theta_0(t+c)$.

Тогда приближенно имеем

$$\frac{\partial B_1}{\partial G'} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial G'}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial L' \, \partial G'}\right)_0 L_1 \cos\lambda, \tag{6}$$

где значок 0 означает, что после дифференцирования нужно положить $L' = L_0$. Аналогично

$$\frac{\partial A}{\partial G'} = \left(\frac{\partial A}{\partial G'}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial L' \, \partial G'}\right)_0 L_1 \cos\lambda_1. \tag{7}$$

В формуле (5) можно написать $\cos\theta = \cos\lambda$. Далее, g_0 есть непериодическая часть F. Поэтому из формул (6) и (7) с достаточной степенью точности находим, что

$$g_0 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial G'}\right)_0 + \frac{1}{2} L_1 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial L' \, \partial G'}\right)_0. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала B_1. Согласно формулам (7) § 12.01 и (11) § 12.02, имеем

$$B_1 = q n_1 L' - \frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\mu^2 m^2}{4L^2}\left[1 + \frac{3}{2}(e^2 - \gamma^2 + e_1^2)\right].$$

Следовательно, нам достаточно рассмотреть только член, содержащий e^2. Так как

$$G = L\left(\sqrt{1-e^2}-1\right) \approx -\frac{1}{2}e^2L$$

и

$$G' = G - jL',$$

то очевидно, что $(\partial B_1/\partial G')_0$ есть малая величина порядка m^2.

Мы примем, что величина A является в разложении возмущающей функции коэффициентом наименьшего порядка, содержащим e, и можем поэтому написать $A = \alpha m^2 e$, где α не зависит от m и e. Тогда если предположить, что e и m имеют один и тот же порядок, то

$$\frac{\partial A}{\partial G'} = \frac{\partial A}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial G'} = -\frac{\alpha m^2}{eL} \equiv O(m).$$

Кроме того, $\dfrac{\partial^2 A}{\partial L'\,\partial G'}$ — малая величина порядка m, так как дифференцирование по L' по меньшей мере оставляет порядок величины неизменным. Так как L_1 есть по крайней мере малая порядка m^2, то порядок g_0 совпадает с порядком первого члена правой части равенства (8). Мы заключаем тогда, что g_0 — малая порядка m^2. Аналогично h_0 — малая порядка m^2.

Легко видеть, что g_1 и h_1 имеют еще более высокий порядок и, кроме того, что порядок g_p и h_p увеличивается вместе с увеличением p.

§ 12.07. Сопоставление результатов

Удобно собрать главные результаты, которые только что были получены. Они выражаются следующими формулами:

$$L' = L_0 + \sum L_p \cos p\theta_0 (t+c), \tag{1}$$

$$G' = \text{const}, \qquad H' = \text{const},$$

$$l' = \theta_0(t+c) - qn_1 t - q' + \sum \theta_p \sin p\theta_0 (t+c), \tag{2}$$

$$g \equiv g' = (g) + g_0(t+c) + \sum g_p \sin p\theta_0(t+c), \tag{3}$$

$$h \equiv h' = (h) + h_0(t+c) + \sum h_p \sin p\theta_0(t+c), \tag{4}$$

где $p = 1, 2, \ldots$.

Первоначальные модифицированные переменные Делонэ даются формулами (6) и (5) § 12.01; они могут быть легко представлены в виде рядов. Так, при помощи формулы (1) немедленно определяются следующие величины: $L = iL'$, $G = jL' + G'$, $H = kL' + H'$. Затем g и h определяются формулами (3) и (4).

Так как $l' = il + jg + kh$, то мы можем написать

$$l = (l) + l_0(t+c) - \frac{1}{i}(qn_1t + q') + \sum l_p \sin p\theta_0(t+c), \tag{5}$$

где

$$(l) = -\frac{1}{i}[j(g) + k(h)], \qquad l_0 = \frac{1}{i}[\theta_0 - jg_0 - kh_0],$$

$$l_p = \frac{1}{i}[\theta_p - jg_p - kh_p]. \tag{6}$$

Приведем для справок выражения канонических постоянных, которые получаются при решении, через канонические постоянные общей теории:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C, & \alpha_2 &= (g), & \alpha_3 &= (h), \\ \beta_1 &= -c, & \beta_2 &= G', & \beta_3 &= H'. \end{aligned} \tag{7}$$

Решив канонические уравнения с функцией Гамильтона R_0, являющейся частью от всей функции Гамильтона R', которую мы запишем в виде

$$R' = R_0 - (-R_1), \tag{8}$$

мы примем величины, эквивалентные α и β, в качестве новых канонических переменных. Новые канонические уравнения с функцией Гамильтона $-R_1$ имеют вид

$$\dot{C} = \frac{\partial R_1}{\partial c}, \qquad \dot{G}' = \frac{\partial R_1}{\partial (g)}, \qquad \dot{H}' = \frac{\partial R_1}{\partial (h)}; \tag{9}$$

$$\dot{c} = -\frac{\partial R_1}{\partial C}, \qquad (\dot{g}) = -\frac{\partial R_1}{\partial G'}, \qquad (\dot{h}) = -\frac{\partial R_1}{\partial H'}, \tag{10}$$

где функция R_1 теперь предполагается выраженной через новые переменные C, G', H'; c, (g), (h).

§ 12.08. Вторая операция

Перед тем как подставить в R_1 выражения, определяющие решение, полученное в предыдущих параграфах, рассмотрим общий член разложения этой функции. Такой член имеет вид

$$D\cos(i_1 l + j_1 g + k_1 h + q_1 n_1 t + q_1'), \tag{1}$$

где $D = D(L, G, H)$. Из предыдущего параграфа, очевидно, следует, что функция D может быть представлена в виде ряда

$$D = D_0 + \sum D_p \cos p\theta_0(t+c),$$

где D — функция от C, G' и H' и $p = 1, 2, \ldots$.

Аргумент косинуса в формуле (1) при помощи формул (3) — (5) § 12.08 приводится к виду

$$i_1(l)+j_1(g)+k_1(h)+(q_1-i_1q)n_1t+q_1'-i_1q'+$$
$$+(t+c)(i_1l_0+j_1g_0+k_1h_0)+\sum E_p \sin p\theta_0(t+c),$$

где

$$E_p=i_1l_p+j_1g_p+k_1h_p.$$

Следовательно, так как E_p — малая величина по крайней мере порядка m^2, то выражение (1) может быть разложено в ряд вида

$$\sum A^* \cos\theta^*, \tag{2}$$

где

$$\theta^*=i_1(l)+j_1(g)+k_1(h)+(q_1-i_1q)n_1t+$$
$$+q_1'-i_1q'+(t+c)(i_1l_0+j_1g_0+k_1h_0\pm p\theta_0) \tag{3}$$

и

$$A^*=A^*(C,\ G',\ H').$$

Аналогичным образом все другие члены в R_1 могут быть представлены рядами вида (2). Следовательно, мы можем рассматривать выражение (2) как общую форму, которую принимает R_1, когда все преобразования к новым каноническим переменным C, G', H'; c, (g), (h) выполнены.

Рассмотрим каноническое уравнение

$$\dot c=-\frac{\partial R_1}{\partial C}.$$

Обозначая коэффициент при $t+c$ в формуле (3) через Q, мы из выражения (2) получаем

$$\dot c=-\sum\frac{\partial A^*}{\partial C}\cos\theta^*+(t+c)\sum A^*\frac{\partial\theta}{\partial C}\sin\theta^*, \tag{4}$$

причем Q — функция C, G', H'.

Очевидно, что $(\dot g)$, $(\dot h)$ будут выражаться уравнениями, аналогичными (4).

Наличие множителя $t+c$ вне знака тригонометрической функции в трех уравнениях типа (4) вызывает те же аналитические трудности, что были описаны в § 11.01. Там мы ввели новую пару переменных L и l, при помощи которых эта трудность преодолевается. В настоящем изложении, соответствующем более общему случаю, нам потребуется сделать и замену переменных более общего вида.

§ 12.09. Новая переменная λ

Возвратимся к формуле (3) § 12.05:

$$t+c=-\frac{\partial S_1}{\partial C}, \tag{1}$$

где

$$S_1\equiv S_1(L',\ G',\ H',\ C)=\int\limits_X^{L'}\theta dL', \tag{2}$$

причем предполагается, что явное выражение для S_1 определено.

Выразим теперь S_1 через время посредством формулы

$$L'=L_0+\sum L_p\cos p\lambda, \tag{3}$$

где $\lambda=\theta_0(t+c)$. Пусть $K(t+c;\ C,\ G',\ H')$ обозначает функцию, полученную после такого преобразования. Тогда после подстановки в S_1 выражения (3) мы имеем тождественно

$$K(t+c;\ C,\ G',\ H')\equiv S_1(L',\ G',\ H',\ C), \tag{4}$$

откуда

$$\frac{\partial K}{\partial C}=\frac{\partial S_1}{\partial L'}\cdot\frac{\partial L'}{\partial C}+\frac{\partial S_1}{\partial C}.$$

Далее, согласно формуле (9) § 12.03, имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial L'}=\theta \tag{5}$$

и, используя формулу (1), получаем

$$t+c+\frac{\partial K}{\partial C}=\theta\frac{\partial L'}{\partial C}. \tag{6}$$

Следовательно, мы будем иметь тождество

$$\begin{aligned}t+c+\frac{\partial K}{\partial C}&=\left[\theta_0(t+c)+\sum\theta_p\sin p\lambda\right]\times\\ &\times\left[\frac{\partial L_0}{\partial C}+\sum\frac{\partial L_0}{\partial C}\cos p\lambda-(t+c)\frac{\partial\theta_0}{\partial C}\sum pL_p\sin p\lambda\right]=\\ &=(t+c)\left[\theta_0\frac{\partial L_0}{\partial C}-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial C}\sum pL_p\theta_p\right]+X,\end{aligned}$$

где через X обозначены члены вида

$$X=\text{п. ч.}+(t+c)\,[\text{п. ч.}]+(t+c)^2\,[\text{п. ч.}]. \tag{8}$$

С другой стороны, из формулы (2) имеем

$$S_1=\int\limits_X^{L'}\theta\, dL'=\int\limits_{-c}^{t}\theta\frac{dL'}{dt}dt.$$

Поэтому

$$K=\int_0^\lambda \theta \frac{dL'}{d\lambda}\,d\lambda. \qquad (9)$$

Далее,

$$\theta \frac{dL'}{d\lambda}=-\left[\lambda+\sum \theta_p \sin p\lambda\right]\left[\sum pL_p \sin p\lambda\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}(L_1\theta_1+2L_2\theta_2+3L_3\theta_3+\ldots)+\text{п. ч.}+(t+c)\,[\text{п. ч.}]. \qquad (10)$$

Интегрируя равенства (9) и (10), получаем

$$K=-\frac{1}{2}\theta_0(t+c)\sum pL_p\theta_p+\text{п. ч.}+(t+c)\,[\text{п. ч.}], \qquad (11)$$

причем постоянная интегрирования равна нулю, так как, согласно равенству (9), $K=0$ при $t=-c$.

Из формулы (11) находим

$$\frac{\partial K}{\partial C}=-\frac{1}{2}(t+c)\frac{\partial}{\partial C}\left[\theta_0\sum pL_p\theta_p\right]+Y, \qquad (12)$$

где Y имеет, как и X, форму (8).

Подставим выражение (12) в формулу (7) и приравняем непериодические коэффициенты при $t+c$. Тогда получим

$$1-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial C}\left[\theta_0\sum pL_p\theta_p\right]=\theta_0\frac{\partial L_0}{\partial C}-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial C}\sum pL_p\theta_p, \qquad (13)$$

откуда

$$1=\theta_0\frac{\partial}{\partial C}\left[L_0+\frac{1}{2}\sum pL_p\theta_p\right]. \qquad (14)$$

Пусть Λ определяется формулой

$$\Lambda=L_0+\frac{1}{2}\sum pL_p\theta_p. \qquad (15)$$

Тогда Λ будет функцией от C, G', H'. Из равенства (14) имеем

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial C}=\frac{1}{\theta_0}. \qquad (16)$$

В дальнейшем Λ будет принята в качестве новой канонической переменной вместо C.

§ 12.10. Свойства Λ

Рассмотрим теперь формулу (5) § 12.03:

$$g'=(g)+\frac{\partial S_1}{\partial G'}. \qquad (1)$$

Так как $L'\equiv L'(C, G', H')$, то из формулы (4) § 12.09 имеем

$$\frac{\partial K}{\partial G'}=\frac{\partial S_1}{\partial L'}\cdot\frac{\partial L'}{\partial G'}+\frac{\partial S_1}{\partial G'},$$

откуда, принимая во внимание формулу (1) настоящего параграфа и формулу (5) § 12.09, получаем

$$g' = (g) + \frac{\partial K}{\partial G'} - \theta \frac{\partial L'}{\partial G'}. \tag{2}$$

Это равенство станет тождеством, если мы подставим вместо g' выражение

$$(g) + g_0(t+c) + \sum g_p \sin p\lambda$$

и L' заменим по формуле (3) § 12.09.

Тогда из формулы (2) будем иметь

$$-g_0(t+c) + \frac{\partial K}{\partial G'} = \theta \frac{\partial L'}{\partial G'} + \text{п. ч.} \tag{3}$$

Сравним это уравнение с уравнением (6) § 12.09, т. е.

$$t + c + \frac{\partial K}{\partial C} = \theta \frac{\partial L'}{\partial C}. \tag{4}$$

Последующие преобразования формулы (3) будут идентичны тем, которые выполнялись при выводе формулы (13) § 12.09, если мы заменим C на G' и коэффициент (единицу) при t в уравнении (4) на $-g_0$ в уравнении (3). Мы тогда получим

$$-g_0 = \theta_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial G'}. \tag{5}$$

Аналогичную формулу можно записать и для h_0.

Таким образом, Λ как функция C, G', H' имеет, согласно формуле (16) § 12.09 и формуле (5), следующие свойства:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C} = \frac{1}{\theta_0}, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial G'} = -\frac{g_0}{\theta_0}, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial H'} = -\frac{h_0}{\theta_0}. \tag{6}$$

§ 12.11. Новые канонические переменные

Так как

$$\Lambda \equiv \Lambda(C, G', H'), \tag{1}$$

то

$$d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial C} dC + \frac{\partial \Lambda}{\partial G'} dG' + \frac{\partial \Lambda}{\partial H'} dH',$$

или, согласно равенствам (6) § 12.10,

$$dC = \theta_0 d\Lambda + g_0 dG' + h_0 dH'. \tag{2}$$

Однако из формулы (1) мы можем выразить C в виде $C(\Lambda, G', H')$. Поэтому

$$dC = \frac{\partial C}{\partial \Lambda} d\Lambda + \frac{\partial C}{\partial G'} dG' + \frac{\partial C}{\partial H'} dH'.$$

Сравнивая это выражение с формулой (2), имеем

$$\frac{\partial C}{\partial \Lambda}=\theta_0,\quad \frac{\partial C}{\partial G'}=g_0,\quad \frac{\partial C}{\partial H'}=h_0. \tag{3}$$

Сохраним G' и H' в качестве новых переменных. Тогда неугловыми переменными будут Λ, G', H'.

Пусть λ, χ и η означают непериодические члены в формулах для l', g', h' [1]). Они, как показывают формулы (2)—(4) § 12.07, имеют вид

$$\lambda=\theta_0(t+c)-qn_1t-q', \tag{4}$$

$$\chi=(g)+g_0(t+c), \tag{5}$$

$$\eta=(h)+h_0(t+c). \tag{6}$$

Мы теперь покажем, что Λ, λ; G', χ; H', η являются попарно сопряженными каноническими переменными.

§ 12.12. Уравнения для $\dot\Lambda$, $\dot G'$, $\dot H'$

Уравнения, которые нам нужно преобразовать, имеют вид (9) § 12.07, т. е.

$$\dot C=\frac{\partial R_1}{\partial c},\quad \dot G'=\frac{\partial R_1}{\partial (g)},\quad \dot H'=\frac{\partial R_1}{\partial (h)}. \tag{1}$$

Мы предположим, что функция Гамильтона R_1 преобразована к новым переменным, и обозначим ее через R'. Тогда мы будем иметь тождество

$$R_1(C,\ G',\ H';\ c,\ (g),\ (h))\equiv R'(\Lambda,\ G',\ H';\ \lambda,\ \chi,\ \eta). \tag{2}$$

Рассмотрим сначала второе из уравнений (1). Из формулы (5) § 12.11 видно, что (g) входит в уравнения только через χ. Поэтому из тождества (2) находим

$$\frac{\partial R_1}{\partial (g)}=\frac{\partial R'}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial (g)}=\frac{\partial R'}{\partial \chi}. \tag{3}$$

Аналогично

$$\frac{\partial R_1}{\partial (h)}=\frac{\partial R'}{\partial \eta}. \tag{4}$$

Поэтому из формул (1), (3) и (4) получаем

$$\dot G'=\frac{\partial R'}{\partial \chi},\quad \dot H'=\frac{\partial R'}{\partial \eta}. \tag{5}$$

---

[1]) λ в формуле (4) не следует смешивать с λ, которое использовано в предыдущих параграфах как краткая запись $\theta_0(t+c)$.

Рассмотрим теперь первое из уравнений (1). Из формул (4) — (6) § 12.11 видно, что c входит в уравнения посредством λ, χ и η. Поэтому

$$\frac{\partial R_1}{\partial c}=\frac{\partial R'}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial c}+\frac{\partial R'}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial c}+\frac{\partial R'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial c},$$

т. е.

$$\dot{C}=\theta_0\frac{\partial R'}{\partial \lambda}+g_0\frac{\partial R'}{\partial \chi}+h_0\frac{\partial R'}{\partial \eta}.$$

Кроме того, из формулы (2) § 12.11 имеем

$$\dot{C}=\theta_0\dot{\Lambda}+g_0\dot{G}'+h_0\dot{H}'.$$

Эти два выражения для $\dot{C}$ должны быть тождественны, и так как, согласно формулам (5), коэффициенты при g_0 и h_0 в обоих выражениях те же самые, то мы получим

$$\dot{\Lambda}=\frac{\partial R'}{\partial \lambda}.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{\Lambda}=\frac{\partial R'}{\partial \lambda},\qquad \dot{G}'=\frac{\partial R'}{\partial \chi},\qquad \dot{H}'=\frac{\partial R'}{\partial \eta}. \tag{6}$$

§ 12.13. Уравнения для $\dot{\chi}$ и $\dot{\eta}$

Теперь преобразуем второе и третье уравнения (10) § 12.07, т. е.

$$(\dot{g})=-\frac{\partial R_1}{\partial G'},\qquad (\dot{h})=-\frac{\partial R_1}{\partial H'}. \tag{1}$$

Из формулы (5) § 12.07 имеем

$$\dot{\chi}=(\dot{g})+g_0+g_0\dot{c}+(t+c)\dot{g}_0. \tag{2}$$

Вследствие формул (1) настоящего параграфа и (10) § 12.07 это уравнение принимает вид

$$\dot{\chi}=-\frac{\partial R_1}{\partial G'}+g_0-g_0\frac{\partial R_1}{\partial C}+(t+c)\dot{g}_0. \tag{3}$$

Так как g_0 является функцией C, G', H', то, если C выразить через Λ, G', H', она станет функцией Λ, G', H'. Поэтому

$$\dot{g}_0=\frac{\partial g_0}{\partial \Lambda}\dot{\Lambda}+\frac{\partial g_0}{\partial G'}\dot{G}'+\frac{\partial g_0}{\partial H'}\dot{H}'. \tag{4}$$

Однако, согласно уравнениям (3) § 12.11, имеем

$$\frac{\partial g_0}{\partial \Lambda}=\frac{\partial^2 C}{\partial \Lambda\,\partial G'}=\frac{\partial \theta_0}{\partial G'},$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial H'}=\frac{\partial^2 C}{\partial H'\,\partial G'}=\frac{\partial h_0}{\partial G'}.$$

Следовательно, если воспользоваться формулами (6) § 12.12, то уравнение (4) примет вид

$$\dot{g}_0 = \frac{\partial \theta_0}{\partial G'} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_0}{\partial G'} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \chi} + \frac{\partial h_0}{\partial G'} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \eta}. \tag{5}$$

Далее, из тождества

$$R_1(C,\ G',\ H';\ c,\ (g),\ (h)) \equiv R'(\Lambda,\ G',\ H';\ \lambda,\ \chi,\ \eta), \tag{6}$$

выражая в его левой части C через Λ, G' и H', заменяя в его правой части λ, χ и η по формулам (4)—(6) § 12.11 и дифференцируя по G', мы найдем

$$\frac{\partial R_1}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial G'} + \frac{\partial R_1}{\partial G'} = \frac{\partial R'}{\partial G'} + (t + c)\left(\frac{\partial R'}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \theta_0}{\partial G'} + \frac{\partial R'}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial g_0}{\partial G'} + \frac{\partial R'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial G'}\right).$$

Последнее уравнение, принимая во внимание уравнение (5), можно записать в виде

$$\frac{\partial R_1}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial G} + \frac{\partial R_1}{\partial G'} = \frac{\partial R'}{\partial G'} + (t + c)\dot{g}_0.$$

Вычитая это уравнение из уравнения (3), получаем

$$\dot{\chi} - \frac{\partial R_1}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial G'} = g_0 - g_0 \frac{\partial R_1}{\partial C} - \frac{\partial R'}{\partial G'}.$$

Но, как мы видели в § 12.11, $g_0 = \partial C/\partial G'$. Поэтому

$$\dot{\chi} = -\frac{\partial}{\partial G'}(R' - C). \tag{7}$$

Аналогично находим, что

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial}{\partial H'}(R' - C). \tag{8}$$

§ 12.14. Уравнение для $\dot{\lambda}$

Уравнение, подлежащее преобразованию, имеет вид

$$\dot{c} = -\frac{\partial R_1}{\partial C}. \tag{1}$$

Так как

$$\lambda = \theta_0(t + c) - qn_1 t - q',$$

то

$$\dot{\lambda} = \theta_0 - qn_1 + \theta_0 \dot{c} + (t + c)\dot{\theta}_0. \tag{2}$$

При помощи приема, уже использованного при выводе уравнения (5) § 12.13, находим, что

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\partial \theta_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \chi} + \frac{\partial h_0}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial R'}{\partial \eta}. \tag{3}$$

Дифференцируя тождество (6) § 12.13 по Λ, получаем

$$\frac{\partial R_1}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \Lambda}=\frac{\partial R'}{\partial \Lambda}+(t+c)\left(\frac{\partial R'}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \theta_0}{\partial \Lambda}+\frac{\partial R'}{\partial \chi}\cdot\frac{\partial g_0}{\partial \Lambda}+\frac{\partial R'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial h_0'}{\partial \Lambda}\right),$$

что, вследствие равенства (3), можно записать в виде

$$\frac{\partial R_1}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \Lambda}=\frac{\partial R'}{\partial \Lambda}+(t+c)\,\dot{\theta}_0.$$

Вычитая это равенство из равенства (2), получаем

$$\dot{\lambda}-\frac{\partial R_1}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \Lambda}=\theta_0-qn_1+\theta_0\dot{c}-\frac{\partial R'}{\partial \Lambda}.$$

Но, согласно первой формуле (3) § 12.11, $\theta_0=\partial C/\partial\Lambda$. Поэтому, используя уравнение (1), находим

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial R'}{\partial \Lambda}+\frac{\partial C}{\partial \Lambda}-qn_1=-\frac{\partial}{\partial \Lambda}(R'-C+qn_1\Lambda). \tag{4}$$

§ 12.15. Новые канонические уравнения

В этом параграфе мы составим сводку уравнений, полученных в трех предыдущих параграфах. Этими уравнениями являются уравнения (6) § 12.12, (7) и (8) § 12.13 и (4) § 12.14.

Пусть R'' определяется формулой

$$R''=R'-C+qn_1\Lambda, \tag{1}$$

в которой C предполагается выраженным через Λ, G', H'.

Рассмотрим первую группу уравнений, т. е. уравнения (6) § 12.12. Так как C и Λ не зависят от λ, χ и η, то R' в этих уравнениях может быть заменено на R''. Таким же образом в правых частях уравнений (7) и (8) § 12.13 можно заменить $R'-C$ на R''. Канонические уравнения тогда примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}&=\frac{\partial R''}{\partial \lambda}, & \dot{\lambda}&=-\frac{\partial R''}{\partial \Lambda},\\ \dot{G}'&=\frac{\partial R''}{\partial \chi}, & \dot{\chi}&=-\frac{\partial R''}{\partial G'},\\ \dot{H}'&=\frac{\partial R''}{\partial \eta}, & \dot{\eta}&=-\frac{\partial R''}{\partial H'}.\end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения Делонэ и использует для выполнения второй операции, причем функция Гамильтона R'' может быть представлена в виде

$$R''=-B'-\sum A'\cos\theta', \tag{3}$$

где A' и B' — функции Λ, G' и H', а θ' определяется равенством

$$\theta'=i'\lambda+j'\chi+k'\eta+q'n_1t+q'', \tag{4}$$

причем i', j', k', q' не являются обязательно целыми числами.

§ 12.16. Частные случаи

1) Предположим, что в аргументе выбранного члена (9) § 12.01 $l=0$, $j\neq 0$. Положим $g'=jg+kh$. Тогда этот аргумент примет вид $\theta\equiv g'+qn_1t+q'$. Обращаясь к условию

$$L'l'+G'g'+H'h'=Ll+Gg+Hh$$

линейного канонического преобразования переменных [1]), мы видим, что оно удовлетворится, если

$$l'=l,\quad g'=jg+kh,\quad h'=h,$$
$$L'=L,\quad G'=\frac{1}{j}G,\quad H'=H-\frac{k}{j}G.$$

Решение уравнения Гамильтона — Якоби в этом случае имеет вид

$$S=Ct-(qn_1t+q')G'+S_1+(l)L'+(h)H',$$

где L', H' — постоянные и

$$S_1=\int\limits_{\gamma}^{G'}\theta\,dG',$$

причем γ — значение G' при $\theta=0$.

Последующие вычисления аналогичны тем, которые были проделаны в предыдущих параграфах.

2) Предположим, что $l=j=k=0$, а $q\neq 0$.

Соберем все члены разложения возмущающей функции, которые удовлетворяют этим условиям, и положим

$$R_0=-\sum A_r\cos(rn_1t+q_r)\quad (r=1,\ 2,\ \ldots),$$

где A — функции L, G, H. Так как R_0 не зависит от l, g и h, то L, G и H — величины постоянные. Уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\sum A_r\cos(rn_1t+q_r)=0.$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$S=\sum\frac{1}{rn_1}A_r\sin(rn_1t+q_r)+(l)L+(g)G+(h)H,$$

где через (l), (g) и (h) обозначены канонические постоянные. Решение канонических уравнений дается формулой

$$l\equiv\frac{\partial S}{\partial L}=(l)+\sum\frac{1}{rn_1}\frac{\partial A_r}{\partial L}\sin(rn_1t+q_r)$$

---

[1]) В *каждой* операции мы используем символы L, G, H; l, g, h и L', G', H'; l', g', h' для обозначения переменных *до* и *после* преобразования и R_0, B, A, q, q' — для обозначения соответствующих функций и т. д.

и аналогичными формулами, содержащими g и h, причем каноническими постоянными являются $L=\beta_1$, $G=\beta_2$, $H=\beta_3$.

3) Когда все периодические члены будут исключены, окончательные уравнения запишутся в виде

$$\dot{L}=\frac{\partial R_0}{\partial l}, \quad \dot{l}=-\frac{\partial R_0}{\partial L}$$

плюс аналогичные уравнения для G, g; H, h. Здесь $R_0=-B$. Поэтому L, G и H — постоянные. Уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}-B(L, G, H)=0,$$

а его решение дается формулой

$$S=Bt+(l)L+(g)G+(h)H.$$

Интегралы канонических уравнений тогда будут иметь вид

$$l=(l)+l_0t, \quad g=(g)+g_0t, \quad h=(h)+h_0t,$$

где

$$l_0=\frac{\partial B}{\partial L}, \quad g_0=\frac{\partial B}{\partial G}, \quad h_0=\frac{\partial B}{\partial H}$$

и

$$L=\text{const}=L_0, \quad G=G_0, \quad H=H_0.$$

§ 12.17. Практический метод получения решения при первой операции

Мы рассмотрим здесь первую операцию Делонэ, хотя этот метод применим к любой операции.

Так как возмущающая функция выражена через величины e и γ ($\equiv \operatorname{tg} i$), то метод решения канонических уравнений, описанный в § 12.04, включает в себя преобразование величин a, e и γ, входящих в коэффициенты A и B функции Гамильтона R_0, которая дается формулой

$$R_0=-B-A\cos\theta, \tag{1}$$

в величины L', G', H'. На практике оказывается более выгодным сохранять в выражении для R_0 величины e или γ неизменными и отыскивать окончательное решение описанным ниже методом, основанным на замене L' (или L/l) через e или γ. Мы рассмотрим первую из этих замен.

1) Перепишем модифицированные неугловые переменные Делонэ, определяемые формулами (6) § 12.01:

$$L=lL'=\sqrt{\mu a}, \quad G=\sqrt{\mu a}\left(\sqrt{1-e^2}-1\right), \tag{2}$$

$$H=\sqrt{\mu a(1-e^2)}(\cos i-1)=-2\sin^2\frac{i}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}. \tag{3}$$

Из § 12.07 имеем два интеграла канонических уравнений

$$G=\frac{j}{i}L+G'=jL'+G' \tag{4}$$

и

$$H=\frac{k}{i}L+H'=kL'+H', \tag{5}$$

где G' и H' — постоянные.

Основные уравнения (2) и (3) § 12.04 имеют вид

$$L'=A\sin\theta, \tag{6}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial B_1}{\partial L'}+\frac{\partial A}{\partial L'}\cos\theta. \tag{7}$$

2) Из формул (2) и (4) получаем

$$L'=\frac{G'}{i\left(\sqrt{1-e^2}-1-\frac{j}{i}\right)}. \tag{8}$$

Таким образом, L' может быть выражено степенным рядом относительно e и через G'. Далее, $L^2=\mu a=i^2L'^2$. Поэтому a может быть выражено через e и G' и разложено в степенной ряд относительно e.

Вид формулы (3) показывает, что вместо $\operatorname{tg} i=\gamma$ удобнее использовать величину $\sin\frac{i}{2}$, которую мы обозначим через γ_1. Поэтому мы будем считать, что возмущающая функция выражена через γ_1. Из формул (3) и (5) имеем

$$\gamma_1^2=-\frac{k+\frac{H'}{L'}}{2i\sqrt{1-e^2}}. \tag{9}$$

Подставим в формулу (9) выражение (8) для L'. Тогда γ_1^2 можно будет представить в виде ряда по степеням e с коэффициентами, зависящими от G' и H'.

3) При помощи формулы (8) мы можем преобразовать уравнение (6); оно примет вид

$$\frac{d(e^2)}{dt}=2i\sqrt{2-e^2}\left(\sqrt{1-e^2}-1-\frac{j}{i}\right)^2\frac{A}{G'}\sin\theta, \tag{10}$$

где A, вообще говоря, есть функция a, e и γ_1. Поэтому, так как $a=a(e, G')$ и $\gamma_1=\gamma_1(e, G', H')$, то правая часть уравнения (10) может быть представлена в виде $A_1(e, G', H')\sin\theta$. Следовательно,

$$\frac{d(e^2)}{dt}=A_1(e, G', H')\sin\theta. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь уравнение (7). Так как B_1 и A — функции a, e и γ_1, то мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial A}{\partial L'} = \frac{\partial A}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial L'} + \frac{\partial A}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial L'} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_1}\cdot\frac{\partial \gamma_1}{\partial L'}, \tag{12}$$

но $\mu a = L^2 = l^2 L'^2$. Поэтому

$$\frac{\partial a}{\partial L'} = \frac{2l^2 L'}{\mu}.$$

Следовательно, $\partial a/\partial L'$ можно выразить через e и G'. Кроме того, из формулы (8) имеем

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial e}{\partial L'} = \frac{G'}{L'^2}.$$

Таким образом, $\partial e/\partial L'$ может быть также выражено через e и G'. Далее, из формулы (9) мы можем найти производную $\partial\gamma_1/\partial L'$, которая имеет более сложный вид, но также может быть выражена через e, G' и H'. Аналогично $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial e$, $\partial A/\partial\gamma_1$ могут быть выражены через e, G' и H'. Очевидно, мы можем уравнение (7) записать в виде

$$\dot\theta = f(e, G', H') + F(e, G', H')\cos\theta, \tag{13}$$

где f и F — ряды по степеням e.

Решение уравнений (11) и (13) может быть найдено методом последовательных приближений в виде

$$e^2 = e_0^2 + \sum e_p \cos p\theta_0(t+c), \tag{14}$$

$$\theta = \theta_0(t+c) + \sum \theta_p \sin p\theta_0(t+c), \tag{15}$$

где e_0 и c — постоянные интегрирования, а e_p, θ_p и θ_0 — функции e_0, H' и G'.

Очевидно, что, воспользовавшись равенствами (8) и (14), мы можем представить a в виде следующего ряда:

$$a = a_0 + \sum a_p \cos p\theta_0(t+c). \tag{16}$$

Аналогично из формулы (9) можно найти

$$\gamma_1^2 = \gamma_0^2 + \sum \gamma_p' \cos p\theta_0(t+c). \tag{17}$$

В формулах (16) и (17) a и γ — функции e_0, G' и H'. Следовательно,

$$a_0 = a_0(e_0, G', H'), \quad \gamma_0 = \gamma_0(e_0, G', H').$$

Решая эти функциональные уравнения, найдем

$$G' = G'(a_0, e_0, \gamma_0), \quad H' = H'(a_0, e_0, \gamma_0). \tag{18}$$

Подставляя в коэффициенты формул (16), (14) и (17) вместо G' и H' их выражения (18), мы получаем

$$a = a_0 + \sum A_p \cos p\theta_0 (t + c), \tag{19}$$

$$e^2 = e_0^2 + \sum E_p \cos p\theta_0 (t + c), \tag{20}$$

$$\gamma_1^2 = \gamma_0^2 + \sum \Gamma_p \cos p\theta_0 (t + c), \tag{21}$$

где A, E, Γ и θ_0 — функции a_0, e_0 и γ_0.

Очевидно, что мы можем получить из формул (20) и (21) ряды для e и γ_1. Эти ряды запишутся в виде

$$e = e_0 + \sum E'_p \cos p\theta_0 (t + c), \tag{22}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \sum \Gamma'_p \cos p\theta_0 (t + c). \tag{23}$$

4. Рассмотрим теперь угловые переменные l', g', h'.

Так как $\theta = l' + qn_1 t + q'$, то из формулы (15) мы немедленно получаем

$$l' = \theta_0 (t + c) - qn_1 t - q' + \sum \theta_p \sin p\theta_p (t + c). \tag{24}$$

Уравнение, определяющее g', имеет вид

$$\dot{g}' \equiv \dot{g} = -\frac{\partial R_0}{\partial G'} = \frac{\partial B_1}{\partial G'} + \frac{\partial A}{\partial G'} \cos \theta.$$

Путем рассуждений, применявшихся к формуле (12), мы можем привести это уравнение к виду

$$\dot{g} = f(e, G', H') + F(e, G', H') \cos \theta. \tag{25}$$

При помощи формулы (15) $\cos\theta$ может быть разложен в ряд по косинусам кратных $\theta_0 (t + c)$, а используя формулы (18) и (20), можно привести к такому же виду величины f и F. Уравнение (25) теперь примет вид

$$\dot{g} = f_1 (a_0, e_0, \gamma_0) + \sum F_p (a_0, e_0, \gamma_0) \cos p\theta_0 (t + c) =$$
$$= g_0 + \sum pg_p\theta_0 \cos p\theta_0 (t + c),$$

где $pg_p\theta_0 \equiv F_p$. Интегрируя, получаем

$$g = (g) + g_0 (t + c) + \sum g_p \sin p\theta_0 (t + c), \tag{26}$$

где постоянной интегрирования является $(g) + g_0 c$.

Аналогично

$$h = (h) + h_0 (t + c) + \sum h_p \sin p\theta_0 (t + c). \tag{27}$$

В формулах (24), (26) и (27) все величины θ_r, g_r, h_r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ являются функциями a_0, e_0, γ_0.

Как и в § 12.07, получаем

$$l = (l) + l_0(t+c) - \frac{1}{i}(qn_1 t + q') + \sum l_p \sin p\theta_0(t+c). \qquad (28)$$

В формулах (28), (26) и (27) l — средняя долгота, $g = \tilde{\omega}$ и $h = \Omega$.

Чтобы получить полную сводку основных формул, перепишем равенство (15):

$$\theta = \theta_0(t+c) + \sum \theta_p \sin p\theta_0(t+c), \qquad (29)$$

где θ_0, θ_p — функции a_0, e_0, γ_0.

5. Новыми переменными в следующей операции являются

$$\Lambda,\ G',\ H';\quad \lambda,\ \chi,\ \eta.$$

Функция Гамильтона R'' дается формулой

$$R'' = R' - C + qn_1\Lambda. \qquad (30)$$

Покажем прежде всего, как Λ и C преобразуются в функции a_0, e_0, γ_0.

Обращаясь к формуле (1) § 12.07, мы имеем

$$L' = L_0 + \sum L_p \cos p\theta_0(t+c). \qquad (31)$$

Далее, согласно формуле (15) § 12.09, Λ выражается через L_0, L_p, θ_p так:

$$\Lambda = L_0 + \frac{1}{2}\sum pL_p\theta_p. \qquad (32)$$

Но $L = \sqrt{\mu a} = iL'$, и по формуле (19)

$$a = a_0 + \sum A_p \cos p\theta_0(t+c).$$

Поэтому мы можем представить L' в виде

$$L' = L'_0 + \sum L'_p \cos p\theta_0(t+c), \qquad (33)$$

где

$$i^2\left[L'_0 + \sum L'_p \cos p\theta_0(t+c)\right]^2 = \mu\left[a_0 + \sum A_p \cos p\theta_0(t+c)\right].$$

Выражения L'_0 и L'_p через a_0 и A_p легко находятся элементарными методами; таким образом, L'_0 и L'_p будут известными функциями a_0, e_0, γ_0.

Далее, формулы (31) и (33) совпадут друг с другом, если мы предположим, что L_0, L_p выражены через a_0, e_0, γ_0. Поэтому формула (32) примет вид

$$\Lambda = L'_0 + \frac{1}{2}\sum pL'_p\theta_p,$$

т. е. Λ — функция a_0, e_0, γ_0.

С другой стороны, из формулы (10) § 12.03 имеем

$$C = B_1 + A\cos\theta,$$

где A и B — функции a, e и γ (или γ_1). Следовательно, при $t+c=0$ имеем $C=B_1+A$, а a, e и γ_1 заменены соответственно выражениями

$$a_0+\sum A_p, \quad e_0+\sum E'_p, \quad \gamma_0+\sum \Gamma'_p,$$

причем два последних выражения следуют из формул (22) и (23). Таким образом, C также выразится через a_0, e_0, γ_0.

Рассмотрим теперь функцию R' в формуле (30). Она является суммой тригонометрических членов, входящих в состав первоначальной возмущающей функции, из которых отброшена часть членов, выбранных для первой операции. R' имеет вид

$$\sum A\cos\left(i_1 l+j_1 g+k_1 h+q_1 h_1 t+q'_1\right),$$

где коэффициенты A первоначально были функциями a, e, γ_1, а теперь при помощи равенств (19), (22) и (23) могут быть представлены в виде

$$D_0+\sum D_p\cos p\theta_0(t+c),$$

где θ_0, D_0 и D_p — функции a_0, e_0, γ_0.

Как функция новых угловых переменных R' запишется следующим образом:

$$R'=-\sum A_1\cos\left(i'\lambda+j'\chi+k'\eta+q'_1 n_1 t+q''\right), \tag{34}$$

где i', ..., q'_1 — не обязательно целые числа, а A_1 — функция a_0, e_0, γ_0.

Вторая операция заключается в решении канонических уравнений для Λ, G', H'; λ, χ, η с функцией Гамильтона R'_0, состоящей из одного из членов выражения (34) плюс выражение $-C+qn_1\Lambda$, входящее в формулу (30). Таким образом,

$$R'_0=-B'_1-A'\cos\theta',$$

где $B'_1=C-qn_1\Lambda$, а θ' — аргумент косинуса в выражении (34).

Решение в этом случае получается тем же самым методом, который был описан ранее.

Глава 13

ВЕКОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 13.01. Введение

В первых параграфах гл. 6 мы получили решение уравнений движения планет в первом приближении, рассматривая в возмущающей функции элементы a, e, ... как постоянные. Так, например, для эксцентриситета было получено выражение

$$e = e_0 + \alpha t + \text{п. ч.} \tag{1}$$

Когда мы перешли ко второму приближению, то применили разложение возмущающей функции в ряд Тейлора, причем в возмущающую функцию вместо e было подставлено его выражение (1) и аналогичные выражения для других элементов (при условии, что для большой полуоси $\alpha = 0$). При этом мы считали, что αt столь мало, что выражением $(\alpha t)^2$ можно пренебречь. По абсолютной величине α является малой величиной, возможно порядка 10^{-5}. Поэтому законность нашего приема становится необоснованной, если t принимает настолько большие значения, что величиной $(\alpha t)^2$ пренебрегать уже нельзя. Другими словами, полученное решение фактически может быть использовано для некоторых ограниченных интервалов времени до и после выбранной эпохи.

Если мы предположим, что αt мало, то аналитически вековой член мог бы быть заменен, не изменяя точности решения, функцией $\sin \alpha t$, период которой равен $2\pi/\alpha$. Поэтому можно предположить, что появление векового члена в формуле (1), возможно, является результатом метода, с помощью которого это решение было получено, и что возмущения в e, а также в a и γ имеют чисто периодический характер. Это предположение подкрепляется результатами предыдущей главы, где в задаче трех тел — Солнце, Земля и Луна — выражения для a, e и γ (или γ_1) были чисто периодическими.

Член αt в формуле (1) появляется из непериодической части возмущающей функции. Поэтому мы исследуем строго решение уравнений, рассматривая лишь непериодическую часть возмущающей функции и отбрасывая члены, имеющие порядок относительно эксцентриситетов и наклонностей больший, чем третий.

Прежде всего мы рассмотрим решение в случае двух планет, а затем — в случае любого числа планет.

§ 13.02. Уравнения движения в случае двух планет

Для планеты P (масса m) в обозначениях п. (а) § 5.10 мы имеем

$$h = e \sin \tilde{\omega}, \qquad k = e \cos \tilde{\omega}, \tag{1}$$

$$p = \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega, \tag{2}$$

а для планеты P_1 (масса m_1) —

$$h_1 = e_1 \sin \tilde{\omega}_1, \qquad k_1 = e_1 \cos \tilde{\omega}_1, \tag{3}$$

$$p_1 = \sin i_1 \sin \Omega_1, \quad q_1 = \sin i_1 \cos \Omega_1. \tag{4}$$

Обозначим через N вековую часть возмущающей функции. Тогда, согласно формуле (9) § 7.15, будем иметь

$$N = Gm_1 \left[4C + (e^2 + e_1^2) D - 2ee_1 E \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1) - \right.$$
$$\left. - (\gamma^2 + \gamma_1^2) D + 2\gamma\gamma_1 D \cos(\Omega - \Omega_1)\right], \tag{5}$$

где C, D и E — симметричные функции a и a_1, $\gamma = \operatorname{tg} i$, $\gamma_1 = \operatorname{tg} i_1$.

Далее, согласно формуле (7) § 5.10,

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Поэтому a и n в настоящем исследовании являются постоянными. Аналогично a_1 и n_1 — постоянные. Кроме того, C, D и E будут также постоянными.

Заменяя в уравнениях (13) и (14) § 5.10 R_1 на N, мы получим

$$\dot{h} = \frac{\cos \varphi}{na^2} \frac{\partial N}{\partial k} + \frac{k \operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\gamma na^2 \cos \varphi} \left(p \frac{\partial N}{\partial p} + q \frac{\partial N}{\partial q}\right),$$

$$\dot{k} = -\frac{\cos \varphi}{na^2} \frac{\partial N}{\partial h} - \frac{h \operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\gamma na^2 \cos \varphi} \left(p \frac{\partial N}{\partial p} + q \frac{\partial N}{\partial q}\right),$$

где $\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}$.

В этих уравнениях члены, содержащие $\partial N/\partial p$ и $\partial N/\partial q$ по отношению к e и γ, а следовательно, и к h, k, p и q, на два порядка выше, чем члены, содержащие $\partial N/\partial h$ и $\partial N/\partial k$. Так как мы предполагаем, что e и γ — величины малые и имеют один и тот же порядок малости, то упомянутыми членами можно пренебречь. Кроме того, по той же причине можно положить $\cos \varphi = 1$. Тогда эти уравнения примут вид

$$\dot{h} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial N}{\partial k}, \quad \dot{k} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial N}{\partial h}. \tag{6}$$

Таким же способом мы из уравнений (15) и (16) § 5.10 получаем

$$\dot{p} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial N}{\partial q}, \quad \dot{q} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial N}{\partial p}. \tag{7}$$

Кроме того, с рассматриваемой точностью можно написать

$$p = \gamma \sin \Omega, \qquad q = \gamma \cos \Omega, \tag{8}$$

$$p_1 = \gamma_1 \sin \Omega_1, \quad q_1 = \gamma_1 \cos \Omega_1. \tag{9}$$

При помощи формул (1), (3), (8) и (9) функция N, определяемая равенством (5), примет вид (если опустить постоянную C)

$$N = Gm_1D\left[h^2 + k^2 + h_1^2 + k_1^2 - p^2 - q^2 - p_1^2 - q_1^2 + 2pp_1 + 2qq_1\right] - \\ - 2Gm_1E(hh_1 + kk_1). \tag{10}$$

Так как D и E являются симметричными функциями a и a_1, то N/m_1 будет симметричной функцией a, a_1 и h, h_1; k, k_1; p, p_1; q, q_1.

Если N_1 означает непериодическую часть возмущающей функции для планеты P_1, возмущаемой планетой P, то

$$\frac{N_1}{m} = \frac{N}{m_1}. \tag{11}$$

Из уравнений (6) и (10) получаем

$$\dot{h} = \frac{2Gm_1}{na^2}(kD - k_1E), \qquad \dot{k} = -\frac{2Gm_1}{na^2}(hD - h_1E).$$

Аналогично при помощи равенства (11) находим

$$\dot{h}_1 = \frac{2Gm}{n_1a_1^2}(k_1D - kE), \qquad \dot{k}_1 = -\frac{2Gm}{n_1a_1^2}(h_1D - hE).$$

Положим

$$\alpha = \frac{2Gm_1D}{na^2}, \quad \beta = \frac{2Gm_1E}{na^2}, \tag{12}$$

$$\alpha_1 = \frac{2GmD}{n_1a_1^2}, \quad \beta_1 = \frac{2GmE}{n_1a_1^2}. \tag{13}$$

Тогда эти уравнения примут вид

$$\dot{h} = \alpha k - \beta k_1, \qquad \dot{k} = \beta h_1 - \alpha h, \tag{14}$$

$$\dot{h}_1 = \alpha_1 k_1 - \beta_1 k, \quad \dot{k}_1 = \beta_1 h - \alpha_1 h_1. \tag{15}$$

Точно так же уравнения, содержащие наклонности и долготы узлов, запишутся в виде

$$\dot{p} = \alpha(q_1 - q), \qquad \dot{q} = \alpha(p - p_1), \tag{16}$$

$$\dot{p}_1 = \alpha_1(q - q_1), \quad \dot{q}_1 = \alpha_1(p_1 - p). \tag{17}$$

Заметим, что в формулах (12) и (13) D, E и n, n_1 являются положительными, поэтому α, α_1 и β, β_1 будут также все положительными.

§ 13.03. Решение уравнений, определяющих h и k

Приступим к решению уравнений (14) и (15) предыдущего параграфа.

Положим

$$X = k + ih, \quad X_1 = k_1 + ih_1, \tag{1}$$

где $i^2 = -1$. Тогда получим

$$\dot{X} - i\alpha X = -i\beta X_1, \quad \dot{X}_1 - i\alpha_1 X_1 = -i\beta_1 X,$$

или, используя оператор D ($\equiv d/dt$),

$$(D - i\alpha) X = -i\beta X_1, \quad (D - i\alpha_1) X_1 = -i\beta_1 X.$$

Применим к первому из этих уравнений оператор $D - i\alpha_1$ и воспользуемся вторым уравнением для исключения X_1. В результате получим

$$\ddot{X} - i(\alpha + \alpha_1)\dot{X} - (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) X = 0. \tag{2}$$

Положим в этом дифференциальном уравнении $X = Me^{i(gt+c)}$. Тогда будем иметь

$$g^2 - (\alpha + \alpha_1) g + \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 = 0. \tag{3}$$

Корни этого уравнения будут действительными, так как его дискриминант

$$(\alpha + \alpha_1)^2 - 4(\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) \equiv (\alpha - \alpha_1)^2 + 4\beta\beta_1$$

— положительная величина. Очевидно также, что корни положительны, ибо $D^2 > E^2$ [неравенство (10) § 7.15] или $\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 > 0$, что следует из формул (12) и (13) § 13.02.

Если g_1 и g_2 — корни квадратного уравнения (3), то решение дифференциального уравнения (2) запишется в виде

$$X = M_1 e^{i(g_1 t + c_1)} + M_2 e^{i(g_2 t + c_2)}, \tag{4}$$

где M_1, M_2 и c_1, c_2 — постоянные интегрирования. Всего постоянных интегрирования четыре, а не две (как может показаться на первый взгляд), так как уравнение (2) эквивалентно двум независимым уравнениям для вещественных переменных h и k, каждое из которых второго порядка.

Приравнивая в выражениях (1) и (4) мнимые и действительные части, мы получаем

$$h = M_1 \sin(g_1 t + c_1) + M_2 \sin(g_2 t + c_2), \tag{5}$$

$$k = M_1 \cos(g_1 t + c_1) + M_2 \cos(g_2 t + c_2). \tag{6}$$

Аналогично для h_1 и k_1 находим

$$h_1 = M_1' \sin(g_1 t + c_1) + M_2' \sin(g_2 t + c_2), \tag{7}$$

$$k_1 = M_1' \cos(g_1 t + c_1) + M_2' \cos(g_2 t + c_2), \tag{8}$$

где M_1' и M_2' не являются независимыми от M_1 и M_2, ибо, подставляя выражения (5), (6) и (8) в первое уравнение (14) § 13.02, мы немедленно получаем

$$\beta M_1' = (\alpha - g_1) M, \quad \beta M_2' = (\alpha - g_2) M_2. \tag{9}$$

§ 13.04. Вычисление постоянных интегрирования

Численные значения M_1, M_2, c_1 и c_2 могут быть легко найдены, если для данного момента времени известны массы и орбитальные элементы двух планет. Формулы § 7.15 дают нам возможность вычислить D и E, а значения α, β и α_1, β_1 получаются по формулам (12) и (13) § 13.02. Тогда значения g_1 и g_2 найдутся из квадратного уравнения (3) § 13.03. Исходя из известных значений e и $\tilde{\omega}$ в выбранную эпоху, за которую мы возьмем $t = 0$, для нее вычисляются значения h $(\equiv e \sin \tilde{\omega})$ и k $(\equiv e \cos \tilde{\omega})$. Обозначим их и соответствующие значения для h_1 и k_1 через h_0, k_0 и $(h_1)_0$, $(k_1)_0$. Далее, положим

$$\begin{aligned} P_1 &= M_1 \sin c_1, \quad & P_2 &= M_2 \sin c_2, \\ Q_1 &= M_1 \cos c_1, \quad & Q_2 &= M_2 \cos c_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда формулы (5), (7) и (9) § 13.03 дадут

$$h_0 = P_1 + P_2, \quad \beta (h_1)_0 = (\alpha - g_1) P_1 + (\alpha - g_2) P_2,$$

откуда легко вычисляются величины P_1 и P_2.

Тем же путем мы составим два уравнения для k и Q, из которых могут быть найдены величины Q_1 и Q_2. Тогда из равенств (1) можно будет определить значения M_1, M_2 и c_1, c_2.

§ 13.05. Эксцентриситеты

Из формул (5) и (6) § 13.03 немедленно находим

$$e^2 \equiv h^2 + k^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos[(g_1 - g_2) t + c_1 - c_2]. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} \equiv \frac{h}{k} = \frac{M_1 \sin(g_1 t + c_1) + M_2 \sin(g_2 t + c_2)}{M_1 \cos(g_1 t + c_1) + M_2 \cos(g_2 t + c_2)}. \tag{2}$$

Для e_1^2 и $\tilde{\omega}_1$ получим два аналогичных выражения.

Равенство (1) показывает, что e является периодической функцией. Максимальное значение e равно $|M_1| + |M_2|$, а минимальное — $|M_1| - |M_2|$. Период колебания равен $2\pi/|g_1 - g_2|$.

В случае Юпитера и Сатурна найдено, что период такого колебания равен примерно 70 400 лет, а максимальное и минимальное значения e равны 0,060 и 0,026; соответствующие величины для Сатурна равны 0,084 и 0,013 [1]).

Тот факт, что значения e и e_1 лежат внутри ограниченной области, можно непосредственно получить из уравнений (14) и (15) § 13.02. Легко видеть, что

$$\beta_1 (h\dot{h} + k\dot{k}) + \beta (h_1\dot{h}_1 + k_1\dot{k}_1) = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо β и β_1 их значения из формул (12) и (13) § 13.02 и интегрируя, получаем

$$mna^2e^2 + m_1n_1a_1^2e_1^2 = C, \tag{3}$$

где C — постоянная.

Эта зависимость показывает 1) что, так как n и n_1 имеют один и тот же знак, то значения e и e_1 являются ограниченными, и 2) что e имеет максимум, когда e_1 имеет минимум, и наоборот.

§ 13.06. Долготы перигелиев

Из формулы (2) § 13.05 нетрудно найти

$$e^2\dot{\tilde{\omega}} = g_1M_1^2 + g_2M_2^2 + (g_1 + g_2) M_1M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{1}$$

где

$$\theta_1 = g_1t + c_1, \quad \theta_2 = g_2t + c_2.$$

Уравнение (1) может быть записано в виде

$$\dot{\tilde{\omega}} = \frac{(g_1 - g_2)(M_1^2 - M_2^2)}{2e^2} + \frac{1}{2}(g_1 + g_2). \tag{2}$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $g_1 > g_2$. Кроме того, нужно помнить, что M_1 и M_2 могут быть положительными или отрицательными. Нам нужно рассмотреть два случая.

Случай 1. $(g_1 + g_2)|M_1M_2| \geqslant (gM_1^2 + g_2M_2^2)$.

Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$e^2\dot{\tilde{\omega}} = (g_1 + g_2) M_1M_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos\alpha], \tag{3}$$

где α — наименьший положительный угол $(0 < \alpha < \pi)$, такой, что

$$\cos\alpha = -\frac{g_1M_1^2 + g_2M_2^2}{(g_1 + g_2) M_1M_2}.$$

[1]) Эти величины, вычисленные для всех планет, приводятся на стр. 282.

Уравнение (3) показывает, что $\tilde{\omega}$ имеет действительные точки возврата, соответствующие

$$\theta_1 - \theta_2 = \alpha + 2r\pi \tag{4}$$

или

$$\theta_1 - \theta_2 = 2r\pi - \alpha, \tag{5}$$

где r принимает целые значения.

Из уравнения (3) получаем

$$e^2\ddot{\tilde{\omega}} + \dot{\tilde{\omega}}\frac{d}{dt}(e^2) = -\left(g_1^2 - g_2^2\right) M_1 M_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right).$$

Следовательно, если $M_1 M_2$ положительно, то максимальные значения $\theta_1 - \theta_2$, соответствующие точкам возврата, достигаются при условии (4), а минимальные значения соответствуют условию (5), а если $M_1 M_2$ отрицательно, то точки возврата при значениях $\theta_1 - \theta_2$, данных выше, меняются местами.

В этом случае экстремальные значения $\tilde{\omega}$ могут быть вычислены посредством формул

$$h = e\sin\tilde{\omega}, \quad k = e\cos\tilde{\omega},$$

если h и e вычислены для значений t, соответствующих условиям (4) и (5).

Случай 2. $(g_1 + g_2)|M_1 M_2| < \left(g_1 M_1^2 + g_2 M_2^2\right)$.

Правая часть уравнения (1) положительна при всех значениях t. Отсюда следует, что $\dot{\tilde{\omega}}$ положительно и что $\tilde{\omega}$ с течением времени увеличивается. Найдено, что случай 2 имеет место для Юпитера и Сатурна.

§ 13.07. Наклонности

В § 13.02 мы уже встретились с уравнениями

$$\dot{p} = \alpha(q_1 - q), \quad \dot{q} = \alpha(p - p_1), \tag{1}$$

$$\dot{p}_1 = \alpha_1(q - q_1) \quad \dot{q}_1 = \alpha_1(p_1 - p). \tag{2}$$

Решение этих уравнений можно найти из формул § 13.03, если в них заменить β на α и β_1 на α_1 и затем изменить знаки при α и α_1 на обратные. Если положить $X = q + ip$, то из уравнения (2) § 13.03 найдем

$$\ddot{X} + i(\alpha + \alpha_1)\dot{X} = 0.$$

Подставим сюда $X = Ne^{i(ft+c)}$. Тогда получим следующее уравнение:

$$f^2 + f(\alpha + \alpha_1) = 0,$$

корни которого равны $-(\alpha+\alpha_1)$ и 0. Таким образом, f отрицательно. Следовательно, мы имеем

$$p = N_1 \sin(ft + c_1) + N_2 \sin c_2, \tag{3}$$
$$q = N_1 \cos(ft + c_1) + N_2 \cos c_2. \tag{4}$$

Аналогично

$$p_1 = N_1' \sin(ft + c_1) + N_2' \sin c_2,$$
$$q_1 = N_1' \cos(ft + c_1) + N_2' \cos c_2.$$

Так как из уравнений (1) и (2) следует, что $\alpha_1 \dot{p} + \alpha \dot{p}_1 = 0$, то $N_1' = -\alpha_1 N_1/\alpha$. Кроме того, согласно первому уравнению (1), $N_2' = N_2$. Поэтому решение уравнений для p_1 и q_1 можно записать в виде

$$p_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha} N_1 \sin(ft + c_1) + N_2 \sin c_2, \tag{5}$$

$$q_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha} N_1 \cos(ft + c_1) + N_2 \cos c_2. \tag{6}$$

Из формул (3) и (4) получаем

$$\gamma^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos(ft + c_1 - c_2). \tag{7}$$

Аналогичное равенство имеет место для γ_1.

Из формулы (7) видно, что γ колеблется между

$$|N_1| + |N_2| \quad \text{и} \quad |N_1| - |N_2|.$$

Аналогично γ_1^2 изменяется между

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}|N_1| + |N_2| \quad \text{и} \quad \left|\frac{\alpha_1}{\alpha}|N_1| - |N_2|\right|.$$

Период колебаний равен

$$\frac{2\pi}{\alpha + \alpha_1}.$$

Из уравнений (1) и (2) легко видеть, что

$$\alpha_1 (p\dot{p} + q\dot{q}) + \alpha (p_1 \dot{p}_1 + q_1 \dot{q}_1) = 0,$$

поэтому

$$mna^2\gamma^2 + m_1 n_1 a_1^2 \gamma_1^2 = C', \tag{8}$$

где C' — постоянная. Эта зависимость аналогична интегралу (3) § 13.05.

Численные значения N_1, N_2 и c_1, c_2 могут быть получены при помощи метода, подобного тому, который был описан в § 13.04.

Для Юпитера и Сатурна период такого колебания равен около 50 700 лет. Для Юпитера максимальное и минимальное значения наклонности i ($\equiv \operatorname{arctg} \gamma$) равны примерно $2^\circ 2'$ и $1^\circ 17'$. Соответствующие величины для Сатурна составляют $2^\circ 33'$ и $0^\circ 47'$.

§ 13.08. Долготы узлов

Так как $\operatorname{tg} \Omega = p/q$, то из формул предыдущего параграфа мы получаем

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{N_1 \sin(ft + c_1) + N_2 \sin c_2}{N_1 \cos(ft + c_1) + N_2 \cos c_2}, \tag{1}$$

откуда

$$\gamma^2 \dot{\Omega} = f N_1^2 + f N_1 N_2 \cos \theta, \tag{2}$$

где

$$\theta = ft + c_1 - c_2.$$

Случай 1. $|N_2| > |N_1|$.

Пусть β означает наименьший положительный угол ($0 < \beta < \pi$) такой, что

$$\cos \beta = -\frac{N_1}{N_2}.$$

Тогда из формулы (2) имеем

$$\gamma^2 \dot{\Omega} = f N_1 N_2 (\cos \theta - \cos \beta).$$

Если N_1 и N_2 одного знака, то Ω имеет максимальное значение при $\theta = \beta + 2r\pi$, а минимальное значение, когда $\theta = 2r\pi - \beta$, причем r — целое число.

Если N_1 и N_2 имеют противоположные знаки, то точки возврата при указанных значениях θ меняются местами.

Экстремальные значения Ω могут быть вычислены тем же самым методом, что и в случае $\tilde{\omega}$.

Найдено, что для Юпитера и Сатурна Ω колеблется, причем амплитуда колебания для Юпитера равна примерно $13^\circ,2$, а для Сатурна — около $31^\circ,9$.

Случай 2. $|N_1| > |N_2|$.

Поскольку $f = -(\alpha + \alpha_1)$ отрицательно, то в этом случае $\dot{\Omega}$ будет отрицательным для всех значений t. Следовательно, Ω уменьшается со временем.

§ 13.09. Взаимная наклонность двух орбит

Пусть на рис. 22 φ означает наклонность одной орбиты по отношению к другой. Тогда по формуле косинусов имеем

$$\cos \varphi = \cos i \cos i_1 + \sin i \sin i_1 \cos(\Omega_1 - \Omega),$$

откуда

$$1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(1 - 2\sin^2 \frac{i}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2 \frac{i_1}{2}\right) + pp_1 + qq_1.$$

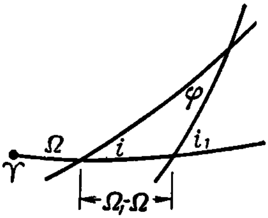

Рис. 22.

Отбросим члены порядка γ^4. Тогда

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2} = p^2 + q^2 + p_1^2 + q_1^2 - 2pp_1 - 2qq_1 = (p - p_1)^2 + (q - q_1)^2.$$

При помощи формул (4) — (7) § 13.07 последнее равенство приводим к виду

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \left(1 + \frac{a_1}{a}\right)^2 N_1^2.$$

Таким образом, с указанной степенью точности взаимная наклонность двух орбит есть величина постоянная.

§ 13.10. Уравнения для *n* планет

Рассмотрим планеты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Пусть N_1 означает непериодическую часть возмущающей функции для планеты P_1. Тогда в соответствии с формулой (10) § 13.02 N_1 определяется формулой

$$N_1 = G\sum_{j=2}^{n} m_j D_{1j}\left(h_1^2 + k_1^2 - p_1^2 - q_1^2 + h_j^2 + k_j^2 - p_j^2 - q_j^2 + 2p_1p_j + 2q_1q_j\right) - 2G\sum_{j=2}^{n} m_j E_{1j}(h_1h_j + k_1k_j), \tag{1}$$

в которой D_{1j} и E_{1j} — симметричные функции a_1 и a_j, причем последние, как и в § 13.02, рассматриваются в этом исследовании как постоянные.

Уравнения для h_1 и k_1 имеют вид

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial N_1}{\partial k_1}, \quad \dot{k}_1 = -\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial N_1}{\partial h_1}. \tag{2}$$

Положим

$$\frac{2Gm_jD_{ij}}{n_ia_i^2} = (i,\ j), \quad \frac{2Gm_jE_{ij}}{n_ia_i^2} = [i,\ j]. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что m, n и a для каждой планеты известны. Следовательно, известны также все $(l,\ j)$ и $[l,\ j]$.

Первое уравнение (2) принимает вид

$$\dot{h}_1 - k_1 \sum_{j=2}^{n} (1,\ j) + \sum_{j=2}^{n} [1,\ j]\, k_j = 0$$

или

$$\dot{h}_1 - C_1 k_1 + \sum_{2}^{n} [1,\ j]\, k_j = 0,$$

где, вообще говоря, полагается

$$C_l = \sum_{j=1}^{n} (l,\ j), \quad j \neq l. \tag{4}$$

Аналогично второе уравнение (2) примет вид

$$\dot{k}_1 + C_1 h_1 - \sum_{j=2}^{n} [1,\ j]\, h_j = 0.$$

В общем случае мы имеем уравнения

$$\dot{h}_l - C_l k_l + \sum_{j} [l,\ j]\, k_j = 0, \tag{5}$$

$$\dot{k}_l + C_l h_l - \sum_{j} [l,\ j]\, h_j = 0, \tag{6}$$

причем $j \neq l$.

Из формул (3) находим

$$\sqrt{m_l n_l}\, a_l [l,\ j] \equiv \frac{2G\sqrt{m_l m_j}\, E_{lj}}{\sqrt{n_l n_j}\, a_l a_j} \cdot \sqrt{m_j n_j}\, a_j = B_{lj} \sqrt{m_j n_j}\, a_j, \tag{7}$$

где B_{lj} — симметричная функция от m_l и m_j, n_l и n_j, a_l и a_j. Следовательно, имеет место важное свойство

$$B_{lj} = B_{jl}. \tag{8}$$

Кроме того, так как m, n и a рассматриваются как известные величины, то значение любого B может быть найдено посредством формулы (7).

Положим

$$H_l = \sqrt{m_l n_l}\, a_l h_l, \quad K_l = \sqrt{m_l n_l}\, a_l k_l. \tag{9}$$

Умножим уравнения (5) и (6) на $\sqrt{m_l n_l}\, a_l$. Тогда, используя формулу (7), получаем

$$\dot{H}_l - C_l K_l + \sum_{j} B_{lj} K_j = 0, \tag{10}$$

$$\dot{K}_l + C_l H_l - \sum_{j} B_{lj} H_j = 0, \tag{11}$$

где $j \neq l$, а величины B и C рассматриваются как известные.

Пусть

$$2F = \sum_{i=1}^{n} C_i(H_i^2 + K_i^2) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(H_iH_j + K_iK_j), \tag{12}$$

где $j \neq i$. Тогда, используя свойство (8), мы найдем, что для всех значений i уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\dot{H}_i = \frac{\partial F}{\partial K_i}, \quad \dot{K}_i = -\frac{\partial F}{\partial H_i}. \tag{13}$$

Эти уравнения имеют каноническую форму, причем F является функцией Гамильтона. Из уравнений (10) и (11) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (H_i\dot{H}_i + K_i\dot{K}_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(H_iK_j - K_iH_j) = 0.$$

Так как в двойной сумме $j \neq i$, то, согласно свойству (8), она равна нулю. Поэтому

$$\sum_i (H_i^2 + K_i^2) = \varkappa^2 \tag{14}$$

или

$$\sum_i m_i n_i a_i^2 e_i^2 = \varkappa^2, \tag{15}$$

где $\varkappa$ — постоянная.

Эта последняя зависимость является обобщением зависимости (3) § 13.05. Так как величины n_i имеют один и тот же знак во всей планетной системе, то равенство (15) показывает, что значения эксцентриситетов ограничены, или, другими словами, ни для какой планеты e не имеет векового члена.

Заметим, что поскольку F не содержит явно времени, то уравнения (13) допускают интеграл

$$F = \text{const}. \tag{16}$$

§ 13.11. Решение уравнений, определяющих H и K

Пусть

$$U_s = K_s + iH_s, \tag{1}$$

где теперь i означает $\sqrt{-1}$. Тогда из уравнений (10) и (11) предыдущего параграфа имеем

$$\dot{U}_s - iC_sU_s + i\sum_j B_{sj}U_j = 0, \quad j \neq s. \tag{2}$$

Положим

$$U_s = P_s e^{i(gt+c)}. \tag{3}$$

Тогда

$$(g-C_s)P_s+\sum_j B_{sj}P_j=0, \quad j\neq s. \tag{4}$$

Полагая последовательно $s=1, 2, \ldots, n$, мы получаем следующую группу уравнений:

$$\begin{array}{llllll} (g-C_1)P_1+ & B_{12}P_2 & +B_{13}P_3+\ldots+ & B_{1n}P_n & =0, \\ B_{21}P_1 & +(g-C_2)P_2 & +B_{23}P_3+\ldots+ & B_{2n}P_n & =0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1}P_1 & + \quad B_{n2}P_2 & +\ldots\ldots\ldots & +(g-C_n)P_n & =0. \end{array} \tag{5}$$

Поэтому g является корнем уравнения

$$\Delta=0, \tag{6}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} g-C_1 & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & g-C_2 & \ldots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & g-C_n \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Уравнение (6) имеет n корней $g_1, g_2, \ldots, g_n$, которые, как мы увидим позже, все являются действительными. Кроме того, мы будем считать, что они различные.

Предположим теперь, что корни уравнения (6) вычислены.

Подстановка (3) показывает, что общее решение уравнения (2) может быть записано в виде ($s=1, 2, \ldots, n$)

$$U_s=M_{1s}e^{i(g_1t+c_1)}+M_{2s}e^{i(g_2t+c_2)}+\ldots+M_{ns}e^{i(g_nt+c_n)}, \tag{8}$$

где c и M — постоянные, причем последние не все являются независимыми. В частности, если обозначить $e^{i(g_rt+c_r)}$ через E_r, то

$$U_1=M_{11}E_1+M_{21}E_2+\ldots+M_{n1}E_n. \tag{9}$$

Поскольку постоянных интегрирования должно быть $2n$ [каждое из уравнений (2) при $s=1, 2, \ldots, n$ эквивалентно двум уравнениям для действительных переменных], мы можем рассматривать n величин c и $M_{11}, M_{21}, \ldots, M_{n1}$ в качестве постоянных интегрирования.

Подставим выражение (8) в уравнение (2) и приравняем коэффициенты при E_1. Тогда, полагая последовательно $s=1, 2, \ldots, n-1$, получаем $n-1$ уравнений

$$\begin{array}{llll} (g_1-C_1)M_{11}+ & B_{12}M_{12} & +B_{13}M_{13}+B_{1n}M_{1n} & =0, \\ B_{21}M_{11} & +(g_1-C_2)M_{12} & +B_{23}M_{13}+B_{2n}M_{1n} & =0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n-1,1}M_{11} & + \quad B_{n-1,2}M_{12} & +\ldots\ldots+(g_1-C_{n-1})M_{1n} & =0. \end{array}$$

Этих уравнений достаточно для того, чтобы определить отношения $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{1n}$ к M_{11}.

Аналогично, приравнивая коэффициенты при E_2, мы можем определить отношения $M_{22}, M_{23}, \ldots, M_{2n}$ к M_{21} и вообще отношения $M_{r2}, M_{r3}, \ldots, M_{rn}$ к M_{r1}.

Ниже мы увидим, как можно найти численные значения величин M, если значения e и $\tilde{\omega}$ для некоторой эпохи известны.

§ 13.12. Лемма

Общее решение (8) § 13.11 можно переписать в виде

$$U_s = \sum_{t=1}^{n} M_{ts} E_t. \tag{1}$$

Подстановка его в уравнения (2) § 13.11 дает

$$\sum_t (g_t - C_s) M_{ts} E_t + \sum_j \sum_t B_{sj} M_{tj} E_t = 0, \quad j \neq s,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при E_t, получаем

$$(g_t - C_s) M_{ts} + \sum_j B_{sj} M_{tj} = 0.$$

Аналогично

$$(g_r - C_s) M_{rs} + \sum_j B_{sj} M_{rj} = 0.$$

Исключим из этих уравнений C_s. Тогда

$$(g_t - g_r) M_{ts} M_{rs} = -\sum_j B_{sj} (M_{tj} M_{rs} - M_{ts} M_{rj}).$$

Просуммируем по s от 1 до n. Тогда получим

$$(g_t - g_r) \sum_{s=1}^{n} M_{ts} M_{rs} = -\sum_j \sum_{s=1}^{n} B_{sj} (M_{tj} M_{rs} - M_{ts} M_{rj}),$$

где $j \neq s$. Так как $B_{sj} = B_{js}$, то двойная сумма в правой части этой формулы равна нулю. Следовательно, если корни g_t и g_r различные, то

$$\sum_{s=1}^{n} M_{ts} M_{rs} = 0, \quad t \neq r \tag{2}$$

или, меняя местами s и r,

$$\sum_{r=1}^{n} M_{sr} M_{tr} = 0, \quad t \neq s. \tag{3}$$

§ 13.13. Вычисление постоянных интегрирования

Согласно формуле (1) § 13.12, $U_s = \sum_{t=1}^{n} M_{ts}E_t$. Умножим это равенство на M_{rs} и просуммируем по s от 1 до n. Тогда

$$\sum_{s=1}^{n} M_{rs}U_s = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} M_{rs}M_{ts}E_t = \sum_{s=1}^{n} M_{rs}^2 E_r + \sum_{t} E_t \sum_{s=1}^{n} M_{rs}M_{ts},$$

где в двойной сумме в правой части $t \neq r$. Согласно равенству (2) § 13.12, двойная сумма равна нулю, поэтому

$$\sum_{s=1}^{n} M_{rs}U_s = \sum_{s=1}^{n} M_{rs}^2 E_r.$$

Приравняем мнимые и действительные части. Тогда для данного r будем иметь

$$M_{r1}H_1 + M_{r2}H_2 + \ldots + M_{rn}H_n = (M_{r1}^2 + \ldots + M_{rn}^2)\sin(g_r t + c_r), \tag{1}$$

$$M_{r1}K_1 + M_{r2}K_2 + \ldots + M_{rn}K_n = (M_{r1}^2 + \ldots + M_{rn}^2)\cos(g_r t + c_r). \tag{2}$$

Для момента $t = 0$ могут быть найдены величины h_i $(\equiv e_i \sin\tilde{\omega}_i)$ и k_i $(\equiv e_i \cos\tilde{\omega}_i)$. Затем могут быть получены величины H_i и K_i. Подставим эти значения в равенства (1) и (2) (для упрощения мы не будем вводить для них специальных обозначений). Тогда будем иметь

$$M_{r1}\sin c_r = \frac{H_1 + \frac{M_{r2}}{M_{r1}}H_2 + \ldots + \frac{M_{rn}}{M_{r1}}H_n}{1 + \left(\frac{M_{r2}}{M_{r1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{M_{rn}}{M_{r1}}\right)^2} \tag{3}$$

и аналогичное уравнение для $M_{r1}\cos c_r$.

Пусть X_r означает правую часть формулы (3), а Y_r — соответствующую величину в выражении, содержащем K. Тогда

$$M_{r1}\sin c_r = X_r, \qquad M_{r1}\cos c_r = Y_r,$$

где величины X_r и Y_r рассматриваются как известные, ибо могут быть найдены методом, описанным в § 13.11. Вычисление M_{r1} и c_r тогда можно выполнить без труда.

Определение H и K теперь формально завершено. По формулам (9) § 13.10 мы находим h и k. Из формул (1) и (8) § 13.11, приравнивая мнимую и действительную части, будем иметь

$$H_s = \sum_{r=1}^{n} M_{rs} \sin(g_r t + c_r),$$
$$K_s = \sum_{r=1}^{n} M_{rs} \cos(g_r t + c_r), \tag{4}$$

а из формул (9) § 13.10, полагая $D_{rs} = M_{rs}/\sqrt{m_s n_s}\, a_s$, находим

$$h_s = \sum_{r=1}^{n} D_{rs} \sin(g_r t + c_r), \quad k_s = \sum_{r=1}^{n} D_{rs} \cos(g_r t + c_r).$$

§ 13.14. Корни уравнения, определяющего g

Мы считали, что корни $g_1, g_2, \ldots, g_n$ уравнения $\Delta = 0$ [формула (6) § 13.11] все действительные. Допустим теперь, что два из них, скажем g_1 и g_2, являются комплексными. Тогда они должны иметь вид

$$g_1 = u - iv, \quad g_2 = u + iv,$$

где мы предполагаем, что v положительно, причем u и v являются действительными. Формула (8) § 13.11 для U теперь дает

$$U_s = M_{1s} e^{vt} \cdot e^{i(ut+c_1)} + M_{2s} e^{-vt} \cdot e^{i(ut+c_2)} + \text{п. ч.}$$

Положим

$$\theta_1 = ut + c_1, \quad \theta_2 = ut + c_2, \quad \theta_r = g_r t + c_r.$$

Тогда, приравнивая мнимые и действительные части, получаем

$$H_s = M_{1s} e^{vt} \sin\theta_1 + M_{2s} e^{-vt} \sin\theta_2 + \sum_{r=3}^{n} M_{rs} \sin\theta_r,$$
$$K_s = M_{1s} e^{vt} \cos\theta_1 + M_{2s} e^{-vt} \cos\theta_2 + \sum_{r=3} M_{rs} \cos\theta_r.$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{n} (H_s^2 + K_s^2) = e^{2vt} \sum_s M_{1s}^2 + e^{-2vt} \sum_s M_{2s}^2 +$$
$$+ e^{vt}[\text{п. ч}] + e^{-vt}[\text{п. ч.}] + \text{п. ч.} + R,$$

где R — постоянная. Но, согласно формуле (14) § 13.10, левая часть этого соотношения равна $\varkappa^2$, причем $\varkappa$ — постоянная. Поэтому мы имеем тождество (обозначения очевидны)

$$\varkappa^2 \equiv P^2 e^{2vt} + Q^2 e^{-2vt} + e^{vt}[\text{п. ч}] + e^{-vt}[\text{п. ч}] + \text{п. ч.} + R.$$

Но e^{2vt} и e^{vt} неограниченно возрастают. Следовательно, правая часть не может равняться постоянной. Отсюда заключаем, что v должно быть равно нулю и корни g_1 и g_2 должны быть действительными и что вообще все корни $g_1, \ldots, g_n$ будут вещественными.

§ 13.15. Канонические уравнения для H и K

Согласно формулам (13) § 13.10, канонические уравнения имеют вид

$$\dot{H}_r = \frac{\partial F}{\partial K_r}, \quad \dot{K} = -\frac{\partial F}{\partial H_r},$$

где F определяется формулой (12) § 13.10:

$$2F = \sum_{r=1}^{n} C_r\left(H_r^2 + K_r^2\right) - \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} B_{rs}\left(H_r H_s + K_r K_s\right), \quad s \neq r. \tag{1}$$

Здесь F — однородная квадратичная функция H_s, а также однородная квадратичная функция K_s. Мы можем, следовательно, сделать ортогональное линейное преобразование переменных H, K к новым переменным L, l. Пусть

$$H_r = A_{r1}L_1 + A_{r2}L_2 + \ldots + A_{rn}L_n, \tag{2}$$

$$K_r = A_{r1}l_1 + \ldots + A_{rn}l_n. \tag{3}$$

При помощи этих уравнений мы можем выразить F через L и l. Новые переменные будут канонически сопряженными, если, согласно условиям (1) и (2) § 10.09, имеют место равенства

$$\sum_{r=1}^{n} A_{rs}^2 = 1, \tag{4}$$

$$\sum_{r=1}^{n} A_{rs}A_{rt} = 0, \quad t \neq s, \tag{5}$$

где s и t могут принимать значения 1, 2, ..., n. Мы тогда получим

$$\dot{L}_r = \frac{\partial F}{\partial l_r}, \quad \dot{l}_r = -\frac{\partial F}{\partial L_r}. \tag{6}$$

Очевидно, что F преобразуется к виду

$$2F = \sum_{s=1}^{n} a_r\left(L_r^2 + l_r^2\right) + \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} f_{rs}\left(L_r L_s + l_r l_s\right), \tag{7}$$

где a и f — функции A, B и C, и, кроме того, так как $B_{rs} = B_{sr}$, то $f_{rs} = f_{sr}$.

Число уравнений (4) равно n, а число уравнений (5) составляет $\frac{1}{2}n(n-1)$ $\left(\text{так как, например, } \sum_r A_{r1}A_{r2} \equiv \sum_r A_{r2}A_{r1}\right)$. Поэтому поскольку общее число величин A равно n^2, то $\frac{1}{2}n(n-1)$ величин A могут рассматриваться как произвольные.

Далее, в формуле (7) число величин f равно $^1/_2 n(n-1)$. Поэтому мы можем выбрать произвольные A так, чтобы все f были равными нулю. Другими словами, мы получим $^1/_2 n(n-1)$ новых соотношений, которые совместно с равенствами (4) и (5) дают нам возможность определить все величины A. Мы сможем тогда написать

$$2F = \sum_1^n a_r(L_r^2 + l_r^2). \tag{8}$$

Канонические уравнения будут иметь вид

$$\dot{L}_r = a_r l_r, \quad \dot{l}_r = -a_r L_r,$$

откуда находим

$$\ddot{L}_r + a_r^2 L_r = 0.$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$L_r = P_r \sin(a_r t + c_r). \tag{9}$$

Из формулы (8) и интеграла энергии (16) § 13.10 видим, что

$$l_r = P_r \cos(a_r t + c_r).$$

Из соотношений (2) и (3) мы тогда будем иметь

$$\begin{aligned} H_r &= \sum_{s=1}^n A_{rs} P_r \sin(a_r t + c_r), \\ K_r &= \sum_{s=1}^n A_{rs} P_r \cos(a_r t + c_r). \end{aligned} \tag{10}$$

Сравним эти последние равенства с равенствами (4) § 13.13. Мы видим, что величины a совпадают с g, т. е. с корнями уравнения $\Delta = 0$ [формулы (6) и (7) § 13.11]. Кроме того, $M_{rs} = A_{rs} P_r$.

Предположим, что преобразования (2) и (3) выполнены. Тогда после замены в равенстве (8) a_r на g_r мы увидим, что уравнение $\Delta = 0$ преобразуется в уравнение

$$\Delta' \equiv \prod_{r=1}^n (g - g_r) = 0.$$

§ 13.16. Случай двух равных корней

Рассмотрим определитель Δ (формула (7) § 13.11). Вследствие большого разнообразия входящих в него величин C и B кажется почти невозможным, чтобы уравнение $\Delta = 0$ имело два равных корня. Одно время думали, что если бы два корня действительно были равными, то чисто периодический характер решений для H и K был бы нарушен. Чтобы выяснить свойства решений, когда два корня, скажем

g_1 и g_2, равны друг другу, мы ограничимся анализом случая трех планет, т. е. при $n=3$. В этом случае коэффициенты A в формулах (2) и (3) § 13.15 имеют свойства направляющих косинусов и могут быть заменены на λ_r, μ_r, ν_r, $r=1, 2, 3$.

Преобразование функции F, определяемой формулой (1) § 13.15, к виду (8) § 13.15 аналитически эквивалентно приведению уравнения эллипсоида

$$2F \equiv C_1x^2+C_2y^2+C_3z^2-B_1yz-B_2zx-B_3xy=1$$

к уравнению

$$2F \equiv a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2=1, \tag{1}$$

отнесенному к главным осям. Если $g_1=g_2$, т. е. $a_1=a_2$, то уравнение (1) после замены a на g станет уравнением эллипсоида вращения

$$2F \equiv g_1x^2+g_1y^2+g_3z^2=1,$$

причем новые оси x и y, лежащие в центральном круговом сечении, направлены совершенно произвольно. Как и в предыдущем параграфе, уравнения для величин L имеют вид

$$\ddot{L}_1+g_1^2L_1=0, \quad \ddot{L}_2+g_1^2L_2=0, \quad \ddot{L}_3+g_3^2L_3=0.$$

Решение этих уравнений дается формулами

$$L_1=P_1\sin(g_1t+c_1), \quad L_2=P_2\sin(g_1t+c_2),$$
$$L_3=P_3\sin(g_3t+c_3).$$

Аналогичные уравнения имеют место и для l. Отсюда следует, что решение уравнений для H и K является периодическим.

§ 13.17. Уравнения, определяющие наклонности

Уравнения, которые мы будем теперь рассматривать, для планеты P_1 имеют вид

$$\dot{p}_1=\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial N_1}{\partial q_1}, \quad \dot{q}_1=-\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\partial N_1}{\partial p_1}, \tag{1}$$

причем интересующая нас часть N_1 дается формулой

$$-\sum_{j=2}^{n} Gm_jD_{1j}(p_1^2+q_1^2+p_j^2+q_j^2-2p_1p_j-2q_1q_j).$$

Используя обозначения (3) и (4) § 13.10, запишем уравнения (1) в виде

$$\dot{p}_1 + C_1 q_1 - \sum_2^n (1,\ j)\, q_j = 0, \tag{2}$$

$$\dot{q}_1 - C_1 p_1 + \sum_2^n (1,\ j)\, p_j = 0. \tag{3}$$

Пусть $\alpha_i = \sqrt{m_i n_i}\, a_i$. Тогда

$$\alpha_i \cdot (i,\ j) = \frac{2Gm_i m_j D_{ij}}{a_i \alpha_j} \cdot \alpha_j = -b_{ij}\alpha_j, \tag{4}$$

где b_{ij} — симметричная функция, обладающая свойством

$$b_{ij} = b_{ji}. \tag{5}$$

Умножим уравнение (2) на α_1 и воспользуемся соотношением (4). Тогда, полагая

$$\alpha_i p_i = P_i, \quad \alpha_i q_i = Q_i, \tag{6}$$

получаем

$$\dot{P}_1 + C_1 Q_1 + \sum_2^n b_{ij} Q_j = 0.$$

В общем случае будем иметь

$$\dot{P}_i + C_i Q_i + \sum_j b_{ij} Q_j = 0 \tag{7}$$

и аналогично

$$\dot{Q}_i - C_i P_i - \sum_j b_{ij} P_j = 0, \tag{8}$$

где $j \neq i$.

Из уравнений (7) и (8) находим

$$\sum_{i=1}^n (P_i \dot{P}_i + Q_i \dot{Q}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} (P_i Q_j - P_j Q_i) = 0,$$

причем двойная сумма, согласно свойству (5), равна нулю. Поэтому

$$\sum_1^n (P_i^2 + Q_i^2) = k^2,$$

где k — постоянная.

Последняя зависимость эквивалентна равенству

$$\sum_1^n m_i n_i a_i^2 \gamma_i^2 = k^2, \tag{9}$$

которое является обобщением интеграла (8) § 13.07. Таким образом, поскольку n_l имеют один и тот же знак при всех значениях l, то величины γ ограничены. Следовательно, наклонности не имеют вековых членов.

§ 13.18. Определение наклонностей

Решение уравнений (7) и (8) § 13.17, очевидно, аналогично решению уравнений для H и K, полученному в § 13.11. Пусть

$$P_l = N_l \sin(gt + c), \qquad Q_l = N_l \cos(gt + c).$$

Тогда, подставляя выражения для P_l и Q_l в уравнения (7) § 13.17 и полагая $l = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\begin{array}{llll} (g+C_1)N_1 + & b_{12}N_2 & + \ldots + & b_{1n}N_n = 0, \\ b_{21}N_1 & +(g+C_2)N_2 & + \ldots + & b_{2n}N_n = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}N_1 & + \quad b_{n2}N_2 & + \ldots + & (g+C_n)N_n = 0. \end{array}$$

Таким образом, g есть решение уравнения

$$\Delta = 0, \tag{2}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} g+C_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & g+C_2 & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & g+C_n \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Мы покажем теперь, что один из корней уравнения (2) равен нулю.

Умножим первую строку определителя (3) на α_1, вторую — на α_2 и т. д. и образуем затем суммы элементов каждого столбца, обозначив их через $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В частности, для первого столбца будем иметь

$$X_1 = \alpha_1 g + \alpha_1 C_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j b_{j1}. \tag{4}$$

Но $C_1 = \sum_{j=2}^{n} (1, j)$ и, согласно формуле (4) § 13.17,

$$\alpha_1 C_1 = -\sum_{j=2}^{n} b_{1j}\alpha_j = -\sum_{l=2} \alpha_j b_{j1}.$$

Поэтому формула (4) принимает вид

$$X_1 = \alpha_1 g.$$

Аналогично для r-го столбца находим, что

$$X_r = \alpha_r g.$$

Поэтому $\alpha_1\Delta$ равно определителю (3), в котором элементы первой строки заменены на $\alpha_1 g, \alpha_2 g, \ldots, \alpha_n g$. Следовательно, один корень есть $g=0$. Остальные корни определятся из уравнения $\Delta_1 = 0$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ b_{21} & g+C_2 & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & g+C_n \end{vmatrix}.$$

Если $g_2, g_3, \ldots, g_n$ — ненулевые корни, то общее решение уравнений дается формулами

$$P_s = N_{1s}\sin c_1 + N_{2s}\sin(g_2 t + c_2) + \ldots + N_{ns}\sin(g_n t + c_n),$$

$$Q_s = N_{1s}\cos c_1 + N_{2s}\cos(g_2 t + c_2) + \ldots + N_{ns}\cos(g_n t + c_n).$$

Мы можем рассматривать $N_{11}, N_{21}, \ldots, N_{n1}$ и c как постоянные интегрирования.

Метод вычисления постоянных, входящих в общее решение, аналогичен тому, который был описан в § 13.13 для случая эксцентриситетов. Аналогичное замечание относится и к решению канонических уравнений, к которым могут быть приведены уравнения (7) и (8) § 13.17,

§ 13.19. Численные результаты

Очевидно, что получение численного решения задачи о движении планетной системы в том виде, в котором она нам известна в настоящее время, является весьма трудоемким делом. Если ограничиться исследованием больших планет, то для вычисления эксцентриситетов их орбит нужно определить: 1) девять значений корней g уравнения девятой степени [(6) § 13.11], 2) значения 18 постоянных интегрирования M_{1s}, c_s и 3) значения остальных коэффициентов M_{rs} $(r \neq 1)$. Уравнения, определяющие наклонности, приводят к такой же вычислительной работе. В предыдущих параграфах были получены результаты в случае двух планет (Юпитер и Сатурн). В настоящее время известно полное решение для случая восьми планет, найденное Стокуэллом[1]), когда Плутон еще не был открыт. Соответствующие основные результаты даны в приведенной ниже таблице, причем наклонности отнесены к неизменной плоскости планетной системы. Что касается эксцентриситетов, то значения корней g уравнения $\Delta = 0$

[1]) Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 18, 1873.

лежат в пределах от 0,616 до 22″,46, если их выразить в секундах дуги. Соответствующие периоды приближенно равны 2 100 000 и 58 000 лет. Периоды изменения наклонностей имеют тот же порядок.

Таблица

Максимальные и минимальные значения эксцентриситетов и наклонностей

Планета	Эксцентриситет		Наклонность	
	макс.	мин.	макс.	мин.
Меркурий	0,2317	0,1215	9°10′,7	4°44′,4
Венера	0,0706	0,0000	3°16′,3	—*
Земля	0,0677	0,0000	3°6′,0	—*
Марс	0,1397	0,0185	5°56′,0	—*
Юпитер	0,0608	0,0255	0°28′,9	0°14′,4
Сатурн	0,0843	0,0124	1°0′,6	0°47′,3
Уран	0,0780	0,0118	1°7′,2	0°54′,4
Нептун	0,0145	0,0056	0°47′,3	0°33′,7

* Эти значения определяются неуверенно ввиду малости некоторых коэффициентов.

§ 13.20. Долгота в эпоху

Если в уравнении (8) § 5.10 возмущающую функцию R заменить ее непериодической частью N, то мы получим

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial N}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\varphi}{na^2}\frac{\partial N}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\cos\varphi}\frac{\partial N}{\partial i},$$

где $\varphi = \sqrt{1-e^2}$, или, с достаточной степенью точности,

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial N}{\partial a} + \frac{e}{2na^2}\frac{\partial N}{\partial e} + \frac{\gamma}{2na^2}\frac{\partial N}{\partial i}.$$

Если в это уравнение ввести h, k и p, q, то оно примет вид

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial N}{\partial a} + \frac{1}{2na^2}\left(h\frac{\partial N}{\partial h} + k\frac{\partial N}{\partial k} + p\frac{\partial N}{\partial p} + q\frac{\partial N}{\partial q}\right).$$

Подставим сюда значения h, k и p, q, полученные в результате решения дифференциальных уравнений. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\dot{\varepsilon} = A + \sum B\cos(\alpha t + \beta),$$

где через α обозначены величины g, фигурирующие в периодических членах в эксцентриситетах и наклонностях, и величины α являются малыми; A и B — малые постоянные. Таким образом, для данной планеты имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + At + \text{п. ч.},$$

откуда средняя долгота l определяется по формуле

$$l = (n + A)t + \varepsilon_0 + \text{п. ч.}$$

Наблюдаемое среднее движение планеты равно коэффициенту при t в этой формуле.

§ 13.21. Общие замечания

Нужно помнить, что при исследовании, изложенном в этой главе, мы отбросили 1) все периодические члены возмущающей функции и 2) все члены четвертого и более высокого порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей из непериодической части возмущающей функции. При этих упрощениях мы видели, что h и k можно представить суммами некоторых периодических членов, которые для данной планеты мы можем записать в простом виде:

$$h \equiv e \sin \tilde{\omega} = \sum M_r \sin(g_r t + c_r),$$
$$k \equiv e \cos \tilde{\omega} = \sum M_r \cos(g_r t + c_r).$$

Пусть e_0 и $\tilde{\omega}_0$ — значения этих элементов в эпоху $t = 0$ и пусть в последующий момент t

$$e = e_0 + \Delta e, \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \Delta\tilde{\omega}.$$

Если t мало по сравнению с наименьшим из периодов $2\pi/g_r$, так что величиной $(g_r t)^2$ можно пренебречь, то

$$\Delta e \sin \tilde{\omega}_0 + e_0 \Delta\tilde{\omega} \cos \tilde{\omega}_0 = t \sum g_r M_r \cos c_r,$$
$$\Delta e \cos \tilde{\omega}_0 - e \Delta\tilde{\omega} \sin \tilde{\omega}_0 = -t \sum g_r M_r \sin c_r,$$

откуда

$$\Delta e = t \sum g_r M_r \sin(\tilde{\omega}_0 - c_r).$$

Этот последний результат показывает, что при указанных ограничениях истинное изменение e практически не отличается от векового изменения.

Аналогичный результат справедлив также и для наклонностей. Это дает основание считать, что появление векового члена, например в эксцентриситете, который найден при решении уравнений Лагранжа методом, указанным в гл. 6, является результатом применения аналитических операций, присущих этому методу. Аналогичное замечание относится и к наклонности.

Если отбросить ограничения, упомянутые в начале этого параграфа, то проблема устойчивости планетной системы в том смысле, что элементы a, e и γ представимы сходящимися периодическими рядами, очень сложна и до сих пор не получила точного решения. С другой стороны, буквенное решение Делонэ в задаче о движении Луны указывает на гравитационную устойчивость в указанном смысле (хотя вопрос о сходимости различных полученных рядов и является крайне сложным) и, в частности, показывает, что вековые и смешанные члены могут быть представлены в виде чисто периодических членов.

Глава 14

МЕТОД ГАУССА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 14.01. Введение

Рассмотрим уравнение (10) § 5.10:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i}. \qquad (1)$$

Если возмущающая функция R разложена в ряд обычным способом, то интегрирование уравнения (1) при условии, что в правой части все элементы рассматриваются как постоянные, приведет нас к формуле (4) § 6.03:

$$\Omega = \Omega_0 + \lambda t + \text{п. ч.} \qquad (2)$$

Можно сказать, что решение (2) является точным до первых степеней масс двух рассматриваемых планет. Эта степень точности достаточна для настоящей цели. Член λt в формуле (2) называется *вековым неравенством*. Конечно, функция R имеет сложный вид, и отыскание численного значения λ является долгим и утомительным делом. Это же замечание можно сделать и о вековых неравенствах других элементов. Метод, предложенный впервые Гауссом[1]), дает возможность найти численное значение λ без предварительного разложения возмущающей функции. Он требует лишь, чтобы для некоторых выбранных моментов времени были известны численные значения координат планеты P (или какого-либо другого тела) и возмущающей планеты P_1 в предположении, что оба тела движутся по эллипсам. Этот метод был использован во многих практических задачах.

§ 14.02. Ортогональные составляющие S, T и W ускорения

Пусть на рис. 23 O означает Солнце, P — интересующую нас планету и A — точку на небесной сфере с центром в O, соответствующую планете P. Относительно обычной основной плоскости координаты планеты P обозначим через x, y, z, а координаты возмущающей планеты P_1 с массой m_1 — через x_1, y_1, z_1. Для удобства мы положим $\varkappa = Gm_1$.

---

[1]) См. Tisserand, Mécanique Céleste, I, 431, 1889.

Пусть $\varkappa S$, $\varkappa T$ и $\varkappa W$ составляющие силы притяжения планетой P_1 единичной массы, помещенной в точке P. Они определены следующим образом: $\varkappa S$ направлена вдоль радиус-вектора OP (или OA),

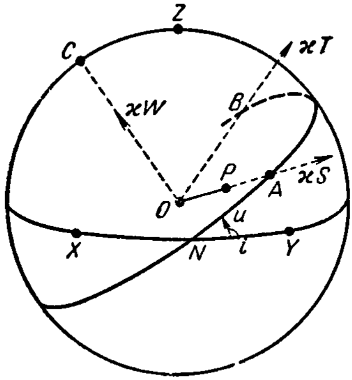

Рис. 23.

$\varkappa T$ — перпендикулярно радиус-вектору в плоскости орбиты (параллельно OB), $\varkappa W$ — перпендикулярно плоскости орбиты (параллельно OC).

Пусть направляющие косинусы прямых OA, OB и OC равны l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3. Тогда, если через u обозначить дугу NA, то

$$l_1 = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i.$$

Выражения для остальных направляющих косинусов совпадают с выражениями (3) — (5) § 5.06, если в них заменить ω на u. Далее, производные от l_1 и т. д. по Ω, u и i найдутся из таблицы § 5.06, если в ней ω заменить на u.

Если f — истинная аномалия, то

$$u = \omega + f = \tilde{\omega} - \Omega + f. \tag{1}$$

Но $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$, $\partial R/\partial z$ — составляющие силы притяжения планетой P_1 единичной массы, помещенной в точке P по осям OX, OY, OZ. Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x} &= l_1 S + l_2 T + l_3 W,\\
\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial y} &= m_1 S + m_2 T + m_3 W,\\
\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial z} &= m_1 S + n_2 T + n_3 W,
\end{aligned} \tag{2}$$

откуда

$$S=\frac{1}{\varkappa}\left(l_1\frac{\partial R}{\partial x}+m_1\frac{\partial R}{\partial y}+n_1\frac{\partial R}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Для составляющих T и W формулы имеют аналогичный вид.

Далее,

$$R=\varkappa\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right),$$

где

$$\Delta^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,$$

поэтому, например,

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{\varkappa(x-x_1)}{\Delta^3}-\varkappa\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Таким образом, значение S для любого момента времени можно вычислить при помощи формулы (3), если известны элементы орбиты планеты P и координаты планет P и P_1.

В уравнения Лагранжа входят производные от R по элементам. Поэтому если σ — любой элемент, то нам потребуется выразить производную $\partial R/\partial\sigma$ через S, T и W.

§ 14.03. Выражение $\partial R/\partial\sigma$ через S, T и W

Мы имеем

$$x=l_1r,\quad y=m_1r,\quad z=n_1r,$$

где r — радиус-вектор планеты P. Следовательно, если σ означает любой элемент, то

$$\frac{\partial x}{\partial\sigma}=r\frac{\partial l_1}{\partial\sigma}+l_1\frac{\partial r}{\partial\sigma}.$$

Аналогичные равенства имеют место и для $\partial y/\partial\sigma$, $\partial z/\partial\sigma$. Далее,

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\frac{dR}{dz}\frac{\partial z}{\partial\sigma},$$

поэтому, принимая во внимание формулы (2) предыдущего параграфа, будем иметь

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\sigma}=\sum_{l,m,n}\left(r\frac{\partial l_1}{\partial\sigma}+l_1\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)(l_1S+l_2T+l_3W)=$$

$$=S\frac{\partial r}{\partial\sigma}+rT\sum l_2\frac{\partial l_1}{\partial\sigma}+rW\sum l_3\frac{\partial l_1}{\partial\sigma_4}. \tag{1}$$

Затем при помощи таблицы § 5.06, в которой ω заменим на u, находим

$$\frac{\partial l_1}{\partial\sigma}=\frac{\partial l_1}{\partial\Omega}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}+\frac{\partial l_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\sigma}+\frac{\partial l_1}{\partial i}\cdot\frac{\partial i}{\partial\sigma}=$$

$$=-m_1\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}+l_2\frac{\partial u}{\partial\sigma}+l_3\sin u\frac{\partial i}{\partial\sigma}.$$

Производные от m_1 и n_1 по σ получаются аналогично. Поэтому коэффициенты при rT и rW в формуле (1) могут быть легко найдены. Они соответственно равны

$$n_3 \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \frac{\partial u}{\partial\sigma} \quad \text{и} \quad -n_2 \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \sin u \frac{\partial i}{\partial\sigma},$$

где $n_3 = \cos i$ и $n_2 = \cos u \sin i$. Следовательно,

$$\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial R}{\partial\sigma} = S \frac{\partial r}{\partial\sigma} + rT \left(n_3 \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \frac{\partial u}{\partial\sigma}\right) + rW \left(-n_2 \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \sin u \frac{\partial i}{\partial\sigma}\right). \tag{2}$$

Нам потребуется найти $\partial r/d\sigma$ и $\partial u/\partial\sigma$.

$$1)\ \frac{\partial r}{\partial\sigma}.$$

Мы имеем

$$r = a(1 - e\cos E),$$

откуда

$$\frac{\partial r}{\partial\sigma} = \frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial\sigma} - a\cos E \frac{\partial e}{\partial\sigma} + ae\sin E \frac{\partial E}{\partial\sigma}.$$

Далее,

$$E - e\sin E = \int n\,dt + \varepsilon - \tilde{\omega},$$

где при дифференцировании правой части первый член в ней *не должен* рассматриваться как функция a. Поэтому в общем случае

$$\frac{r}{a}\frac{\partial E}{\partial\sigma} - \sin E \frac{\partial e}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})}{\partial\sigma} \tag{3}$$

и, следовательно, после некоторых упрощений получаем

$$\frac{\partial r}{\partial\sigma} = \frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial\sigma} - a\cos f \frac{\partial e}{\partial\sigma} + \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})}{\partial\sigma}. \tag{4}$$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial\sigma}$. Из равенства (1) § 12.02 имеем

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega)}{\partial\sigma} + \frac{\partial f}{\partial\sigma}. \tag{5}$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E,$$

откуда

$$\frac{1}{\sin f}\frac{\partial f}{\partial\sigma} = \frac{1}{1-e^2}\frac{\partial e}{\partial\sigma} + \frac{1}{\sin E}\frac{\partial E}{\partial\sigma}.$$

Однако $r\sin f = b\sin E$, где $b = a(1-e^2)^{1/2}$. Поэтому, используя формулу (3), находим

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma} = \sin f\left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r}\right)\frac{\partial e}{\partial\sigma} + \frac{ab}{r^2}\frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})}{\partial\sigma}. \tag{6}$$

Теперь выражение для $\partial u/\partial\sigma$ получается для формул (5) и (6).

Подставляя в равенство (2) выражения для $\partial r/\partial\sigma$, $\partial u/\partial\sigma$, n_3 и n_2, мы найдем, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\sigma} = S\left[\frac{r}{a}\frac{\partial a}{\partial\sigma} - a\cos f\frac{\partial e}{\partial\sigma} + \frac{a^2 e\sin E}{r}\frac{\partial(\varepsilon-\tilde{\omega})}{\partial\sigma}\right] + \\ + rT\left[\sin f\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\frac{\partial e}{\partial\sigma} + \frac{ab}{r^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} + \right. \\ \left. + \left(1-\frac{ab}{r^2}\right)\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\sigma} - (1-\cos i)\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}\right] + \\ + rW\left[-\cos u\sin i\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \sin u\frac{\partial i}{\partial\sigma}\right]. \qquad (7)\end{aligned}$$

Из этого соотношения немедленно выводим следующие равенства:

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a}\cdot S, \quad \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial e} = -a\cos f\cdot S + r\sin f\left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)T,$$

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial i} = r\sin u\cdot W, \quad \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\Omega} = -2r\sin^2\frac{i}{2}\cdot T - r\cos u\sin i\cdot W,$$

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} = \frac{ae\sin f}{(1-e^2)^{1/2}}\cdot S + \frac{a^2(1-e^2)^{1/2}}{r}\cdot T, \quad \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon} + rT.$$

§ 14.04. Уравнения, определяющие элементы $\dot{a}, \dot{e}, \ldots, \dot{\varepsilon}$

Подставим теперь полученные в предыдущем параграфе выражения для $\partial R/\partial a$ и т. д. в уравнения (7)—(12) § 5.10. В результате получим

$$\dot{a} = \frac{2Gm_1}{n(1-e^2)^{1/2}}\left[Se\sin f + \frac{b^2}{ar}T\right],$$

$$\dot{e} = \frac{Gm_1(1-e^2)^{1/2}}{na}[S\sin f + T(\cos E + \cos f)],$$

$$\dot{i} = \frac{Gm_1}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\cdot Wr\cos u,$$

$$\dot{\Omega} = \frac{Gm_1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot Wr\sin u,$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = 2\sin^2\frac{i}{2}\cdot\dot{\Omega} + \frac{Gm_1(1-e^2)^{1/2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\frac{ar}{b^2}\right)\sin f\right],$$

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2Gm_1}{na^2}\cdot rS + \frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}}\dot{\tilde{\omega}} + 2(1-e^2)^{1/2}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\dot{\Omega}.$$

Так как средняя долгота, которую мы здесь обозначим через ζ, определяется формулой

$$\zeta = \int n\,dt + \varepsilon,$$

то мы имеем

$$\dot{\zeta} = n + \dot{\varepsilon}.$$

Эти формулы удобны, если пользоваться методом механических квадратур. Как было сказано в § 14.02, численные значения для S, T, W могут быть найдены для любого момента времени, и если элементы известны, то правые части этих уравнений могут быть вычислены для любого рассматриваемого момента. Поэтому мы можем получить таблицу значений, например $\dot{e}$, для моментов t_0, $t_0+\tau$, $t_0+2\tau$, ..., из которой путем численного интегрирования можно выразить e как функцию t.

§ 14.05. Приложение к вековым неравенствам

В § 7.16 мы видели, что второй член возмущающей функции

$$R \equiv Gm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right)$$

является чисто периодическим. Следовательно, занимаясь вековыми возмущениями, в качестве возмущающей функции достаточно взять

$$R = Gm_1\left(\frac{1}{\Delta}\right) \equiv \varkappa\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

Поэтому мы можем рассматривать S, T и W как проекции $1/\Delta^2$ на оси OA, OB и OC (см. рис. 23).

В общем случае, когда рассматривается вся возмущающая функция, уравнение для элемента σ может быть записано в виде

$$\dot{\sigma} = A_0 + \sum_i \sum_j B\cos(i\zeta + j\zeta_1 + q), \tag{1}$$

где ζ, ζ_1 — соответственно средние долготы планет P и P_1, а i, j — целые положительные или отрицательные числа, включая и нуль, с оговоркой, что i и j не равны нулю одновременно.

Умножим уравнение (1) на $d\zeta\, d\zeta_1$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π по ζ и ζ_1. Тогда, обозначая A_0 через $[\dot{\sigma}]$, мы будем иметь

$$[\dot{\sigma}] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{\sigma}\, d\zeta\, d\zeta_1. \tag{2}$$

Гаусс ввел функции S_0, T_0, W_0 так, что первая из них определяется формулой

$$S_0 = \frac{m_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\, d\zeta_1. \tag{3}$$

Функции T_0 и W_0 задаются аналогичными выражениями. Поскольку S, T и W — функции от ζ и ζ_1, то новые функции, определяемые формулами вида (3), являются функциями лишь от ζ.

С точностью до членов первого порядка относительно масс элемент a будет периодической функцией. Поэтому $[\dot{a}]=0$. Вековые же неравенства элементов e, i и т. д. даются формулами

$$
\begin{aligned}
[\dot{e}] &= \frac{G(1-e^2)^{1/2}}{na}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[S_0\sin f+T_0(\cos E+\cos f)]\,d\zeta,\\
[\dot{i}] &= \frac{G}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W_0 r\cos u\,d\zeta,\\
[\dot{\Omega}] &= \frac{G}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin i}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W_0 r\sin u\,d\zeta,\\
[\dot{\tilde{\omega}}] &= 2\sin^2\frac{i}{2}[\dot{\Omega}]+\frac{G(1-e^2)^{1/2}}{nae}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[-S_0\cos f+\\
&\quad +T_0\left(1+\frac{ar}{b^2}\right)\sin f\Big]d\zeta,\\
[\dot{\varepsilon}] &= -\frac{2G}{na^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_0 r\,d\zeta+\frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}}[\dot{\tilde{\omega}}]+2\left(1-e^2\right)^{1/2}\sin^2\frac{i}{2}[\dot{\Omega}],
\end{aligned}
\tag{4}
$$

которые следуют из формул § 14.04 и (3) настоящего параграфа

§ 14.06. Функции S_0, T_0 и W_0

Достаточно рассмотреть функцию S_0, определяемую формулой

$$S_0=\frac{m_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\,d\zeta_1. \tag{1}$$

Пусть на рис. 24 QQ_1 означает часть орбиты возмущающей планеты P_1. Предположим, что масса m_1 распределена вдоль орбиты таким образом, что масса $d\mu$ на элементе QQ_1 пропорциональна времени dt, необходимому для того, чтобы планета P_1 переместилась из точки Q в точку Q_1. Если период движения равен T_1 и площадь OQQ_1 равна dA, то

$$\frac{d\mu}{m_1}=\frac{dt}{T_1}=\frac{d\zeta_1}{2\pi}=\frac{dA}{\pi a_1 b_1}, \tag{2}$$

где a_1 и b_1 — полуоси орбиты планеты P_1. Тогда равенства (1) и (2) дадут

$$S_0 = \int S\, d\mu, \tag{3}$$

где интегрирование производится по эллиптическому кольцу, по которому описанным выше путем распределена масса.

Пусть PX, PY, PZ — любые оси с началом в точке P. Пусть, далее, x, y, z — координаты точки Q. Тогда относительно новых

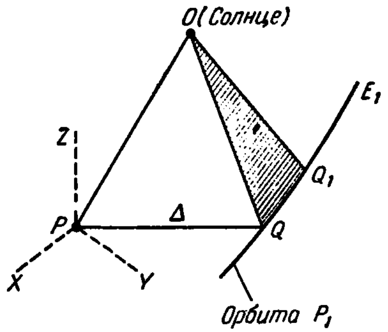

Рис. 24.

осей составляющие силы притяжения элемента массы $d\mu$, расположенного в точке Q, на единичную массу, расположенную в точке P, будут

$$G\, d\mu \frac{x}{\Delta^3}, \quad G\, d\mu \frac{y}{\Delta^3}, \quad G\, d\mu \frac{z}{\Delta^3}.$$

Обозначим $d\mu\,(x/\Delta^3)$ через $d\varphi_x$; тогда

$$\varphi_x = \int \frac{x}{\Delta^3}\, d\mu.$$

Аналогично

$$\varphi_y = \int \frac{y}{\Delta^3}\, d\mu, \quad \varphi_z = \frac{z}{\Delta^3}\, d\mu. \tag{4}$$

Теперь $GS\, d\mu$ — радиальная (т. е. направленная вдоль OP) составляющая силы притяжения элемента массы планеты Q на единичную массу, расположенную в точке P. Если l_1, m_1, n_1 означают направляющие косинусы прямой OP относительно осей PX, PY и PZ, то

$$GS\, d\mu = G\,[l_1\, d\varphi_x + m_1\, d\varphi_y + n_1\, d\varphi_z].$$

Следовательно, согласно формуле (3), имеем

$$S_0 = l_1\varphi_x + m_1\varphi_y + n_1\varphi_z. \tag{5}$$

Ниже мы выберем оси PX, PY и PZ так, чтобы они были главными осями конуса, вершина которого находится в точке P, а основанием служит эллиптическая орбита планеты P_1, и покажем, как можно вычислить для данного положения планеты P величины φ_x и т. д. Поэтому S_0 можно будет вычислить посредством формулы (5). Функции T_0 и W_0 даются формулами, аналогичными формуле (5).

Заметим, что в формулах (4) Δ определяется равенством

$$\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{6}$$

§ 14.07. Функции φ_x, φ_y, φ_z

Согласно равенствам (2) и (4) предыдущего параграфа,

$$\varphi_x = \frac{m_1}{\pi a_1 b_1} \int \frac{x}{\Delta^3}\, dA. \tag{1}$$

Обозначим через p перпендикуляр, опущенный из точки P на плоскость орбиты планеты P_1. Тогда p будет также перпендикуляром, опущенным из P на площадку OQQ_1 и другие такие же площадки. Если через dV обозначить объем тетраэдра с вершиной в P и основанием OQQ_1, то будем иметь

$$dV = \frac{1}{3}\, p\, dA.$$

Пусть координаты точки Q_1 и Солнца O будут соответственно $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ и x_0, y_0, z_0; тогда

$$dV = \frac{1}{6}\, [x_0 (y\, dz - z\, dz) + y_0 (z\, dx - x\, dz) + z_0 (x\, dy - y\, dx)].$$

Приравнивая друг другу эти два выражения для dV, мы выразим dA через x, x_0, dx и т. д. Для удобства положим

$$g = \frac{m_1}{\pi a_1 b_1}. \tag{2}$$

Тогда из равенства (1) мы получим

$$\varphi_x = \frac{g}{2p} (x_0 P_x + y_0 Q_x + z_0 R_x), \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} P_x &= \int \frac{x\,(y\, dz - z\, dy)}{\Delta^3}, \\ Q_x &= \int \frac{x\,(z\, dx - x\, dz)}{\Delta^3}, \\ R_x &= \int \frac{x\,(x\, dy - y\, dx)}{\Delta^3}, \end{aligned} \tag{4}$$

причем интегрирование производится вдоль эллиптической орбиты E_1 планеты P_1. Пусть

$$x = uz, \quad y = vz. \tag{5}$$

Тогда, согласно формуле (6) § 14.06, имеем

$$\Delta^2 = z^2 U^2,$$

где

$$U^2 = 1 + u^2 + v^2. \tag{6}$$

Из соотношений (5) мы сразу же получаем

$$y\,dz - z\,dy = -z^2\,dv,$$
$$z\,dx - x\,dz = z^2\,du,$$
$$x\,dy - y\,dx = z^2 (u\,dv - v\,du).$$

Следовательно, согласно равенствам (4), будем иметь

$$\begin{gathered} P_x = -\int \frac{u\,dv}{U^3}, \quad Q_x = \int \frac{u\,du}{U^3}, \\ R_x = \int \frac{u\,(u\,dv - v\,du)}{U^3}. \end{gathered} \tag{7}$$

Аналогично находим

$$P_y = \int \frac{y\,(y\,dz - z\,dy)}{\Delta^3}, \quad P_z = \int \frac{z\,(y\,dz - z\,dy)}{\Delta^3}.$$

Формулы для Q_y, Q_z, R_y, R_z имеют аналогичный вид. Таким образом, мы имеем следующую группу формул:

$$\begin{aligned} P_x &= -\int \frac{u\,dv}{U^3}, \quad Q_x = \int \frac{u\,du}{U^3}, \quad R_x = \int \frac{u\,(u\,dv - v\,du)}{U^3}, \\ P_y &= -\int \frac{v\,dv}{U^3}, \quad Q_y = \int \frac{v\,du}{U^3}, \quad R_y = \int \frac{v\,(u\,dv - v\,du)}{U^3}, \\ P_z &= -\int \frac{dv}{U^3}, \quad Q_z = \int \frac{du}{U^3}, \quad R_z = \int \frac{u\,dv - v\,du}{U^3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из этих формул мы сразу же находим

$$P_x + Q_y + R_z = 0. \tag{9}$$

С другой стороны, используя равенство (6), получаем

$$P_y - Q_x = -\int \frac{u\,du + v\,dv}{U^3} = -\int \frac{dU}{U^2} = \left[\frac{1}{U}\right],$$

где $[1/U]$ означает результат интегрирования вдоль эллипса E_1. Но E_1 — замкнутая кривая, поэтому $[1/U] = 0$. Следовательно,

$$P_y = Q_x.$$

Аналогично

$$P_z = R_x \quad \text{и} \quad Q_z = R_y.$$

Пусть

$$F = \frac{g}{4p}\left[x_0^2 P_x + y_0^2 Q_y + z_0^2 R_z + 2y_0 z_0 R_y + 2z_0 x_0 P_z + 2x_0 y_0 Q_x\right]. \quad (10)$$

Тогда из формулы (3) и ее аналогов имеем

$$\varphi_z = \frac{\partial F}{\partial x_0}, \quad \varphi_y = \frac{\partial F}{\partial y_0}, \quad \varphi_z = \frac{\partial F}{\partial z_0}. \quad (11)$$

Уравнение конуса с вершиной P и основанием E_1 имеет вид $f(x, y, z) = 0$, где f — однородная квадратичная функция от x, y и z. Рассмотрим, например, интеграл (8), определяющий P_x. Подынтегральная функция имеет нулевой порядок относительно x, y, z и поскольку $x = uz$, $y = vz$, то выражение P_x через u и v показывает, что интегрирование может быть проведено вдоль *любого* сечения косинуса.

§ 14.08. Конус с вершиной в P и основанием E_1

Уравнение эллиптической орбиты планеты P_1, отнесенное к SA_1, как оси ξ, оси η, показанной на рис. 25, и оси ζ, перпендикулярной

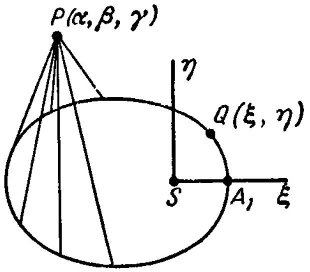

Рис. 25.

плоскости орбиты, имеет вид

$$\frac{(\xi + a_1 e_1)^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1, \quad \zeta = 0.$$

Пусть α, β, γ означают координаты планеты P в этой системе осей. Уравнение любой прямой, проходящей через P, запишется в виде

$$\frac{\xi - \alpha}{l} = \frac{\eta - \beta}{m} = z - \gamma. \quad (1)$$

Если эта прямая пересекает E_1, то будем иметь

$$\frac{(\alpha - l\gamma + a_1 e_1)^2}{a_1^2} + \frac{(\beta - m\gamma)^2}{b_1^2} = 1. \quad (2)$$

Уравнение конуса с вершиной в P и основанием E_1 получается путем исключения l и m из уравнений (1) и (2). Оно имеет вид

$$\frac{1}{a_1^2}\left[\alpha+a_1e_1-\frac{\gamma(\xi-\alpha)}{\zeta-\gamma}\right]^2+\frac{1}{b_1^2}\left[\beta-\frac{\gamma(\eta-\beta)}{\zeta-\gamma}\right]^2=1. \tag{3}$$

Перенесем начало координат в точку P. Тогда если x, y, z — координаты любой точки конуса, то

$$x=\xi-\alpha,\quad y=\eta-\beta,\quad z=\zeta-\gamma,$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1}{a_1^2}[z(\alpha+a_1e_1)-\gamma x]^2+\frac{1}{b_1^2}[\beta z-\gamma y]^2=z^2.$$

Оно может быть записано в виде

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx=0,$$

где, например, $A=\gamma^2/a_1^2$.

Если l, m, n означают направляющие косинусы нормали к основной плоскости, то

$$\frac{Al+Gn}{l}=\frac{Bm+Fn}{m}=\frac{Gl+Fm+Cn}{n}=\lambda,$$

так что λ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & G \\ 0 & B-\lambda & F \\ G & F & C-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Легко видеть, что уравнение (4) приводится к виду

$$\lambda^3+P\lambda^2+Q\lambda+a_1^4b_1^4\gamma^4=0.$$

Поэтому два из трех корней λ_1, λ_2, λ_3 будут положительными, а один отрицательным. Пусть λ_3 — отрицательный корень, так что $\lambda_3=-\lambda$, где $\lambda>0$.

Уравнение конуса, отнесенное к главным осям, тогда запишется в виде

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2-\lambda z^2=0, \tag{5}$$

причем ось z есть внутренняя главная ось.

Будем понимать теперь под PX, PY, PZ на рис. 24 главные оси конуса. Направляющие косинусы l, m, n одной из этих осей относительно осей ξ, η, ζ, изображенных на рис. 25, определяются равенствами

$$\frac{l}{G(\lambda - B)} = \frac{m}{F(\lambda - A)} = \frac{n}{(\lambda - A)(\lambda - B)},$$

где λ теперь означает соответствующий корень уравнения (4).

§ 14.09. Вычисление P_x и т. д.

Согласно формулам (7) § 14.07,

$$P_x = -\int \frac{u\,dv}{U^3}, \tag{1}$$

где $u = x/z$ и $v = y/z$ и интегрирование производится вдоль любого сечения конуса:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \lambda z^2 = 0.$$

Возьмем сечение $z = 1$. Уравнение соответствующего эллипса имеет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \lambda = 0.$$

Положим

$$\mu_1^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \mu_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda_2}.$$

Так как предполагается, что корни кубического уравнения (4) § 14.08 λ_1, λ_2 и λ известны, то μ_1 и μ_2 также известны. Уравнение эллипса теперь примет вид

$$\frac{x^2}{\mu_1^2} + \frac{y^2}{\mu_2^2} = 1.$$

Будем считать, что $\mu_1 > \mu_2$. Дальнейшие преобразования в случае $\mu_1 < \mu_2$ аналогичны. Пусть θ означает эксцентрический угол. Тогда $x = \mu_1 \cos\theta$, $y = \mu_2 \sin\theta$. Следовательно, так как $z = 1$, то

$$u = \mu_1 \cos\theta, \quad v = \mu_2 \sin\theta.$$

Кроме того, из формулы (6) § 14.07 находим

$$U^2 \equiv 1 + u^2 + v^2 = 1 + \mu_1^2 - (\mu_1^2 - \mu_2^2)\sin^2\theta = \mu^2(1 - k^2 \sin^2\theta),$$

где

$$\mu^2 = 1 + \mu_1^2, \quad k^2 = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu^2}.$$

Тогда формула (1) примет вид

$$P_x = -\frac{\mu_1\mu_2}{\mu^3}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(1 - k^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{2}$$

Аналогично

$$Q_x \equiv \int \frac{udu}{U^3} = -\frac{\mu_1^2}{2\mu^3} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \tag{3}$$

Рассмотрим прежде всего Q_x.

1) *Вычисление* Q_x.

Разбивая промежуток интегрирования в формуле (3) на две части от 0 до π и от π до 2π, можно легко убедиться, что этот интеграл равен нулю. Поэтому $Q_x = 0$. Аналогично

$$P_y = Q_z = R_y = P_z = R_x = 0.$$

Формула (10) § 14.07 теперь примет вид

$$F = \frac{g}{4p}\left[x_0^2 P_x + y_0^2 Q_y + z^2 R_z\right]. \tag{4}$$

Так как, согласно равенству (9) § 14.07, $P_x + Q_y + R_z = 0$, то мы должны вычислить только две из этих величин, скажем P_x и Q_y.

2) *Вычисление* P_x.

Пусть X дается формулой

$$X = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right].$$

Легко видеть, что

$$X = \frac{1-2\sin^2\theta + k^2\sin^4\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Числитель этой дроби можно записать в виде

$$\frac{1}{k^2}\left[(1-k^2\sin^2\theta)^2 - (1-k^2)\right].$$

Следовательно, поскольку $\int\limits_0^{\pi/2} X\,d\theta = 0$, мы имеем

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{1-k^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{1-k^2}E(k), \tag{5}$$

где $E(k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

Далее, из формулы (2) легко видеть, что

$$P_x = -\frac{4\mu_1\mu_2}{\mu^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{3/2}},$$

и так как

$$\cos^2\theta \equiv \frac{1}{k^2}[1 - k^2\sin^2\theta - (1 - k^2)],$$

то при помощи формулы (5) находим, что этот интеграл равен $\frac{1}{k^2}[F(k) - E(k)]$, где $F(k)$ — эллиптический интеграл первого рода, определяемый формулой

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}.$$

Следовательно,

$$P_x = \frac{4\mu_1\mu_2}{k^2\mu^3}[E(k) - F(k)]. \tag{6}$$

3) *Вычисление* Q_y и R_z.

$$Q_y = \int \frac{v\,du}{U^3} = -\frac{4\mu_1\mu_2}{\mu^3}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{(1 - k^2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Но

$$P_x + Q_y = -\frac{4\mu_1\mu_2}{\mu^3}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2\sin^2\theta)^{3/2}}.$$

Поэтому, согласно равенствам (9) § 11.07 и (5) настоящего параграфа, будем иметь

$$R_z = \frac{4\mu_1\mu_2}{(1 - k^2)\mu^3}E(k). \tag{7}$$

Наконец, для Q_y получим

$$Q_y = \frac{4\mu_1\mu_2}{(1 - k^2)k^2\mu^3}[(1 - k^2)F(k) - E(k)]. \tag{8}$$

Так как величина k предполагается известной, то численные значения $E(k)$ и $F(k)$ могут быть найдены из таблиц эллиптических функций. Поэтому P_x, Q_y и R_z могут быть вычислены.

§ 14.10. Вычисление вековых неравенств

Мы будем рассматривать вековое неравенство $[\dot{\Omega}]$, определяемое уравнением (4) § 14.05, именно:

$$[\dot{\Omega}] = \frac{G}{na^2\sqrt{1 - e^2}\sin i}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_0 r\sin u\,dM, \tag{1}$$

в котором средняя долгота ζ заменена средней аномалией M.

1) По аналогии с формулой (5) § 14.06 W_0 выражается формулой

$$W_0 = l_3\varphi_x + m_3\varphi_y + n_3\varphi_z,$$

где l_3, m_3, n_3 — направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты планеты P_1 относительно главных осей конуса. Значения этих направляющих косинусов могут быть легко рассчитаны. При помощи формул (11) § 14.07 и (4) § 14.09 мы будем иметь

$$W_0 = \frac{g}{2p}\,[l_3 x_0 P_x + m_3 y_0 Q_y + n_3 z_0 R_z]. \tag{2}$$

Здесь g — постоянная, определяемая формулой (2) § 14.07. Кроме того, если X, Y, Z — координаты планеты P относительно обычных осей, то

$$p = X\sin\Omega_1 \sin i_1 - Y\cos\Omega_1 \sin i_1 + z\cos i_1,$$

где Ω_1, i_1 — элементы орбиты планеты P_1. Поэтому p может быть легко вычислено для любого момента t. Члены, заключенные в квадратные скобки в формуле (2), также могут быть вычислены. Поэтому мы можем считать, что численное значение W_0 может быть найдено для любого момента времени t.

2) Рассмотрим подынтегральное выражение $W_0 r\sin u$ в равенстве (1). Аналитически W_0 является, очевидно, функцией M, и поскольку $u = \omega + f = \tilde{\omega} - \Omega + f$, где f — истинная аномалия, то все подынтегральное выражение может быть представлено в виде функции от M, которую мы обозначим через $\psi(M)$ и представим следующим образом:

$$\psi(M) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos sM + b_s \sin sM), \tag{3}$$

где s — положительное целое число. Отсюда видно, что

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(M)\,dM$$

и, следовательно, согласно уравнению (1), что

$$[\dot{\Omega}] = \frac{Ga_0}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}. \tag{4}$$

Теперь предположим, что W_0 и $r\sin u$, а следовательно, и функция $\psi(M)$ вычислены для следующих значений M:

$$0,\quad \frac{2\pi}{j},\quad \frac{4\pi}{j},\ \ldots,\ \frac{2r\pi}{j},\ \ldots,\ \frac{2\pi(j-1)}{j},$$

где j — целое число.

Пусть ψ_r — значение $\psi(M)$ при $M=2r\pi/j\equiv M_r$. Кроме того, пусть $s=k+qj$, где $k=1, 2, \ldots, j$ и $q=0, 1, 2$. Тогда

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos sM_r = \sum_{k=1}^{j} \sum_{q=0}^{\infty} a_{k+qj} \cos(k+qj) M_r.$$

Но $\cos(k+qj) M_r = \cos kM_r$ и $\cos(j+qj) M_r = 1$, поэтому

$$\sum_s a_s \cos s M_r = a_j + a_{2j} + a_{3j} + \ldots + \sum_{k=1}^{j-1} \left[\sum_{q=0}^{\infty} a_{k+qj} \right] \cos kM_r =$$

$$= a_j + a_{2j} + a_{3j} + \ldots + \sum_{k=1}^{j-1} A_k \cos kM_r,$$

где

$$A_k = \sum_{q=0}^{\infty} a_{k+qj}.$$

Аналогично мы получаем

$$\sum_s b_s \sin sM_r = \sum_{k=1}^{j-1} B_k \sin kM_r.$$

Поэтому

$$\psi_r = a_0 + a_j + a_{2j} + \ldots + \sum_{k=1}^{j-1} (A_k \cos kM_r + B_k \sin kM_r),$$

откуда

$$\sum_{r=0}^{j-1} \psi_r = j[a_0 + a_j + a_{2j} + \ldots] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j-1} \left[A_k \sum_{r=0}^{j-1} \cos kM_r + B_k \sum_{r=0}^{j-1} \sin kM_r \right].$$

Положим теперь $\alpha = 2\pi k/j$. Тогда получим $kM_r = r\alpha$. Пусть

$$C = \sum_{0}^{j-1} \cos r\alpha, \quad S = \sum_{0}^{j-1} \sin r\alpha.$$

Тогда если $i=\sqrt{-1}$, то

$$C + iS = \sum_{0}^{j-1} e^{ir\alpha} = \frac{1-e^{ij\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = 0.$$

Следовательно, $C=S=0$ и

$$\sum_{r=0}^{j-1} \psi_r = j[a_0 + a_j + a_{2j} + \ldots].$$

Если j равно, скажем, 12, то коэффициенты a_j, a_{2j}, ... будут малыми высших порядков относительно величин e и i (наклонность), входящими в выражение для $W_0 r \sin u$, и ими можно пренебречь. Поэтому

$$a_0 = \frac{1}{j}[\psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_{j-1}]$$

и, наконец,

$$[\dot{\Omega}] = \frac{G}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \cdot \frac{\psi_0 + \psi_1 + \ldots \psi_{j-1}}{j}.$$

Этим и заканчивается наше исследование.

3) Среди многих применений рассматриваемого метода можно отметить вычисление векового неравенства долготы узла орбиты Леонид, выполненное Адамсом[1]) и составившее $+28'$ за промежуток времени в 33 года; при этом возмущения со стороны Юпитера, Сатурна и Урана разделились следующим образом: $+20'$, $+7'$ и $+1'$. Значение $[\dot{\Omega}]$, выведенное из наблюдений, равно $+29'$.

Другое важное исследование было выполнено Хиллом[2]).

Для ознакомления с дальнейшим развитием этого метода мы отсылаем читателя к книге Плюммера «Динамическая астрономия»[3]).

---

[1]) Mon. Not Roy. Astron. Soc., 27, 247 (1867); Collected Works, I, 269 (1896).

[2]) On Gauss's method of computing secular perturbations with an application to the action of Vénus on Mercury, Collected Works, II, 1 (1906).

[3]) H. C. Plummer, Dynamical Astronomy, 1918, p. 206.

Глава 15

ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ И ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

§ 15.01. Введение

Проблема, связанная с сопротивлением среды, впервые привлекла внимание астрономов в связи с особенностями движения кометы Энке. Среднее угловое движение этой кометы имеет тенденцию к возрастанию, которое нельзя объяснить возмущениями от планет, вычисленными обычным способом. Энке предположил, что этот эффект может быть полностью объяснен влиянием сопротивления вещества, окружающего Солнце. То, что такое вещество существует, хорошо известно. Это, во-первых, солнечная корона, простирающаяся на расстояние в несколько радиусов Солнца от его поверхности, и, во-вторых, более протяженная его оболочка, дающая „зодиакальный свет“.

Для простоты термин „планета“ будет использоваться нами для обозначения любого члена солнечной системы, движение которого исследуется в настоящей связи. Влияние сопротивления среды на движение планет будет зависеть от нескольких факторов: от площади проекции планеты на плоскость, перпендикулярную направлению ее движения (мы принимаем эту величину постоянной для рассматриваемой планеты), от скорости планеты v и плотности ρ среды. Будем предполагать, что вообще ρ есть функция лишь расстояния от центра Солнца, так что мы можем написать $\rho = \varphi(r)$. Далее, можно принять, что корреляция между v и ρ отсутствует. Следовательно, мы можем записать силу сопротивления R, приходящуюся на единицу массы планеты, в виде

$$R = cF(v) \cdot \varphi(r), \tag{1}$$

где предполагается, что c — очень малая величина, постоянная для данной планеты.

Открытие со времени Энке в Галактике огромных диффузных туманностей, темных и светящихся, через которые проходят пути звезд, и совсем недавнее открытие более разреженного межзвездного вещества сделало снова эту проблему важной, особенно для космогонии. В большинстве распространенных теорий происхождения и эволюции солнечной системы предполагается, что первоначально Солнце было окружено облаком вещества, в котором двигались первобытные планеты. Далее, одна из особенностей солнечной системы состоит в том, что эксцентриситеты орбит планет, вообще говоря, очень малы. Как мы увидим позднее, сопротивление среды приводит к постепенному уменьшению эксцентриситетов.

Мы сначала рассмотрим легко интегрируемый случай, когда в формуле (1) $F(v) = v$ и $\varphi(r) = 1/r^2$, а затем исследуем более общую задачу. Так как сила сопротивления не имеет составляющей, перпендикулярной плоскости орбиты, то удобно принять эту плоскость в качестве основной. Ввиду сходства применяемых методов мы рассмотрим в конце главы движение перигелия Меркурия.

§ 15.02. Уравнения движения ($R = cv/r^2$)

Пусть OX — основное направление в плоскости орбиты, причем Солнце находится в точке O. Обозначим через r, θ полярные координаты планеты, масса которой равна m, а через $\tilde{\omega}$ — „долготу“ перигелия, так что $\theta = f + \tilde{\omega}$, где f — истинная аномалия. Если ds — линейный элемент орбиты, то составляющие силы сопротивления вдоль радиус-вектора и перпендикулярно ему будут соответственно $-mR\dfrac{dr}{ds}$ и $-mRr\dfrac{d\theta}{ds}$, или $-mR\dfrac{\dot{r}}{v}$ и $-mRr\dfrac{\dot{\theta}}{v}$. Поэтому уравнения движения при $R = cv/r^2$ будут иметь вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} - c\frac{\dot{r}}{r^2} \tag{1}$$

и

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -c\dot{\theta}. \tag{2}$$

Здесь $\mu = G(m_0 + m)$, где m_0 — масса Солнца.

Пусть

$$u = \frac{1}{r}, \quad H = r^2\dot{\theta}, \tag{3}$$

так что $\dot{\theta} = Hu^2$. Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$H = h - c\theta, \tag{4}$$

где h — постоянная интегрирования.

С другой стороны,

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -H\frac{du}{d\theta} \tag{5}$$

и

$$\ddot{r} = -\frac{d}{d\theta}\left(H\frac{du}{d\theta}\right)\dot{\theta} = -Hu^2\frac{d}{d\theta}\left(H\frac{du}{d\theta}\right).$$

Поэтому до малых величин порядка c включительно уравнение (1) при помощи равенств (3) приводится к виду

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2}=\frac{\mu}{h^2}\left(1+\frac{2c\theta}{h}\right).$$

Решение этого уравнения запишется так:

$$u=\frac{1}{p}\left[1+e\cos(\theta-\tilde{\omega})+\frac{2c\theta}{h}\right], \tag{6}$$

где e и $\tilde{\omega}$ — постоянные интегрирования и

$$p=\frac{h^2}{\mu}. \tag{7}$$

Так как h — постоянная, то и p также будет постоянной величиной.

§ 15.03. Изменения оскулирующих элементов e и $\tilde{\omega}$

Если действие сопротивления в момент t_0 внезапно прекратится, то планета P начнет описывать эллиптическую орбиту — оскулирующий эллипс, уравнение которой может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{r_0}\equiv u_0=\frac{1}{p_0}[1+e_0\cos(\theta-\tilde{\omega})], \tag{1}$$

где r_0 и u_0 соответствуют оскулирующему эллипсу. В формуле (1)

$$p_0=a_0(1-e_0^2), \tag{2}$$

где a_0, e_0, а также $\tilde{\omega}_0$ — оскулирующие элементы. Если H_0 означает постоянную площадей для оскулирующего эллипса, то

$$H_0=r_0^2\dot{\theta} \tag{3}$$

и

$$p_0=\frac{H_0^2}{\mu}. \tag{4}$$

По определению оскулирующего эллипса а) координаты планеты P и б) составляющие ее скорости для оскулирующего эллипса и истинной орбиты в момент t_0 одинаковы.

Рассмотрим (а). Пусть θ_0 — полярный угол в момент t_0. Тогда $r_0(\theta_0)=r(\theta_0)$ или $u_0(\theta_0)=u(\theta_0)$. Из формулы (1), а также из формулы (6) § 15.02 мы имеем

$$\frac{1}{p_0}[1-e_0\cos(\theta_0-\tilde{\omega}_0)]=\frac{1}{p}\left[1+e\cos(\theta_0-\tilde{\omega})+\frac{2c\theta_0}{h}\right]. \tag{5}$$

Рассмотрим (б). Согласно равенству (3), $H_0=r_0^2\dot{\theta}$, а согласно формуле (3) § 15.02, $H=r^2\dot{\theta}$. Так как в момент t_0 значение $\dot{\theta}$ одно и то же для обеих орбит и $r=r_0$, то мы имеем $H_0=H(\theta_0)$, или, принимая во внимание уравнение (4) § 15.02,

$$H_0=h-c\theta_0.$$

Поэтому до малых величин порядка c из формулы (4) и формулы (7) § 15.02 имеем

$$p_0=p\left(1-\frac{2c\theta_0}{h}\right). \tag{6}$$

С другой стороны, согласно формуле (5) § 15.02, $\frac{du}{d\theta}=-\frac{\dot r}{H}$ и аналогично для оскулирующего эллипса $\frac{du_0}{d\theta}=-\frac{\dot r_0}{H_0}$; следовательно, поскольку в момент t_0 $\dot r_0=\dot r$ и $H=H_0$, то

$$\frac{du_0}{d\theta}=\frac{du}{d\theta}, \quad \text{когда} \quad \theta=\theta_0. \tag{7}$$

Из формулы (1), а также из формулы (6) § 15.02 тогда получим

$$\frac{1}{p_0}[e_0\sin(\theta_0-\tilde\omega_0)]=\frac{1}{p}\left[e\sin(\theta_0-\tilde\omega)-\frac{2c}{h}\right]. \tag{8}$$

При помощи равенства (6) формулы (5) и (8), с точностью до малых величин порядка c, принимают вид

$$e_0\cos(\theta_0-\tilde\omega_0)=e\cos(\theta_0-\tilde\omega)\left[1-\frac{2c\theta_0}{h}\right], \tag{9}$$

$$e_0\sin(\theta_0-\tilde\omega_0)=e\sin(\theta_0-\tilde\omega)\left[1-\frac{2c\theta_0}{h}\right]-\frac{2c}{h}. \tag{10}$$

Умножив равенство (9) на $\cos(\theta_0-\tilde\omega)$, а равенство (10) на $\sin(\theta_0-\tilde\omega)$ и сложив результаты, мы получим

$$e_0\cos(\tilde\omega_0-\tilde\omega)=e\left[1-\frac{2c\theta_0}{h}\right]-\frac{2c}{h}\sin(\theta_0-\tilde\omega). \tag{11}$$

Умножим равенство (9) на $\sin(\theta_0-\tilde\omega)$, а равенство (10) на $\cos(\theta_0-\tilde\omega)$ и вычтем; тогда найдем

$$e_0\sin(\tilde\omega_0-\tilde\omega)=\frac{2c}{h}\cos(\theta_0-\tilde\omega). \tag{12}$$

Пусть $e_0=e+\Delta_0 e$, $\tilde\omega_0=\tilde\omega+\Delta_0\tilde\omega$. Тогда с точностью до малых величин порядка c формулы (11) и (12) примут вид

$$\Delta_0 e=-\frac{2ce\theta_0}{h}-\frac{2c}{h}\sin(\theta_0-\tilde\omega) \tag{13}$$

и

$$e\cdot\Delta_0\tilde\omega=\frac{2c}{h}\cos(\theta_0-\tilde\omega). \tag{14}$$

Пусть в некоторый последующий момент времени, когда θ возрастет от θ_0 до θ_1, новые оскулирующие элементы будут e_1 и $\tilde{\omega}_1$, или $e+\Delta_1 e$ и $\tilde{\omega}+\Delta_1\tilde{\omega}$. Тогда, согласно формулам (13) и (14), получим

$$\Delta_1 e = -\frac{2ce\theta_1}{h} - \frac{2c}{h}\sin(\theta_1 - \tilde{\omega})$$

и

$$e\cdot\Delta_1\tilde{\omega} = \frac{2c}{h}\cos(\theta_1 - \tilde{\omega}).$$

Если δe и $\delta\tilde{\omega}$ означают приращения оскулирующих элементов при возрастании θ от θ_0 до θ_1, то, так как $\delta e = \Delta_1 e - \Delta_0 e$, мы будем иметь

$$\delta e = -\frac{2ce}{h}(\theta_1 - \theta_0) - \frac{2c}{h}[\sin(\theta_1 - \tilde{\omega}) - \sin(\theta_0 - \tilde{\omega})] \qquad (15)$$

и аналогично

$$e\,\delta\tilde{\omega} = \frac{2c}{h}[\cos(\theta_1 - \tilde{\omega}) - \cos(\theta_0 - \tilde{\omega})]. \qquad (16)$$

Формула (15) показывает, что изменение эксцентриситета состоит из векового и периодических членов и что за один оборот планеты, т. е. когда $\theta_1 - \theta_0 = 2\pi$, эксцентриситет *уменьшается* на $4\pi ce/h$. Эффект сопротивления среды, таким образом, приводит к непрерывному уменьшению эксцентриситетов оскулирующих эллипсов с каждым обращением планеты.

Согласно формуле (16), изменение элемента $\tilde{\omega}$ является периодическим и принимает нулевое значение после каждого обращения планеты.

§ 15.04. Изменения элементов a и n

Для исследования характера изменений большой полуоси оскулирующего эллипса воспользуемся формулами (2) и (6) предыдущего параграфа:

$$p_0 \equiv a_0(1-e_0^2) = p\left(1 - \frac{2c\theta_0}{h}\right),$$

где p $(\equiv h^2/\mu)$ — постоянная. Положим $p = a(1-e^2)$, где a — постоянная. Тогда если $a_0 = a + \Delta_0 a$, то до малых порядка c мы найдем, что

$$(1-e^2)\,\Delta_0 a = 2ae\Delta_0 e - \frac{2ac\theta_0}{h}(1-e^2),$$

откуда

$$\frac{\Delta_0 a}{a} = -\frac{2c\theta_0}{h}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right) - \frac{4ce}{1-e^2}\sin(\theta_0 - \tilde{\omega}).$$

Аналогичную формулу мы имеем и для $\Delta_1 a$. Поэтому изменение большой полуоси за один оборот будет даваться формулой

$$\delta a \equiv \Delta_1 a - \Delta_0 a = -\frac{4\pi ca}{h}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right).$$

Следовательно, большая полуось оскулирующего эллипса уменьшается с каждым обращением планеты.

Так как $\mu = n_0^2 a_0^3$, то вариация δn среднего углового движения будет определяться формулой $\delta n = -\frac{3n}{2a}\delta a$, где a и n — постоянные. Следовательно, среднее угловое движение за каждый период обращения планеты увеличивается на

$$\frac{6\pi nc}{h}\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}\right).$$

§ 15.05. Общие уравнения для $\dot{a}$ и т. д.

В этом параграфе мы будем предполагать, что сила сопротивления дается общим выражением (1) § 15.01. Обозначим радиальную и трансверсальную составляющие силы сопротивления соответственно через S' и T'. Тогда

$$S' = -R\frac{\dot{r}}{v}, \quad T' = -R\frac{r\dot{\theta}}{v}. \tag{1}$$

В § 14.04 мы получили формулы, выражающие $\dot{a}$, $\dot{e}$, ... через составляющие S, T и W силы притяжения возмущающей планеты массы m_1. Поскольку при S, T и W содержится множитель Gm_1, то очевидно, что мы можем использовать общие уравнения § 14.04, заменяя Gm_1S и Gm_1T на S' и T' и полагая $W = i = 0$.

Интересующие нас уравнения запишутся следующим образом (мы заменим b^2 на ap и $\sqrt{1-e^2}$ на $\cos\varphi$, где $\sin\varphi = e$):

$$\dot{a} = \frac{2}{n\cos\varphi}\left[S'e\sin f + \frac{p}{r}T'\right], \tag{2}$$

$$\dot{e} = \frac{\cos\varphi}{na}\left[S'\sin f + T'(\cos E + \cos f)\right], \tag{3}$$

$$e\dot{\tilde{\omega}} = \frac{\cos\varphi}{na}\left[-S'\cos f + T'\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\right], \tag{4}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{e}{1+\cos\varphi}(e\dot{\tilde{\omega}}) - \frac{2}{na^2}rS'. \tag{5}$$

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos f, \tag{6}$$

где

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2) = a\cos^2\varphi.$$

Кроме того,

$$r^2\dot{\theta} \equiv r^2\dot{f} = h,$$

где $h^2 = \mu p = n^2a^4\cos^2\varphi$.

Из формулы (6) имеем

$$p\dot{r} = r^2 e\sin f\cdot\dot{f},$$

откуда

$$\dot{r} = \frac{eh}{p}\sin f.$$

Таким образом,

$$v^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{p^2}(1 + 2e\cos f + e^2)$$

или

$$v = \frac{h}{p}U, \tag{7}$$

где

$$U^2 = 1 + 2e\cos f + e^2. \tag{8}$$

Используя равенства (1) и только что найденные формулы для $\dot{r}$ и т. д., уравнения (2) — (5) можно привести к виду

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2}{1-e^2}\cdot\frac{R}{v}U^2, \tag{9}$$

$$\dot{e} = -2\frac{R}{v}(e + \cos f), \tag{10}$$

$$e\dot{\tilde{\omega}} = -2\frac{R}{v}\sin f, \tag{11}$$

$$\dot{\varepsilon} = -2\frac{R}{v}e\sin f\left(\frac{1}{1+\cos\varphi} - \frac{r}{p}\cos\varphi\right). \tag{12}$$

§ 15.06. Изменения элементов орбиты при $R = cv^{\alpha}r^{-\beta}$

Предположим, что R дается формулой

$$R = cv^{\alpha}r^{-\beta}. \tag{1}$$

Тогда, например,

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2c}{1-e^2}v^{\alpha-1}r^{-\beta}U^2.$$

Далее,

$$\frac{da}{df} = \frac{\dot{a}}{\dot{f}} = \frac{r^2}{h}\dot{a}.$$

Поэтому

$$\frac{da}{df} = -\frac{2acU^2}{1-e^2}\left(\frac{v^{\alpha-1}r^{2-\beta}}{h}\right).$$

Выражение, стоящее внутри скобок, как легко видеть, равно $KU^{\alpha-1}V^{\beta-2}$, где, как и раньше,

$$U^2 = 1 + 2e\cos f + e^2, \tag{2}$$

$$K = h^{\alpha-2}p^{3-\alpha-\beta}, \tag{3}$$

$$V = 1 + e\cos f. \tag{4}$$

Уравнения (9) — (12) предыдущего параграфа теперь принимают вид

$$\frac{da}{df} = -\frac{2caK}{1-e^2}U^{\alpha-1}V^{\beta-2}\cdot U^2, \tag{5}$$

$$\frac{de}{df} = -2cKU^{\alpha-1}V^{\beta-2}(e+\cos f), \tag{6}$$

$$e\frac{d\tilde{\omega}}{df} = -2ckU^{\alpha-1}V^{\beta-2}\sin f, \tag{7}$$

$$\frac{d\iota}{df} = -2cKU^{\alpha-1}V^{\beta-2}\left(\frac{1}{1+\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{U^2}\right)e\sin f. \tag{8}$$

Далее, $U^{\alpha-1}V^{\beta-2}$ является четной функцией, которую можно представить рядом Фурье

$$A_0 + A_1\cos f + A_2\cos 2f + \ldots,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi U^{\alpha-1}V^{\beta-2}\,df, \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U^{\alpha-1}V^{\beta-2}\cos f\,df \tag{10}$$

и т. д. Поэтому, согласно уравнению (5), находим

$$\frac{da}{df} = -\frac{2caK}{1-e^2}[(A_0 + A_1\cos f + A_2\cos 2f + \ldots)\times$$
$$\times(1 + 2e\cos f + e^2)] \equiv$$
$$\equiv -\frac{2caK}{1-e^2}[C + C_1\cos f + C_2\cos 2f + \ldots],$$

где

$$C = A_0(1+e^2) + eA_1.$$

Очевидно, что мы можем записать C в виде

$$C = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi U^{\alpha+1} V^{\beta-2} df. \tag{11}$$

Если U и V — величины положительные для всех значений e и f, то C положительно при любых значениях α и β. То же самое справедливо для A_0. Истинная аномалия f выражается через среднюю аномалию M посредством уравнения центра:

$$f = M + \left(2e - \frac{1}{4} e^3\right) \sin M + \ldots .$$

Поэтому

$$df = n\, dt\, [1 + \text{п. ч.}].$$

Следовательно, если Δa означает изменение элемента a за промежуток времени t, то

$$\Delta a = -\frac{2canK}{1-e^2} \cdot Ct + \text{п. ч.} \tag{12}$$

Так как C положительно для всех значений α и β, то большая полуось уменьшается, если R определяется формулой (1).

Аналогично из уравнения (6) находим

$$\frac{de}{df} = -2cK\, [A_0 + A_1 \cos f + \ldots]\, [e + \cos f] =$$

$$= -2cK\, [D + D_1 \cos f + \ldots],$$

где

$$D = eA_0 + \frac{1}{2} A_1. \tag{13}$$

Отсюда

$$\Delta e = -2cnK \cdot Dt + \text{п. ч.} \tag{14}$$

Исследуем теперь знак величины D. Проинтегрировав (10) по частям, получим

$$\frac{\pi}{2} A_1 = \left[U^{\alpha-1} V^{\beta-2} \sin f\right]_0^\pi +$$

$$+ e \int\limits_0^\pi U^{\alpha-3} V^{\beta-3} \left[(\alpha - 1) V + (\beta - 2) U^2\right] \sin^2 f\, df.$$

Проинтегрированная часть равна нулю, а интеграл положителен при любых e и f, если $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 2$. Так как A_0 положительно, то и величина D, определяемая формулой (13), также положительна. Следовательно, если α и β подчиняются указанным выше ограничениям, то эксцентриситет уменьшается.

Из уравнений (7) и (8) следует, что $\Delta\tilde{\omega}$ и $\Delta\epsilon$ являются чисто периодическими.

§ 15.07. Случай малого эксцентриситета

Мы будем считать, что, как это и имеет место в случае большинства планетных орбит, эксцентриситет e настолько мал, что величиной e^2 можно пренебречь. Тогда

$$U^2 = 1 + 2e\cos f, \quad U^{\alpha-1} = 1 + (\alpha - 1)e\cos f,$$
$$V^{\beta-2} = 1 + (\beta - 2)e\cos f.$$

Поэтому

$$\pi A_0 = \int_0^\pi [1 + (\alpha + \beta - 3)e\cos f]\,df$$

и

$$\pi A_1 = 2\int_0^\pi [1 + (\alpha + \beta - 3)e\cos f]\cos f\,df,$$

откуда

$$A_0 = 1 \quad \text{и} \quad A_1 = (\alpha + \beta - 3)e.$$

Поэтому до малых порядка e $C = 1$ и, согласно формуле (13) § 16.06, $D = {}^1/_2(\alpha + \beta - 1)e$. Следовательно, Δe отрицательно, если $\alpha + \beta > 1$. Последнее условие является значительно менее жестким ограничением, чем в общем случае, рассмотренном в предыдущем параграфе.

§ 15.08. Гипотеза Энке

Энке предположил, что $R = cv^2/r^2$ или, в наших обозначениях, что $\alpha = 2$ и $\beta = 2$. Это предположение находится в согласии с ограничениями, касающимися величин α и β, найденными в § 15.06.

Из формулы (11) § 15.06 имеем

$$\pi C = \int_0^\pi U^3\,df,$$

или, согласно равенству (7) § 15.05,

$$\pi C = \frac{p^3}{h^3}\int_0^\pi v^3\,df.$$

Перейдем к эксцентрической аномалии E как к переменной интегрирования. Тогда

$$df = \frac{\dot f}{\dot E}\,dE = \frac{h}{r^2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{dE}{n} = \frac{h}{na^2}\left(\frac{1 + e\cos E}{1 - e^2\cos^2 E}\right)dE.$$

Кроме того,

$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)=\frac{n^2a^2}{r}(1+\cos E)=\frac{n^2a^2(1+\cos E)^2}{1-e^2\cos^2 E}.$$

Поэтому

$$\pi C=(1-e^2)^2\int\limits_0^\pi \frac{(1+e\cos E)^4}{(1-e^2\cos^2 E)^{5/2}}\,dE.$$

Если раскрыть в числителе подынтегрального выражения скобки, то легко видеть, что нечетные степени $\cos E$ при интегрировании дадут нуль. Положим $E=\frac{\pi}{2}-\theta$ и

$$X^2=1-e^2\cos^2 E=1-e^2\sin^2\theta.$$

Тогда

$$\frac{\pi C}{2(1-e^2)^2}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+6e^2\sin^2\theta+e^4\sin^4\theta}{X^5}\,d\theta. \tag{1}$$

Числитель подынтегрального выражения равен

$$[1+6(1-X^2)+(1-X^2)^2];$$

поэтому если обозначить сам интеграл через I, то получится

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{8}{X^5}-\frac{8}{X^3}+\frac{1}{X}\right)d\theta. \tag{2}$$

Пусть

$$Z=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{X^{r-1}}\right)\quad \text{и}\quad \alpha=e^2,$$

так что $X^2=1-\alpha\sin^2\theta$ и $X\frac{\partial X}{\partial\theta}=-\alpha\sin\theta\cos\theta$. Тогда

$$Z=\frac{1-2\sin^2\theta}{X^{r-1}}+\frac{\alpha(r-1)}{X^{r+1}}\sin^2\theta\cos^2\theta$$

и, следовательно,

$$\alpha Z=\frac{\alpha-2(1-X^2)}{X^{r-1}}+\frac{r-1}{X^{r+1}}[\alpha(1-X^2)-(1-X^2)^2]=$$
$$=\frac{(\alpha-1)(r-1)}{X^{r+1}}-\frac{(\alpha-2)(r-2)}{X^{r-1}}-\frac{(r-3)}{X^{r-3}}.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от 0 до $\pi/2$. Тогда, обозначая $\int\limits_0^{\pi/2} d\theta/X^r$ через I_r и учитывая, что $\int\limits_0^{\pi/2} Z\,d\theta=0$, получаем

$$(r-1)(1-e^2)I_{r+1}-(r-2)(2-c^2)I_{r-1}+(r-3)I_{r-3}=0.$$

Если $r=2$, то

$$(1-e^2)I_3 = I_{-1} = E(e), \qquad (3)$$

где

$$E(e) = \int_0^{\pi/2} (1-e^2\sin^2\theta)^{1/2}\,d\theta.$$

Если $r=4$, то

$$3(1-e^2)I_5 - 2(2-e^2)I_3 + I_1 = 0,$$

откуда, учитывая предыдущую формулу, получаем

$$I_5 = \frac{2}{3}\frac{(2-e^2)}{(1-e^2)^2}E(e) - \frac{1}{3(1-e^2)}F(e), \qquad (4)$$

где

$$F(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}},$$

причем E и F — полные эллиптические интегралы.

Согласно формулам (1) — (4), C определяется формулой

$$3\pi C = 16(1+e^2)E(e) - 2(1-e^2)(5+3e^2)F(e). \qquad (5)$$

Аналогично

$$\pi D = \int_0^{\pi} U(e+\cos f)\,df = (1-e^2)^2\int_0^{\pi}\frac{(1+e\cos E)^3\cos E}{X^5}\,dE =$$

$$= 2(1-e^2)^2\int_0^{\pi/2}\frac{3e\cos^2 E + e^3\cos^4 E}{X^5}\,dE =$$

$$= \frac{2}{e}(1-e^2)^2[4I_5 - 5I_3 + I_1] =$$

$$= \frac{2}{3e}[(1+7e^2)E(e) - (1-e^2)(1+3e^2)F(e)]. \qquad (6)$$

§ 15.09. Применение к комете Энке

Принимая $e=0{,}85$, что приближенно соответствует эксцентриситету орбиты кометы Энке, Тиссеран[1]) нашел, что (в наших обозначениях) $C/2D = 0{,}97$ и, далее, что если α и β — целые числа, бо́льшие 1 и 2 соответственно, то отношение $C:2D$ численно почти не изменяется.

---

[1]) Mécanique Celeste, IV, 1896, p. 223.

Если в формулах (12) и (14) § 15.06 рассматривать лишь вековые члены, то

$$\frac{1}{a}\frac{\Delta a}{\Delta e}=\frac{1}{1-e^2}\cdot\frac{C}{D}.$$

Кроме того,

$$2\frac{\Delta n}{n}=-3\frac{\Delta a}{a},$$

и так как $\sin\varphi=e$, то $\Delta e=\cos\varphi\,\Delta\varphi$. Поэтому мы получаем

$$\frac{\Delta n}{n}=-\frac{3}{1-e^2}\cdot\frac{C}{2D}\cos\varphi\,\Delta\varphi. \tag{1}$$

Согласно Астену [1]), наблюдения кометы Энке в промежутке с 1819 по 1865 г. показали, что за один оборот

$$\Delta n=0'',1044,\qquad \Delta\varphi=-3'',68.$$

Так как $n=1070''$, $\varphi=57°49'$, то формула (1) дает

$$\frac{C}{2D}=0,97. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\frac{\Delta n}{n}=9,7\cdot10^{-5},\qquad \Delta e=-9,4\cdot10^{-6}. \tag{3}$$

Хотя результат (2) согласуется с теоретическим значением, когда $R=cv^2/r^2$, близость этих результатов к результатам, полученным для α и β, бóльших 2, не позволяет сделать никакого заключения о законе сопротивления.

Позднейшие наблюдения кометы показали, что среднее значение $\Delta n/n$ для промежутка времени с 1865 по 1901 г. практически совпадает со средним значением для промежутка с 1901 по 1934 г. Это значение, равное $4,2\cdot10^{-5}$, существенно меньше половины того, что дает формула (3). Величина $\Delta\varphi$ для каждого из двух последних интервалов равна $-1'',6$, а соответствующее значение Δe равно $-4\cdot10^{-6}$. Единственно известными оболочками, окружающими Солнце, как упоминалось в § 15.01, являются солнечная корона и вещество, связанное с зодиакальным светом. Несколько десятилетий тому назад Джеффрис [2]) сделал оценку плотности этих оболочек в связи с возможным объяснением части движения перигелия Меркурия, не вытекающей из гравитационной теории, но, как мы покажем в § 15.11, объяснимой теорией относительности. Плотность первой оболочки оказалась равной приблизительно

$$3\cdot10^{-12}r^{-5}\ г/см^3,$$

[1]) См. Tisserand, Mécanique Celeste, IV, 1896, p. 226.

[2]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 80, 138 (1919).

где r — гелиоцентрическое расстояние, выраженное в солнечных радиусах, а средняя плотность второй оболочки приближенно равна

$$1{,}5 \cdot 10^{-18}\ г/см^3.$$

Гелиоцентрическое расстояние кометы Энке в перигелии легко найти по известному периоду обращения, равному приблизительно $3^1/_4$ года, и уже указанному значению эксцентриситета. Это расстояние равно $^1/_3$ астрономической единицы, т. е. около $50 \cdot 10^6$ *км*, что значительно превышает размеры короны. Незначительная плотность второй, более протяженной оболочки дает возможность предположить, что если бы даже комета прошла через эту среду, то эффект ее сопротивления оказался бы слишком мал и его нельзя было бы обнаружить.

Хотя изменения n и e, несомненно, реальны (изменение n можно интерпретировать в том смысле, что выражение для средней долготы содержит член вида σt^2), гипотеза о сопротивлении среды, введенная для объяснения наблюдаемых явлений, связанных с кометой Энке, по-видимому, должна быть отвергнута. Это заключение значительно укрепилось в последние годы благодаря исследованиям других комет, для некоторых из которых найдено, что $\Delta n/n$ *отрицательно*, а Δe *положительно*, т. е. знаки этих величин противоположны знакам, найденным для кометы Энке и для одной или двух других комет.

В следующем параграфе мы кратко опишем более новые исследования, которые дают возможность объяснить различные характеристики среднего движения комет.

§ 15.10. Кометная модель Уиппла

В предыдущих параграфах мы молчаливо предполагали, что комета является материальной точкой и что ее масса постоянна. Но это далеко не так. Существование у кометы протяженного хвоста является почти убедительным доказательством того, что вещество кометы рассеивается в пространстве. Следовательно, при решении динамических задач необходимо принимать во внимание непрерывное уменьшение массы кометы, особенно когда она находится в зоне эффективного действия солнечной радиации. В своем исследовании [1]) Уиппл исходит из концепции, что ядра комет состоят из свободного скопления метеоритного вещества и смеси таких веществ, как вода, двуокись углерода, аммиак и т. д., находящихся в твердом состоянии, которые обнаруживаются спектроскопически в составе комет. Эту смесь он называет вообще „льдом“. Когда комета проходит через перигелий, то под действием солнечной радиации „лед“ будет испа-

[1]) Astrophys J., 111, 375 (1950).

ряться и его молекулы рассеются в пространстве, поскольку кинетические скорости, соответствующие возникающим при этом температурам, будут превосходить скорости ухода из слабого гравитационного поля ядра, которые практически пренебрежимо малы. Общий эффект, вызываемый этим явлением, заключается в возникновении реактивной силы, действующей на ядро. Эта теория обладает двумя характерными особенностями: предполагается, во-первых, что ядра комет медленно вращаются и, во-вторых, что теплопередача через внешние слои к „льдам" происходит за конечные промежутки времени. Общее направление реактивной силы будет тогда зависеть от *направления* вращения ядер. Обратному вращению соответствует ускорение среднего движения, как у кометы Энке, а прямому вращению — замедление среднего движения, наблюдаемое у других комет

§ 15.11. Вековое движение перигелия Меркурия

Замечательное противоречие между наблюдениями и результатами теории движения планет, основанной на законе притяжения Ньютона, имеет место в движении перигелия Меркурия. Решение уравнений движения планет дает вековое возмущение в $\tilde{\omega}$ приблизительно на $43''$ в столетие, меньшее, чем та же величина, выведенная из наблюдений. Многие попытки, основанные на разного рода гипотезах, включая и предположение о сопротивлении среды, оказались не в состоянии объяснить это противоречие, когда они сопоставлялись с данными наблюдений, относящимися к вводимым частным предположениям. Причина этого расхождения была выяснена (в пределах ошибок наблюдений) на основе теории относительности. Метод исследования этого вопроса аналогичен тому, который был использован в § 15.03.

Принимая обозначения в § 15.02, дифференциальное уравнение орбиты планеты, обращающейся вокруг Солнца, в теории относительности можно записать в виде [1])

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} + \alpha u^2, \tag{1}$$

где

$$\alpha = \frac{3\mu}{c^2}, \tag{2}$$

причем c — скорость света, α — малая величина, квадратом и более высокими степенями которой можно пренебречь.

В первом приближении, полагая в уравнении (1) $\alpha = 0$, решение получаем в виде

$$u = \frac{1}{p}\,[1 + e\cos(\theta - \tilde{\omega})], \tag{3}$$

где e и $\tilde{\omega}$ — постоянные и $p = h^2/\mu$.

[1]) Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, 1923, p. 88.

Подставляя это выражение для u в член αu^2 уравнения (1), мы будем иметь

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{p}+\frac{\alpha_1}{p}+\frac{2\alpha e}{p^2}\cos(\theta-\tilde{\omega})+\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta-\tilde{\omega}), \tag{4}$$

где

$$\alpha_1=\frac{\alpha}{p}\left(1+\frac{1}{2}e^2\right) \quad \text{и} \quad \alpha_2=\frac{1}{2}\frac{\alpha e^2}{p}.$$

Если решение уравнения (4) обозначить через $u+\Delta u$, где u дается формулой (3), то

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\Delta u)+\Delta u=\frac{\alpha_1}{p}+\frac{2\alpha e}{p^2}\cos(\theta-\tilde{\omega})+\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta-\tilde{\omega}).$$

Наша задача сейчас заключается в том, чтобы найти частное решение этого уравнения. Это решение легко находится с помощью элементарных методов и имеет вид

$$\Delta u=\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\alpha e}{p^2}\theta\sin(\theta-\tilde{\omega})-\frac{1}{3}\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta-\tilde{\omega}).$$

Решение уравнения (1) с точностью до величины порядка α тогда запишется следующим образом:

$$u=\frac{1}{p}[1+e\cos(\theta-\tilde{\omega})]+\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\alpha e}{p^2}\theta\sin(\theta-\tilde{\omega})-\frac{1}{3}\frac{\alpha_2}{p}\cos 2(\theta-\tilde{\omega}). \tag{5}$$

Пусть

$$u_0=\frac{1}{p_0}[1-e_0\cos(\theta-\tilde{\omega}_0)] \tag{6}$$

есть уравнение оскулирующего эллипса для эпохи, соответствующей $\theta=\theta_0$. Тогда, согласно § 15.03,

$$u_0(\theta_0)=u(\theta_0) \tag{7}$$

и

$$\frac{du_0}{d\theta}=\frac{du}{d\theta} \quad \text{при} \quad \theta=\theta_0. \tag{8}$$

Далее, p_0 отличается от p на величину порядка α. Поэтому мы можем написать

$$\frac{p_0}{p}=1+k\alpha,$$

где k — постоянная. Тогда, подставляя в равенство (7) выражения (6) и (5), мы получаем с точностью до малых порядка α

$$e_0\cos(\theta_0-\tilde{\omega}_0)=k_1\alpha+e(1+k\alpha)\cos(\theta_0-\tilde{\omega})+$$
$$+\frac{\alpha e}{p}\theta_0\sin(\theta_0-\tilde{\omega})-\frac{1}{3}\alpha_2\cos 2(\theta_0-\tilde{\omega})\ \ldots, \tag{9}$$

где k_1 — постоянная.

Подставляя в равенство (8) выражения (6) и (5), аналогичным образом получаем

$$e_0 \sin(\theta_0 - \tilde{\omega}_0) = e(1 + k_2\alpha)\sin(\theta_0 - \tilde{\omega}) - \\ - \frac{\alpha e}{p}\theta_0 \cos(\theta_0 - \tilde{\omega}) - \frac{2}{3}\alpha_2 \sin 2(\theta_0 - \tilde{\omega}), \qquad (10)$$

где k_2 — еще одна постоянная.

Умножим равенство (9) на $\sin(\theta_0 - \tilde{\omega})$, а равенство (10) — на $\cos(\theta_0 - \tilde{\omega})$ и вычтем; получим

$$e_0 \sin(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}) = \frac{\alpha e}{d}\theta_0 + \alpha \sum C_i \sin(\theta_0 - \tilde{\omega}), \qquad (11)$$

где $i = 1, 2, 3$, а C_i — постоянные.

Умножим равенство (9) на $\cos(\theta_0 - \tilde{\omega})$, а равенство (10) — на $\sin(\theta_0 - \tilde{\omega})$ и сложим; получим

$$e_0 \cos(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}) = e + k\alpha + \alpha \sum D_i \cos i(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}). \qquad (12)$$

Положим

$$\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega} = \Delta_0\tilde{\omega}, \qquad e_0 - e = \Delta_0 e.$$

Из формул (11) и (12) легко видеть, что $\Delta_0\tilde{\omega}$ и $\Delta_0 e$ имеют порядок α и что $\Delta_0 e$ является чисто периодической величиной. С точностью до малых величин первого порядка относительно α (включительно) формулу (11) можно записать в виде

$$\Delta_0\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{p}\theta_0 + \text{п. ч.} \qquad (13)$$

Если e_1 и $\tilde{\omega}_1$ — оскулирующие элементы в последующую эпоху θ_1, то

$$\Delta_1\tilde{\omega} = \frac{\alpha}{p}\theta_1 + \text{п. ч.} \qquad (14)$$

Далее, если положить $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$, то из формул (13) и (14) видно, что оскулирующий элемент $\tilde{\omega}_0$ увеличивается на $2\pi\alpha/p$ за один оборот. Если λ означает коэффициент при вековом члене, происходящем от этого эффекта, выраженный в секундах дуги за столетие, то

$$\lambda = \frac{2\pi\alpha}{p} \cdot \frac{100}{T} \operatorname{cosec} 1'',$$

где T — период обращения, выраженный в годах. Используя равенство (2) и полагая $\mu = n^2a^3 = \frac{4\pi^2}{T^2}a^3$ и $p \equiv \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$, последнюю формулу можно записать в виде

$$\lambda = \frac{2400\pi^3 a^2 \operatorname{cosec} 1''}{c^2 T^3 (1 - e^2)}. \qquad (15)$$

Так как $c = 299\,776$ *км/сек* $= 9{,}46 \cdot 10^{12}$ *км/год*, то

$$\lambda = \frac{9{,}46 \cdot 10^6}{150} \text{ а. е./год.}$$

Если a выражено в а. е. и T — в годах, то, пренебрегая массой планеты, имеем $a^3 = T^2$. Следовательно, подставляя численные значения c, π и $\operatorname{cosec} 1''$, формулу (15) запишем в виде

$$\lambda = \frac{3{,}841}{(1 - e^2)\, aT}. \tag{16}$$

Для Меркурия $a = 0{,}3871$, $T = 0{,}2408$ и $e = 0{,}2056$. Поэтому $\lambda = 43'',0$ за столетие, что очень хорошо согласуется с расхождением между наблюдениями и теорией Ньютона.

Фактически теоретической величиной, которая сравнивается с наблюдениями, является не λ, а $e\lambda$. Следующая таблица дает вычисленные значения $e\lambda$ и λ для четырех ближайших к Солнцу планет:

	Меркурий	Венера	Земля	Марс
$e\lambda$	$8'',82$	$0'',06$	$0'',06$	$0'',12$
λ	43,03	8,63	3,84	1,34

Как уже упоминалось, релятивистский эффект подтверждается в случае Меркурия. Недавно аналогичное подтверждение получено в случае Земли, несмотря на то, что наблюдаемая величина $e\lambda$ здесь составляет не более $0'',06$ в столетие. Так как наблюдаемый эффект увеличивается со временем, то можно предположить, что в свое время мы получим подтверждение, по крайней мере в случае Марса. Из формулы (16) видно, что для Юпитера и еще более удаленных планет вычисленные значения λ достигают самое большее лишь несколько сотых секунд дуги, а величины $e\lambda$ практически пренебрежимо малы.

Глава 16

ОТКРЫТИЕ НЕПТУНА

§ 16.01. Введение

Планета Уран была открыта Гершелем 13 марта 1781 г. во время одного из его систематических наблюдений неба. Другие планеты, более близкие к Солнцу, чем Уран, были известны со времен глубокой древности, и это открытие Гершеля положило начало плодотворной эре астрономических открытий, в которую он сам внес наиболее значительный вклад. Так как новая планета была немного слабее звезд, видимых невооруженным глазом, то этот факт побудил немецкого астронома Боде предположить, что в прошлом Уран ошибочно принимали за звезду, и поэтому его наблюдения могли бы быть зарегистрированы в каталогах тех времен. Когда элементы орбиты новой планеты были вычислены с достаточной точностью для определения ее положений на годы, предшествующие ее открытию, оказалось, что результаты исследования старых каталогов получились значительно более удачными, чем это можно было предполагать: Уран наблюдался не менее чем в 19 различных появлениях, причем самое раннее наблюдение было выполнено в 1690 г. Флемстидом, первым королевским астрономом.

В конце второго десятилетия XIX века французский астроном Бувар предпринял попытку вывести элементы орбиты новой планеты. Он уже имел в своем распоряжении большое число точных наблюдений планеты, охватывающих промежуток времени, прошедший после ее открытия — назовем эти наблюдения „новыми" — а также 19 более ранних наблюдений, которые назовем „старыми". Большинство из этих ранних наблюдений были, несомненно, менее точными, чем „новые" наблюдения, но они имели преимущество в том, что охватывали промежуток времени, больший, чем период обращения планеты, в то время как „новые" наблюдения были выполнены на промежутке времени, меньшем половины одного периода ее обращения. Бувар сразу же столкнулся с неожиданными трудностями. Когда он использовал для определения элементов только „новые" наблюдения, то нашел, что расхождения между вычисленными и наблюдаемыми положениями Урана в годы, предшествующие открытию, были настолько большими, что их нельзя было объяснить ошибками наблюдений. Далее, когда для вычисления элементов он использовал только „старые" наблюдения, то они дали серьезные расхождения между вычисленными и наблюденными положениями планеты для „новых" рядов наблюдений, которые также невозможно было объяснить ошибками наблюдений. Не доверяя „старым" наблюдениям, Бувар положил в основу таблиц Урана, опубликованных в 1821 г., элементы орбиты, выведенные только из „новых" наблюдений. Этот прием, конечно, не разрешил тайны, окружающей „старые" наблюдения, и когда вскоре после 1821 г. планета стала все более и более отклоняться от своих предсказанных положений (в 1846 г. отклонение в долготе достигло 2′), астрономы встали лицом к лицу с загадкой, на которую необходимо было дать ответ.

Тем временем, будучи еще студентом колледжа св. Джона в Кэмбридже, Джон К. Адамс 3 июля 1841 г. закончил свой знаменитый мемуар, в котором он изложил свое мнение об исследовании особенностей движения Урана, основанное на гипотезе, что эти особенности вызваны возмущениями неизвестной еще планеты. В течение 1845 г. Адамс получил решение задачи (между 1843 и 1845 гг. он нашел шесть решений с очень высокой точностью), которое могло бы привести к немедленному открытию неизвестной планеты, если бы сразу были предприняты телескопические наблюдения. В 1845 г. начинающий молодой французский астроном У. Леверье совершенно независимо от Адамса предпринял аналогичное исследование. С помощью различных аналитических методов оба достигли цели в решении трудной задачи вычисления для некоторых выбранных моментов времени положений гипотетической планеты. Хотя нет никаких сомнений в том, что Адамс получил свои выводы значительно раньше, чем Леверье (после ненужной задержки Чаллис начал трудоемкие поиски планеты на Кэмбриджской обсерватории в июле месяце, предшествовавшем открытию планеты), Леверье первым опубликовал свои результаты, и по его инициативе Галле предпринял поиски планеты на Берлинской обсерватории, которые немедленно увенчались успехом. Планета, позже названная Нептуном, была открыта 23 сентября 1846 г., и ее положение почти совпадало с положениями, предсказанными Адамсом и Леверье. История открытия Нептуна[1]) и последующая полемика является одним из наиболее значительных эпизодов в истории астрономии. Но когда словесная битва утихла, имя Адамса как конкурента Леверье в деле открытия Нептуна было совершенно забыто.

В этой главе мы изложим методы, использованные Адамсом и Леверье в их исследованиях. Сейчас будет удобно сделать некоторые замечания. Во-первых, в основе работы Адамса лежит исследование невязок в *средней* долготе Урана, в то время как в работе Леверье использованы невязки в *истинной* долготе. Во-вторых,

[1]) Для подробного ознакомления с этим вопросом см. „John Couch Adams and the Discovery of Neptune", Occasional Notes of the Royal Astronomical Society, No. 11, August 1947.

так как наклонности орбит планет, известных в то время, очень малы (так, для Урана, например, наклонность приближенно равна $^3/_4{}^\circ$), оба астронома предполагали, что и у гипотетической планеты наклонность также мала. Соответственно этому, пренебрегая наклонностями Урана и Нептуна, они допускали, что обе планеты движутся в плоскости эклиптики. Поэтому в качестве элементов орбиты Урана были приняты a, e, ε и $\tilde{\omega}$, а в качестве искомых величин — аналогичные элементы a_1, e_1, ε_1 и $\tilde{\omega}_1$ орбиты неизвестной планеты с неизвестной массой m_1. Кроме того, так как средние движения n и n_1 даются формулами

$$n^2a^3 = G(m_0 + m), \quad n_1^2a_1^3 = G(m_0 + m_1),$$

в которых m и m_1 — величины, пренебрежимо малые по сравнению с массой Солнца m_0, удобно рассматривать в качестве элементов величины n и n_1 вместо a и a_1. В третьих, оба астронома исходили из предположения, которое будет пояснено позже, что $a/a_1 = {}^1/_2$, или $n^2 = 8n_1^2$.

§ 16.02. Влияние ошибок в элементах Урана на истинную долготу

Так как наблюдения Урана, из которых Бувар вывел элементы орбиты, были подвержены (чего он не знал) возмущениям от Нептуна, то числовые значения этих элементов, положенные им в основу таблиц, содержали ошибки. Обозначим поправки к этим элементам через Δn, Δe, $\Delta\varepsilon$ и $\Delta\tilde{\omega}$. Тогда истинные элементы будут $n + \Delta n$, $e + \Delta e$, $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, $\tilde{\omega} + \Delta\tilde{\omega}$.

Пусть λ означает истинную долготу Урана, f — истинную аномалию и M — среднюю аномалию. Мы имеем

$$M = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}. \tag{1}$$

Кроме того, согласно формуле (11) § 3.10, уравнение центра с точностью до членов порядка e^2 включительно записывается в виде

$$f - M = 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M.$$

Далее, $\lambda = f + \tilde{\omega}$. Поэтому

$$\lambda = nt + \varepsilon + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M. \tag{2}$$

Если $\Delta\lambda$ — поправка к долготе λ, полученной по элементам Бувара, обусловленная Δn и т. д., то из равенства (2) найдем, что

$$\Delta\lambda = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + \left(2e\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M\right)\Delta M + \\ + \left(2\sin M + \frac{5}{2}e\sin 2M\right)\Delta e.$$

Но, согласно формуле (1), $\Delta M = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon - \Delta\tilde{\omega}$. Поэтому

$$\Delta\lambda = (t\,\Delta n + \Delta\varepsilon)\left(1 + 2e\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M\right) +$$

$$+ \Delta e\left(2\sin M + \frac{5}{2}e\sin 2M\right) - e\,\Delta\tilde{\omega}\left(2\cos M + \frac{5}{2}e\cos 2M\right). \quad (3)$$

Это последнее уравнение мы можем записать в виде

$$\Delta\lambda = \alpha_1\,\Delta n + \alpha_2\,\Delta\varepsilon + \alpha_3\,\Delta e + \alpha_4\,\Delta\tilde{\omega}. \quad (4)$$

где коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ могут быть легко вычислены для каждого момента наблюдения.

Пусть P_1 означает возмущение в истинной долготе, обусловленное действием Нептуна. Если λ_0 и λ_c — соответственно наблюдаемая истинная долгота Урана и истинная долгота, вычисленная по элементам Бувара, то $\lambda_0 - \lambda_c = \Delta\lambda + P_1$, или, если обозначить

$$c_1 = \lambda_0 - \lambda_c, \quad (5)$$

то

$$c_1 = \alpha_1\,\Delta n + \alpha_2\,\Delta\varepsilon + \alpha_3\,\Delta e + \alpha_4\,\Delta\tilde{\omega} + P_1. \quad (6)$$

Выражение для P_1 мы рассмотрим позже.

Уравнение (6) является условным уравнением, которое использовал Леверье. Заметим, что для каждого момента наблюдения приближенное значение c_1 известно.

§ 16.03. Влияние ошибок в элементах Урана на среднюю долготу

Обозначим среднюю долготу через l. Пусть δl означает приращение средней долготы, соответствующее приращению $\delta\lambda$ истинной долготы. Тогда так как, согласно второму закону Кеплера,

$$r^2\dot{f} = h \quad \text{или} \quad nr^2\frac{d\lambda}{dl} = h,$$

то

$$\delta l = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\delta\lambda. \quad (1)$$

Далее, отклонение истинной долготы, которое мы обозначили в § 16.02 через c_1, известно. При отождествлении $\delta\lambda$ с c_1 Адамс воспользовался соответствующими ошибками средней долготы в том виде, как они представлены формулой (1). Обозначим ошибку средней долготы через c. Тогда

$$c = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,c_1, \quad (2)$$

причем r для каждого наблюдения должно вычисляться по элементам Бувара. Величина c, определяемая формулой (2), может считаться теперь известной.

Далее, если Δl означает эффект ошибок в элементах Урана, соответствующий $\Delta\lambda$, то, согласно формуле (1),

$$\Delta l = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\Delta\lambda. \tag{3}$$

Пренебрегая величиной e^3 и более высокими степенями e, мы найдем, используя равенства $r = a(1 - e\cos E)$ и $\cos E = \cos M - e\sin^2 M$ (или непосредственно из формулы (17) § 3.11), что коэффициент при $\Delta\lambda$ в формуле (3) равен

$$1 + 2e^2 - 2e\cos M - \frac{1}{2}e^2\cos 2M. \tag{4}$$

Из формул (3), (4) и равенства (3) § 16.02 мы после некоторых упрощений с точностью до малых величин рассматриваемого порядка получим

$$\Delta l = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + 2e^2\Delta\tilde{\omega} + \\ + \Delta e\left(2\sin M + \frac{1}{2}e\sin M\right) - e\,\Delta\tilde{\omega}\left(2\cos M + \frac{1}{2}e\cos 2M\right). \tag{5}$$

На этой стадии Адамс объединяет малую поправку $2e^2\Delta\tilde{\omega}$ с $\Delta\varepsilon$. Положим $\varepsilon - \tilde{\omega} = \beta$. Угол β известен. Кроме того, $M = nt + \beta$. Формула (5) теперь примет вид

$$\Delta l = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + \cos nt\,(2\,\Delta e\sin\beta - 2e\,\Delta\tilde{\omega}\cos\beta) + \\ + \sin nt\,(2\,\Delta e\cos\beta + 2e\,\Delta\tilde{\omega}\sin\beta) + \\ + \cos 2nt\left(\frac{1}{2}e\,\Delta e\sin 2\beta - \frac{1}{2}e^2\Delta\tilde{\omega}\cos 2\beta\right) + \\ + \sin 2nt\left(\frac{1}{2}e\,\Delta e\cos 2\beta + \frac{1}{2}e^2\Delta\tilde{\omega}\sin 2\beta\right). \tag{6}$$

Пусть

$$\Delta x_1 = 2\,\Delta e\sin\beta - 2e\,\Delta\tilde{\omega}\cos\beta, \tag{7}$$

$$\Delta y_1 = 2\,\Delta e\cos\beta + 2e\,\Delta\tilde{\omega}\sin\beta. \tag{8}$$

Тогда мы можем вместо Δe и $\Delta\tilde{\omega}$ рассматривать величины Δx_1 и Δy_1. Из формул (7) и (8) мы сразу же получаем

$$\Delta x_1\cos\beta + \Delta y_1\sin\beta = 2\,\Delta e\sin 2\beta - 2e\,\Delta\tilde{\omega}\cos 2\beta, \tag{9}$$

$$\Delta x_1\sin\beta - \Delta y_1\cos\beta = -2\,\Delta e\cos 2\beta - 2e\,\Delta\tilde{\omega}\sin 2\beta. \tag{10}$$

Обозначим коэффициенты при $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$ в формуле (6) через Δx_2 и Δy_2 соответственно. Тогда, принимая во внимание формулы (9) и (10), будем иметь

$$\Delta x_2 = \frac{1}{4}e\,(\Delta x_1\cos\beta + \Delta y_1\sin\beta), \tag{11}$$

$$\Delta y_2 = -\frac{1}{4}e\,(\Delta x_1\sin\beta - \Delta y_1\cos\beta) \tag{12}$$

или

$$\Delta x_2 = \gamma_1 \Delta x_1 + \gamma_2 \Delta y_1, \tag{13}$$

$$\Delta y_2 = -\gamma_2 \Delta x_1 + \gamma_1 \Delta y_1, \tag{14}$$

где численные значения величин γ_1 и γ_2 предполагаются известными. Формула (6) теперь может быть записана в виде

$$\Delta l = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + \Delta x_1 \cos nt + \Delta y_1 \sin nt + \\ + \Delta x_2 \cos 2nt + \Delta y_2 \sin 2nt. \tag{15}$$

Если через P обозначить возмущение средней долготы, обусловленное действием Нептуна, то условное уравнение, использованное Адамсом, запишется в виде

$$c = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + \Delta x_1 \cos nt + \Delta y_1 \sin nt + \\ + \Delta x_2 \cos 2nt + \Delta y_2 \sin 2nt + P. \tag{16}$$

При этом величина c является известной для каждого наблюдения Урана. Кроме того, для каждого наблюдения могут быть легко вычислены коэффициенты при Δn, Δx_1, Δx_2, Δy_1, Δy_2 в формуле (16).

§ 16.04. Возмущение средней долготы

Возмущающая функция R, для которой отыскиваются возмущения в элементах орбиты Урана, задается формулой

$$R = m_1 B + m_1 \sum C \cos\theta, \tag{1}$$

где

$$\theta = il + i_1 l_1 + k\tilde{\omega} + k_1 \tilde{\omega}_1, \tag{2}$$

причем B и C — функции a, a_1, e, e_1, а i, i_1, k, k_1 — положительные или отрицательные целые числа, включая и нуль. Кроме того,

$$l = \rho + \varepsilon, \quad l_1 = \rho_1 + \varepsilon_1,$$

где

$$\rho = \int n\,dt, \quad \rho_1 = \int n_1\,dt.$$

Так как при решении рассматриваемой задачи достаточно учитывать только возмущения первого порядка, то мы можем в формуле (2) вместо l и l_1 написать $nt + \varepsilon$ и $n_1 t + \varepsilon_1$ соответственно, так что

$$\theta = i(nt + \varepsilon) + i_1(n_1 t + \varepsilon_1) + k\tilde{\omega} + k_1 \tilde{\omega}_1. \tag{3}$$

Если через $\Delta_1 l$ обозначить возмущение первого порядка в средней долготе, то

$$\Delta_1 l = \Delta_1 \rho + \Delta_1 \varepsilon. \tag{4}$$

Согласно формуле (5) § 6.04,

$$\ddot{\rho} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{3m_1}{a^2}\sum iC\sin\theta,$$

откуда при помощи выражения (3) находим

$$\Delta_1 \rho = -\frac{3m_1}{a^2}\sum\frac{iC\sin\theta}{(in+i_1 n_1)^2}. \tag{5}$$

Кроме того, согласно формуле (16) § 6.03, $\Delta_1 \varepsilon$ определяется формулой

$$\Delta_1 \varepsilon = \lambda t + \sum K\sin\theta. \tag{6}$$

Возмущение P средней долготы будет равно сумме членов правых частей равенств (5) и (6). Далее, вековой член λt в формуле (6) может быть объединен с членом $t\Delta n$ в формуле (16) § 16.03. Поэтому мы можем рассматривать в качестве P только периодическую часть возмущений, определяемую формулой

$$\rho = m_1\sum E\sin\theta. \tag{7}$$

В дальнейшем мы подробно рассмотрим отдельные члены равенства (7), которое было использовано Адамсом для составления условных уравнений.

Заметим, что коэффициенты E являются функциями a, a_1, e и e_1. Адамс и Леверье ограничились в этих коэффициентах только членами первой степени относительно e и e_1. Далее, a и a_1 входят в коэффициенты E так сложно, что если a_1 оставить неизвестным, то мы едва ли добьемся успеха при решении условных уравнений. Как указывалось в § 16.01, оба астронома воспользовались правилом Боде, которое с достаточной точностью представляет средние гелиоцентрические расстояния планет формулой $4+3\cdot 2^n$, где $n=0, 1, 2, \ldots, 6$ соответственно для Венеры, Земли, Марса, малых планет, Юпитера, Сатурна и Урана. Когда после его открытия Уран также удовлетворительно подтвердил это правило, то казалось разумным принять (по крайней мере в качестве рабочей гипотезы), что неизвестная планета также подчиняется этому правилу, если положить $n=7$. В этом случае a/a_1 приближенно будет равно $^1/_2$. В своих первых исследованиях Адамс и Леверье просто положили $a_1=2a$, откуда с достаточной степенью точности следует, что

$$n_1 = n \cdot 2^{-3/2}. \tag{8}$$

Поэтому множители при коэффициентах E в формуле (7), которые зависят от a, a_1 (и e), могут быть полностью вычислены. Аналогично если воспользоваться равенством (8), то можно вычислить и коэффициент при t в выражении (3) для θ. Таким образом, неизвестными в выражении (7) для P являются четыре величины: m_1, ε_1, e_1 и $\tilde{\omega}_1$.

§ 16.05. Возмущение истинной долготы

Удобно здесь дать общую формулу для возмущения P_1 истинной долготы, которую использовал Леверье при решении этой задачи и с которой мы встретимся в § 16.10. Согласно формуле (2) § 16.02, истинная долгота λ определяется формулой

$$\lambda = l + 2e \sin(l - \tilde{\omega}) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(l - \tilde{\omega}),$$

так как $M = l - \tilde{\omega}$. Поскольку $P_1 = \Delta_1 \lambda$, то в обозначениях предыдущего параграфа мы получим

$$\begin{aligned} P_1 = \Delta_1 l \left[1 + 2e \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{5}{2} e^2 \cos 2(l - \tilde{\omega})\right] + \\ + \Delta_1 e \left[2 \sin(l - \tilde{\omega}) + \frac{5}{2} e \sin 2(l - \tilde{\omega})\right] - \\ - e\Delta_1 \tilde{\omega} \left[2 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{5}{2} e \cos 2(l - \tilde{\omega})\right]. \end{aligned}$$

Далее, так как $\Delta_1 l \equiv P$, то с помощью формулы (7) предыдущего параграфа имеем

$$\Delta_1 l = m_1 \sum E \sin \theta.$$

Согласно формулам (15) и (16) § 6.03, периодические части $\Delta_1 e$ и $\Delta_1 \tilde{\omega}$ равны выражениям вида

$$m_1 \sum E' \cos \theta \quad \text{и} \quad m_1 \sum E'' \sin \theta$$

соответственно, а вековые члены включаются в $t \Delta n$, как это было сделано в предыдущем параграфе с вековым членом в $\Delta_1 \varepsilon$.

Поэтому P_1 имеет вид

$$P_1 = m_1 \sum E_1 \sin \theta_1, \tag{1}$$

где $\theta_1 = \theta \pm j(l - \tilde{\omega})$, причем $j = 0, 1, 2$. Это выражение для P_1 нужно теперь подставить в условное уравнение (6) § 16.02, использованное Леверье. Подробный вид уравнения (1) будет приведен нами позже в § 16.10.

§ 16.06. Метод Адамса

Мы перепишем условное уравнение Адамса (16) § 16.03

$$c = t\,\Delta n + \Delta\varepsilon + \Delta x_1 \cos nt + \Delta y_1 \sin nt + \\ + \Delta x_2 \cos 2nt + \Delta y_2 \sin 2nt + P,$$

где в общем виде P определяется формулой (7) § 16.04. Адамс использовал следующие члены P:

$$\begin{aligned} P = {} & m_1 u_1 \sin(nt - n_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1) + m_1 u_2 \sin[2(nt - n_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1)] + \\ & + m_1 u_3 \sin[3(nt - n_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1)] + m_1 u_4 \sin(n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}) + \\ & + m_1 e_1 u_5 \sin(n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1) + m_1 u_6 \sin(nt - 2n_1 t + \varepsilon - 2\varepsilon_1 + \tilde{\omega}) + \\ & + m_1 e_1 u_7 \sin(nt - 2n_1 t + \varepsilon - 2\varepsilon_1 + \tilde{\omega}_1) + \\ & + m_1 u_8 \sin(2nt - 3n_1 t + 2\varepsilon - 3\varepsilon_1 + \tilde{\omega}) + \\ & + m_1 e_1 u_9 \sin(2nt - 3n_1 t + 2\varepsilon - 3\varepsilon_1 + \tilde{\omega}_1) + \\ & + m_1 e_1 u_{10} \sin(3nt - 3n_1 t + 3\varepsilon - 3\varepsilon_1 - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}_1), \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_1, u_2, \ldots$ — числовые коэффициенты (в секундах дуги), которые получены по числовым значениям a и e, найденным Буваром, и принятому значению a/a_1.

В окончательном решении Адамс использовал несколько измененное значение a/a_1, именно 0,515, получающееся из его предварительного решения. Кроме того, ради удобства вычислений он в качестве m_1 принял величину, равную 5000 массам неизвестной планеты, а в качестве e_1 — величину, равную 20 эксцентриситетам неизвестной планеты (введя, конечно, необходимую численную компенсацию). Примечательно то, что и Леверье поступил аналогичным образом и относительно m_1: он принял за m_1 величину, равную 10 000 массам неизвестной планеты.

Четыре неизвестные величины, относящиеся к Нептуну, которые явно фигурируют в выражении (1) для P, суть: m_1, e_1, ε_1 и $\tilde{\omega}_1$. Мы можем записать P следующим образом:

$$\begin{aligned} P = {} & \sum_{i=1}^{3} (h_i \cos i\theta_1 + k_{1i} \sin i\theta_1) + \\ & + p_1 \cos\theta_2 + p_2 \cos\theta_3 + p_3 \cos\theta_4 + \\ & + q_1 \sin\theta_2 + q_2 \sin\theta_3 + q_3 \sin\theta_4, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\theta_1 = (n - n_1)\,t, \quad \theta_2 = n_1 t, \quad \theta_3 = (n - 2n_1)\,t,$$
$$\theta_4 = (2n - 3n_1)\,t. \tag{3}$$

При этом все коэффициенты при t в формулах (3) являются известными величинами.

Пусть

$$\theta = \varepsilon - \varepsilon_1, \quad \beta = \varepsilon - \tilde{\omega}, \quad \beta_1 = \varepsilon - \tilde{\omega}_1. \tag{4}$$

Тогда из сравнения выражений (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= m_1 u_1 \sin\theta, & k_1 &= m_1 u_1 \cos\theta, \\ h_2 &= m_1 u_2 \sin 2\theta, & k_2 &= m_1 u_2 \cos 2\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того,

$$h_3 = m_1 u_3 \sin 3\theta + m_1 e_1 u_{10} \sin(3\theta + \beta - \beta_1) =$$
$$= m_1 u_3 \sin 3\theta + m_1 e_1 u_{10} [\sin(3\theta - \beta_1)\cos\beta + \cos(3\theta - \beta_1)\sin\beta],$$
$$p_3 = m_1 u_8 \sin(3\theta - \beta) + m_1 e_1 u_9 \sin(3\theta - \beta_1) \tag{6}$$

и

$$q_3 = m_1 u_8 \cos(3\theta - \beta) + m_1 e_1 u_9 \cos(3\theta - \beta_1). \tag{7}$$

Поэтому, исключая β_1 из выражения для h_3 посредством формул (6) и (7), мы после некоторых упрощений получим

$$h_3 = m_1 \left(u_3 - \frac{u_8 \cdot u_{10}}{u_9}\right) \sin 3\theta + \frac{u_{10}}{u_9} (p_3 \cos\beta + q_3 \sin\beta)$$

или

$$h_3 = m_1 v_1 \sin 3\theta + v_2 p_3 + v_3 q_3, \tag{8}$$

где коэффициенты v_1, v_2, v_3 имеют вполне определенные числовые значения, причем β определяется по элементам Бувара. Точно так же находим, что

$$\begin{aligned} k_3 &= m_1 v_1 \cos 3\theta - (v_3 p_3 - v_2 q_3), \\ p_1 &= m_1 w_1 \sin(\theta - \beta) + w_2 (p_3 \cos 2\theta - q_3 \sin 2\theta), \\ q_1 &= - m_1 w_1 \cos(\theta - \beta) - w_2 (p_3 \sin 2\theta + q_3 \cos 2\theta), \\ p_2 &= m_1 z_1 \sin(2\theta - \beta) + z_2 (p_3 \cos\theta - q_3 \sin\theta), \\ q_2 &= m_1 z_1 \cos(2\theta - \beta) + z_2 (p_3 \sin\theta + q_3 \cos\theta), \end{aligned} \tag{9}$$

где все величины v, w и z известны.

Таким образом, первоначальные неизвестные величины m_1, e_1, ε_1, $\tilde{\omega}_1$ теперь заменены величинами m_1, θ, p_3, q_3, так как, согласно формулам (5), h_1, h_2, k_1, k_2 являются простыми функциями m_1 и θ, а h_3, k_3, p_1, q_1, p_2, q_2 формулами (8) и (9) связаны с m_1, θ, p_3, q_3.

§ 16.07. Условные уравнения

Условное уравнение, если заменить nt на θ', записывается в виде

$$\begin{aligned} c = \Delta\varepsilon + \Delta x_1 \cos\theta' + \Delta x_2 \cos 2\theta' + t\,\Delta n + \Delta y_1 \sin\theta' + \\ + \Delta y_2 \sin 2\theta' + h_1 \cos\theta_1 + h_2 \cos 2\theta_1 + h_3 \cos 3\theta_1 + \\ + k_1 \sin\theta_1 + k_2 \sin 2\theta_1 + k_3 \sin 3\theta_1 + p_1 \cos\theta_2 + \\ + p_2 \cos\theta_3 + p_3 \cos\theta_4 + q_1 \sin\theta_2 + q_2 \sin\theta_3 + q_3 \sin\theta_4. \end{aligned} \quad (1)$$

В качестве начального момента Адамс выбрал среднее противостояние Урана 1810 г., т. е. 1810,328. За единицу времени он взял промежуток, равный трем синодическим периодам обращения Урана, т. е. 3,0362 года. Это, конечно, требует перевода в эти единицы постоянной тяготения G, которая входит в различные числовые коэффициенты u_1, u_2, ... возмущающей функции. Если $a/a_1 = 0{,}515$, а n, n_1 выражены в новой единице времени, то найдено, что

$$\theta' = 13^\circ 0' \cdot 6t, \quad \theta_1 = 8^\circ 12' \cdot 1t, \quad \theta_2 = 4^\circ 48' \cdot 5t,$$
$$\theta_3 = 3^\circ 23' \cdot 6t, \quad \theta_4 = 11^\circ 35' \cdot 7t.$$

„Новые“ наблюдения были разбиты на группы, дающие средние места для моментов времени $1810{,}328 \pm t$, где $t = 0, 1, \ldots, 10$, а соответствующие значения величины c, определяемой формулой (1), выводятся из значений l, получаемых из таблиц Бувара. Адамс, таким образом, составил 21 условное уравнение, основанное на „новых“ наблюдениях[1]), начиная с 1780 по 1840 г.

Что касается „старых“ наблюдений, то они дают 9 условных уравнений.

§ 16.08. Решение условных уравнений

Заметим прежде всего, что в уравнении (1) § 16.07 величины Δx_2 и Δy_2 не являются независимыми неизвестными. Они связаны с величинами Δx_1 и Δy_1 формулами (13) и (14) § 16.03

$$\Delta x_2 = \gamma_1 \Delta x_1 + \gamma_2 \Delta y_1, \quad \Delta y_2 = -\gamma_2 \Delta x_1 + \gamma_1 \Delta y_1,$$

где γ_1 и γ_2 — величины, числовые значения которых известны.

Адамс решает уравнения (1) § 16.07 для „новых“ наблюдений следующим образом.

Каждое из 21 уравнения он умножает на коэффициент при Δx_1 и складывает подобно тому, как это делается при составлении нормальных уравнений. Эту процедуру он повторяет для $\Delta\varepsilon$, Δn, Δy_1;

[1]) Среднее наблюдение для противостояния 1780 г. выводилось по наблюдениям, которые были выполнены как до, так и после открытия Урана, и, строго говоря, является лишь отчасти „новым“ наблюдением.

h_1, k_1, h_2, k_2, h_3, k_3; p_2, q_2, p_3, q_3, используя при этом следующие легко выводимые равенства:

$$\sum \cos \xi t = \frac{\sin \frac{21}{2}\xi}{\sin \frac{1}{2}\xi},$$

$$2\sum t \sin \xi t = \frac{11 \sin 10\xi - 10 \sin 11\xi}{\sin^2 \frac{1}{2}\xi},$$

$$2\sum \cos \xi t \cos \eta t = \frac{\sin \frac{21}{2}(\xi - \eta)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - \eta)} + \frac{\sin \frac{21}{2}(\xi + \eta)}{\sin \frac{1}{2}(\xi + \eta)},$$

$$2\sum \sin \xi t \sin \eta t = \frac{\sin \frac{21}{2}(\xi - \eta)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - \eta)} - \frac{\sin \frac{21}{2}(\xi + \eta)}{\sin \frac{1}{2}(\xi + \eta)},$$

$$2\sum \cos^2 \xi t = 21 + \frac{\sin 21\xi}{\sin \xi},$$

$$2\sum \sin^2 \xi t = 21 - \frac{\sin 21\xi}{\sin \xi},$$

в которых суммирование распространяется на следующие значения t: $-10, -9, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots 10$.

Кроме того, суммы всех комбинаций вида $\sum \cos \xi t \sin \eta t$ и $\sum t \cos \xi t$ равны нулю.

При помощи этого приема 21 условное уравнение было приведено к 14 псевдонормальным уравнениям, составляющим две группы по 7 уравнений в каждой, причем уравнения первой группы имеют следующий вид:

$$C = a_1 \Delta\varepsilon + a_2 \Delta x_1 + a_3 \Delta x_2 + \sum_{r=1}^{3} (b_r h_r + c_r p_r), \tag{1}$$

а уравнения второй группы —

$$C' = a'_1 \Delta n + a'_2 \Delta y_1 + a'_3 \Delta y_2 + \sum_{r=1}^{3} (b'_r k_r + c'_r q_r). \tag{2}$$

Воспользовавшись некоторыми особенностями уравнений (1) и (2) и исключив из них $\Delta\varepsilon$, $\Delta\eta$, Δx_1, Δy_1, Δx_2, Δy_2, Адамс пришел к двум уравнениям вида

$$D = \sum_{1}^{3} (\alpha_r h_r + \alpha'_r k_r + \beta_r p_r + \beta'_r q_r). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь „старые“ наблюдения, из которых, как уже указывалось, Адамс вывел 9 условных уравнений. Эти уравнения не обладают, конечно, такой систематичностью, как уравнения, выведенные из „новых" наблюдений. При помощи метода, в общих чертах аналогичного тому, который использовался при выводе уравнений типа (3), Адамс получил два уравнения вида

$$E=\sum_{1}^{3}(A_r h_r+A'_r k_r+B_r p_r+B'_r q_r). \qquad (4)$$

Двух уравнений (3) и двух уравнений (4), таким образом, вполне достаточно для того, чтобы определить 4 неизвестные величины m_1, θ, p_3 и q_3.

Затем при помощи первого из уравнений (3) Адамс исключил члены, стоящие в левых частях второго из уравнений (3) и двух уравнений (4), и получил таким образом группу из трех уравнений вида

$$0=\sum_{1}^{3}(C_r h_r+C'_r k_r+D_r p_r+D'_r q_r). \qquad (5)$$

Далее, согласно уравнениям (5), (8) и (9) § 16.06, h_1, h_2, h_3, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, q_1, q_2 выражаются через m_1, θ, p_3 и q_3 (при этом предполагается, что известное численное значение β подставлено в эти уравнения). Если мы обозначим p_3/m_1 и q_3/m_1 соответственно через p и q, то увидим, что каждое из уравнений (5) приведется к виду

$$\begin{aligned}0&=\sum_{1}^{3}(a_r\sin r\theta+b_r\cos r\theta)+\\&+cp+dq+e(p\cos\theta-q\sin\theta)+f(p\sin\theta+q\cos\theta)+\\&+g(p\cos 2\theta-q\sin 2\theta)+l(p\sin 2\theta+q\cos 2\theta),\end{aligned} \qquad (6)$$

где все численные значения коэффициентов a, b, c, d, e, f, g и l известны.

§ 16.09. Решение Адамса

При помощи метода последовательных приближений Адамс решил три уравнения (6) и получил следующие результаты:

$$\theta\equiv\varepsilon-\varepsilon_1=-46^\circ 55', \quad p\equiv\frac{p_3}{m_1}=138'',92,$$

$$q\equiv\frac{q_3}{m_1}=-109'',83.$$

Для момента 1810,328 численное значение ε равно $217^\circ 35'$. Поэтому, используя значение θ, сразу же находим $\varepsilon_1=264^\circ 50'$.

Средняя долгота $l_1(\equiv n_1 t+\varepsilon_1)$ может быть теперь найдена для любого противостояния, так как n_1 известно, поскольку было принято, что $a/a_1=0{,}515$. Далее, в наших обозначениях, $\theta_2=n_1 t$ и, согласно § 16.07, $n_1 = 4^\circ 48',5$. При $t = 12$, т. е. после 36 синодических периодов, что соответствует противостоянию 1846,762, или 6 октября 1846 г., $n_1 t = 57^\circ 42'$, и, следовательно, средняя долгота l_1 неизвестной планеты, если исправить ее на $30'$ за прецессию, будет

$$l_1 = 323^\circ 2',\ 6 \text{ октября } 1846 \text{ г.}$$

Из уравнений (6) и (7) § 16.06, если подставить в них числовые значения u_8 и u_9, имеем

$$p \equiv \frac{p_3}{m_1} = 33'',93 \sin(3\theta - \beta) - 63'',41 e_1 \sin(3\theta - \beta_1) = 138'',92,$$

$$q \equiv -\frac{q_3}{m_1} = 33'',93 \cos(3\theta - \beta) - 63'',41 e_1 \cos(3\theta - \beta) = -108'',83,$$

где $\beta_1 = \varepsilon - \tilde{\omega}_1$.

Так как θ и β известны, то, решая эти уравнения, получим

$$e_1 = 2,4123, \quad \beta_1 = 279^\circ 14'.$$

Отсюда находим, что для выбранной эпохи $\tilde{\omega}_1 = 298^\circ 41'$, и после исправления за прецессию долгота перигелия неизвестной планеты на 6 октября 1946 г. будет равна

$$\tilde{\omega}_1 = 299^\circ 11'.$$

Вспоминая, что e_1 в 20 раз больше эксцентриситета неизвестной планеты, мы получим

$$e_1 = 0,1206.$$

Масса неизвестной планеты, выраженная в долях солнечной массы, будет иметь следующее значение:

$$m_1 = \frac{1}{6666}.$$

Сокращенные условные уравнения, выраженные через Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$; m_1, ε_1, e_1, $\tilde{\omega}_1$, теперь дают возможность найти первую группу этих величин.

Если значения всех неизвестных величин подставить в условные уравнения, то в каждом случае можно найти невязки между теорией Адамса ($a/a_1 = 0,515$) и наблюдениями. Почти во всех случаях найденные невязки были очень малыми и сравнимыми по величине с возможными ошибками наблюдений. Самые поздние наблюдения, использованные Адамсом, относились к 1842 г. После того как его вычисления были закончены, оказалось, что эти невязки в 1843—1845 гг. значительно увеличились. Тогда Адамс, не повторяя всех вычислений, с учетом новых наблюдений, сделал заключение, что если $a/a_1 = 0,574$, то все отклонения практически исчезнут.

§ 16.10. Условные уравнения Леверье

Члены возмущения P_1 истинной долготы, использованные Леверье, выражаются формулой

$$\begin{aligned} P_1 = m_1 \sum A_i \sin[i(nt - n_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1)] + \\ + m_1 e \sum B_i \sin[(i-1)(nt + \varepsilon) - in_1 t - i\varepsilon_1 + \tilde{\omega}] + \\ + m_1 e_1 \sum C_i \sin[(i-1)(nt + \varepsilon) - in_1 t - i\varepsilon_1 + \tilde{\omega}_1], \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, 2, 3$, а коэффициенты A, B и C являются функциями a и a_1. Как указывалось ранее, Леверье, следуя правилу Боде, прежде всего предположил, что $a_1 = 2a$. Это дало возможность найти численные значения n_1 и коэффициентов A, B и C. Все члены в формуле (1) имеют ту же форму, которую использовал и Адамс, с той лишь разницей, что член с множителем u_{10}, учтенный Адамсом, не был включен в уравнение (1) Леверье.

Если численные значения ε, $\tilde{\omega}$ и e, найденные Буварам, а также численные значения a и a_1 подставить в формулу (1), то первые две суммы в этой формуле могут быть представлены в виде $m_1 L$ где L выражается так:

$$L = \sum D_i \sin i\varepsilon_1 + \sum E_i \cos i\varepsilon_1, \quad (2)$$

причем $i = 1, 2, 3$, а численные значения коэффициентов D и E известны.

Пусть

$$h = e_1 \sin \tilde{\omega}_1, \quad k = e_1 \cos \tilde{\omega}_1. \quad (3)$$

Тогда третья сумма в формуле (1) может быть записана в виде

$$m_1 hH + m_1 kK,$$

где каждая из величин H и K имеет вид (2), конечно с другими числовыми значениями коэффициентов D и E. Мы можем теперь записать P_1 в виде

$$P_1 = m_1 hH + m_1 kK + m_1 L, \quad (4)$$

где H, K и L — тригонометрические функции ε_1.

Пусть σ означает разность $\lambda_0 - \lambda_c$ между наблюдаемой истинной долготой и истинной долготой, вычисленной Буваром. Тогда условное уравнение Леверье можно записать следующим образом:

$$\sigma = \alpha_1 \Delta n + \alpha_2 \Delta\varepsilon + \alpha_3 \Delta e + \alpha_4 \Delta\tilde{\omega} + m_1 hH + m_1 kK + m_1 L, \quad (5)$$

где первые четыре члена правой части, обусловленные ошибками Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$ в элементах Бувара, содержатся в формуле (6) § 16.02.

Комбинируя „старые“ и „новые“ наблюдения в удобные группы (последние разделены интервалом в 7 лет), Леверье получил 18 уравнений вида (5), в которые входило 8 неизвестных: Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$; m_1, m_1h, m_1K, ε_1, причем ε_1 входит лишь в величины H, K и L.

Леверье сначала попытался решить эти уравнения следующим образом. Если каждое из уравнений (5) предполагается вполне точным в том смысле, что в λ_0 нет ошибок наблюдений и, следовательно, их нет и в σ, то исключение первых семи неизвестных из любых восьми уравнений вида (5) даст трансцендентное (и очень сложное) уравнение относительно лишь одной неизвестной ε_1. Это уравнение поэтому теоретически может быть решено относительно ε_1. После того как численное значение ε_1 будет подставлено в семь из восьми уравнений, то вновь полученные уравнения дадут возможность найти численные значения Δn, $\Delta\varepsilon$, ..., m_1k. Однако он не смог получить удовлетворительного решения трансцендентного уравнения (вследствие существования не пренебрежимо малых случайных ошибок наблюдений , которое привело бы к *положительному* значению m_1.

§ 16.11. Решение Леверье

1) Леверье пошел совершенно по другому пути, решив, что ошибки в истинной долготе, вычисленной по „старым“ наблюдениям, должны быть учтены.

Он сначала выбрал 4 уравнения (5) § 16.10 для значительно удаленных друг от друга эпох: 1715, 1775, 1810 и 1845 гг. При этом он предположил: а) что ошибки в σ для 1715 и 1775 гг. равнялись соответственно p и q и б) что ошибки для 1810 и 1845 гг. были равны нулю, поскольку последних наблюдений имеется очень большое число и они выполнены при помощи инструментов, обладающих высокой точностью. Обозначая правую часть уравнения (5) предыдущего параграфа через F, он получил следующие 4 уравнения:

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_1 + p, & F_2 &= \sigma_2 + q, \\ F_3 &= \sigma_3, & F_4 &= \sigma_4, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ — значения σ для рассматриваемых эпох. Решая эти 4 уравнения относительно Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe и $\Delta\tilde{\omega}$, он нашел

$$\Delta n = f(m_1, m_1h, m_1k, p, q, \varepsilon_1) \tag{2}$$

и три аналогичных равенства для $\Delta\varepsilon$, Δe и $\Delta\tilde{\omega}$. В этих равенствах функции f являются линейными относительно m_1, m_1h, m_1k и трансцендентными относительно ε_1.

Затем Леверье из формул вида (2) подставил выражения для Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe и $\Delta\tilde{\omega}$ в оставшиеся 14 условных уравнений, получив, таким образом, 14 уравнений, линейных относительно m_1, m_1h, m_1k, p и q и трансцендентных относительно ε_1. Из этих уравнений он сгруппировал вместе 4 для 1782, 1789, 1796 и 1801 гг. и объединил вместе другие 4 — для 1817, 1824, 1831 и 1838 гг., приведя таким образом 8 уравнений к двум уравнениям, каждое из которых линейно относительно m_1, m_1h, m_1k, p и q. Решив эти два уравнения относительно m_1h и m_1k, он получил

$$m_1h = G_1m_1 + G_2p + G_3q + \varkappa_1, \tag{3}$$

$$m_1k = g_1m_1 + g_2p + g_3q + \varkappa_2, \tag{4}$$

где G и g — трансцендентные функции ε_1, а $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — числовые постоянные, связанные с σ.

Выражения (3) и (4) для m_1h, m_1k затем подставляются в 4 уравнения (2), что дает возможность получить выражения для Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$, каждое из которых имеет вид правой части равенств (3) или (4). Когда все это выполнено, мы будем иметь 6 уравнений для Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$ и m_1h, m_1k вида (3) или (4).

До сих пор было использовано всего 12 условных уравнений: 8 уравнений в только что описанной процедуре и 4 уравнения представляют собой группу уравнений (1). Следовательно, остается еще 6 условных уравнений. Обозначим правую часть уравнения (5) § 16.10 через F, так что это условное уравнение может быть записано в виде

$$\sigma = F. \tag{5}$$

Подставим в F выражения для Δn, $\Delta\varepsilon$, Δe, $\Delta\tilde{\omega}$ и m_1h, m_1k. Тогда если через ρ обозначить разность $F - \sigma$, то каждое уравнение приведется к виду

$$\rho = a + bm_1 + cp + dq, \tag{6}$$

где b, c и d — трансцендентные функции ε_1.

Из наблюдений, которые использовались при составлении уравнений (6), Леверье рассмотрел два „старых“ наблюдения, относящихся к 1690 и 1747 гг., как критические, и для них значения a, b, c и d были найдены при следующих последовательных значениях ε_1: 0°, 9, 18, ..., 351°. Для того чтобы проиллюстрировать полученные результаты, приведем разности ρ для $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_1 = 252°$:

ε_1	1690 г.	1747 г.
0°	$324'' + 87''m_1 + 0'',4p - 2'',0q$	$-261'' - 16''m_1 - 1'',3p - 1'',6q$
252°	$-8'' - 45''m_1 - 0'',5p - 2'',3q$	$-24'' - 3''m_1 - 0'',7p - 1'',3q$

Как указывалось ранее, Леверье в качестве единицы массы m_1 использовал 10^{-4} массы Солнца. Поэтому необходимо численно согласовать все члены в условных уравнениях. Можно предвидеть, что крайние границы возможного значения m_1 должны быть 0,1 и 10. В самом деле, m_1 вряд ли достигает 10, т. е. приближенно значения массы Юпитера (в этой шкале), так как тогда возмущающая планета была бы сравнительно ярким объектом, который почти наверное открыли бы ранее. Также невозможно, чтобы m_1 было меньше 0,1, ибо в этом случае эффект возмущений от нее в движении Урана был бы сравнительно незначительным.

Анализ наблюдений, выполненных около 1715 и 1775 гг., приводит к выводу: невозможно, чтобы p и q численно превышали 15″ и 10″ соответственно.

Рассмотрим теперь разность ρ_1 для 1690 г., когда $\varepsilon_1 = 0$. Величина ρ_1 будет наименьшей, если ошибки в p и q соответственно равны $-15''$ и $+10''$, и тогда

$$\rho_1 = 298'' + 87'' m_1.$$

Аналогично, если ρ_2 — разность для 1747 г. при $\varepsilon_1 = 0$, то наименьшее значение ρ_2 будет при $p = -15''$, $q = -10''$, и тогда

$$\rho_2 = -225'' - 16'' m_1.$$

Если бы ε_1 действительно было равно нулю, то разности ρ_1 и ρ_2 имели бы по величине тот же порядок, что и ошибки p и q. Но так как m_1 *положительно*, то наименьшие абсолютные значения разностей для всех значений m_1 равны 298″ и 225″, что во много раз превосходит любые реально возможные ошибки наблюдений. Поэтому Леверье заключил, что $\varepsilon_1 = 0$ *не является* допустимым решением.

Идя этим путем, он вычислил ρ_1 и ρ_2 для различных значений ε_1 с интервалом в 9°, и отсюда стало ясным, что фактическое значение ε_1 должно находиться вблизи 252°. Например, если воспользоваться уже приведенными данными, положив $\varepsilon_1 = 252°$, $p = -15''$ и $q = -10''$, то

$$\rho_1 = 22'' - 45'' m_1,$$

что при любых разумных значениях разности, не превосходящей 22″ (по завышенной оценке), будет давать положительное значение m_1 приемлемого порядка.

Аналогично при очень незначительном увеличении максимальных численных значений p и q по разности ρ_2 можно получить, не выходя за пределы вероятного, положительное значение m_1.

2) На последнем этапе исследования Леверье вводит поправки в величины a_1 и ε_1 в виде

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\gamma, \quad \varepsilon_1 = 252° + \frac{\pi}{10}\beta.$$

При помощи первого из этих равенств коэффициенты возмущений истинной долготы были разложены в ряды по степеням малой величины $^1/_5\gamma$, а при помощи второго равенства синусы и косинусы от $l\varepsilon_1$ ($l=1, 2, 3$) — в ряды по степеням малого угла $\frac{\pi}{10}\beta$. Если пренебречь квадратами, произведениями величин $\frac{1}{5}\gamma$ и $\frac{\pi}{10}\beta$ и произведениями этих величин на Δn, $\Delta\varepsilon$, ..., $m_1 k$, m_1, то условные уравнения тогда будут линейными относительно неизвестных

$$\Delta n,\ \Delta\varepsilon,\ \Delta e,\ \Delta\tilde{\omega};\quad m_1 h,\ m_1 k,\ m_1,\ \beta \text{ и } \gamma.$$

Поэтому для определения неизвестных величин из 18 условных уравнений можно применить метод наименьших квадратов. Фактически Леверье поступил более аккуратно, так как в условных уравнениях он принял во внимание квадраты и произведения величин β и γ.

Приведем теперь главные результаты Леверье:

$$a_1 = 36{,}16 \text{ а. е.},\quad e_1 = 0{,}1076,$$
$$m_1 = \frac{1}{9300},\quad \lambda_1 = 326°\,32' \ (1847{,}0).$$

Истинная долгота, предсказанная Леверье для того момента времени, когда в Берлине был открыт Нептун, отличалась на 1° от истинной долготы, выведенной из наблюдений.

Как мы видели в § 16.09, численное значение средней долготы на 6 октября 1846 г., найденное Адамсом, равнялось 323° 2′. Зная среднее движение в промежутке от этой даты до 1947,0 и используя уравнение центра, можно вычислить истинную долготу для 1947,0. Было найдено, что

$$\lambda_1 = 329°\,57' \quad (1847{,}0).$$

Истинная долгота Нептуна, выведенная по элементам орбиты, когда имелось в распоряжении достаточное число наблюдений, получилась равной

$$\lambda_1 = 327°\,34' \quad (1847{,}0).$$

Положения планеты, предсказанные Адамсом и Леверье, таким образом, очень мало отличались от наблюдаемого положения планеты [1]).

---

[1]) Для более полного ознакомления с результатами Адамса и Леверье и их связью с фактическими элементами орбиты Нептуна отсылаем читателя к работе автора настоящей книги „John Couch Adams and Discovery of Neptune", Occasional Notes of the Royal Astronomical Society, No. 11, August 1947, и к статье Brown E. W., On a criterion for the prediction of an unknown planet, Mon. Not Roy. Astron. Soc., 92, 80 (1931).

Глава 17

ТЕОРИЯ ЛУНЫ ПОНТЕКУЛАНА

§ 17.01. Уравнения движения

В этом параграфе мы выведем уравнения движения в том виде, в котором они были использованы Понтекуланом [1]), а в последующих параграфах мы опишем основные этапы их решения и рассмотрим некоторые наиболее известные неравенства, такие, как эвекция, вариация и т. д.

В прямоугольных координатах уравнения движения Луны имеют вид

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z},$$

где R — возмущающая функция, обусловленная притяжением Солнца, и $\mu \equiv G(E+M)$ рассматривается как известная величина, причем E и M — массы Земли и Луны. Умножив эти уравнения на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложив, получим

$$\sum_{x,\,y,\,z}\left(\dot{x}\ddot{x}+\mu\frac{x\dot{x}}{r^3}\right)=\sum_{x,\,y,\,z}\frac{\partial R}{\partial x}\dot{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$2T \equiv \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\frac{\mu}{r}-\frac{\mu}{a}+2\int\frac{d'R}{dt}\,dt+K, \tag{1}$$

где $\left(K-\frac{\mu}{a}\right)$ — постоянная интегрирования, а через $d'R/dt$ обозначена производная от R по времени, входящему лишь посредством координат Луны.

Пусть v и θ означают эклиптическую долготу и широту. Тогда

$$x=r\cos v\cos\theta, \quad y=r\sin v\cos\theta, \quad z=r\sin\theta,$$

откуда

$$2T=\dot{r}^2+r^2\dot{v}^2\cos^2\theta+r^2\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

---

[1]) Théorie Analytique du Système du Monde, IV, 1846.

В координатах r, v и θ уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{r}+\frac{\mu}{r^2}=r\dot{v}^2\cos^2\theta+r\dot{\theta}^2+\frac{\partial R}{\partial r}\equiv\frac{1}{r}\{2T-\dot{r}^2\}+\frac{\partial R}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{v}\cos^2\theta)=\frac{\partial R}{\partial v}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=\frac{\partial R}{\partial\theta}-r^2\dot{v}^2\sin\theta\cos\theta, \tag{5}$$

так как $U\equiv(\mu/r)+R$.

При помощи формул (1) и (2) мы запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=\frac{\mu}{r}-\frac{\mu}{a}+r\frac{\partial R}{\partial r}+2\int\frac{d'R}{dt}dt+K. \tag{6}$$

Пусть

$$s=\operatorname{tg}\theta. \tag{7}$$

Тогда после интегрирования уравнение (4) примет вид

$$\dot{v}=\frac{h}{r^2}(1+s^2)+\frac{1+s^2}{r^2}\int\frac{\partial R}{\partial v}dt, \tag{8}$$

где h—постоянная интегрирования. Правую часть равенства (8) можно разложить в периодический ряд, постоянную часть которого обозначим через n. Тогда

$$v=nt+\varepsilon+\text{п. ч.}, \tag{9}$$

где ε — постоянная интегрирования.

Преобразуем теперь уравнение (5). Так как $z=r\sin\theta$, то будем иметь

$$\dot{z}=\dot{r}\sin\theta+r^2\dot{\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right),$$

$$\ddot{z}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}).$$

Поэтому из уравнений (3) и (5) найдем, что

$$\ddot{z}=-\frac{\mu}{r^2}\sin\theta+\frac{\partial R}{\partial r}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial R}{\partial\theta}.$$

Но $\partial R/\partial\theta=(\partial R/\partial s)\sec^2\theta$; следовательно, используя формулу (7), получаем

$$\ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s}. \tag{10}$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right)+\frac{\mu}{r^3}\cdot\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s}. \tag{11}$$

§ 17.02. Постоянные интегрирования

Решение выведенных нами в предыдущем параграфе трех уравнений движения — уравнений (6), (4) и (10) или (11), — каждое из которых второго порядка, должно содержать 6 постоянных интегрирования. При выводе уравнений (8) и (9) из уравнения (4) мы ввели две постоянные интегрирования: h и ε. Оставшиеся два уравнения дадут еще четыре постоянные: две из них мы обозначим через e и $\gamma \equiv \operatorname{tg} i$, а две другие — через $\tilde{\omega}$ и Ω. Но, кроме этого, в уравнении (1) § 17.01 были введены постоянные K и a. Обращаясь, далее, к уравнениям (8) и (9) § 17.01, легко замечаем, что постоянная n в последнем из них является функцией h. Определим теперь a согласно формуле

$$\mu = n^2 a^3. \tag{1}$$

Следовательно, a есть функция h. Теперь мы имеем семь постоянных h, e, i, K, ε, Ω, $\tilde{\omega}$. Следовательно, должно существовать одно соотношение, связывающее некоторые из этих семи постоянных. Это соотношение может быть получено при помощи уравнения (3) § 17.01, которое, если ввести в него s и $\dot{s} = \dot{\theta}(1 + s^2)$, мы запишем следующим образом:

$$\frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\mu}{r^3} - \frac{\dot{v}^2}{1+s^2} - \frac{\dot{s}^2}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{2}$$

Если решение уравнений, определяющих r, v и s, выраженные через семь постоянных, подставить в уравнение (2), то оно даст требуемое соотношение.

Очевидно, что независимую постоянную h можно заменить постоянной a или, если потребуется, постоянной n.

Соотношение между n и h в случае эллиптической орбиты может быть выведено весьма просто. Из уравнения (8) § 17.01 мы имеем

$$r^2 \dot{v} \cos^2 \theta = h_0,$$

где через h_0 обозначена постоянная интегрирования в случае эллиптической орбиты. Пусть r_1 означает проекцию r на плоскость эклиптики. Тогда $r_1 = r \cos \theta$ и $r_1^2 \dot{v} = h_0$. Но $r_1^2 \dot{v}$ есть проекция $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$ на плоскость эклиптики. Поэтому

$$h_0 = \sqrt{\mu a (1-e^2)} \cos i = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\gamma^2}}. \tag{3}$$

Постоянную интегрирования h, входящую в уравнение (8) § 17.01, удобно записать в виде

$$h = h_0(1 + \delta h). \tag{4}$$

Тогда мы сможем рассматривать δh как независимую постоянную интегрирования вместо h, причем h_0 будет выражаться формулой (3). Кроме того, постоянную K, входящую в уравнение (6) § 17.01, мы заменим выражением $a^2n^2\delta b$.

§ 17.03. Сводка уравнений движения

Для удобства мы соберем вместе основные уравнения. Если μ заменить на n^2a^3 и K — на $a^2n^2\delta b$, то они запишутся в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2)-\frac{n^2a^3}{r}\cdot n^2a^2=r\frac{\partial R}{\partial r}+2\int\frac{d'R}{dt}dt+a^2n^2\delta b, \tag{1}$$

$$\dot v=\frac{h(1+s^2)}{r^2}+\frac{1+s^2}{r^2}\int\frac{\partial R}{\partial v}dt, \tag{2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}\right)+\frac{n^2a^3}{r^3}\cdot\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s} \tag{3}$$

или

$$\ddot z+n^2a^3\frac{z}{r^3}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s} \tag{4}$$

и, кроме того,

$$\frac{\ddot r}{r}+\frac{n^2a^3}{r^3}-\frac{\dot v^2}{1+s^2}-\frac{\dot s^2}{(1+s^2)^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{5}$$

В уравнении (2) постоянная интегрирования h имеет вид

$$h=h_0(1+\delta h), \tag{6}$$

где h_0 — постоянная, соответствующая эллиптическому движению. Она выражается формулой

$$h_0=\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1+\gamma^2}}. \tag{7}$$

Уравнение (1) удобно называть *уравнением для радиуса-вектора*, (2) — *уравнением для долготы*, а (3) или (4) — *уравнениями для широты*.

§ 17.04. Движение перигея и узла

Если рассматривать невозмущенную орбиту Луны, то долгота перигея $\tilde\omega$ и долгота узла Ω будут, конечно, постоянными. Но наблюдения показывают, что в результате солнечных возмущений $\tilde\omega$ быстро возрастает, а Ω быстро уменьшается со временем. Таким образом, рассматривая $\dot{\tilde\omega}$ и $\dot\Omega$ как постоянные, мы можем записать

$\tilde{\omega}$ и Ω в момент t в виде

$$\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0+(1-c)\,nt, \qquad \Omega=\Omega_0+(1-g)\,nt, \tag{1}$$

где c и g — постоянные, которые нужно определить, а $\tilde{\omega}_0$ и Ω_0 — постоянные, равные $\tilde{\omega}$ и Ω при $t=0$.

Функция

$$M=nt+\varepsilon-\tilde{\omega}$$

примет теперь вид

$$M=nt+\varepsilon-\tilde{\omega}_0-(1-c)\,nt=cnt+\varepsilon-\tilde{\omega}_0.$$

Таким образом, M есть средняя аномалия, измеряемая от движущегося перигея.

Аналогично

$$\eta\equiv nt+\varepsilon-\Omega=nt+\varepsilon-\Omega_0-(1-g)\,nt=gnt+\varepsilon-\Omega_0.$$

Из того, что мы сказали ранее, следует, что $1-c$ положительно, а $1-g$ отрицательно. Перигей и узел будут описывать углы, равные 2π, за периоды времени $2\pi/(1-c)\,n$ и $2\pi/(g-1)\,n$. Эти периоды равны 9 и 18 годам соответственно.

Опуская индекс нуль в $\tilde{\omega}_0$ и Ω_0, положим

$$\varphi=cnt+\varepsilon-\tilde{\omega}, \tag{2}$$

$$\eta=gnt+\varepsilon-\Omega. \tag{3}$$

В этих формулах $\tilde{\omega}$ и Ω теперь рассматриваются как постоянные. Как мы увидим, они являются постоянными интегрирования, появляющимися при решении уравнений движения.

В следующих двух параграфах мы определим приближенные значения c и g.

§ 17.05. Среднее движение перигея

В этом параграфе мы получим приближенное решение уравнений § 17.03, пренебрегая малыми величинами s, γ, e_1 и a/a_1. Кроме того, пренебрегая еще величиной e^2 в формуле (7) § 17.03, мы будем иметь $h_0=na^2$ и $h=na^2(1+\delta h)$. Далее, в функции R, определяемой формулой (5) § 7.06, мы отбросим долготные члены и сохраним только основной член, так что получим

$$R=\frac{1}{4}m^2n^2r^2. \tag{1}$$

Здесь $m=n_1/n$ является величиной первого порядка малости.

Положим $r=\sigma+x$, где σ имеет тот же порядок, что и a, а x является периодической функцией. Мы предположим далее, что амплитуда x мала, и поэтому будем пренебрегать величинами x^2, x^3, ...

Уравнение для радиус-вектора, т. е. уравнение (1) § 17.03, теперь примет вид

$$\sigma\ddot{x} - \frac{n^2a^3}{\sigma}\left(1 - \frac{x}{\sigma}\right) + n^2a^2 = m^2n^2(\sigma^2 + 2\sigma x) + n^2a^2\,\delta b,$$

так как, согласно (1),

$$r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int \frac{d'R}{dt}\,dt = m^2n^2r^2.$$

Поскольку x — периодическая функция, то мы имеем

$$\ddot{x} + n^2\left[\left(\frac{a}{\sigma}\right)^3 - 2m^2\right]x = 0 \qquad (2)$$

и

$$a^2 - \frac{a^3}{\sigma} = m^2\sigma^2 + a^2\,\delta b. \qquad (3)$$

Положим теперь $\sigma = a(1 - \delta a)$, где δa является малой величиной, квадратом которой мы будем пренебрегать. Тогда уравнение (2) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + c^2n^2x = 0, \qquad (4)$$

где

$$c^2 = 1 + 3\delta\alpha - 2m^2. \qquad (5)$$

Формула (3) теперь примет вид

$$\delta\alpha + m^2 + \delta b = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (4) запишется следующим образом:

$$x = Aa\cos(cnt + \varepsilon - \tilde{\omega}), \qquad (7)$$

где A и $\tilde{\omega}$ — новые постоянные интегрирования.

Рассмотрим теперь уравнение для долготы — уравнение (2) § 17.03, — в котором R выражается формулой (1). Тогда

$$\dot{v} = \frac{h_0(1 + \delta h)}{\sigma^2}\left(1 - \frac{2x}{\sigma}\right) = n\left(1 + 2\delta\alpha + \delta h - \frac{2x}{a}\right).$$

Согласно формуле (9) § 17.01, решение этого уравнения имеет вид

$$v = nt + \varepsilon + \text{п. ч.}$$

Следовательно, мы должны иметь

$$2\delta\alpha + \delta h = 0 \qquad (8)$$

и

$$v = nt + \varepsilon - 2\frac{A}{c}\sin(cnt + \varepsilon - \tilde{\omega}). \qquad (9)$$

Воспользуемся теперь уравнением (5) § 17.03. Достаточно в него подставить непериодические части r и v, и мы будем иметь

$$\frac{n^2a^3}{\sigma^3} - n^2 \equiv 3n^2\,\delta\alpha = \frac{1}{2}m^2n^2.$$

Поэтому $\delta\alpha = {}^1/_6 m^2$. Из формулы (8) находим: $\delta h = -{}^1/_3 m^2$, а из формулы (6) — $\delta b = -{}^7/_6 m^2$.

Далее, из равенства (5) имеем

$$c^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2,$$

откуда с точностью до малых величин порядка m^2 находим

$$c = 1 - \frac{3}{4}m^2. \tag{10}$$

Обозначая, по аналогии с формулой для радиус-вектора в невозмущенном движении, постоянную интегрирования A через $-e$, приближенные выражения для r и v можем записать в виде

$$r = a\left[1 - \frac{1}{6}m^2 - e\cos(cnt + \varepsilon - \tilde{\omega})\right],$$

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin(cnt + \varepsilon - \tilde{\omega}).$$

При этом мы пренебрегли величиной em^2 в амплитуде периодического члена формулы (9).

Если r и v выразить через φ, определяемое равенством (2) § 17.04, то эти формулы примут вид

$$\begin{aligned} r &= a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 - e\cos\varphi\right), \\ v &= nt + \varepsilon + 2e\sin\varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

§ 17.06. Среднее движение узла

Рассмотрим теперь уравнение (3) § 17.03 для широты. Мы будем пренебрегать величинами s^3, e, e_1 и a/a_1. Из формулы (5) § 7.06 имеем [1])

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{2}m^2n^2r \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial s} = -\frac{3}{2}m^2n^2r^2s.$$

Поэтому

$$\frac{d^2}{dt^2}(rs) + \frac{n^2a^3}{r^3}rs = -m^2n^2rs.$$

[1]) Долготный член в выражении R по-прежнему отбрасывается.— *Прим. ред.*

Так как $e=0$, то $r=\sigma$. Следовательно,

$$\ddot{s}+n^2(1+3\delta a+m^2)s=0$$

и

$$s=\gamma\sin(gnt+\varepsilon-\Omega), \tag{1}$$

где γ и Ω — постоянные интегрирования и

$$g^2=1+3\delta a+m^2=1+\frac{3}{2}m^2,$$

или с точностью до малых порядка m^2

$$g=1+\frac{3}{4}m^2. \tag{2}$$

С точностью до малых первого порядка относительно γ мы из формулы (1) находим, что

$$z=a\gamma\sin(gnt+\varepsilon-\Omega),$$

или

$$z=a\gamma\sin\eta. \tag{3}$$

§ 17.07. Модифицированные переменные

В невозмущенном движении радиус-вектор r и долгота v даются формулами

$$\frac{r}{a}=1+\frac{1}{2}e^2-e\cos M-\frac{1}{2}e^2\cos 2M \tag{1}$$

и

$$v=nt+\varepsilon+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M-\frac{1}{4}\gamma^2\sin 2\eta', \tag{2}$$

где

$$M=nt+\varepsilon-\tilde{\omega},\quad \eta'=nt+\varepsilon-\Omega.$$

В эти формулы, предназначенные здесь лишь для иллюстрации, мы включили только члены второго порядка относительно e и γ [1]).

Обозначим теперь через ρ/a правую часть (1), когда M заменено на φ. Тогда с точностью до членов второго порядка включительно имеем

$$\frac{\rho}{a}=1+\frac{1}{2}e^2-e\cos\varphi-\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi. \tag{3}$$

---

[1]) С точностью до членов третьего порядка выражение для r дается формулой (7) § 7.06, а для v — формулой (11) § 7.06, причем в § 7.06 величина v обозначена через λ. Заметим также, что η в § 7.06 — это то же самое, что и η' в настоящем параграфе, т. е. $nt+\varepsilon-\Omega$.

Аналогично обозначим через w правую часть (2), когда M заменено на φ и η' — на $\eta \equiv gnt + \varepsilon - \Omega$. Тогда с точностью до членов второго порядка включительно будем иметь

$$w = nt + \varepsilon + 2e \sin\varphi + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} \gamma^2 \sin 2\eta. \tag{4}$$

Члены третьего порядка в формулах (3) и (4) легко получаются из формул (7) § 7.06 и (11) § 7.07.

Кроме того, в невозмущенном движении с точностью до членов второго порядка включительно имеем

$$s = \gamma \sin\eta' + e\gamma [\sin(M + \eta'] + \sin(M - \eta')]. \tag{5}$$

Это не что иное, как формула (15) § 7.06, выраженная через η'. Определим σ с помощью равенства

$$\sigma = \gamma \sin\eta + e\gamma [\sin(\varphi + \eta) + \sin(\varphi - \eta)], \tag{6}$$

в котором $\eta = gnt + \varepsilon - \Omega$ и φ заменяет M.

Мы назовем ρ, w и σ *модифицированными переменными*.

Ради симметрии в уравнениях для r_1 и v_1 мы напишем φ_1 вместо M_1; тогда

$$\frac{r_1}{a_1} = 1 + \frac{1}{2} e_1^2 - e_1 \cos\varphi_1 - \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2\varphi_1, \tag{5}$$

$$v_1 = n_1 t + \varepsilon_1 + 2e_1 \sin\varphi_1 + \frac{5}{4} e_1^2 \sin 2\varphi_1. \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1 = n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1$ и, конечно, $\gamma_1 = 0$.

В аргументах членов, содержащих φ и η, учитываются вековые части движения перигея и узла. Следовательно, ρ, w и σ могут рассматриваться как приближения к r, v и s в возмущенном движении. Положим

$$r = \rho + \delta r, \quad v = w + \delta v, \quad s = \sigma + \delta s, \tag{7}$$

где δr, δv и δs — по меньшей мере члены второго порядка. Теперь можно получить уравнения для переменных δr, δv и δs.

Как мы увидим далее, в уравнения движения будет входить функция R', зависящая от модифицированных переменных. Она может быть названа модифицированной возмущающей функцией. Фактически R' — это функция R, когда в ней M заменено на φ и $nt + \varepsilon - \Omega$ — на $\eta \equiv gnt + \varepsilon - \Omega$. Вообще мы напишем

$$R' \equiv R'(\rho, w, \sigma) \equiv R'(\varphi, \eta).$$

Заметим, что, согласно равенствам (18) и (19) § 7.06, R' — также функция от ξ. Следовательно, $R' \equiv R'(\xi, \varphi, \eta)$.

§ 17.08. Метод решения уравнений движения

Сначала мы будем пренебрегать наклонностью орбиты Луны к плоскости эклиптики, т. е. будем считать, что $\gamma = s = z = 0$. Обозначая d/dt через D, запишем интересующие нас уравнения § 17.03 в виде

$$\frac{1}{2} D^2(r^2) - \frac{n^2a^3}{r} + n^2a^2 = Q(r,\ v) + n^2a^2\,\delta b, \tag{1}$$

$$Dv - \frac{h}{r^2} = S(r,\ v), \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} D^2 r + \frac{n^2a^3}{r^3} - \dot{v}^2 = T(r,\ v), \tag{3}$$

где

$$Q = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int \frac{d'R}{dt}\,dt, \quad S = \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial R}{\partial v}\,dt, \quad T = \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}. \tag{4}$$

Здесь $R(r,\ v) = R_2 + R_3$. Из равенств (5) § 7.06 и (6) § 7.06 мы в случае $\gamma = 0$ получим

$$R_2 = m^2n^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(v - v_1)\right], \tag{5}$$

$$R_3 = \frac{m^2n^2}{a}\left(\frac{a}{a_1}\right) r^3 \left(\frac{q_1}{r_1}\right)^4\left[\frac{3}{8}\cos(v - v_1) + \frac{5}{8}\cos 3(v - v_1)\right], \tag{6}$$

причем R_2 — малая величина порядка m^2, а R_3 — малая величина порядка m^4, так как мы предполагаем, что a/a_1 имеет второй порядок малости относительно m^2.

На основании теоремы Эйлера мы можем написать следующие общие формулы:

$$r\frac{\partial R_2}{\partial r} = 2R_2, \quad r\frac{\partial R_3}{\partial r} = 3R_3, \quad r_1\frac{\partial R_2}{\partial r_1} = -3R_2, \quad r_1\frac{\partial R_3}{\partial r_1} = -4R_3. \tag{7}$$

Поэтому

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = 2R_2 + 3R_3, \quad \frac{\partial R}{\partial r_1} = -\frac{1}{r_1}(3R_2 + 4R_3). \tag{8}$$

Формулы (5) и (6) § 7.06 показывают, что в общем случае R есть функция от $v - v_1$. Это справедливо, в частности, для формул (5) и (6) настоящего параграфа. Следовательно,

$$\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{\partial R}{\partial v_1}.$$

Далее, как и в (17) § 7.06, имеем

$$v - v_1 = \xi + 2e\sin M - 2e_1\sin M_1 \ldots .$$

Поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{\partial R}{\partial v_1} = \frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r\, \partial v} = \frac{\partial^2 R}{\partial r\, \partial \xi} \quad \text{и т. д.} \tag{9}$$

Рассмотрим теперь интеграл, который входит в выражение для Q в первой из формул (4). Имеем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d'R}{dt} + \frac{\partial R}{\partial r_1}\dot{r}_1 + \frac{\partial R}{\partial v_1}\dot{v}_1.$$

Поэтому, принимая во внимание формулы (8) и (9), получаем

$$\frac{d'R}{dt} = \frac{d}{dt}(R_2 + R_3) + (3R_2 + 4R_3)\frac{\dot{r}_1}{r_1} + \frac{\partial R}{\partial \xi}\dot{v}_1$$

и

$$Q = 4R_2 + 5R_3 + 2\int (3R_2 + 4R_3)\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + 2\int \frac{\partial R}{\partial \xi}\dot{v}_1\,dt. \tag{10}$$

Аналогично

$$S = \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial R}{\partial \xi}\,dt, \quad T = \frac{1}{r^2}(2R_2 + 3R_3). \tag{11}$$

Для удобства мы запишем формулу (10) в виде

$$Q = 4R_2 + 5R_3 + Q_0, \tag{12}$$

где через Q_0 обозначены два последних члена в этой формуле.

Теперь можно указать метод решения уравнений — это метод последовательных приближений. Мы проиллюстрируем этот метод на примере решения уравнения (1). Положим $r = \rho + \delta r$, $v = w + \delta v$, где ρ — модифицированный радиус-вектор и, как увидим позже, δr — малая величина порядка m^2.

Найдем прежде всего разложение Q. Запишем Q в следующем виде:

$$Q = Q(\rho,\ w) + \delta_1 Q + \delta_2 Q, \tag{13}$$

где

$$\delta_1 Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\delta r + \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\delta v, \tag{14}$$

$$\delta_2 Q = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right)(\delta r)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r\, \partial v}\right)\delta r\, \delta v + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial v^2}\right)(\delta v)^2\right], \tag{15}$$

причем $(\partial Q/\partial r)$ и т. д. означают, что после дифференцирования r и v заменены на ρ и w.

Согласно формуле (10), имеем

$$Q(\rho,\ w) = 4R_2' + 5R_3' + 2\int (3R_2' + 4R_3')\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + 2\int \frac{\partial R'}{\partial \xi}\dot{v}_1\,dt, \tag{16}$$

где R_2', R_3' выражаются формулами (18) и (19) § 7.06, если в них положить $\gamma = 0$, $\eta = gnt + \varepsilon - \Omega$ и заменить M на φ. Таким обравом, $Q' \equiv Q(\rho, w)$ может быть найдено с любой требуемой степенью точности.

Рассмотрим теперь величину $(\partial Q/\partial r)$, входящую в равенство (14). Из формулы (10) при помощи равенств (7) получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{r}(8R_2 + 15R_3) + 2\int \frac{1}{r}(6R_2 + 12R_3)\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + \\ + 2\int \frac{1}{r}(2R_2 + 3R_3)\dot{v}_1\,dt. \tag{17}$$

Поэтому $(\partial Q/\partial r)$ получается из равенства (17) путем замены R_2 и R_3 на R_2', R_3'. Аналогично

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right) \equiv \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right) = 4\,\frac{\partial R_2'}{\partial \xi} + 5\,\frac{\partial R_3'}{\partial \xi} + \\ + 2\int\left(3\,\frac{\partial R_2'}{\partial \xi} + 4\,\frac{\partial R_3'}{\partial \xi}\right)\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + 2\int \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2}\,dt. \tag{18}$$

Таким образом, коэффициенты при δr и δv в формуле (14) могут быть найдены с любой требуемой степенью точности. Тем же самым путем мы получим разложение функции $\delta_2 Q$, определяемой равенством (15). Например, из равенства (17) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r\,\partial v}\right) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \xi}(8R_2' + 15R_3') + \\ + 2\int \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \xi}(6R_2' + 12R_3')\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + 2\int \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \xi}(2R_2' + 3R_3')\dot{v}_1\,dt. \tag{19}$$

Уравнение (1) тогда превратится в дифференциальное уравнение относительно δr и будет иметь вид

$$\frac{1}{2}D^2[(\rho + \delta r)^2] - \frac{n^2a^3}{\rho + \delta r} + n^2a^2 = Q' + \delta_1 Q + \delta_2 Q + \ldots + n^2a^2\,\delta b. \tag{20}$$

Первое приближение для δr получается, если пренебречь величиной $(\delta r)^2$. Более высокие приближения находятся обычными методами. Уравнения (2) и (3) преобразуются аналогичным образом.

§ 17.09. Уравнения, которым удовлетворяют ρ и w ($\gamma = 0$)

Уравнение (20) § 17.08 и два других, получающихся из уравнений (2) и (3) того же параграфа, удобно преобразовать, если воспользоваться уравнениями, которым удовлетворяют ρ и w при $\gamma = 0$. Ранее мы имели

$$\frac{\rho}{a} = 1 - e\cos\varphi + \frac{1}{2}e^2(1 - \cos 2\varphi)\ \ldots,$$

$$w = nt + \varepsilon + 2e\sin\varphi + \frac{5}{4}e^2\sin 2\varphi\ \ldots,$$

где $\varphi = cnt + \varepsilon - \tilde{\omega}$. Пусть

$$w_0 = cnt + \varepsilon + 2e \sin\varphi,$$

так что

$$w = w_0 + n(1 - c)\,t.$$

Пусть, далее, $\tau = ct$. Тогда

$$\frac{\rho}{a} = 1 - e\cos(n\tau + \varepsilon - \tilde{\omega}) + \ldots,$$

$$w_0 = n\tau + \varepsilon + 2e\sin(n\tau + \varepsilon - \tilde{\omega}) \ldots .$$

Очевидно, что ρ и w_0 соответствуют невозмущенному движению в плоскости эклиптики, причем время обозначено через τ. Положим в уравнениях (1) — (3) § 17.08 $R = 0$. Тогда ρ и w_0 будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}(\rho^2) - \frac{n^2a^3}{\rho} + n^2a^2 = 0,$$

$$\frac{dw_0}{d\tau} = \frac{h_0}{\rho^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \frac{n^2a^3}{\rho^3} - \left(\frac{dw_0}{d\tau}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\rho^2) = c^2n^2a^2\left(\frac{a}{\rho} - 1\right),$$

$$\frac{dw_0}{dt} = \frac{ch_0}{\rho^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} + c^2n^2\frac{a^3}{\rho^3}\;\frac{c^2h_0^2}{\rho^4} = 0.$$

В этих уравнениях $h_0 = na^2\sqrt{1 - e^2}$.

Так как каждое из выражений $c^2 - 1$ и $c - 1$ является величиной порядка m^2, то предыдущие уравнения мы запишем следующим образом:

$$\frac{1}{2}D^2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - n^2\frac{a}{\rho} + n^2 = n^2(c^2 - 1)\left(\frac{a}{\rho} - 1\right), \tag{1}$$

$$Dw - \frac{h_0}{\rho^2} = (c - 1)\left(\frac{h_0}{\rho^2} - n\right), \tag{2}$$

$$D^2\rho + n^2\frac{a^3}{\rho^2} - \frac{h_0^2}{\rho^3} = (c^2 - 1)\left(\frac{h_0^2}{\rho^3} - n^2\frac{a^3}{\rho^2}\right). \tag{3}$$

Поскольку $(a/\rho) - 1$ есть малая величина порядка e, то правая часть каждого из этих уравнений имеет порядок m^2e.

§ 17.10. Уравнение для радиуса-вектора

Мы будем исходить из уравнения (1) § 17.08. Вместо того чтобы производить в нем разложения по степеням δr, где $\delta r = r - \rho$, для дальнейшего более удобно разлагать по степеням величины δu, определяемой при помощи равенства

$$\frac{a}{r}=\frac{a}{\rho}+\delta u, \tag{1}$$

из которого легко найти, что

$$\delta r=-\frac{\rho^2}{a}\delta u+\frac{\rho^3}{a^2}(\delta u)^2-\frac{\rho^4}{a^3}(\delta u)^3 \dots .$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^2-\left(\frac{\rho}{a}\right)^3\delta u+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^4(\delta u)^2+\dots .$$

Пусть P определяется формулой

$$P=-\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^3-1\right]\delta u+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^4(\delta u)^2+\dots . \tag{2}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}=\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{a^2}-\delta u+P,$$

и уравнение (1) § 17.08 принимает вид

$$\frac{1}{2}D^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^2-n^2\frac{a}{\rho}+n^2-D^2(\delta u)-n^2\delta u+P''=\frac{Q}{a^2}+n^2\,\delta b,$$

где $P''=(d^2/dt^2)P$. Воспользовавшись теперь уравнением (1) § 17.09, получим

$$D^2(\delta u)+n^2\delta u=n^2(c^2-1)\left(\frac{a}{\rho}-1\right)-\frac{Q}{a^2}+P''-n^2\,\delta b. \tag{3}$$

В этом уравнении Q и δb являются малыми величинами порядка m^2, а первый член правой части имеет порядок m^2e. Согласно равенству (2), коэффициент при δu имеет порядок e. При получении первого приближения (с точностью до малых порядка m^3, так как предполагается, что порядок e совпадает с порядком m) мы должны рассмотреть только первый член выражения для P в формуле (2).

При решении уравнения (3) методом Понтекулана предполагается, что δu можно представить тригонометрическим рядом, аргументы членов которого зависят от ξ, φ и φ_1, а амплитудами являются неопределенные коэффициенты. Если такое общее выражение для δu подставить в уравнения (3), то оно превратится в тождество, в результате чего мы получим последовательность уравнений, содержащих эти неопределенные коэффициенты и величины c и δb. Аналогичный метод применим и к решению уравнений (2) и (3) § 17.08. Таким образом, получается достаточное число уравнений для выражения неопределенных коэффициентов и постоянных c и δb через m, e и e_1. Прежде чем рассматривать этот метод в деталях, мы сделаем в следующем параграфе несколько замечаний о некоторых членах, которые появляются в правой части уравнения (3) за счет возмущающей функции.

§ 17.11. О некоторых членах возмущающей функции

Типичный член правой части уравнения (3) § 17.10 может быть записан в виде

$$n^2 k_l \cos(\alpha\xi + \beta\varphi + \gamma\varphi_1) \equiv n^2 k_l \cos(pnt + q), \tag{1}$$

где α, β и γ — положительные или отрицательные целые числа, а k_l — малые порядка m^l по сравнению с e, e_1 m, a/a_1. Далее,

$$\begin{aligned} \xi &= (n - n_1)t + \ldots &&= n(1-m)t + \ldots, \\ \varphi &= cnt + \ldots &&= n\left(1 - \frac{3}{4}m^2 + \ldots\right)t + \ldots, \\ \varphi_1 &= n_1 t + \ldots &&= mnt + \ldots . \end{aligned}$$

Поэтому p в формуле (1) выразится формулой

$$p = \alpha + \beta - m(\alpha - \gamma) - \frac{3}{4}\beta m^2. \tag{2}$$

Следовательно, уравнение (3) § 17.10 для δu можно записать в виде

$$D^2(\delta u) + n^2 \delta u = n^2 A + n^2 \sum k_l \cos(pnt + q). \tag{3}$$

При выводе этого уравнения мы для простоты отбросили P. Следующий шаг состоит в получении частного решения уравнения (3). Имеем

$$\delta u = A + \sum \frac{k_l}{1 - p^2} \cos(pnt + q).$$

Случай 1. Если p имеет вид

$$p = 1 + \alpha_1 m + \beta_1 m^2 + \ldots, \tag{4}$$

где $\alpha_1 \neq 0$, то $k_l/(1 - p^2) \approx -k_l/2\alpha_1 m$. Поэтому часть решения, соответствующая члену (1), в этом случае имеет порядок $l - 1$. Следовательно, чтобы получить δu с точностью до малых порядка l, мы должны включить в правую часть уравнения (3) члены порядка $l + 1$.

Из формулы (2) следует, что p будет иметь вид (4), если $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \gamma \neq 0$. Аргументами таких членов являются, в частности, ξ, $2\xi - \varphi$, $3\xi - 2\varphi$, и вообще

$$\xi + (1 + \gamma_1)\varphi_1, \qquad 2\xi - \varphi + (2 + \gamma_1)\varphi_1, \qquad 3\xi - 2\varphi + (3 + \gamma_1)\varphi_1, \ \ldots,$$

где $\gamma_1 \neq 0$.

Аналогичные члены будут и в уравнении для долготы с той лишь разницей, что там φ заменено на η ($\equiv gnt + \varepsilon - \Omega$).

Случай 2. Если p имеет вид

$$p = 1 + \beta_1 m^2 + \ldots,$$

то

$$\frac{k_l}{1-p^2} \approx -\frac{k_l}{2\beta_1 m^2}.$$

Таким образом, в этом случае члену (1) будет соответствовать в решении член, имеющий порядок $l-2$. Следовательно, если нам нужно получить δu до порядка l включительно, то мы должны в правую часть включить некоторые члены порядка $l+2$. В этом случае мы из формулы (2) должны иметь

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha-\gamma=0, \quad \beta \neq 0.$$

Аргументы таких членов имеют вид $(1-\beta)\xi+\beta\varphi+(1-\beta)\varphi_1$. Типичными аргументами в данном случае являются φ, $2\xi-\varphi+2\varphi_1$, $3\xi-2\varphi+3\varphi_1$, ... Аналогичные аргументы будут и в уравнении для долготы, причем роль φ будет играть η.

§ 17.12. Вычисление $Q(\rho, w)$

В этом параграфе мы опустим в R параллактический член, т. е. R_3 и просто положим $R=R_2$. Согласно равенству (16) § 17.08,

$$Q' \equiv Q(\rho, w) = 4R_2' + 6\int R_2' \frac{\dot{r}_1}{r_1}\,dt + 2\int \frac{\partial R_2'}{\partial \xi}\,\dot{v}_1\,dt. \tag{1}$$

1) Так как

$$\frac{r_1}{a_1} = 1 - e_1\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}e_1^2(1-\cos 2\varphi_1),$$

$$\frac{a_1}{r_1} = 1 + e_1\cos\varphi_1 + e_1^2\cos 2\varphi_1$$

и

$$\dot{\varphi}_1 = n_1 = mn,$$

то с точностью до малых порядка e_1^2 находим

$$\frac{\dot{r}_1}{r_1} = mne_1\left(\sin\varphi_1 + \frac{3}{2}e_1\sin 2\varphi_1\right).$$

С достаточной для наших целей точностью далее получаем

$$R_2' = \frac{1}{4}m^2n^2a^2(1+3\cos 2\xi + 3e_1\cos\varphi_1), \tag{2}$$

поэтому

$$R_2'\frac{\dot{r}_1}{r_1} = \frac{1}{4}m^3n^3a^2e_1\Big[\sin\varphi_1 + \frac{3}{2}\sin(2\xi+\varphi_1) - \\ - \frac{3}{2}\sin(2\xi-\varphi_1) + 3e_1\sin 2\varphi_1\Big].$$

Так как $\xi = n(1-m)t + \ldots$, $\varphi_1 = mnt + \ldots$, то второй член в правой части формулы (1) с точностью до малых порядка $m^2e_1^2$, т. е. m^4, равен

$$-\frac{3}{2}m^2n^2a^2\left\{e_1\cos\varphi_1 + \frac{3}{4}me_1\left[\cos(2\xi+\varphi_1) - \cos(2\xi-\varphi_1)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}e_1^2\cos 2\varphi_1\right\}. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что интегрирование члена с $\sin\varphi_1$ уменьшит его порядок на единицу. Поэтому этот член нужно включить в формулу (2).

2) Рассмотрим теперь второй интеграл в формуле (1). Так как

$$v_1 = n_1t + \varepsilon_1 + 2e_1\sin\varphi_1 + \frac{5}{4}e_1^2\sin 2\varphi_1,$$

то

$$\dot{v}_1 = mn\left(1 + 2e_1\cos\varphi_1 + \frac{5}{2}e_1^2\cos 2\varphi_1\right). \qquad (4)$$

Поскольку $\dot{r}_1/r_1$ на один порядок выше, чем $\dot{v}_1$, мы рассмотрим члены в R_2', порядок которых на единицу выше, чем в формуле (2).

Интересующие нас члены в R_2', которые зависят от ξ, выражаются формулой

$$R_2' = m^2n^2a^2\left[\frac{3}{4}\cos 2\xi - \frac{9}{4}e\cos(2\xi-\varphi) + \frac{3}{4}e\cos(2\xi+\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{21}{8}e_1\cos(2\xi-\varphi_1) - \frac{3}{8}e_1\cos(2\xi+\varphi_1) + \frac{15}{2}e^2\cos(2\xi-2\varphi)\right], \qquad (5)$$

откуда сразу же находится $\partial R_2'/\partial\xi$. После умножения выражения для $\partial R_2'/\partial\xi$ на выражение (4) и интегрирования найдем

$$2\int\frac{\partial R_2'}{\partial\xi}\dot{v}_1\,dt = 2m^3n^2a^2\left[\frac{3\cos 2\xi}{4(1-m)} - \frac{9}{2}e\frac{\cos(2\xi-\varphi)}{2-2m-c} + \right.$$
$$+ \frac{3}{2}e\frac{\cos(2\xi+\varphi)}{2-2m+c} + \frac{27}{4}e_1\frac{\cos(2\xi-\varphi_1)}{2-2m-m} + \frac{3}{4}e_1\frac{\cos(2\xi+\varphi_1)}{2-2m+m} +$$
$$\left. + \frac{15}{8}e^2\frac{\cos(2\xi-2\varphi)}{1-m-c}\right]. \qquad (6)$$

Так как $c \approx 1 - {}^3/_4m^2$, то знаменатель последнего члена является малой величиной порядка m. Именно поэтому мы и включили член, содержащий множитель e^2. Правую часть предыдущей формулы можно записать с точностью до малых величин порядка m^4 включительно. Тогда коэффициент первого члена в скобках, например, будет равен ${}^3/_4(1+m)$; коэффициент второго члена будет равен $-{}^9/_2e$ и т. д.

Записывая, как и раньше, $Q' = 4R_2' + Q_0$, где Q_0 — сумма двух последних членов в формуле (1), найдем

$$Q_0 = m^2n^2a^2\Big[\frac{3}{2}m(1+m)\cos 2\xi - 9me\cos(2\xi - \varphi) + \\ + me\cos(2\xi+\varphi) - \frac{15}{4}e^2\cos(2\xi - 2\varphi) - \frac{3}{2}e_1\cos\varphi_1 + \\ + \frac{63}{8}me_1\cos(2\xi - \varphi_1) - \frac{3}{8}me_1\cos(2\xi + \varphi_1). \qquad (7)$$

Если сложить $4R_2'$ с последним выражением, то мы получим выражение для Q'.

§ 17.13. Решение уравнения для радиуса-вектора

Для того чтобы пояснить метод Понтекулана, мы сохраним в Q и P'' лишь те члены, которые имеют следующие аргументы: φ, 2ξ, $2\xi - \varphi$ и $2\xi - 2\varphi$. Поэтому мы предположим, что δu (в обозначениях Понтекулана) выражается формулой

$$\delta u = a_0 + a_1 e\cos\varphi + a_2\cos 2\xi + a_3 e\cos(2\xi - \varphi) + a_4 e^2\cos(2\xi - 2\varphi), \qquad (1)$$

в которой a — величины, подлежащие определению[1]).

1) *Вычисление* Q'. Сохраняя лишь те члены в R_2' и Q_0, которые выражаются соответственно формулами (18) § 7.06 и (7) § 17.12 и имеют указанные выше аргументы, найдем

$$\frac{Q'}{a^2} = m^2n^2\Big[1 - 2e\cos\varphi + 3\left(1 + \frac{1}{2}m\right)\cos 2\xi - \\ - 9e(1+m)\cos(2\xi - \varphi) + \frac{15}{4}e^2\cos(2\xi - 2\varphi)\Big].$$

2) *Вычисление* P''. Согласно формуле (2) § 17.10, с рассматриваемой точностью имеем

$$P = -\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 - 1\right]\delta u = (3e\cos\varphi - 3e^2)\,\delta u.$$

Подставим сюда выражение (1) для δu и после упрощений сохраним только члены с выбранными аргументами. Тогда найдем

$$P'' = -n^2\Big[3a_0c^2e\cos\varphi + 4(1-m)^2\left(\frac{3}{2}a_3 - 3a_2\right)e^2\cos 2\xi + \\ + \left(\frac{3}{2}a_2 e - 3a_3 e^3\right)(2 - 2m - c)^2\cos(2\xi - \varphi) + \\ + 6(1 - m - c)^2 a_3 e^2\cos(2\xi - 2\varphi)\Big].$$

---

[1]) Понтекулан использовал равенство (1) с учетом 76 членов, зависящих от одной или более постоянных e, e_1 и a/a_1.

3) *Вычисление* $n^2(c^2-1)\left(\frac{a}{\rho}-1\right)$. Мы сохраним только член с аргументом φ. Тогда это выражение будет иметь вид

$$n^2(c^2-1)\,e\cos\varphi.$$

4) $D^2(\delta u)$. Из формулы (1) имеем

$$D^2(\delta u)=-n^2[a_1c^2e\cos\varphi+4(1-m)^2a_2\cos 2\xi+$$
$$+(2-2m-c)^2a_3e\cos(2\xi-\varphi)+4(1-m-c)^2a_4e^2\cos(2\xi-2\varphi)].$$

Подставим теперь эти выражения в уравнение (3) § 17.10 для радиуса-вектора. Приравнивая затем коэффициенты различных членов с одинаковыми аргументами (включая и непериодические члены), мы получаем 5 уравнений, содержащих c, δb и 5 величин a $(a_0, \ldots, a_4)$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_0+m^2+\delta b=0,\\
&a_1(1-c^2)-2m^2+3a_0c^2-(c^2-1)=0,\\
&a_2[1-4(1-m)^2]+3m^2\left(1+\frac{m}{2}\right)+4(1-m)^2\left(\frac{3}{2}a_3-3a_2\right)e^2=0,\\
&a_3[1-(2-2m-c)^2]-9m^2(1+m)+\frac{3}{2}(2-2m-c)^2(a_2-2a_3)e^2=0,\\
&a_4[1-4(1-m-c)^2]+\frac{15}{4}m^2+6(1-m-c)^2a_3=0.
\end{aligned}\qquad(2)$$

Для вычисления семи неизвестных — c, δb и пяти a — нам потребуется еще два уравнения. Как будет показано в следующем параграфе, эти уравнения получаются из уравнения для долготы, которое, как мы видели раньше, вводит еще одну неизвестную δh. Необходимое дополнительное (восьмое) уравнение получается из уравнения (3) § 17.08. Следовательно, восемь неизвестных — δc, δb, пять a и δh — могут быть вычислены.

§ 17.13а. Уравнение для долготы

На основании формулы (2) § 17.08 это уравнение запишется так:

$$Dv-\frac{h_0(1+\delta h)}{r^2}=S(r,\ v),\qquad(1)$$

где h заменено на $h_0(1+\delta h)$. Функция S, согласно (4) § 17.08, выражается формулой

$$S=\frac{1}{r^2}\int\frac{\partial R}{\partial v}\,dt=\frac{1}{r^2}\int\frac{\partial R}{\partial\xi}\,dt.\qquad(2)$$

Далее, $v = w + \delta v$ и, согласно формуле (1) § 17.10, $a/r = (a/\rho) + \delta u$. Кроме того, w удовлетворяет уравнению (2) § 17.09, именно:

$$Dw - \frac{h_0}{\rho^2} = (c-1)\left(\frac{h_0}{\rho^2} - n\right). \tag{3}$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (1), мы получаем для δv следующее уравнение:

$$D(\delta v) = \frac{h_0(1+\delta h)}{a^2}\left[\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + 2\frac{a}{\rho}\delta u + (\delta u)^2\right] + \\ + \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial R}{\partial \xi}\,dt - \frac{h_0}{\rho^2} - n(c-1)\left(\frac{a^2}{\rho^2} - 1\right). \tag{4}$$

Это уравнение является совершенно точным. Как и раньше, мы отбросим в R параллактические члены, т. е. положим $R = R_2$. Кроме того, в первом приближении будем пренебрегать в уравнении (4) членом с $(\delta u)^2$. Далее, как показано в § 17.05, δu и δh являются малыми порядка m^2; $h_0 = na^2\sqrt{1-e^2}$, и если пренебречь $(\delta u)^2$, то

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + 2\frac{a}{\rho}\delta u\right]. \tag{5}$$

С точностью до малых порядка m^3 уравнение (4) будет иметь вид

$$\frac{1}{n}D(\delta v) = \left(\frac{a}{\rho}\right)^2\delta h + 2\frac{a}{\rho}\delta u + \\ + \frac{1}{na^2}\left[\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{2a}{\rho}\delta u\right]\int \frac{\partial R_2'}{\partial \xi}\,dt - 2e(c-1)\cos\varphi, \tag{6}$$

причем e и m рассматриваются как величины одного и того же порядка. Как и в случае уравнения для радиуса-вектора, мы ограничимся только такими членами, аргументами которых являются 2ξ, $2\xi - \varphi$ и $2\xi - 2\varphi$. Тогда с точностью до малых порядка m^3 найдем, что

$$\int \frac{\partial R_2'}{\partial \xi}\,dt = m^2na^2\left[\frac{3}{4}(1+m)\cos 2\xi - \frac{9}{2}e\cos(2\xi-\varphi) + \\ + \frac{15}{8}e^2\frac{\cos(2\xi-2\varphi)}{1-m-c}\right]. \tag{7}$$

С рассматриваемой точностью коэффициент в последнем члене внутри квадратных скобок равен $-15e^2/m$. Именно поэтому мы и оставили этот член. Так как выражение в правой части равенства (7) есть малая величина порядка m^2, то в формуле (5) достаточно отбросить δu и просто записать

$$\frac{a^2}{\rho^2} = 1 + 2e\cos\varphi.$$

Мы тогда найдем, что

$$\frac{1}{nr^2}\int \frac{\partial R_2'}{\partial \xi}\,dt = m^2\left[\frac{3}{4}(1+m)\cos 2\xi - \frac{15}{4}e\cos(2\xi-\varphi) - \right.$$
$$\left. - 15\frac{e^2}{m}\cos(2\xi-2\varphi)\right]. \tag{8}$$

Мы также имеем

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 \delta h = \delta h + 2e\,\delta h\cos\varphi.$$

Подставив теперь выражение для δu из формулы (1) § 17.13 в формулу (6), мы получим

$$\frac{1}{n}D(\delta v) = A_0 + A_1 e\cos\varphi + A_2\cos 2\xi +$$
$$+ A_3 e\cos(2\xi-\varphi) + A_4 e^2\cos(2\xi-2\varphi),$$

где

$$\begin{aligned}
A_0 &= \delta h + 2a_0 + a_1 e^2,\\
A_1 &= 2\delta h + 2a_1 + a_1 e^2 + 2a_0 - 2(c-1),\\
A_2 &= 2a_2 + a_3 e^2 + \frac{3}{4}m^2(1+m),\\
A_3 &= 2a_3 + a_2 - \frac{15}{4}m^2,\\
A_4 &= a_2 + a_3 + 2a_4 - \frac{15}{8}m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому

$$\delta v = A_0 nt + B_0 + \frac{A_1}{c}e\sin\varphi + \frac{A_2\sin 2\xi}{2(1-m)} +$$
$$+ A_3\frac{e\sin(2\xi-\varphi)}{2-2m-c} + \frac{1}{4}A_4\frac{e^2\sin(2\xi-2\varphi)}{1-m-c}, \tag{10}$$

и, следовательно, так как

$$w = nt + \varepsilon + 2e\left(1-\frac{e^2}{8}\right)\sin\varphi,$$

то

$$v \equiv w + \delta v = n(1+A_0)t + \varepsilon + B_0 + 2e\left(1-\frac{e^2}{8}+\frac{A_1}{2c}\right)\sin\varphi + \delta v', \tag{11}$$

где через $\delta v'$ обозначены члены в формуле (10), аргументы которых равны 2ξ, $2\xi-\varphi$ и $2\xi-2\varphi$.

Величина B_0 не обязательно является постоянной интегрирования, так как произвольной постоянной можно считать уже введенную величину ε.

Мы примем, что непериодическая часть v в формуле (11) равна $nt+\varepsilon$ и что коэффициент при $\sin\varphi$ равен коэффициенту при $\sin M$

в невозмущенном движении, а именно $2e\left(1-\frac{1}{8}e^2\right)$. Поэтому $A_0 = A_1 = 0$, т. е.

$$\delta h + 2a_0 + a_1 e^2 = 0, \qquad (12)$$

$$2\delta h + 2a_1 + a_1 e^2 + 2a_0 - 2(c-1) = 0. \qquad (13)$$

Этот метод определения коэффициента при $\sin\varphi$ отличается от метода Понтекулана тем, что последний считает коэффициент A_1 неопределенным, а затем, как и в случае коэффициентов $A_2, A_3, \ldots$, выражает его через m и e. Прием, принятый здесь, имеет преимущество в том случае, когда для вычисления постоянных интегрирования используются наблюдения.

§ 17.14. Уравнение для T

Согласно формуле (3) § 17.08, это уравнение записываем так:

$$\ddot{r} + \frac{n^2a^3}{r^2} - r\dot{v}^2 = rT. \qquad (1)$$

Из формулы (4) § 17.08, пренебрегая, как и ранее, членом R_3, имеем

$$rT = \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{2}{r} R^2.$$

Заметим, что уравнение (1) не является независимым уравнением. Оно переходит в тождество, если в него подставить полученные ранее формулы для r и v. Следовательно, непериодические члены, появляющиеся в уравнении (1), будут давать соотношение по меньшей мере между двумя из восьми неизвестных δv, δh, c и $a_0, \ldots, a_4$. Так как $\ddot{r}$ не содержит постоянных членов, то мы его отбросим и запишем уравнение (1) в виде

$$r\dot{v}^2 = \frac{n^2a^3}{r^2} - \frac{2}{r} R_2. \qquad (2)$$

Найдем прежде всего непериодические члены, входящие в уравнение (2), с точностью до малых третьего порядка включительно.

1) $\dfrac{n^2a^3}{r^2} = \dfrac{n^2a^3}{\rho^2} + 2n^2\dfrac{a^2}{\rho}\delta u =$

$$= n^2a\left[1 + \frac{1}{2}e^2 + \ldots + 2(1 + e\cos\varphi)(a_0 + a_1 e\cos\varphi + \ldots)\right] =$$

$$= n^2a\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + 2a_0 + a_1e^2\right); \qquad (3)$$

2) $\dfrac{2}{r}R_2 = \dfrac{2}{a}(1 + e\cos\varphi)\cdot m^2n^2a^2\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}e\cos\varphi\right) = \dfrac{1}{2}m^2n^2a; \qquad (4)$

3) $\dot{v} = \dot{w} + D(\delta v).$

Согласно уравнению (2) § 17.09,

$$\dot{w} = \frac{h_0}{\rho^2} + (c-1)\left(\frac{h_0}{\rho^2} - n\right),$$

где $h_0 = na^2\sqrt{1-e^2}$. С точностью до членов третьего порядка

$$\dot{v}^2 = \frac{c^2h_0^2}{\rho^4} + \frac{2nch_0(1-c)}{\rho^2} + \frac{2ch_0}{\rho^2} D(\delta v).$$

Поэтому, так как $r = \rho - \rho(\delta u/a^2)$ и $c = 1 +$ члены второго и высших порядков, то

$$r\dot{v}^2 = \frac{n^2c^2a^4(1-e^2)}{\rho^3} + \frac{2n^2a^2(1-c)}{\rho} - \frac{n^2a^3}{\rho^2}\delta u + 2n\frac{a^2}{\rho} D(\delta v). \qquad (5)$$

Постоянная часть первого члена в уравнении (5) равна

$$n^2c^2a(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) \text{ или } n^2c^2a\left(1+\frac{1}{2}e^2\right).$$

Постоянная часть второго члена равна $2n^2a(1-c)$.

Третий член равен

$$-n^2a\left(1+\frac{1}{2}e^2+2e\cos\varphi+\ldots\right)(a_0+a_1e\cos\varphi+\ldots)$$

и его постоянная часть приводится к виду

$$-n^2a\left[a_0\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)+a_1e^2\right].$$

Так как, согласно результатам § 17.13а, $A_0 = A_1 = 0$, то четвертый член не содержит постоянной части.

Вся постоянная часть в $r\dot{v}^2$ поэтому равна

$$n^2a\left[c^2\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)+2(1-e)-a_0\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)-a_1e^2\right]$$

или

$$n^2a\left[(c-1)^2+\frac{1}{2}e^2+1-a_0\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)-a_1e^2\right], \qquad (6)$$

причем член $(c-1)^2$, который является малой величиной порядка m^4, можно отбросить.

Из формул (3) — (5) мы тогда получим

$$3a_0\left(1+\frac{1}{6}e^2\right)+2a_1e^2-\frac{1}{2}m^2=0. \qquad (7)$$

Это последнее, восьмое, уравнение, которое нам требовалось вывести.

§ 17.15. Вычисление восьми постоянных

Мы имеем пять уравнений (2) § 17.13, два уравнения (12) и (13) § 17.13а и уравнение (7) § 17.14. В первой группе из пяти уравнений мы упростим некоторые из коэффициентов, используя тот факт, что $c = 1 +$ малые порядка m^2 и пренебрегая высшими степенями m. Тогда эти восемь уравнений примут вид

$$a_0 + m^2 + \delta b = 0; \tag{1}$$

$$3a_0c^2 + a_1(1 - c^2) - 2m^2 - (c^2 - 1) = 0; \tag{2}$$

$$-3a_2\left(1 - \frac{8}{3}m + \frac{4}{3}m^2\right) + 3m^2\left(1 + \frac{m}{2}\right) + \\ + 4(1 - 2m)\left(\frac{3}{2}a_3 - 3a_2\right)e^2 = 0; \tag{3}$$

$$4m\left(1 - \frac{11}{8}m\right)a_3 - 9m^2(1 + m) + \frac{3}{2}(1 - 4m)(a_2 - 2a_3e^2) = 0; \tag{4}$$

$$a_4(1 - 4m^2) + \frac{15}{4}m^2 + 6m^2a_3 = 0; \tag{5}$$

$$\delta h + 2a_0 + a_1e^2 = 0; \tag{6}$$

$$2\,\delta h + 2a_1 + a_1e^2 + 2a_0 - 2(c - 1) = 0; \tag{7}$$

$$3a_0\left(1 + \frac{1}{6}e^2\right) + 2a_1e^2 - \frac{1}{2}m^2 = 0. \tag{8}$$

Исключив δh из уравнений (6) и (7), получим

$$2a_0 - a_1(2 - e^2) + 2(c - 1) = 0. \tag{9}$$

Эти уравнения решаются методом последовательных приближений. Принимая во внимание то обстоятельство, что $c = 1 +$ члены порядка m^2, мы из уравнения (9) получаем, что a_0 и a_1 являются малыми по крайней мере порядка m^2. Поэтому из уравнения (8) с точностью до третьего порядка включительно находим, что

$$a_0 = \frac{1}{6}m^2.$$

Из уравнения (9), пренебрегая членом a_1e^2, будем иметь

$$a_1 = a_0 + (c - 1). \tag{10}$$

Если в уравнении (2) пренебречь членом $a_1(1 - c^2)$, то это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}m^2(c^2 - 1) - \frac{3}{2}m^2 - (c^2 - 1) = 0,$$

откуда с точностью до малых порядка m^2 имеем

$$c^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2$$

или

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2, \tag{11}$$

а это совпадает с ранее полученным результатом. Из уравнения (10) с точностью до малых порядка m^3 получаем

$$a_1 = -\frac{7}{12} m^2,$$

а из уравнения (6) —

$$\delta h = -\frac{1}{3} m^2.$$

Легко находятся также первые приближения для коэффициентов a_2, a_3, a_4.

Полная сводка формул первого приближения такова:

$$a_0 = \frac{1}{6} m^2, \quad a_1 = -\frac{7}{12} m^2, \quad a_2 = m^2, \quad a_3 = \frac{15}{8} m^2,$$

$$a_4 = -\frac{15}{4} m^2, \quad c = 1 - \frac{3}{4} m^2, \quad \delta h = -\frac{1}{3} m^2, \quad \delta b = -\frac{7}{6} m^2.$$

Второе приближение для a_2 легко находится из уравнения (3) при помощи обычного приема. В результате получим

$$a_2 = m^2 + \frac{19}{6} m^3 + \frac{15}{4} m e^2.$$

Аналогично

$$a_3 = \frac{15}{8} m + \frac{329}{64} m^2.$$

Все остальные величины также могут быть определены с требуемой точностью.

После этого могут быть вычислены величины A_2, A_3, A_4, которые входят в формулы (9) § 17.13а. Затем легко вычисляются коэффициенты тех членов в выражении (10) § 17.09 для возмущений δv в долготе, аргументы которых равны 2ξ, $2\xi - \varphi$ и $2\xi - 2\varphi$.

§ 17.16. Формулы для радиуса-вектора и долготы

Мы имеем

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{\rho} + \delta u, \quad v = w + \delta v,$$

где a/ρ и w выражаются по формулам эллиптического движения, в которых средняя аномалия M заменена величиной φ. Эти выражения даются до малых третьего порядка, за исключением членов с аргументами $2\xi - 2\varphi$, $k\varphi$ ($k = 1, 2, 3, 4$), которые по указанным выше причинам даны с точностью до малых четвертого порядка. Мы также прибавим члены с аргументом $2\xi+\varphi$, которые ради простоты были опущены. В результате будем иметь

$$\frac{a}{r}=1+\frac{1}{6}m^2+e\left(1-\frac{1}{8}e^2-\frac{7}{12}m^2\right)\cos\varphi+$$
$$+\left(m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{15}{4}me^2\right)\cos 2\xi+em\left(\frac{15}{8}+\frac{329}{64}m\right)\cos(2\xi-\varphi)+$$
$$+\frac{33}{16}em^2\cos(2\xi+\varphi)-\frac{15}{4}e^2m^2\cos(2\xi-2\varphi)+$$
$$+e^2\left(1-\frac{1}{3}e^2\right)\cos 2\varphi+\frac{9}{8}e^3\cos 3\varphi+\frac{4}{3}e^4\cos 4\varphi; \tag{1}$$

$$v=nt+\varepsilon+2e\left(1-\frac{1}{8}e^2\right)\sin\varphi+\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{59}{12}m^3+\right.$$
$$\left.+\frac{75}{16}e^2m\right)\sin 2\xi+em\left(\frac{15}{4}+\frac{263}{16}m\right)\sin(2\xi-\varphi)+$$
$$+\frac{17}{8}em^2\sin(2\xi+\varphi)+\frac{33}{32}e^2m\sin(2\xi-2\varphi)+$$
$$+\frac{5}{4}\left(1-\frac{11}{30}e^2\right)e^2\sin 2\varphi+\frac{13}{12}e^3\sin 3\varphi+\frac{103}{96}e^4\sin 4\varphi. \tag{2}$$

§ 17.17. Члены, зависящие от e_1

1) Согласно формуле (3) § 17.10, уравнение для δu имеет вид

$$D^2(\delta u)+n^2\delta u+\frac{Q}{a^2}-P''+n^2\delta b-n^2(c^2-1)\left(\frac{a}{\rho}-1\right)=0, \tag{1}$$

где с точностью до членов третьего порядка $Q=4R_2'+Q_0$. Мы рассмотрим только члены, зависящие от первой степени e_1. Из формулы (7) § 17.12 имеем

$$Q_0=-\frac{3}{2}m^2n^2a^2e_1\cos\varphi_1.$$

Кроме того, R_2' выражается формулой (18) § 7.06, если заменить в ней M на φ и M_1 на φ_1. Обозначим через δu_1 ту часть δu, которая зависит только от e_1. Тогда

$$D^2(\delta u_1)+n^2(\delta u_1)=-m^2n^2e_1\left[\frac{3}{2}\cos\varphi_1+\right.$$
$$\left.+\frac{21}{2}\cos(2\xi-\varphi_1)-\frac{3}{2}\cos(2\xi+\varphi_1)\right].$$

Далее, $\varphi_1\equiv n_1t+\varepsilon_1-\tilde{\omega}_1=mnt+\ldots$. Поэтому частное решение предыдущего уравнения запишется в виде

$$\delta u_1=-\frac{3}{2}\frac{m^2e_1}{1-m^2}\cos\varphi_1-\frac{21}{2}\frac{m^2e_1\cos(2\xi-\varphi_1)}{1-(2-3m)^2}+\frac{3}{2}\frac{m^2e_1\cos(2\xi+\varphi_1)}{1-(2-m)^2},$$

или, если ограничиться членами третьего порядка, то

$$\delta u_1 = -\frac{3}{2} m^2 e_1 \cos\varphi_1 + \frac{7}{2} m^2 e_1 \cos(2\xi - \varphi_1) - \frac{1}{2} m^2 e_1 \cos(2\xi + \varphi_1). \quad (2)$$

2) Если δv_1 — возмущение в долготе, зависящее от e_1, то уравнение для δv_1, полученное из уравнения (6) § 17.13а, будет

$$\frac{1}{n} D(\delta v_1) = 2\frac{a}{\rho}\delta u_1 + \frac{1}{nr^2}\int \frac{dR_2'}{d\xi}\,dt. \quad (3)$$

Так как R_2' есть малая порядка $m^2 e_1$, то в первом члене правой части уравнения (3) достаточно положить $\rho = a$, а во втором $r = a$. Далее,

$$\frac{\partial R_2'}{\partial\xi} = -m^2 n^2 a^2 \left[\frac{21}{4} e_1 \sin(2\xi - \varphi_1) - \frac{3}{4} e_1 \sin(2\xi + \varphi_1)\right].$$

С точностью до малых порядка $m^2 e_1$ второй член в правой части уравнения (3) будет иметь вид

$$m^2 e_1 \left[\frac{21}{8}\cos(2\xi - \varphi_1) - \frac{3}{8}\cos(2\xi + \varphi_1)\right].$$

Сложим это выражение с $2\delta u_1$ и проинтегрируем. Тогда получим

$$\delta v_1 = -3 m e_1 \sin\varphi_1 + \frac{77}{16} m^2 e_1 \sin(2\xi - \varphi_1) - \frac{11}{16} m^2 e_1 \sin(2\xi + \varphi_1). \quad (4)$$

§ 17.18. Члены, зависящие от a/a_1

В предыдущих параграфах мы получили в первом приближении решение задачи с точностью до членов третьего порядка включительно относительно малых величин. В частности, в уравнении (3) § 17.10 для радиуса-вектора мы отбросили P'', а при вычислении δu отбросили $\delta_1 Q, \ldots$. Сейчас мы рассмотрим общий метод, развитый Понтекуланом, значительно полнее.

Здесь мы будем интересоваться только слагающей R_3 возмущающей функции, которую для удобства запишем в виде

$$R_3 = m^2 n^2 a^2 (A\cos\xi + B\cos 3\xi), \quad (1)$$

где

$$A = \frac{3}{8}\frac{a}{a_1}, \qquad B = \frac{5}{8}\frac{a}{a_1}. \quad (2)$$

Так как a/a_1 рассматривается как малая порядка m^2, то A и B имеют второй порядок малости.

Следует напомнить, что a/a_1 является краткой формой записи точного выражения

$$\frac{E - M}{E + M}\cdot\frac{a}{a_1}.$$

1) *Уравнение для радиуса-вектора.*

В первом приближении мы пренебрежем величинами P'' и $\delta_1 Q$. Если δu_2 означает ту часть δu, которая включает в себя параллактические члены, т. е. члены, пропорциональные a/a_1, то уравнение для δu_2 приведется к виду

$$D^2(\delta u_2)+n^2\delta u_2=-\frac{Q'}{a^2}\equiv-\frac{Q_2}{a^2}. \tag{3}$$

Далее, Q_2 выражается формулой

$$Q_2=5R_3+3\int R_3\frac{\dot r_1}{r_1}\,dt+2\int\frac{\partial R_3}{\partial\xi}\dot v_1\,dt. \tag{4}$$

Первый интеграл здесь имеет шестой порядок малости, так как $\dot r_1/r_1$ есть малая порядка me_1. Поэтому мы его отбросим. Во втором интеграле достаточно положить $\dot v_1=n_1=mn$. Так как $\xi=n(1-m)t+\ldots$, то последний член в выражении (4) с точностью до малых порядка m^5 включительно равен $2mR_3$. Поэтому

$$Q_2=(5+2m)R_3.$$

Уравнение для δu_2 тогда примет вид

$$D^2(\delta u_2)+n^2\delta u_2=-m^2n^2[(5+2m)A\cos\xi+(5+2m)B\cos 3\xi]. \tag{5}$$

На основании принципов, изложенных в случае 1 § 17.11, коэффициент при $\cos\xi$ в частном решении этого уравнения будет иметь первый порядок малости. С точностью до малых порядка m^4 мы имеем

$$\delta u_2=-m^2\left[\frac{5+2m}{1-(1-m)^2}A\cos\xi+\frac{5+2m}{1-9(1-m)^2}B\cos 3\xi\right]=$$
$$=-\frac{15}{16}m\left(1+\frac{9}{10}m\right)\frac{a}{a_1}\cos\xi-\frac{25}{64}m^2\frac{a}{a_1}\cos 3\xi. \tag{6}$$

В следующем параграфе мы увидим, что члены четвертого порядка в коэффициенте при $\cos\xi$ найдены нами пока не полностью.

2) *Уравнение для долготы.*

Если через δv_2 обозначить возмущения в долготе, обусловленные R_3, то, согласно уравнению (3) § 17.17, мы будем иметь

$$\frac{1}{n}D(\delta v_2)=2\left(\frac{a}{\rho}\right)\delta u_2+\frac{1}{nr^2}\int\frac{\partial R_3}{\partial\xi}\,dt \tag{7}$$

или в первом приближении

$$(1-m)\frac{d}{d\xi}(\delta v_2)=2\,\delta u_2+\frac{1}{n^2a^2(1-m)}R_3, \tag{8}$$

откуда с точностью до малых порядка m^4 легко находим, что

$$\delta v_2=-\left(\frac{15}{18}m+\frac{51}{16}m^2\right)\frac{a}{a_1}\sin\xi+\frac{15}{32}m^2\frac{a}{a_1}\sin 3\xi. \tag{9}$$

Как и в случае δu_2, члены четвертого порядка в коэффициенте при $\sin\xi$ найдены еще не полностью.

§ 17.19. Второе приближение для δu_2 и δv_2

Согласно формуле (3) § 17.10, общее уравнение для δu имеет вид

$$D^2(\delta u)+n^2\delta u+\frac{Q}{a^2}-P''+n^2\delta b-n^2(c^2-1)\left(\frac{a}{\rho}-1\right)=0. \qquad (1)$$

Наша задача сейчас заключается в том, чтобы найти δu_2 и δv_2 с точностью до малых порядка m^4 включительно.

Мы рассмотрим все члены до пятого порядка включительно в P'' и полном выражении для Q, которые составляют коэффициент при $\cos\xi$; такие члены в частном решении уравнений дадут соответствующие коэффициенты с точностью до малых порядка m^4.

1) Согласно формуле (2) § 17.10,

$$P=-\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^3-1\right]\delta u+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^4(\delta u)^2, \qquad (10)$$

где через δu обозначено возмущение при условии, что возмущающая функция рассматривается *полностью*. Таким образом, δu представляет собой полное решение, которое мы должны бы были получить к настоящему времени. Очевидно, что новые члены, содержащие $\cos\xi$, могут появиться только через посредство $(\delta u)^2$. Из членов, появляющихся в δu за счет выражения (1) § 17.16, нам нужно рассмотреть только следующие:

$$\frac{1}{6}m^2+m^2\cos 2\xi.$$

Члены, зависящие от e_1, по крайней мере с точностью малых величин рассматриваемого порядка, в выражении P'' фигурировать не будут. В предыдущем параграфе мы нашли часть δu, обозначенную нами через δu_2. С точностью до членов третьего порядка она выражается формулой

$$\delta u_2=-\frac{15}{16}m\frac{a}{a_1}\cos\xi.$$

Таким образом, мы получаем, что нужная нам часть в $(\delta u)^2$ равна

$$\frac{1}{6}m^2+m^2\cos 2\xi-\frac{15}{16}m\frac{a}{a_1}\cos\xi.$$

Легко видеть, что член пятого порядка, зависящий от $\cos\xi$, равен $-\frac{5}{4}m^3\frac{a}{a_1}\cos\xi$. Таким образом, слагаемое, происходящее от $-P''$, равно

$$-\frac{15}{8} m^3 n^2 \frac{a}{a_1} \cos\xi.$$

2) Рассмотрим теперь величину $\delta_1 Q$, которая выражается формулой

$$\delta_1 Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\delta r + \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\delta v,$$

где с точностью до членов четвертого порядка малости $Q = 4R_2 + 5R_3$. Очевидно, что мы можем пренебречь величиной R_3. Для наших целей достаточно принять

$$Q = 4R_2 = m^2 n^2 r^2 (1 + 3\cos 2\xi).$$

Так как $\delta r = -\rho^2(\delta u/a)$, то мы будем иметь

$$\delta_1 Q = -2m^2 n^2 a^2 (1 + 3\cos 2\xi)\,\delta u - 6m^2 n^2 a^2 \sin 2\xi\, dv.$$

Единственные члены в выражениях для δu и δv, которые могут ввести слагаемые в коэффициент при $\cos\xi$ не выше третьего порядка относительно m, будут

$$\delta u_2 = -\frac{15}{16} m \frac{a}{a_1}\cos\xi \quad \text{и} \quad \delta v_2 = -\frac{15}{18}\frac{a}{a_1}\sin\xi.$$

С точностью до малых порядка m^5 мы тогда найдем, что

$$\delta Q_1 = \frac{165}{16} m^3 n^2 a^2 \left(\frac{a}{a_1}\right)\cos\xi.$$

Следовательно, соответствующий член в $\frac{\delta_1 Q}{a^2} - P''$ равен $\frac{135}{16} m^3 n^2 \frac{a}{a_1}\cos\xi$. Этот член, имеющий пятый порядок, нужно прибавить к правой части уравнения (5) § 17.18. Уравнение для δu_2 тогда примет вид

$$D^2(\delta u_2) + n^2\delta u_2 = -m^2 n^2 \frac{a}{a_1}\left\{\left[\frac{3}{8}(5 + 2m) + \frac{135}{16m}\right]\cos\xi + \frac{25}{8}\cos 3\xi\right\}.$$

Частное решение этого уравнения с точностью до малых порядка m^4 определяется обычным путем и имеет вид

$$\delta u_2 = -\left(\frac{15}{16} m + \frac{81}{16} m^2\right)\frac{a}{a_1}\cos\xi + \frac{25}{64} m^2 \frac{a}{a_1}\cos 3\xi. \qquad (3)$$

3) Так как мы ищем δv_2 с точностью до малых порядка m^4, то формулу для δu_2 мы получим, если подставим в формулу (8) § 17.18 вместо δu_2 его выражение (3). Мы тогда найдем

$$\delta v_2 = -\left(\frac{15}{16} m + \frac{93}{8} m^2\right)\frac{a}{a_1}\sin\xi + \frac{15}{32} m^2 \frac{a}{a_1}\sin 3\xi. \qquad (4)$$

§ 17.20. Уравнение для широты

1. Уравнение, определяющее широту, дано в § 17.03 формулой (3). Пренебрегая величинами s^3, e_1 и a/a_1, будем иметь

$$D^2(rs)+n^2\left(\frac{a}{r}\right)^3 rs=\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial s}, \tag{1}$$

где

$$R=m^2n^2r^2\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{4}s^2+\frac{3}{4}(1-s^2)\cos 2(v-v_1)\right].$$

Легко видеть, что правая часть уравнения (1) равна $-m^2n^2rs$. Так как

$$z=\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\approx rs,$$

то уравнение (1) запишется в виде

$$D^2z=n^2\left(\frac{a^3}{r^3}+m^2\right)z=0. \tag{2}$$

Далее,

$$\frac{a}{r}=\frac{a}{\rho}+\delta u,$$

и если пренебречь величиной e, то $\rho=a$. Мы тогда найдем, что уравнение (2) с точностью до малых четвертого порядка включительно имеет вид

$$D^2z+n^2[1+3\,\delta u+3(\delta u)^2]\,z=0. \tag{3}$$

Если $e=0$, то с точностью до малых порядка m^3 включительно выражение для δu легко получить. В этом параграфе мы используем выражение для δu с точностью до малых порядка m^4 включительно. Оно имеет вид

$$\delta u=\frac{1}{6}m^2-\frac{179}{288}m^4+\left(m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{131}{8}m^4\right)\cos 2\xi+\frac{7}{8}m^4\cos 4\xi,$$

откуда

$$(\delta u)^2=m^4\left(\frac{19}{36}+\frac{1}{3}\cos 2\xi+\frac{1}{2}\cos 4\xi\right).$$

Таким образом, уравнение (3) примет вид

$$D^2z+n^2(1+Am^2+Bm^2\cos 2\xi+Cm^4\cos 4\xi)\,z=0, \tag{4}$$

где

$$A=\frac{3}{2}-\frac{9}{32}m^2,$$

$$B=3+\frac{19}{2}m+\frac{137}{6}m^2, \tag{5}$$

$$C=\frac{33}{8}.$$

В § 17.06 мы видели, что в первом приближении

$$\frac{z}{a}=\gamma\sin\eta,$$

где $\eta=gnt+\varepsilon-\Omega$ и $g=1+{}^3/_4m^2$. Допустим, что z выражается формулой

$$\frac{z}{a}=b\,[\sin\eta+P\sin(2\xi-\eta)+Q\sin(2\xi+\eta)+R\sin(4\xi-\eta)], \tag{6}$$

где в первом приближении $b=\gamma$.

Мы будем искать P, Q и R с точностью до малых порядка m^3 включительно. Если бы мы ввели дополнительный член $bS\cdot\sin(4\xi+\eta)$, то нашли бы, что S является малой величиной порядка m^4. Заметим, что (4) — частный случай уравнения Матье

$$\frac{d^2z}{dt^2}+n^2\left[1+\sum_1^\infty A_j\cos 2jt\right]z=0, \tag{7}$$

решение которого имеет вид

$$z=\sum_{-\infty}^{\infty}B_r\cos(gnt+2rt+\alpha), \tag{8}$$

причем B_0 и α — постоянные интегрирования, а g — величина, которая выражается через коэффициенты A. Это замечание относится также и к величинам B_r $(r\neq 0)$. С аналогичным уравнением мы встретимся в § 18.30.

Подставим выражение (6) в уравнение (4) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при $\sin\eta$, $\sin(2\xi-\eta)$, ...; в результате получим

$$1-g^2+Am^2-\frac{1}{2}BPm^2+\frac{1}{2}BQm^2=0, \tag{9}$$

$$P\,[1+Am^2-(2-2m-g)^2]-\frac{1}{2}Bm^2+\frac{1}{2}BRm^2=0, \tag{10}$$

$$Q\,[1+Am^2-(2-2m-g)^2]+\frac{1}{2}Bm^2=0, \tag{11}$$

$$R\,[1+Am^2-(4-4m-g)^2]+\frac{1}{2}BPm^2-\frac{1}{2}Cm^4=0. \tag{12}$$

Из этих четырех уравнений мы методом последовательных приближений определим величины g, P, Q и R. Вспомним, что A, B и C, определяемые формулами (5), имеют нулевой порядок. Очевидно, что P, Q и R по меньшей мере являются малыми порядка m.

Первое приближение. Из уравнения (9) находим

$$g^2 = 1 + Am^2 = 1 + \frac{3}{2}m^2$$

и

$$g = 1 + \frac{3}{4}m^2.$$

Далее, мы получаем

$$P = \frac{3}{8}m, \quad Q = \frac{3}{16}m^2, \quad R = \frac{9}{128}m^3.$$

Второе приближение. Опуская все выкладки, мы просто приводим окончательные результаты:

$$P = \frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2 + \frac{5389}{1536}m^3,$$

$$Q = \frac{3}{16}m^2 + \frac{7}{8}m^3 + \frac{989}{384}m^4,$$

$$R = \frac{9}{128}m^3.$$

Найдем теперь g с точностью до малых порядка m^4 включительно. Если бы к правой части равенства (6) мы прибавили член $bS\sin(4\xi + \eta)$, то получили бы

$$g = 1 + \frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{273}{128}m^4. \tag{13}$$

2. Найдем теперь соответствующее выражение для s. Если пренебречь величиной s^3, то $z = rs$. С точностью до малых порядка m^2b

$$s = \frac{z}{a}\frac{a}{r} = \frac{z}{a}\left[1 + \frac{1}{6}m^2 + m^2\cos 2\xi\right].$$

Поэтому, принимая во внимание равенство (6), мы получаем

$$s = \left(1 + \frac{1}{6}m^2\right)b\sin\eta + \left(\frac{3}{8}m + \frac{25}{32}m^2\right)b\sin(2\xi - \eta) +$$
$$+ \frac{11}{16}m^2 b\sin(2\xi + \eta). \tag{14}$$

3. Так как $s = \operatorname{tg}\theta$, где θ — широта Луны, то при помощи хорошо известного ряда мы можем записать

$$\theta = s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 \ldots$$

или, с точностью до малых порядка b^3,

$$\theta = s - \frac{1}{3}b^3\sin^3\eta.$$

Используя формулу (14), получаем

$$\theta=\left(1+\frac{1}{6}m^2-\frac{1}{4}b^2\right)b\sin\eta+\left(\frac{3}{8}m+\frac{25}{32}m^2\right)b\sin(2\xi-\eta)+$$
$$+\frac{11}{16}m^2b\sin(2\xi+\eta)+\frac{1}{12}b^3\sin 3\eta. \qquad (15)$$

Как и в случае коэффициента при $\sin\varphi$ в долготе, удобно и желательно, чтобы коэффициенты при $\sin\eta$ как в невозмущенном, так и в возмущенном движении были одними и теми же. Поэтому мы положим

$$\gamma=b\left(1+\frac{1}{6}m^2-\frac{1}{4}b^2\right),$$

откуда с точностью до членов третьего порядка находим

$$b=\gamma\left(1-\frac{1}{6}m^2+\frac{1}{4}\gamma^2\right). \qquad (16)$$

При помощи формулы (16) коэффициенты в равенствах (6) и (14) могут быть выражены через γ.

Формула (15) для θ тогда примет вид

$$\theta=\gamma\sin\eta+\left(\frac{3}{8}m+\frac{25}{32}m^2\right)\gamma\sin(2\xi-\eta)+$$
$$+\frac{11}{16}m^2\gamma\sin(2\xi+\eta)+\frac{1}{12}\gamma^3\sin 3\eta. \qquad (17)$$

Этот прием, как и в случае долготы, отличается от метода, развитого Понтекуланом.

§ 17.21. Общие замечания

Мы рассматриваем e, e_1, γ как величины того же порядка, что и величина m, а a/a_1 как малую порядка m^2. Окончательное буквенное выражение для радиуса-вектора (или, вернее, для a/r), выведенное Понтекуланом, дается с точностью до малых порядка m^5 включительно, выражение для долготы в общем случае — до малых порядка m^6, а некоторые важнейшие члены — до малых порядка m^7 или даже m^8; наконец, выражение для широты — до малых порядка m^6 включительно.

Чтобы предотвратить путаницу, мы будем считать, что постоянные Понтекулана e и γ обозначаются через e_0 и γ_0. Его коэффициент при $\sin\varphi$ в окончательном решении является рядом по степеням m, e_0, γ_0, e_1 и a/a_1, который мы обозначим так:

$$2C\left(m,\ e_0,\ \gamma_0,\ e_1,\ \frac{a}{a_1}\right).$$

Наш коэффициент равен $2e(1-{}^1/_8 e^2)$. Он совпадает с коэффициентом при $\sin M$ в невозмущенном движении. Поэтому

$$e-\frac{1}{2}e^3=C\left(m,\ e_0,\ \gamma_0,\ e_1,\ \frac{a}{a_1}\right). \tag{1}$$

Кроме того, коэффициент Понтекулана при $\sin\eta$ в его формуле для широты является аналогичным рядом, который мы обозначим через $D(m,\ e_0,\ \gamma_0,\ e_1,\ a/a_1)$. Наш коэффициент равен γ. Поэтому

$$\gamma=D\left(m,\ e_0,\ \gamma_0,\ e_1,\frac{a}{a_1}\right). \tag{2}$$

Величины e_0 и γ_0 могут быть найдены методом последовательных приближений, исходя из равенств (1) и (2), и представлены в виде рядов по степеням $m,\ e,\ \gamma,\ e_1,\ a/a_1$. А эти последние величины определяются из наблюдений. Следовательно, постоянные Понтекулана e_0 и γ_0 могут быть вычислены.

§ 17.22. Постоянные

1) *Наблюдаемые координаты (долгота и широта).*

Пусть долгота v и широта θ Луны определены из наблюдений для некоторого момента t. Теоретические формулы, с которыми эти наблюдения сравниваются, имеют вид

$$v=nt+\varepsilon+\sum A\sin(pt+q), \tag{1}$$

$$\theta=\sum B\sin(pt+q), \tag{2}$$

причем мы предполагаем, что амплитуды A и B посредством множителя $\operatorname{cosec} 1''$ ($\equiv 206265,8$) выражены в секундах дуги.

Из анализа очень большого числа измерений v, например, могут быть получены численные значения n, ε, коэффициентов A и периодов $2\pi/p$. В частности, может быть найден коэффициент при $\sin\varphi$. Так как его теоретическое выражение есть $2e(1-{}^1/_8 e^2)$, то отсюда легко вычисляется e. Аналогично определяются постоянные γ, $\tilde{\omega}$, Ω.

Найдено, что сидерический период обращения Луны T ($\equiv 2\pi/n$) равен 27,321661 суток (средних солнечных), а период T_1 ($\equiv 2\pi/n_1$) Солнца равен 365,2564 суток. Отсюда мы вычисляем важную постоянную m ($\equiv n_1/n$). Понтекулан нашел, что

$$m=0{,}07480130. \tag{3}$$

Его значения для e_0, γ_0 и e_1 таковы:

$$e_0=0{,}05473074,\qquad \gamma_0=0{,}08967336,\qquad e_1=0{,}01679182. \tag{4}$$

2) *Наблюдаемый параллакс.*

Третьей наблюдаемой величиной является экваториальный горизонтальный параллакс Луны Π. Если a_0 — экваториальный радиус Земли, то

$$\sin \Pi = \frac{a_0}{r} = \frac{a_0}{a}\frac{a}{r}.$$

Так как

$$\frac{a}{r} = \alpha + \text{п. ч.},$$

то среднее значение $\sin \Pi$ равно $\alpha (a_0/a)$. Оно может быть сравнено с наблюдаемой величиной, именно с $3422{,}7 \sin 1''$. Так как α — функция m, e и e_1, которую можно вычислить, то величина a_0/a может быть найдена немедленно. Значение, полученное Понтекуланом для a_0/a, равно 0,0165617. Если положить $a_0 = 6378{,}39$ *км*, то получим

$$a = 385\,100 \text{ км}.$$

Заметим, что значение a не равно среднему геоцентрическому расстоянию Луны. Последнее, обозначаемое через a', определяется посредством представления r/a в виде ряда $(a'/a) +$ п. ч. Найдено, что

$$a' = 383\,300 \text{ км}.$$

Если солнечный параллакс предположить известным, то

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a_0}{a_1}\frac{a}{a_0},$$

причем первый множитель правой части является солнечным параллаксом. Используя приведенное выше значение a_0/a и несколько уменьшенное значение солнечного параллакса, Понтекулан получил

$$\frac{a}{a_1} = 0{,}00252551 \approx \frac{1}{396}. \tag{5}$$

На основе полученных формул мы можем решать и обратную задачу. Рассмотрим основной член в формуле (1), включающей a/a_1, или, вернее, $\frac{E-M}{E+M} \cdot \frac{a}{a_1}$. Этим членом является $D \sin \xi$, где

$$D = A(m, e, e_1, \gamma)\, \frac{E-M}{E+M} \cdot \frac{a}{a_1}.$$

Предположим, что D получается из наблюдений долготы (при помощи гармонического анализа или каким-либо другим путем). Согласно Понтекулану,

$$D = 123'', 6.$$

Далее, можно вычислить величину A, и если предположить, что отношение M/E известно [1]), то a/a_1 также можно будет вычислить. Комбинируя это с ранее полученным значением a_0/a, мы можем найти численное значение солнечного параллакса. Этим методом вычисления солнечного параллакса сейчас не пользуются, а предпочитают прямой метод, основанный на наблюдениях малой планеты Эрос.

Кроме этого, Понтекуланом были найдены важные постоянные c и g как функции m, e_0, γ_0, e_1, a/a_1 до малых порядка m^7 включительно. Их численные значения таковы:

$$1 - c = 0{,}008450821, \qquad g - 1 = 0{,}004021678.$$

Эти результаты, конечно, основаны на современных значениях различных постоянных, полученных из наблюдений.

§ 17.23. Основные неравенства

1) *Эвекция.* Это неравенство содержится в долготе и имеет вид $C \sin(2\xi - \varphi)$. Эвекция была открыта Птолемеем и описана в его «Альмагесте» (книга IV). Коэффициент C найден Понтекуланом как функция m, e, e_1, γ и a/a_1 с точностью до малых порядка m^7 включительно. Его численное значение равно $1°16'27'',0$. Период эвекции равен

$$\frac{2\pi}{n(2 - 2m - c)}, \quad \text{или около } 31\frac{4}{5} \text{ суток.}$$

2) *Вариация.* Это неравенство определяется членом с аргументом 2ξ в долготе. Амплитуда его найдена с точностью до малых порядка m^7 включительно и ее численное значение равно $39'30'',8$. Период этого неравенства равен половине синодического периода, или около $14^3/_4$ суток. Это неравенство было открыто Тихо Браге, хотя и возможно, что о нем знал еще Абуль Вафа, багдадский астроном X столетия нашей эры.

3) *Параллактическое неравенство.* Это неравенство в долготе с аргументом ξ и амплитудой, содержащей множитель $\dfrac{E-M}{E+M} \cdot \dfrac{a}{a_1}$. Период этого неравенства равен одному синодическому месяцу, $29^d 12^h 44^m$, а амплитуда, согласно Понтекулану, равна $-122'',38$.

4) *Годичное неравенство.* Открытое Тихо Браге, это неравенство имеет аргумент $\varphi_1 (\equiv n_1 t + \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1)$. Таким образом, его период

---

[1]) В гл. 20, § 22 будет получено $\dfrac{M}{E} = \dfrac{1}{81{,}6}$.

равен одному году, а амплитуда, вычисленная Понтекуланом, равна $-11' 8'', 93$.

5) *Движение перигея.* Период полного обращения перигея равен $\frac{2\pi}{n(1-c)}$ или $\frac{m}{1-c}\frac{2\pi}{n_1}$, т. е. $m/(1-c)$ лет. Численно этот период составляет 3232,4 суток, или около 8,85 лет.

6) *Движение узла.* Период полного обращения узла (движение обратное) равен $\frac{2\pi}{n(g-1)}$ или $\frac{m}{g-1}$ лет. Численно он равен 6794,4 суток, или около 18,60 лет.

Глава 18

ТЕОРИЯ ЛУНЫ ХИЛЛА — БРАУНА

§ 18.01. Введение

В большинстве теорий Луны, созданных со времен Ньютона, в основном использовались уравнения движения в полярных координатах — сферических или цилиндрических — или уравнения в элементах орбиты, зависящих от этих координат. Важным исключением является теория Эйлера (1772 г.), в основу которой положено использование прямоугольной системы координат, оси x и y которой вращаются в плоскости эклиптики со средней угловой скоростью Луны. Теория Эйлера не привлекала большого внимания до тех пор, пока (столетием позже) Хилл не продемонстрировал могущество своего метода, основанного на использовании прямоугольных координат, однако с тем отличием от Эйлера, что его оси вращаются со средней угловой скоростью n_1 Солнца, а ось x проходит через среднее положение Солнца. Хилл выполнил три классических исследования [1]), составивших затем основу для исчерпывающих исследований Брауна [2]), который закончил построение теории Луны и составил соответствующие таблицы [3]), используемые с 1923 г. в ежегодниках.

В этих таблицах коэффициенты всех периодических членов в долготе, широте и параллаксе приводятся до $0'',01$ включительно. Для этого в возмущающей функции необходимо было сохранить члены до малых порядка m^6, e^6, e_1^4, γ^6 и $(a/a_1)^3$ включительно. При этом предполагается, что e_1^2 имеет тот же порядок, что и e^3 или m^3, а a/a_1 — тот же порядок, что и m^2. Здесь $m = n_1/n$. Кроме того, были приняты во внимание прямые и косвенные эффекты, вызванные действием планет и отклонением Земли и Луны от сферической формы.

В последующих параграфах мы подробно опишем общие принципы вычисления основных типов возмущений, вызванных действием Солнца.

---

[1]) „Researches in the Lunar Theory", Amer. J. Math. I, 5; I, 129 (1878); „On the part of the motion of the Lunar Perigee which is function of the mean motions of the Sun and Moon", Acta Math., VIII, 1 (1886).

[2]) Memoirs R. A. S., LIII, 39 (1897); LIII, 163 (1899); LIV, I (1900); LVII, 51 (1905); LIX, I (1908).

[3]) Tables of the Motion of the Moon, Yale U. P., 1919.

§ 18.02. Уравнения движения во вращающихся осях

Как мы видели в § 7.03, при исследовании движения Луны можно предположить, что Солнце описывает эллиптическую орбиту вокруг центра масс C системы Земля — Луна. Уравнения движения Луны в прямоугольных осях $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, проходящих через центр Земли, плоскость $\xi\eta$ которых (эклиптика) параллельна плоскости орбиты, описываемой Солнцем вокруг C, имеют вид

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \tag{1}$$

где

$$U = \frac{\mu}{r} + R,$$

причем R — возмущающая функция, обусловленная притяжением Солнца.

Как и в п. 2 § 7.06, под T на рис. 16 мы будем понимать Солнце, предполагая, таким образом, что Солнце движется по эллиптической орбите в плоскости эклиптики.

Рассмотрим теперь в плоскости эклиптики оси OX, OY, которые вращаются со средней угловой скоростью n_1, причем ось OX направлена к среднему положению Солнца. Угол ξOX равен средней долготе Солнца $n_1 t + \varepsilon_1$, которую для удобства мы обозначим через l. Пусть x, y, z — координаты Луны по отношению к осям OX, OY и OZ, причем ось OZ совпадает с осью $O\zeta$. Тогда

$$\xi = x\cos l - y\sin l, \quad \eta = x\sin l + y\cos l, \quad \zeta = z,$$

откуда

$$\dot{\xi} = \dot{x}\cos l - \dot{y}\sin l - n_1\eta, \quad \dot{\eta} = \dot{x}\sin l + \dot{y}\cos l + n_1\xi, \quad \dot{\zeta} = \dot{z}.$$

Кинетическая энергия $T \equiv {}^1/_2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)$ тогда будет выражаться формулой

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + n_1^2(x^2 + y^2) - 2n_1(\dot{x}y - x\dot{y}).$$

Используя динамические уравнения Лагранжа, мы получим вместо системы (1) уравнения движения в следующем виде:

$$\ddot{x} - 2n_1\dot{y} - n_1^2 x = -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\ddot{y} + 2n_1\dot{x} - n_1^2 y = -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{4}$$

§ 18.03. Возмущающая функция

Заменяя mn на n_1^2, мы, согласно формуле (6) § 7.04, имеем

$$R = n_1^2 \left[r^2 \left(\frac{a_1}{r_1} \right)^3 P_2(\alpha) + \frac{r^3}{a_1} \frac{E-M}{E+M} \left(\frac{a_1}{r_1} \right)^4 P_3(\alpha) + \ldots \right], \tag{1}$$

где α — угол между EM и ET на рис. 16 (стр. 130). Если x_1, y_1, 0 — координаты Солнца (на рис. 16 Солнце обозначено точкой T), то

$$rr_1 \cos\alpha = xx_1 + yy_1. \tag{2}$$

Далее, согласно этому равенству и формуле (6) § 7.02,

$$r^2 P_2(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(xx_1 + yy_1)^2}{r_1^2} - \frac{1}{2} r^2 \tag{3}$$

так что, поскольку $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, мы можем написать

$$2r^2 P_2(\alpha) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 3x^2 \left[\left(\frac{x_1}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \\ + 3y^2 \left(\frac{y_1}{r_1} \right)^2 + \frac{6xyx_1y_1}{r_1^2}. \tag{4}$$

Последние три члена в правой части равенства (4) зависят от эксцентриситета солнечной орбиты e_1. Если пренебречь величиной e_1, то эти члены обращаются в нуль, так как тогда $x_1 = r_1 = a_1$ и $y_1 = 0$.

Первый член в формуле (1) может быть записан в виде

$$n_1^2 \left\{ r^2 P_2(\alpha) + r^2 P_2(\alpha) \left[\left(\frac{a_1}{r_1} \right)^3 - 1 \right] \right\}.$$

Поэтому при помощи равенств (3) и (4) формулу (1) можно записать следующим образом:

$$R = \frac{1}{2} n_1^2 (2x^2 - y^2 - z^2) + \Omega, \tag{5}$$

где

$$\Omega = n_1^2 \left\{ r^2 P_2(\alpha) \left[\left(\frac{a_1}{r_1} \right)^3 - 1 \right] + \frac{3x^2}{2} \left[\left(\frac{x_1}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} y^2 \left(\frac{y_1}{r_1} \right)^2 \frac{3xyx_1y_1}{r_1^2} + \frac{r^3}{a_1} \frac{E-M}{E+M} \left(\frac{a_1}{r_1} \right)^4 P_3(\alpha) + \ldots \right\}. \tag{6}$$

При этом Ω будет функцией координат, если в первом члене заменить $r^2 P_2(\alpha)$ правой частью равенства (3) [1]). Очевидно, что Ω имеет порядок $m^2 e_1$. Мы положим

$$\Omega = \Omega_2 + \Omega_3 + \ldots, \tag{7}$$

---

[1]) Очевидно, что и член $r^3 P_3(\alpha)$ может быть выражен через прямоугольные координаты Луны по формуле, аналогичной формуле (3). — *Прим. ред.*

где Ω_p означает однородную функцию порядка p координат Луны. Подставляя выражение (5) в уравнения (2) — (4) предыдущего параграфа, мы получаем

$$\ddot{x} - 2n_1\dot{y} - 3n_1^2 x = -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\ddot{y} + 2n_1\dot{x} = -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\ddot{z} + \quad + n_1^2 z = -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{10}$$

Умножим эти уравнения соответственно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложим. Тогда, поскольку

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{\partial\Omega'}{\partial t},$$

где $\partial\Omega'/\partial t$ означает производную по t, входящему только посредством координат Солнца, мы, интегрируя, получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 3n_1^2 x^2 + n_1^2 z^2 = \frac{2\mu}{r} + 2\Omega - 2\int \frac{\partial\Omega'}{\partial t}\,dt + C. \tag{11}$$

Равенство (11) является интегралом Якоби в общем случае [1]).

Первый член в правой части равенства (5) является главной частью возмущающей функции. Этот член фактически будет представлять собой полное выражение для R, если мы пренебрежем величинами e_1 и a/a_1. Решение системы уравнений (8) — (10), в которых Ω опущено, даст главные возмущения движения Луны, возникающие от действия Солнца.

§ 18.04. Введение комплексных переменных

Положим

$$u = x + iy, \quad s = x - iy, \tag{1}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Тогда

$$r^2 = us + z^2 \tag{2}$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial u} + \frac{\partial\Omega}{\partial s}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \frac{\partial\Omega}{\partial s}\right). \tag{3}$$

---

[1]) Поскольку интеграл $\int \frac{\partial\Omega'}{\partial t}\,dt$, вообще говоря, не может быть взят до подстановки в подынтегральное выражение координат Луны, выраженных в виде функций времени, соотношение (11), строго говоря, не является интегралом системы дифференциальных уравнений (2) — (4) § 18.02. Поэтому равенство (11) более уместно называть „квазиинтегралом" Якоби. — *Прим. ред.*

Умножим уравнение (9) § 18.03 на i. Тогда, складывая полученное уравнение с уравнением (8) § 8.03, а затем вычитая это уравнение из уравнения (8) § 8.03, мы при помощи формул (3) найдем

$$\ddot{u}+2in_1\dot{u}-\frac{3}{2}n_1^2(u+s)=-\mu\frac{u}{r^3}+2\frac{\partial\Omega}{\partial s}, \tag{4}$$

$$\ddot{s}-2in_1\dot{s}-\frac{3}{2}n_1^2(u+s)=-\mu\frac{s}{r^3}+2\frac{\partial\Omega}{\partial u}. \tag{5}$$

Положим теперь

$$\xi=(n-n_1)t+\varepsilon-\varepsilon_1=(n-n_1)(t-t_0) \tag{6}$$

и

$$\zeta=e^{i\xi}. \tag{7}$$

Пусть, далее, D означает оператор $\zeta(d/d\zeta)$. Тогда

$$\dot{u}=(n-n_1)\frac{du}{d\xi}=i(n-n_1)\zeta\frac{du}{d\zeta}=i(n-n_1)Du.$$

Аналогично

$$\ddot{u}=-(n-n_1)^2D^2u.$$

Пусть

$$\mathrm{m}=\frac{n_1}{n-n_1}, \tag{8}$$

$$\varkappa=\frac{\mu}{n-n_1} \tag{9}$$

и

$$W=\frac{2\Omega}{(n-n_1)^2}. \tag{10}$$

Тогда уравнения (4) и (5) и уравнение (10) § 18.03 примут вид

$$D^2u+2\mathrm{m}\,Du+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u+s)-\varkappa\frac{u}{r^3}=-\frac{\partial W}{\partial s}, \tag{11}$$

$$D^2s-2\mathrm{m}\,Ds+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u+s)-\varkappa\frac{s}{r^3}=-\frac{\partial W}{\partial u}, \tag{12}$$

$$D^2z\qquad-\mathrm{m}^2z\qquad-\varkappa\frac{z}{r^3}=-\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z}. \tag{13}$$

Это и есть уравнения Хилла в новых комплексных переменных u, s и ζ. Проделаем с этими уравнениями следующие преобразования:

1) Умножим уравнение (11) на s, уравнение (12) на u и составим их разность. Тогда

$$uD^2s-sD^2u-2\mathrm{m}(uDs+sDu)+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2-s^2)=s\frac{\partial W}{\partial s}-u\frac{\partial W}{\partial u}.$$

Но

$$D(u\,Ds)=u\,D^2s+Du\,Ds,$$

$$D(s\,Du)=s\,D^2u+Du\,Ds.$$

Поэтому мы получим

$$D(u\,Ds - s\,Du - 2\mathrm{m}us) + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2 - s^2) = s\frac{\partial W}{\partial s} - u\frac{\partial W}{\partial u}. \tag{14}$$

2. Умножим уравнение (11) на s, уравнение (12) на u, уравнение (13) на $2z$ и сложим. Тогда в правой части мы получим следующее выражение:

$$-\left(u\frac{\partial W}{\partial u} + s\frac{\partial W}{\partial s} + z\frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

которое на основании теоремы Эйлера можно представить в виде $-\sum pW_p$, где W_2, W_3, ... — однородные функции u, s и z. Мы теперь имеем

$$\begin{gathered} s\,D^2u + u\,D^2s + 2z\,D^2z + 2\mathrm{m}(s\,Du - u\,Ds) + \\ + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u+s)^2 - 2\mathrm{m}^2z^2 - \frac{2\varkappa}{r} = -\sum pW_p. \end{gathered} \tag{15}$$

3. Умножим уравнение (11) на Ds, уравнение (12) на Du, уравнение (13) на $2\,Dz$ и сложим. Тогда

$$\begin{gathered} Ds\,D^2u + Du\,D^2s + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u+s)(Du + Ds) + \\ + 2\,Dz\,D^2z - 2\mathrm{m}^2z - \frac{\varkappa}{r^2}(u\,Ds + s\,Du + 2z\,Dz) = \\ = -\left(\frac{\partial W}{\partial u}Du + \frac{\partial W}{\partial s}Ds + \frac{\partial W}{\partial z}Dz\right). \end{gathered} \tag{16}$$

Член, содержащий множитель $\varkappa$, равен

$$-\frac{\varkappa}{r^3}D(us + z)^2 = -\frac{\varkappa}{r^3}D(r^2) = 2\varkappa D\left(\frac{1}{r}\right).$$

Кроме того, так как W — функция u, s, z и ζ (последняя величина вводится посредством t, входящего в координаты Солнца), то

$$DW = \frac{\partial W}{\partial u}Du + \frac{\partial W}{\partial s}Ds + \frac{\partial W}{\partial z}Dz + \frac{\partial W}{\partial \zeta}D\zeta.$$

Однако

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta}D\zeta = \zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta} = D_tW \equiv D\left(D^{-1}D_tW\right),$$

где D_tW означает применение оператора к W лишь постольку, поскольку W зависит от t (или от ζ) посредством координат Солнца, а D^{-1} — оператор, обратный D. Подставляя предыдущие формулы в уравнение (16) и интегрируя, мы получаем

$$DuDs + (Dz)^2 + \frac{3}{4}\mathrm{m}^2(u+s)^2 - \mathrm{m}^2z^2 + \frac{2\varkappa}{r} = C - W + D^{-1}(D_tW).$$

Сложим это уравнение с уравнением (15). В результате получим

$$D^2(us + z^2) - DuDs - (Dz)^2 + 2\mathfrak{m}(sDu - uDs) +$$
$$+ \frac{9}{4}\mathfrak{m}^2(u + s)^2 - 3\mathfrak{m}^2 z^2 = C - \sum (p + 1) W_p + D^{-1}(D_t W). \quad (17)$$

Уравнения (14), (17) и (13) являются новой формой уравнений Хилла. Заметим, что величина $\varkappa$ не входит в уравнения (14) и (17) и что мы ввели новую постоянную C. Мы еще вернемся к этому замечанию в дальнейшем.

§ 18.05. Промежуточная орбита

В теории движения планет в качестве первого приближения, когда отбрасываются возмущающие силы, принимается эллиптическая орбита. В теории Луны Понтекулана первым приближением является „модифицированная эллиптическая орбита“, посредством которой учитывается равномерное движение узла и перигея. Основным приближением в теории Хилла является частное решение уравнений движения, получаемое в предположении, что эксцентриситетом Солнца, его параллаксом и координатой z можно пренебречь, т. е. что $\Omega = W = z = 0$. Кривая линия, соответствующая этому частному решению, называется *промежуточной орбитой*. Как мы увидим дальше, это частное решение содержит только две произвольные постоянные. Промежуточная орбита является, конечно, только приближением к орбите Луны. Важное преимущество этой орбиты вытекает из следующих двух положений: 1) она с самого начала учитывает основную часть солнечных возмущений и 2) координаты Луны в промежуточном движении могут быть легко выражены сходящимися периодическими рядами, коэффициенты которых связаны сравнительно простыми рекуррентными соотношениями. Эти коэффициенты являются функциями $\mathfrak{m}$, численное значение которого известно с очень высокой степенью точности, и поэтому их можно вычислить со всей необходимой точностью.

Положим в уравнениях (8) и (9) § 18.03 $\Omega = z = 0$. Принимая вместо t переменную $\xi \equiv (n - n_1)(t - t_0)$ и учитывая то, что

$$\mathfrak{m} = \frac{n_1}{n - n_1}, \qquad \varkappa = \frac{\mu}{(n - n_1)^2},$$

мы перепишем названные уравнения в виде

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} - 2\mathfrak{m}\frac{dy}{d\xi} - 3\mathfrak{m}^2 x = -\frac{\varkappa x}{r^3}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\mathfrak{m}\frac{dx}{d\xi} = -\frac{\varkappa y}{r^3}. \quad (2)$$

В этих уравнениях мы будем рассматривать $\mathfrak{m}$ как малую величину — численное значение $\mathfrak{m}$ приблизительно равно 0,081. Если пренебречь величиной $\mathfrak{m}^2$, то легко видеть, что уравнения (1) и (2) допускают частное решение

$$x = \mathrm{a}\cos\xi, \quad y = \mathrm{a}\sin\xi \tag{3}$$

при условии, что

$$\frac{\varkappa}{\mathrm{a}^3} = 1 + 2m. \tag{4}$$

Общее решение уравнений (1) и (2) содержит, конечно, четыре произвольные постоянные. Решение (3) включает в себя две постоянные n и t_0, содержащиеся в формуле, определяющей ξ. Постоянная a выражается через $\mathfrak{m}$, n и μ, причем μ определяется формулой: $\mu = G(E+M)$ и рассматривается как известная величина.

Более точное решение можно записать в виде

$$x = \mathrm{a}(1+p)\cos\xi, \quad y = \mathrm{a}(1+q)\sin\xi,$$

где p и q — величины, имеющие по меньшей мере первый порядок малости относительно $\mathfrak{m}$. Поэтому, если пренебречь квадратами p и q и их произведением, то

$$r^2 = \mathrm{a}^2[1 + p + q + (p-q)\cos 2\xi]$$

и

$$\frac{\varkappa x}{r^3} = \frac{\varkappa}{\mathrm{a}^2}(1+p)\cos\xi\left[1 - \frac{3}{2}(p+q) - \frac{3}{2}(p-q)\cos 2\xi\right];$$

при этом последнее выражение, если его упростить, будет содержать член, содержащий множитель $\cos\xi\cdot\cos 2\xi$, который дает члены, зависящие от $\cos\xi$ и $\cos 3\xi$. Этот факт наводит на мысль, что более точно координата x должна выражаться следующей формулой:

$$x = \mathrm{a}(\cos\xi + p\cos\xi + r\cos 3\xi)$$

и, аналогично,

$$y = \mathrm{a}(\sin\xi + q\sin\xi + s\sin 3\xi).$$

Очевидно, что если p и q являются малыми по меньшей мере порядка $\mathfrak{m}$, то r и s будут малыми по крайней мере порядка $\mathfrak{m}^2$. Эти рассуждения легко продолжить, и, следуя Хиллу, мы предположим, что x и y можно представить рядами вида

$$x = A_0\cos\xi + A_1\cos 3\xi + A_2\cos 5\xi + \ldots,$$
$$y = B_0\sin\xi + B_1\sin 3\xi + B_2\sin 5\xi + \ldots,$$

в которых порядок A_j и B_j уменьшается вместе с возрастанием j. Хилл положил

$$A_j = \mathrm{a}(a_j + a_{-j-1}), \quad B_j = \mathrm{a}(a_j - a_{-j-1}), \tag{5}$$

где без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 1$. Однако ради симметрии мы оставим a_0 в общем виде, и его значение подставим тогда, когда это потребуется. Ряды для x и y могут быть теперь записаны в виде

$$x = \mathrm{a} \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \cos(2j+1)\xi,$$

$$y = \mathrm{a} \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \sin(2j+1)\xi.$$

Переменные u и s тогда будут представлены следующими рядами:

$$u = \mathrm{a} \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \zeta^{2j+1}, \quad s = \mathrm{a} \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \zeta^{-2j-1} \tag{6}$$

Последние выражения для u и s представляют *частное* решение уравнений (11) и (12) § 18.04 при $W = z = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$D^2 u + 2\mathrm{m} Du + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 (u+s) - \varkappa \frac{u}{r^3} = 0, \tag{7}$$

$$D^2 s - 2\mathrm{m} Ds + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 (u+s) - \varkappa \frac{s}{r^3} = 0, \tag{8}$$

причем a и $\varkappa$, как и в равенстве (4), рассматриваются как функции m.

Аналогично преобразованные уравнения (14) и (17) § 18.04 записываются в виде

$$D(u\,Ds - s\,Du - 2\mathrm{m}us) + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2 - s^2) = 0, \tag{9}$$

$$D^2(us) - DuDs + 2\mathrm{m}(s\,Du - u\,Ds) + \frac{9}{4} m^2 (u+s)^2 = C. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) будут использованы для получения выражений a_j в виде функций параметра m. После того как будут получены ряды (6) для u и s, выражение для $\varkappa/\mathrm{a}^3$ может быть найдено путем подстановки этих двух рядов в уравнение (7) или (8). Значение C, если это потребуется, получится аналогично из уравнения (10).

Заметим, что уравнения (7) и (8) не являются независимыми, так как каждое из них, будучи комплексным, дает одну и ту же пару уравнений для действительных координат.

§ 18.06. Умножение и деление рядов

При подстановке рядов[1]), которые мы запишем в виде

$$u = \mathrm{a} \sum a_i \zeta^{2i+1},$$
$$s = \mathrm{a} \sum a_i \zeta^{-2i-1}, \tag{1}$$

[1]) В оставшейся части главы знак $\sum$ означает, если не оговорено особо, суммирование от $-\infty$ до $+\infty$ по всем целым значениям i или какого-либо другого индекса, включая и нуль. Если необходимо различить два или более индексов, то соответствующий индекс указывается при знаке суммирования.

в преобразованные уравнения (9) и (10) предыдущего параграфа нужно произвести перемножение указанных рядов. В дальнейшем мы встретимся также с делением двух рядов. Здесь мы рассмотрим общие принципы тех преобразований, которые нужно проделать в уравнениях (9) и (10) § 18.05.

Отметим, во-первых, что если написать $2r+1$ вместо $-2l-1$, то ряд для s может быть представлен в виде

$$s = \mathrm{a}\sum a_{-r-1}\zeta^{2r+1} \tag{2}$$

и, во-вторых, что, поскольку s и u — сопряженные величины, мы можем написать

$$s = \mathrm{a}\sum a_l\zeta_1^{2l+1}, \tag{3}$$

где ζ_1 — величина, сопряженная ζ, т. е. $\zeta_1 = \exp[-\sqrt{-1}\,\xi]$.

Рассмотрим два ряда

$$U = \sum A_l\zeta^{2l+1}, \qquad V = \sum B_r\zeta^{2r+1}.$$

1) *Произведение* UV.

$$UV = \sum_l\sum_r A_lB_r\zeta^{2l+2r+2}.$$

Напишем $2j$ вместо $2l+2r+2$. Тогда

$$UV = \sum_l\sum_j A_lB_{j-l-1}\zeta^{2j} \equiv \sum C_j\zeta^{2j},$$

где

$$C_j = \sum_l A_lB_{j-l-1}. \tag{4}$$

Отсюда может быть вычислен любой из коэффициентов C, если известны величины A и B.

2) u^2. Здесь $U = V = u$, $A_l = a_l$, $B_r = a_r$. Поэтому, используя формулу (4), находим

$$u^2 = \mathrm{a}^2\sum_l\sum_j a_la_{j-l-1}\zeta^{2j}. \tag{5}$$

3) us. Здесь $U = u$, $V = s$, $A_l = a_l$ и, согласно формуле (2), $B_r = a_{-r-1}$. Поэтому

$$us = \mathrm{a}^2\sum_l\sum_j a_la_{l-j}\zeta^{2j}. \tag{6}$$

4) s^2. Так как s — величина, сопряженная с u, то согласно формуле (5) имеем

$$s^2 = \mathrm{a}^2\sum_l\sum_r a_la_{r-l-1}\zeta_1^{2r}$$

или, заменяя r на $-j$,

$$s^2 = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_j a_i a_{-i-j-1} \zeta^{2j}. \tag{7}$$

5) $s\,Du$. Так как $D = \zeta(d/d\zeta)$, то $Du = \mathrm{a} \sum (2i+1) a_i \zeta^{2i+1}$. Поэтому по аналогии с п. 3 будем иметь

$$s\,Du = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_j (2i+1) a_i a_{i-j} \zeta^{2j}. \tag{8}$$

Кроме того, мы имеем следующие легко выводимые разложения,

6) $$u\,Ds = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_j (2j-2i-1) a_i a_{i-j} \zeta^{2j}, \tag{9}$$

7) $$Du\,Ds = \mathrm{a}^2 \sum_i \sum_j (2i+1)(2j-2i-1) a_i a_{i-j} \zeta^{2j}. \tag{10}$$

8) *Отношение* U/V. Очевидно, что U/V имеет вид $\sum D_j \zeta^{2j}$. Поэтому

$$\sum A_i \zeta^{2i} = \sum_r \sum_j B_r D_j \zeta^{2r+2j} = \sum_i \sum_j B_{i-j} D_j \zeta^{2i}.$$

Приравнивая коэффициенты при ζ^{2i}, получаем

$$\sum_j B_{i-j} D_j = A_i. \tag{11}$$

Задавая i последовательно значения $0, +1, -1, +2, -2, \ldots$, мы получаем последовательность уравнений. На практике значения коэффициентов D определяются методом последовательных приближений.

§ 18.07. Общее выражение для a_j

Подставим теперь выведенные в предыдущем параграфе выражения для u^2, us, s^2, $s\,Du$ и т. д. в уравнения (9) и (10) § 18.05 и применим (там, где нужно) оператор D. Мы тогда получим

$$\sum_i \sum_j \Big\{ a_i a_{i-j} [4j(2i-j+1) + 4jm] - \\ - \frac{3}{2} \mathrm{m}^2 a_i (a_{j-i-1} - a_{-j-i-1}) \Big\} \zeta^{2j} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_i \sum_j \Big\{ a_i a_{i-j} \Big[4j^2 - (2i+1)(2j-2i-1) + 4\mathrm{m}(2i-j+1) + \frac{9}{2}\mathrm{m}^2 \Big] + \\ + \frac{9}{4} \mathrm{m}^2 a_i (a_{j-i-1} + a_{-j-i-1}) \Big\} \zeta^{2j} = C. \tag{2}$$

Эти равенства являются тождествами и поэтому в них коэффициенты при ζ^{2j} равны нулю, за исключением того случая, когда в формуле (2) $j=0$. Умножая равенство (1) на 3, а равенство (2) на 2, будем иметь

$$\sum_l \left\{ a_l a_{l-j} [12j(2l-j+1)+12j\mathrm{m}] - \right.$$
$$\left. -\frac{9}{2}\mathrm{m}^2 a_l (a_{j-l-1} - a_{-j-l-1}) \right\} = 0, \quad (3)$$

$$\sum_l \left\{ a_l a_{l-j} [8j^2 - (4l+2)(2j-2l-1) + 8\mathrm{m}(2l-j+1) + 9\mathrm{m}^2] + \right.$$
$$\left. + \frac{9}{2}\mathrm{m}^2 a_l (a_{j-l-1} + a_{-j-l-1}) \right\} = 0. \quad (4)$$

Вычтем уравнение (3) из уравнения (4), а затем сложим их. Тогда мы получим следующие два уравнения:

$$\sum_l a_l a_{l-j} A_{lj} + 9\mathrm{m}^2 \sum_l a_l a_{j-l-1} = 0, \quad (5)$$

$$\sum_l a_l a_{l-j} B_{lj} + 9\mathrm{m}^2 \sum_l a_l a_{-j-l-1} = 0, \quad (6)$$

где

$$A_{lj} = 20j^2 - 16j(2l+1) + 2(2l+1)^2 + \mathrm{m}(8+16l-20j) + 9\mathrm{m}^2, \quad (7)$$

$$B_{lj} = -4j^2 + 8j(2l+1) + 2(2l+1)^2 + \mathrm{m}(8+16l+4j) + 9\mathrm{m}^2. \quad (8)$$

Напомним, что в этих последних формулах $j \neq 0$, а l принимает все целые положительные и отрицательные значения, включая и нуль.

Пусть $\sum'$ означает суммирование по всем, *кроме нулевых*, целым значениям индексов. Тогда уравнения (5) и (6) можно записать в виде

$$a_0 a_{-j} A_{0j} + \sum' a_l a_{l-j} A_{lj} + 9\mathrm{m}^2 \sum a_l a_{j-l-1} = 0, \quad (9)$$

$$a_0 a_{-j} B_{0j} + \sum' a_l a_{l-j} B_{lj} + 9\mathrm{m}^2 \sum a_l a_{-j-l-1} = 0. \quad (10)$$

Умножим уравнение (9) на B_{0j}, уравнение (10) на A_{0j} и вычтем. Тогда получим

$$\sum' C_{lj} a_l a_{l-j} + 9\mathrm{m}^2 \sum a_l D_{lj} = 0, \quad (11)$$

где

$$C_{lj} = B_{0j} A_{lj} - A_{0j} B_{lj} =$$
$$= -48lj[4j^2 + 4j - 2 + 4l(j-1) + 4\mathrm{m}(j-l-1) + \mathrm{m}^2] \quad (12)$$

и

$$D_{lj} = B_{0j} a_{j-l-1} - A_{0j} a_{-j-l-1}. \quad (13)$$

Пусть, далее, $\sum''$ означает суммирование, когда $l \neq 0$ и $l \neq j$; тогда уравнение (11), если в нем выделить из $\sum'$ член при $l=j$, примет вид

$$a_0 a_j C_{jj} + \sum{}'' a_l a_{l-j} C_{lj} + 9\mathrm{m}^2 \sum{}' a_l D_{lj} = 0. \qquad (14)$$

Пусть

$$[j,\ l] = -\frac{C_{lj}}{C_{jj}}, \quad [j] = -\frac{9B_{0j}}{C_{jj}}, \quad (j) = \frac{9A_{0j}}{C_{jj}}. \qquad (15)$$

Тогда, полагая $a_0 = 1$ и используя формулу (13), мы приведем уравнение (14) к виду

$$a_j = \sum{}'' [j,\ l]\, a_l a_{l-j} + \mathrm{m}^2 [j] \sum{}' a_l a_{j-l-1} + \mathrm{m}^2 (j) \sum{}' a_l a_{-j-l-1}. \qquad (16)$$

Это и есть искомая формула, определяющая a_j. Выражения для $[j,\ l]$, $[j]$, (j) даются следующими формулами:

$$[j,\ l] = -\frac{l\,[4j^2 + 4j - 2 + 4l\,(j-1) + 4\mathrm{m}\,(j-l-1) + \mathrm{m}^2]}{j\,(8j^2 - 2 - 4\mathrm{m} + \mathrm{m}^2)}, \qquad (17)$$

$$[j] = \frac{3\,(-4j^2 + 8j + 4\mathrm{m}j + 2 + 8\mathrm{m} + 9\mathrm{m}^2)}{16j^2\,(8j^2 - 2 - 4\mathrm{m} + \mathrm{m}^2)}, \qquad (18)$$

$$(j) = -\frac{3\,(20j^2 - 16j - 20\mathrm{m}j + 2 + 8\mathrm{m} + 9\mathrm{m}^2)}{16j^2\,(8j^2 - 2 - 4\mathrm{m} + \mathrm{m}^2)}. \qquad (19)$$

Все эти три функции[1]) имеют нулевой порядок относительно m. Так как $j \neq 0$, то знаменатели этих выражений никогда не обращаются в нуль, и, таким образом, каждая функция может быть разложена, если это необходимо, в сходящийся ряд по степеням m или вычислена непосредственно, если подставить численное значение m.

Полагая в формуле (2) $j = 0$, можно получить, если это требуется, значение C.

§ 18.08. Вычисление коэффициентов a

1) Положим в формуле (16) предыдущего параграфа $j = 1$. Тогда

$$a_1 = \sum{}'' [1,\ l]\, a_l a_{l-1} + \mathrm{m}^2 [1] \sum{}' a_l a_{-l} + \mathrm{m}^2 (1) \sum{}' a_l a_{-l-2}.$$

В первой сумме $l \neq 1$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} a_1 = {} & [1,\ 2]\, a_1 a_2 + [1,\ 3]\, a_2 a_3 + \ldots + \\ & + [1,\ -1]\, a_{-1} a_{-2} + [1,\ -2]\, a_{-2} a_{-3} + \ldots + \\ & + \mathrm{m}^2 [1] \left[a_0^2 + 2a_1 a_{-1} + 2a_2 a_{-2} + \ldots\right] + \\ & + \mathrm{m}^2 (1)\, [a_0 a_{-2} + a_1 a_{-3} + \ldots]. \end{aligned} \qquad (1)$$

---

[1]) Хилл определил величины $[j]$ и (j) как коэффициенты при втором и третьем членах выражения (16). Таким образом, функции Хилла отличаются от функций, определенных формулами (15), множителем m^2. Однако, если возникает необходимость оценивать порядок различных членов, то представляется более удобным определять $[j]$ и (j) по формулам (15).

Из формул (5) § 18.05, очевидно, следует, что a_1, a_{-1}, ... имеют более высокий порядок, чем $a_0 (\equiv 1)$. Соответственно порядок a_1 определяется первым членом в третьей строке формулы (1), а именно $\mathrm{m}^2[1]$. Таким образом, a_1 является малой величиной порядка m^2.

2) Положим в формуле (16) § 18.07 $j = -1$. Тогда

$$a_{-1} = [-1, 1]\, a_1 a_2 + \ldots + \mathrm{m}^2[-1][a_{-1}a_{-1} + 2a_0 a_{-2} + \ldots] + \\ + \mathrm{m}^2(-1)\left[a_0^2 + 2a_1 a_{-1} + \ldots\right]. \qquad (2)$$

Следовательно, a_{-1} является малой величиной порядка m^2.

3) Положим $j = 2$. Тогда

$$a_2 = [2, 1]\, a_1 a_{-1} + [2, 3]\, a_3 a_1 + \ldots + [2, -1]\, a_{-1} a_{-3} + \ldots + \\ + \mathrm{m}^2[2][2a_0 a_1 + a_2 a_{-1} + a_{-1} a_2 + \ldots] + \\ + \mathrm{m}^2(2)[a_0 a_{-3} + a_1 a_{-4} + \ldots]. \qquad (3)$$

Если предположить, что абсолютное значение a_j уменьшается с увеличением $|j|$, то главная часть a_2 будет выражаться формулой

$$a_2 = [2, 1]\, a_1 a_{-1} + 2\mathrm{m}^2[2]\, a_1. \qquad (4)$$

Таким образом, a_2 есть малая величина порядка m^4.

4) Продолжая эти рассуждения дальше, мы увидим, что

a_r есть малая величина порядка $\mathrm{m}^{|2r|}$.

5) С точностью до малых величин порядка m^5 включительно из формул (1) и (2) находим соответственно

$$a_1 = \mathrm{m}^2[1],$$
$$a_{-1} = \mathrm{m}^2(-1).$$

Согласно формуле (18) § 18.07,

$$[1] = \frac{3}{16} \cdot \frac{6 + 12\mathrm{m} + 9\mathrm{m}^2}{6 - 4\mathrm{m} + \mathrm{m}^2}.$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням m, найдем

$$a_1 = \frac{3}{16}\mathrm{m}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}^3 + \frac{7}{12}\mathrm{m}^4 + \frac{11}{36}\mathrm{m}^5. \qquad (5)$$

Аналогично

$$a_{-1} = -\frac{19}{16}\mathrm{m}^2 - \frac{5}{3}\mathrm{m}^3 - \frac{43}{36}\mathrm{m}^4 - \frac{14}{27}\mathrm{m}^5. \qquad (6)$$

Коэффициент a_2, определенный формулой (4), можно теперь выразить через m. Аналогичным путем можно получить коэффициент a_{-2}.

6) С точностью до малых порядка m^7 включительно, как это видно из формулы (1), a_1 запишется так:

$$a_1=[1,\ 2]\,a_1a_2+[1,\ -1]\,a_{-1}a_{-2}+\mathrm{m}^2\,[1]\,[1+2a_1a_{-1}]+\mathrm{m}^2(1)\,a_{-2}.$$

Если первые приближения для a_1, a_2, a_{-1}, a_{-2} подставить в правую часть этого равенства, то можно найти a_1 с точностью до членов порядка m^7 включительно.

7) Изложенным здесь методом последовательных приближений можно легко получить выражения коэффициентов с любой требуемой точностью. Хилл нашел такие выражения с точностью до членов порядка m^9 включительно и, принимая для m значение

$$m=0{,}08084893380831 2, \tag{7}$$

вычислил соответствующие коэффициенты с 15 знаками после запятой.

Мы приведем выражения для всех коэффициентов с точностью до членов порядка m^6 включительно:

$$a_1=\text{Правая часть (5)}-\frac{30749}{2^{12}3^8}\,\mathrm{m}^6,\quad a_{-1}=\text{Правая часть (6)}-\frac{7381}{2^{10}\cdot 3^4}\,\mathrm{m}^6,$$

$$a_2=\frac{25}{256}\,\mathrm{m}^4+\frac{803}{1920}\,\mathrm{m}^5+\frac{6109}{7200}\,\mathrm{m}^6,\qquad a_3=\frac{833}{3\cdot 2^{12}}\,\mathrm{m}^6,$$

$$a_{-2}=\frac{23}{640}\,\mathrm{m}^5+\frac{299}{2400}\,\mathrm{m}^6,\qquad a_{-3}=\frac{1}{192}\,\mathrm{m}^6.$$

§ 18.09. Постоянная a

Мы будем исходить из уравнения (7) § 18.05, в котором, поскольку мы рассматриваем решение при $z=0$, положим $r^2=us$:

$$\left(D^2+2\mathrm{m}D+\frac{2}{3}\,\mathrm{m}^2\right)u+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2s=\frac{\varkappa u}{r^3}=\varkappa u^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{3}{2}}.$$

Подставив в него ряды для u и s, получим

$$\sum\left[(2l+1)^2+2\mathrm{m}\,(2l+1)+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2\right]a_l\zeta^{2l+1}+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2\sum a_l\zeta^{-2l-1}=$$
$$=\frac{\varkappa}{a^3}\left\{\left[\sum a_l\zeta^{2l+1}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\sum a_l\zeta^{-2l-1}\right]^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

Это равенство представляет собой тождество, справедливое при всех значениях ζ. Положим $\zeta=1$. Тогда

$$\frac{\varkappa}{a^3}=\left(\sum a_l\right)^2\left\{\sum\left[(2l+1)^2+2\mathrm{m}(2l+1)+3\mathrm{m}^2\right]a_l\right\}. \tag{1}$$

Определим a с помощью формулы

$$\mu = n^2 a^3. \tag{2}$$

Тогда, поскольку $\varkappa = \mu/(n - n_1)^2$, мы имеем

$$\varkappa = (1 + \mathfrak{m})^2 a^3. \tag{3}$$

Следовательно, формулу (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{a}{\mathrm{a}}\right)^3 = (1 + \mathfrak{m})^{-2} \left(\sum a_i\right)^2 \left\{\sum [(2i+1)^2 + 2\mathfrak{m}(2i+1) + 3\mathfrak{m}^2] a_i\right\}, \tag{4}$$

откуда, если подставить численное значение $\mathfrak{m}$, можно найти отношение a/a. Величину a/a можно также представить рядом по степеням $\mathfrak{m}$. С точностью до малых величин порядка $\mathfrak{m}^3$

$$\mathrm{a} = a\left(1 - \frac{1}{6}\mathfrak{m}^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{m}^3\right). \tag{5}$$

Это равенство, или, вернее, его развитие до членов требуемого порядка, дает нам возможность сравнить настоящую теорию с любой другой теорией, одной из постоянных которой является a.

§ 18.10. Вариация

В этом параграфе мы рассмотрим полярные координаты r и v, где v означает истинную долготу Луны. Средняя долгота Солнца равна $n_1 t + \varepsilon_1$ и, следовательно, поскольку $z = 0$, угол между осью x и направлением на Луну равен $v - n_1 t - \varepsilon_1$. Поэтому

$$x = r\cos(v - n_1 t - \varepsilon_1), \quad y = r\sin(v - n_1 t - \varepsilon_1).$$

Далее,

$$r\cos(v - nt - \varepsilon) \equiv r\cos(v - n_1 t - \varepsilon_1 - \xi) = \\ = x\cos\xi + y\sin\xi = \frac{1}{2}(u\zeta^{-1} + s\zeta). \tag{1}$$

Аналогично

$$r\sin(v - nt - \varepsilon) = -\frac{1}{2} i (u\zeta^{-1} - s\zeta). \tag{2}$$

Подставляя вместо u и s их выражения (6) § 18.05, мы будем иметь

$$r\cos(v - nt - \varepsilon) = \mathrm{a}[1 + (a_1 + a_{-1})\cos 2\xi + \\ + (a_2 + a_{-2})\cos 4\xi + \ldots], \tag{3}$$

$$r\sin(v - nt - \varepsilon) = \\ = \mathrm{a}[(a_1 - a_{-1})\sin 2\xi + (a_2 - a_{-2})\sin 4\xi + \ldots]. \tag{4}$$

1) Так как $r^2 = us$ $(z = 0)$, то при помощи формулы (6) § 18.06 легко найти r^2.

Выражение для $\varkappa/r$ можно легко получить из уравнения (15) § 18.04, в котором нужно положить $W=z=0$. Это уравнение тогда запишется следующим образом:

$$\frac{2\varkappa}{r}=sD^2u+uD^2s+2\mathrm{m}(sDu+uDs)+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u+s)^2. \tag{5}$$

2) Чтобы найти уравнение центра $v-nt-\varepsilon$, которое мы временно обозначим через θ, поделим равенство (2) на равенство (1):

$$i\operatorname{tg}\theta=\frac{u\zeta^{-1}-s\zeta}{u\zeta^{-1}+s\zeta}.$$

Следовательно,

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\equiv e^{2i\theta}=\frac{u\zeta^{-1}}{s\zeta}=\frac{\sum a_j\zeta^{2j}}{\sum a_j\zeta^{-2j}}=\frac{\sum a_j\zeta^{2j}}{\sum a_j\zeta_1^{2j}},$$

откуда

$$2i\theta=\ln\left(\sum a_j\zeta^{2j}\right)-\ln\left(\sum a_j\zeta_1^{2j}\right). \tag{6}$$

Далее,

$$\sum a_j\zeta^{2j}=1+\left(a_1\zeta^2+a_{-1}\zeta^{-2}\right)+\left(a_2\zeta^4+a_{-2}^{-4}\right)+\ldots$$

и

$$\ln\left(\sum a_j\zeta^{2j}\right)=-a_1a_{-1}+a_1\zeta^2+a_{-1}\zeta^{-2}+$$
$$+\left(a_2-\frac{1}{2}a_1^2\right)\zeta^4+\left(a_{-2}-\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)\zeta^{-4}+\ldots$$

Поэтому из формулы (6) мы получим

$$2i\theta=a_1\left(\zeta^2-\zeta_1^2\right)+a_{-1}\left(\zeta^{-2}-\zeta_1^{-2}\right)+\ldots$$

и

$$\theta=\left(a_1-a_{-1}\right)\sin 2\xi+\left(a_2-a_{-2}-\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_{-1}^2\right)\sin 4\xi+\ldots.$$

Следовательно, истинная долгота будет выражаться следующей формулой:

$$v=nt+\varepsilon+A_2\sin 2\xi+A_4\sin 4\xi+\ldots, \tag{7}$$

где A_{2j} имеет порядок $\mathrm{m}^{|2j|}$.

3) С точностью до малых порядка m^2 имеем

$$r=\mathrm{a}\left[1-\left(\mathrm{m}^2+\frac{7}{6}\mathrm{m}^3\right)\cos 2\xi\right], \tag{8}$$

$$v=nt+\varepsilon+\left(\frac{11}{8}\mathrm{m}^2+\frac{13}{6}\mathrm{m}^3\right)\sin 2\xi. \tag{9}$$

Возмущения в r и v, зависящие только от членов с аргументами $2j\xi$, называются *вариационными членами*.

Основной член в формуле (9) для долготы тот, который зависит от $\sin 2\xi$; обычно он называется просто *вариацией* (см. § 17.23).

§ 18.11. Перигей лунной орбиты

Мы будем исходить из уравнения (7) § 18.05, а именно

$$\left(D^2+2\mathrm{m}\,D+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2\right)u+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2 s=\varkappa\frac{u}{r^3}. \tag{1}$$

Частное решение уравнения (1), соответствующее промежуточной орбите, записывается следующим образом:

$$u=\mathrm{a}\sum a_i\zeta^{2i+1},\quad s=\mathrm{a}\sum a_i\zeta^{-2i-1},$$

где n и t_0 — постоянные интегрирования, введенные выше. Общее решение уравнения (1), эквивалентного двум уравнениям в действительных координатах, каждое из которых второго порядка, должно содержать четыре постоянные интегрирования, одна из которых, очевидно, тесно связана с эксцентриситетом мгновенной орбиты Луны.

Пусть $u+\Delta u$, $s+\Delta s$ удовлетворяют уравнениям (1), где u и s определяются приведенными выше формулами. Для удобства мы положим $\rho^2=us$ и $r^2=(u+\Delta u)(s+\Delta s)$. Отбрасывая квадраты и произведение величин Δu и Δs, получаем

$$r^2=\rho^2+u\,\Delta s+s\,\Delta u. \tag{2}$$

Так как уравнение (1) удовлетворяется величинами u и s при условии, что r заменено на ρ, то уравнение для Δu и Δs будет иметь вид

$$\left(D^2+2\mathrm{m}D+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2\right)\Delta u+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2\,\Delta s=\frac{\varkappa\,(u+\Delta u)}{r^3}-\frac{\varkappa u}{\rho^3}.$$

Легко видеть, что при помощи формулы (2) правую часть этого уравнения можно привести к виду

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa}{\rho^3}\left(\Delta u+3\,\frac{u}{s}\,\Delta s\right).$$

Поэтому имеем

$$\left(D^2+2\mathrm{m}\,D+\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2+\frac{\varkappa}{2\rho^3}\right)\Delta u+\left(\frac{3}{2}\,\mathrm{m}^2+\frac{3}{2}\,\frac{\varkappa}{\rho^3}\cdot\frac{u}{s}\right)\Delta s=0. \tag{3}$$

Далее,

$$DX\equiv D\left[\zeta\left(\zeta^{-1}X\right)\right]=\zeta D\left(\zeta^{-1}X\right)+\zeta\left(\zeta^{-1}X\right)=\zeta\,(D+1)\left(\zeta^{-1}X\right),$$

$$D^2X=\zeta\left(D^2+D\right)\left(\zeta^{-1}X\right)+\zeta\,(D+1)\left(\zeta^{-1}X\right)=\zeta\,(D+1)^2\left(\zeta^{-1}X\right).$$

Преобразуя посредством этих формул уравнение (3), мы получаем

$$\left[(D+1+m)^2+\frac{1}{2}\left(\mathrm{m}^2+\frac{\varkappa}{\rho^3}\right)\right](\zeta^{-1}\Delta u)+N(\zeta\Delta s)=0, \tag{4}$$

где

$$N=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\zeta^{-2}+\frac{3}{2}\frac{\varkappa}{\rho^3}\cdot\frac{u\zeta^{-1}}{s\zeta}. \tag{5}$$

В дальнейшем мы покажем, что решение уравнения (4) определяет движение перигея Луны. Для будущего нам, однако, необходимо разложить в ряды величины $\mathrm{m}^2+(\varkappa/\rho^3)$ и N.

§ 18.12. Разложение в ряды величин $\frac{\varkappa}{\rho^3}+\mathrm{m}^2$ и N

1) Очевидно, что если возвести в квадрат равенства (3) и (4) § 18.10 и сложить, то r^2 представится рядом по $\cos 2j\xi$, причем r будет иметь здесь значение, приписываемое величине ρ. Очевидно также, что ρ^{-3} будет аналогичным рядом по косинусам.

Из формулы (1) § 18.11, если заменить r на ρ, имеем

$$\frac{\varkappa}{\rho^3}=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2+\frac{(D^2+2\mathrm{m}D)u+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2 s}{u}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}(D^2+2\mathrm{m}D)u&=\mathrm{a}\zeta\sum[(2j+1)^2+2\mathrm{m}(2j+1)]a_j\zeta^{2j}=\\&=(1+2\mathrm{m})u+\mathrm{a}\zeta\sum[4j(j+1+\mathrm{m})a_j\zeta^{2j}].\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\varkappa}{\rho^3}+\mathrm{m}^2=1+2\mathrm{m}+\frac{5}{2}\mathrm{m}^2+\frac{\sum\left[4j(j+1+\mathrm{m})a_j+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-j-1}\right]\zeta^{2j}}{\sum a_r\zeta^{2r}}. \tag{1}$$

Обозначим отношение, входящее в правую часть этого равенства, через $\sum A_i\zeta^{2i}$. Тогда

$$\left[\sum_r a_r\zeta^{2r}\right]\left[\sum A_i\zeta^{2i}\right]\equiv\sum_i\sum_j a_{j-i}A_i\zeta^{2j}.$$

Приравнивая коэффициенты при ζ^{2j}, мы получаем

$$\sum_i a_{j-i}A_i=4j(j+1+\mathrm{m})a_j+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-j-1}. \tag{2}$$

Это равенство справедливо при всех положительных или отрицательных целых значениях j, включая и нуль. Например, для $j=0,\ 1,\ -1,$

соответственно будем иметь

$$a_0A_0+a_{-1}A_1+a_1A_{-1}+\ \ldots=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-1}, \tag{3}$$

$$a_0A_1+a_1A_0+a_2A_{-1}+\ \ldots=4(2+\mathrm{m})a_1+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_{-2}, \tag{4}$$

$$a_0A_{-1}+a_{-1}A_0+a_{-2}A_1+\ \ldots=-4\mathrm{m}a_{-1}+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_0. \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5), очевидно, следует, что A_1 и A_{-1} являются малыми порядка m^2, а из равенства (3) получаем, что A_0 — малая порядка m^4.

Полагая в уравнении (2) $j=2$, а затем $j=-2$, найдем, что A_2 и A_{-2} — малые порядка m^4.

Далее, так как правая часть равенства (1) разлагается в ряд по косинусам, то $A_l=A_{-l}$.

Приведем еще некоторые результаты:

$$A_1=A_{-1}=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}a_{-1},$$

$$A_0=-\frac{3}{2}\mathrm{m}^2a_1+4\mathrm{m}a_{-1}(a_1+a_{-1}),$$

$$A_2=A_{-2}=8(1-\mathrm{m})a_{-2}+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(a_1-a_{-1})+4\mathrm{m}a_{-1}^2;$$

при этом выражения для A_1 и A_2 даются с точностью до малых порядка m^5 включительно, а A_0 дано с точностью до малых порядка m^7. Перепишем теперь равенство (1) в виде

$$\frac{\varkappa}{\rho^3}+\mathrm{m}^2=1+2\mathrm{m}+\frac{5}{2}\mathrm{m}^2+A_0+\sum{}' A_l\zeta^{2l}, \tag{6}$$

или, в более удобной форме,

$$\frac{\varkappa}{\rho^3}+\mathrm{m}^2=2\sum M_l\zeta^{2l}=2M_0+2\sum{}' M_l\zeta^{2l}, \tag{7}$$

где

$$2M_0=1+2\mathrm{m}+\frac{5}{2}\mathrm{m}^2+A_0 \tag{8}$$

и

$$2M_l=2M_{-l}=A_l. \tag{9}$$

Кроме того, напишем

$$\frac{\varkappa}{\rho^3}=2\sum M_l'\zeta^{2l}, \tag{10}$$

где $2M_0'=2M_0-\mathrm{m}^2$ и $M_l'=M_l$, если $l\neq 0$.

2) Рассмотрим теперь формулу (5) § 18.11 для N. Мы имеем

$$N=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\zeta^{-2}+\frac{3}{2}\frac{\varkappa}{\rho^3}\cdot\frac{u\zeta^{-1}}{s\zeta}. \tag{11}$$

Пусть E означает второй член правой части этого выражения. Тогда, используя равенство (10), будем иметь

$$\frac{2}{3}E = \frac{2\left[\sum M_i'\zeta^{2i}\right]\left[\sum a_r\zeta^{2r}\right]}{\sum a_{-r}\zeta^{2r}} = \sum \nu_i\zeta^{2i}.$$

При помощи приема, аналогичного тому, который применялся к дроби в формуле (1), мы найдем, что формула, определяющая ν и аналогичная (2), имеет вид

$$\sum_i \nu_i a_{i-j} = 2\sum_i M_i' a_{j-i}. \tag{12}$$

Положим

$$N = \sum N_i\zeta^{2i}, \tag{13}$$

где

$$N_{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 + \frac{3}{2}\nu_{-1}, \qquad N_i = \frac{3}{2}\nu_i \quad (i \neq -1), \tag{14}$$

а N_i имеет порядок $\mathrm{m}^{|2i|}$. С точностью до членов порядка m^4 включительно из равенства (12) мы без труда найдем, что

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 2M_0'\left[1 - (a_1 - a_{-1})^2\right], \\ \nu_1 &= 2M_1 + 2M_0'(a_1 - a_{-1}), \\ \nu_{-1} &= 2M_1 - 2M_0'(a_1 - a_{-1}). \end{aligned} \tag{15}$$

§ 18.13. Выражения для Δu и Δs

Наше основное уравнение (4) § 18.11 при помощи формул (7) и (13) предыдущего параграфа приводится к виду

$$\left[(D + 1 + \mathrm{m})^2 + \sum M_i\zeta^{2i}\right](\zeta^{-1}\Delta u) + \left[\sum N_i\zeta^{2i}\right](\zeta\,\Delta s) = 0, \tag{1}$$

где M и N предполагаются известными функциями m. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\zeta^{-1}\Delta u = \mathrm{a}\left[e^{-\omega\sqrt{-1}}\sum e_r\zeta^{2r+\mathrm{c}} + e^{\omega\sqrt{-1}}\sum f_r\zeta^{2r-\mathrm{c}}\right], \tag{2}$$

$$\zeta\,\Delta s = \mathrm{a}\left[e^{\omega\sqrt{-1}}\sum e_r\zeta^{-2r-\mathrm{c}} + e^{-\omega\sqrt{-1}}\sum f_r\zeta^{-2r+\mathrm{c}}\right]. \tag{3}$$

Примем ω и e_0 в качестве двух дополнительных произвольных постоянных и будем рассматривать c как некоторую неопределенную постоянную. Подставим равенства (2) и (3) в уравнение (1) и положим $i + r = j$ в тех членах, которые зависят от M и N, и $r = j$ в других членах. Тогда будем иметь

$$\sum_j e^{-\omega\sqrt{-1}}\zeta^{2j+\mathrm{c}}\left[e_j(2j + \mathrm{c} + 1 + \mathrm{m})^2 + \sum_i (M_i e_{j-i} + N_i f_{i-j})\right] +$$
$$+ \sum_j e^{\omega\sqrt{-1}}\zeta^{2j-\mathrm{c}}\left[f_j(2j - \mathrm{c} + 1 + \mathrm{m})^2 + \sum_i M_i f_{j-i} + N_i e_{i-j}\right] = 0.$$

Это равенство является тождеством, поэтому для любого значения j имеем

$$e_j(2j+c+1+m)^2+\sum_i (M_i e_{j-i}+N_i f_{i-j})=0, \tag{4}$$

$$f_j(2j-c+1+m)^2+\sum_i (M_i f_{j-i}+N_i e_{i-j})=0. \tag{5}$$

Запишем равенство (4) в виде

$$e_j\left[(2j+c+1+m)^2+M_0\right]+N_0 f_{-j}+\sum_i{}' (M_i e_{j-i}+N_i f_{i-j})=0. \tag{6}$$

Если заменить в уравнении (5) j на $-j$, то оно примет вид

$$\begin{gathered} f_{-j}\left[(2j+c-1-m)^2+M_0\right]+ \\ +N_0 e_j+\sum_i{}' \left(M_i f_{-j-i}+N_i e_{j+i}\right)=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Исключая из уравнений (6) и (7) f_{-j}, мы получаем некоторое уравнение относительно e_j. Аналогично, если исключить из уравнений (6) и (7) e_j, то получим уравнение для f_{-j}. Эти уравнения могут быть решены методом последовательных приближений, т. е. методом, который использовался при определении a_j в § 18.07.

Из уравнений (6) и (7) видно, что при $j=0$ существует некоторое линейное соотношение между e_0, остальными e и всеми f. Очевидно, что для всех значений j мы можем определить величины e_j/e_0 и f_j/e_0. Поэтому предположим, что e_0 есть произвольная постоянная, причем четвертой произвольной постоянной будет ω.

§ 18.14. Приближенное значение c

Из уравнений (6) и (7) предыдущего параграфа нетрудно усмотреть, что e_1/e_0 и f_{-1}/e_0 являются малыми величинами по меньшей мере порядка m. Мы предположим, что порядок e_j/e_0 и f_{-j}/e_0 прогрессивно увеличивается с увеличением $|j|$. Положим в уравнениях (6) и (7) § 18.13 $j=0$; тогда с точностью до малых порядка m^2 будем иметь

$$e_0\left[(c+1+m)^2+M_0\right]+N_0 f_0=0, \tag{1}$$

$$e_0 N_0+f_0\left[(c-1-m)^2+M_0\right]=0, \tag{2}$$

откуда

$$\left[(c+1+m)^2+M_0\right]\left[(c-1-m)^2+M_0\right]-N_0^2=0. \tag{3}$$

Это уравнение дает нам возможность определить постоянную c с точностью до малых порядка m^2 включительно. Далее, из формул (8) и (14) § 18.12 с точностью до малых порядка m^2 включительно имеем

$$2M_0 = 1 + 2\mathrm{m} + \frac{5}{2}\mathrm{m}^2, \quad N_0^2 = 9M_0^2 - \frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Поэтому уравнение (3) примет вид

$$\left[\mathrm{c}^2 - (1+\mathrm{m})^2\right]^2 + 2M_0\left[\mathrm{c}^2 + (1+\mathrm{m})^2\right] = 8M_0^2 - \frac{9}{2}\mathrm{m}^2,$$

или

$$[\mathrm{c}^2 - (1+\mathrm{m})^2]^2 + 2M_0[\mathrm{c}^2 - (1+\mathrm{m})^2] = 4M_0[2M_0 - (1+\mathrm{m})^2] - \frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

Правая часть этого уравнения имеет порядок m^2, поэтому с точностью до членов порядка m имеем

$$\mathrm{c} = 1 + \mathrm{m}.$$

Во втором приближении, которое определяется весьма легко, c оказывается равным

$$\mathrm{c} = 1 + \mathrm{m} - \frac{3}{4}\mathrm{m}^2. \tag{4}$$

Мы можем теперь вычислить постоянные e и f.

1) f_0. Из формул (2) и (4) находим, что

$$f_0 = -e_0 \cdot \frac{N_0}{M_0} = -3(1-\mathrm{m}^2)e_0.$$

2) e_{-1} и f_1. Положим в уравнениях (6) и (7) § 18.13 $j = -1$. Тогда с точностью до малых порядка m^2 включительно будем иметь

$$e_1[(\mathrm{c} - 1 + \mathrm{m})^2 + M_0] + N_0 f_1 = -M_{-1}e_0 - N_{-1}f_0,$$
$$e_{-1}N_0 + f_1[(3 + \mathrm{m} - \mathrm{c})^2 + M_0] = -M_1 f_0 - N_1 e_0.$$

Если выражение (4) для c подставить в последние уравнения и исключить из них f_1, то нетрудно найти e_{-1}. С точностью до малых порядка m получим

$$e_{-1} = -\frac{45}{8}\mathrm{m}e_0.$$

После этого находим, что

$$f_1 = \frac{15}{8}\mathrm{m}e_0.$$

3) Положим в уравнениях (6) и (7) § 18.13 $j = 1$. Тогда легко увидеть, что e_1 и f_{-1} являются малыми порядка m^2. Вообще, если r — *положительное* целое число, то e_{-r} и f_r имеют порядок m^{2r-1}, а e_r и f_{-r} — порядок m^{2r}.

§ 18.15. Эвекция

В этом параграфе мы рассмотрим выражения для Δu и Δs с точностью до малых порядка m. При этом мы пренебрежем всеми коэффициентами e и f, кроме e_{-1} и f_1. Из формул (2) и (3) § 18.13 мы получаем

$$\zeta^{-1}\frac{\Delta u}{\mathrm{a}} = e^{-i\omega}\left(e_0\zeta^{\mathrm{c}} + e_{-1}\zeta^{\mathrm{c}-2}\right) + e^{i\omega}\left(f_0\zeta^{-\mathrm{c}} + f_1\zeta^{2-\mathrm{c}}\right), \tag{1}$$

$$\zeta\frac{\Delta s}{\mathrm{a}} = e^{i\omega}\left(e_0\zeta^{-\mathrm{c}} + e_{-1}\zeta^{2-\mathrm{c}}\right) + e^{-i\omega}\left(f_0\zeta^{\mathrm{c}} + f_1\zeta^{\mathrm{c}-2}\right), \tag{2}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Кроме того, с точностью до малых порядка m имеем $u = \mathrm{a}\zeta$, $s = \mathrm{a}\zeta^{-1}$, так что $\rho = \mathrm{a}$ и, согласно формуле (2) § 18.11,

$$\left(\frac{r}{\mathrm{a}}\right)^2 = 1 + \frac{s\,\Delta u + u\,\Delta s}{\mathrm{a}^2} = 1 + \frac{\zeta^{-1}\,\Delta u + \zeta\,\Delta s}{\mathrm{a}}.$$

Поэтому при помощи формул (1) и (2) находим

$$\left(\frac{r}{\mathrm{a}}\right)^2 = 1 + 2\,(e_0 + f_0)\cos(\mathrm{c}\xi - \omega) + 2\,(e_{-1} + f_{-1})\cos[(\mathrm{c} - 2)\,\xi - \omega].$$

Подставим сюда выражения f_0, e_{-1} и f_1 через e_0, выведенные в предыдущем параграфе. Положим $\mathrm{e} = 2e_0$ и воспользуемся формулой (5) § 18.09; тогда

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e\cos(\mathrm{c}\xi - \omega) - \frac{15}{4}\,\mathrm{m}\,\mathrm{e}\cos[(\mathrm{c} - 2)\,\xi - \omega],$$

откуда

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\cos(c\xi - \omega) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2\cos 2\,(\mathrm{c}\xi - \omega) -$$
$$- \frac{15}{8}\,\mathrm{m}\,\mathrm{e}\cos[(\mathrm{c} - 2)\,\xi - \omega]. \tag{3}$$

В этой формуле постоянная e соответствует эксцентриситету эллиптической орбиты. Последний член, который пропорционален me, является наиболее значительным возмущением в радиусе-векторе, зависящем от m.

Рассмотрим теперь возмущения в долготе. В п. 2 § 18.10 мы обозначили уравнение центра через θ ($\equiv v - nt - \varepsilon$) и имели

$$e^{2i\theta} = \frac{u\zeta^{-1}}{s\zeta}.$$

Если θ_0 есть та часть θ, которая зависит только от m, а $\Delta\theta$ — та часть, которая зависит от e, то

$$e^{2i(\theta_0 + \Delta\theta)} = \frac{\zeta^{-1}(u + \Delta u)}{\zeta\,(s + \Delta s)},$$

откуда

$$2i\,\Delta\theta = \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta s}{s},$$

или, поскольку с точностью до малых порядка m имеем $u\zeta^{-1} = s\zeta = \mathrm{a}$,

$$2i\,\Delta\theta = \frac{1}{\mathrm{a}}\left(\zeta^{-1}\,\Delta u + \zeta\,\Delta s\right).$$

Поэтому из формул (1) и (2) мы получим

$$\Delta\theta = (e_0 - f_0)\sin(\mathrm{c}\xi - \omega) + (e_{-1} - f_1)\sin[(\mathrm{c} - 2)\xi - \omega],$$

или, если ввести e,

$$\Delta\theta = 2\mathrm{e}\sin(\mathrm{c}\xi - \omega) - \frac{15}{4}\,\mathrm{m\,e}\sin[(\mathrm{c} - 2)\xi - \omega]. \qquad (4)$$

Последний член в этой формуле называется эвекцией.

§ 18.16. Движение перигея

Согласно предыдущему параграфу, уравнение центра θ обозначается через $\theta_0 + \Delta\theta$. Часть θ_0 дается формулой (9) § 18.10 и, с точностью до малых порядка m, $\theta_0 = 0$, т. е. $v = nt + \varepsilon$. Используя выражение (4) предыдущего параграфа для $\Delta\theta$, мы с точностью до членов порядка m включительно имеем

$$v = nt + 2\mathrm{e}\sin(\mathrm{c}\xi - \omega) + \text{эвекция}.$$

Кроме того, согласно формуле (3) § 18.15,

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\cos(\mathrm{c}\xi - \omega) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2\cos 2(\mathrm{c}\xi - \omega) + \text{эвекция}.$$

Для мгновенной эллиптической орбиты, понимая под e эксцентриситет e, имеем

$$v = nt + 2\mathrm{e}\sin M,$$
$$r = a\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\cos M + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2\cos 2M\right),$$

где M $(\equiv nt + \varepsilon - \tilde{\omega})$ — средняя аномалия.

Сравним аргументы, входящие в формулы для v и r, с величиной $(\mathrm{c}\xi - \omega)$. Обозначим эту величину через ψ. Тогда мы можем написать

$$\psi = nt + \left(\frac{\mathrm{c}}{1 + \mathrm{m}} - 1\right)nt + \varepsilon - \tilde{\omega}_0, \qquad (1)$$

где

$$\tilde{\omega}_0 \equiv \mathrm{c}\varepsilon_1 + (1 - \mathrm{c})\,\varepsilon - \omega \equiv \mathrm{const}.$$

Сравнивая формулу (1) с выражением $nt+\varepsilon-\tilde{\omega}$, т. е. с M, находим, что они отличаются друг от друга на величину

$$\tilde{\omega}-\omega_0+\left(1-\frac{\mathrm{c}}{1+\mathrm{m}}\right)nt.$$

Используя формулу (4) § 18.14, получим с точностью до малых величин порядка m^2

$$\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_0+\frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2nt. \tag{2}$$

Таким образом, долгота перигея увеличивается со скоростью $\left(1-\frac{\mathrm{c}}{1+\mathrm{m}}\right)n$ или $^3/_4\mathrm{m}^2n$. Из формулы (1) следует, что соотношение между величиной c в настоящей теории и постоянной Понтекулана c имеет вид

$$\mathrm{c}=(1+\mathrm{m})\,c.$$

§ 18.17. Замечания к предыдущим параграфам

В § 18.14 мы описали метод определения коэффициентов e_j и f_j в зависимости от m и, как мы видели, этот метод включает в себя *одновременное* вычисление c. Очевидно, что эта работа является утомительной и трудоемкой даже в том случае, когда речь идет о первом и втором приближениях. Если бы мы нашли более точное численное значение c или представили его в виде ряда по степеням m, например до членов порядка m^8, то e_j и f_j определялись бы с очень большой экономией труда. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы описать независимый метод вычисления c. При этом потребуется перейти к новым координатам и вывести уравнение, определяющее c, для чего нужно будет рассмотреть некоторый бесконечный определитель.

§ 18.18. Предварительные формулы

В системе осей, вращающихся с угловой скоростью n_1, уравнения движения точки $P(x, y)$ по промежуточной орбите CP (рис. 26) получаются из уравнений (8) и (9) § 18.03 в предположении, что $\Omega=z=0$. Они имеют вид

$$\ddot{x}-2n_1\dot{y}-3n_1^2x=-\frac{\mu x}{r^3}, \tag{1}$$

$$\ddot{y}+2n_1\dot{x}\qquad\qquad=-\frac{\mu y}{r^3}, \tag{2}$$

или

$$\ddot{x} - 2n_1\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\ddot{y} + 2n_1\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{4}$$

где

$$F = \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2} n_1^2 x^2. \tag{5}$$

Умножим уравнения (3) и (4) соответственно на $\dot{x}$ и $\dot{y}$, сложим и проинтегрируем. В результате получим интеграл Якоби:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \equiv v^2 = 2F + k, \tag{6}$$

где k — постоянная, v — скорость P во вращающейся системе координат. Так как CP — часть промежуточной орбиты, то мы можем

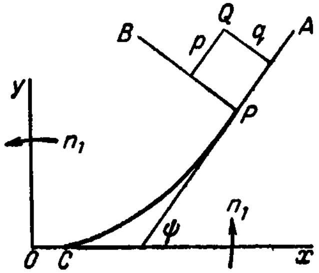

Рис. 26.

считать, что координаты x и y, которые выражаются через комплексные переменные u и s, известны.

Пусть касательная к CP в точке P образует с осью x угол ψ. Тогда

$$\dot{x} = v\cos\psi, \quad \dot{y} = v\sin\psi. \tag{7}$$

Для простоты мы положим

$$C \equiv \cos\psi, \quad S \equiv \sin\psi.$$

Из интеграла (6) имеем

$$v\dot{v} = \frac{dF}{dt} = \dot{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Поэтому

$$\dot{v} = C\frac{\partial F}{\partial x} + S\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{8}$$

Умножим уравнение (3) на $\dot{y}$, а уравнение (4) на $\dot{x}$ и вычтем. Тогда получим

$$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}+2n_1v^2=v\left(-S\frac{\partial F}{\partial x}+C\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Однако из равенств (7) немедлснно находим

$$\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=v^2\psi. \tag{9}$$

Следовательно,

$$v(\dot{\psi}+2n_1)=-S\frac{\partial F}{\partial x}+C\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{10}$$

откуда, используя соотношение (8), получаем

$$v\ddot{\psi}+\dot{v}(\dot{\psi}+2n_1)=-\dot{v}\dot{\psi}-S(\dot{x}F_{xx}+\dot{y}F_{xy})+C(\dot{x}F_{xy}+\dot{y}F_{yy})$$

или

$$v\ddot{\psi}+2\dot{v}(\dot{\psi}+n_1)=vP, \tag{11}$$

где

$$P=-SC(F_{xx}-F_{yy})+(C^2-S^2)F_{xy}. \tag{12}$$

§ 18.19. Интеграл Якоби в общем случае

Пусть на рис. 26 точка $Q(X, Y)$, соответствующая точке $P(x, y)$ промежуточной орбиты, лежит на действительной орбите, зависящей от четырех произвольных постоянных. Положим $X=x+\Delta x$, $Y=y+\Delta y$. Тогда X, Y будут удовлетворять уравнениям (3) и (4) § 18.18, так что

$$\ddot{x}+\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)-2n_1\left[\dot{y}+\frac{d}{dt}(\Delta y)\right]=F_x+\Delta xF_{xx}+\Delta yF_{xy},$$

$$\ddot{y}+\frac{d^2}{dt^2}(\Delta y)+2n_1\left(\dot{x}+\frac{d}{dt}(\Delta x)\right)=F_y+\Delta xF_{xy}+\Delta yF_{yy}.$$

Поэтому уравнения, которым удовлетворяют Δx и Δy, запишутся в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)-2n_1\frac{d}{dt}(\Delta y)=\Delta xF_{xx}+\Delta yF_{xy}\equiv\Delta F_x, \tag{1}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta y)+2n_1\frac{d}{dt}(\Delta x)=\Delta xF_{xy}+\Delta yF_{yy}\equiv\Delta F_y. \tag{2}$$

Умножим уравнения (3) и (4) § 18.18 на $\frac{d}{dt}(\Delta x)$ и $\frac{d}{dt}(\Delta y)$, а уравнения (1) и (2) на $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и сложим. Тогда мы будем иметь

$$\sum_{xy}\left[\ddot{x}\frac{d}{dt}(\Delta x)+\dot{x}\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)\right]=F_x\frac{d}{dt}(\Delta x)+F_y\frac{d}{dt}(\Delta y)+$$

$$+\Delta x(\dot{x}F_{xx}+\dot{y}F_{xy})+\Delta y(\dot{x}F_{xy}+\dot{y}F_{yy}).$$

Так как последние два члена можно записать в виде

$$\Delta x \frac{d}{dt}(F_x) + \Delta y \frac{d}{dt}(F_y),$$

то мы получим

$$\sum_{xy} \frac{d}{dt}\left[\dot{x} \frac{d}{dt}(\Delta x)\right] = \frac{d}{dt}(\Delta x F_x + \Delta y F_y)$$

и, интегрируя, находим

$$\dot{x} \frac{d}{dt}(\Delta x) + \dot{y} \frac{d}{dt}(\Delta y) = \Delta x F_x + \Delta y F_y. \tag{3}$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как левая и правая части должны обращаться в нуль, когда $\Delta x = \Delta y = 0$.

Следует заметить, что Δx и Δy связаны с комплексными величинами Δu и Δs предыдущих параграфов соотношениями

$$\Delta u = \Delta x + i\,\Delta y, \quad \Delta s = \Delta x - i\,\Delta y. \tag{4}$$

§ 18.20. Переход к новым координатам

На рис. 26 PA — касательная к промежуточной орбите в точке P и PB — нормаль к PA, направленная в сторону возрастания угла ψ. Пусть координаты точки Q, отнесенные к осям PA и PB, суть p и q. Тогда

$$\Delta x = pC - qS, \quad \Delta y = pS + qC \tag{1}$$

и

$$p = C\,\Delta x + S\,\Delta y, \quad q = -S\,\Delta x + C\,\Delta y. \tag{2}$$

Согласно уравнению (1),

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = \dot{p}C - \dot{q}S - \dot{\psi}\,\Delta y, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta y) = \dot{p}S + \dot{q}C + \dot{\psi}\,\Delta x. \tag{4}$$

Умножим уравнение (3) на $\dot{x}$, а уравнение (4) на $\dot{y}$ и сложим. Тогда, поскольку $\dot{x} = vC$, $\dot{y} = vS$, интеграл Якоби (3) § 18.19 примет вид

$$v(\dot{p} - q\dot{\psi}) = p(CF_x + SF_y) + q(-SF_x + CF_y),$$

или вследствие формул (8) и (10) § 18.18

$$v(\dot{p} - q\dot{\psi}) = p\dot{v} + qv(\dot{\psi} + 2n_1)$$

или, наконец,

$$v\dot{p} - p\dot{v} = 2vq(\dot{\psi} + n_1). \tag{5}$$

Из равенств (3) и (4) имеем

$$C\frac{d}{dt}(\Delta x) + S\frac{d}{dt}(\Delta y) = \dot{p} - q\dot{\psi}, \tag{6}$$

$$-S\frac{d}{dt}(\Delta x) + C\frac{d}{dt}(\Delta y) = \dot{q} + p\dot{\psi}. \tag{7}$$

Продифференцируем равенство (7) и воспользуемся формулой (6). Тогда получим

$$E \equiv -S\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x) + C\frac{d^2}{dt^2}(\Delta y) = \dot{\psi}(\dot{p} - q\dot{\psi}) + \ddot{q} + \dot{p}\dot{\psi} + p\ddot{\psi}. \tag{8}$$

Но из уравнения (1) и (2) § 18.19, а также из приведенного выше равенства (6) имеем

$$E = -2n_1(\dot{p} - q\dot{\psi}) - S\,\Delta F_x + C\,\Delta F_y.$$

Поэтому равенство (8) примет вид

$$\ddot{q} + p\ddot{\psi} + 2\dot{p}(\dot{\psi} + n_1) - q\dot{\psi}(\dot{\psi} + 2n_1) = -S\,\Delta F_x + C\,\Delta F_y. \tag{9}$$

Легко видеть, что правая часть этого уравнения равна $pP + qQ$, где P дается формулой (12) § 18.18, а Q — равенством

$$Q = S^2F_{xx} - 2CSF_{xy} + C^2F_{yy}. \tag{10}$$

Уравнение (9) тогда примет вид

$$\ddot{q} + p(\ddot{\psi} - P) + 2\dot{p}(\dot{\psi} + n_1) = q[\dot{\psi}(\dot{\psi} + 2n_1) + Q].$$

Принимая во внимание формулу (11) § 18.18, получаем

$$\ddot{q} - 2\left(p\frac{\dot{v}}{v} - \dot{p}\right)(\dot{\psi} + n_1) = q[\dot{\psi}(\dot{\psi} + 2n_1) + Q]$$

или, используя соотношение (5) § 18.20,

$$\ddot{q} + 4q(\dot{\psi} + n_1)^2 = q[\dot{\psi}(\dot{\psi} + 2n_1) + Q].$$

Последнее уравнение мы запишем в виде

$$\ddot{q} + (n - n_1)^2\Theta \cdot q = 0, \tag{11}$$

где

$$(n - n_1)^2\Theta = 4(\dot{\psi} + n_1)^2 - \dot{\psi}(\dot{\psi} + 2n_1) - Q. \tag{12}$$

Найдем эквивалентное выражение для Θ следующим образом. Из формулы (8) § 18.18 имеем

$$\dot{v} = CF_x + SF_y.$$

Поэтому

$$\dot{v}=\dot{\psi}(-SF_x+CF_y)+C(\dot{x}F_{xx}+\dot{y}F_{xy})+S(\dot{x}F_{xy}+\dot{y}F_{yy})$$

или вследствие формулы (10) § 18.18

$$\frac{\ddot{v}}{v}=\dot{\psi}(\dot{\psi}+2n_1)+(C^2F_{xx}+2CSF_{xy}+S^2F_{yy}).$$

Это последнее уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{\ddot{v}}{v}=\dot{\psi}(\dot{\psi}+2n_1)+F_{xx}+F_{yy}-Q.$$

Исключая Q из равенства (12), мы будем иметь

$$(n-n_1)^2\,\Theta=\frac{\ddot{v}}{v}+2(\dot{\psi}+n_1)^2+2n_1^2-(F_{xx}+F_{yy}). \tag{13}$$

В следующем параграфе мы представим Θ в виде функции u и s и в конечном счете в виде функции ζ. Как мы увидим, определение постоянной c связано с решением уравнения (11).

Предположим, что решение уравнения (11) $q=q(t)$ содержит четыре произвольные постоянные. Тогда соответствующее выражение для p определится из уравнения (5) § 18.20, которое можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{v}\right)=\frac{2q}{v}(\dot{\psi}+n_1),$$

откуда

$$p=2v\int\frac{q}{v}(\dot{\psi}+n_1)\,dt.$$

Как мы увидим в дальнейшем, v и ψ выражаются через t или ζ. Поэтому p можно определить без труда. Значения Δx и Δy следуют из формул (1) § 18.20, а по ним определяются Δu и Δs.

§ 18.21. Функция Θ

Функция Θ определяется равенством (13) § 18.20. Проделаем следующие преобразования.

1) $\ddot{v}/v$. Мы имеем

$$\frac{\ddot{v}}{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{v}}{v}\right)+\left(\frac{\dot{v}}{v}\right)^2.$$

Далее, $v^2=\dot{u}\dot{s}$. Следовательно,

$$2\,\frac{\dot{v}}{v}=\frac{\ddot{u}}{\dot{u}}+\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Кроме того, $d/dt = i(n-n_1)D$. Поэтому мы получим

$$\frac{\ddot{v}}{v} = -\frac{1}{2}(n-n_1)^2 D\left(\frac{D^2u}{Du}+\frac{D^2s}{Ds}\right) - \frac{1}{4}(n-n_1)^2\left(\frac{D^2u}{Du}+\frac{D^2s}{Ds}\right)^2.$$

2) $(\dot{\psi}+n_1)$. Из формулы (9) § 18.18 имеем

$$v^2\dot{\psi} = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}.$$

Так как $2x = u+s$, $2iy = u-s$ и $v^2 = \dot{u}\dot{s}$, то последнее равенство запишется в виде

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2iv^2}(\ddot{u}\dot{s} - \dot{u}\ddot{s}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\right).$$

Поэтому

$$\dot{\psi} + n_1 = (n-n_1)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{D^2u}{Du} - \frac{D^2s}{Ds}\right) + \mathrm{m}\right].$$

3) $F_{xx}+F_{yy}$. Из формулы (5) § 18.18 немедленно находим

$$F_{xx}+F_{yy} = \frac{\mu}{r^3} + 3n_1^2 = (n-n_1)^2\left(\frac{\varkappa}{r^3} + 3\mathrm{m}^2\right),$$

так как, согласно формулам (8) и (9) § 18.04, $n_1 = \mathrm{m}(n-n_1)$ и $\mu = \varkappa(n-n_1)$.

Подставляя эти формулы в уравнение (13) § 18.20, получаем

$$\Theta = -\left(\frac{\varkappa}{r^3} + \mathrm{m}^2\right) + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{D^2u}{Du} - \frac{D^2s}{Ds}\right) + \mathrm{m}\right]^2 -$$
$$-\frac{1}{2}D\left(\frac{D^2u}{Du}+\frac{D^2s}{Ds}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{D^2u}{Du}+\frac{D^2s}{Ds}\right)^2. \qquad (1)$$

§ 18.22. Уравнение для определения q

Перепишем уравнение (11) § 18.20

$$\ddot{q} + (n-n_1)^2\Theta q = 0.$$

Его также можно записать в виде

$$D^2q = \Theta q, \qquad (1)$$

где Θ определяется формулой (1) предыдущего параграфа. В последнее уравнение подставим

$$u = \sum a_j \zeta^{2j+1}, \quad s = \sum a_j \zeta^{-2j-1}$$

и таким образом определим Θ как функцию от ζ и коэффициентов a.

Из формулы (10) § 18.12 замечаем, что выражение

$$\frac{\varkappa}{r^3} + \mathrm{m}^2,$$

где $r^2 \equiv \rho^2 = us$, имеет вид $\sum P_i \cos 2i\xi$, причем коэффициенты P_i — известные функции m. Как мы увидим далее, остальные слагаемые правой части равенства (1) § 18.21, определяющего функцию Θ, имеют такую же форму. Поэтому Θ может быть написана следующим образом:

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\xi + 2\Theta_2 \cos 4\xi + \ldots = \sum \Theta_i \zeta^{2i},$$

где $\Theta_{-i} = \Theta_i$.

§ 18.23. Коэффициенты Θ_i

Воспользуемся теперь результатами § 18.06 для произведения и частного рядов.

1) Мы имеем

$$\frac{D^2 u}{Du} = \frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{2j}} = \sum Q_i \zeta^{2i},$$

откуда, как и в п. 8 § 18.06, могут быть получены коэффициенты Q_i. Далее,

$$\frac{D^2 s}{Ds} = -\frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{-2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{-2j}} = -\frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta_1^{2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta_1^{2j}} =$$

$$= -\sum Q_i \zeta_1^{2i} = -\sum Q_{-i} \zeta^{2i}.$$

Следовательно,

$$E \equiv \frac{D^2 u}{Du} - \frac{D^2 s}{Ds} = \sum Q_i (\zeta^{2i} + \zeta^{-2i}),$$

т. е. E имеет вид $\sum P_i \cos 2i\xi$. Легко видеть, что здесь $Q_0 = 1$. Записывая E в виде

$$E = \sum (Q_i + Q_{-i}) \zeta^{2i} \equiv 2 \sum V_i \zeta^{2i},$$

где $V_0 = 1$ и $2V_i = Q_i + Q_{-i}$, мы будем иметь

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{D^2 u}{Du} - \frac{D^2 s}{Ds}\right) + \mathrm{m} = \sum V_i \zeta^{2i},$$

где сумма $1 + \mathrm{m}$ обозначена через V_0. Следовательно,

$$E_1^2 = \sum V_j \zeta^{2j} \cdot \sum V_r \zeta^{2r} = \sum W_i \zeta^{2i}.$$

Коэффициенты W могут быть определены с помощью метода, изложенного в п. 1 § 18.06, сначала как функции коэффициентов V, а затем как функции величин Q. Поскольку E_1 представляется рядом по косинусам, так же, как и E_1^2, то $W_l = W_{-l}$.

2) $F \equiv \frac{D^2u}{Du} + \frac{D^2s}{Ds} = \sum Q_l (\zeta^{2l} - \zeta^{-2l})$.

Поэтому

$$DF = \sum 2lQ_l (\zeta^{2l} + \zeta^{-2l}),$$

т. е. DF имеет вид $\sum P_l \cos 2l\xi$.

3) Последний член в выражении Θ есть F^2, который, как легко видеть, разлагается в ряд по косинусам.

Вычисления Хилла с точностью до малых порядка m^5 включительно привели к следующим выражениям Θ_0, Θ_1 и Θ_2 через коэффициенты a:

$$\Theta_0 = 1 + 2\mathrm{m} - \frac{1}{2}\mathrm{m}^2 + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 a_1 + 54a_1^2 + (12 - 4\mathrm{m}) a_1 a_{-1} + (6 - 4\mathrm{m}) a_{-1}^2,$$

$$\Theta_1 = (6 + 12\mathrm{m}) a_1 + (6 + 8\mathrm{m}) a_{-1} - \frac{3}{2}\mathrm{m}^2,$$

$$\Theta_2 = 20\mathrm{m}a_2 + (16 + 20\mathrm{m}) a_{-2} - (9 + 40\mathrm{m}) a_1^2 + 6a_1 a_{-1} + \\ + (7 + 4\mathrm{m}) a_{-1}^2 - \frac{3}{2}\mathrm{m}^2 (a_1 - a_{-1}).$$

Таким образом, коэффициенты Θ можно вычислить, если в эти выражения подставить числовое значение m. Заметим, что Θ_l имеет порядок $m^{|2l|}$.

§ 18.24. Вид функции q

Вспомним, что q есть дифференциал длины нормали в точке P (см. рис. 26), связанный с Δx и Δy первой формулой (2) § 18.20, которую мы запишем, используя обозначения $C = \dot{x}/v$ и $S = \dot{y}/v$, в виде

$$q = \frac{1}{v} (\dot{x}\,\Delta y - \dot{y}\,\Delta x).$$

Выразим x и y через u и s и подставим Δx и Δy из соотношений

$$2\,\Delta x = \Delta u + \Delta s, \quad 2i\,\Delta y = \Delta u - \Delta s.$$

Тогда получим

$$q = \frac{1}{2iv} (\dot{s}\,\Delta u - \dot{u}\,\Delta s) = \frac{n - n_1}{2v} \left[\zeta\, Ds \cdot (\zeta^{-1}\Delta u) - \zeta^{-1} Du \cdot (\zeta\,\Delta s)\right]. \quad (1)$$

Таким образом мы свяжем q с выражениями $\zeta^{-1}\Delta u$ и $\zeta\,\Delta s$, определяемыми равенствами (2) и (3) § 18.13, которые запишем, учитывая для удобства только члены с коэффициентами e, в виде

$$\zeta^{-1}\Delta u = \sum E_r\zeta^{2r+c}, \quad \zeta\Delta s = \sum E'_r\zeta_1^{2r+c},$$

где $E_r = e_r \exp[-\omega\sqrt{-1}]$, а E' и ζ_1 — комплексные величины, сопряженные с E и ζ соответственно. Поэтому

$$\zeta Ds\cdot(\zeta^{-1}\Delta u) = -\left[\sum(2l+1)a_l\zeta^{-2l}\right]\left[\sum E_r\zeta^{2r+c}\right] = \\ = \sum_l\sum_j(2l+1)a_lE_{l+j}\zeta^{2j+c}.$$

Аналогично

$$\zeta^{-1}\Delta u\cdot(\zeta\Delta s) = \sum_l\sum_j(2l+1)a_lE'_{l+j}\zeta_1^{2j+c}.$$

Следовательно, выражение, стоящее внутри квадратных скобок в формуле (1), имеет вид

$$\sum P_j\cos[(2j+c)\xi-\omega],$$

где $P_{-j} = P_j$.

С другой стороны,

$$v^2 = -(n-n_1)^2 Du\cdot Ds.$$

Легко видеть, что v можно представить в виде $\sum Q_k\cos 2k\xi$ и, кроме того, что $1/v$ имеет такой же вид. Отсюда следует, что q в формуле (1) должно выражаться так:

$$q = \sum R_j\cos[(2j+c)\xi-\omega],$$

или, вводя величину ζ, в таком виде:

$$q = \sum b_j\zeta^{2j+c} + \sum d_j\zeta^{2j-c}. \tag{2}$$

Включение членов с коэффициентами f, фигурирующих в равенствах (2) и (3) § 18.13, приводит к аналогичным результатам. Таким образом, формула (2) дает общий вид функции q, причем две дополнительные постоянные интегрирования входят в коэффициенты b_j и d_j.

§ 18.25. Уравнение для определения c как функции m

Согласно формулам (1) и (2) § 18.22, уравнение для q имеет вид

$$D^2q = q\sum\Theta_k\zeta^{2k}, \tag{1}$$

где k — целое число. Подставим в это уравнение общее выражение q по формуле (2) § 18.22. Тогда мы будем иметь

$$\sum(2j+c)^2 b_j\zeta^{2j+c} + \sum(2j-c)^2 d_j\zeta^{2j-c} = \\ = \sum_k\sum_l\Theta_k b_l\zeta^{2k+2l+c} + \sum_k\sum_l\Theta_k d_l\zeta^{2k+2l-c} = \\ = \sum_j\sum_l\Theta_{j-l}b_l\zeta^{2j+c} + \sum_j\sum_l\Theta_{j-l}d_l\zeta^{2j-c}.$$

Приравнивая коэффициенты при ζ^{2j+c}, мы получаем

$$(2j+c)^2 b_j = \sum_l \theta_{j-l} b_l. \tag{2}$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при ζ^{2j-c}, находим

$$(2j-c)^2 d_j = \sum_l \theta_{j-l} d_l$$

или, заменяя j на $-j$ и l на $-l$ и вспоминая, что $\theta_{-k} = \theta_k$,

$$(2j+c)^2 d_{-j} = \sum_l \theta_{j-l} d_{-l}. \tag{3}$$

Уравнение, служащее для непосредственного определения c в виде функции m, получается путем исключения коэффициентов b из бесконечной системы линейных уравнений (2). Это же уравнение можно получить, если из бесконечной системы линейных уравнений (3) исключить величины d. Поэтому мы можем рассмотреть лишь систему (2), которую запишем в виде

$$\begin{gathered}\ldots - \theta_2 b_{j-2} - \theta_1 b_{j-1} + [(c+2j)^2 - \theta_0]\, b_j - \\ - \theta_1 b_{j+1} - \theta_2 b_{j+2} - \ldots = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Каждое уравнение этой системы разделим на $4j^2 - \theta_0$. Полагая последовательно $j = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$, мы получим совокупность линейных уравнений относительно коэффициентов b. Если мы допустим, что к бесконечной системе уравнений (4) применимо правило, которое обычно используется при решении конечной системы, то, исключая величины b, получаем уравнение

$$\Delta(c) = 0, \tag{5}$$

где через $\Delta(c)$ обозначен следующий симметричный определитель бесконечного порядка:

$$\Delta(c) = \left|\begin{array}{ccccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{(c-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{c^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{(c+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right|. \tag{6}$$

Очевидно, что уравнение (5) имеет бесконечное число корней. Однако тот корень, который мы ищем, лежит вблизи единицы, и приближенное его значение, найденное § 18.14, равно $1 + m - {}^3/_4\, m^2$.

Заметим, что бесконечные определители были впервые введены в математику Хиллом в связи с настоящим исследованием. Мы будем предполагать, что этот определитель сходится. В результате деления (4) на $4j^2 - \Theta_0$ элементы определителя, лежащие на главной диагонали, будут стремиться к единице при j, стремящемся к бесконечности, если c является заданной величиной.

§ 18.26. Корни уравнения $\Delta(c) = 0$

1) Если c_0 — корень уравнения $\Delta(c) = 0$, то $-c_0$ будет также корнем этого уравнения. Если в уравнении (4) § 18.25 заменить j на $-j$, то мы получим

$$\ldots - \Theta_2 b_{-j-2} - \Theta_1 b_{-j-1} + [(c - 2j)^2 - \Theta_0]\, b_{-j} - \Theta_1 b_{-j+1} - \ldots = 0.$$

Коэффициент при b_{-j} может быть записан в виде $[(-c) + 2j]^2 - \Theta_0$, и поэтому, исключив величины b, мы получим $\Delta(-c) = 0$, так как знаменатели элементов определителя остаются неизменными. Корни уравнения $\Delta(c) = 0$, таким образом, составляют пары чисел, отличающихся только знаком, и поэтому уравнение можно рассматривать как уравнение относительно c^2.

2) Если c_0 — корень уравнения, то величины $c_0 \pm 2r$, где r — положительное целое число, также будут корнями этого уравнения. Напишем в уравнении (4) § 18.25 $c + 2j$ в виде $[c - 2 + 2(j+1)]$. Тогда мы будем иметь

$$\ldots - \Theta_1 b_{j-1} + \{[c - 2 + 2(j+1)]^2 - \Theta_0\}\, b_j - \Theta_1 b_{j+1} - \ldots = 0.$$

Если разделить эти уравнения на $[4(j+1)^2 - \Theta_0]$ и исключить из них величины b, то найдем, что $\Delta(c-2) = 0$. Точно так же получим $\Delta(c+2) = 0$. Повторяя этот прием, мы придем к следующему равенству:

$$\Delta(c \pm 2r) = 0,$$

так что, если c_0 — корень, то величины $c_0 \pm 2r$ будут также корнями.

3) Корни уравнения $\Delta(c) = 0$ являются также корнями следующего уравнения:

$$\cos \pi c - \cos \pi c_0 = 0.$$

Корни этого уравнения суть $c = c_0 \pm 2r$. Поэтому мы должны иметь

$$\Delta(c) = k(\cos \pi c - \cos \pi c_0), \tag{1}$$

где k не зависит от c.

4) Определитель $\Delta_0(c)$. Будем обозначать через $\Delta_0(c)$ определитель $\Delta(c)$, когда в нем величины Θ_1, Θ_2, ... полагаются равными нулю. Тогда $\Delta_0(c)$ просто является произведением элементов, лежащих на главной диагонали определителя $\Delta(c)$. Пусть T_j и T_{-j} означают два диагональных элемента, соответствующих заданному значению j. Тогда

$$\Delta_0(c) = T_0 \prod_1^{\infty} (T_j T_{-j}),$$

где $T_0 = 1 - (c^2/\Theta_0)$. Для удобства мы положим

$$\Theta_0 = 4\theta^2, \tag{2}$$

после чего получим

$$T_j T_{-j} = \frac{(c+2j)^2 - 4\theta^2}{4(j^2-\theta^2)} \cdot \frac{(c-2j)^2 - 4\theta^2}{4(j^2-\theta^2)}.$$

Это равенство, если в нем несколько преобразовать числители и знаменатели, как легко видеть, примет вид

$$T_j T_{-j} = \frac{c^2 - (2j+2\theta)^2}{4(j+\theta)^2} \cdot \frac{c^2 - (-2j+2\theta)^2}{4(-j+\theta)^2}.$$

Поэтому, так как $T_0 = 1 - (c^2/4\theta^2)$, то

$$\Delta_0(c) = \prod_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{c^2}{4(j+\theta)^2}\right].$$

Согласно хорошо известной теореме анализа, имеем

$$\frac{\cos x - \cos y}{1 - \cos y} = \prod_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{(y+2\pi j)^2}\right].$$

Положим в этом равенстве $x = \pi c$, $y = 2\pi\theta = \pi\sqrt{\Theta_0}$. Тогда

$$\Delta_0(c) = \frac{\cos \pi c - \cos(\pi\sqrt{\Theta_0})}{1 - \cos(\pi\sqrt{\Theta_0})}. \tag{3}$$

5) *Уравнение для определения* c_0. Пусть $\Delta^n(c)$ означает симметричный определитель с $2n+1$ строками и столбцами, получаемый из определителя (6) § 18.25. Если n очень велико, то мы с достаточной степенью точности можем записать формулу (1) в виде

$$\Delta^n(c) = k(\cos \pi c - \cos \pi c_0). \tag{4}$$

Это равенство в таком случае будет достаточно строгим при всех значениях c. Следовательно, величина k может быть получена путем приравнивания коэффициента при наивысшей степени c в $\Delta^n(c)$ коэффициенту при соответствующей степени c в разложении $\cos \pi c$ в бесконечное произведение. Далее, коэффициент при высшей степени c

в определителе $\Delta^n(c)$ получается из элементов, лежащих на главной диагонали, и совпадает с коэффициентом при высшей степени с симметричного определителя $\Delta_0^n(c)$ с $2n+1$ строками и всеми элементами, лежащими вне главной диагонали, равными нулю. Поэтому из формул (3) и (4) получаем

$$k = \frac{1}{1-\cos(\pi\sqrt{\theta_0})}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\Delta(c) = \frac{\cos\pi c - \cos\pi c_0}{1-\cos(\pi\sqrt{\theta_0})}. \tag{6}$$

Это последнее уравнение является справедливым при всех значениях с, так что, если $c=0$, то

$$\Delta(0) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\pi c_0}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)}. \tag{7}$$

Это уравнение выражает c_0 через определитель $\Delta(0)$. Вычисление c_0 связано, таким образом, с вычислением определителя $\Delta(0)$, который мы запишем в виде

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & -B_2\theta_1 & -B_2\theta_2 & -B_2\theta_3 & -B_2\theta_4 & \cdots \\ \cdots & -B_1\theta_1 & 1 & -B_1\theta_1 & -B_1\theta_2 & -B_1\theta_3 & \cdots \\ \cdots & -B_0\theta_2 & -B_0\theta_1 & 1 & -B_0\theta_1 & -B_0\theta_2 & \cdots \\ \cdots & -B_1\theta_3 & -B_1\theta_2 & -B_1\theta_1 & 1 & -B_1\theta_1 & \cdots \\ \cdots & -B_2\theta_4 & -B_2\theta_3 & -B_2\theta_2 & -B_2\theta_1 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где

$$B_j = \frac{1}{4j^2-\theta_0} \equiv \frac{1}{4(j^2-\theta^2)}. \tag{9}$$

§ 18.27. Вычисление $\Delta(0)$

Перед тем как вычислять $\Delta(0)$, напомним, что коэффициенты θ_j являются малыми величинами порядка m^{2j}, где j — положительное число. Например, если ограничить наши вычисления членами порядка m^4 включительно, то ясно, что все элементы, включающие θ_r при $r>2$, можно отбросить. Тогда $\Delta(0)$ фактически приведется к главной диагонали и другим элементам, имеющим множитель θ_1. Поэтому можно видеть, что

$$\Delta(0) = 1 + A\theta_1^2 + \left(B\theta_2^2 + C\theta_1^2\theta_2 + D\theta_1^4\right) + \ldots, \tag{1}$$

где коэффициент A является малой величиной порядка m^4. Члены, заключенные в скобки, имеют порядок m^8 и т. д. Таким образом, $\Delta(0)$ сходится очень быстро.

Коэффициент A состоит из произведений членов вида $-B_jB_{j-1}$, т. е.

$$A=-\sum_{-\infty}^{\infty}{}' B_jB_{j-1}.$$

Далее,

$$X_j\equiv B_jB_{j-1}=\frac{1}{16(\theta^2-j^2)[\theta^2-(j-1)^2]}.$$

Правую часть этого равенства легко можно выразить через элементарные дроби, в следующем виде:

$$16X_j=\frac{1}{2\theta(2\theta-1)}\left(\frac{1}{\theta-j}+\frac{1}{\theta+j-1}\right)-\frac{1}{2\theta(2\theta+1)}\left(\frac{1}{\theta+j}+\frac{1}{\theta-j+1}\right).$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\varphi=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varphi+j}, \tag{2}$$

найдем

$$\sum X_j=\frac{1}{32\theta}\left[\frac{2\pi\operatorname{ctg}\pi\theta}{2\theta-1}-\frac{2\pi\operatorname{ctg}\pi\theta}{2\theta+1}\right]$$

и

$$A=-\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi\theta}{8\theta(4\theta^2-1)}.$$

Таким образом, опуская члены с B, C и D и т. д., получаем следующее приближенное значение для $\Delta(0)$:

$$\Delta(0)=1+\frac{\pi\theta_1^2\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Theta_0}\right)}{4(1-\Theta_0)\sqrt{\Theta_0}}. \tag{3}$$

Так как $1-\Theta_0$ — малая величина порядка m, то $(1-\Theta_0)^{-1}\operatorname{ctg}{}^1/_2\pi\sqrt{\Theta_0}$ имеет нулевой порядок. Следовательно, формула (3) дает выражение для $\Delta(0)$ с точностью до m^7 включительно.

Члены с B, C, D в выражении (1) могут быть преобразованы аналогичным образом; другими словами, мы можем, используя формулу (2), разложить такие члены на элементарные дроби и получить для них конечные выражения вида (3). Очевидно, это преобразование является более сложным, чем вывод выражения для A в формуле (1), и мы отсылаем читателя для ознакомления с подробностями к «Теории Луны» Брауна[1]).

[1]) E. W. Brown, Lunar Theory, p. 223.

§ 18.28. Вычисление c

Если m известно, то можно найти величины Θ_0, Θ_1. Тогда численное значение $\Delta(0)$ может быть получено при помощи формулы (3) § 18.27 с требуемой степенью точности.

Мы видели, что корни уравнения $\Delta(\mathrm{c}) = 0$, если опустить индекс 0, имеют вид $\mathrm{c} \pm 2r$, где r — целое число. Выберем в качестве главного значения корня значение c, ближайшее к единице, так как именно это значение c определяет движение перигея Луны.

Когда $\Delta(0)$ вычислен, то значение для c с точностью до m^7 включительно получается от формулы

$$\sin^2 \frac{1}{2} \pi \mathrm{c} = \Delta(0) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{\Theta_0} \right).$$

Значение c, найденное таким образом, равно

$$\mathrm{c} = 1{,}0715838.$$

Принимая во внимание члены более высокого порядка в разложении $\Delta(0)$, Хилл с точностью до 15 знака после запятой получил

$$\mathrm{c} = 1{,}071583277416012.$$

§ 18.29. Общее решение, зависящее от m

Интересующие нас уравнения (9) и (10) § 18.05 имеют вид

$$D(u\,Ds - s\,Du - 2\mathrm{m}us) + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2 - s^2) = 0, \tag{1}$$

$$D^2(us) - Du \cdot Ds + 2\mathrm{m}(s\,Du - u\,Ds) + \frac{9}{4}\mathrm{m}^2(u + s)^2 = C. \tag{2}$$

Согласно § 18.13, приближенное решение эквивалентных им уравнений, выраженное через Δu и Δs, имеет вид $u + \Delta u$ и $s + \Delta s$, где u и s — функции, соответствующие промежуточной орбите; Δu выражается формулой

$$\zeta^{-1} \Delta u = e^{-\omega\sqrt{-1}} \sum e_i \zeta^{2i+\mathrm{c}} + e^{\omega\sqrt{-1}} \sum f_i \zeta^{2i-\mathrm{c}}, \tag{3}$$

а $\zeta \Delta s$ имеет аналогичный вид. Первую сумму в формуле (3) мы запишем в виде

$$\sum e_i \zeta^{2i} \zeta_0^{\mathrm{c}},$$

где

$$\zeta_0^{\mathrm{c}} = \exp\left[\sqrt{-1}\,(\mathrm{c}\xi - \omega)\right]. \tag{4}$$

Далее,

$$\mathrm{c}\xi - \omega = \mathrm{c}(n - n_1)(t - t_0) - \omega \equiv \mathrm{c}(n - n_1)(t - t_1). \tag{5}$$

где
$$\mathrm{c}(n-n_1)\,t_1=\mathrm{c}(n-n_1)\,t_0+\omega.$$
Поэтому
$$\zeta_0=\exp\left[\sqrt{-1}\,(n-n_1)(t-t_1)\right]. \qquad (6)$$
Таким образом, величину t_1 можно рассматривать как произвольную постоянную, заменяющую ω.

Из формулы (3) мы видим, что решение уравнений (1) и (2) с точностью до первых степеней Δu и Δs может быть записано в виде
$$\begin{aligned} u&=\mathrm{a}\sum A_{2l+p\mathrm{c}}\zeta^{2l+1}\zeta_0^{p\mathrm{c}},\\ s&=\mathrm{a}\sum A_{2l+p\mathrm{c}}\zeta^{-(2l+1)}\zeta_0^{-p\mathrm{c}}, \end{aligned} \qquad (7)$$
где $p=-1,\ 0,\ +1$, причем $p=0$ соответствует промежуточной орбите, и поэтому $A_{2l}\equiv a_l$.

Общее решение уравнений (1) и (2), когда учитываются *все* степени Δu и Δs, имеют вид (7), где p принимает любое целое значение, положительное или отрицательное, включая и нуль.

Если D_0 означает оператор $\zeta_0(d/d\zeta_0)$, то мы имеем
$$\frac{d}{dt}=\sqrt{-1}\,(n-n_1)\,D=\sqrt{-1}\,(n-n_1)\,D_0.$$
Поэтому
$$D\left(\zeta^{2l+1}\zeta_0^{p\mathrm{c}}\right)=(2l+1+p\mathrm{c})\,\zeta^{2l+1}\zeta_0^{p\mathrm{c}}$$
и
$$D^2\left(\zeta^{2l+1}\zeta_0^{p\mathrm{c}}\right)=(2l+1+p\mathrm{c})^2\,\zeta^{2l+1}\zeta_0^{p\mathrm{c}}.$$

Положим $\zeta_0=\zeta$ и запишем формулы (7) в виде
$$\begin{aligned} \zeta^{-1}u&=\mathrm{a}\sum_l\sum_p A_{2l+p\mathrm{c}}\zeta^{2l+\mathrm{c}},\\ \zeta s&=\mathrm{a}\sum_l\sum_p A_{2l+p\mathrm{c}}\zeta^{-(2l+p\mathrm{c})}. \end{aligned} \qquad (8)$$
Подставим эти выражения в уравнения (1) и (2) и приравняем коэффициенты в обеих частях полученных равенств при одинаковых степенях ζ. Мы получим линейные уравнения для коэффициентов A, из которых методом последовательных приближений могут быть найдены выражения для A в виде функций m и c и одного из этих коэффициентов, соответствующего e_0 в § 18.13. Методика определения коэффициентов A аналогична той, которая применялась при определении коэффициентов a_l, соответствующих промежуточной орбите. Эта методика приводится в теории Луны Брауна[1].

[1]) E. W. Brown, Lunar Theory, p. 207.

§ 18.30. Уравнение для определения широт

Если пренебречь эксцентриситетом орбиты Солнца и его параллаксом, то $W=0$, и уравнение для определения широты, согласно формуле (13) § 18.04, будет иметь вид

$$D^2z-\left(\frac{\varkappa}{r^3}+\mathrm{m}^2\right)z=0. \tag{1}$$

Далее, $r^2=us+z^2$. Если отбросить z^2, то $r^2=us$ и согласно формуле (7) § 18.12 будем иметь

$$\frac{\varkappa}{r^3}+\mathrm{m}^2=2\sum M_j\zeta^{2j}, \tag{2}$$

где $M_j=M_{-j}$. Однако z есть малая порядка γ, где $\gamma=\operatorname{tg} I$ и в невозмущенном движении z представляется рядом синусов. Пусть $Z=iz$, где $i=\sqrt{-1}$. Тогда из уравнений (1) и (2) получим

$$D^2Z=2\left(\sum M_j\zeta^{2j}\right)Z. \tag{3}$$

Это уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (1) § 18.22, и его решение, зависящее от произвольных постоянных γ и β, имеет вид

$$Z=\mathrm{a}\gamma e^{i\beta}\sum C_j\zeta^{2j+g}. \tag{4}$$

Величина z равна мнимой части выражения (4), т. е.

$$z=\mathrm{a}\gamma\sum C_j\sin\left[(2j+g)\xi+\beta\right], \tag{5}$$

где постоянную C_0 без ограничения общности можно положить равной единице. Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и приравнивая друг другу коэффициенты при ζ^{2j+g} в левой и правой частях, мы обычным путем получим

$$(g+2j)^2C_j=2\sum_i M_{j-i}C_i. \tag{6}$$

Если в этом уравнении C_j заменить на b_j, g — на c и $2M_{j-i}$ — на Θ_{j-i}, то получим уравнение вида (2) § 18.25. Поэтому метод определения g совпадает с методом определения c, и при этом определяющее уравнение будет иметь вид

$$\Delta(\mathrm{g})=0. \tag{7}$$

Например, с точностью до малых порядка m^3 включительно найдено, что

$$\mathrm{g}=1+\mathrm{m}+\frac{3}{4}\mathrm{m}^2-\frac{33}{32}\mathrm{m}^3. \tag{8}$$

Этот корень уравнения (7) близок к единице и согласуется с наблюдаемыми возмущениями в узле орбиты Луны. Численное значение g впервые было дано Адамсом [1]). Оно равно

$$g = 1{,}085171392746869.$$

Выражая g через m по формуле (8), мы можем легко получить методом последовательных приближений выражения для C_j в виде функций m. Например, так как $C_0 = 1$, $M_i = M_{-i}$ и M_i — малая величина порядка $\mathrm{m}^{|2i|}$, то, полагая в формуле (6) $j = 0$, находим

$$\frac{1}{2} g^2 - M_0 = M_1 (C_1 + C_{-1}) + M_2 (C_2 + C_{-2}) + \ldots .$$

Аналогично при $j = 1$ и $j = -1$ имеем

$$\left[\frac{1}{2}(g+2)^2 - M_0\right] C_1 = M_1 (1 + C_2) + M_2 C_{-1} + \ldots, \tag{9}$$

$$\left[\frac{1}{2}(g-2)^2 - M_0\right] C_{-1} = M_1 (1 + C_{-2}) + M_2 C_1 + \ldots . \tag{10}$$

Далее, согласно формуле (8) § 18.12, с точностью до членов порядка m^2 включительно $2M_0 = 1 + 2\mathrm{m} + {}^5/_2\,\mathrm{m}^2$. Коэффициент при C_1 в уравнении (9), таким образом, имеет вид $a + b\mathrm{m} + d\mathrm{m}^2$. Поэтому C_1 — малая порядка m^2. Кроме того, коэффициент при C_{-1} в уравнении (10) имеет вид $a\mathrm{m} + b\mathrm{m}^2$. Поэтому C_{-1} будет малой величиной порядка m, и легко видеть, что с точностью до членов порядка m $C_{-1} = -{}^3/_8\,\mathrm{m}$. В общем случае, когда j положительно, C_j — малая порядка m^{2j}, а C_{-1} — малая порядка m^{2j-1}.

§ 18.31. Движение узла в первом приближении

Пусть l ($\equiv nt + \varepsilon$) — средняя долгота Луны и θ — ее широта. Тогда, если пренебречь эксцентриситетом орбиты Луны, то

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega) = \gamma \sin(nt + \varepsilon - \Omega).$$

Кроме того, $z = r \operatorname{tg}\theta$, где $r = \sqrt{us + z^2}$. Если рассматривать только члены первого порядка, то $r = \mathrm{a}$ и

$$z = \mathrm{a}\gamma \sin(nt + \varepsilon - \Omega). \tag{1}$$

Согласно формуле (5) § 18.30, главный член в z при $j = 0$ записывается так:

$$z = \mathrm{a}\gamma \sin(g\xi + \beta). \tag{2}$$

Но

$$\xi = (n - n_1)\, t + \varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{nt}{1 + \mathrm{m}} + \varepsilon - \varepsilon_1.$$

---

[1]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 38, 43 (1877).

Поэтому

$$g\xi + \beta = nt + \varepsilon - \Omega_0 + \left(\frac{g}{1+m} - 1\right) nt,$$

где

$$-\Omega_0 = (g-1)\varepsilon + \beta - g\varepsilon_1.$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что

$$\Omega = \Omega_0 - ant,$$

где

$$a = \frac{g}{1+m} - 1. \tag{3}$$

С точностью до малых порядка

$$a = \frac{3}{4} m^2 - \frac{57}{32} m^3. \tag{4}$$

Вековой член в формуле, определяющей попятное движение узла, имеет вид

$$\dot{\Omega} = -an.$$

§ 18.32. Общая картина движения узла

Пусть l_1 ($\equiv n_1 t + \varepsilon_1$) — средняя долгота Солнца относительно фиксированных осей, лежащих в основной плоскости. Если X, Y означают координаты Луны по отношению к этим осям, то

$$X = x \cos l_1 - y \sin l_1, \quad Y = x \sin l_1 + y \cos l_1.$$

Пусть, далее,

$$U = X + iY, \quad S = X - iY, \tag{1}$$

тогда

$$U = (x + iy)\, e^{il_1}, \quad S = (x - iy)\, e^{-il_1}, \tag{2}$$

но

$$l_1 = n_1 t + \varepsilon_1 = m(n - n_1)\, t + \varepsilon_1 = m(n - n_1)(t - t_0) + \delta,$$

где

$$\delta = m(n - n_1)\, t_0 + \varepsilon_1.$$

Поэтому

$$l_1 = m\xi + \delta.$$

Положим $d = e^{i\delta}$, $d_1 = e^{-i\delta}$, тогда формулы (2) примут вид

$$U = du\zeta^m, \quad V = d_1 s\zeta^{-m}, \tag{3}$$

или

$$\begin{aligned} U &= d \sum a_i \zeta^{2i+1+m}, \\ S &= d_1 \sum a_i \zeta^{-(2i+1+m)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Если ξ, η, ζ означает текущие координаты относительно неподвижных осей OX, OY, OZ, то уравнение мгновенной плоскости, проходящей через точку O (Земля), Луну и вектор скорости Луны, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ X & Y & Z \\ \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \end{vmatrix} = 0.$$

Эта плоскость пересекает основную плоскость $\zeta = 0$ по прямой, уравнение которой записывается в виде

$$\xi(Y\dot{Z} - \dot{Y}Z) = \eta(X\dot{Z} - \dot{X}Z).$$

Долгота узла, измеряемая от оси OX, определяется из равенства $\operatorname{tg}\Omega = \eta/\xi$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{Y\dot{Z} - \dot{Y}Z}{X\dot{Z} - \dot{X}Z},$$

откуда, заменяя Z через z, при помощи формул (1) находим

$$e^{2i\Omega} = \frac{U\dot{z} - z\dot{U}}{S\dot{z} - z\dot{S}} = \frac{UDz - z\,DU}{SDz - z\,DS}. \tag{5}$$

Согласно формуле (5) § 18.30,

$$\frac{2i}{a\gamma} z = \sum C_r e^{i\beta}\zeta^{2r+g} - \sum C_r e^{-i\beta}\zeta^{-(2r+g)}.$$

Пусть $C_r e^{i\beta} = K_r$, $C_r e^{-i\beta} = K'_r$, так что K'_r и K_r являются комплексно сопряженными величинами. Тогда

$$\frac{2i}{a\gamma} z = \zeta^g \sum K_r \zeta^{2r} - \zeta^{-g} \sum K'_{-r}\zeta^{2r}.$$

Из этого уравнения и формул (4) после некоторых упрощений мы находим

$$\frac{2i}{a\gamma}(UDz - zDU) = d\zeta^{1+\mathrm{m}-g} \sum_r \sum_j (2j - 4r + 1 + \mathrm{m} + g)\, a_{j-r} K'_{-r}\zeta^{2j} -$$
$$- d\zeta^{1+\mathrm{m}+g} \sum_r \sum_j (2j - 4r + 1 + \mathrm{m} - g)\, a_{j-r} K_r \zeta^{2j}.$$

Пусть $e^{i\beta} = b$, $e^{-i\beta} = b_1$. Тогда $K_r = bC_r$, $K'_r = b_1 C_r$. Пусть далее

$$P_{jr} = (2j - 4r + 1 + \mathrm{m} + g)\, a_{j-r} C_{-r}, \tag{6}$$
$$Q_{jr} = (2j - 4r + 1 + \mathrm{m} - g)\, a_{j-r} C_r. \tag{7}$$

Так как значения коэффициентов a и C предполагаются известными, то мы можем вычислить коэффициенты P и Q. Мы получим

$$\frac{2i}{\mathrm{a}\gamma}(UDz - zDU) = b_1 d\zeta^{1+\mathrm{m}-g}\left[\sum_r \sum_j (P_{jr}\zeta^{2j} - b^2 Q_{jr}\zeta^{2j+2g})\right]. \tag{8}$$

Поскольку знаменатель в правой части равенства (5) является сопряженным числителю, то

$$\frac{2i}{\mathrm{a}\gamma}(SDz - zDS) = bd_1\zeta_1^{1-\mathrm{m}-g}\left[\sum_r \sum_j (P_{jr}\zeta_1^{2j} - b_1^2 Q_{jr}\zeta_1^{2j+2g})\right]. \tag{9}$$

Если заменить b и d их экспоненциальными выражениями, то уравнение (5) примет вид

$$e^{2i(\Omega-\delta+\beta)} = \zeta^{2(1+\mathrm{m}-g)} \cdot \frac{F}{F_1}, \tag{10}$$

где через F и F_1 обозначены выражения, заключенные в квадратные скобки правых частей формул (8) и (9) соответственно.

Так как $a_0 = C_0 = 1$, то $P_{0,0}$, согласно формуле (6), равно $1 + \mathrm{m} + g$. Из формулы (8) § 18.30 видно, что $P_{0,0}$ имеет нулевой порядок относительно m. Аналогично находим, что $Q_{0,0}$ является величиной второго порядка.

Пусть

$$\frac{1}{P_{0,0}}\sum_r P_{jr} = R_j, \qquad \frac{1}{P_{0,0}}\sum_r Q_{jr} = S_j. \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{F}{P_{0,0}} = 1 + \sum{}' R_j\zeta^{2j} - b^2\sum S_j\zeta^{2g+2j}. \tag{12}$$

Если коэффициенты R и S разложить в ряды по степеням m и умножить формулу (12) на $P_{0,0}$, то F можно будет записать в виде

$$F = 1 + \mathrm{m}A(\zeta) + \mathrm{m}^2 B(\zeta) + \ldots,$$

где $A(\zeta)$, $B(\zeta)$, ... — функции ζ. Поэтому можно написать

$$\ln F = \mathrm{m}a(\zeta) + \mathrm{m}^2 b(\zeta) + \ldots,$$

где

$$a(\zeta) = A(\zeta), \qquad b(\zeta) = B(\zeta) - \frac{1}{2}[A(\zeta)]^2$$

и т. д. Аналогично

$$\ln F_1 = \mathrm{m}a(\zeta_1) + \mathrm{m}^2 b(\zeta_1) + \ldots .$$

Из равенства (10) поэтому мы получаем

$$\Omega - \delta + \beta = (1 + \mathrm{m} - g)\xi + \\ + \frac{\mathrm{m}}{2i}[a(\zeta) - a(\zeta_1)] + \frac{\mathrm{m}^2}{2i}[b(\zeta) - b(\zeta_1)] + \ldots . \tag{13}$$

Очевидно, что правая часть этого равенства является рядом по синусам.

В качестве примера мы выведем формулу для Ω, когда в F и F_1 отброшены члены с m^2 и более высокими степенями m. Согласно формуле (12),

$$F = 1 + R_1\zeta^2 + R_{-1}\zeta^{-2} + \ldots - b^2\zeta^{2g}(S_0 + S_1\zeta^2 + S_{-1}\zeta^{-2})\ldots.$$

Легко видеть, что в этом разложении единственным коэффициентом порядка m является S_{-1}. Главная часть S_{-1} равна $(1/P_{0,0})Q_{-1,-1}$. Из формул (6) и (7) мы с точностью до малых порядка m^2 находим

$$S_{-1} = \frac{3+\mathrm{m}-\mathrm{g}}{1+\mathrm{m}+\mathrm{g}}C_{-1} \equiv fC_{-1},$$

или, так как $C_{-1} = -{}^3/_8\mathrm{m}$, то $S_{-1} = -{}^3/_8\mathrm{m}f$. Поэтому

$$F = 1 + \frac{3}{8}\mathrm{m}fb^2\zeta^{2g-2}. \tag{14}$$

Выражение для F_1 совпадет с (14), если ζ и b заменить на ζ_1 и b_1. Мы поэтому получим аналогично равенству (13)

$$\Omega - \delta + \beta - (1 + \mathrm{m} - \mathrm{g})\xi = \frac{3}{8}\mathrm{m}f \cdot \frac{1}{2i}\left[b^2\zeta^{2g-2} - b_1^2\zeta_1^{2g-2}\right] =$$
$$= \frac{3}{8}\mathrm{m}f\sin[(2\mathrm{g}-2)\xi + 2\beta].$$

Следовательно, движение узла выразится формулой

$$\dot{\Omega} = -an + \frac{3}{4}(\mathrm{g}-1)\frac{\mathrm{m}n}{1+\mathrm{m}} \cdot \frac{3+\mathrm{m}-\mathrm{g}}{1+\mathrm{m}+\mathrm{g}}\cos[(2g-2)\xi + 2\beta], \tag{15}$$

где a определяется равенством (3) или (4) § 18.31. Так как $\mathrm{g} = 1 + \mathrm{m} + \ldots$, то амплитуда периодического члена имеет порядок m^2. Периодические члены более высокого порядка могут быть получены при помощи только что описанного приема.

§ 18.33. Возмущения, зависящие от m и эксцентриситета орбиты Солнца e_1

Мы будем пренебрегать величинами z, a/a_1 и эксцентриситетом лунной орбиты e. Согласно формуле (1) § 18.03,

$$R_2 = n_1^2 r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(\alpha),$$

и поэтому функция Ω, определяемая равенством (5) § 18.03, будет выражаться формулой

$$\Omega = n_1^2 r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 P_2(\alpha) - \frac{1}{2}n_1^2(2x^2 - y^2 - z^2),$$

а функция $W\left[\equiv\frac{2\Omega}{(n-n_1)^2}\right]$, определяемая формулой (10) § 18.04, будет иметь вид

$$W=2\mathrm{m}^2r^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3P_2(\alpha)-\mathrm{m}^2(3x^2-r^2).$$

Так как $r^2P_2(\alpha)={}^3/_2r^2C^2-{}^1/_2r^2$, где $C\equiv\cos\alpha$, то согласно формуле (2) § 18.03

$$rC=\frac{xx_1+yy_1}{r_1}.$$

Пусть v_1 означает истинную долготу Солнца. Тогда

$$x_1=r_1\cos\varphi,\qquad y_1=r_1\sin\varphi,$$

где

$$\varphi=v_1-n_1(t-t_0)=f_1-M_1. \tag{1}$$

Поэтому

$$rC=\frac{1}{2}(u+s)\cos\varphi+\frac{1}{2i}(u-s)\sin\varphi=\frac{1}{2}(ue^{-i\varphi}+se^{i\varphi}).$$

Следовательно, если заменить r^2 на us, то W примет вид

$$W=Au^2+2Bus+Cs^2, \tag{2}$$

где

$$A=\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3e^{-2i\varphi}-1\right], \tag{3}$$

$$B=\frac{1}{4}\mathrm{m}^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3-1\right], \tag{4}$$

$$C=\frac{3}{4}\mathrm{m}^2\left[\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3e^{2i\varphi}-1\right]. \tag{5}$$

Так как $z=0$ и W — однородная квадратичная функция u и s, то уравнения (14) и (17) § 18.04 принимают вид

$$D(uDs-sDu-2\mathrm{m}\,us)+\frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2-s^2)=s\frac{\partial W}{\partial s}-u\frac{\partial W}{\partial u}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}D^2(us)-Du\cdot Ds+2\mathrm{m}(s\,Du-u\,Ds)+\\+\frac{9}{4}\mathrm{m}^2(u+s)^2=K-3W+D^{-1}(D_tW),\end{gathered} \tag{7}$$

где D_t означает операцию D, соответствующую дифференцированию по времени t, входящему посредством координат Солнца, и где вместо C записана K (постоянная интегрирования).

Члены в правой части уравнения (6) таковы:

$$2Cs^2-2Au^2, \tag{8}$$

а члены в правой части уравнения (7) имеют вид

$$-3(Au^2+2Bus+Cs^2)+D^{-1}(u^2DA+2usDB+s^2DC), \tag{9}$$

причем постоянная K опущена, так как мы уже ввели постоянную в случае промежуточной орбиты при $W=0$.

§ 18.34. Функции A, B и C

Определение φ по формуле (1) § 18.33 показывает, что φ является уравнением центра, так что $\varphi=f_1-M_1$, где f_1 и M_1 — соответственно истинная и средняя аномалии Солнца. Таким образом, функции координат Солнца, входящие в A, B и C, могут быть выражены через M_1.

1) B. В случае эллиптического движения мы можем написать общую формулу

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3-1=\alpha_0+2\sum_1^\infty\alpha_p\cos pM=\sum\alpha_p e^{ipM},$$

где $\alpha_{-p}=\alpha_p$. Поэтому для орбиты Солнца мы имеем

$$B=\frac{1}{4}\mathrm{m}^2\sum\alpha_p e^{ipM_1}, \tag{1}$$

где коэффициенты α_p, вообще говоря, являются рядами по степеням e_1 и имеют порядок $e_1^{|p|}$, и их явные выражения могут быть получены обычным способом.

2) A и C. Из формул (3) и (4) § 18.33, опуская временно индекс 1, мы имеем

$$C+A=\frac{3}{2}\mathrm{m}^2\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2\varphi-1\right], \tag{2}$$

$$C-A=\frac{3}{2}i\mathrm{m}^2\left[\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2\varphi\right]. \tag{3}$$

Далее, φ $(=f-M)$ может быть представлено тригонометрическим рядом с аргументами, кратными M. Известно, что функция в квадратных скобках формулы (2) может быть разложена в ряд вида

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2\varphi-1=\sum\beta_p\cos pM, \tag{4}$$

где коэффициенты $\beta_p\,(-\infty<p<\infty)$ выражаются через e_1. Кроме того,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin 2\varphi=\sum\beta_p\sin pM, \tag{5}$$

так как, согласно формулам (2) — (5), поскольку A и C — сопряженные величины,

$$C = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \beta_p e^{ipM_1}, \tag{6}$$

$$A = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \beta_p e^{-ipM_1} = \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \beta_{-p} e^{ipM_1}. \tag{7}$$

Здесь индекс 1 снова восстановлен.

Далее, $M_1 = n_1(t - t_0) - \tilde{\omega}_1$, где $\tilde{\omega}_1$ — долгота перигея солнечной орбиты. Кроме того, так как $\xi = (n - n_1)(t - t_0)$ и $n_1 = \mathrm{m}(n - n_1)$, то

$$M_1 = \mathrm{m}\xi - \tilde{\omega}_1.$$

Обозначим $e^{-ip\tilde{\omega}_1}$ через L_p. Тогда $e^{ipM_1} = L_p\zeta^{p\mathrm{m}}$, и из формул (6), (7) и (1) будем иметь

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \beta_{-p} L_p \zeta^{p\mathrm{m}}, \\ B &= \frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \alpha_p L_p \zeta^{p\mathrm{m}}, \\ C &= \frac{3}{4}\,\mathrm{m}^2 \sum \beta_p L_p \zeta^{p\mathrm{m}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку в этих формулах $\zeta^{p\mathrm{m}}$ везде сопровождается множителем L_p, то в последующем изложении мы можем этот множитель опустить, введя его снова после того, как будет сделан переход к действительным переменным x и y.

§ 18.35. Неравенства, зависящие от m и e_1

Решение уравнений (6) и (7) § 18.33 имеют вид

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{a} \sum_i \sum_p A_{i,p} \zeta^{2i+1+p\mathrm{m}}, \\ s &= \mathrm{a} \sum_i \sum_p A_{i,p} \zeta^{-(2i+1+p\mathrm{m})}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если эти выражения для u и s подставить в уравнения (6) и (7) § 18.33 и приравнять друг другу коэффициенты в левых и правых частях при $\zeta^{2i+1+p\mathrm{m}}$, то мы получим линейные уравнения для A, которые могут быть решены методом последовательных приближений.

Заметим, что если $p = 0$, то мы получим решение, соответствующее промежуточной орбите, с которой, согласно уравнению (7) § 18.33, связана постоянная K, так как тогда $A_{i,0} = a_i$.

Другое замечание относится к правой части уравнения (7) § 18.33, в которой фигурирует оператор D^{-1}. Интересующие нас члены входят в выражение (9) § 18.33. Рассмотрим сначала член $D^{-1}(u^2 DA)$. Согласно первой формуле (8) § 18.34, DA имеет вид $\sum' \gamma_p \zeta^{p\mathrm{m}}$, где штрих означает, что $p \neq 0$. Согласно первой формуле (1), u^2 может быть разложено в ряд вида

$$\sum_l \sum_p B_{l,p} \zeta^{2l+p\mathrm{m}}.$$

Поэтому $u^2 DA$ будет иметь вид

$$\sum \sum C_{l,p} \zeta^{2l+p\mathrm{m}},$$

где $p \neq 0$. В таком случае получим

$$D^{-1}(u^2 DA) = \sum \sum \frac{C_{l,p}\zeta^{2l+p\mathrm{m}}}{2l+p\mathrm{m}} \quad (p \neq 0).$$

Так как m иррационально, то $2l + p\mathrm{m} \neq 0$. Наименьшее абсолютное значение знаменателя достигается при $l = 0$ и $p = \pm 1$. Соответственно порядок коэффициентов $C_{0,1}$ и $C_{0,-1}$ (например, m^q), снижается до m^{q-1}.

§ 18.36. Параллактические неравенства

Эти неравенства зависят от m и $1/a_1$. Соответственно этому положим $z = 0$ и $e_1 = 0$, так что $r_1 = a_1$. Кроме того, $W_2 = 0$ и $D_t W = 0$. Мы тогда будем иметь

$$W = W_3 + W_4,$$

где

$$W_3 = 2\mathrm{m}^2 \frac{r^3}{a_1} P_3(\alpha), \quad W_4 = 2\mathrm{m}^2 \frac{r^4}{a_1^2} P_4(\alpha),$$

причем мы опустили множитель $(E-M)/(E+M)$, связанный с $1/a_1$ в W_3, и квадрат этого множителя, связанный с $1/a_1^2$ в W_4. Далее,

$$rC \equiv r\cos\alpha = x = \frac{1}{2}(u+s).$$

Поэтому, так как

$$P_3(\alpha) = \frac{5}{2}C^3 - \frac{3}{2}C, \quad P_4(\alpha) = \frac{35}{8}C^4 - \frac{15}{4}C^2 + \frac{3}{8},$$

мы получаем

$$W_3 = \frac{\mathrm{m}^2}{8a_1}[5(u^3+s^3) + 3us(u+s)], \tag{1}$$

$$W_4 = \frac{\mathrm{m}^2}{64a_1^2}[35(u^4+s^4) + 20us(u+s)^2 + 18u^2s^2]. \tag{2}$$

Уравнения (14) и (17) § 18.04, которые нам нужно решить, приводятся в данном случае к виду

$$D(uDs - sDu - 2\mathrm{m}us) + \frac{3}{2}\mathrm{m}^2(u^2 - s^2) = s\frac{\partial W}{\partial s} - u\frac{\partial W}{\partial u}, \tag{3}$$

$$D^2(us) - Du \cdot Ds + 2\mathrm{m}(s\,Du - u\,Ds) + \\ + \frac{9}{4}\mathrm{m}^2(u+s)^2 = C - 4W_3 - 5W_4. \tag{4}$$

Если вместо u и s мы подставим в уравнения (3) и (4) степенные ряды относительно ζ, то левые части будут содержать члены с четными степенями ζ. Рассмотрим члены, зависящие от W_3, в правых частях уравнений (3) и (4), причем в (3) $W = W_3 + W_4$. В каждом случае мы будем иметь однородную кубическую функцию относительно u и s. Такие члены могут привести к четным степеням ζ только в том случае, если ряды, связанные с W_3, т. е. с $1/a_1$, будут содержать члены только с четными степенями ζ. Аналогично легко видеть, что ряды для u и s, связанные с W_4, будут состоять из членов с нечетными и четными степенями ζ.

Общее решение уравнений (3) и (4) должно включать в себя решение, соответствующее промежуточной орбите, когда $1/a_1 = 0$, и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{a}\sum a_i\zeta^{2i+1} + \mathrm{a}\sum B_j\zeta^j, \\ s &= \mathrm{a}\sum a_i\zeta^{-(2i+1)} + \mathrm{a}\sum B_j\zeta^{-j}, \end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты B зависят от $1/a_1$ и $1/a_1^2$. Подставляя выражения (5) в уравнения (3) и (4) и приравнивая в правой и левой частях полученных равенств коэффициенты при одинаковых степенях ζ, мы получим линейные уравнения относительно B, в которые входят величины m (посредством коэффициентов a), $1/a_1$ и $1/a_1^2$. Решении этих уравнений в первом приближении можно получить, пренебрегая величиной $1/a_1^2$. Таким образом, коэффициенты B (в данном случае вида B_{2r}) могут быть определены.

§ 18.37. Другие возмущения

В предыдущих параграфах этой главы было уделено внимание основным возмущениям в движении Луны. В окончательной теории, построенной Брауном, подробно рассматриваются следующие эффекты:

1) члены возмущающей функции, зависящие от m и от произведений эксцентриситетов лунной и солнечной орбит, наклонности ($\operatorname{arctg}\gamma$) и $1/a_1$;

2) прямые возмущающие эффекты планет на движение Луны;

3) косвенное действие планет через возмущения в движении Солнца;

4) движение эклиптики;

5) сфероидальность Земли;

6) вековое ускорение Луны.

Последний эффект подробно будет рассмотрен в гл. 19. Если читатель интересуется подробностями остальных возмущающих факторов, то мы отсылаем его к «Теории Луны» Брауна или к уже упомянутым в § 18.01 работам.

Глава 19

ВЕКОВОЕ УСКОРЕНИЕ ЛУНЫ

§ 19.01. Открытие Галлея

Средняя долгота планеты или Луны в невозмущенном движении выражается формулой

$$l = nt + \varepsilon,$$

где n и ε — постоянные. При этом нужно иметь в виду, что вычисляемая по этой формуле l содержит часть, равную $360°j$, где j означает общее число сидерических периодов, прошедших за время t от некоторой эпохи. При наличии возмущений формула для l записывается в виде

$$l = \int n\,dt + \varepsilon, \tag{1}$$

где n и ε теперь уже не являются постоянными. Фактически мы можем написать

$$l = l_0 + n_0 t + P,$$

где l_0 и n_0 — постоянные, причем в n_0 включен коэффициент при вековом члене элемента ε; P представляет собой невековые возмущения в долготе.

Если вывести значения l из наблюдений, полученных для трех различных эпох, то будем иметь

$$l_1 = l_0 + n_0 t_1 + P_1, \quad l_2 = l_0 + n_0 t_2 + P_2,$$
$$l_3 = l_0 + n_0 t_3 + P_3.$$

Из первых двух и последних двух уравнений соответственно имеем

$$n_0 = \frac{l_2 - l_1 - P_2 + P_1}{t_2 - t_1} \tag{2}$$

и

$$n_0 = \frac{l_3 - l_2 - P_3 + P_2}{t_3 - t_2}. \tag{3}$$

В случае планет эти два выражения с высокой степенью точности дают одно и то же значение n_0.

Если аналогичные рассуждения применить к движению Луны, то тождественность выражений (2) и (3) не имеет более места. Этот факт впервые отметил в 1693 г. Галлей. Точность значений n_0, полученных при помощи формул (2) и (3), зависит, очевидно, от величин рассматриваемых интервалов $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_2$. Если эти интервалы имеют порядок в несколько сот лет, то возмущающие члены P_l не играют важной роли при определении n_0. Исследуя среднее движение Луны, Галлей выбрал три эпохи, отделенные друг от друга по возможности большими промежутками времени. Чтобы получить точные значения l для тех времен, когда не было телескопов, он обратился к записям, в которых приводились данные о древних затмениях. Зная обстоятельства, при которых происходило какое-либо затмение, можно было без труда определить долготу Луны по координатам Солнца. Одна из групп затмений, использованных Галлеем, была взята им из «Альмагеста» Птолемея, а вторую группу составили затмения, наблюдавшиеся арабскими астрономами в конце IX века нашей эры. Отдельные затмения в каждой из групп могли быть с помощью несложного процесса приведены к одной эпохе. Третья эпоха была современной Галлею.

Галлей нашел, что два уравнения (2) и (3) дают различные значения для n_0, причем второе значение больше первого. Это навело на мысль, что выражение для средней долготы Луны должно содержать член с t^2 — так называемое вековое ускорение. При этом предположении для Луны мы можем написать

$$l = l_0 + n_0 t + \sigma\left(\frac{t}{100}\right)^2 + P, \tag{4}$$

где t измеряется в юлианских годах, равных по $365^1/_4$ суток, от некоторой выбранной эпохи. В этой формуле σ называется коэффициентом векового ускорения. Рассматриваемый член можно также записать в виде σT^2, где T — число юлианских столетий, прошедших от принятой эпохи.

Величина коэффициента σ, найденная после Галлея при более тщательном изучении затмений, оказалась равной приблизительно $11''$.

Заметим, что вековое ускорение было обнаружено не из теории, основанной на законе тяготения, а из наблюдений. При этом встал вопрос: каким образом теория тяготения Ньютона может объяснить это явление?

§ 19.02. Теоретическое исследование Лапласом векового ускорения

Исследуя движение спутников Юпитера, Лаплас заметил, что вековой член в выражении эксцентриситета орбиты Юпитера приводит к вековому ускорению в средней долготе спутника. Предполагая поэтому, что вековой член в эксцентриситете орбиты Земли, обусловленный возмущениями планет, приводит к аналогичному эффекту в случае Луны, он вычислил величину σ, входящую в формулу (4) § 19.01, которая хорошо согласовалась с численным значением, определенным из наблюдений. Отсюда немедленно был сделан вывод, что явление векового ускорения удовлетворительно объясняется теорией.

Теперь мы очень просто выведем выражение для σ в том виде, в каком оно было найдено Лапласом. Согласно формуле (1) § 19.01,

$$\dot{l} = n + \dot{\varepsilon}. \tag{1}$$

Далее, уравнение Лагранжа для $\dot{\varepsilon}$ может быть записано в виде

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + A\frac{\partial R}{\partial e} + B\frac{\partial R}{\partial i},$$

причем мы должны рассмотреть только первый его член. Интересующая нас часть возмущающей функции дается формулой (18) § 7.06, при этом мы отбрасываем периодические члены и члены, зависящие от e и γ. Следовательно,

$$R = \frac{1}{4} m^2 n^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right).$$

Отсюда

$$\dot{\varepsilon} = -m^2 n \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right), \tag{2}$$

где

$$m = \frac{n_1}{n}, \tag{3}$$

причем n_1 — среднее угловое движение Солнца. Так как мы не рассматриваем периодических членов, появляющихся в уравнении (1), то можно считать в уравнении (2) n постоянным.

Далее, как уже отмечалось, e_1 не является постоянным, и, ограничиваясь лишь вековыми членами, мы можем написать

$$e_1 = e_0' - \alpha t.$$

Для эпохи 1850,0 численное значение e_0' равно 0,016771, а величина α равна $4{,}245 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, поскольку α является очень малой величиной, мы с достаточной точностью получаем

$$e_1^2 = e_0'^2 - 2e_0'\alpha t. \tag{4}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2) и интегрируя, находим, что

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + ct + \frac{3}{2} m^2 n e_0' \alpha t^2,$$

где c — постоянная, которую подробно можно не рассматривать.

Таким образом, к долготе Луны, определяемой формулой (1) § 19.01, мы прибавляем член, дающий вековое ускорение $\sigma(t/100)^2$, где

$$\sigma = \frac{3}{2} \cdot 10^4 m^2 n e_0' \alpha. \tag{5}$$

Здесь σ является безразмерной величиной. Его значение, выраженное в секундах дуги, мы получим, умножив правую часть (5) на cosec 1″. Далее,

$$m = \frac{3}{40}, \quad n = \frac{2\pi}{27{,}322} \cdot 365\frac{1}{4}.$$

Поэтому, если подставить значения этих величин и указанные числовые значения e_1' и α, то окажется, что $\sigma = 10'',4$, а это хорошо согласуется с наблюдаемым значением σ.

На первый взгляд может показаться, что эффект σ, увеличивая среднее угловое движение Луны и поэтому уменьшая большую полуось a, должен привести к тому, что Луна когда-нибудь упадет на Землю. Нужно помнить, однако, что вековой член в e_1, а именно $e_0' - \alpha t$, как мы нашли в гл. 13, не является фактически вековым членом. В действительности вековой член получается просто из периодических членов с главным периодом, равным в данном случае около 24 000 лет. Следовательно, *если* применять чисто гравитационную теорию, среднее угловое движение Луны, а поэтому и большая полуось ее орбиты подвержены колебаниям уже упомянутого долгого периода около некоторых своих средних значений. Появление члена с вековым ускорением, таким образом, обусловлено недостатками применяемого математического аппарата.

Теоретически аналогичные рассуждения применимы и к среднему движению планеты, возмущаемой другими планетами. Однако соответствующее значение σ является настолько малым, что его невозможно обнаружить из наблюдений. Только в особых случаях теории спутников (в частности, в случае Луны) величина σ достаточно велика, и ее можно вывести из наблюдений.

§ 19.03. Расхождение в значениях σ, полученных Адамсом и Лапласом

При выводе величины σ методом, изложенным в предыдущем параграфе, мы нашли только первое приближение [1]), содержащее множитель m^2, где m рассматривается как малая величина, сравнимая, например, с эксцентриситетом орбиты Луны. Чтобы найти приближения более высокого порядка, мы должны подставить в полное выражение R, включающее и периодические члены, элементы, полученные в первом приближении. Новое выражение R будет со-

[1]) Лаплас, очевидно, считал, что члены более высокого порядка относительно m очень мало влияют на окончательный результат.

держать непериодические члены с более высокими степенями m, которые частично появляются при перемножении периодических членов с одними и теми же аргументами. Следующий шаг, очевидно, будет еще более сложным.

Адамс первым отметил, что несмотря на кажущееся совпадение между наблюдаемым значением σ и его теоретической величиной, вычисленной Лапласом, последняя обременена серьезными ошибками. Вычисляя более высокие приближения, Адамс [1]) показал, что выражение для σ должно иметь вид

$$\sigma = am^2 + bm^4 + cm^5 + dm^6 + em^7 + \ldots$$

(сюда не входит член вида a_1m^3), что этот ряд для σ сходится очень медленно и что все коэффициенты $b, c, \ldots$ отрицательны. Используя известные в то время значения постоянных, он вычислил члены в вышеприведенном выражении для σ, которые оказались соответственно равными $10'',66$; $-2'',34$; $-1'',58$; $-0'',71$; $-0'',25$. Оценивая остальные члены, имеющие порядок m^8 и выше, Адамс пришел к выводу, что их сумма равна $-0'',06$. Таким образом, он теоретически получил для σ величину $5'',72$, что значительно отличается от принятого значения, выводимого из наблюдений. Это значение сначала оспаривалось Понтекуланом, Плана и Ганзеном, которые получили в сущности те же самые результаты, что и Лаплас, и которые, конечно, совпадали с величиной, выведенной из наблюдений. В последовавшей затем полемике Адамс указал, что этот вопрос является чисто математическим и должен решаться исключительно методами математики, независимо от согласия или несогласия теории с наблюдениями. В частности, так как e_1 величина не постоянная, то это должно приниматься во внимание при интегрировании полных уравнений движения, что не было учтено в исследованиях трех упомянутых астрономов.

Поэтому Адамс заключил, что если теоретическое значение σ явно отличается от его значения, полученного из наблюдений, то на движение Луны влияют некоторые другие силы, не имеющие гравитационной природы. «Этот факт, — добавляет он, — может указать нам путь к важному физическому открытию». Только после первой мировой войны предсказание Адамса получило подтверждение, когда Тейлор [2]) и Джеффрис [3]) показали, что различие между наблюдаемым значением σ и соответствующим его значением, полученным Адамсом (впоследствии подтвержденным различными методами) может быть объяснено замедлением вращения Земли, вызванным приливным трением в земных морях. Это замедление вращения Земли вызывает

[1]) Phil. Trans., R. S, **143**, 397 (1853); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **20**, 225, 279 (1860); **40**, 411 (1880).

[2]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **80**, 308 (1920).

[3]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **80**, 309 (1920).

кажущееся ускорение, по величине равное приблизительно половине того, которое выводится из наблюдений затмений [1]).

В последующих параграфах мы изложим основные моменты оригинального исследования Адамса [2]), детали которого не были опубликованы до 1880 г. Мы ограничимся при этом членами порядка до m^4 включительно.

§ 19.04. Уравнения движения (Адамс)

Мы будем пренебрегать наклонностью орбиты Луны к плоскости эклиптики. Пусть r, θ и r_1, θ_1 — полярные координаты Луны и Солнца относительно основного направления $O\Upsilon$ в плоскости эклиптики, причем Земля находится в начале координат O. Тогда θ и θ_1 будут истинными долготами Луны и Солнца. Отбрасывая параллактические члены, т. е. члены с множителями $(a_1/r_1)^4$ и т. д., мы находим, что возмущающая функция достаточно точно определяется формулой

$$R = \frac{Gm_1r^2}{2r_1^3}[3\cos^2(\theta-\theta_1)-1].$$

Уравнения движения в полярных координатах имеют вид

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta},$$

где

$$F=\frac{\mu}{r}+R.$$

Поэтому

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu}{r^2}+\frac{Gm_1r}{2r_1^3}[3\cos 2(\theta-\theta_1)+1], \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=-\frac{3Gm_1r^2}{2r_1^3}\sin 2(\theta-\theta_1). \tag{2}$$

Положим

$$r=\frac{1}{u}, \qquad H=r^2\dot{\theta}.$$

Тогда

$$\dot{r}=-H\frac{du}{d\theta}, \qquad \ddot{r}=-H^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-Hu^2\frac{dH}{d\theta}\frac{du}{d\theta},$$

$$\dot{H}=Hu^2\frac{dH}{d\theta}.$$

---

[1]) Подробнее о неравномерностях вращения Земли см.: У. Манк, Г. Макдональд, Вращение Земли, изд-во „Мир“, М., 1964. — *Прим. ред.*

[2]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 40, 472 (1880).

Кроме того,

$$Gm_1 = n_1^2 a_1^3 = m^2 n^2 a_1^3.$$

Уравнение (2) принимает вид

$$H\frac{dH}{d\theta} = -\frac{3m^2n^2}{2u^4}\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \sin 2(\theta - \theta_1).$$

Используя это равенство, приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{H^2} - \frac{m^2n^2}{2H^2u^3}\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 [3\cos 2(\theta - \theta_1) + 1] + \\ + \frac{3m^2n^2}{2H^2u^4}\frac{du}{d\theta}\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \sin 2(\theta - \theta_1).$$

Далее, с точностью до членов порядка e_1^2 включительно имеем

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e_1^2 + 3e_1\cos\varphi_1 + \frac{9}{2}e_1^2\cos 2\varphi_1,$$

где $\varphi_1 = n_1t + \varepsilon_1 - \omega_1$ — средняя аномалия Солнца.

Аналогично

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \cos 2(\theta - \theta_1) = \left(1 - \frac{5}{2}e_1^2\right)\cos 2(\theta - l_1) + \\ + \frac{7}{2}e_1\cos(2\theta - 2l_1 - \varphi_1) - \frac{1}{2}e_1\cos(2\theta - 2l_1 + \varphi_1) + \\ + \frac{17}{2}e_1^2\cos(2\theta - 2l_1 - 2\varphi_1)$$

и

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \sin 2(\theta - \theta_1) = \left(1 - \frac{5}{2}e_1^2\right)\sin 2(\theta - l_1) + \\ + \frac{7}{2}e_1\sin(2\theta - 2l_1 - \varphi_1) - \frac{1}{2}e_1\sin(2\theta - 2l_1 + \varphi_1) + \\ + \frac{17}{2}e_1^2\sin(2\theta - 2l_1 - 2\varphi_1),$$

где l_1 $(\equiv n_1t + \varepsilon_1)$ — средняя аномалия Солнца.

Члены с аргументом $2\varphi_1$ можно опустить, так как они в комбинации с другими членами не дадут непериодических слагаемых рассматриваемого порядка и, следовательно, не повлияют на окончательный результат.

Для сокращения мы положим

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 2(\theta - l_1) \equiv 2\theta - 2n_1t - 2\varepsilon_1, \\ \theta_3 &= 2\theta - 2l_1 - \varphi_1 \equiv 2\theta - 3n_1t - 3\varepsilon_1 + \tilde{\omega}_1, \\ \theta_1 &= 2\theta - 2l_1 + \varphi_1 \equiv 2\theta - n_1t - \varepsilon_1 - \tilde{\omega}_1, \end{aligned} \qquad (3)$$

где индекс при θ совпадает с числовым коэффициентом при $n_1 t$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{H^2}-\frac{m^2n^2}{2H^2u^3}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2+3e_1\cos\varphi_1\right)-$$
$$-\frac{3m^2n^2}{2H^2u^3}\left[\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\cos\theta_2+\frac{7}{2}e_1\cos\theta_3-\frac{1}{2}e_1\cos\theta_1\right]+$$
$$+\frac{3m^2n^2}{2H^2u^4}\frac{du}{d\theta}\left[\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\sin\theta_2+\frac{7}{2}e_1\sin\theta_3-\frac{1}{2}e_1\sin\theta_1\right], \tag{4}$$

$$\frac{d(H^2)}{d\theta}=-\frac{3m^2n^2}{u^4}\left[\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\sin\theta_2+\frac{7}{2}e_1\sin\theta_3-\frac{1}{2}e_1\sin\theta_1\right]. \tag{5}$$

Дальнейшие вычисления будут заключаться, во-первых, в решении этих уравнений и получении некоторых общих выражений при условии, что e_1 — постоянная, и, во-вторых, в выводе дополнительных уравнений, в которых принимается во внимание переменность e_1, a и n.

§ 19.05. Решение при постоянном e_1

В этом параграфе мы будем считать e_1, a и n постоянными и найдем непериодическую часть u с точностью до членов порядка $m^4e_1^2$ включительно. В дальнейшем члены, входящие в u и θ и зависящие от эксцентриситета лунной орбиты, будут опущены, так как в комбинации с другими членами они не дают непериодических слагаемых, зависящих от e_1.

Подставляя общие выражения в уравнения (4) и (5) § 19.04, Адамс показал, что θ и u с точностью до членов порядка m^2 включительно — все, что потребуется в дальнейшем, — можно выразить следующими формулами:

$$nt+\varepsilon=\theta+3me_1\sin\varphi_1-\frac{11}{8}m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\sin\theta_2-$$
$$-\frac{77}{16}m^2e_1\sin\theta_3+\frac{11}{16}m^2e_1\sin\theta_1, \tag{1}$$

$$u=\frac{1}{a}\left[1-\frac{3}{2}m^2e_1\cos\varphi_1+m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\cos\theta_2+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{2}m^2e_1\cos\theta_3-\frac{1}{2}m^2e_1\cos\theta_1\right]. \tag{2}$$

Продифференцируем равенство (1) по t. Тогда, вспоминая, что

$$\varphi_1=n_1t+\varepsilon_1-\tilde{\omega}_1$$

и что, например,

$$\theta_2=2\theta-2n_1t-2\varepsilon_1,$$

так что

$$\frac{d}{dt}\sin\theta_2 = 2(\dot\theta - mn)\cos\theta_2,$$

мы будем иметь

$$n\Big[1 - 3m^2e_1\cos\varphi_1 - \frac{11}{4}m^3\Big(1-\frac{5}{2}e_1^2\Big)\cos\theta_2 - \\ - \frac{231}{16}m^3e_1\cos\theta_3 + \frac{11}{16}m^3e_1\cos\theta_1\Big] = \\ = \dot\theta\Big[1 - \frac{11}{4}m^2\Big(1-\frac{5}{2}e_1^2\Big)\cos\theta_2 - \frac{77}{8}m^2e_1\cos\theta_3 + \frac{11}{8}m^2e_1\cos\theta_1\Big].$$

Отсюда, сохраняя лишь главные члены, находим

$$\frac{n}{\dot\theta} = 1 + \frac{9}{2}m^4e_1^2 + 3m^2e_1\cos\varphi_1 - \frac{11}{4}m^2\Big(1-\frac{5}{2}e_1^2\Big)\cos\theta_2 - \\ - \frac{77}{8}m^2e_1\cos\theta_3 + \frac{11}{8}m^2e_1\cos\theta_1. \qquad (3)$$

Но $H = r^2\dot\theta$, так что $H^2 = u^{-4}\dot\theta^2$. Поэтому из формул (2) и (3) с точностью до малых порядка m^4 включительно после некоторых алгебраических упрощений получаем следующее выражение для H^2:

$$H^2 = n^2a^4\Big[1 + \frac{171}{32}m^4 + \frac{2421}{64}m^4e_1^2 + \\ + \frac{3}{2}m^2\Big(1-\frac{5}{2}e_1^2\Big)\cos\theta_2 + \frac{21}{4}m^2e_1\cos\theta_3 - \frac{3}{4}m^2e_1\cos\theta_1\Big]. \qquad (4)$$

Аналогично выражение для μ/H^2 приводится к виду

$$\frac{\mu}{H^2} = \frac{\mu}{n^2a^4}\Big[1 - \frac{135}{32}m^4 - \frac{1881}{64}m^4e_1^2 - \\ - \frac{3}{2}m^2\Big(1-\frac{5}{2}e_1^2\Big)\cos\theta_2 - \frac{21}{4}m^2e_1\cos\theta_3 + \frac{3}{4}m^2e_1\cos\theta_1\Big]. \qquad (5)$$

§ 19.06. Вычисление μ/H^2 из первого уравнения движения

Рассмотрим теперь первое уравнение движения (4) § 19.04. Дифференцируя равенство (2) § 19.05, мы получаем $du/d\theta$ и $d^2u/d\theta^2$; при помощи формулы (4) § 19.05 можно найти $1/H^2u^3$ и $(1/H^2u^4)(du/d\theta)$ с точностью до малых порядка m^2 включительно, т. е. с точностью, с которой нам нужно знать эти два члена. Затем из уравнения (4) § 19.04 мы получим выражение для μ/H^2, которое должно быть тождественным с выражением (5) § 19.05. Согласно формуле (2)

§ 19.05,

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{\dot\theta}\frac{du}{dt}=\frac{1}{a}\left[\frac{3}{2\dot\theta}m^3e_1\sin\varphi_1-2m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\left(1-\frac{mn}{\dot\theta}\right)\sin\theta_2-\right.$$
$$\left.-\frac{7}{2}m^2e_1\left(2-\frac{3mn}{\dot\theta}\right)\sin\theta_3+\frac{1}{2}m^2e_1\left(2-\frac{mn}{\dot\theta}\right)\sin\theta_1\right].$$

Из формулы (3) § 19.05 видно, что в этом равенстве достаточно положить $\dot\theta=n$. Поэтому с точностью до малых порядка m^2 включительно имеем

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{a}\left[-2m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\sin\theta_2-7m^2e_1\sin\theta_3+m^2e_1\sin\theta_1\right]. \tag{1}$$

Тем же самым путем находим, что

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{a}\left[-4m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\cos\theta_2-14m^2e_1\cos\theta_3+2m^2e_1\cos\theta_1\right], \tag{2}$$

$$\frac{m^2n^2}{2H^2u^3}=\frac{m^2}{2a}\left[1+\frac{9}{2}m^2e_1\cos\varphi_1-\frac{9}{2}m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\cos\theta_2-\right.$$
$$\left.-\frac{63}{4}m^2e_1\cos\theta_3+\frac{9}{4}m^2e_1\cos\theta_1\right], \tag{3}$$

$$\frac{m^2n^2}{H^2u^4}\frac{du}{d\theta}=\frac{m^2}{a}\left[-2m^2\left(1-\frac{5}{2}e_1^2\right)\sin\theta_2-7m^2e_1\sin\theta_3+m^2e_1\sin\theta_1\right]. \tag{4}$$

Подставляя эти выражения, а также u, определяемое равенством (2) § 19.06, в уравнение (5) § 19.04, мы получим следующее выражение для непериодической части μ/H^2:

$$\frac{\mu}{H^2}=\frac{1}{a}\left[1+\frac{1}{2}m^2\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)-\frac{15}{8}m^4(1-5e_1^2)-\frac{321}{16}m^4e_1^2\right]. \tag{5}$$

Приравнивая это выражение выражению (5) § 19.05 и замечая, что μ/n^2a^3 очень близко к единице, мы после некоторых упрощений получим с точностью до членов порядка m^4 включительно

$$\frac{\mu}{n^2a^3}=1+\frac{1}{2}m^2\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)+\frac{75}{32}m^4+\frac{1197}{64}m^4e_1^2. \tag{6}$$

Заметим для контроля, что периодические члены (которые здесь не приводятся) в двух выражениях для μ/H^2 находятся в согласии друг с другом.

§ 19.07. Новая форма уравнения движения (e_1 переменно)

Предположим теперь, что $e_1=e_0'-\alpha t$ и что величиной α^2 можно пренебречь. Выберем n и a (рассматриваемые теперь как переменные) так, чтобы непериодические части в u и H^2 имели тот же самый вид, что и в § 19.05. Тогда элементы n и a будут связаны формулой (6) § 19.06. Заметим, что n — среднее движение в момент, соответствующий долготе θ. Для того чтобы удовлетворить уравнениям движения, когда принимается во внимание переменность e_1, очевидно, нужно добавить периодические члены к выражениям u и H^2, определяемым соответственно формулами (2) и (4) § 19.05. Положим

$$u = \frac{1}{a}(1 + \delta\nu + P_1), \tag{1}$$

где через P_1 обозначены периодические члены в выражении (2) § 19.05 и

$$H^2 = n^2a^4(1 + 2\delta\eta + P_0 + P_2), \tag{2}$$

где P_0 и P_2 означают соответственно непериодические и периодические члены в выражении (4) § 19.05. В формулах (1) и (2) $\delta\nu$ и $\delta\eta$ являются периодическими функциями.

Теперь $du/d\theta$ будет определяться формулой (1) § 19.06 к которой добавлены члены

$$-\frac{1}{a^2}(1 + \delta\nu + P_1)\frac{da}{d\theta} + \frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}(\delta\nu) + \frac{1}{a}\frac{dP_1}{de_1}\cdot\frac{de_1}{d\theta},$$

или

$$\frac{1}{\dot\theta}\left[-\frac{\dot a}{a^2}(1 + \delta\nu + P_1) - \frac{\alpha}{a}\frac{dP_1}{de_1}\right] + \frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}(\delta\nu).$$

Ниже будет показано, что $\dot a$ и $\delta\nu$ имеют порядок $m^2\alpha$. Поэтому $\delta\nu$ и P_1 в коэффициенте при $\dot a$ могут быть опущены. Так как $du/d\theta$ требуется найти лишь с точностью до малых порядка m^2, то достаточно написать $\dot\theta = n$. Поэтому дополнительные члены в $du/d\theta$ будут

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\frac{d}{d\theta}(\delta\nu) + \frac{1}{na}\Big[-\frac{\dot a}{a} + \frac{3}{2}m^2\alpha\cos\varphi_1 +& \\ + m^2\alpha\left(5e_1\cos\theta_2 - \frac{7}{2}\cos\theta_3 + \frac{1}{2}\cos\theta_1\right)\Big]&.\end{aligned} \tag{3}$$

Вследствие того, что при e_1 фигурирует малый множитель α и так как мы пренебрегаем его квадратом, величина e_1 $\left(\equiv e_0' - \alpha t\right)$ может рассматриваться в выражении (3) и в дальнейшем как постоянная.

Аналогично $d^2u/d\theta^2$ будет содержать следующие дополнительные члены:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{na}[-m^2\alpha(10e_1\sin\theta_2 - 7\sin\theta_3 + \sin\theta_2)] + \\ &+ \frac{1}{na}[-m^2\alpha(10e_1\sin\theta_2 - 7\sin\theta_3 + \sin\theta_2)] + \frac{1}{a}\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta\nu),\end{aligned}$$

причем первая строка следует из формулы (1) § 19.06, а остальные члены — из формулы (3) настоящего параграфа. Таким образом, $(d^2u/d\theta^2)+u$ содержит следующие дополнительные члены:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta\nu)+\delta\nu\right]+\frac{m^2\alpha}{na}\left[-20e_1\sin\theta_2+14\sin\theta_3-2\sin\theta_2\right].$$

Кроме того, μ/H^2 содержит дополнительный член $(\mu/n^2a^4)(-2\delta\eta)$ или с достаточной степенью точности $-(2/a)\,\delta\eta$. Другие члены в дифференциальном уравнении не дают дополнительных членов рассматриваемого порядка. Первое уравнение движения теперь заменяется следующим уравнением:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta\nu)+\delta\nu+\frac{m^2\alpha}{n}\left(-20e_1\sin\theta_2+14\sin\theta_3-2\sin\theta_1\right)=-2\delta\eta. \quad (4)$$

§ 19.08. Новый вид второго уравнения движения

Аналогично мы найдем теперь $(d/d\theta)(H^2)$, сохраняя в непериодической части члены до малого порядка $m^4e_1\alpha$, а в периодической части — до малых порядка $m^2e_1\alpha$ включительно. Тогда в $d(H^2)/d\theta$ войдут следующие дополнительные члены:

$$\frac{n^2a^4}{\dot\theta}\left[\frac{2\dot n}{n}+\frac{4\dot a}{a}-\frac{3421}{32}m^4e_1\alpha+\right.$$
$$\left.+m^2\alpha\left(\frac{15}{2}e_1\cos\theta_2-\frac{21}{4}\cos\theta_3+\frac{3}{4}\cos\theta_1\right)\right]+2n^2a^4\frac{d}{d\theta}(\delta\eta).$$

Кроме того, так как $u^{-4}=a^4(1-4\,\delta\nu)$, поскольку речь идет о $\delta\nu$, правая часть второго дифференциального уравнения (5) § 19.04 будет содержать следующие дополнительные члены:

$$12m^2n^2a^4\,\delta\nu\left(\sin\theta_2+\frac{7}{2}e_1\sin\theta_3-\frac{1}{2}e_1\sin\theta_1\right).$$

Второе уравнение теперь запишется в виде

$$\frac{1}{\dot\theta}\left[\frac{2\dot n}{n}+\frac{4\dot a}{a}-\frac{3421}{32}m^4e_1\alpha+\right.$$
$$\left.+m^2\alpha\left(\frac{15}{2}e_1\cos\theta_2-\frac{21}{4}\cos\theta_3+\frac{3}{4}\cos\theta_1\right)\right]+2\frac{d}{d\theta}(\delta\eta)=$$
$$=12m^2\,\delta\nu\left(\sin\theta_2+\frac{7}{2}e_1\sin\theta_3-\frac{1}{2}e_1\sin\theta_1\right). \quad (1)$$

Рассмотрим в уравнении (1) сначала периодические члены порядка $m^2\alpha$ и $m^2\alpha e_1$. С достаточной степенью точности можно вместо $\dot\theta$ подставить величину n и пренебречь правой частью уравнения (1), так как $\delta\nu$ имеет порядок $m^2\alpha$.

Тогда мы будем иметь

$$2\frac{d}{d\theta}(\delta\eta) = -\frac{m^2\alpha}{n}\left(\frac{15}{2}e_1\cos\theta_2 - \frac{21}{4}\cos\theta_3 + \frac{3}{4}\cos\theta_1\right),$$

откуда, интегрируя, получаем

$$2\,\delta\eta = -\frac{m^2\alpha}{n}\left(\frac{15}{4}e_1\sin\theta_2 - \frac{21}{8}\sin\theta_3 + \frac{3}{8}\theta_1\right). \qquad (2)$$

Подставим это выражение для $2\delta\eta$ в уравнение (4) § 19.07 и положим в периодических членах $\mu = n^2a^3$ (так как нам потребуются их значения только до малых порядка m^2 включительно). Тогда это последнее уравнение примет вид

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta\nu) + \delta\nu = \frac{m^2\alpha}{n}\left(\frac{95}{4}e_1\sin\theta_2 - \frac{133}{8}\sin\theta_3 + \frac{19}{8}\sin\theta_1\right). \qquad (3)$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\delta\nu = -\frac{m^2\alpha}{n}\left(\frac{95}{12}e_1\sin\theta_2 - \frac{133}{24}\sin\theta_3 + \frac{19}{24}\sin\theta_1\right). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь непериодические члены в уравнении (1) после подстановки в них выражений $\delta\eta$ и $\delta\nu$ из формул (2) и (4) и $\dot\theta$ из формулы (3) § 19.05. После некоторых упрощений найдем

$$\frac{\dot n}{n} + \frac{2\dot a}{a} = \frac{2103}{32}m^4e_1\alpha. \qquad (5)$$

§ 19.09. Вековое ускорение порядка m^4

После подстановки в первое дифференциальное уравнение (4) § 19.04 величин $\delta\nu$ и $\delta\eta$ оно не будет содержать непериодических членов, зависящих от α. Следовательно, μ/n^2a^3 сохраняет свой первоначальный вид (6) § 19.06, так что

$$\ln\left(\frac{\mu}{n^2a^3}\right) = \ln\left[1 + \frac{1}{2}m^2\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right) + \frac{75}{32}m^4 + \frac{1197}{64}m^4e_1^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}m^2\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right) + \frac{71}{32}m^4 + \frac{1173}{64}m^4e_1^2. \qquad (1)$$

Далее, $mn = n_1$. Поэтому

$$\frac{\dot m}{m} = -\frac{\dot n}{n}. \qquad (2)$$

Продифференцируем равенство (1) по t и воспользуемся формулой (2). Тогда получим

$$\frac{2\dot n}{n} + \frac{3\dot a}{a} = \frac{1}{2}m^2e_1\alpha\left(3 + \frac{1173}{16}m^2\right) +$$
$$+ \frac{\dot n}{n}\cdot m^2\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2 + \frac{71}{8}m^2 + \frac{1173}{16}m^2e_1\right),$$

откуда

$$\frac{3\dot{a}}{a}+\frac{\dot{n}}{n}\left[2-m^2\left(1+\frac{3}{2}e_1^2+\frac{71}{8}m^2+\frac{1173}{16}m^2e_1\right)\right]=$$
$$=\frac{3}{2}m^2e_1\alpha\left(1+\frac{391}{16}m^2\right). \qquad (3)$$

Комбинируя эту формулу с равенством (5) § 19.08, находим

$$\frac{\dot{n}}{n}=3m^2e_1\alpha-\frac{3771}{32}m^4e_1\alpha \qquad (4)$$

и

$$\frac{\dot{a}}{a}=-\frac{3}{2}m^2e_1\alpha+\frac{2937}{32}m^4e_1\alpha. \qquad (5)$$

Запишем равенство (4) в виде

$$\dot{n}=n\left(3m^2e_1\alpha-\frac{3771}{32}m^4e_1\alpha\right),$$

где в правой части можно считать n постоянным. Поэтому часть $\int n\,dt$, появляющаяся из-за переменности e_1, в выражении для средней долготы будет равна Pt^2, где

$$P=\frac{3}{2}m^2ne_1\alpha-\frac{3771}{64}m^4ne_1\alpha. \qquad (6)$$

Поэтому вековое ускорение до членов порядка m^4 включительно будет выражаться формулой

$$\sigma=10^4P.$$

В выражении (6) отношение второго члена к первому численно равно $1257m^2$, а если подставить числовое значение m, то 0,221. Таким образом, поскольку первый член равен 10″,4, то член порядка m^4 равен —2″,30, что согласуется с величиной, полученной Адамсом и равной —2″,34, если принять во внимание небольшое различие в численных значениях постоянных, использованных Адамсом и нами.

Как отмечалось в § 19.03, окончательное выражение для σ, найденное Адамсом и включающее члены более высокого порядка относительно m, равно 5″,72. Значение σ, выведенное из наблюдений затмений, равно приблизительно 11″. Поэтому разница в 5″,3, приписываемая эффекту приливного трения, замедляющего вращение Земли, увеличивает фундаментальную единицу времени и ведет к кажущемуся ускорению среднего движения Луны примерно на 5″,3 в столетие.

Можно добавить, что вследствие переменности e_1 долгота перигелия $\tilde{\omega}$ и долгота узла Ω также содержат вековые ускорения. Их численные значения, согласно Делонэ, соответственно равны $-40''\left(\frac{t}{100}\right)^2$ и $+6'',8\left(\frac{t}{100}\right)^2$.

Глава 20

ПРЕЦЕССИЯ И НУТАЦИЯ

§ 20.01. Введение

В § 1.05 мы видели, что если считать планету шаром, плотность которого постоянна или является функцией лишь расстояния r от центра O, то потенциал планеты на внешнюю точку будет совпадать с потенциалом материальной точки, расположенной в центре O. В соответствии с этим теория движения планет основывается на взаимном притяжении точечных масс. Однако Земля не является строго сферической, и притяжение Земли Луной и Солнцем (мы пока можем пренебречь притяжением планет) изменяет направление оси вращения Земли относительно звезд или, точнее, относительно некоторой выбранной нами неподвижной системы координат. Это кратко описанное явление складывается из прецессии и нутации. Первая из них связана с вековым изменением направления оси вращения, а вторая — с сопутствующими ему периодическими процессами.

Прецессия была открыта Гиппархом более 2000 лет тому назад, как явление, заключающееся в непрерывном возрастании долгот звезд со скоростью 36″ в столетие (по современным данным около 50″ в столетие) и не изменяющее заметным образом их широт. Интерпретация этого явления заключается в следующем. Плоскость эклиптики является фиксированной плоскостью, а положение экватора изменяется так, что точка весеннего равноденствия совершает попятное движение по эклиптике с упомянутой выше постоянной скоростью. Поэтому полюс экватора описывает с постоянной скоростью круг вокруг полюса эклиптики за период времени, как мы теперь знаем, в 26 000 лет. Объяснение прецессии на основе динамической теории впервые было дано Ньютоном в его «Началах» и представляет собой одно из его выдающихся достижений. Радиус малого круга, описываемого полюсом экватора (другими словами, угловое расстояние между полюсом эклиптики и полюсом экватора), равный наклонности эклиптики, в этой теории предполагался постоянным. В более строгой теории, развитой после открытия нутации Брадлеем в 1748 г., показано, что эклиптика не является строго фиксированной плоскостью, наклонность не является постоянной и попятное движение точки весеннего равноденствия неравномерно.

При построении динамической теории мы предположим, что Земля является несферическим твердым телом, внутри которого мы можем определить неподвижную относительно Земли систему координат с началом в центре масс Земли. Наши исследования будут проводиться при этих предположениях, причем будет рассматриваться движение указанной системы координат относительно осей, неподвижных в пространстве. Под основной плоскостью неподвижной системы координат мы будем понимать плоскость эклиптики для некоторой эпохи t_0. Последующий анализ основывается на уравнениях движения Лагранжа (§ 8.04). Чтобы написать эти уравнения, нам нужно выразить силовую функцию U, обусловленную притяжением Луны и Солнца, а также кинетическую энергию T через надлежащие переменные. Сначала для упрощения мы рассмотрим только одну Луну и выведем соответствующие уравнения движения. Члены, обусловленные действием Солнца, можно немедленно вписать в эти уравнения по аналогии с членами, вызванными притяжением Луны.

§ 20.02. Силовая функция U

Землю приближенно можно считать сжатым сфероидом, но в общем исследовании мы будем рассматривать ее как эллипсоид, две оси которого OX и OY (рис. 27), лежащие в плоскости экватора, несколько

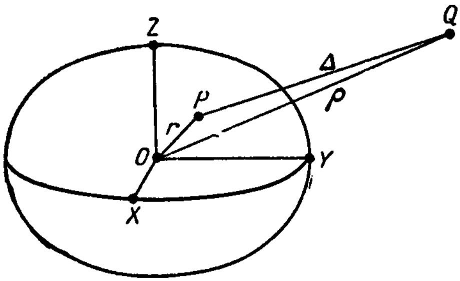

Рис. 27.

отличны друг от друга. Наименьшая из трех главных осей эллипсоида направлена по полярной оси OZ. Предположим далее, что распределение массы Земли является симметричным относительно каждой из трех осей OX, OY, OZ. Следовательно, точка O будет центром масс Земли. Отметим, что оси OX, OY, OZ *жестко связаны* с Землей. Мы будем называть их главными осями инерции Земли.

Поскольку O — центр масс, то, если $d\mu$ — элемент массы, расположенной в точке $P(x, y, z)$, мы будем иметь

$$\int x\,d\mu = \int y\,d\mu = \int z\,d\mu = 0, \tag{1}$$

где в каждом случае интегрирование производится по всему объему Далее, согласно сделанным допущениям,

$$\int xy\,d\mu = \int yz\,d\mu = \int zx\,d\mu = 0 \tag{2}$$

и

$$\int x^3\,d\mu = \int x^2 y\,d\mu = \int xy^2\,d\mu = 0. \tag{3}$$

Аналогичные равенства справедливы для координат y и z. Обозначим моменты инерции Земли относительно OX, OY, OZ соответственно через A, B, C и определим их формулами

$$\begin{gathered} A = \int (y^2 + z^2)\,d\mu, \quad B = \int (z^2 + x^2)\,d\mu, \\ C = \int (x^2 + y^2)\,d\mu. \end{gathered} \tag{4}$$

Можно отметить, что C больше A и B.

Пусть на рис. 27 Q — центр Луны. Достаточно предположить, что Луна является однородным шаром и заменить ее материальной точкой M, расположенной в точке Q. Потенциал Луны в точке P тогда будет равен GM/Δ, где Δ — расстояние PQ. Пусть dU означает элемент силовой функции, обусловленный притяжением элемента $d\mu$, находящегося в точке P, массой M, расположенной в точке Q.

Тогда

$$dU = \frac{GM\,d\mu}{\Delta}.$$

Силовая функция U взаимного притяжения Земли и Луны поэтому будет определяться формулой

$$U = GM \int \frac{d\mu}{\Delta}. \tag{5}$$

Обозначим через ξ, η, ζ координаты точки P относительно системы координат с началом в точке O, ось ξ которой совпадает с OQ, а оси η и ζ выбраны произвольно, но так, чтобы система была прямоугольной. Тогда

$$\Delta^2 = \rho^2 - 2\xi\rho + r^2,$$

где $\rho = OQ$ и $r = OP$. Так как ξ/ρ и r/ρ — величины малые, порядка не более $^1/_{60}$ для Луны, а для Солнца значительно меньшие, мы можем написать

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{2\xi\rho - r^2}{\rho^2}\right)^{-1/2}.$$

Разложим это выражение в ряд по формуле бинома. Тогда с точностью до четвертой степени ξ/ρ (или r/ρ) равенство (5) примет вид

$$U=\frac{GM}{\rho}\int d\mu\left(1+\frac{\xi}{\rho}+\frac{3\xi^2-r^2}{2\rho^2}+\frac{5\xi^3-3\xi r^2}{2\rho^3}+\frac{35\xi^4-30\xi^2r^2+3r^4}{8\rho^4}\right).$$

Для удобства перепишем эту формулу в виде

$$U=\frac{CM}{\rho}\left[X_0+\frac{X_1}{\rho}+\frac{X_2}{2\rho^2}+\frac{X_3}{2\rho^3}+\frac{X_4}{8\rho^4}\right].$$

Пусть далее l, m, n означают направляющие косинусы прямой OQ относительно осей OX, OY, OZ. Тогда

$$\xi=lx+my+nz.$$

Мы имеем

а) $X_0=\int d\mu=E,$

где E — масса Земли. Согласно равенствам (1),

б) $X_1=\int \xi\, d\mu=\int (lx+my+nz)\,d\mu=0.$

Далее

в) $X_2=\int (3\xi^2-r^2)\,d\mu=\int [2r^2-3(\eta^2+\zeta^2)]\,d\mu.$

При помощи равенств (4) мы получим

$$\int 2r^2\,d\mu=A+B+C.$$

Кроме того, выражение

$$\int (\eta^2+\zeta^2)\,d\mu$$

— момент инерции Земли относительно оси OQ. Обозначим его через I. Тогда

$$X_2=A+B+C-3I.$$

Поскольку

г) $l^2+m^2+n^2=1,$

то

$$X_3=\int [5(lx+my+nz)^2-$$
$$-3(lx+my+nz)(l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2)]\,d\mu.$$

Согласно равенствам (3), все величины

$$\int x^3\,d\mu, \quad \int x^2 y\,d\mu, \quad \int xy^2\,d\mu$$

равны нулю. Поэтому $X_3 = 0$.

д) Очевидно, интеграл X_4 имеет порядок Ea^4, где a — любая полуось Земли. Соответствующая часть U (скажем, U_4) будет иметь порядок $\frac{GME}{\rho}\left(\frac{a}{\rho}\right)^4$. Аналогично та часть U_2, входящая в U, которая соответствует X_2, будет порядка $\frac{GME}{\rho}\left(\frac{a}{\rho}\right)^2$. Таким образом, U_4/U_2 имеет порядок $(a/\rho)^2$, что для Луны численно равно $(1/60)^2$, а в случае Солнца значительно меньшей величине. Эффекты, производимые U_4, настолько малы, что ими можно пренебречь. Используя все предыдущие результаты, мы получим

$$U = GM\left(\frac{E}{\rho} + \frac{A+B+C-3I}{2\rho^3}\right). \tag{6}$$

Это равенство выполняется строго с точностью до членов порядка $(a/\rho)^3$.

Выразим теперь U через координаты точки Q относительно главных осей инерции Земли. Имеем

$$I = \int (\eta^2 + \zeta^2)\,d\mu = \int (r^2 - \xi^2)\,d\mu =$$

$$= \int [(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2]\,d\mu,$$

что при помощи формул (2) и (4) приводится к виду

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = A - (A - B)\,m^2 + (C - A)\,n^2.$$

Обозначим координаты точки Q относительно осей OX, OY, OZ через X, Y, Z. Тогда $m = Y/\rho$, $n = Z/\rho$. Поэтому

$$U = GM\left[\frac{E}{\rho} + \frac{B+C-2A}{2\rho^3} + \frac{3(A-B)\,Y^2 - 3(C-A)\,z^2}{2\rho^5}\right]. \tag{7}$$

При использовании уравнений Лагранжа нам потребуются производные вида $\partial U/\partial q$, где через q обозначена любая из переменных, определяющих положение главных осей инерции Земли относительно неподвижной системы координат. Так как ρ не зависит от этих переменных, то первые два члена не внесут никакого вклада в производную $\partial U/\partial q$. Следовательно, для нашей цели можно допустить, что U дается формулой

$$U = \frac{3GM}{2\rho^5}\left[(A - B)\,Y^2 - (C - A)\,Z^2\right]. \tag{8}$$

§ 20.03. Подвижные оси и кинетическая энергия

Пусть на рис. 28 OX, OY, OZ означают главные оси инерции Земли. Предположим, что за время dt в результате одновременного поворота вокруг осей OX, OY, OZ с угловыми скоростями α, β, γ соответственно направление этих осей несколько изменится. Пусть x, y, z — координаты некоторой точки P относительно подвижных осей

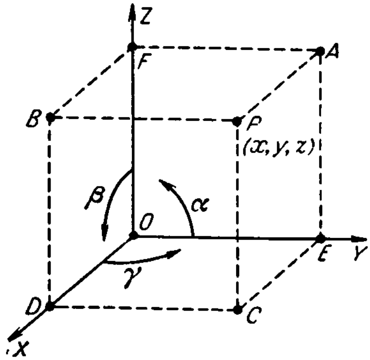

Рис. 28.

в некоторый момент t. Пусть, кроме того, u, v, w означают проекции вектора скорости точки P на оси неподвижной системы координат, совпадающих в момент t с осями OX, OY, OZ. Опустим перпендикуляры PA, PB, PC на координатные плоскости и проведем дополнительные линии так, чтобы получить прямоугольный параллелепипед с параллельными гранями $ODCE$ и $FBPA$. Тогда

$u =$ Составляющая скорости P относительно O,
параллельная оси, совпадающей с OX в момент $t =$
$=$ Составляющая скорости P относительно A, параллельная $OX +$
$+$ Составляющая скорости A относительно F, параллельная $OX +$
$+$ Составляющая скорости F относительно O, параллельная OX.

Первый член правой части равен $\dot{x}$, второй есть $-\gamma \cdot FA$ или $-\gamma y$, так как FA вращается вокруг OZ с угловой скоростью γ в направлении $\overrightarrow{PA}$. Аналогично третий член равен $+\beta z$. Поэтому мы имеем

$$u = \dot{x} - \gamma y + \beta z.$$

Кроме того,

$$v = \dot{y} - \alpha z + \gamma x,$$

$$w = \dot{z} - \beta x + \alpha y.$$

Если P — фиксированная точка внутри твердой Земли, то

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.$$

Следовательно,

$$u = \beta z - \gamma y, \quad v = \gamma x - \alpha z, \quad w = \alpha y - \beta x. \tag{1}$$

Теперь кинетическую энергию T, обусловленную вращением тела, нужно выразить в *неподвижных* осях, которые, как мы предположим, совпадают в момент t с OX, OY, OZ. Обозначив через $d\mu$ элемент массы в точке P, мы получим следующую формулу, определяющую кинетическую энергию

$$2T = \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\mu,$$

или, используя равенства (1),

$$2T = \int [(\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2]\, d\mu =$$
$$= \int [\alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (z^2 + x^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2)]\, d\mu.$$

При этом члены вида $\int yz\, d\mu$, согласно равенствам (2) § 20.02, обращаются в нуль. Используя формулы (4) § 20.02, мы будем иметь

$$2T = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \tag{2}$$

§ 20.04. Углы Эйлера

Пусть на рис. 29 OX_0, OY_0, OZ_0 суть неподвижные оси с началом в центре O рассматриваемой сферы, причем основной плоскостью является плоскость эклиптики в эпоху t_0, а Z_0 — полюс эклиптики. Положение точки X_0 мы определим несколько позже. Оси OX, OY, OZ суть главные оси инерции Земли, причем Z совпадает с северным полюсом. Плоскость большого круга пересекает плоскость неподвижного большого круга X_0Y_0 в точке N, которая, таким образом, будет полюсом большого круга Z_0ZAB. Положение осей X, Y, Z относительно неподвижных осей определяется тремя углами θ, φ, ψ, называемыми углами Эйлера.

Угол θ — это угол между двумя большими кругами XY и X_0Y_0 и равен дуге Z_0Z, т. е. угловому расстоянию между полюсами этих больших кругов. Не давая сейчас точных определений, мы видим, что θ является наклонностью эклиптики к плоскости экватора, а N — точка весеннего равноденствия.

Угол φ — это угол NX, измеряемый от N в направлении $\overrightarrow{XY}$ и равный углу BZY, т. е. углу между большими кругами, полюсами которых являются точки N и X.

Угол ψ — это угол Y_0Z_0A или дуга Y_0A, измеряемые от Y_0 в направлении $\overrightarrow{Y_0A}$. Легко видеть, что ψ равно углу X_0N, измеряемому в направлении $\overrightarrow{X_0N}$.

Выведем одно соотношение между углами Эйлера, которое нам потребуется в дальнейшем. Пусть l_3, m_3, n_3 — направляющие косинусы прямой OZ по отношению к неподвижным осям. Тогда из

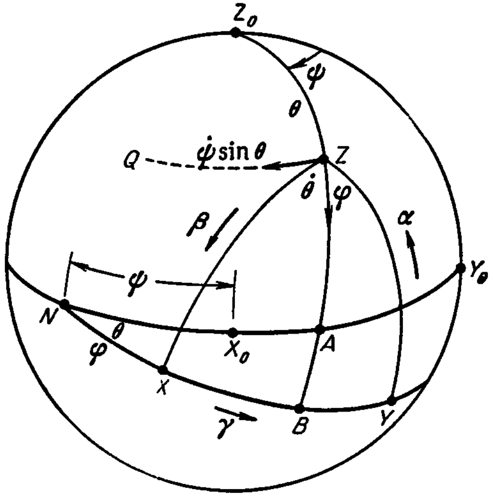

Рис. 29.

соответствующих сферических треугольников легко видеть, что

$$l_3 \equiv \cos ZX_0 = \sin\theta \sin\psi, \tag{1}$$

$$m_3 \equiv \cos ZY_0 = \sin\theta \cos\psi, \tag{2}$$

$$n_3 \equiv \cos ZZ_0 = \cos\theta. \tag{3}$$

В формулах (7) и (8) § 20.02 мы обозначим через X, Y, Z координаты центра Q Луны (рис. 27) относительно главных осей инерции Земли. Сейчас эти координаты обозначим через x, y, z. Пусть ξ, η, ζ означают координаты центра Луны относительно неподвижных осей OX_0, OY_0, OZ_0. Тогда

$$z = l_3\xi + m_3\eta + n_3\zeta$$

или, согласно формулам (1) — (3),

$$z = \xi \sin\theta \sin\psi + \eta \sin\theta \cos\psi + \zeta \cos\theta. \tag{4}$$

Это и есть соотношение, которое нам требовалось вывести. Оно будет использовано в § 20.12.

В новых обозначениях силовая функция, определяемая формулой (8) § 20.02, запишется в виде

$$U = \frac{3GM}{2\rho^5}\left[(A-B)\,y^2 - (C-A)\,z^2\right]. \tag{5}$$

§ 20.05. Выражение угловых скоростей α, β, γ через производные углов Эйлера

В этом параграфе мы выведем соотношения между α, β, γ и $\dot\theta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$.

Рассмотрим сначала движение точки Z (см. рис. 29). Относительно неподвижных осей, мгновенно совпадающих с подвижными осями OX, OY, OZ, угловая скорость точки Z складывается из 1) составляющей α вдоль $\overrightarrow{YZ}$ и 2) составляющей β вдоль $\overrightarrow{ZX}$. Разлагая эту скорость на составляющие вдоль направления $\overrightarrow{ZA}$ и направления $\overrightarrow{ZQ}$, перпендикулярное Z_0Z, мы находим:

$$\beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi \qquad \text{вдоль } ZA$$

и

$$\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi \qquad \text{вдоль } ZQ.$$

Но эти составляющие угловой скорости точки Z относительно неподвижных осей, выраженные через углы Эйлера, будут

$$\dot\theta \text{ вдоль } ZA \quad \text{и} \quad \dot\psi\sin\theta \qquad \text{вдоль } ZQ.$$

Поэтому

$$\dot\theta = \beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi \tag{1}$$

и

$$\dot\psi\sin\theta = \beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi. \tag{2}$$

Подобным образом рассмотрим движение точки B. Обращаясь к неподвижным осям, мгновенно совпадающим с OX, OY, OZ, мы видим, что составляющая угловой скорости точки B вдоль $\overrightarrow{BY}$ равна γ. Угловая скорость точки B, выраженная через углы Эйлера, будет иметь составляющую $\dot\varphi$ вдоль $\overrightarrow{BY}$ и составляющую $\dot\psi\sin Z_0B$ или $\dot\psi\cos\theta$ вдоль $\overrightarrow{BX}$. Поэтому

$$\dot\varphi - \dot\psi\cos\theta = \gamma. \tag{3}$$

Полезно составить сводку полученных формул. Выражая $\dot\varphi$ из формулы (3) при помощи равенства (2) через α, β, γ, мы будем иметь

$$\dot{\theta} = \beta \sin \varphi - \alpha \cos \varphi, \tag{4}$$

$$\dot{\psi} \sin \theta = \beta \cos \theta + \alpha \sin \varphi, \tag{5}$$

$$\dot{\varphi} = \gamma + \operatorname{ctg} \theta (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi). \tag{6}$$

Нам потребуются также формулы, выражающие α, β, γ через $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Эти формулы легко получаются из (4), (5) и (3) и имеют вид

$$\alpha = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi, \tag{7}$$

$$\beta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \tag{8}$$

$$\gamma = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta. \tag{9}$$

§ 20.06. Эйлеровы уравнения вращения твердого тела

Мы будем пользоваться уравнениями Лагранжа (§ 8.04). Функция T дается формулой (2) § 20.03:

$$2T = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \tag{1}$$

1) Рассмотрим прежде всего угол Эйлера φ. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

так что согласно формуле (1) получим

$$\sum A\dot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}} + \sum A\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right] = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

где суммирование распространяется на аналогичные выражения, включающие B, β и C, γ.

Из формул (7), (8) и (9) § 20.05 мы имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \beta}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{\varphi}} = 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \beta,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = -\alpha, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = 0.$$

Поэтому

$$C\dot{\gamma} - (A - B)\alpha\beta = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{3}$$

2) Рассмотрим теперь угол Эйлера θ. По аналогии с формулой (2) мы имеем

$$\sum A\dot{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\theta}} + \sum A\alpha \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right] = \frac{\partial U}{\partial \theta}. \tag{4}$$

Но согласно формуле (9) § 20.05

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}=0.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}=(\dot\varphi-\dot\psi\cos\theta)\sin\varphi=\gamma\sin\varphi.$$

Аналогично находим, что коэффициент при $B\beta$ во второй сумме формулы (4) равен $\gamma\cos\varphi$. Наконец, принимая во внимание формулу (5) § 20.05, получаем

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\dot\theta}=\dot\psi\sin\theta=\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi.$$

Таким образом, уравнение (4) примет вид

$$-A\dot\alpha\cos\varphi+B\dot\beta\sin\varphi+(A-C)\alpha\gamma\sin\varphi+(B-C)\beta\gamma\cos\varphi=\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{5}$$

3) Рассмотрим угол Эйлера ψ. По аналогии с уравнением (2) имеем

$$\sum A\dot\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\dot\psi}+\sum A\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\dot\psi}\right)=\frac{\partial U}{\partial\psi}, \tag{6}$$

так как α, β и γ не зависят от ψ. Во второй сумме коэффициент при $A\alpha$ равен

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\varphi)=\cos\theta\sin\varphi(\beta\sin\varphi-\alpha\cos\varphi)+$$
$$+\cos\varphi(\alpha\cos\theta\sin\varphi+\beta\cos\theta\cos\varphi+\gamma\sin\theta)=\beta\cos\theta+\gamma\sin\theta\cos\varphi.$$

Аналогично коэффициент при $B\beta$ равен

$$-\alpha\cos\theta-\gamma\sin\theta\sin\varphi,$$

а коэффициент при $C\gamma$ равен

$$-\sin\theta(\beta\sin\varphi-\alpha\cos\varphi).$$

Первая сумма равна

$$A\dot\alpha\sin\theta\sin\varphi+B\dot\beta\sin\theta\cos\varphi-C\dot\gamma\cos\theta.$$

Последний член этой суммы, согласно уравнению (3), будет равен

$$-\cos\theta(A-B)\alpha\beta-\cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6), мы после деления на $\sin\theta$ получаем

$$A\dot\alpha\sin\varphi+B\dot\beta\cos\varphi-(B-C)\beta\gamma\sin\varphi+(A-C)\alpha\gamma\cos\varphi=$$
$$=\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}. \tag{7}$$

Решая уравнения (5) и (7) относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ и переписывая уравнение (3), мы получаем следующую группу уравнений:

$$A\dot{\alpha}-(B-C)\beta\gamma=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)-\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}, \tag{8}$$

$$B\dot{\beta}-(C-A)\gamma\alpha=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)+\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}, \tag{9}$$

$$C\dot{\gamma}-(A-B)\alpha\beta=\frac{\partial U}{\partial\varphi}. \tag{10}$$

§ 20.07. Модифицированные уравнения

Как мы заметили ранее, Земля имеет форму, очень близкую к сжатому сфероиду, и для наших конечных целей достаточно принять, что моменты инерции A и B равны друг другу. Выражение для T поэтому приобретает вид

$$2T=A(\alpha^2+\beta^2)+C\gamma^2$$

или, согласно формулам (7), (8) и (9) § 20.05,

$$2T=A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+C(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)^2. \tag{1}$$

Обращаясь к формуле (5) § 20.04 для U, мы видим, что U теперь можно записать в виде

$$-\frac{3GM(C-A)}{2\rho^5}z^2.$$

Далее z определяется формулой (4) § 20.04, которая не содержит φ. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0,$$

и из уравнения (10) § 20.06 мы немедленно получаем

$$\gamma\equiv\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta=\omega, \tag{2}$$

где ω — постоянная. Этот результат также следует из уравнения Лагранжа (1) для φ.

Остальные уравнения мы можем вывести из уравнений (8) и (9) § 20.06 или непосредственно из уравнения (1). Применяя последний из этих способов, мы получим уравнение Лагранжа для ψ:

$$\frac{d}{dt}[A\dot{\psi}\sin^2\theta-C\cos\theta(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)]=\frac{\partial U}{\partial\psi},$$

или, используя формулу (2),

$$A\ddot{\psi}\sin^2\theta+2A\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta+C\omega\dot{\theta}\sin\theta-$$
$$-C\cos\theta(\ddot{\varphi}-\ddot{\psi}\cos\theta+\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)=\frac{\partial U}{\partial\psi}.$$

Как будет видно в дальнейшем, все величины $\ddot{\psi}$, $\dot{\theta}\dot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$ являются малыми по сравнению с $\omega\dot{\theta}$. Поэтому предыдущее уравнение приводится к виду

$$\dot{\theta} = \frac{1}{C\omega \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}. \qquad (3)$$

С другой стороны, обращаясь к уравнению для θ, мы имеем

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta - C\omega\dot{\psi} \sin\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Предполагая, что $\ddot{\theta}$ и $\dot{\psi}^2$ являются малыми по сравнению с $\omega\dot{\psi}$, это уравнение можно записать в виде

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{C\omega \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \qquad (4)$$

§ 20.08. Полное выражение силовой функции притяжения Луны и Солнца

Силовая функция в случае Луны при $A = B$, согласно формуле (5) § 20.04, равна

$$-\frac{3GM(C-A)z^2}{2\rho^5},$$

где z — аппликата Луны относительно главных осей инерции Земли OX, OY, OZ. Аналогично силовая функция, обусловленная притяжением Солнца, равна

$$-\frac{3GS(C-A)z_1^2}{2\rho_1^5},$$

где S — масса Солнца, z_1 — его аппликата и ρ_1 — его геоцентрическое расстояние. Поэтому полное выражение силовой функции записывается в виде

$$U = -\frac{3(C-A)}{2}\left[GM\frac{z^2}{\rho^5} + GS\frac{z_1^2}{\rho_1^5}\right]. \qquad (1)$$

Если a_1 и n_1 — большая полуось орбиты Земли и соответствующее среднее угловое движение, то с достаточной степенью точности можно написать

$$GS = n_1^2 a_1^3.$$

Поэтому

$$U = -\frac{3(C-A)}{2} n_1^2 a_1^3 \left[\frac{M}{S} \cdot \frac{z^2}{\rho^5} + \frac{z_1^2}{\rho_1^5}\right]$$

или, если a означает большую полуось орбиты Луны,

$$U = -\frac{3}{2}(C-A)\,n_1^2\left[\frac{M}{S}\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{a_1}{a}\right)^3+\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\right].$$

Определим величины K и L следующим образом:

$$K = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{n_1^2}{\omega}, \tag{2}$$

$$L = \frac{M}{S}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3. \tag{3}$$

Тогда

$$-\frac{U}{C\omega} = K\left[L\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2+\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3\left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Этой формулой мы воспользуемся для преобразования уравнений (3) и (4) предыдущего параграфа.

§ 20.09. Порядок величины U/T

В формуле (1) § 20.07 для T величины $\dot\theta$ и $\dot\psi$ являются малыми по сравнению с ω, которая определяется равенством (2) § 20.07. Таким образом,

$$2T \approx C\omega^2. \tag{1}$$

Пренебрегая эксцентриситетом орбит Земли и Луны, мы из формулы (1) § 20.08 имеем

$$U = -\frac{2}{3}(C-A)\left[GM\frac{\sin^2\delta}{a^3}+GS\frac{\sin^2\delta_1}{a_1^3}\right],$$

где δ и δ_1 — склонения Луны и Солнца. Максимальные значения δ и δ_1 равны приблизительно 28°,5 и 23°,5, а максимальные значения $\sin\delta_1$ и $\sin\delta_2$ приближенно равны $^1/_2$ и $^2/_5$.

Полагая $G(E+M) = n^2a^3$ и $GS = n_1^2a_1^3$, мы будем иметь

$$|U| < \frac{3}{2}(C-A)\left[\frac{1}{4}\,\frac{M}{E+M}\,n^2+n_1^2\right].$$

Поэтому

$$\frac{|U|}{T} < \frac{3(C-A)}{C}\left(\frac{n_1}{\omega}\right)^2\left[1+\frac{1}{4}\,\frac{M}{E}\left(\frac{n}{n_1}\right)^2\right].$$

Как мы увидим позже,

$$\frac{C-A}{C} \approx \frac{1}{304}, \qquad \frac{M}{E} \approx \frac{1}{81}.$$

Кроме того, $n_1 = \dfrac{2\pi}{366^1/_4}$ в одни сидерические сутки, и мы можем принять, что ω равно 2π за одни сидерические сутки, так что

$n_1/\omega = \frac{1}{366^1/_4}$. С другой стороны, $n/n_1 \approx 13$, так как эта величина есть отношение года к сидерическому периоду обращения Луны. Подставляя эти числа, мы найдем, что округленно

$$\frac{|U|}{T} < 2 \cdot 10^{-7}.$$

§ 20.10. Свободный период Эйлера

Последний результат предыдущего параграфа показывает, что U является очень малой величиной по сравнению с T. Если пренебречь U и разностью $A - B$, то, заменяя γ на ω, мы приведем уравнения (8) и (9) § 20.06 к виду

$$A\dot{\alpha} - (A - C)\,\omega\beta = 0,$$
$$A\dot{\beta} - (C - A)\,\omega\alpha = 0$$

или

$$\dot{\alpha} + p\beta = 0,$$
$$\dot{\beta} - p\alpha = 0,$$

где

$$p = \frac{\omega\,(C - A)}{A}.$$

Как легко убедиться, решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha &= \sigma\omega\cos(pt + q), \\ \beta &= \sigma\omega\sin(pt + q), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma\omega$ и q — постоянные интегрирования. Но

$$p = \frac{C - A}{C} \cdot \frac{C}{A}\,\omega \approx \frac{1}{303}\,\omega,$$

и период T_1, соответствующий частоте p, равен $2\pi/p$. Так как $\omega = 2\pi$ в сидерические сутки, то период T_1 равен 303 сидерическим суткам или приблизительно 302 средним солнечным суткам. Этот период продолжительностью около 10 месяцев называется свободным периодом Эйлера.

§ 20.11. Свободный период Эйлера и изменение широты

Уравнение мгновенной оси вращения относительно главных осей инерции Земли имеет вид

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

Используя формулы (1) предыдущего параграфа и равенство $\gamma = \omega$, мы получим

$$\frac{x}{\sigma \cos(pt+q)} = \frac{y}{\sigma \sin(pt+q)} = \frac{z}{1}. \tag{1}$$

Как будет видно в дальнейшем, σ — очень малая величина. Следовательно, прямая (1) пересекает поверхность Земли вблизи северного полюса P в точке I, которая является мгновенным полюсом (рис. 30).

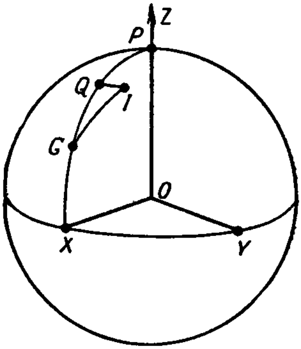

Рис. 30.

Рассмотрим точку G. Так как мы предполагаем, что Земля является сфероидом, то ось X можно выбрать так, чтобы она проходила через точку пересечения экватора и меридиана PG. Пусть IQ — малый круг, проходящий через I параллельно экватору. Тогда с достаточной степенью точности $GQ = GI$. Далее координата z точки I мало отличается от OP. Поэтому, принимая OP за единицу расстояния, мы из (1) будем иметь

$$x \equiv PQ = \sigma \cos(pt+q)$$

или в секундах дуги

$$PQ = a'' \cos(pt+q), \tag{2}$$

где $a = \sigma \operatorname{cosec} 1''$.

Поскольку нас интересуют малые дуги PQ и QI, то можно пренебречь эксцентриситетом меридиана точки G. Поэтому дополнение мгновенной широты точки G до 90° есть

$$GI = GQ = PG - PQ. \tag{3}$$

Но PG есть дополнение широты точки G относительно фиксированного полюса P до 90°. Следовательно, если φ_0 — соответствующая широта и φ — мгновенная широта, то, согласно формулам (2) и (3),

$$\varphi = \varphi_0 + a'' \cos(pt+q). \tag{4}$$

Астрономические наблюдения, связанные с широтой наблюдателя, относятся к мгновенному полюсу I. Следовательно, в таких наблюдениях, выполненных с достаточной точностью, должны обнаруживаться колебания широты с периодом (4), если a имеет порядок хотя бы одной или двух десятых секунды дуги. В 1888 г. Кюстнер обнаружил небольшие периодические изменения в широте Берлина, после чего и возникла проблема *изменения широты* (так называется это явление), для решения которой потребовалось наблюдательное мастерство многих астрономов в различных частях земного шара. Создание цепи наблюдательных станций в северном полушарии и специального оборудования, такого, как плавающий телескоп Куксона Гринвичской обсерватории и новые фотографические зенитные трубы, установленные на многих обсерваториях, уже само по себе свидетельствует о важности этой проблемы для фундаментальной астрономии. В настоящее время известно, что изменение широты в какой-нибудь точке на Земле выражается суммой двух периодических членов

$$\varphi = \varphi_0 + a_1 \cos(p_1 t + q_1) + a_2 \cos(p_2 t + q_2), \tag{5}$$

где период первого члена равен 1 году, а период второго члена — 432 суткам, или около 14 месяцев. Кроме того, изменение широты, т. е. отклонение от φ_0, численно не превосходит $0'',3$. Формула (5), выведенная из наблюдений, очевидно, показывает, что, поскольку наблюдаемые периоды изменения широты совершенно отличаются от свободного периода Эйлера, периодический член вида (4), если он существует, должен иметь амплитуду настолько малую, что его невозможно обнаружить из наблюдений. Таким образом, a по абсолютной величине должно быть исключительно малым. Поэтому теоретически найденными изменениями широты со свободным периодом Эйлера можно в практических задачах полностью пренебречь.

Наблюдаемые изменения широты, конечно, имеют другую природу. Первый член в формуле (5) с периодом 1 год и амплитудой $0'',09$ обусловлен метеорологическими причинами, вызывающими периодические изменения главных моментов инерции Земли. С другой стороны, напомним, что динамическая теория основывается на предположении, что Земля является абсолютно твердым телом. Но фактически Земля не является абсолютно твердым телом, и, по-видимому, этим объясняется появление в формуле (5) второго периодического члена с периодом 14 месяцев. Амплитуда этого члена равна $0'',18$.

Если предположить, что специальные наблюдения, на которые мы ссылаемся, дают в любой момент времени положение мгновенного полюса I, то мы можем считать, что все наблюдения могут быть исправлены за изменение широты, так что нам останется только рассмотреть движение главных осей инерции Земли, опираясь на уравнения движения с силовой функцией U. Решение задачи будет тогда определяться соответствующими частными интегралами уравнений движения.

§ 20.12. Выражение U через θ и ψ

Для того чтобы выразить U через углы Эйлера и элементы орбит Луны и Солнца, мы должны, как это видно из формулы (4) § 20.08, разложить в ряды выражения $\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2$, во-первых, для случая Луны, а во-вторых, для случая Солнца. Мы сделаем это подробно для Луны, а для Солнца приведем лишь окончательные результаты.

Согласно формуле (4) § 20.04,

$$z = \xi \sin\theta \sin\psi + \eta \sin\theta \cos\psi + \zeta \cos\theta, \tag{1}$$

где ξ, η, ζ — координаты Луны относительно неподвижных осей OX_0, OY_0, OZ_0. В этой формуле ξ, η и ζ не зависят от θ и ψ.

На рис. 31 X_0Y_0 — неподвижная эклиптика, соответствующая моменту t_0, и AE — истинная эклиптика с полюсом в точке K. Изменение положения эклиптики является результатом возмущений

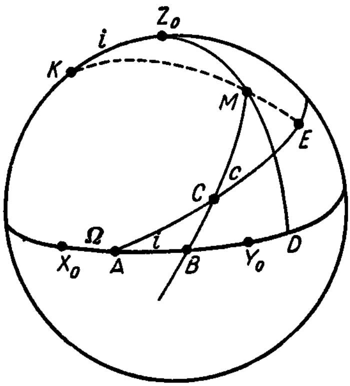

Рис. 31.

орбиты Земли планетами. Положение истинной эклиптики по отношению к неподвижной эклиптике определяется наклонностью i подвижной эклиптики к неподвижной и долготой Ω восходящего узла A.

Точка M — положение Луны в момент t; BCM — орбита Луны. BCM образует угол c с эклиптикой ACE. C — узел орбиты Луны на подвижной эклиптике. Проведем большие круги Z_0MD и KME.

Пусть $X_0D = L$ и $DM = B$. Тогда

$$\xi = \rho \cos L \cos B,$$
$$\eta = \rho \sin L \cos B,$$
$$\zeta = \rho \sin B.$$

Поэтому из формулы (1) имеем

$$\frac{z}{\rho} = \cos B \sin \theta \sin (L + \psi) + \sin B \cos \theta. \tag{2}$$

Преобразуем правую часть формулы (2) следующим образом.

1) Пусть $X_0A + AE = l$ и $EM = b$. Тогда в треугольнике KZ_0M:

$$KZ_0 = i, \quad Z_0M = 90^\circ - B, \quad KM = 90^\circ - b,$$
$$KZ_0M = 90^\circ + L - \Omega, \quad Z_0KM = 90^\circ - (l - \Omega).$$

Мы поэтому имеем

$$\sin B = \sin b \cos i + \cos b \sin i \sin (l - \Omega), \tag{3}$$
$$\cos B \sin (L - \Omega) = - \sin b \sin i + \cos b \cos i \sin (l - \Omega), \tag{4}$$
$$\cos B \cos (L - \Omega) = \cos b \cos (l - \Omega). \tag{5}$$

2) Пусть $X_0A + AC = N$, $X_0A + AC + CM = v$. Тогда в треугольнике MCE:

$$MC = v - N, \quad ME = b, \quad CE = l - N,$$
$$MCE = c, \quad MEC = 90^\circ.$$

Поэтому мы имеем

$$\cos (v - N) = \cos b \cos (l - N), \tag{6}$$
$$\sin (v - N) \cos c = \cos b \sin (l - N), \tag{7}$$
$$\sin (v - N) \sin c = \sin b. \tag{8}$$

3) В формуле (2) вместо $L + \psi$ напишем $L - \Omega + (\psi + \Omega)$. Тогда

$$\frac{z}{\rho} = \sin \theta \cos (\Omega + \psi) [\cos B \sin (L - \Omega)] + \\ + \sin \theta \sin (\Omega + \psi) [\cos B \cos (L - \Omega)] + \cos \theta [\sin B]. \tag{9}$$

Преобразуем выражения, стоящие внутри квадратных скобок, посредством формул (4), (5) и (3).

Поскольку угол i является очень малым, то можно написать

$$\sin i = i, \quad \cos i = 1.$$

4) Из формулы (4) мы имеем

$$\cos B \sin (L - \Omega) = -i \sin b + \cos b \sin (l - \Omega).$$

Положим $l-\Omega=(l-N)+(N-\Omega)$. Тогда при помощи формул (8), (6) и (7) мы получим

$$\cos B=-l\sin c\sin(v-N)+\cos c\sin(v-N)\cos(N-\Omega)+$$
$$+\cos(v-N)\sin(N-\Omega).$$

Угол c равен приблизительно 5°,2, так что $\sin c$ имеет порядок 1/11. Отбросим члены с множителем $l\sin c$ и, полагая $\sin c\equiv s$, сохраним все члены до s^3 включительно. Тогда $\cos c=1-\frac{1}{2}s^2$. Методом последовательных приближений мы легко найдем, что

$$\cos B\sin(L-\Omega)=\left(1-\frac{1}{4}s^2\right)\sin(v-\Omega)-\frac{1}{4}s^2\sin(v-2N+\Omega). \quad (10)$$

5) Точно таким же способом мы получим

$$\cos B\cos(L-\Omega)=\left(1-\frac{1}{4}s^2\right)\cos(v-\Omega)+\frac{1}{4}s^2\cos(v-2N+\Omega). \quad (11)$$

6) Аналогично

$$\sin B=s\sin(v-N)+l\sin(v-\Omega). \quad (12)$$

7) Подставляя выражения (10)—(12) в (9), мы найдем после некоторых упрощений

$$\frac{z}{\rho}=\left(1-\frac{1}{4}s^2\right)\sin\theta\sin(v+\psi)+s\cos\theta\sin(v-N)+$$
$$+l\cos\theta\sin(v-\Omega)-\frac{1}{4}s^2\sin\theta\sin(v-2N+\psi). \quad (13)$$

8) Выведем теперь из (13) выражение для $(z/\rho)^2$. Отбросим здесь члены с аргументами $(2v-2N)$, $(2v-3N-\psi)$ и $(2v-N+\psi)$, коэффициенты которых имеют по меньшей мере порядок l и s^2. Такие члены короткого периода дают ничтожный результат при интегрировании уравнений, хотя при строгом решении их нужно было бы сохранить. В результате находим, что

$$\left(\frac{z}{\rho}\right)^2=\frac{1}{2}s^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s^2\right)\sin^2\theta-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}s^2\right)\sin^2\theta\cos(2v+2\psi)-$$
$$-\frac{1}{4}s^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi)+s\left(1-\frac{1}{2}s^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi)+$$
$$+l\sin\theta\cos\theta\cos(\Omega+\psi). \quad (14)$$

9) Выразим теперь $(a/\rho)^3$ через среднюю аномалию $M=nt+\varepsilon-\tilde{\omega}$. С точностью до членов порядка e^2 включительно имеем

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3=1+\frac{3}{2}e^2+3e\cos M+\frac{9}{2}e^2\cos 2M. \quad (15)$$

Далее величина v, входящая в равенство (14), дается формулой

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M.$$

10) Из равенств (14) и (15), сохраняя главные члены и отбрасывая постоянные члены, которые попадают при дифференцировании U по θ и φ, мы имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{\rho}\right)^3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 = {} & \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}s^2\right)\sin^2\theta + \\ & + s\left(1-\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}e^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi) - \\ & - \frac{1}{4}s^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi) + i\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi) + \\ & + \frac{3}{2}e\sin^2\theta\cos M - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi).\end{aligned}$$

Применяя эту формулу к случаю Солнца, нужно положить $s \equiv \sin c = 0$ и заменить в соответствующих членах M, e, $\tilde{\omega}$, ε на M_1, e_1, $\tilde{\omega}_1$, ε_1.

Функция U, определяемая равенством (4) § 20.08, окончательно будет выражаться формулой

$$\begin{aligned}-\frac{U}{K\omega C} = {} & \left[L\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}s^2\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_1^2\right]\sin^2\theta + \\ & + \left[Ls\left(1-\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{4}e^2\right)\right]\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi) - \\ & - \frac{1}{4}Ls^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi) - \\ & - \frac{1}{2}\left[L\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi)+\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)\right]\sin^2\theta + \\ & + i(L+1)\cos(\psi+\Omega)\sin\theta\cos\theta + \\ & + \frac{3}{2}(Le\cos M+e_1\cos M_1)\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{16}$$

где K и L определяются формулами (2) и (3) § 20.08.

Единственное неравенство в элементах Луны, которое мы должны принять во внимание, — это попятное движение точки N с периодом около 18,6 лет. В случае Солнца и подвижной эклиптики мы должны принять во внимание вековые неравенства в e_1, i и Ω. Положим $e_1 = e_0 + e't$. Здесь e' мало, поэтому достаточно принять

$$e_1^2 = e_0^2 + 2e_0e't.$$

Кроме того, согласно теории движения планет [формулы (17) и (18) § 5.10], при пренебрежении периодическими членами можно написать

$$i\sin\Omega = gt + ht^2, \tag{17}$$

$$i\cos\Omega = g_1t + h_1t^2, \tag{18}$$

где g, g_1, h, h_1 — малые величины.

Член в (16), содержащий t, имеет множитель

$$t\cos(\psi+\Omega)\equiv\cos\psi(t\cos\Omega)-\sin\psi(t\sin\Omega)=(g_1\cos\psi-g\sin\psi)t, \quad (19)$$

где мы пренебрегли малыми величинами h и h_1.

Подставляя эти выражения для e_1, e_1^2 и $t\cos(\psi+\Omega)$ в (16), мы положим

$$F=K\left[L\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}s^2\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_0^2\right], \quad (20)$$

$$G=K(L+1), \quad (21)$$

$$H=\frac{3}{2}Ke_0e', \quad (22)$$

$$\frac{V}{K}=Ls\left(1-\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}e^2\right)\sin\theta\cos\theta\cos(N+\psi)-$$
$$-\frac{1}{4}Ls^2\sin^2\theta\cos(2N+2\psi)-\frac{1}{2}[L\cos(2M+2\omega+2\psi)+$$
$$+\cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)]\sin^2\theta+\frac{3}{2}[Le\cos M+e_1\cos M_1)\sin^2\theta, \quad (23)$$

так что U будет выражаться формулой

$$-\frac{U}{C\omega}=F\sin^2\theta+[G(g_1\cos\psi-g\sin\psi)\sin\theta\cos\theta+H\sin^2\theta]t+V. \quad (24)$$

§ 20.13. Решение уравнений

Согласно формулам (4) и (3) § 20.07, уравнения, определяющие прецессию и нутацию, имеют следующий вид:

$$\dot{\psi}=-\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \quad (1)$$

$$\dot{\theta}=\frac{1}{C\omega\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}. \quad (2)$$

При помощи формулы (24) § 20.12 эти уравнения преобразуются к виду

$$\dot{\psi}=2F\cos\theta+\left[G(g_1\cos\psi-g\sin\psi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}+2H\cos\theta\right]t+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}, \quad (3)$$

$$\dot{\theta}=G\cos\theta(g_1\sin\psi+g\cos\psi)t-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi}. \quad (4)$$

Направление оси X_0, лежащей в неподвижной эклиптике, соответствующей эпохе t_0, до сих пор еще не определено. Мы можем выбрать это направление любым способом. Выберем временно эту ось так, чтобы она проходила вблизи узла N, так что ψ будет малым углом. Тогда в уравнениях (3) и (4) достаточно положить $\cos\psi=1$ и пренебречь величинами $g\sin\psi$ и $g_1\sin\psi$.

Далее мы положим

$$\psi = \psi_m + \Psi, \tag{5}$$

$$\theta = \theta_m + \Theta, \tag{6}$$

где Ψ и Θ зависят от периодических членов V.

В правых частях уравнений (3) и (4) можно заменить θ на θ_0 и поступить с углом ψ так, как было указано. Пренебрегая V, мы по формулам (5) и (6) получаем

$$\dot{\psi}_m = 2F\cos\theta_0 + \left(Gg_1 \frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0} + 2H\cos\theta_0\right)t,$$

$$\dot{\theta}_m = Gg\cos\theta_0 \cdot t,$$

где t отсчитывается от эпохи t_0. Отсюда мы имеем

$$\psi_m = \psi_0 + at + bt^2, \tag{7}$$

$$\theta_m = \theta_0 + ct^2, \tag{8}$$

где

$$a = 2F\cos\theta_0, \tag{9}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(Gg_1 \frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0} + 2H\cos\theta_0\right), \tag{10}$$

$$c = \frac{1}{2} Gg\cos\theta_0. \tag{11}$$

Равенства (7) и (8) определяют прецессию.

Рассмотрим теперь уравнения для Ψ и Θ. Они имеют вид

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}, \qquad \dot{\Theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi},$$

где V выражается формулой (23) § 20.12. Заменяя после дифференцирования θ на θ_0, мы найдем

$$\dot{\Psi} = KLs\left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}e^2\right)\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}\cos(N+\psi) - \\ - K\cos\theta_0\left[\frac{1}{2}Ls^2\cos(2N+2\psi) + L\cos(2M+2\tilde{\omega}+2\psi) + \right. \\ \left. + \cos(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi) - 3(Le\cos M + e_1\cos M_1)\right] \tag{12}$$

и

$$\dot{\Theta} = KLs\left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0\sin(N+\psi) - \\ - K\sin\theta_0\left[\frac{1}{2}Ls^2\sin(2N+2\psi) + L\sin(2M+2\tilde{\omega}+2\psi) + \right. \\ \left. + \sin(2M_1+2\tilde{\omega}_1+2\psi)\right]. \tag{13}$$

Узел лунной орбиты движется попятно по эклиптике с периодом приблизительно 18,6 лет. Поэтому мы можем записать N в виде

$$N = N_0 - N't. \tag{14}$$

Далее, с достаточной степенью точности

$$\psi = \psi_0 + at.$$

Поэтому

$$N + \psi = \beta - \alpha t, \tag{15}$$

где

$$\beta = N_0 + \psi_0 \quad \text{и} \quad \alpha = N' - a. \tag{16}$$

В уравнении (12) для удобства положим

$$\alpha D \equiv KLs\left(1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2\right) \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0}, \tag{17}$$

а в (13)

$$\alpha E \equiv KLs\left(1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2\right) \cos \theta_0. \tag{18}$$

Тогда, интегрируя уравнения (12) и (13) и пренебрегая a, если оно входит совместно с n и n_1, мы получим, используя формулу (15),

$$\begin{aligned} \Psi = &-D \sin(N + \psi) + K \cos \theta_0 \left[\frac{Ls^2}{4\alpha} \sin(2N + 2\psi) - \right. \\ &- \frac{L}{2n} \sin(2M + 2\tilde{\omega} + 2\psi) - \frac{1}{2n_1} \sin(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\psi) + \\ &\left. + 3\left(\frac{Le}{n} \sin M + \frac{e_1}{n_1} \sin M_1\right)\right]; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \Theta = &E \cos(N + \psi) - K \sin \Theta_0 \left[\frac{Ls^2}{4\alpha} \cos(2N + 2\psi) - \right. \\ &\left. - \frac{L}{2n} \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\psi) - \frac{1}{2n_1} \cos(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\psi)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Эти выражения для Ψ и Θ дают соответственно главные члены нутации в долготе и наклонности.

§ 20.14. Средний экватор в момент t

При определении среднего экватора в любой момент времени мы будем пренебрегать нутационными членами Ψ и Θ. Следовательно, положение среднего экватора определяется по отношению к фиксированным осям величинами ψ_m и Θ_m, причем последняя из них является средней наклонностью, формула (7) предыдущего параграфа показывает, что

$$\psi_m = \psi_0 + at + bt^2$$

относительно неподвижной оси X_0, за которую мы теперь возьмем линию восходящего узла неподвижной эклиптики на среднем экваторе, соответствующем эпохе t_0. Следовательно, $\psi_m = 0$, когда $t = 0$, и поэтому $\psi_0 = 0$. Мы теперь имеем

$$\psi_m = at + bt^2. \tag{1}$$

Согласно формуле (8) § 20.13,

$$\theta_m = \theta_0 + ct^2. \tag{2}$$

Следовательно, θ_0 — наклонность неподвижной эклиптики к среднему экватору в эпоху t_0.

Величина ψ_m — *лунно-солнечная прецессия* и θ_m — соответствующая ей наклонность.

В формулах (1) и (2) b и c — величины очень малые по сравнению с a. Их значения приводятся в § 20.19.

§ 20.15. Общая прецессия

На рис. 32 изображена эклиптика в момент t_0 и в момент t, а также средний экватор в момент t. Для удобства мы временно опустим значок m при ψ и θ. Мы имеем

$$X_0N = \psi, \quad \angle ANE = \theta, \quad \angle NAN_1 = i, \quad X_0A = \Omega.$$

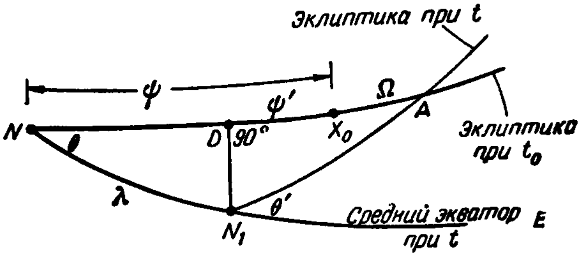

Рис. 32.

Пусть, далее, $NN_1 = \lambda$, $\angle AN_1E = \theta'$ и $X_0D = \psi'$, где D — основание перпендикуляра, опущенного из N_1 на большой круг NA. Угол ψ' называется *общей прецессией*.

Согласно формулам (17) и (18) § 20.12,

$$i \sin \Omega = gt + ht^2. \tag{1}$$

$$i \cos \Omega = g_1t + h_1t^2, \tag{2}$$

где i, g и g_1 рассматриваются как малые величины первого порядка, а h и h_1 — как малые второго порядка.

1. По формуле косинусов для полярного треугольника мы имеем

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos l - \sin\theta\sin l\cos(\Omega + \psi).$$

Пусть $\theta' = \theta + \Delta\theta$. Тогда с точностью до членов второго порядка включительно

$$\Delta\theta\sin\theta + \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2\cos\theta = l\sin\theta\cos(\Omega + \psi) + \frac{1}{2}l^2\cos\theta.$$

В первом приближении

$$\Delta\theta = l\cos(\Omega + \psi). \tag{3}$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка

$$\Delta\theta = l\cos(\Omega + \psi) + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\sin^2(\Omega + \psi). \tag{4}$$

В первом члене этого равенства вместо ψ можно подставить at, а во втором члене θ заменить через θ_0 и положить $\psi = 0$ (вспомним, что согласно (1) § 20.14 $\psi \equiv \psi_m = at + bt^2$). Тогда при помощи равенств (1) и (2) формулу (4) приведем к виду

$$\Delta\theta = g_1 t + \left(h_1 - ag + \frac{1}{2}g^2\operatorname{ctg}\theta_0\right)t^2. \tag{5}$$

Кроме того, согласно формуле (2) § 20.14,

$$\theta \equiv \theta_m = \theta_0 + ct^2.$$

Поэтому мы можем написать

$$\theta' = \theta_0 + Qt + Q_1 t^2, \tag{6}$$

где

$$Q = g_1, \quad Q_1 = c + h_1 - ag + \frac{1}{2}g^2\operatorname{ctg}\theta_0. \tag{7}$$

2. В треугольнике NN_1D

$$NN_1 = \lambda, \quad ND = \psi - \psi'.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi') = \operatorname{tg}\lambda\cos\theta.$$

Далее, $\psi - \psi'$ и λ — малые углы и, следовательно, если мы пренебрежем величинами $(\psi - \psi')^3$ и λ^3, то получим

$$\psi - \psi' = \lambda\cos\theta \equiv \sin\lambda\cos\theta_0, \tag{8}$$

где можно заменить θ на θ_0 (мы видели, что постоянная c является очень малой величиной).

Из треугольника NAN_1, в котором $NA = \Omega + \psi$, мы имеем

$$\sin\lambda = \frac{\sin l\sin(\Omega + \psi)}{\sin\theta'}. \tag{9}$$

В этом равенстве достаточно в разложении $\sin\theta'$ учесть только члены первого порядка. Воспользовавшись (3), найдем

$$\sin\theta' = \sin\theta\,[1 + \operatorname{ctg}\theta_0 \cdot l\cos(\Omega + \psi)]. \qquad (10)$$

Поэтому из формул (8) — (10), заменяя θ в формуле (10) на θ_0, мы получаем

$$\psi - \psi' = l\sin(\Omega + \psi)\operatorname{ctg}\theta_0 - l^2\sin(\Omega + \psi)\cos(\Omega + \psi)\operatorname{ctg}^2\theta_0. \qquad (11)$$

С точностью до членов второго порядка малости первое слагаемое, если в нем положить $\psi = at$, принимает вид

$$(gt + ht^2 + ag_1t^2)\operatorname{ctg}\theta_0.$$

Второе слагаемое имеет второй порядок и при $\psi = 0$ равно $-gg_1t^2\operatorname{ctg}^2\theta_0$. Поэтому, если заменить $\psi \equiv \psi_m$ на $at + bt^2$, то равенство (11) примет вид

$$\psi' = Pt + P_1t^2, \qquad (12)$$

где

$$P = a - g\operatorname{ctg}\theta_0, \qquad (13)$$

$$P_1 = b - (h + ag_1)\operatorname{ctg}\theta_0 + gg_1\operatorname{ctg}^2\theta_0. \qquad (14)$$

Теперь напишем ψ'_m вместо ψ' и θ'_m, вместо θ', отмечая, что ψ'_m и θ'_m относятся к среднему экватору и эклиптике, соответствующей моменту t. Тогда из формул (12) и (6) мы имеем

$$\psi'_m = Pt + P_1t^2, \qquad (15)$$

$$\theta'_m = \theta_0 + Qt + Q_1t^2, \qquad (16)$$

где P и P_1 выражаются формулами (13) и (14), а Q и Q_1 — формулами (7). Здесь ψ'_m — общая прецессия и θ'_m — соответствующая ей наклонность.

§ 20.16. Прецессия от планет

В этом параграфе мы выведем зависимость от времени. Как и раньше, мы сохраним члены до второго порядка малости включительно.

Согласно формуле (8) § 20.15,

$$\lambda = (\psi - \psi')\sec\theta = (\psi - \psi')\sec\theta_0. \qquad (1)$$

Выражение для $\psi - \psi'$ дается формулой (11) § 20.15, первый и второй член которой уже были найдены. Поэтому формула (1) примет вид

$$\lambda = (gt + ht^2 + ag_1t^2)\operatorname{cosec}\theta_0 - gg_1t^2\operatorname{ctg}\theta_0\operatorname{cosec}\theta_0,$$

или

$$\lambda = \lambda' t + \lambda'' t^2, \tag{2}$$

где

$$\lambda' = g \operatorname{cosec} \theta_0, \tag{3}$$

$$\lambda'' = (h + a g_1 - g g_1 \operatorname{ctg} \theta_0) \operatorname{cosec} \theta_0; \tag{4}$$

λ — *прецессия от планет* в экваторе.

Возмущения орбиты Земли, вызванные действием планет и имеющие отношение к рассматриваемому вопросу, определяются величинами $i \sin \Omega$ и $i \cos \Omega$, т. е. постоянными g, h и $g_1 h_1$ и временем t. Все постоянные, входящие в формулы (3) и (4), можно вычислить и, следовательно, для любого момента t можно рассчитать величину λ.

§ 20.17. Прецессия по прямому восхождению и по склонению

На рис. 33 через X' и N_1 обозначены соответственно узлы неподвижной эклиптики и подвижной эклиптики N_1AB в момент t относительно среднего экватора в момент t. Пусть OX', OY', OZ'

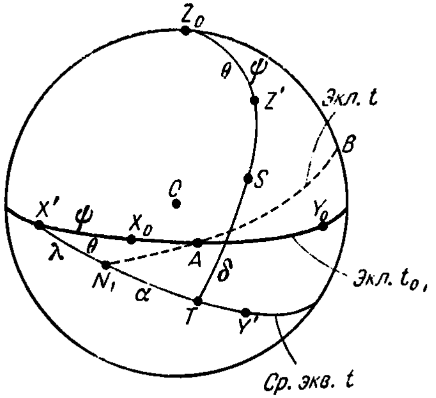

Рис. 33.

суть оси, связанные со средним экватором, S — звезда и $Z'ST$ — меридиан этой звезды. Если пренебречь нутацией, то N_1T будет прямым восхождением α в момент t, TS — склонением δ. α и δ суть средние экваториальные координаты в момент t. Далее $X'N_1$ есть прецессия от планет λ. Поэтому $X'T = \alpha + \lambda$.

Пусть l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 — направляющие косинусы осей OX', OY', OZ' относительно OX_0, OY_0, OZ_0. Тогда, согласно рис. 33,

$$l_1 = \cos\psi, \qquad m_1 = -\sin\psi, \qquad n_1 = 0;$$
$$l_2 = \sin\psi\cos\theta, \quad m_2 = \cos\psi\cos\theta, \quad n_2 = -\sin\theta;$$
$$l_3 = \sin\psi\sin\theta, \quad m_3 = \cos\psi\sin\theta, \quad n_3 = \cos\theta.$$

Нам потребуются производные от l_1, l_2 и т. д. по ψ и θ. Эти производные приводятся в следующей таблице:

	l_1	m_1	n_1	l_2	m_2	n_2
ψ	m_1	$-l_1$	0	m_2	$-l_2$	0
θ	0	0	0	$-l_3$	$-m_3$	$-n_3$

Пусть ξ, η, ζ означают координаты точки S относительно осей OX', OY', OZ', а X_0, Y_0, Z_0 — ее координаты по отношению к неподвижным осям OX_0, OY_0, OZ_0. Тогда, принимая радиус сферы равным единице, найдем

$$\xi \equiv \cos(\alpha + \lambda)\cos\delta = l_1 X_0 + m_1 Y_0 + n_1 Z_0, \tag{1}$$
$$\eta \equiv \sin(\alpha + \lambda)\cos\delta = l_2 X_0 + m_2 Y_0 + n_2 Z_0, \tag{2}$$
$$\zeta \equiv \sin\delta = l_3 X_0 + m_3 Y_0 + n_3 Z_0, \tag{3}$$

откуда

$$X_0 = l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta, \tag{4}$$
$$Y_0 = m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta. \tag{5}$$

Эти формулы потребуются нам в дальнейшем. Так как X_0, Y_0, Z_0 не зависят от θ, ψ, то из уравнений (1), (2) мы имеем

$$\dot\xi = -(\dot\alpha + \dot\lambda)\eta - \dot\delta\xi\,\mathrm{tg}\,\delta,$$
$$\dot\eta = (\dot\alpha + \dot\lambda)\xi - \dot\delta\eta\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

откуда

$$\xi\dot\eta - \dot\xi\eta = (\dot\alpha + \dot\lambda)\cos^2\delta, \tag{6}$$
$$\xi\dot\xi + \eta\dot\eta = -\dot\delta\sin\delta\cos\delta. \tag{7}$$

Далее, X_0, Y_0, Z_0 — постоянные (мы пренебрегаем здесь собственным движением звезды). Следовательно, согласно уравнению (1),

$$\dot\xi = \dot l_1 X_0 + \dot m_1 Y_0 + \dot n_1 Z_0.$$

Но

$$\dot l_1 = \frac{\partial l_1}{\partial\psi}\dot\psi + \frac{\partial l_1}{\partial\theta}\dot\theta \text{ и т. д.}$$

Поэтому, используя приведенную выше таблицу, а также равенства (4) и (5), получаем

$$\dot{\xi} = (m_1 X_0 - l_0 Y_0)\dot{\psi} = [(l_2 m_1 - l_1 m_2)\eta + (l_3 m_1 - l_1 m_3)\zeta]\dot{\psi},$$

или

$$\dot{\xi} = (-n_3\eta + n_2\zeta)\dot{\psi}.$$

Аналогично

$$\dot{\eta} = (m_2 X_0 - l_2 Y_0)\dot{\psi} - (l_3 X_0 + m_3 Y_0 + n_3 Z_0)\dot{\theta} = n_3\xi\dot{\psi} - \zeta\dot{\theta}.$$

Подставляя две последние формулы в уравнения (6) и (7), получаем

$$\dot{\alpha} = \dot{\psi}\cos\theta - \dot{\lambda} + \dot{\psi}\sin\theta\sin(\alpha+\lambda)\operatorname{tg}\delta - \dot{\theta}\cos(\alpha+\lambda)\operatorname{tg}\delta, \tag{8}$$

$$\dot{\delta} = \dot{\psi}\sin\theta\cos(\alpha+\lambda) + \dot{\theta}\sin(\alpha+\lambda). \tag{9}$$

В этих равенствах можно положить

$$\cos\lambda = 1, \quad \sin\lambda = \lambda.$$

Поэтому мы имеем

$$\dot{\alpha} = \dot{\psi}\cos\theta - \dot{\lambda} + \sin\alpha\operatorname{tg}\delta\,[\dot{\psi}\sin\theta + \lambda\dot{\theta}] - \cos\alpha\operatorname{tg}\delta\,[\dot{\theta} - \lambda\dot{\psi}\sin\theta]$$

и

$$\dot{\delta} = \cos\alpha\,[\dot{\psi}\sin\theta + \lambda\dot{\theta}] + \sin\alpha\,[\dot{\theta} - \lambda\dot{\psi}\sin\theta].$$

Заменяя ψ и θ через ψ_m и θ_0 (так как c очень мало́), мы положим

$$\begin{aligned} m &= \dot{\psi}_m\cos\theta_0 - \dot{\lambda}, \\ n &= \dot{\psi}_m\sin\theta_0 + \lambda\dot{\theta}, \\ p &= \dot{\theta} - \lambda\dot{\psi}_m\sin\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда

$$\dot{\alpha} = m + n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta - p\cos\alpha\operatorname{tg}\delta, \tag{11}$$

$$\dot{\delta} = n\cos\alpha + p\sin\alpha. \tag{12}$$

Величина p имеет порядок $3\cdot10^{-7}t$, $\lambda\dot{\theta}$ — порядок $6\cdot10^{-12}t^2$; эти величины можно без ущерба отбросить, и формулы (11) и (12) примут вид

$$\dot{\alpha} = m + n\sin\alpha\operatorname{tg}\delta, \tag{13}$$

$$\dot{\delta} = n\cos\alpha, \tag{14}$$

где

$$m = \dot{\psi}_m\cos\theta_0 - \dot{\lambda}, \tag{15}$$

$$n = \dot{\psi}_m\sin\theta_0. \tag{16}$$

Если в качестве единицы времени принять год, то $\dot{\alpha}$ и $\dot{\delta}$, определяемые формулами (13) и (14), называются *годичной прецессией* по прямому восхождению и *годичной прецессией* по склонению.

Если $\mu_\alpha + \mu_\delta$ — компоненты годичного собственного движения, то $\dot{\alpha} + \mu_\alpha$ и $\dot{\delta} + \mu_\delta$ называются *годичными изменениями* в прямом восхождении и склонении, числовые значения которого для отдельной звезды приводятся в Nautical Almanac и различных каталогах.

Вековое изменение в прямом восхождении определяется как скорость изменения $\dot{\alpha}$ за столетие. Если обозначить ее через s, то

$$\frac{s}{100} = \ddot{\alpha} = \frac{d}{dt}(m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta).$$

Поэтому, если α_0 — прямое восхождение звезды в момент t_0, то t лет спустя прямое восхождение α определится по формуле

$$\alpha = \alpha_0 + t\left[(\dot{\alpha})_0 + \frac{st}{200}\right].$$

Аналогичная формула имеет место и для склонения. Числовые значения вековых изменений приводятся во многих каталогах.

§ 20.18. Нутационный эллипс

Выражения для нутации Ψ долготы и для нутации Θ наклонения даются формулами (19) и (20) § 20.13. Члены с аргументом $N + \psi$ являются долгопериодическими, а остальные — короткопериодическими. Например, период члена $\sin(N + \psi)$ в Ψ равен $\sim 18^1/_2$ лет, а остальные члены, не содержащие N, имеют периоды, равные лунному месяцу, году или их долям. Главные члены мы запишем так:

$$x = E\cos(N + \psi), \quad y = -D\sin(N + \psi), \tag{1}$$

причем первая формула относится к нутации наклонения.

На рис. 34 N_0 означает узел среднего экватора в момент t относительно неподвижной эклиптики для эпохи t_0. Узел *истинного* экватора, для которого учитывается нутация, обозначен через N. Полюсами среднего и истинного экваторов служат Q_0 и Q соответственно. Пусть QB — перпендикуляр, опущенный на Z_0Q_0. Тогда Q_0B будет нутацией в наклонности, а угол QZ_0Q_0 будет нутацией N_0N долготы. Поэтому $Q_0B = x$ и $QB = y \sin Z_0B$ или с достаточной степенью точности $QB = y \sin\theta_0$.

Таким образом, из формул (1) мы видим, что точка Q описывает малый эллипс

$$\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{D^2 \sin^2\theta_0} = 1 \tag{2}$$

с центром в Q_0. Этот эллипс называется *нутационным эллипсом*. Так как $\cos\theta_0 > \cos 2\theta_0$, то из выражений (17) и (18) § 20.13 для D и E мы видим, что E является большей полуосью эллипса. Величина E называется *постоянной нутации*. Стрелка на рис. 34 показывает, в каком направлении Q движется относительно Q_0.

Постоянная нутации E может быть найдена из наблюдений. Мы принимаем ее равной 9″,210.

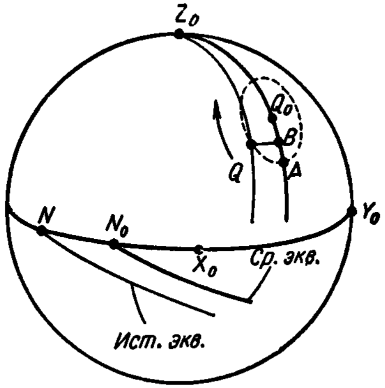

Рис. 34.

Согласно равенству (18) § 20.13,

$$E = \frac{KLs}{a}\left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0. \tag{3}$$

Так как значения a, s, e, θ_0 и E известны, то формула (3) дает нам возможность найти произведение KL, где K и L определяются формулами (2) и (3) § 20.08.

§ 20.19. Численные значения постоянных

Мы уже отмечали, что постоянную нутации можно вывести из наблюдений. Численное значение 9″,210 для нее было принято в 1896 г. на Парижской конференции по астрономическим постоянным, и это значение почти точно подтверждено многими продолжительными и исчерпывающими программами наблюдений, среди которых можно упомянуть гринвичские наблюдения, выполненные в 1911—1931 гг. на плавающем зенит-телескопе Куксона и 45 000 наблюдений, выполненных в Пулкове в период 1904—1941 гг.

Постоянная общей прецессии P [см. формулу (15) § 20.15] известна из наблюдений с высокой степенью точности. Аналогичные замечания можно сделать и относительно среднего наклонения θ_0 (соответствующего эпохе t_0).

До сих пор мы еще не определили точно эпоху t_0. В ранних исследованиях была принята следующая эпоха:

1850, январь 0, гринвичский средний полдень.

Таблицы движения Солнца Ньюкома основаны на эпохе

1900, январь 0, гринвичский средний полдень.

Заметим, что до 1925 г. астрономические сутки начинались с гринвичского среднего полдня.

Значения приведенных ниже постоянных даются для эпохи $t_0 = 1950$, январь 0, гринвичский средний полдень[1]).

Далее, понятие времени t, использованное в наших динамических и других уравнениях, требует уточнения. Мы принимаем за единицу времени t один юлианский год, равный 365,25 средних солнечных суток. В дальнейшем мы дадим подробное определение средних солнечных суток.

А. Основные постоянные.

$$P = 50'',2675, \quad E = 9'',210, \quad \theta_0 = 23°26'44'',84.$$

Б. Постоянные, связанные с Луной.

1) Эксцентриситет орбиты

$$e = 0{,}0549005.$$

2) Угол c

$$c = 5°8'43'',4,$$

откуда

$$s \equiv \sin c = 0{,}08968335.$$

3) Среднее угловое движение в радианах за юлианский год

$$n = 83{,}9970927.$$

4) Постоянные, относящиеся к движению узла,

$$N' = 0{,}3375711, \quad \alpha = 0{,}3373280$$

в радианах за юлианский год.

В. Постоянные, связанные с Солнцем.

1) Эксцентриситет $e_1 \equiv e_0 + e't$:

$$e_0 = 0{,}01673011, \quad e' = 4{,}18 \cdot 10^{-7}.$$

2) Среднее угловое движение n_1 в радианах за юлианский год

$$n_1 = 6{,}2830759 \text{ (сидерическое)}$$
$$= 6{,}2833196 \text{ (тропическое)}.$$

[1]) Я весьма обязан доктору Дж. Портеру (Nautical Almanac) за вычисление этих постоянных.

Г. Лунно-солнечная прецессия.

$$\psi_m = at + bt^2,$$
$$\theta_m = \theta_0 + ct^2,$$
$$a = 50'',3732, \quad b = -0'',0001072;$$
$$\theta_0 = 23^\circ 26' 44'',84, \quad c = 5'',608 \cdot 10^{-6}.$$

Д. Общая прецессия.

$$\psi'_m = Pt + P_1 t^2, \quad \theta'_m = \theta_0 + Qt + Q_1 t^2;$$
$$P = 50'',2675, \quad P_1 = 0'',000111;$$
$$Q = -0'',4685, \quad Q_1 = -3''5 \cdot 10^{-7}.$$

Е. Прецессия от планет.

$$\lambda = \lambda' t + \lambda'' t^2;$$
$$\lambda' = 0'',1153 = 0^s,007687;$$
$$\lambda'' = -2'',38 \cdot 10^{-4} = -1^s,59 \cdot 10^{-5}.$$

Ж. Годичная прецессия по прямому восхождению и склонению.

$$\left.\begin{aligned} m &= \dot\psi_m \cos\theta_0 - \dot\lambda \equiv m_1 + 2m_2 t,\\ n &= \dot\psi_m \sin\theta_0 \equiv n_1 + 2n_2 t; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$
$$m_1 = 46'',0990 = 3^s,07327.$$
$$m_2 = 1'',4 \cdot 10^{-4} = 9^s,2 \cdot 10^{-6};$$
$$n_1 = 20'',0426 = 1^s,33617,$$
$$n_2 = -4'',2 \cdot 10^{-5} = -2^s,85 \cdot 10^{-6}.$$

З. Возмущения планет (вековые).

$$i\sin\Omega = gt + ht^2; \quad i\cos\Omega = g_1 t + h_1 t^2.$$

1) $a = P + g \operatorname{ctg}\theta_0$.

По значениям a и P, приведенным в пунктах (Г) и (Д), легко находится величина

$$g = 0'',04584.$$

2) Аналогично из равенств (7) и (14) § 20.15 для Q, Q_1 и P_1 выводятся следующие значения для h, g_1 и h_1:

$$h = 1'',955 \cdot 10^{-5}, \quad g_1 = -0'',46849,$$
$$h_1 = 5'',33 \cdot 10^{-7}.$$

§ 20.20. Вычисление KL и K

Так как $E = 9'',210$, то из формулы (3) § 20.18 имеем

$$KL = \frac{9'',210\,a}{s\left(1-\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}e^2\right)\cos\theta_0} = 37'',74. \tag{1}$$

Согласно формуле (9) § 20.13,

$$a = 2F\cos\theta_0,$$

где

$$2F = KL\left(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}s^2\right)+K\left(1+\frac{3}{2}e_0^2\right).$$

Подставляя численные значения a, θ_0 и т. д., мы найдем

$$54,92 = KL(1-0,007544)+K(1+0,00042),$$

откуда посредством формулы (1) получаем

$$17,46 = K(1+0,00042).$$

Поэтому

$$K = 17'',45. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) находим

$$L = 2,163 \tag{3}$$

При помощи равенства (17) § 20.13 получаем

$$D = 17'',23. \tag{4}$$

Малая полуось нутационного эллипса ($D\sin\theta_0$) оказывается равной $6'',861$.

§ 20.21. Нутационные члены

Можно теперь вычислить выражения (19) и (20) § 20.13 для нутации Ψ и Θ. В Nautical Almanac приняты следующие обозначения:

$$N+\psi \equiv \Omega, \quad M \equiv g_1 \quad M+\tilde{\omega} \equiv ☾,$$
$$M_1+\tilde{\omega}_1 \equiv L, \quad \tilde{\omega}_1 \equiv \pi, \quad M_1 = L-\pi.$$

Поэтому мы имеем

$$\Psi = -17'',23\sin\Omega + 0'',21\sin 2\Omega - 1'',27\sin 2L -$$
$$- 0'',21\sin 2☾ + 0'',07\sin g_1 + 0'',13\sin(L-\pi) \tag{1}$$

и

$$\Theta = 9'',21\cos\Omega - 0'',09\cos 2\Omega + 0'',55\cos 2L + 0'',09\cos 2☾. \tag{2}$$

Эти формулы дают главные члены нутации. Те члены, которыми мы пренебрегли, имеют амплитуды менее $0'',05$. Конечно, такие члены принимаются во внимание при более точном вычислении Ψ и Θ.

§ 20.22. Масса Луны и динамическое сжатие Земли

1) Согласно формуле (3) § 20.08, мы имеем

$$L=\frac{M}{S}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3\equiv\frac{M}{E+M}\cdot\frac{E+M}{S}\cdot\left(\frac{a_1}{a}\right)^3.$$

Но

$$G(E+M)=n^2a^3, \quad G(S+E)=n_1^2a_1^3.$$

Поэтому, так как $E/S\approx 3\cdot 10^{-6}$, то с достаточной степенью точности

$$L=\frac{M}{E+M}\cdot\frac{n^2}{n_1^2}.$$

Подставляя значения n и n_1 и значение L из равенства (3) § 20.20, получаем

$$\frac{M}{E}=\frac{1}{81{,}6}.$$

Отношение массы Луны к массе Земли можно получить также из наблюдений Эроса, ведущихся для определения солнечного параллакса. Отношение M/E входит в условные уравнения, так как это отношение определяет центр масс системы Земля — Луна, который описывает эллиптическую орбиту вокруг Солнца. Результаты, выведенные Хинксом[1]) из наблюдений 1900 — 1901 гг. и Спенсером Джонсом[2]) из наблюдений 1930—1931 гг., оказались равными 1/81,5 и 1/81,3 соответственно.

2) Из формулы (2) § 20.08 мы имеем

$$K=\frac{3}{2}\,\frac{C-A}{C}\left(\frac{n_1}{\omega}\right)n_1.$$

Но период $2\pi/\omega$ очень близок к сидерическим суткам (см. § 20.27). Далее, период $2\pi/n_1$ равен одному году или $366\frac{1}{4}$ сидерическим суткам. Поэтому

$$\frac{n_1}{\omega}=\frac{1}{366\frac{1}{4}}.$$

Кроме того,

$$n_1=6{,}2833 \text{ радиан за юлианские сутки}=$$
$$=6{,}2833 \operatorname{cosec} 1'' \text{ секунд дуги за юлианские сутки.}$$

---

[1]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 70, 63 (1909).
[2]) Там же, 101, 356 (1941).

Подставляя значение K ($\equiv 17'',45$) из равенства (2) § 20.20, получаем

$$\frac{C-A}{C}=\frac{1}{304,2}.$$

Отношение $(C-A)/C$ называется *динамическим сжатием* Земли.

§ 20.23. Звездное время

Поскольку мы предполагаем, что Земля является сфероидом, то земной экватор будет кругом. Следовательно, мы можем выбрать экваториальные оси инерции X и Y любым способом.

Пусть на рис. 35 ось X проходит через точку пересечения экватора с гринвичским меридианом ZGX.

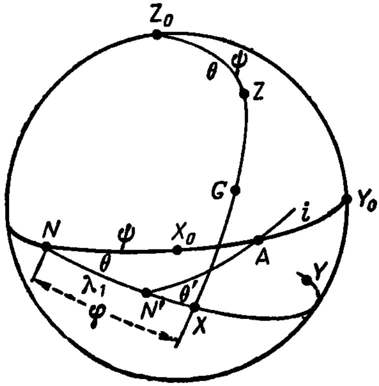

Рис. 35.

На этом рисунке NXY изображает *истинный* экватор в момент t и N' — узел *истинной* эклиптики на NXY в момент t. Истинное наклонение равно θ, $NX_0=\psi$, $NX=\varphi$, $X_0A=\Omega$. Тогда

$$\theta=\theta_m+\Theta,\quad \psi=\psi_m+\Psi. \tag{1}$$

Пусть $NN'=\lambda_1$ и $\angle AN'X=\theta'$.

Гринвичское звездное время, которое мы обозначим через τ, есть XN'. Тогда

$$\tau=\varphi-\lambda_1.$$

Поэтому

$$\dot{\tau}=\dot{\varphi}-\dot{\lambda}_1,$$

или, согласно формуле (2) § 20.07,

$$\dot{\tau}=\omega+\dot{\psi}\cos\theta-\dot{\lambda}_1. \tag{2}$$

Рассмотрим разложения второго и третьего членов правой части (2) до членов второго порядка малости относительно ψ, Ψ, Θ включительно.

1) Согласно равенствам (1),

$$\dot{\psi}\cos\theta = (\dot{\psi}_m + \dot{\Psi})[\cos\theta_m - \Theta\sin\theta_m] =$$
$$= (\dot{\psi}_m + \dot{\Psi})\cos\theta_0 - n\Theta - \Theta\dot{\Psi}\sin\theta_0.$$

В этом равенстве достаточно написать θ_0 вместо θ_m. Кроме того, принимая во внимание равенство (16) § 20.17, мы напишем n вместо $\dot{\psi}_m \sin\theta_0$. Главные члены Ψ и Θ даются формулами

$$\Psi = -D\sin(N+\psi), \quad \Theta = E\cos(N+\psi),$$

в которых $D = 17'',23$; $E = 9'',21$. Отсюда мы получаем

$$\dot{\psi}\cos\theta = (\dot{\psi}_m + \dot{\Psi})\cos\theta_0 - c_1\cos(N+\psi) - c_2 - c_2\cos 2(N+\psi),$$

где $c_1 = 9'',10^{-4}$ и $c_2 = 5'',3 \cdot 10^{-5}$. Мы можем пренебречь малыми периодическими членами с аргументом $N+\psi$; тогда

$$\dot{\psi}\cos\theta = (\dot{\psi}_m + \dot{\Psi})\cos\theta_0 - c_2. \tag{3}$$

2) Из треугольника $NN'A$ мы имеем

$$\lambda_1 = \frac{i\sin(\Omega+\psi)}{\sin\theta'}.$$

Положим $\theta' = \theta + \Delta\theta$. Как и в формуле (3) § 20.15,

$$\Delta\theta = i\cos(\Omega+\psi).$$

Поэтому

$$\lambda_1 = \frac{i\sin(\Omega+\psi)}{\sin\theta} - gg_1t^2\operatorname{ctg}\theta_0\operatorname{cosec}\theta_0.$$

Из равенств (8) и (11) § 20.15 легко видеть, что

$$\lambda = \frac{i\sin(\Omega+\psi_m)}{\sin\theta_0} - gg_1t^2\operatorname{ctg}\theta_0\operatorname{cosec}\theta_0.$$

Напомним, что в формуле (11) § 20.15 $\psi \equiv \psi_m$.

При помощи равенств (1) легко находим, что

$$\lambda_1 - \lambda = -t\operatorname{cosec}\theta_0[g_1D\sin(N+\psi) + gE\cos(N+\psi)].$$

Здесь $g_1D = 4'' \cdot 10^{-5}$ и $gE = 2'' \cdot 10^{-6}$. Пренебрегая членами правой части предыдущего уравнения, напишем $\lambda = \lambda_1$.

3) *Формула для* τ.

Из формул (2) и (3) мы теперь имеем

$$\dot{\tau} = \omega + \dot{\psi}_m\cos\theta_0 - \dot{\lambda} + \dot{\Psi}\cos\theta_0 - c_2 = \omega + m + \dot{\Psi}\cos\theta_0 - c_2.$$

Как и в формуле (1) § 20.19, положим $m = m_1 + 2m_2t$. Тогда

$$\tau = \tau_0 + (\omega + m_1 - c_2)\, t + m_2t^2 + \Psi \cos \theta_0. \qquad (4)$$

Член с c_2 обычно отбрасывается, так как он равен лишь половине единицы четвертого знака величины m_1.

Последний член в равенстве (4) является периодическим. Рассматривая только главные члены, мы имеем

$$\Psi \cos \theta_0 = -D \sin (N + \Psi) \cos \theta_0 = -1^s{,}054 \sin (N + \psi).$$

Период этого члена равен $2\pi/\alpha$ или приблизительно $18\frac{1}{2}$ лет. Следовательно, этот член очень медленно изменяется от суток к суткам. Численное значение совокупности нутационных членов равенства (4) можно, конечно, вычислить для любого момента времени t.

4) *Среднее звездное время.*

Равномерное звездное время τ мы определим с помощью формулы

$$\tau_1 = \tau_0 + (\omega + m_1)t. \qquad (5)$$

Истинное звездное время дается формулой

$$\tau = \tau_1 + m_2t^2 + \Psi \cos \theta_0. \qquad (6)$$

Совершенные звездные часы, особенно кварцевые, могут хранить среднее звездное время. Расхождения во времени, показываемом такими часами, и истинным звездным временем, обусловленные членом m_2t^2 в течение нескольких месяцев незаметны. С другой стороны, расхождения, возникающие от нутационного члена в течение такого промежутка времени, имеют порядок нескольких миллисекунд и могут быть обнаружены кварцевыми часами. Эти расхождения, следовательно, могут быть приняты в расчет, тогда требуется высокая точность.

§ 20.24. Среднее солнечное время

Определение среднего времени основывается на концепции фиктивного тела — *среднего Солнца*, — которое по определению движется в плоскости истинного экватора с постоянной сидерической угловой скоростью μ. Между μ и средней долготой Солнца должна быть установлена зависимость. Если A означает прямое восхождение среднего Солнца, измеряемое от *истинной* точки весеннего равноденствия, то согласно равенствам (13) § 20.17 и (1) § 20.19

$$\dot{A} = \mu + m_1 + 2m_2t + \dot{\Psi} \cos \theta_0,$$

так как склонение равно нулю. Поэтому

$$A = A_0 + (\mu + m_1) t + m_2 t^2 + \Psi \cos \theta_0. \tag{1}$$

Пусть H означает часовой угол среднего Солнца для Гринвича. Тогда, если τ — гринвичское звездное время, то $H = \tau - A$. Далее, τ дается формулой (4) § 20.23. Поэтому

$$H = \tau_0 - A_0 + (\omega - \mu) t.$$

Это равенство показывает, что H равномерно увеличивается со временем. Поскольку t отсчитывается от гринвичского среднего полудня в принятую эпоху t_0, мы имеем

$$\tau_0 = A_0. \tag{2}$$

Поэтому

$$H = (\omega - \mu) t. \tag{3}$$

Эта последняя формула является основой измерения гринвичского среднего времени[1]), которое с 1925 г. равно $H + 12''$.

Относительно неподвижной эклиптики средняя долгота Солнца составляет

$$l_0 + l_1 t + l_2 t^2,$$

причем последний член обусловлен возмущающим действием планет. Относительно подвижной средней точки весеннего равноденствия она равна

$$l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + Pt + P_1 t^2. \tag{4}$$

Средняя долгота, исправленная за аберрацию и обозначаемая через L, дается выражением (4), в котором l_0 нужно заменить через $l_0 - k$, где k — постоянная аберрации. Значение k, использованное Ньюкомом в его фундаментальных исследованиях, составляет $20'', 501$, и это значение до сих пор используется в Nautical Almanac для вычисления L. Выражение для L дается формулой

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2. \tag{5}$$

Теперь введем окончательное определение понятия среднего Солнца. Вспомним, что при определении среднего Солнца мы ввели угловое движение μ, значение которого нам и требуется определить. Среднее Солнце определяется условием, согласно которому его прямое восхождение, выражаемое формулой (1) без учета нутационных членов, равно, *до тех пор пока это возможно*, средней долготе L, выражаемой формулой (5). В идеальном случае из этого определения должна следовать идентичность выражения

$$A_0 + (\mu + m_1) t + m_2 t^2 \tag{6}$$

---

[1]) Или всемирное время (U. T.).

и выражения для L, которое мы запишем в виде

$$L_0 + L_1 t + m_2 t^2 + (L_2 - m_2) t^2. \tag{7}$$

А это возможно лишь в том случае, если $L_2 = m_2$ или если величина $L_2 - m_2$ настолько мала, что ею можно пренебречь.

Согласно Ньюкому, для эпохи 1900, январь 0, гр. ср. полудня

$$L_2 = 7^s{,}26 \cdot 10^{-6}, \quad m_2 = 9^s{,}28 \cdot 10^{-6},$$

так что

$$L_2 - m_2 = -2^s{,}02 \cdot 10^{-6}.$$

Поэтому отбрасывание в формуле (7) члена $(L_2 - m_2)t^2$ дает через 1000 лет ошибку, равную лишь $2^s{,}02$. Ньюком заметил в связи с этим, что дальнейшее необходимое уточнение понятия среднего времени мы должны предоставить астрономам будущего.

Из равенства (2) и тождества выражений (6) и (7) мы находим

$$A_0 = L_0 = \tau_0, \tag{8}$$

$$\mu + m_1 = L_1. \tag{9}$$

Для принятой нами эпохи t_0 имеем

$$L_0 = 18^h 38^m 19^s{,}85,$$

$$L_1 = 86401^s{,}84635, \quad L_2 = 7^s{,}26 \cdot 10^{-6},$$

$$m_1 = 3^s{,}07327, \quad m_2 = 9^s{,}3 \cdot 10^{-6}.$$

Из равенства (9) мы тогда будем иметь

$$\mu = 86398^s{,}77308. \tag{10}$$

Это и есть сидерическое угловое движение среднего Солнца по истинному экватору, причем за единицу времени принят один юлианский год.

§ 20.25. Вычисление ω и $\omega + m_1$

Согласно формуле (3) § 20.24,

$$H = (\omega - \mu) t,$$

если D — число средних солнечных суток, соответствующих t юлианским годам, так что

$$t = \frac{D}{365^1/_4},$$

то

$$H = \frac{\omega - \mu}{N} D, \tag{1}$$

где вместо $365^1/_4$ мы написали N. Нужно добавить, что средние солнечные сутки равны интервалу времени, соответствующему увеличению H на 24^h.

После того как пройдут одни средние солнечные сутки, часовой угол станет $H+24^h$, так что

$$H+24^h=\frac{\omega-\mu}{N}(D+1).$$

Поэтому, вычитая равенство (1) из последней формулы, будем иметь

$$\frac{\omega-\mu}{N}=24^h\equiv 86\,400^s,$$

откуда

$$\frac{\omega}{N}=24^h+\frac{\mu}{N}=24^h+236^s{,}54\,695. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\frac{\omega+m_1}{N}=24^h+\frac{L_1}{N}=24^h+236^s{,}55536. \tag{3}$$

§ 20.26. Соотношение между средним солнечным временем и звездным временем

Поскольку $\tau_0=L_0$, формула для сидерического времени τ имеет вид

$$\tau=L_0+(\omega+m_1)t+m_2t^2+\Psi\cos\theta_0,$$

или, если t выражается через число D средних солнечных суток, так что $t=D/N$,

$$\tau=L_0+\frac{\omega+m_1}{N}D+\frac{m_2}{N^2}D^2+\Psi\cos\theta_0.$$

Спустя одни солнечные сутки звездное время будет

$$\tau'=L_0+\frac{\omega+m_1}{N}(D+1)^2+\frac{m_2}{N^2}(D+1)^2+\Psi\cos\theta_0,$$

где мы пренебрежем изменением Ψ за одни солнечные сутки. Поэтому

$$\tau'-\tau=\frac{\omega+m_1}{N}+\frac{m_2}{N^2}(2D+1).$$

Соответственно

$$24^h \text{ ср. солн. вр.} =\left(24^h+236^s{,}55536+5{,}1\cdot 10^{-7}t+6{,}9\cdot 10^{-11}\right) \text{зв. вр.}$$

Рассматривая только среднее звездное время, мы будем иметь

$$24^h \text{ ср. солн. вр.} = 24^h03^m56^s{,}55536 \text{ зв. вр.}$$

Мы также имеем следующее соотношение:

$$\frac{1 \text{ ср. солн. сутки}}{1 \text{ зв. сутки}}=\frac{24^h03^m56^s{,}55536}{24^h}=1{,}002737909,$$

§ 20.27. Соотношение между звездными сутками и периодом вращения Земли

Если S означает продолжительность звездных суток, а R — период вращения Земли, то в безразмерных единицах

$$S = \frac{2\pi}{\omega + m_1}, \qquad R = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Поэтому

$$\frac{R}{S} = \frac{\omega + m_1}{\omega},$$

и используя значения $\omega + m_1$ и ω из равенств (3) и (2) § 20.25, мы найдем

$$\frac{R}{S} = \frac{86636{,}55536}{86636{,}54695} = 1 + 9{,}72 \cdot 10^{-8}.$$

§ 20.28. Тропический год

Тропический год определяется посредством исправленной за аберрацию средней долготы

$$L = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 \tag{1}$$

и имеет такую продолжительность T средних солнечных суток, в течение которой L увеличивается на 360° или 24^h. Поэтому

$$L + 24^h = L_0 + L_1\left(t + \frac{T}{N}\right) + L_2\left(t + \frac{T}{N}\right)^2,$$

откуда, вычитая равенство (1), получаем

$$24^h \equiv 86\,400^s = \frac{T}{N}\left(L_1 + 2L_2 t + L_2 \frac{T}{N}\right).$$

Последний член чрезвычайно мал по сравнению с L_1. Поэтому

$$T = \frac{86400N}{L_1 + 2L_2 t}.$$

Подставляя сюда значения L_1, L_2 из § 20.24, мы находим, что

$$T = 365{,}2421957 - 6{,}14 \cdot 10^{-8} t.$$

Эта формула и дает число средних суток в тропическом году. Вековой член будет оказывать пренебрежимо малое влияние в течение многих лет. Следовательно, мы можем принять, что тропический год равен 365,2422 средних солнечных суток.

Начало *Бесселева года*, который по продолжительности равен тропическому году, определяется как момент, когда $L = 280° = 18^h 40^m$.

Соответствующая дата лежит вблизи 1 января. Например, начало Бесселева года 1954 приходится на

$$1954, \text{ январь } 0^d{,}892,$$

который для удобства записывается как 1954,0.

§ 20.29. Эфемеридное время

Теоретическое рассмотрение прецессии и нутации основывается на предположении, что Земля является твердым телом и что, в частности, моменты инерции A, B и C остаются постоянными. Поэтому средние солнечные сутки принимаются в качестве стандартной единицы времени. При этом период вращения Земли считается равномерным и приливное трение, рассмотренное в гл. 19, не учитывается.

Современные исследования показали, что, несомненно, имеются ничем не компенсированные расхождения между гравитационной теорией и наблюдениями долгот Луны, Солнца, планет Меркурия и Венеры — все одной и той же природы, — которые указывают на то, что Земля не является совершенными часами. Эти расхождения вызываются малыми изменениями моментов инерции Земли, обусловленными метеорологическими, сейсмическими и другими причинами. Соответственно этому средние солнечные сутки не являются вполне удовлетворительной единицей времени. Вместо них в качестве стандартной единицы времени была принята длина сидерического года на 1900,0, а время, выраженное в этой единице, стало называться *эфемеридным временем*.

Эфемериды[1]), приводимые в каталогах, теперь основываются на эфемеридном времени, а не на гринвичском среднем или всемирном времени, как это было ранее. Переход от среднего солнечного времени к эфемеридному времени осуществляется введением следующей поправки Δt[2]):

$$\Delta t = +\,24^s{,}349 + 72^s{,}3165T + 29^s{,}949T^2 + 1{,}821B,$$

где T выражено в юлианских столетиях, отсчитываемых от 1900, январь 0 гринвичского среднего полдня, а B — величина, названная Спенсером Джонсом[3]) *флуктуацией* в долготе Луны.

[1]) D. H. Sadler, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **111**, 624 (1951).
[2]) Transactions of the International Astronomical Union, Vol. VIII (в печати).
[3]) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 99, 542 (1939).

ДОПОЛНЕНИЕ

Члены разложения $J_n(ne)$ и $\frac{d}{de}[J_n(ne)] \equiv J'_n(ne)$ до седьмой степени e

$$J_0(e) = 1 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{64}e^4 - \frac{1}{2304}e^6,$$

$$J_1(e) = \frac{1}{2}e\left[1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{9216}e^6\right],$$

$$J_2(2e) = \frac{1}{2}e^2\left[1 - \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{24}e^4\right],$$

$$J_3(3e) = \frac{9}{16}e^3\left[1 - \frac{9}{16}e^2 + \frac{81}{640}e^4\right],$$

$$J_4(4e) = \frac{2}{3}e^4\left[1 - \frac{4}{5}e^2\right],$$

$$J_5(5e) = \frac{625}{768}e^5\left[1 - \frac{25}{24}e^2\right],$$

$$J_6(6e) = \frac{81}{80}e^6,$$

$$J_7(7e) = \frac{(343)^2}{92\,160}e^7,$$

$$J'_0(e) = -\frac{1}{2}e\left[1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{9216}e^6\right],$$

$$J'_1(e) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6\right],$$

$$J'_2(2e) = e\left[1 - \frac{2}{3}e^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{90}e^6\right],$$

$$J'_3(3e) = \frac{27}{16}e^2\left[1 - \frac{5}{16}e^2 + \frac{189}{640}e^4\right],$$

$$J'_4(4e) = \frac{8}{3}e^3\left[1 - \frac{6}{5}e^2 + \frac{8}{15}e^4\right],$$

$$J'_5(5e) = \frac{3125}{768}e^4\left[1 - \frac{35}{24}e^2\right],$$

$$J'_6(6e) = \frac{243}{40}e^5\left[1 - \frac{12}{7}e^2\right],$$

$$J'_7(7e) = \frac{7\,(343)^2}{92160}e^6,$$

$$J'_8(8e) = \frac{4096}{315}e^7.$$

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

У. Смарт

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Редактор *Г. И. Кузьменко*
Художник *Т. Елагина*
Художественный редактор *Н. А. Фильчагина*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 21/VII 1964 г.
Подписано к печати 25/XI 1964 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$=15,75 бум. л.
31,50 печ. л.
Уч.-изд. л. 24,70. Изд. №. 27/1959
Цена 1 р. 88 к. Зак. 583.

Темплан 1965 г. Изд.-ва „МИР" Пор. № 111.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Государственного
комитета Совета Министров СССР
по печати. Измайловский проспект, 29.