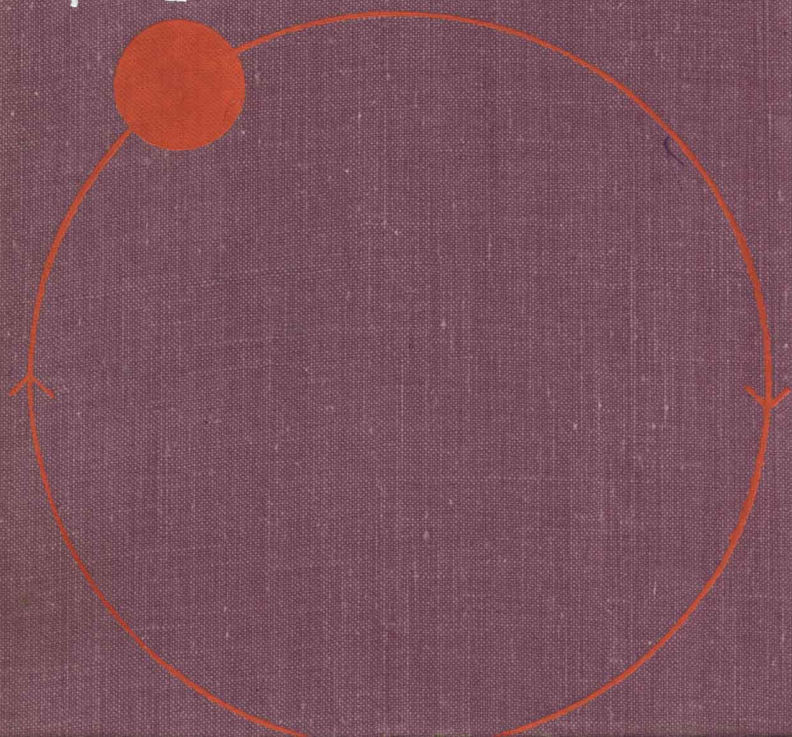


*А. Пои*

**Движение  
по  
орбитам**



# Orbital Motion

A. E. Roy, Ph. D., F. R. A. S.  
Professor of Astronomy,  
University of Glasgow

ADAM HILGER LTD, BRISTOL

*А. Рой*

# **Движение по орбитам**

Перевод с английского  
канд. физ.-мат. наук  
С. А. МИРЕРА

под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук  
В. А. САРЫЧЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
МОСКВА 1981

В книге рассматривается движение искусственных и естественных небесных тел по орбитам под влиянием сил тяготения. Большое внимание уделено учету возмущений и проблеме устойчивости Солнечной системы. Изложены основы механики космического полета, движения в системах двойных и кратных звезд, элементы звездной динамики. Книга содержит многочисленные задачи и упражнения теоретического и прикладного характера, а также ценную библиографию.

Широта и доступность изложения делают книгу полезной как для научных и инженерно-технических работников, интересующихся вопросами небесной механики и астродинамики, так и для преподавателей и студентов соответствующих специальностей, которые могут использовать книгу в качестве вводного курса.

*Редакция литературы по космическим исследованиям, астрономии и геофизике*

1705030000

© 1978 A. E. Roy

Р 20605-093  
041(01)-81 93-81, ч. 1

© Перевод на русский язык, «Мир», 1981

Арчи Э. Рой

## ДВИЖЕНИЕ ПО ОРБИТАМ

Научные редакторы: М. Ф. Путов, Л. В. Самсоненко. Мл. научный редактор В. И. Соколова. Художник Е. Н. Урусов. Художественный редактор М. Н. Кузьмина. Технический редактор Л. И. Бирюкова. Корректор Е. Г. Литвак.

ИБ № 2061

Сдано в набор 16.10.80. Подписано к печати 27.05.81. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 17 бум. л. Усл. печ. л. 34. Усл. кр.-отт. 34. Уч.-изд. л. 30,53. Изд. № 27/0568. Тираж 2100 экз. Зак. 345. Цена 4 р. 90 к.  
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой. Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Мойсеенко, 10.

## Предисловие редактора перевода

Два обстоятельства вызвали к жизни новый расцвет небесной механики: создание искусственных небесных тел — искусственных спутников и межпланетных космических аппаратов — и широкое использование быстродействующих электронных вычислительных машин. В результате, с одной стороны, резко расширился круг лиц, интересующихся как самой небесной механикой, так и ее применениями; с другой стороны, появился новый подход — численные методы и численное моделирование — к решению практически важных и для астрономии, и для механики космического полета задач движения тел под влиянием ньютоновского тяготения. Таким путем фундаментальная задача многих тел, сформулированная еще Ньютоном, становится базой как механики космического полета, так и звездной динамики, до недавнего времени довольствовавшейся в основном полуэмпирическими методами.

Перечисленные обстоятельства побудили издательство «Мир» выпустить в русском переводе книгу известного специалиста по небесной механике профессора университета в Глазго (Великобритания) Арчи Э. Роя. Эта книга представляется нам одной из первых и притом удачных попыток изложить современную небесную механику как общую проблему движения тел под действием взаимного тяготения, с включением основ теории возмущений, механики космического полета и звездной динамики.

Цель книги, ее характер и история создания с достаточной полнотой описаны автором в предисловии, так что здесь нет нужды повторяться. Однако две особенности книги заслуживают особого упоминания. Во-первых, ее заключительные главы (14-я и 15-я), посвященные двойным и кратным звездам и движению звезд в Галактике, содержат материал, который в стандартных курсах небесной механики, как правило, отсутствует. Это, несомненно, увеличивает научную и педагогическую ценность книги.

Во-вторых, бросается в глаза отсутствие громоздких выводов формул, столь характерных для работ по классической небесной механике. Автор предпочитает внимательно анализировать физическую сущность задачи и приводить окончательные формулы, нередко сопровождая их таблицами или графиками. Такой стиль изложения существенно облегчает понимание предмета начинающему; с другой стороны, те читатели, которые пожелают более детально познакомиться с выводами различных аналитических

выражений, смогут сделать это, обратившись к рекомендованной автором литературе.

Почти каждая глава сопровождается задачами и упражнениями; в конце книги приведены ответы, а также методические указания к решению задач.

Приведенная в книге библиография в основном содержит книги и статьи зарубежных авторов. Советский читатель в необходимых случаях может обратиться к курсам небесной механики М. Д. Субботина и Г. Н. Дубошина, а также к вышедшим в русском переводе книгам П. Эскобала «Введение в астродинамику» (М.: Мир, 1971) и С. Херрика «Астродинамика» (т. 1—3. — М.: Мир, 1976—1978).

Обсуждение более тонких и более специальных задач о движении искусственных и естественных небесных тел читатель сможет найти в статьях, публикуемых в журналах «Астрономический журнал» и «Космические исследования», выпускаемых издательством «Наука».

В заключение отметим, что книгу А. Роя с интересом и пользой для себя прочтут как специалисты, связанные с освоением космоса, так и студенты и преподаватели, которые могут использовать ее в качестве вводного курса по небесной механике и астродинамике.

*В. А. Сарычев*

## Предисловие

Термин «движение по орбитам» подразумевает движение одного тела относительно другого. Это может быть движение спутника вокруг планеты и планеты вокруг Солнца, движение одной звезды относительно другой или относительно центра Галактики. Исследование проблем, связанных с орбитальным движением, уже во времена Ньютона привело к возникновению целых разделов динамики.

Основы одного из таких разделов — небесной механики — были заложены в трудах самого Ньютона, но в своем классическом виде она сформировалась в течение XVIII—XIX вв. Вершиной развития классической небесной механики стали изящная работа Пуанкаре и исчерпывающая теория движения Луны Хилла и Брауна. Основой подобных теорий являются аналитические методы. С развитием таких методов связано возникновение многих важных разделов прикладной математики.

В последние десятилетия благодаря созданию быстродействующих ЭВМ стал развиваться раздел небесной механики, в котором в качестве главного инструмента исследования используются численные методы. В этом разделе рассматривается движение трех или нескольких (а иногда и многих) тяготеющих масс. Значительный прогресс в изучении указанной проблемы, не поддающейся решению обычными методами, оказался возможным благодаря применению ЭВМ. Численные методы применяются не только при анализе движения спутников вокруг планет или эволюции планетных орбит, но также и при исследовании образования двойных звезд и динамики звездных скоплений.

Создание искусственных спутников и межпланетных космических аппаратов потребовало срочного решения новых, до сих пор не встречавшихся классов задач движения по орбитам. Быстро развивающийся раздел космонавтики, в котором рассматривается движение искусственных тел в Солнечной системе под действием гравитационного притяжения и реактивных сил, стали называть «астродинамикой». Сюда же относятся теория активного полета и учет влияния сопротивления атмосферы, электромагнитных полей и давления солнечного излучения.

Изучение орбитального движения (небесная механика, астродинамика, кинематика и динамика звезд, движение двойных звезд и т. д.) в последние годы дало много важных результатов. Наде-

емя, что настоящая книга поможет читателю войти в круг этих проблем астрономии. Она предназначена главным образом для студентов университетов и технических колледжей и может служить введением в теорию движения по орбитам. Книга адресуется читателям, которые совсем или почти совсем незнакомы с этой теорией, но по тем или иным причинам чувствуют необходимость изучить основные понятия, методы и результаты в этой области. Большая часть материала данной книги была прочитана автором на лекциях для студентов отделений астрономии, авиации и географии университета города Глазго. Кроме того, в настоящую книгу включен существенно переработанный материал монографии автора, опубликованной ранее\*.

Книга содержит свыше 200 тщательно отобранных библиографических ссылок, которые дадут читателю возможность расширить свои познания в интересующих его областях. Задачи, помещенные в конце глав, помогут студенту проверить усвоение материала. Ответы и указания к решению задач в необходимых случаях можно найти в конце книги.

Для чтения книги требуется знание основ дифференциального и интегрального исчисления и векторной алгебры. Рисунки и уравнения снабжены номерами, составленными из номера главы и порядкового номера рисунка или уравнения в данной главе.

В приложении приводятся таблицы, содержащие некоторые астрономические и математические данные.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю признательность своим учителям, коллегам и студентам, прошлым и настоящим, за многочисленные и весьма полезные обсуждения. Мне также приятно поблагодарить инспектора Управления книгоиздательства за разрешение привести в приложениях I, III, IV астрономические данные, касающиеся планет и спутников, из «Дополнения к астрономическим эфемеридам», совет Британской астрономической ассоциации за разрешение привести в приложении IV (столбцы 6 и 7 таблицы) параметры спутников, взятые из справочника Британской астрономической ассоциации за 1977 г., а также моих коллег Д. Кларка за разрешение включить (с некоторыми изменениями) материалы из книг «Astronomy: Principles and Practice» и «Astronomy: Structure of the Universe» (A. E. Roy, D. Clarke, London, Adam Hilger, 1977) и проф. Д. Кинг-Хили за разрешение воспользоваться при построении диаграммы 10.2 рисунком 9 из его статьи «A View of Earth and Air».

Автор также признателен г-же Л. Уильямсон из отделения астрономии за кропотливую работу по подготовке рукописи книги.

*Арчи Э. Рой*

*отделение астрономии университета в Глазго*

\* Roy A. E. The Foundations of Astrodynamics. New York, Macmillan, 1965.



# Неспокойная Вселенная

## 1.1. Введение

Мириады тел, из которых состоит Вселенная, находятся в постоянном движении. Все тела от огромных галактик (массы которых примерно в 250 000 млн. раз больше массы Солнца) и до самых маленьких астероидов (которые по размерам меньше многих земных городов) движутся друг относительно друга. Иногда движение имеет систематический и по существу периодический характер, как, например, орбитальное движение планеты вокруг Солнца или Луны вокруг Земли; в других случаях периодичность отсутствует, например когда звезда покидает галактику и длительное (по астрономическим масштабам) время путешествует в глубинах межгалактического пространства. При этом форма ее орбиты определяется суммой сил притяжения со стороны удаленных галактик.

Однако очень часто мы можем считать движение орбитальным. Массы и размеры тел при этом могут изменяться в очень широком диапазоне. Иллюстрациями могут служить обращение крошечного спутника вокруг Марса, орбитальное движение одной звезды относительно другой и колоссальные по масштабам траектории, описываемые галактиками, входящими в скопления. Во всех этих случаях движение обусловлено действием гравитационных сил. Несмотря на то что гравитационные силы на атомных и субатомных уровнях являются одними из самых слабых и ими по сравнению с электростатическими и ядерными силами можно пренебречь, именно эти силы определяют состояние Вселенной на макроскопическом уровне, на котором и рассматривается орбитальное движение. Все остальные силы (например, магнитные и т. п.), за исключением нескольких специальных случаев, на такое движение влияют значительно слабее.

В этой главе мы дадим краткое описание структуры Вселенной, специально обращая внимание на возможные типы движений. Физическое строение объектов Вселенной нас будет интересовать лишь настолько, насколько это необходимо для понимания общей динамической картины. Здесь мы попытаемся объяснить специфические черты движений небесных тел. Будет показано, что во многих случаях понимание причин, приводящих к тому или другому типу движения, наблюдаемому в природе, может пролить свет на исто-

рию образования и эволюцию рассматриваемых тел, как, например, в случае орбит планет Солнечной системы. Таким образом, изучение орбитального движения имеет большое значение для многих областей астрономии. В последние годы, особенно с созданием искусственных спутников и межпланетных кораблей, овладение динамикой движения по орбитам или астродинамикой стало существенным условием, без которого невозможно достижение тех исследовательских целей, для которых была создана космическая техника.

## 1.2. Солнечная система

За исключением большинства комет, все тела Солнечной системы заключены в области пространства, диаметр которой составляет примерно одну тридцатитысячную расстояния до ближайшей звезды. По этой причине возмущающим влиянием других звезд можно пренебречь и Солнечную систему при рассмотрении внутренних движений можно считать фактически изолированной.

Солнце, планеты, спутники, астероиды, метеоры и межпланетная среда образуют замкнутую систему, элементы которой взаимодействуют друг с другом. При рассмотрении движений внутри Солнечной системы движением самой системы относительно центра Галактики пренебрегают.

В приложениях I—IV собраны основные сведения о размерах, массах, расстояниях и других характеристиках тел Солнечной системы. Для получения дополнительной информации следует обратиться к работам, указанным в конце главы. Ниже мы дадим краткое описание системы, которое в последующих главах по мере надобности будет дополняться.

Солнце, представляющее собой типичную звезду, по размерам и по массе превосходит все остальные тела Солнечной системы. Диаметр самой большой планеты, Юпитера, составляет примерно одну десятую часть диаметра Солнца, а его масса — примерно одну тысячную массы Солнца. Вследствие такого превосходства массы Солнца планеты Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон движутся (в первом и в более высоких приближениях) так, как если бы на них действовало только притяжение Солнца. Орбиты планет являются эллипсами разных размеров, в одном из фокусов которых расположено Солнце. В большинстве случаев эти эллипсы имеют эксцентриситет меньше 0,1; исключениями являются Меркурий и Плутон, движущиеся по орбитам с эксцентриситетами соответственно 0,206 и 0,250.

Плоскости орбит планет проходят через центр Солнца и обычно наклонены к плоскости орбиты Земли под углом не больше нескольких градусов. Меркурий и Плутон и в этом случае представляют исключение; в то время как для других планет наклонение

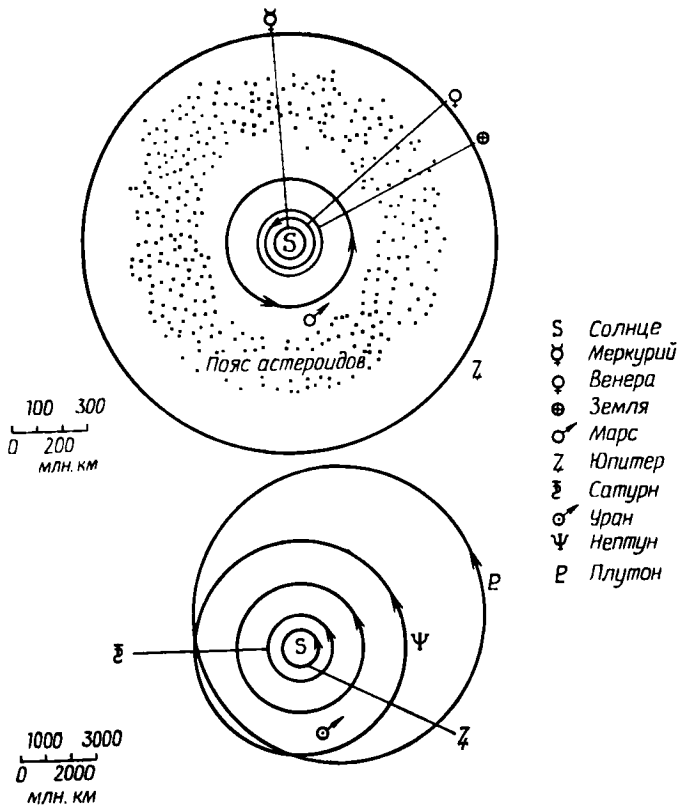


Рис. 1.1.

меньше четырех градусов, для Меркурия и Плутона оно составляет соответственно  $7^\circ$  и  $17^\circ 9'$ . На рис. 1.1 изображена схема Солнечной системы, в которой сохранены соотношения размеров орбит планет и предполагается, что все планеты вращаются в плоскости орбиты Земли.

На схеме показан также пояс астероидов. Это область между орбитами Юпитера и Марса, где заключены орбиты тысяч малых планет, самая большая из которых (Церера) имеет диаметр 770 км.

Следует также заметить, что минимальное расстояние Плутона от Солнца меньше, чем среднее расстояние Нептуна от Солнца. Если бы плоскости орбит этих планет не имели взаимного наклона, то опасность их столкновения намного возросла бы.

Как мы видим, орбиты планет являются почти круговыми и компланарными, причем начиная с 1978 г. и до конца столетия

Нептун будет самой удаленной от Солнца планетой, а Плутон будет находиться на орбите около точки, ближайшей к Солнцу.

Все планеты, кроме Меркурия, Венеры и Плутона, имеют по крайней мере по одному спутнику. Сатурн помимо десяти «лун» имеет кольцо, состоящее из миллионов мельчайших спутников неопределенной природы, движущихся вокруг планеты по компланарным почти круговым орбитам. У Земли есть один большой спутник (Луна), масса которого составляет почти одну девяностую массы Земли. У Марса два маленьких спутника диаметром меньше 16 км. Юпитер (как и подобает такой большой планете) имеет четырнадцать спутников. Четыре самых больших (галлеевых) спутника по размерам примерно соответствуют нашей Луне. Остальные десять намного меньше (диаметр наибольшего из них около 160 км). Среди десяти спутников Сатурна выделяется Титан, близкий по размерам к Меркурию; остальные спутники Сатурна во много раз меньше. Вокруг Урана обращаются пять спутников, имеющих почти круговые компланарные орбиты. Совсем недавно было обнаружено, что у него есть, кроме того, кольцо, похожее на кольцо Сатурна. У Нептуна два спутника, один из которых по массе сравним с Титаном. Другой спутник (Неренда), имеющий сильно эксцентричную орбиту, был открыт только в 1948 г.

Большинство спутников обращается вокруг своих планет по эллиптическим орбитам с малыми эксцентриситетами, причем спутники одной и той же планеты имеют почти компланарные орбиты. В то же время средние плоскости спутниковых систем разных планет могут значительно различаться между собой. Направления движения спутников по орбитам (кроме небольшого числа случаев) совпадают с направлением обращения планет вокруг Солнца. Поведение спутников, которые не подчиняются этому правилу, некоторые астрономы связывают с особенностями процессов их образования.

Как правило, все планеты и спутники вращаются вокруг своих осей, причем направление вращения в большинстве случаев совпадает с направлением обращения планет вокруг Солнца или спутника вокруг своей планеты. Спутники с обратным вращением снова являются исключением из правила. Периоды вращения некоторых спутников вокруг своих осей равны периодам их обращения вокруг планет. Таким образом, они постоянно обращены одной стороной к телу, спутниками которого являются.

Условия на поверхности разных тел Солнечной системы весьма различны. Они зависят от характера эволюции тела, его массы, радиуса, расстояния от Солнца и периода вращения вокруг оси.

---

\* В 1978 г. был открыт спутник Плутона, названный Хароном.  
*Прим. ред.*

### 1.2.1. Законы Кеплера

Иоганн Кеплер (1571—1630), изучив множество данных наблюдений положений планет, собранных Тихо Браге (1546—1601), сформулировал три закона движения планет, которые с тех пор навсегда связаны с его именем.

1. Орбита каждой планеты является эллипсом с Солнцем в одном из фокусов.

2. Скорость, с которой заметает площадь радиус-вектор, соединяющий планету с Солнцем, постоянна для каждой планеты.

3. Кубы больших полуосей орбит планет пропорциональны квадратам их периодов обращения.

Первый закон Кеплера говорит о том, какую форму имеют орбиты планет, и определяет их положение относительно Солнца.

Второй закон Кеплера определяет, как вдоль орбиты изменяется угловая скорость планеты в зависимости от ее расстояния до Солнца. В перигелии она максимальна, а в афелии минимальна.

Третий закон Кеплера связывает размеры орбит с периодами обращения планет по этим орбитам.

При той точности наблюдений, которая была во времена Кеплера, эти законы могли считаться точными. Однако и сегодня их можно рассматривать как очень хорошее приближение к действительности. Они справедливы не только для системы планет, движущихся вокруг Солнца, но и для различных систем спутников, движущихся вокруг своих планет. Законы Кеплера перестают отражать поведение тел с высокой степенью точности только в тех случаях, когда рассматриваются внешние спутники с обратным движением или близкие спутники несферических планет. Однако и тогда их можно использовать в качестве первого приближения.

Фактически законы Кеплера определяют частное решение гравитационной задачи  $n$  тел для случая, когда тела считаются материальными точками, а массы всех тел, кроме одного, настолько малы, что они не притягивают друг друга и испытывают силу притяжения только со стороны единственного тела большой массы. Оказалось, что и система планеты — Солнце и все системы спутники — планета с высокой степенью точности удовлетворяют этим условиям. Первым, кто понял это и занялся систематическим исследованием таких систем, был Исаак Ньютон (1642—1727).

### 1.2.2. Закон Боде

В расстояниях планет от Солнца наблюдается одна интересная особенность. Она известна под названием закона Боде, хотя по своему значению этот факт не идет ни в какое сравнение с законами Кеплера. Закон Боде часто записывается в виде

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n,$$

где  $r_n$  — среднее расстояние планеты от Солнца, а  $n$  принимает значения  $-\infty, 0, 1, 2, 3 \dots$ . Табл. 1.1 показывает, с какой точностью этот закон соответствует действительности.

Таблица 1.1

Планета	$n$	Расстояние от Солнца (расстояние Земли от Солнца принято за единицу)	
		вычисленное по закону Бодэ	истинное
Меркурий	$-\infty$	0,4	0,39
Венера	0	0,7	0,72
Земля	1	1,0	1,00
Марс	2	1,6	1,52
Астероиды	3	2,8	2,80
Юпитер	4	5,2	5,20
Сатурн	5	10,0	9,54
Уран	6	19,6	19,20
Нептун	7	38,8	30,07
Плутон	8	77,2	39,46

Когда в 1772 г. появилось первое сообщение об этом законе, астероиды, Уран, Нептун и Плутон еще не были открыты. После открытия в 1781 г. Урана оказалось, что для него имеет место хорошее совпадение с законом. Этот факт явился прекрасным подтверждением закона Бодэ и привлек внимание к области между орбитами Марса и Юпитера. Многие астрономы пытались найти недостающую планету. Однако вместо одной большой планеты было обнаружено много мелких тел (астероидов), среднее расстояние которых от Солнца в точности соответствует закону Бодэ.

Для Нептуна соответствие плохое, а положение Плутона вообще не согласуется с законом, хотя примерно соответствует  $n = 7$ . Это расхождение позволило утверждать, что закон отражает простое совпадение, не имеющее под собой никакого физического обоснования. Тем не менее некоторые ученые, занимающиеся проблемой образования Солнечной системы, исходя из своих теорий формирования планет, как следствие получили законы типа закона Бодэ.

Аналогичные законы были открыты и для главных спутниковых систем. Например, мисс Блэгг сформулировала обобщенный закон Бодэ, с которым согласуются положения спутников, открытых впоследствии.

### 1.2.3. Соизмеримости в средних движениях

В Солнечной системе имеет место множество почти точных соизмеримостей в средних движениях пар тел в планетной и в спутниковых системах. Среднее движение планеты, движущейся вокруг Солнца, равно ее средней угловой скорости обращения по орбите, которая получается делением  $360^\circ$  на средний период обращения. Например, если  $n_J$ ,  $n_S$ ,  $n_V$  и  $n_P$  — средние движения (в градусах в сутки) Юпитера, Сатурна, Нептуна и Плутона соответственно, то

$$\begin{aligned}n_J &= 0,083\ 091, \\n_S &= 0,033\ 460, \\n_V &= 0,005\ 981, \\n_P &= 0,003\ 979.\end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}2n_J - 5n_S &= -0,001\ 118, \\3n_P - 2n_V &= -0,000\ 025,\end{aligned}$$

откуда видно, насколько близки отношения этих средних движений к простым дробям. Рой и Овенден исследовали большое число таких соизмеримостей и показали, что они встречаются значительно чаще, чем этого можно было бы ожидать, считая их случайными совпадениями.

Существуют также и тройные соизмеримости. Если  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  — средние движения Ио, Европы и Ганимеда (три из четырех галлеевых спутников Юпитера) соответственно, то в градусах в сутки получаем

$$\begin{aligned}n_1 &= 203, 488\ 992\ 435, \\n_2 &= 101, 374\ 761\ 672, \\n_3 &= 50, 317\ 646\ 290.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}n_1 - 2n_2 &= 0,739\ 469\ 091, \\n_2 - 2n_3 &= 0,739\ 469\ 092,\end{aligned}$$

откуда следует соотношение

$$n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0,$$

которое в пределах точности наблюдений является точным.

Этой замечательной соизмеримости средних движений соответствует в равной степени точная соизмеримость величин средней долготы спутников, а именно

$$l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180^\circ.$$

Позднее мы увидим, что имеются достаточные основания полагать, что вопросы устойчивости непосредственно связаны с существованием таких соотношений. Однако здесь мы пока ограничимся только тем, что рассмотрим еще три примера соизмеримых средних движений.

Первый пример — это движение астероидов — многочисленных тел, обращающихся вокруг Солнца. Орбиты астероидов в основном расположены между орбитами Марса и Юпитера, но есть астероиды (имеющие обычно сильноэксцентричные орбиты), которые могут заходить внутрь орбиты Меркурия и удаляться за орбиту Юпитера. Кроме того, есть две группы астероидов (Троянцы), которые колеблются около фиксированных относительно орбиты Юпитера точек. Троянцы представляют собой примеры одного интересного решения задачи трех тел, впервые найденного Лагранжем. Этому решению соответствует конфигурация, при которой малое тело все время остается в вершине равностороннего треугольника, в остальных двух вершинах которого расположены два массивных тела, обращающихся относительно друг друга по кеплеровским орбитам. Троянцы располагаются в двух точках (массивными телами в данном случае являются Юпитер и Солнце), гелиоцентрическая долгота которых на  $60^\circ$  больше и на  $60^\circ$  меньше долготы Юпитера. Можно сказать, что движение Троянцев соответствует соизмеримости порядка единицы.

Кроме того, изучение распределения орбит тысяч других астероидов, обнаруженных к настоящему времени, показало, что есть определенные гелиоцентрические расстояния, которых астероиды избегают. Эти расстояния соответствуют таким средним движениям, которые соизмеримы со средним движением Юпитера (тела, вносящего основные возмущения в орбиты астероидов). Астероиды избегают занимать орбиты, соответствующие соизмеримостям порядка одна вторая, одна третья, две пятых и т. д. Такие промежутки в распределении астероидов называются по имени их открывателя промежутками Кирквуда. С другой стороны, вблизи орбиты, соответствующей соизмеримости порядка три четвертых, наблюдается аккумуляция астероидов. Такая орбита, по-видимому, является устойчивой по отношению к возмущениям со стороны Юпитера.

Во втором примере снова одну из основных ролей играет Юпитер, но теперь уже как тело, удерживающее свои внешние спутники в противовес возмущающему гравитационному полю Солнца.

Сейчас известно 14 спутников Юпитера. Их средние расстояния от центра планеты лежат в диапазоне от 181 000 км до 24 000 000 км. Четыре больших спутника (Ио, Европа, Ганимед и Каллисто) движутся по почти круговым компланарным орбитам. Остальные десять спутников имен не имеют и занумерованы в том порядке, в каком они открывались. V спутник Юпитера является ближай-



шим к планете и имеет диаметр, равный, по-видимому, всего 160 км. VI, VII, X и XIII спутники Юпитера образуют отдельную группу. Все они движутся на расстоянии примерно 11 500 000 км от центра Юпитера по орбитам с большими эксцентриситетами и наклонами. Их орбиты ориентированы таким образом, что вероятность столкновения спутников друг с другом очень мала. Под действием гравитационного притяжения Солнца эти орбиты испытывают заметные возмущения.

Остальные пять спутников Юпитера (VIII, IX, XI, XII и XIV) движутся по значительно более протяженным обратным орбитам и испытывают на себе значительные большие возмущения со стороны Солнца. Вычисления показали, что если бы движение по орбитам происходило в прямом направлении, то на таких расстояниях Юпитер смог бы удерживать спутники лишь очень непродолжительное время. Под действием притяжения Солнца они превратились бы в астероиды, движущиеся по собственным гелиоцентрическим орбитам. Может иметь место и обратный ход событий: астероиды могут быть захвачены Юпитером и двигаться вокруг него как спутники в течение неопределенного времени. Предполагается, что четыре внешних спутника Юпитера представляют собой захваченные астероиды, которые в будущем при благоприятных условиях могут снова уйти от Юпитера. Орбита открытого недавно XIV спутника Юпитера в настоящее время определена еще довольно плохо.

Обратим внимание на интересный и, по-видимому, важный факт: орбиты этих четырех спутников, как и некоторых спутников, упоминавшихся выше, мало различаются по размерам и сгруппированы в три орбитальные «спектральные линии». Орбиты VI, VII и X спутников Юпитера удалены от планеты на 11 600 000 км, орбита XII спутника — на 20 900 000 км, а орбиты VIII, IX и XI спутников — на 23 200 000 км. Эти расстояния приблизительно соответствуют средним движениям, в 17, 7 и 6 раз большим, чем среднее движение Юпитера вокруг Солнца (тела, вносящего основные возмущения в движение спутников). Возможно, только такие соизмеримые орбиты на указанных расстояниях являются устойчивыми по отношению к солнечным возмущениям.

В качестве последнего примера рассмотрим кольца Сатурна. Они лежат в плоскости экватора планеты. Внешнее кольцо (кольцо А) имеет внешний и внутренний радиусы соответственно 136 000 и 119 800 км. От кольца В (среднего кольца) оно отделено темным пространством, называемым щелью Кассини. Кольцо В имеет внешний и внутренний радиусы соответственно 117 100 и 90 500 км. Кольцо С (полупрозрачное, иногда называемое креповым кольцом) примыкает изнутри к кольцу В. Его внутренний радиус равен 74 600 км.

Кольца не являются ни твердыми, ни жидкими; они состоят из огромного числа мелких твердых частиц, движущихся по орбитам вокруг планеты. Орбиты этих частиц возмущаются тремя внутренними спутниками Сатурна: Мимасом, Энцеладом и Тетией. Наличие щелей в кольцах может быть объяснено именно притяжением этих спутников. Щель Кассини (между кольцами А и В) соответствует таким расстояниям от планеты, при которых средние движения гипотетических частиц были бы в два раза больше среднего движения Мимаса и в три и в четыре раза больше средних движений Энцелада и Тетии. Граница между кольцами В и С лежит на таком расстоянии, при котором среднее движение должно быть в три раза больше среднего движения Мимаса. Очевидно, мы и здесь имеем дело с ситуацией, аналогичной промежуткам Кирквуда в поясе астероидов.

#### 1.2.4. Кометы и метеорные тела

Кометы и метеорные тела также являются членами Солнечной системы; они движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. У нас нет достаточных оснований полагать, что кометы приходят в Солнечную систему извне; напротив, кажется вполне вероятным, что вокруг Солнца имеется образованная миллионами комет оболочка, по форме близкая к сфере. На далекие кометы действуют возмущения со стороны соседних звезд. В результате небольшое число комет попадает в область планетных орбит, где под влиянием планет-гигантов, в частности Юпитера, кометы либо переходят на орбиты меньшего размера (меньше орбиты Плутона), либо приобретают гиперболические скорости и уходят за пределы Солнечной системы. Например, комета Галлея обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с периодом 76 лет, а группа комет, известная как семейство Юпитера и насчитывающая около тридцати пяти комет, имеет периоды от трех до восьми лет.

Комета Брука (1889 V) представляет собой пример кометы, орбита которой существенно изменилась под действием Юпитера. До сближения кометы с планетой 20 июля 1886 г. ее период обращения вокруг Солнца был равен 29,2 лет, а орбита лежала вне орбиты Юпитера. После сближения ее период сократился до 7,10 лет, а размеры орбиты уменьшились настолько, что она стала полностью лежать внутри орбиты Юпитера.

Размеры комет могут изменяться в очень широких пределах. Яркое ядро кометы может иметь диаметр до нескольких сот километров, а окружающая его голова кометы обычно имеет размеры около 130 000 км. Хвост кометы может растягиваться на много миллионов километров.

Однако массы комет невелики; они не превышают  $10^{-6}$  массы Земли. По всей вероятности, кометы состоят из глыб метеорного

вещества различных размеров, вмерзших в лед аммиака, углеводородов, углекислоты и воды. Когда комета приближается к Солнцу, то под действием солнечного излучения часть льда может растаять и испариться. При этом продукты испарения и пылевые частицы, размеры которых не превышают некоторой величины, образуют хвост кометы.

*Метеоры* тесно связаны с кометами. Когда ночью крупные метеоры входят в атмосферу Земли, мы видим их как «падающие звезды». Это явление связано с выделением тепла, в которое переходит кинетическая энергия метеора.

Файрболл (Fireball) \* — это очень яркий метеор; если он взрывается, то называется *болидом*. Если метеор достигает поверхности Земли, то его называют *метеоритом*. Метеориты в основном состоят из железа и некоторого количества никеля, но бывают и каменные метеориты. Последние по составу напоминают земные горные породы.

Размеры метеорных тел могут составлять от нескольких метров (в редких случаях) до  $10^{-4}$  см. С уменьшением размеров число соответствующих метеоров быстро растет. Поскольку при столкновении метеорной частицы с искусственным спутником или космическим зондом их относительная скорость может достигать 80 км/с, то кинетическая энергия, освобождающаяся даже при столкновении с микроскопическим метеором, может быть достаточно велика. По этой причине и в настоящее время проводятся исследования, которые должны ответить на вопрос, какова вероятность встречи с метеорной частицей данного размера и массы. Одним из результатов запусков искусственных спутников было уточнение значений вероятностей попадания метеорных частиц данного размера и массы в космические аппараты с различными сечениями («площадями мишени»).

Метеорные тела распределены в Солнечной системе не равномерно, а концентрируются в потоки, орбиты которых идентичны орбитам известных комет. Возможно, что метеорные рои представляют собой остатки полностью разрушившихся комет или же кометы и рои метеоров образовались в результате одних и тех же процессов. В некоторых метеорных потоках вещество распределено по всей орбите, в других оно до сих пор концентрируется в определенных положениях. Когда Земля проходит через такие рои метеоров, ночью можно наблюдать захватывающее зрелище — интенсивный и очень эффектный метеорный ливень. Кроме того, в это время радиолокаторы регистрируют многочисленные понижившиеся следы метеоров в атмосфере Земли.

---

\* В советской научной литературе указанный термин в данном значении не употребляется и все яркие метеоры называются болидами. — *Прим. ред.*

### 1.2.5. Выводы

Мы видим, что при обсуждении орбитального движения в Солнечной системе обнаруживается ряд закономерностей и возникает много вопросов, на которые должны быть даны ответы. Пока мы можем сформулировать следующие выводы:

- 1) Большинство орбит имеет приблизительно эллиптическую форму.
- 2) Движение в планетной системе и в каждой спутниковой системе близко к компланарному.
- 3) Орбиты и вращения в большинстве случаев являются прямыми (т. е. движение происходит против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики).
- 4) В системе действуют законы Кеплера.
- 5) По-видимому, в системе выполняются законы распределения орбит типа закона Боде.
- 6) Широко распространены соизмеримости в средних движениях.
- 7) Частицы в кольцах Сатурна и тела в поясе астероидов, очевидно, избегают орбит, соответствующих определенным соизмеримостям.
- 8) Орбиты некоторых комет и спутников могут претерпевать значительные изменения.

Среди вопросов, возникающих перед нами, отметим следующие:

- а) Каково значение свойств (1)—(8)?
- б) Насколько орбиты планет устойчивы по отношению к взаимным гравитационным возмущениям?
- в) Могут ли планеты сталкиваться?
- г) Каков возраст планет?
- д) Не являются ли внешние спутники Юпитера и Сатурна, отличающиеся обратным движением, захваченными астероидами?
- е) Будут ли орбиты большинства спутников на больших астрономических интервалах времени устойчивы, если учесть приливные эффекты?

### 1.3. Движение звезд

Первое доказательство того, что положения звезд в пространстве не фиксированы относительно друг друга, было получено Галлеем в 1718 г. Он показал, что современные положения трех самых ярких звезд — Сириуса, Альдебарана и Арктура — отличаются от их положений, приведенных греческим астрономом Гиппархом девятнадцатью столетиями ранее. Как показали тщательно проведенные измерения, в действительности пространственными скоростями относительно Солнца обладает значительно большее число звезд.

При обработке результатов наблюдений угловых смещений надо учитывать множество факторов. Если наблюдения проводятся с поверхности Земли, то на эффект, обусловленный движением звезды относительно Солнца, накладывается еще целый ряд эффектов, не имеющих к этому никакого отношения. Внося в наблюдения поправки (учитывающие искажения от атмосферы Земли, прецессионное и нутационное движение оси вращения Земли и обращение Земли вокруг Солнца), можно в конце концов получить так называемое собственное движение звезды, а во многих случаях и расстояние от Солнца до звезды (более подробные сведения см. в гл. 3). Кроме того, применение спектроскопии позволяет измерить лучевые скорости звезд. И собственное движение, и лучевые скорости звезд измеряются относительно Солнца, причем собственным движением считается годовое угловое смещение звезды на гелиоцентрической небесной сфере.

Первое надежное измерение расстояния до звезды было выполнено Бесселем в 1838 г. Он получил, что расстояние до звезды  $\beta$  Лебедя составляет около 3,33 пс \* (примерно в 670 тысяч раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца). За прошедшие с тех пор полтора столетия была накоплена информация о движении десятков тысяч звезд. В результате получили развитие новые науки, звездная кинематика и звездная динамика, позволяющие учесть наблюдаемое кинематическое поведение звезд.

Если мы ограничимся ближайшей окрестностью Солнца (т. е. сферой радиусом порядка  $10^3$  пс, содержащей несколько тысяч звезд), то увидим, что в первом приближении звезды этой «локальной группы» (в том числе и Солнце) совершают хаотическое движение относительно друг друга, подобно птицам в стае, каждая из которых летит со своей скоростью в своем направлении. Однако, с точки зрения наблюдателя, расположенного на Солнце, на движение каждой звезды рассматриваемой локальной группы накладывается систематический эффект, обусловленный собственной скоростью Солнца. Поэтому нам кажется, будто звезды разбегаются на небесной сфере от точки, соответствующей направлению движения Солнца и Солнечной системы (апекс), и сходятся к противоположной точке (антиапекс). Этот эффект перспективы аналогичен тому, что мы наблюдаем при езде в автомобиле, когда предметы впереди кажутся расходящимися, а позади — сходящимися.

До сих пор мы не касались доказательств орбитального движения звезд. Однако еще в начале XIX в. Уильям Гершель обратил внимание на сфероидальную форму галактической системы звезд. Позднее его сын Джон Гершель предположил, что такая форма является следствием вращения Галактики вокруг оси, перпендикулярной плоскости галактического экватора.

\* 1 парсек (пс)  $3,083 \cdot 10^{13}$  км.

Галактика имеет форму линзы, причем Солнце расположено в ее экваториальной плоскости на расстоянии примерно в две трети радиуса Галактики от ее центра. Доказательством этому служит тот факт, что Млечный Путь на небесной сфере вытянут вдоль большого круга. Центр Галактики лежит в направлении созвездия Стрельца. Вокруг галактического диска в концентричной с ним сфере располагаются шаровые звездные скопления,

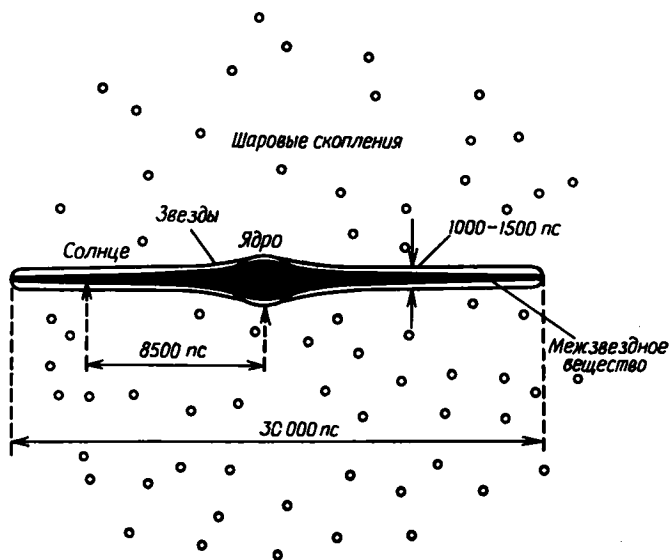


Рис. 1.2.

каждое из которых представляет собой компактную систему звезд (см. разд. 3.3). Подавляющее большинство этих скоплений сконцентрировано в одной половине небесной сферы, что согласуется с предположением о сферическом распределении шаровых скоплений, концентричном центру Галактики (напомним, что Солнце находится далеко на периферии галактического диска). Кроме того, в центре диска имеется вздутие, содержащее большое число звезд, а также межзвездной пыли и газа. Форма и размеры нашей Галактики показаны на рис. 1.2.

Орбитальное движение вокруг центра Галактики совершают не только звезды, но и газовые и пылевые облака, большая часть которых расположена в экваториальной плоскости Галактики. Одной из задач, стоявших в последние годы перед радиоастрономией, использующей радиоизлучение межзвездного водорода на волне 21 см, было нанесение на карту таких облаков и подтверждение спиральной структуры нашей Галактики.

В дальнейшем мы увидим, что тип орбитального движения звезды или облака зависит от гравитационного потенциала, который в свою очередь определяется распределением вещества в Галактике.

### 1.3.1. Двойные системы

До сих пор мы считали, что если не рассматривать звездные подсистемы, называемые шаровыми скоплениями, то каждая звезда движется в пространстве по своей собственной орбите. Однако более чем для половины звезд это не так.

Открытие большого числа пар звезд, движущихся под воздействием сил взаимного притяжения как единая система, приписывают Уильяму Гершелю. В 1782 г. он опубликовал каталог двойных звезд. Пары звезд включались в каталог, если направления на звезды почти точно совпадали. Гершель намеревался измерить расстояния до звезд по наблюдаемому параллактическому угловому смещению более яркой (и, предположительно, ближайшей) звезды относительно менее яркой (по предположению расположенной дальше). Это смещение обусловлено годичным орбитальным движением Земли вокруг Солнца. Однако со временем он обнаружил, что во многих случаях для объяснения наблюдаемых собственных движений необходимо предположить, что звезды, составляющие пару, совершают орбитальное движение относительно друг друга.

Таким образом, *двойная система* определяется как пара звезд, движущихся по орбитам вокруг общего центра масс; силой, не дающей звездам разлететься, является взаимное гравитационное притяжение. *Визуально-двойными* называются системы, у которых видны раздельно оба компонента. Компоненты *спектрально-двойных* систем настолько близки друг к другу, что разрешающей способности телескопа не хватает, чтобы их различить. Такие системы можно распознавать по доплеровскому смещению спектральных линий, обусловленному орбитальным движением компонентов. К третьему классу двойных систем относятся *затменные двойные*. Такая система также выглядит как одна звезда, но ее компоненты периодически закрывают друг друга (полностью или частично). Регулярные падения блеска такой звезды свидетельствуют о ее двойной природе. Двойные звезды могут быть одновременно и спектрально-двойными, и затменными.

В некоторых случаях звезды, образующие двойную систему, удалены друг от друга на расстояния в тысячи раз большие, чем расстояние от Земли до Солнца, а их орбитальные периоды составляют сотни лет. В других случаях две звезды почти касаются друг друга. При этом приливные эффекты приводят к значительным возмущениям формы звезд, звезды могут иметь общую атмосферу,

между ними может происходить обмен веществом. Периоды в таких системах нередко составляют всего несколько часов.

Если компоненты двойной системы далеки друг от друга, то они движутся по обычным эллиптическим орбитам; если звезды расположены близко, то их орбиты оказываются намного сложнее. Значительная часть сведений о массах, строении и эволюции звезд получена нами при изучении двойных звездных систем.

### 1.3.2. Тройные системы и системы более высокой кратности

Многие исследования были направлены на то, чтобы определить, какую часть среди двойных звезд составляют тройные звезды и звездные системы более высокой кратности. Например, визуальные двойные системы при более близком рассмотрении могут оказаться тройными системами, так как один компонент пары на самом деле является спектрально-двойной. Сейчас число известных систем настолько велико, что можно с достаточной надежностью оценить долю тройных звезд и систем более высокой кратности в общем количестве двойных и кратных звезд. Оказалось, что их доля составляет от одной четверти до одной трети. Ситуация осложняется наложением эффектов селекции и возможным включением в число тройных систем ложных тройных звезд. Тем не менее результаты, полученные с применением самых различных методов, хорошо согласуются.

Точно такую же долю (между одной четвертью и одной третью), по-видимому, составляют четверные системы среди тройных и системы, состоящие из пяти членов среди четверных систем и т. д. Правда, при переходе к системам более высокой кратности точность такой оценки становится все более сомнительной, поскольку эффекты, снижающие надежность оценки, возрастают, а число известных систем тем меньше, чем выше кратность системы.

При рассмотрении отношения периодов обращений в кратных системах очень удобен иерархический подход, впервые введенный Эвансом. На рис. 1.3 дана иллюстрация иерархического метода Эванса, примененного *a* — к двойной системе, *b* — к тройной системе, *в* и *г* — к двум возможным разновидностям четверной системы.

Эта схема типа генеалогического дерева почти не требует пояснений. На рис. 1.3, *b* схематически изображены два далеко отстоящих друг от друга компонента, один из которых сам является тесной двойной системой. На рис. 1.3, *в* представлена аналогичная система с добавлением еще одной ступени. Здесь одна из звезд тесной пары сама является еще более тесной парой. Напротив, рис. 1.3, *г* соответствует такой системе, у которой оба компонента «широкой» пары сами являются тесными парами.



По-видимому, подавляющее большинство тройных систем имеет структуру, соответствующую иерархии 2, т. е. тесная пара и третья звезда на расстоянии во много (часто в сотни) раз больше, чем расстояние между компонентами тесной пары. Что касается четверных систем, то здесь предпочтительнее такие конфигурации, когда две тесные пары отстоят друг от друга на расстояние, во

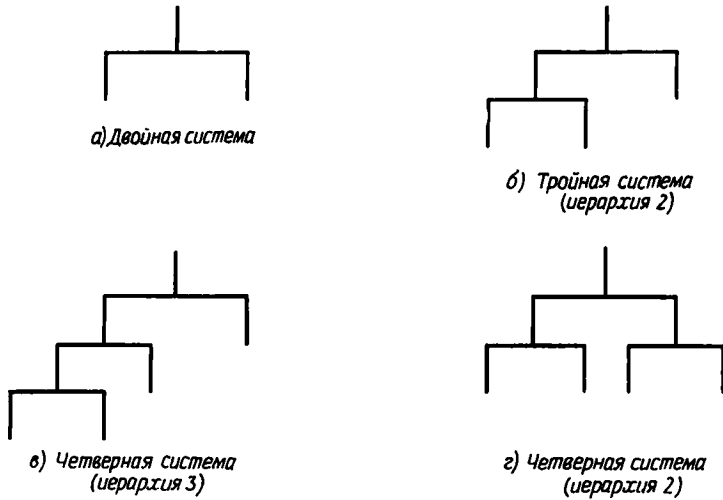


Рис. 1.3.

много раз большее размеров тесных пар, или когда имеется тесная пара и две удаленные звезды. Переходя к периодам обращений, можно сказать, что в таких конфигурациях кратных систем отношение наибольшего периода к наименьшему очень велико.

Примечателен дефицит кратных систем, у которых все расстояния между компонентами являются величинами одного порядка. В дальнейшем мы увидим, что полученные в последнее время результаты, касающиеся задачи  $n$  тел, проливают свет на причины недостатка таких конфигураций.

### 1.3.3. Шаровые скопления

Шаровые скопления представляют собой компактные звездные системы, содержащие большое число звезд. Сейчас в нашей Галактике известно около 120 шаровых скоплений, однако на основании изучения множества таких скоплений, принадлежащих соседним галактикам, можно предположить, что в действительности их число близко к 1000.

Говоря об изображении такого скопления на фотопластинке (при фотографировании таких объектов выдержка делается очень большой) прибегают к аналогиям с пчелиным роем или крупинками соли, рассыпанными на листе черной бумаги.

Какая бы аналогия ни использовалась, каждое скопление представляется состоящим из огромного числа звезд (от 10 000 до 1 000 000). При этом звездная плотность (т. е. число звезд в кубическом парсеке) быстро растет от периферии к центру скопления. Число звезд в скоплении определить очень трудно. Если фотография делается с небольшой выдержкой, то теряется большая часть слабых звезд; с другой стороны, при большой выдержке в центре скопления получается расплывшееся пятно, где изображения отдельных звезд сливаются и их невозможно сосчитать. Однако даже в центре скопления, где звездная плотность может быть в 1000 раз больше, чем в окрестности Солнца, вероятность столкновения двух звезд очень мала. Тем не менее, если бы человека перенесли на планету, находящуюся вблизи центра шарового скопления, то вид звездного неба привел бы его в трепет. Вместо нескольких звезд первой величины и пары тысяч слабых звезд наблюдатель увидел бы тысячи звезд первой величины и десятки тысяч более слабых объектов. В самом деле; в центре скопления 47 Тукана свет звезд по оценкам эквивалентен свету нескольких тысяч полных лун.

Как уже указывалось, шаровые скопления распределены внутри сферы, центр которой совпадает с центром галактического диска (см. рис. 1.2). Есть некоторые основания полагать, что по мере приближения к ядру Галактики плотность скоплений растет. Уайт заметил, что если мы из одного шарового скопления наугад выберем 150—200 звезд, то образованная ими система может служить неплохой моделью всей совокупности шаровых скоплений.

Измерения расстояний до шаровых скоплений достаточно надежны, так как в подавляющем большинстве скоплений имеются звезды различных типов, большая часть которых представляет собой звезды типа RR Лиры и цефеиды II типа. Звезды обоих этих типов могут быть использованы в качестве индикаторов расстояния. Все звезды типа RR Лиры имеют приблизительно одинаковый абсолютный блеск; измерив их средний (по скоплению) видимый блеск, можно найти расстояние до скопления. Если мы имеем дело с цефеидой, то, измерив период изменений ее блеска и воспользовавшись связью между этим периодом и величиной светимости, мы можем определить средний абсолютный блеск звезды; затем, используя значение среднего видимого блеска цефеиды, можно найти расстояние.

Основным источником информации о скоростях движения шаровых скоплений являются основанные на эффекте Доплера измерения лучевых скоростей. Распределение скоростей вполне согла-

суется с предположением о том, что и Солнце и шаровые скопления движутся по орбитам вокруг центра Галактики.

Применение астрофизической теории внутреннего строения звезд к диаграмме Герцшпрунга—Рессела, построенной для шарового скопления, позволяет определить нижнюю границу возраста скопления. Оказалось, что в среднем возраст шаровых скоплений составляет  $6 \cdot 10^9$  лет, причем дисперсия этой величины очень мала. Следовательно, система шаровых звездных скоплений является устойчивой на больших астрономических интервалах времени.

Внимание многих исследователей привлекали следующие задачи:

1) распределение звезд внутри шарового скопления и типы их орбит;

2) возможный уход из шарового скопления и захват шаровым скоплением отдельных звезд;

3) устойчивость звездной системы такого размера.

В дальнейшем мы увидим, что к настоящему времени разработано много разнообразных подходов (в некоторых случаях дополняющих друг друга), помогающих разобраться в этом интересном классе динамических задач.

#### 1.3.4. Галактические, или рассеянные, звездные скопления

Галактические, или рассеянные, звездные скопления — это системы, содержащие от десятка до нескольких тысяч звезд. В большинстве случаев число звезд колеблется от 50 до 200. Такие системы имеют только приблизительно сферическую форму; некоторые из них имеют неровные контуры, а их диаметры составляют от 1,5 до 15 пс. В отличие от шаровых звездных скоплений рассеянные скопления располагаются в галактическом диске. Для определения числа рассеянных скоплений в нашей Галактике проводились различные оценки, однако они остаются весьма приближенными, поскольку темные облака в плоскости Галактики скрывают от нас, по-видимому, большую часть скоплений, расположенных вблизи этой плоскости. Сейчас известно по крайней мере 800 рассеянных скоплений, причем такие наиболее известные скопления, как Плеяды, Гиады и группа Большой Медведицы, расположены достаточно близко. Это позволяет проводить детальные исследования входящих в них звезд и их собственных движений. В отличие от шаровых скоплений, возраст которых, по-видимому, составляет около  $6 \cdot 10^9$  лет, возраст галактических скоплений лежит в диапазоне от  $2 \cdot 10^8$  до  $6 \cdot 10^9$  лет. Например, возраст трех рассеянных скоплений  $h$  и  $\chi$  Персея, Плеяд и Гиад равен соответственно  $5 \cdot 10^8$ ,  $2 \cdot 10^7$  и  $4 \cdot 10^8$  лет. Поскольку возраст нашей Галак-

тики по оценкам составляет  $10^{10}$  лет, то, как видно, некоторые скопления по сравнению с ней настолько молоды, что процесс их образования может иметь место и в наши дни. С другой стороны, есть скопления, сравнимые по возрасту с нашей Галактикой. Следовательно, такие скопления должны обладать устойчивостью по отношению к возмущающему гравитационному воздействию со стороны ядра Галактики, близлежащих газовых и пылевых облаков и случайно вторгающихся в их окрестность звезд. Способностью переносить такие возмущающие воздействия могут обладать не все рассеянные скопления в отличие от шаровых скоплений, имеющих высокую плотность и насчитывающих от десятков тысяч до миллионов звезд. Вопросы устойчивости рассеянных звездных скоплений, имеющих различную форму, различное число и концентрацию звезд, так же как и в случае шаровых скоплений, привлекают к себе внимание многих исследователей.

#### 1.4. Скопления галактик

В Галактике среднее расстояние между звездами в несколько миллионов раз больше среднего диаметра звезды. В противоположность этому среднее расстояние между галактиками всего в несколько десятков раз больше среднего диаметра галактики. К тому же галактики часто собираются в группы или скопления. Наша Галактика вместе с ее ближайшими соседями, Малым и Большим Магеллановыми облаками, входит в Местную группу, включающую около семнадцати галактик, в том числе гигантскую галактику в созвездии Андромеды и две галактики, являющиеся ее спутниками.

Галактики могут совершать орбитальное движение относительно друг друга. Если расстояние между галактиками относительно невелико, то приливные силы могут приводить к ощутимым изменениям их формы. На фотопластинках мы довольно часто видим галактики, плоскости которых так сильно деформированы, что это привело к образованию перемычек между ними. Столкновения галактик на протяжении жизни галактического скопления происходят достаточно часто, в то время как столкновение звезд в галактике является очень редким событием.

#### 1.5. Выводы

Итак мы видим, что орбитальное движение, определяемое в основном гравитационными силами, характерно для всей наблюдаемой части Вселенной. Задачи, возникающие при анализе этого движения, удобно классифицировать следующим образом (правда, такая классификация является очень грубой):

1) задачи материальных точек — конечные размеры рассматриваемых тел не принимаются во внимание (например, система Солнце—Юпитер—астероиды);

2) задачи протяженных тел — учитываются конечные размеры по крайней мере одного из рассматриваемых тел (например, орбита близкого искусственного спутника, движущегося вокруг сплюснутой Земли, или взаимное возмущающее действие компонентов двойной звездной системы, если расстояние между ними невелико).

Возможна и другая классификация.

а) Задача двух тел — две частицы притягиваются друг к другу в соответствии с ньютоновским законом тяготения. Эта задача имеет точное аналитическое решение. Примером такой задачи может служить изолированная двойная система, в которой компоненты достаточно далеки друг от друга.

б) Задача нескольких тел — число частиц больше двух, но слишком мало для применения статистических методов. Эта задача не имеет общего решения. Примером может служить задача определения орбит планет Солнечной системы на всем промежутке времени ее существования.

в) Задача многих тел — могут применяться статистические сглаживающие методы, позволяющие определить поведение не каждого конкретного тела, а всей системы в целом. Такой подход к решению задачи можно назвать статистическим. Примером может служить задача о шаровом звездном скоплении.

## Рекомендуемая литература

Перечисленные ниже книги рекомендуются читателю, желающему более подробно ознакомиться с имеющейся информацией о Вселенной.

- Backer R. H., Frederick L. W.* Astronomy. New York, Van Nostrand, 1971.  
*Calder N.* The Violent Universe. London, BBC Publication, 1969.  
*Krogdahl. W. S.* The Astronomical Universe. New York, Macmillan, 1962.  
*Menzel D. H., Whipple F. L., Vaucouleurs G.* Survey of the Universe. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1970.  
*Roy A. E., Clarke D.* Astronomy: Principles and Practice. Bristol, Adam Hilger, 1977.  
*Roy A. E., Clarke D.* Astronomy: Structure of the Universe. Bristol, Adam Hilger, 1977.  
*Wyatt S. P.* Principles of Astronomy. Boston, Mass., Allyn and Bacon, 1964.

Среди журналов, посвященных (частично или полностью) астрономии, можно отметить следующие: The Astronomical Journal; The Astrophysical Journal; Journal of Geophysical Research; Monthly Notices, Royal Astronomical Society; Icarus; Nature; Planetary and Space Science; Publications of the Astronomical Society of the Pacific; Science; Sky and Telescope; Celestial Mechanics; Astrophysics and Space Science; Astronomy and Astrophysics.

# Системы координат и измерение времени

## 2.1. Введение

При измерении или вычислении положения и скорости любого небесного тела нужны система координат и система измерения времени. В астрономии проблема выбора подходящей системы отсчета возникла уже тысячи лет тому назад. Вплоть до недавнего времени все измерения производились с поверхности Земли. Однако еще до создания искусственных спутников Марса и посадки человека на Луну часто было удобно вводить систему координат, не связанную с Землей. Например, при исследовании орбитального движения планет за начало координат принимали центр Солнца; в спутниковых задачах за начало координат принимали центр планеты, а в звездной динамике — центр Галактики. В случае пилотируемого космического полета началом координат можно считать сам космический корабль.

Сама система координат также зависит от конкретной задачи. При ее определении может использоваться земной экватор или плоскость орбиты Земли, содержащая Солнце, или же экватор планеты, плоскость орбиты планеты, галактический экватор и т. д. Система измерения времени может быть основана на видимом движении Солнца, на вращении Земли, или на эфемеридном времени, связанном с движением планет вокруг Солнца и Луны вокруг Земли.

В этой главе будут рассмотрены понятия, относящиеся к системам измерения времени и системам координат.

## 2.2. Положение на поверхности Земли

Положение точки на поверхности Земли определяется двумя координатами, широтой и долготой, отсчитываемыми от экватора и меридиана, проходящего через северный и южный полюсы и Гринвич (Великобритания). Долгота измеряется вдоль экватора в восточном или западном направлении от пересечения гринвичского меридиана с экватором до пересечения с экватором меридиана, проходящего через данную точку.

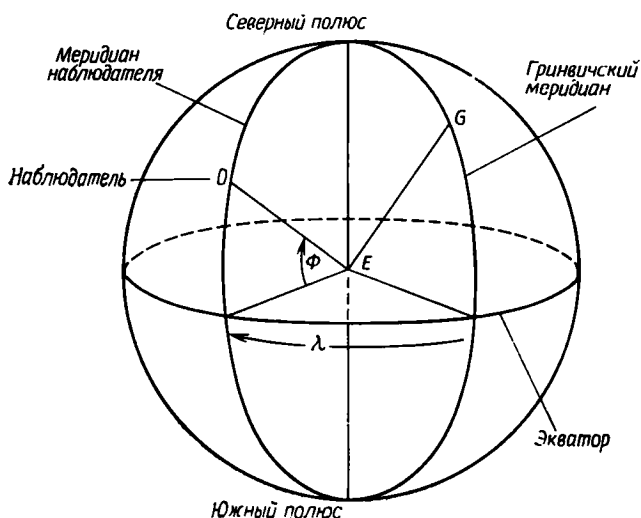


Рис. 2.1.

Долгота обычно выражается в единицах времени, связь которых с угловыми единицами задается следующей таблицей:

$$360^{\circ} = 24^{\text{h}}$$

$$1^{\circ} = 4^{\text{m}} \quad 1^{\text{h}} = 15^{\circ}$$

$$1' = 4^{\text{s}} \quad 1^{\text{m}} = 15'$$

$$1'' = 1/15^{\text{s}} \quad 1^{\text{s}} = 15''.$$

Например, долгота Вашингтона (США)  $5^{\text{h}} 08^{\text{m}} 15,78^{\text{s}}$  к западу от Гринвича ( $77^{\circ} 03' 56,7''$  западной долготы). Долгота может изменяться от  $12^{\text{h}}$  к западу от Гринвича до  $12^{\text{h}}$  к востоку от Гринвича, обозначенного на рис. 2.1 буквой **Г**. Широта точки равна ее угловому расстоянию от экватора (в северном или южном направлении). Этот угол измеряется вдоль местного меридиана. Например, Вашингтон имеет северную широту  $38^{\circ} 55' 14,0''$ .

Поскольку Земля отличается от сферы, истинная картина сложнее представленной выше. Однако описанная здесь простая модель обладает достаточной точностью.

Если через точку на поверхности Земли, в которой расположен наблюдатель, провести отвесную линию, то она составит с плоскостью земного экватора угол  $\phi$ , называемый *астрономической широтой*. Точка пересечения отвесной линии с экваториальной плоскостью, вообще говоря, не совпадает с центром Земли. Угол между линией, соединяющей наблюдателя с центром Земли, и плоскостью экватора называется *геоцентрической широтой*  $\phi'$ .

Имеется еще и третье определение широты. Геодезические измерения на поверхности Земли обнаружили локальные нерегулярности направления силы тяжести, обусловленные вариациями плотности и формы земной коры. Эти аномалии влияют на направление линии отвеса и являются причиной так называемых *уклонений отвесной линии*. Геодезическая или географическая широта  $\varphi''$  точки наблюдения — это астрономическая широта, в которую внесена поправка за отклонения отвеса.

Таким образом, геодезическая широта связана с референц-эллипсоидом (сплюснутым эллипсоидом, поверхность которого определяется средним уровнем океана). Если  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипса, при вращении которого образуется референц-эллипсоид, то сжатие  $\gamma$  определяется по формуле

$$\gamma = \frac{a-b}{a} = 1 - (1 - e^2)^{1/2},$$

где  $e$  — эксцентриситет эллипса.

Существуют различные референц-эллипсоиды. Например, параметры эллипсоида Хейфорда таковы:

$$a = 6\,378,388 \text{ км},$$

$$b = 6\,356,912 \text{ км},$$

$$\gamma = 1/297,$$

и, следовательно,  $e = 0,08199$ .

Заметим, что эллипсоид, полученный по наблюдениям орбит спутников Земли, заметно отличается от этого референц-эллипсоида (см. гл. 10).

*Геоцентрическая долгота*  $\lambda$  совпадает с *геодезической долготой*. Она равна угловому расстоянию от гринвичского меридиана до меридиана наблюдателя, измеряемому вдоль экватора в восточном или западном направлении.

### 2.3. Горизонтальная система

Простейшей системой координат является горизонтальная система. Она определяется плоскостью горизонта и одной из точек пересечения этой плоскости с большим кругом (см. разд. 2.9.1), проходящим через северный полюс мира и зенит. Начало горизонтальной системы координат совпадает с наблюдателем, так что эта система является сугубо локальной.

Как показано на рис. 2.2, точка *зенита* лежит на продолженной вверх линии отвеса. *Надир* находится в противоположном направлении. Удобной абстракцией является предположение, что Земля окружена огромной сферой произвольного радиуса, на внутреннюю поверхность которой проектируются звезды и другие небесные



тела. Эта сфера называется *небесной сферой*. Поскольку в астрономии расстояния до тел нас часто не интересуют, то радиус сферы можно выбирать произвольным и его часто берут равным единице.

*Северный и южный полюсы мира* — это точки пересечения оси вращения Земли с небесной сферой. Наблюдателю в северном полушарии кажется, что северный полюс мира — это точка, вокруг которой вращается небесный свод, делая один оборот за 24 ч. В настоящее время яркая Полярная звезда находится на

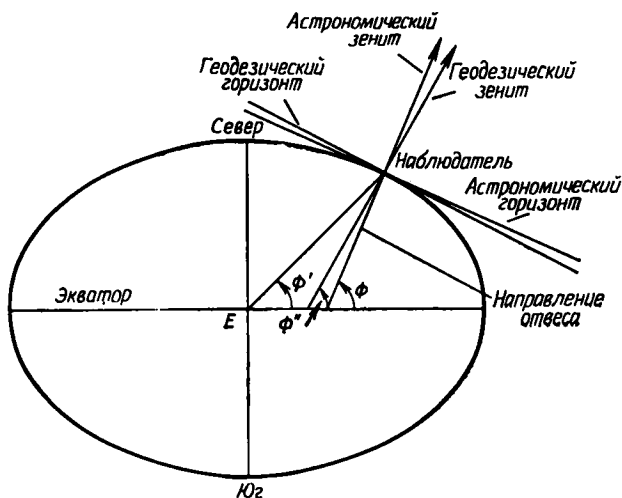


Рис. 2.2.

расстоянии менее одного градуса от северного полюса мира. Однако вследствие прецессии (см. разд. 3.4) она постепенно уходит от полюса, возвращаясь в его окрестность примерно через каждые 26 000 лет.

На рис. 2.3 показана небесная сфера, в центре которой находится наблюдатель. Здесь  $Z$  — зенит,  $O$  — наблюдатель,  $P$  — северный полюс мира,  $OX$  — мгновенное направление на небесное тело. Большой круг, проведенный через  $Z$  и  $P$ , пересекает горизонт  $NESA W$  в точках севера  $N$  и юга  $S$ . Другой большой круг  $WZE$ , составляющий прямой угол с большим кругом  $NPZS$ , пересекает горизонт в точках запада  $W$  и востока  $E$ . Дуги  $ZN$ ,  $ZW$ ,  $ZA$  и т. д. называются *вертикалами*; точки  $N$ ,  $E$ ,  $S$  и  $W$  называются *главными точками*.

Положение объекта  $X$  в такой системе координат задается двумя углами — азимутом  $A$  и высотой  $a$ . Азимут может определяться разными способами. Поэтому каждый раз, имея дело с такой системой, надо решать, каким определением следует воспользоваться.

Например, азимут может определяться как угол между вертикалами, проходящими через точку юга и объект  $X$ . Этот угол измеряется вдоль горизонта в западном направлении от 0 до  $360^\circ$ . Азимут может определяться и как угол между вертикалами, проходящими через точку севера и объект  $X$ , и измеряться вдоль горизонта в западном или восточном направлении от 0 до  $180^\circ$ . Обычно используется третье определение: *азимут отсчитывается*

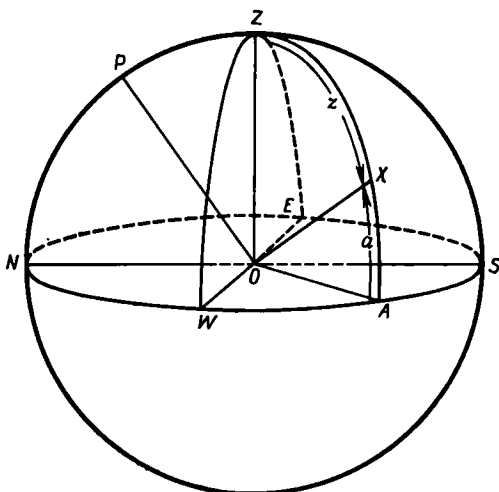


Рис. 2.3.

от точки севера в сторону востока от 0 до  $360^\circ$  \*. В данной книге принято именно такое определение, которое фактически аналогично определению направления по часовой стрелке.

Если наблюдатель находится в южном полушарии, то азимут измеряется от точки юга в восточном направлении от 0 до  $360^\circ$ .

*Высота  $a$*  точки  $X$  — это угол, измеряемый вдоль вертикального круга, проходящего через  $X$ , от точки  $A$  горизонта до  $X$ . Он измеряется в градусах. Вместо высоты можно использовать и другую координату — *зенитное расстояние  $z$*  ( $ZX$  на рис. 2.3), которое также измеряется в градусах. Очевидно, имеет место соотношение

$$a = 90^\circ - z.$$

Основной недостаток горизонтальной системы координат связан с тем, что она локальная. Два наблюдателя, расположенные в различных точках на поверхности Земли, будут в один и тот же момент

\* Такие азимуты называются геодезическими в отличие от астрономических азимутов, отсчитываемых от точки юга. — *Прим. ред.*

времени получать различные значения высоты и азимута для одной и той же звезды. Кроме того, поскольку, с точки зрения наблюдателя, небесная сфера вращается, то координаты звезды со временем будут изменяться. Однако и в настоящее время многие наблюдения проводятся в такой, как ее часто называют, альтазимутальной системе. Например, 250-футовый радиотелескоп в Джодрелл-Бэнк (Великобритания) имеет альтазимутальную монтировку. При этом для преобразования горизонтальных координат в экваториальные и наоборот используется специальная ЭВМ.

## 2.4. Экваториальная система

Плоскость экватора Земли пересекает небесную сферу по большому кругу, называемому *небесным экватором*. Небесный экватор пересекается с горизонтом наблюдателя в точках востока

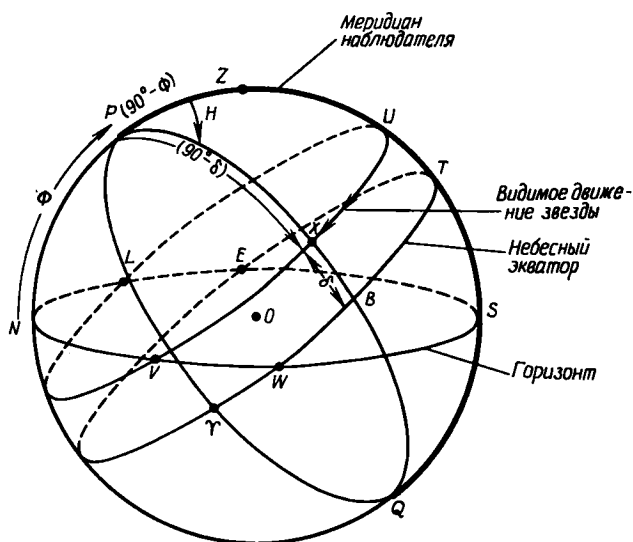


Рис. 2.4.

и запада. Поскольку угол между небесным экватором и зенитом есть широта наблюдателя, то очевидно, что высота северного полюса мира  $P$  равна широте  $\phi$  наблюдателя.

Большой полукруг, проходящий через северный  $P$  и южный  $Q$  полюсы мира, называется *меридианом*. Меридиан, проходящий через небесное тело  $X$  (большой полукруг  $PXBQ$ ), пересекает небесный экватор в точке  $B$  (рис. 2.4). Жирной линией на рис. 2.4 выделен меридиан наблюдателя  $PZTSQ$ .

Наблюдая небо, можно заметить, что все естественные небесные тела восходят на востоке, после чего их высота увеличивается до

момента прохождения через меридиан наблюдателя, а затем уменьшается вплоть до захода тела на западе. Напротив, большинство искусственных спутников в настоящее время восходят на западе и заходят на востоке, но мы не будем на этом останавливаться. На самом деле звезда описывает малый круг (образующийся при пересечении с небесной сферой плоскости, не проходящей через центр сферы), параллельный небесному экватору, причем ее движение по кругу происходит в направлении, указанном стрелкой. Такой круг называется *суточной параллелью*. Склонение звезды  $\delta$  равно ее угловому расстоянию от экватора, измеряемому вдоль меридиана звезды и выраженному в градусах. Оно отсчитывается в северном или южном направлении от экватора и изменяется от  $0$  до  $\pm 90^\circ$ , причем склонение считается положительным, если отсчитывается в северном направлении.

Таким образом, звезда пересекает меридиан в точке  $U$ , заходит в точке  $V$ , восходит в  $L$  и снова пересекает меридиан спустя 24 часа. Угол  $ZPX$  называется *часовым углом*  $H$  звезды и измеряется в западном направлении (независимо от того, в северном или южном полушарии находится наблюдатель) от меридиана наблюдателя до меридиана звезды. Этот угол может изменяться от  $0^h$  до  $24^h$  или от  $0$  до  $360^\circ$ . Следовательно, каждые звездные (сидерические) сутки часовой угол звезды увеличивается на  $24^h$  (см. разд. 2.10.1).

Если на экваторе выбрать неподвижную относительно звезд точку  $\Upsilon$ , то ее угловое расстояние от точки пересечения меридиана, проходящего через  $X$ , с экватором в противоположность часовому углу объекта  $X$  меняться не будет. Тогда положение любого светила на небесной сфере можно характеризовать его склонением и углом между меридианом светила и меридианом, проходящим через точку  $\Upsilon$ , которая называется *точкой весеннего равноденствия*. Угол между  $\Upsilon$  и точкой пересечения меридиана светила с экватором называется *прямым восхождением*  $\alpha$  тела. Прямое восхождение измеряется вдоль экватора от  $\Upsilon$  в восточном направлении и может изменяться от  $0^h$  до  $24^h$  или от  $0$  до  $360^\circ$ , т. е. прямое восхождение измеряется в направлении, противоположном направлению измерения часового угла. Это определение справедливо для наблюдателей, находящихся как в северном, так и в южном полушарии. При изображении небесной сферы рекомендуется: 1) выделять жирной линией меридиан наблюдателя, 2) указывать стрелкой на экваторе западное направление, в котором отсчитывается часовой угол, 3) указывать стрелкой на экваторе восточное направление, в котором отсчитывается прямое восхождение.

За начало экваториальной системы можно взять точку на поверхности Земли, в которой находится наблюдатель, центр Земли или центр Солнца. Тогда соответствующая небесная сфера, построенная вокруг этого начала, будет называться топоцентри-

ческой, геоцентрической или гелиоцентрической. При наблюдении звезд используются геоцентрические экваториальные координаты, причем звездные каталоги содержат прямые восхождения и склонения звезд относительно точки весеннего равноденствия и экватора, например, на эпоху 1950,0. Имея дело с орбитами планет, часто используют гелиоцентрические экваториальные координаты, а в случае орбит искусственных спутников Земли обычно обращаются к геоцентрической экваториальной небесной сфере, поскольку основной вклад в возмущающее воздействие со стороны гравитационного поля Земли вносит экваториальное вздутие Земли.

Для удаленных тел, таких, как звезды, размеры Земли пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием от Земли. Поэтому наблюдения этих тел не зависят от положения наблюдателя на поверхности Земли. В случае наблюдения планет, Солнца, Луны или космических аппаратов положение наблюдателя на поверхности Земли имеет большое значение. Направление, в котором наблюдатель видит такой объект, отличается от направления, в котором видел бы этот объект гипотетический наблюдатель, находящийся в центре Земли. В ежегоднике «Астрономические эфемериды» и других изданиях положения естественных небесных тел затабулированы по отношению к геоцентрической небесной сфере. Для перехода от геоцентрических координат к топоцентрическим необходимо вносить поправки в приводимые в справочниках значения широты и долготы объекта. Аналогичная процедура необходима и в случае вычисления положения искусственного спутника Земли. Более подробно процедура вычисления таких поправок будет обсуждаться в гл. 3.

## 2.5. Эклиптическая система

Если длительное время наблюдать за Солнцем, то можно обнаружить, что оно помимо видимого суточного движения вокруг Земли совершает также движение среди звезд в восточном направлении (в направлении увеличения прямого восхождения) со скоростью около  $1^\circ$  в сутки, возвращаясь в свое исходное положение через один год. Траектория этого движения представляет собой большой круг, называемый *эклиптикой*, который лежит в плоскости орбиты Земли вокруг Солнца. Этот большой круг является основной плоскостью эклиптической системы координат. Он пересекает небесный экватор в точках весеннего ( $\Upsilon$ ) и осеннего ( $\varpi$ ) равноденствий под углом  $23^\circ 27'$ , который обычно обозначается  $\epsilon$  и называется наклоном эклиптики. Полюс эклиптики  $K$  отстоит на такой же угол  $\epsilon$  от северного полюса мира.

Положение объекта в такой системе определяется двумя величинами: эклиптической долготой и эклиптической широтой. На рис. 2.5 дуга большого круга, проходящего через полюс

эклиптики  $K$  и небесное тело  $X$ , пересекает эклиптику в точке  $D$ . При этом *эклиптическая долгота*  $\lambda$  равняется углу между точками  $\Upsilon$  и  $D$ , измеряемому вдоль эклиптики в восточном направлении (т. е. в направлении увеличения прямого восхождения) от  $0$  до  $360^\circ$  или от  $0^h$  до  $24^h$ . Эклиптическая широта  $\beta$  измеряется в гра-

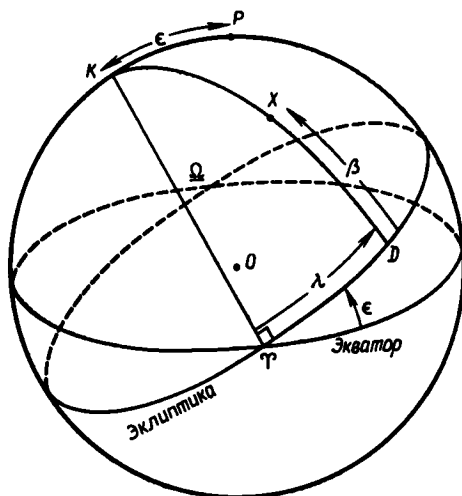


Рис. 2.5.

дусах от  $D$  до  $X$  вдоль дуги большого круга  $DX$  в пределах от  $0$  до  $90^\circ$  на север или на юг от эклиптики. Следует отметить, что  $K$  принадлежит той полусфере, в которой лежит северный небесный полюс. Надо также заметить, что эклиптическую долготу и широту часто называют *небесной долготой* и *широтой*.

За начало такой системы координат чаще всего принимают центр Земли или центр Солнца, поскольку большинство планет движется в плоскостях, наклоненных относительно эклиптики всего на несколько градусов. Особенно удобна эклиптическая система при рассмотрении межпланетных полетов.

## 2.6. Элементы орбиты в пространстве

В астрономии орбита и положение движущегося по ней тела обычно определяются шестью величинами, называемыми *элементами*. Три из них определяют ориентацию орбиты относительно координатных осей, два элемента определяют размер и форму орбиты, а шестой элемент (совместно с моментом времени) определяет положение тела на орбите в данный момент. В случае движения планеты по эллиптической орбите вокруг Солнца элементы

могут быть определены относительно небесной сферы (с центром в Солнце), эклиптики и точки весеннего равноденствия.

На рис. 2.6 плоскость орбиты пересекается с плоскостью эклиптики по линии  $NN_1$ , называемой *линией узлов*. Если планета движется по орбите  $A_1AP$  в направлении, указанном стрелкой, то  $N$  называется восходящим узлом, а  $N_1$  — нисходящим узлом. Тогда *долгота восходящего узла*  $\Omega$ , задаваемая дугой  $\gamma N$ , измеряется вдоль эклиптики от 0 до  $360^\circ$ .

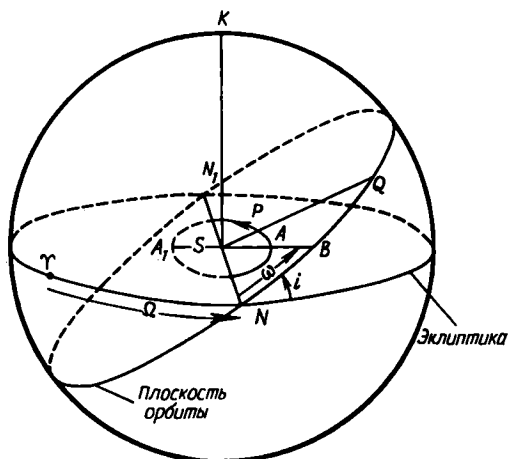


Рис. 2.6.

Вторым элементом является *наклонение*  $i$  — угол между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики. Эти два элемента определяют ориентацию плоскости орбиты в пространстве.

Третий элемент задает ориентацию орбиты в ее плоскости. На орбите каждой планеты есть точка, расположенная ближе других к Солнцу. Она называется *перигелием*. В случае эллиптической орбиты имеется, кроме того, наиболее удаленная от Солнца точка, называемая *афелием*. Орбита симметрична относительно линии, проходящей через центр Солнца и перигелий, или, в случае эллиптических орбит, относительно *линии апсид*, соединяющей перигелий  $A$  и афелий  $A_1$ . Эта линия проходит через центр Солнца  $S$ . Таким образом, направление линии апсид определяет ориентацию орбиты. Угловое расстояние от  $\gamma$  до  $N$  (т. е.  $\Omega$ ) плюс угловое расстояние  $\omega$  от  $N$  до проекции  $B$  перигелия  $A$  на небесную сферу называется *долготой перигелия*  $\tilde{\omega}$  ( $= \Omega + \omega$ ). Заметим, что долгота перигелия измеряется вдоль эклиптики от  $\gamma$  до  $N$ , а затем вдоль линии пересечения плоскости орбиты с небесной сферой до точки  $B$ .

Следующие два элемента зависят от типа орбиты. В дальнейшем будет показано (см. гл. 4), что орбита тела, движущегося относи-

тельно другого тела под действием силы взаимного притяжения, является коническим сечением (т. е. эллипсом, параболой или гиперболой), фокус которого совпадает со вторым телом. Будем считать, что орбита эллиптическая. Тогда двумя элементами орбиты, определяющими ее размер и форму, являются *большая полуось* и *эксцентриситет*. У эллипса, изображенного на рис. 2.7, большая ось равна расстоянию  $AA'$ . Большая полуось  $a$  равна половине этого расстояния и определяет размер орбиты.

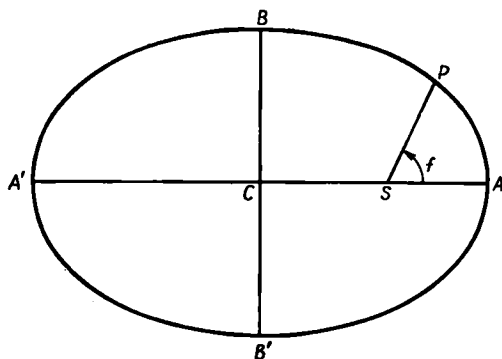


Рис. 2.7.

Эксцентриситет  $e$  представляет собой меру отклонения эллипса от окружности. Он связан с расстоянием между фокусом  $S$  и центром  $C$  эллипса соотношением

$$CS = ae.$$

Шестым элементом является *момент прохождения перигелия*  $\tau$  — эпоха, в которую тело находилось в перигелии. Эта эпоха вместе с моментом времени определяет положение тела на орбите в данный момент.

Таким образом, шесть элементов  $\Omega$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $i$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\tau$  (вместе со временем) определяют орбиту и положение тела на ней.

В работах, посвященных орбитальному движению, часто используется *истинная аномалия*  $f$  — угол с вершиной в фокусе  $S$  между направлением на перигелий и радиусом-вектором тела  $SP$ .

Если в качестве основной плоскости системы координат взять экваториальную плоскость, то величины  $\Omega$ ,  $\tilde{\omega}$  и  $\tau$  изменятся, а величины  $a$ ,  $e$  и  $\tau$  останутся теми же, что и прежде.

Если тело является спутником Земли, то основной плоскостью будет экваториальная плоскость и долгота восходящего узла совпадает с прямым восхождением восходящего узла. При этом роль долготы перигелия будет играть аргумент перигея (перигей —



ближайшая к центру Земли точка орбиты) — величина, равная углу между направлениями на перигей и на восходящей узел.

Если тело — спутник планеты, то в качестве координатной плоскости может быть выбрана эклиптика, экваториальная плоскость планеты, плоскость, в которой происходит орбитальное движение планеты вокруг Солнца, или плоскость, называемая «собственной плоскостью», в которой происходит регрессия узлов (см. гл. 5). Ближайшая к планете точка орбиты тела называется перицентром. Для ее обозначения иногда используют также название планеты с приставкой «пери».

## 2.7. Прямоугольные системы координат

Во многих задачах астрономии и астронавтики положения вычисляются в прямоугольных координатах. Существует целый ряд таких систем координат.

Если основная плоскость (плоскость эклиптики или экватора) выбрана, то ось  $x$  можно направить из центра тела, вокруг которого происходит вращение, в сторону точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , ось  $y$  провести в основной плоскости под углом  $90^\circ$  к оси  $x$ , а ось  $z$  направить перпендикулярно основной плоскости так, чтобы три оси образовали правую тройку.

В некоторых задачах за начало координат принимается центр масс системы тел. Такая система координат называется барицентрической.

## 2.8. Системы координат, связанные с плоскостью орбиты

Часто бывает удобно брать такую прямоугольную систему координат, оси которой параллельны или перпендикулярны плоскости орбиты тела, а начало координат совпадает с центром Солнца или планеты, вокруг которой тело обращается. Приведем различные варианты таких систем, полагая, что тело движется вокруг Солнца.

Ось  $x$  направлена в сторону восходящего узла  $N$ , ось  $y$  лежит в плоскости орбиты под углом  $90^\circ$  к оси  $x$ , а ось  $z$  проводится перпендикулярно плоскости орбиты, причем так, чтобы три оси образовали правую тройку (см. рис. 2.8).

Другая полезная система координат строится так: ось  $\xi$  проводится вдоль линии, соединяющей Солнце с перигелием, ось  $\eta$  — в плоскости орбиты под прямым углом к оси  $\xi$ , ось  $\zeta$  — перпендикулярно к первым двум осям.

Третья система такова: ось  $X$  проходит через тело, ось  $Y$  — в плоскости орбиты под прямым углом к оси  $X$ , ось  $Z$  — как обычно,

перпендикулярно плоскости орбиты. Поскольку тело движется по орбите, система является вращающейся. Она используется при исследовании возмущающих сил, действующих на тело.

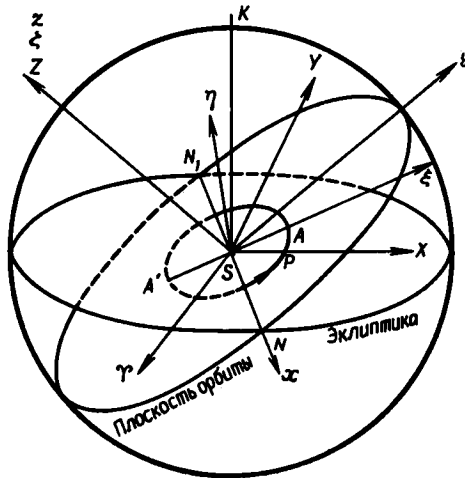


Рис. 2.8.

## 2.9. Преобразование систем координат

Часто требуется осуществить переход от одной системы координат к другой. При этом иногда наряду с поворотом осей совершается также перенос начала отсчета, но чаще начало отсчета остается неизменным.

Одни преобразования легче проводить с использованием формул сферической тригонометрии. Другие оказываются проще, если воспользоваться векторными методами.

### 2.9.1. Основные формулы сферической тригонометрии

Геометрия на сфере оперирует с большими кругами, малыми кругами и их дугами. Расстояния вдоль этих кругов измеряются как углы, поскольку радиус сферы для удобства принимается равным единице.

*Большой круг* получается в результате пересечения с поверхностью сферы плоскости, проходящей через центр сферы.

Если плоскость не проходит через центр сферы, то в результате ее пересечения со сферой получается *малый круг*.

*Полюсами* большого круга называются две точки на сфере, расстояние которых от любой точки большого круга равно  $90^\circ$ .

На рис. 2.9 полюсы большого круга  $FCD$  обозначены буквами  $P$  и  $Q$ . Очевидно, линия, соединяющая полюсы, пересекается с плоскостью большого круга в центре сферы и образует с этой плоскостью прямую угол.

Два больших круга образуют в точке пересечения *сферический угол*, который определяется как угол между касательными к боль-

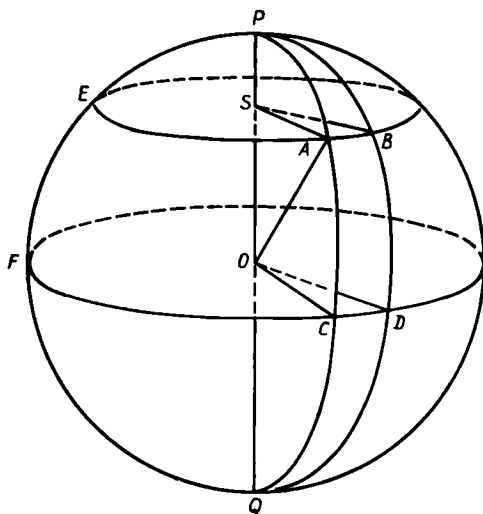


Рис. 2.9.

шим кругам в точке их пересечения. Сферический угол определяется *только* по отношению к двум пересекающимся большим кругам.

Замкнутая фигура, образованная дугами трех больших кругов, называется *сферическим треугольником*, если она обладает следующими свойствами:

- 1) Сумма любых двух сторон больше третьей стороны.
- 2) Сумма трех углов больше  $180^\circ$ .
- 3) Каждый сферический угол меньше  $180^\circ$ .

Длина дуги малого круга связана простым соотношением с длиной дуги такого большого круга, плоскость которого параллельна плоскости малого круга.

На рис. 2.9 полюс  $P$  большого круга  $FCD$  является также полюсом малого круга  $EAB$ , плоскость которого параллельна плоскости большого круга  $FCD$ . Если провести большие круги через  $P$  и концы  $A$  и  $B$  дуги малого круга, то они пересекутся с большим кругом в точках  $C$  и  $D$ . Легко показать, что

$$AB = CD \cos AC.$$

При этом надо помнить, что стороны измеряются как углы, а радиус сферы равен единице. В качестве примера использования этой формулы можно рассмотреть вопрос о том, насколько удалены друг от друга два пункта на поверхности Земли, если они расположены на одной широте, а расстояние измеряется вдоль параллели. Предположим в данном примере, что Земля сферическая. На рис. 2.9 точки  $A$  и  $B$  обозначают наши пункты. Угол  $AOC$  — это широта  $\phi$ , так что

$$AC = BD = \phi.$$

Если долгота  $A$  равна  $\lambda_A W$ , а долгота  $B$  —  $\lambda_B W$ , то их разность равна  $\lambda_A W - \lambda_B W$  и

$$CD = \angle COD = \lambda_A - \lambda_B.$$

Тогда

$$AB = CD \cos AC,$$

или, иначе, искомое расстояние равно разности долгот, умноженной на косинус широты. Расстояние по поверхности Земли в таких задачах обычно измеряют в морских милях. Морская миля равна длине дуги большого круга на поверхности Земли, соответствующей углу  $1'$ . На самом деле поверхность Земли не является абсолютно сферической. Поэтому длина морской мили непостоянна, и в качестве единицы практически используется ее среднее значение, равное 1,852 км.

Разность долгот можно выразить в дуговых минутах. Число дуговых минут равно числу морских миль. Таким образом, воспользовавшись приведенной выше формулой, можно вычислить расстояние между пунктами.

Заметим, что при вычислении разности долгот восточную долготу следует брать с противоположным знаком по отношению к западной долготу.

На рис. 2.10 изображен сферический треугольник  $ABC$ , стороны которого  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  имеют длины  $c$ ,  $a$  и  $b$  соответственно.

В астрономии и астродинамике обычно используются четыре формулы, связывающие величины сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с углами  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

1) Формула косинусов

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Эта формула имеет еще две разновидности, а именно:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

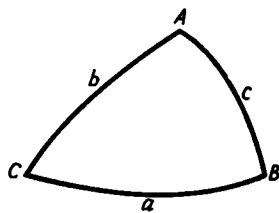


Рис. 2.10.

## 2) Формула синусов

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Ею следует пользоваться с осторожностью, ибо если, например, заданы  $a$ ,  $b$  и  $B$ , то, не располагая дополнительной информацией, мы не можем решить, какое из двух значений,  $A$  или  $(180^\circ - A)$  является верным.

## 3) Аналог формулы косинусов

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

У этой формулы есть пять разновидностей.

4) Формула, связывающая четыре последовательных элемента сферического треугольника:

$$\cos a \cos C = \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B.$$

Эта формула также имеет пять разновидностей.

Доказательство приведенных здесь, а также ряда других формул можно найти в книге Смарта [4], включенной в список литературы в конце главы.

## 2.9.2. Примеры преобразований систем координат

*Пример 1.* Вычислим на геоцентрической небесной сфере часовой угол  $H$  и склонение  $\delta$  тела, имеющего азимут (измеряемый в восточном направлении от точки севера)  $A$  и высоту  $a$ . При этом будем считать, что широта наблюдателя равна  $\phi$ .

На рис. 2.11 показана соответствующая небесная сфера, на которой  $X$  обозначает положение тела, а остальные символы имеют обычные значения.

Теорема косинусов, примененная к сферическому треугольнику  $PZX$ , дает

$$\sin \delta = \sin \phi \sin a + \cos \phi \cos a \cos A.$$

Отсюда можно вычислить  $\delta$ . Воспользовавшись теоремой косинусов еще раз, получаем

$$\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$$

или

$$\cos H = \frac{\sin a - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta},$$

откуда находим  $H$ , так как  $\delta$  уже известно.

С другой стороны, используя формулу, связывающую четыре величины  $(90^\circ - a)$ ,  $(360^\circ - A)$ ,  $(90^\circ - \phi)$  и  $H$ , получаем

$$\sin \phi \cos A = \cos \phi \operatorname{tg} a + \sin A \operatorname{ctg} H$$

или

$$\operatorname{tg} H = \frac{\sin A}{\sin \phi \cos A - \cos \phi \operatorname{tg} a}.$$

**Пример 2.** Считая, что наклонение эклиптики равно  $\epsilon$ , преобразуем эклиптические координаты (небесную долготу  $\lambda$  и небесную широту  $\beta$ ) космического аппарата в геоцентрические экваториальные координаты (прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$ ).

Как показано на рис. 2.12, в сферическом треугольнике  $KPX$  ( $X$  — положение космического аппарата на небесной сфере) содержится вся необходимая информация. Воспользовавшись по

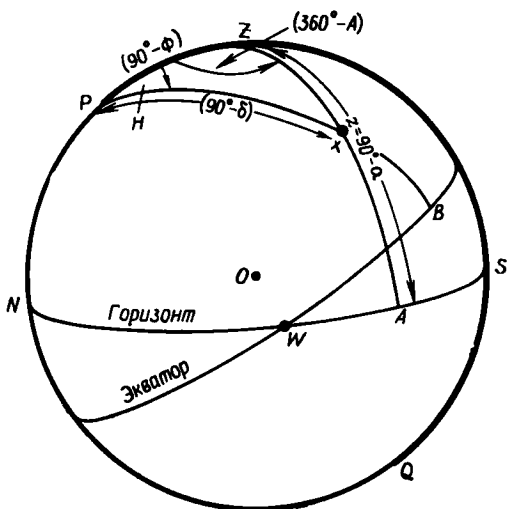


Рис. 2.11

очереди теоремой косинусов, теоремой синусов и аналогом теоремы косинусов, получаем

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda, \quad (2.1)$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda, \quad (2.2)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda, \quad (2.3)$$

откуда можно найти  $\alpha$  и  $\delta$ .

Читателю предлагается в качестве упражнения провести преобразования, обратные рассмотренным в примерах 1 и 2.

**Пример 3.** По известным гелиоцентрическим прямоугольным координатам космического аппарата, обращающегося вокруг Солнца, определим его геоцентрическое расстояние  $\rho$ , прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$ .

На этом примере будет проиллюстрирован ряд важных принципов. Для наблюдения аппарата с Земли или связи с ним в заданный момент времени нужно знать геоцентрические прямое восхождение, склонение и удаление аппарата. С другой стороны, меж-

планетный космический аппарат движется по орбите вокруг Солнца, а элементы такой орбиты определяются в гелиоцентрической системе. Зная элементы и время, можно определить прямоугольные координаты в системе с началом в центре Солнца. Ниже мы увидим, как это делается (см. гл. 4). В настоящем примере мы будем предполагать, что основой прямоугольной системы координат служат эклиптика и направление на  $\Upsilon$ , и покажем, как эти прямоугольные координаты можно преобразовать в геоцентрическое расстояние, прямое восхождение и склонение. В астрономии такое преобразование является стандартной процедурой. Обратная задача определения элементов орбиты по измерениям прямого восхождения и склонения тела также является стандартной процедурой. Однако она сложнее и будет рассмотрена позже.

Задача решается в несколько этапов:

1) осуществляется переход от гелиоцентрической эклиптической прямоугольной системы координат к гелиоцентрической экваториальной прямоугольной системе;

2) от гелиоцентрической экваториальной прямоугольной системы переходим к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе;

3) геоцентрические экваториальные прямоугольные координаты преобразуем в геоцентрическое расстояние, прямое восхождение и склонение.

Эти преобразования проводятся следующим образом:

1) На рис. 2.13  $V$  обозначает положение аппарата относительно Солнца  $S$ . Относительно осей  $S\Upsilon$ ,  $SB$ ,  $SK$  (образующих прямоугольную систему) аппарат имеет координаты  $(x, y, z)$  так, что справедливо соотношение

$$SV = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

$SA$  ( $A$  — перигелий) пересекается со сферой в точке  $A_1$ , а  $SV$  — в точке  $Q$ . Тогда имеем

$$\Upsilon N = \Omega, NA_1 = \omega, A_1Q = f.$$

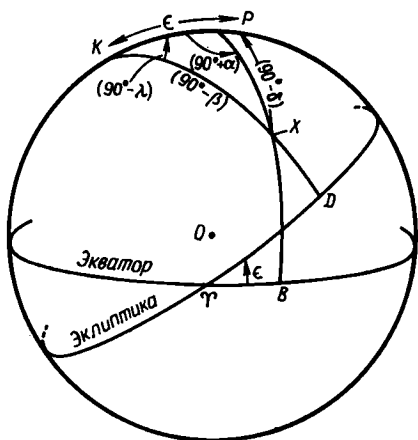


Рис. 2.12.

В силу теоремы косинусов, примененной к сферическому треугольнику  $Q\Upsilon N$ , в котором угол  $\Upsilon NQ$  равен  $180^\circ - i$ , получаем

$$\cos \Upsilon Q = \cos \Omega \cos (\omega + f) - \sin \Omega \sin (\omega + f) \cos i.$$

Однако

$$x/r = \cos \Upsilon Q,$$

следовательно,

$$x = r [\cos \Omega \cos (\omega + f) - \sin \Omega \sin (\omega + f) \cos i]. \quad (2.4)$$

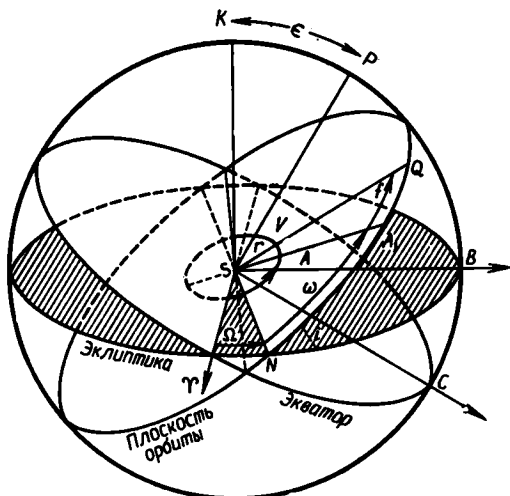


Рис. 2.13.

Аналогично, применяя теорему косинусов к треугольнику  $QNB$  и вспоминая, что

$$y/r = \cos BQ,$$

получаем

$$y = r [\sin \Omega \cos (\omega + f) + \cos \Omega \sin (\omega + f) \cos i]. \quad (2.5)$$

Наконец, применение теоремы косинусов к треугольнику  $QKN$  дает

$$z = r \sin (\omega + f) \sin i. \quad (2.6)$$

Чтобы перейти к гелиоцентрическим экваториальным прямоугольным координатам, заметим, что новые оси  $S\Upsilon$ ,  $SC$  и  $SP$  обладают следующими свойствами: ось  $SC$  лежит в экваториальной плоскости под углом  $90^\circ$  к  $S\Upsilon$ , а ось  $SP$  перпендикулярна этой плоскости и направлена так, что три оси образуют правую тройку. Тогда новые оси  $SC$  и  $SP$  получаются из старых осей  $SB$  и  $SK$  поворотом последних вокруг  $S$  на угол  $\epsilon$ . Если гелиоцентрические



эквиаториальные прямоугольные координаты аппарата обозначить  $(x', y', z')$ , то

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y \cos \epsilon - z \sin \epsilon, \\z' &= y \sin \epsilon + z \cos \epsilon.\end{aligned}$$

Используя уравнения (2.4), (2.5) и (2.6), получаем

$$x' = r [\cos (\omega + f) \cos \Omega - \sin (\omega + f) \sin \Omega \cos i], \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}y' &= r [\cos (\omega + f) \sin \Omega \cos \epsilon + \\&+ (\cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon) \sin (\omega + f)], \quad (2.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z' &= r [\cos (\omega + f) \sin \Omega \sin \epsilon + \\&+ (\cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon) \sin (\omega + f)]. \quad (2.9)\end{aligned}$$

Введем ряд вспомогательных углов так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \Omega, \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega, \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \epsilon, \\ \sin b \cos B &= \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon, \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \epsilon, \\ \sin c \cos C &= \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon.\end{aligned}$$

Тогда уравнения (2.7), (2.8) и (2.9) принимают вид

$$\begin{aligned}x' &= r \sin a \sin (A + \omega + f), \\ y' &= r \sin b \sin (B + \omega + f), \\ z' &= r \sin c \sin (C + \omega + f).\end{aligned} \quad (2.10)$$

Этими формулами удобно пользоваться, если нужно вычислять прямоугольные координаты аппарата в нескольких положениях. Вспомогательные величины  $a, A, b, B, c, C$  являются функциями только элементов  $\Omega, i$  и  $\epsilon$ ; поэтому их можно вычислить один раз для всех положений. Переменные же  $r$  и  $f$  должны вычисляться для каждого положения (способ их вычисления будет описан позднее — см. гл. 4). Следует, однако, заметить, что  $\Omega, i$  и  $\omega$  являются постоянными только в том случае, когда на аппарат не действуют никакие возмущения. Фактически такая ситуация наблюдается в большинстве межпланетных полетов на пассивных участках траектории.

2) Теперь начало координат переносится из центра Солнца в центр Земли. На рис. 2.14  $E$  — Земля,  $S$  — Солнце,  $S^{\gamma}, SC$  и  $SP$  — оси гелиоцентрической экваториальной системы координат.

нат,  $EY'$ ,  $EC'$  и  $EP'$  — оси геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат, плоскость  $Y'EC'$  — плоскость земного экватора. Пусть  $(\xi, \eta, \zeta)$  — координаты аппарата  $V$  относительно геоцентрических осей, так что

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad (2.11)$$

а  $(x_1, y_1, z_1)$  — гелиоцентрические экваториальные координаты Земли. Тогда

$$\xi = x' - x_1,$$

$$\eta = y' - y_1,$$

$$\zeta = z' - z_1.$$

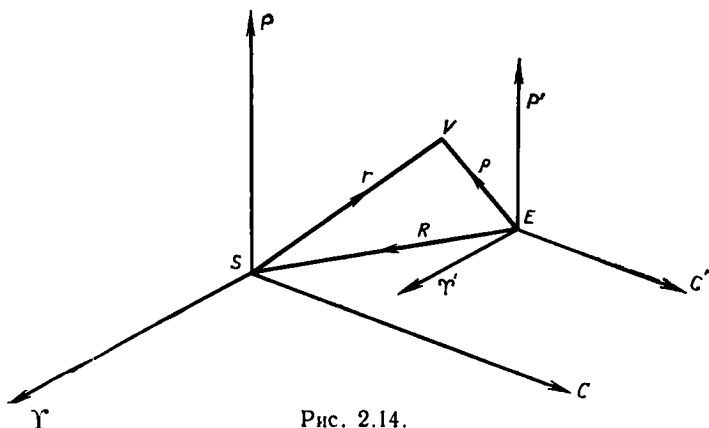


Рис. 2.14.

Если через  $(X, Y, Z)$  обозначить геоцентрические экваториальные координаты Солнца, то

$$\xi = x' + X,$$

$$\eta = y' + Y,$$

$$\zeta = z' + Z,$$

(2.12)

так как

$$X = -x_1, Y = -y_1, Z = -z_1. \quad (2.13)$$

Координаты Солнца  $(X, Y, Z)$  затабулированы в «Астрономических эфемеридах» и других ежегодниках. С другой стороны,  $x_1, y_1, z_1$  получаются по элементам орбиты Земли, причем, поскольку орбита лежит в плоскости эклиптики, ее наклонение равно нулю. Обозначим эти элементы  $\Omega_1$  и  $\tilde{\omega}_1$  ( $\tilde{\omega}_1 = \Omega_1 + \omega_1$  — долгота перигелия орбиты Земли). Тогда из (2.10) получаем

$$x_1 = r_1 \cos(\tilde{\omega}_1 + f_1),$$

$$y_1 = r_1 \sin(\tilde{\omega}_1 + f_1) \cos \epsilon,$$

$$z_1 = r_1 \sin(\tilde{\omega}_1 + f_1) \sin \epsilon.$$

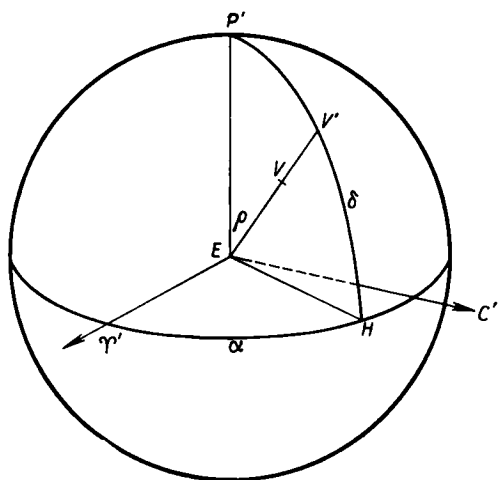


Рис. 2.15.

Входящие сюда значения радиуса-вектора  $r_1$  и истинной аномалии  $f_1$  могут быть вычислены для любого момента времени  $t$ .

3) На рис. 2.15 изображена геоцентрическая небесная сфера и меридиан  $P'V'H$ , проведенный через проекцию на небесной сфере  $V'$  точки  $V$  (геоцентрического положения аппарата).

Тогда

$$\xi = \rho \cos VE\Upsilon' = \rho \cos V'E\Upsilon',$$

т. е.

$$\xi = \rho \cos V'\Upsilon'.$$

Аналогично

$$\eta = \rho \cos V'C'$$

и

$$\zeta = \rho \cos V'P'.$$

Применяя к сферическому треугольнику  $\Upsilon'V'H$  (имеющему при вершине  $H$  прямой угол) теорему косинусов, получаем три соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \alpha \cos \delta, \\ \eta &= \rho \sin \alpha \cos \delta, \\ \zeta &= \rho \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

после чего, воспользовавшись уравнениями (2.10), (2.12) и (2.14), находим

$$\rho \cos \alpha \cos \delta = X + r \sin a \sin (A + \omega + f), \quad (2.15)$$

$$\rho \sin \alpha \cos \delta = Y + r \sin b \sin (B + \omega + f), \quad (2.16)$$

$$\rho \sin \delta = Z + r \sin c \sin (C + \omega + f). \quad (2.17)$$

Мы видели, что если элементы орбиты аппарата известны, то правые части уравнений (2.15), (2.16) и (2.17) могут быть вычислены для любого момента времени, поскольку значения  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  известны (они содержатся в «Астрономических эфемеридах»).

Таким образом, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y + r \sin b \sin (B + \omega + f)}{X + r \sin a \sin (A + \omega + f)},$$

откуда можно получить  $\alpha$ .

Точно так же из выражения

$$\operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} \alpha = \frac{Z + r \sin c \sin (C + \omega + f)}{Y + r \sin b \sin (B + \omega + f)}$$

определяется  $\delta$ , а  $\rho$  равно квадратному корню из суммы квадратов правых частей уравнений (2.15), (2.16) и (2.17).

## 2.10. Галактическая система координат

При исследовании распределения и движения тел в Галактике было бы нелепо пользоваться системами координат, привязанными к экватору или эклиптике. Тот факт, что Галактика имеет форму

линзы, вблизи плоскости симметрии которой находится Солнце, наводит на мысль, что эту плоскость удобно взять в качестве основы системы координат.

Вещество, из которого состоит Галактика (звезды, космическая пыль и газ) распределено симметрично по обе стороны от галактического экватора  $LNA$  (рис. 2.16). Большой круг галактического экватора пересекается с небесным экватором в двух точках  $N$  и  $N'$ . Первая точка называется *восходящим узлом*, вторая — *нисходящим узлом*, поскольку тело, дви-

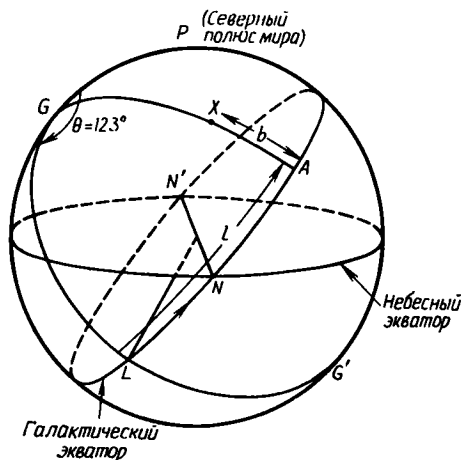


Рис. 2.16.

жущееся вдоль галактического экватора в направлении увеличения прямого восхождения, при пересечении точки  $N$  поднимается из южного полушария неба в северное, а в точке  $N'$  переходит из северного полушария в южное. По определению северный и южный галактические полюсы  $G$  и  $G'$  лежат соответственно в северном и южном полушариях. Каждое тело  $X$  ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) имеет галактическую долготу и широту.

До 1959 г. нулевой точкой, от которой отсчитывалась галактическая долгота, считался восходящий узел  $N$  (система Олсона); затем в качестве такой точки стали брать  $L$  — точку пересечения галактического экватора с большим полукругом  $GLG'$ , для которого позиционный угол  $\theta = PGL = 123^\circ$ . Направление на определенную таким образом точку  $L$  совпадает с гелиоцентрическим направлением на центр Галактики. Тогда галактическая долгота объекта  $X$ , обозначаемая  $l$ , измеряется вдоль галактического экватора от точки  $L$  до основания меридиана, проведенного из  $G$  через  $X$ , в направлении увеличения прямого восхождения от  $0$  до  $360^\circ$ . Следовательно,  $l = LNA$ , а угол  $PGX$  равен  $360^\circ - \theta + l$ .

Галактическая широта объекта  $X$  (обозначается  $b$ ) равна угловому расстоянию тела от галактического экватора, отсчитываемому вдоль меридиана, проходящего через северный галактический полюс и объект, в северном или южном направлении от  $0$  до  $90^\circ$ . Следовательно,  $b = AX$  (северная широта).

Чтобы различать величины в системе Олсона и в системе Международного астрономического союза (МАС), обычно пользуются индексами I и II. Так, например, галактический полюс в системе МАС ( $b^{\text{II}} = 90^\circ$ ) имеет координаты

$$\alpha = 12^{\text{h}} 49,0^{\text{m}}, \delta = +27^\circ 24, 0' \text{ (эпоха 1950),}$$

$$\alpha = 12^{\text{h}} 46,6^{\text{m}}, \delta = +27^\circ 40,0' \text{ (эпоха 1900),}$$

а в системе Олсона ( $l = 90^\circ$ )

$$\alpha = 12^{\text{h}} 40^{\text{m}}, \delta = +28,0^\circ \text{ (эпоха 1900).}$$

## 2.11. Измерение времени

У первобытного человека понятие времени связывалось с ростом чувства голода или жажды или с такими явлениями природы, как изменение в течение суток высоты Солнца, последовательные фазы Луны и смена времен года. Примерно за 2000 лет до нашей эры наиболее цивилизованные народы стали вести наблюдения природных явлений и ввести систематизацию времени по суткам, месяцам и годам. В качестве основной единицы времени был выбран год, так как в результате наблюдений было обнаружено, что Солнце за этот промежуток времени совершает полный оборот по звездному небу.

Поскольку повседневная жизнь тесно связана с дневным светом, то Солнце и стало тем телом, к которому была привязана система измерения времени, использующая в качестве единицы сутки. Истинные солнечные сутки равняются промежутку времени между последовательными прохождениями Солнца через меридиан наблюдателя или времени, в течение которого часовой угол Солнца увеличивается на  $24^{\text{h}}$  ( $360^\circ$ ). На практике было за-

мечено, что Солнце проходит меридиан в тот момент, когда вертикальный столб отбрасывает самую короткую тень.

С другой стороны, видимое суточное вращение небесного свода позволяет ввести другую систему счета времени, называемую звездным временем. Эта система построена на вращении Земли вокруг своей оси. Интервал между двумя последовательными прохождениями звезды через меридиан наблюдателя называется звездными сутками. Уже в начале развития астрономии было выяснено, что различие между двумя системами счета времени —

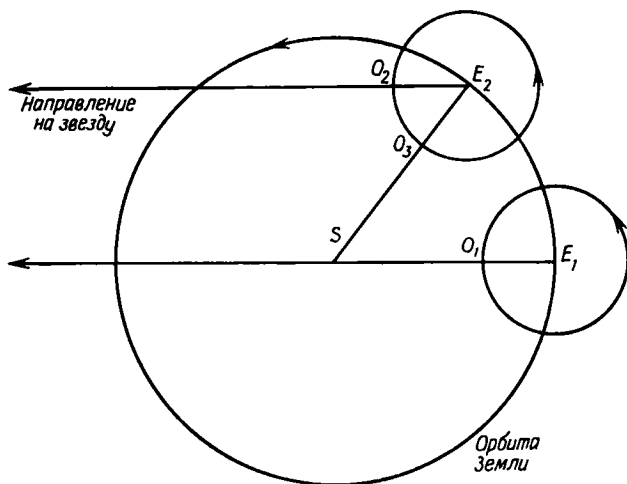


Рис. 2.17.

солнечной и звездной — вызвано движением Солнца относительно Земли. За звездные сутки, которые определяются двумя последовательными прохождениями звезды через меридиан наблюдателя, наблюдатель  $O$  вместе с Землей повернется на  $360^\circ$  и перейдет из точки  $O_1$  в  $O_2$  (см. рис. 2.17). При этом считается, что звезда находится на бесконечном расстоянии от Земли. Однако для того, чтобы промежуток времени равнялся одним истинным солнечным суткам, Земля ( $E$ ) должна повернуться настолько, чтобы наблюдатель оказался в положении  $O_3$ , где Солнце ( $S$ ) снова находится на меридиане наблюдателя. Поскольку радиус-вектор Земли  $SE$  поворачивается за сутки приблизительно на  $1^\circ$ , а Земля вращается с угловой скоростью около  $1^\circ$  за 4 мин, то звездные сутки примерно на 4 мин короче, чем средние солнечные сутки.

В последующих разделах эти системы счета времени будут обсуждаться более подробно.

### 2.11.1. Звездное время

За начало отсчета на вращающейся небесной сфере выбирается точка весеннего равноденствия  $\Upsilon$ . С ее помощью определяются *звездные сутки*, равные промежутку времени между двумя последовательными моментами прохождения точки весеннего равноденствия через меридиан наблюдателя. Часовой угол точки весеннего равноденствия увеличивается от  $0^h$  до  $24^h$ , так что *местное звездное время* (LST) определяется как часовой угол точки весеннего равноденствия. Это время зависит от долготы  $\lambda$  точки наблюдения на поверхности Земли.

Как показано на рис. 2.18, если  $X$  обозначает небесный объект, то его прямое восхождение (RA) равно  $\alpha$ , а часовой угол (HA) равен  $H$ . Тогда местное звездное время равно сумме часового угла и прямого восхождения объекта:

$$\text{LST} = \text{HA}(X) + \text{RA}(X). \quad (2.18)$$

Это важное соотношение справедливо для любого небесного объекта — Солнца, Луны, планеты, звезды, космического аппарата и т. д.

Если звездное время известно, а прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  тела для этого момента вычислены, то мы можем узнать часовой угол  $H$  и склонение  $\delta$ , определяющие положение тела  $X$  на небесной сфере, для любого последующего момента времени.

В обсерваториях обычно имеются часы, измеряющие звездное время для своего меридиана. Поскольку в момент прохождения звезды через меридиан наблюдателя часовой угол звезды равен нулю, ее прямое восхождение  $\alpha$  в этот момент равно местному звездному времени. Отмечая значения звездного времени при прохождении хорошо известных звезд через меридиан и сравнивая их с прямыми восхождениями, можно проконтролировать поправку и ход часов. Такие звезды называют «часовыми звездами», а их наблюдения являются частью текущей работы любой обсерватории.

Кроме того, в «Астрономических эфемеридах» для часто встречающихся эпох всемирного времени (см. разд. 2.11.2) затабулировано *гринвичское звездное время* (GST). Как показано на рис. 2.19,

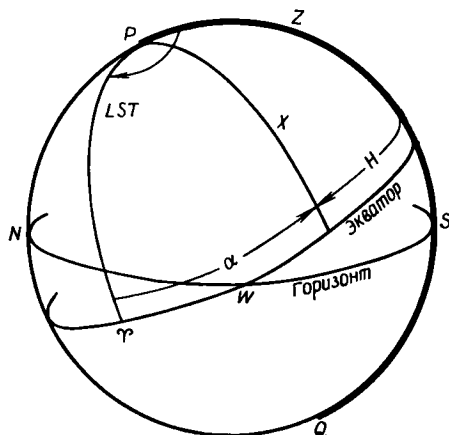


Рис. 2.18.

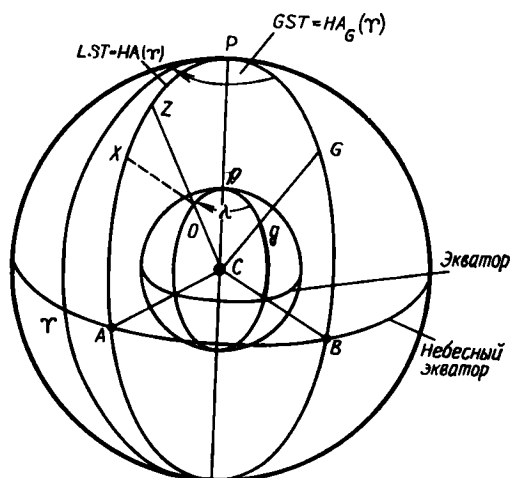


Рис. 2.19.

промежуток времени между прохождением небесного тела через гринвичский меридиан и через меридиан места наблюдения равен долготе места наблюдения. На этом рисунке изображена геоцентрическая небесная сфера (северный полюс мира обозначен  $P$ ) и Земля (северный полюс —  $p$ ), Гринвич ( $g$ ) и его зенит ( $G$ ). Меридиан, проходящий через  $G$  (т. е.  $PGB$ ) является гринвичским меридианом. Наблюдатель расположен в точке  $O$ , имеющей долготу  $\lambda$ ; зенит  $Z$  этой точки определяет меридиан наблюдателя  $PZA$ . Точка весеннего равноденствия обозначена  $\Upsilon$ , а небесное тело в данный момент находится в точке  $X$ .

Гринвичский часовой угол  $GPX$  точки  $X$  равен долготе наблюдателя  $\lambda$ .

Гринвичский часовой угол точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , т. е. угол  $GP\Upsilon$ , обозначается  $HA_G(\Upsilon)$  и равен часовому углу  $XP\Upsilon$  плюс долгота наблюдателя  $\lambda$ . Другими словами,

$$HA_G(\Upsilon) = HA(\Upsilon) + \lambda.$$

Часовой угол точки  $\Upsilon$  равен местному звездному времени. Поэтому можно записать

$$GST = LST + \lambda. \quad (2.19)$$

Если вместо  $\Upsilon$  имеется некоторый небесный объект  $*$ , то

$$HA_G(*) = HA(*) + \lambda. \quad (2.20)$$

Этот результат так же важен, как уравнения (2.18) и (2.19). Легко увидеть, что восточная долгота входит в формулы со знаком минус.



### 2.11.2. Среднее солнечное время

Если при помощи точных звездных часов измерять продолжительность истинных солнечных суток (промежутков времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через меридиан наблюдателя), то окажется, что в течение года она изменяется. Это происходит по двум основным причинам:

1) Видимая орбита Солнца вокруг Земли является эллипсом, на котором равные углы замечаются радиусом-вектором, соединяющим Солнце и Землю, за разные времена.

2) Траектория видимого движения Солнца лежит в плоскости эклиптики, которая наклонена к экватору (вдоль которого измеряется часовой угол Солнца) под углом приблизительно  $23\frac{1}{2}^\circ$ .

Чтобы получить среднее солнечное время, астрономам приходится учитывать указанные нерегулярности. При этом они поступают следующим образом:

1) Вводится фиктивное тело, называемое *средним эклиптическим солнцем*, которое одновременно с Солнцем выходит из перигея, движется в плоскости эклиптики со средней угловой скоростью Солнца (среднее движение) и одновременно с Солнцем возвращается в перигей.

2) В момент, когда среднее эклиптическое солнце, двигаясь в плоскости эклиптики, достигает точки весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , начинает движение второе фиктивное тело, называемое *средним экваториальным солнцем*. Оно движется вдоль экватора со скоростью, равной среднему движению Солнца, и возвращается в точку  $\Upsilon$  одновременно со средним эклиптическим солнцем.

Поскольку прямое восхождение среднего экваториального солнца увеличивается с постоянной скоростью примерно на  $1^\circ$  в сутки, а его часовой угол за одни сидерические сутки увеличивается на  $24^h$ , то время между последовательными прохождениями среднего экваториального солнца через меридиан наблюдателя является величиной постоянной. Этот интервал называется *средними солнечными сутками*.

Между звездным временем и средним солнечным временем существует следующая связь:

1 средние солнечные сутки =  $24^h 03^m 56,5554^s$  звездного времени,  
1 звездные сутки =  $23^h 56^m 04,0905^s$  среднего солнечного времени.

В «Астрономических эфемеридах» и других ежегодниках печатаются таблицы перевода среднего солнечного времени в звездное время и наоборот.

Для связи положения среднего солнца с положением истинного солнца служит величина, называемая *уравнением времени*, равная разности часового угла Солнца ( $\odot$ ) и часового угла среднего солнца (MS), т. е.

$$E = \text{HA}(\odot) - \text{HA}(\text{MS}). \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.18) следует, что

$$E - RA (MS) - RA (\odot). \quad (2.22)$$

Уравнение времени  $E$  связано с моментами кульминации  $T$ , затабулированными в «Астрономических эфемеридах» на каждый день года, соотношением

$$E = 12^h - T.$$

Гринвичское среднее время GMT или всемирное время UT связано со средним солнечным временем следующим образом:

$$GMT = HA_G (MS) \pm 12^h. \quad (2.23)$$

В уравнении (2.23) подразумевается, что начало гражданских суток соответствует средней полночи. Всемирное время UT представляет собой удобную систему отсчета времени и применяется в большинстве обсерваторий во всем мире. Однако в повседневной жизни используется поясная система счета времени, при которой поверхность Земли делится на часовые пояса.

Время, которое показывают часы, установленные в соответствии с этой системой, связано с положением Солнца на небе только приблизительно. В то же время такая система избавляет движущегося наблюдателя от необходимости непрерывно подводить свои часы.

В пределах каждого пояса используется одно и то же гражданское время, называемое *поясным временем* (ZT). Границы поясов проходят по меридианам, причем ширина каждого пояса равна  $15^\circ$  ( $1^h$ ). Гринвичский пояс (пояс 0) ограничен меридианами  $0^h 30^m W$  и  $0^h 30^m E$ , а время в нем соответствует времени гринвичского меридиана, т. е. GMT (UT). Границами пояса  $+1$  являются меридианы  $1^h 30^m W$  и  $0^h 30^m W$ ; время в нем соответствует времени меридиана  $1^h W$ . Аналогично время в поясе  $-1$ , ограниченном меридианами  $1^h 30^m E$  и  $0^h 30^m E$ , соответствует меридиану  $1^h E$ . Двигаясь таким образом в восточном и западном направлении, мы разделим всю поверхность Земли на пояса вплоть до поясов  $+12$  и  $-12$ . Очевидно, в обоих этих поясах время будет соответствовать меридиану  $12^h W$  или, что то же самое, меридиану  $12^h E$ . По соглашению пояс между  $11^h 30^m W$  и  $12^h W$  является поясом  $+12$ , а пояс между  $11^h 30^m E$  и  $12^h E$  — поясом  $-12$ . Разделяющий их меридиан называется международной линией перемены даты. Здесь раньше всего начинаются текущие сутки.

Следует заметить, что по географическим причинам действительная линия перемены даты не везде точно идет вдоль меридиана  $12^h$ , а местами отклоняется от него, чтобы расположенные в этой области страны попали в одно полушарие. Добавим также,

что на судах, пересекающих эту линию с востока на запад, одни сутки вычитаются, а на судах, пересекающих ее с запада на восток, прибавляются.

На территориях больших стран, таких, как США и СССР, имеется более одного часового пояса. В США, например, используется четыре часовых пояса; средние времена, соответствующие меридианам  $5^h$ ,  $6^h$ ,  $7^h$  и  $8^h$  к западу от Гринвича называются Восточным, Центральным, Горным и Тихоокеанским.

Связь между поясным (ZT) и гринвичским средним временем имеет вид

$$\text{GMT} = \text{ZT} + \text{долгота}, \quad (2.24)$$

причем западная долгота прибавляется, а восточная вычитается (что соответствует сформулированному выше правилу).

Продолжительность года, используемого в повседневной жизни, соответствует величине *тропического года*, который определяется как промежуток времени между последовательными прохождением Солнца через точку весеннего равноденствия. Он равен 365,2422 средних солнечных суток. Для удобства календарный год содержит целое число суток, либо 365, либо 366. Каждый четвертый год (называемый високосным) состоит из 366 суток. Исключениями являются такие годы столетий (как, например, 1900), у которых число сотен (в данном случае 19) не делится нацело на четыре. Таким образом, средний гражданский год равняется 365,2425 средних солнечных суток, т. е. почти равен тропическому году.

### 2.11.3. Юлианские дни

Нерегулярности нашего календаря и переход от юлианского к григорианскому календарю (происходивший в разных странах неодновременно) затруднили сравнение времен между наблюдениями, проводимыми с интервалом во много лет. С другой стороны, при наблюдениях переменных звезд полезной информацией является число суток и долей суток, прошедших с определенной эпохи до момента наблюдения. Для того чтобы уменьшить объем вычислений и избежать неопределенностей, была введена система *юлианских дней*. За начало отсчета в ней выбран средний полдень 1 января 4713 г. до н. э., и время измеряется числом суток, прошедших от этой эпохи. В «Астрономических эфемеридах» приводятся юлианские дни на каждый день года.

Существуют также таблицы, по которым можно определить юлианский день для любого дня каждого года. Например, юлианский день для 24 июня 1962 г. равен 2 437 839,5 (на 0 часов 24 июня); если наблюдение 24 июня 1962 г. проводилось в  $18^h$  GMT, то юлианский день будет равен 2 437 840,25.

Время можно измерять также в юлианских столетиях, каждое из которых равно в точности 36 525 суткам.

Орбитальные характеристики искусственных спутников Земли часто относятся к эпохам, выраженным в модифицированной юлианской календарной системе, в которой за начало отсчета принимается 17,0 ноября 1858 г. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \text{(модифицированный юлианский день)} = \\ & = \text{(юлианский день)} - 2\,400\,000,5 \text{ сут.} \end{aligned}$$

#### 2.11.4. Эфемеридное время

Как среднее солнечное время, так и звездное время определяются вращением Земли вокруг своей оси. До сравнительно недавнего времени полагали, что если не учитывать медленное вековое увеличение периода вращения, вызванное приливным трением, то период вращения Земли можно считать постоянным. *Вековым* называется такое изменение, которое существенно необратимо и действует постоянно, так что его величина пропорциональна времени действия. *Приливное трение*, тормозящее вращение Земли, обусловлено влиянием притяжения Луны.

Создание и применение более точных часов позволило обнаружить и другие вариации в периоде вращения Земли. Эти малые изменения в общем случае имеют скачкообразный и непредсказуемый характер. Поскольку всемирное время связано с наблюдениями движения небесных тел, которые выполняются с неравномерно вращающейся Земли, то оно должно отличаться от равномерно текущего теоретического времени. Это время, представляющее собой ньютоновское время небесной механики, играет роль независимой переменной в теории движения Солнца, Луны и планет. Поэтому публикуемые эфемериды небесных тел (таблицы предсказанных положений), получаемые по этой теории, соответствуют именно такому *эфемеридному времени* (ЕТ).

Значение эфемеридного времени в данный момент получается путем очень точных наблюдений скачкообразных вариаций долготы Солнца, Луны и планет, обусловленных соответствующими вариациями скорости вращения Земли. Клеменс оценил, что для определения эфемеридного времени с точностью до  $10^{-10}$  необходимо проводить наблюдения Луны в течение пяти лет. На практике для получения приблизительного значения эфемеридного времени можно пользоваться атомными часами, показания которых последовательно корректируются в результате проведения длинных серий астрономических наблюдений. При этом определяется величина  $\Delta T$ , представляющая собой разность:

$$\Delta T = \text{(эфемеридное время)} - \text{(всемирное время)}.$$

Эта величина затабулирована в «Астрономических эфемеридах». В настоящее время она равна приблизительно  $47^s$ .

В последние годы в методику измерения времени был внесен ряд дальнейших усовершенствований, например было введено международное атомное время (IAT). Между ним и эфемеридным временем (ET) имеет место приближенное соотношение  $ET = IAT + 32,18^s$ . Однако обсуждение этих усовершенствований лежит за пределами нашей книги. Читатель, интересующийся этим вопросом, может обратиться к работе Макнэлли [3], указанной в библиографии.

## Задачи

При решении задач Землю можно считать сферической, а наклонение эклиптики принимать равным  $23^\circ 27'$ .

2.1. Найти расстояние между двумя пунктами с одинаковой широтой  $60^\circ N$ , если их долгота равна 1)  $48^\circ 27' W$  и  $27^\circ 11' W$ ; 2)  $32^\circ 19' W$  и  $15^\circ 49' E$ .

2.2. Самолет летит со скоростью 600 узлов (1 узел = 1 морская миля в час) по большому кругу, проходящему через аэропорты Прествик ( $04^\circ 36' W$ ,  $55^\circ 31' N$ ) и Гандер ( $54^\circ 34' W$ ,  $49^\circ 00' N$ ). Сколько времени будет длиться полет?

2.3. Какого максимального значения северной широты достигает во время полета самолет в задаче 2.2 и когда это произойдет?

2.4. Каковы приближенные значения прямого восхождения и склонения Солнца 21 марта, 21 июня, 21 сентября и 21 декабря?

2.5. Для наблюдателя на широте  $60^\circ N$  построить небесную сферу и нанести на чертеж горизонт, экватор, зенит, северный небесный полюс и меридиан наблюдателя. Считая, что местное звездное время равно 9 ч, нанести точку весны и эклиптику. В указанный момент времени искусственный спутник «Эхо-1» имеет высоту  $45^\circ$  и азимут  $315^\circ$  к востоку от точки севера. Нанести положение спутника на чертеж и оценить 1) его топоцентрическое прямое восхождение и склонение; 2) его топоцентрическую эклиптическую долготу и широту. Нанести на чертеж положение Солнца 21 марта.

2.6. Воспользовавшись данными задачи 2.5, проверить вычислениями полученные оценки топоцентрического прямого восхождения и склонения спутника.

2.7. Если сегодня вечером звезда восходит в 10 ч вечера, то приблизительно в каком часу она взойдет через 30 сут?

2.8. Считая широту наблюдателя равной  $60^\circ N$ , найти угол между эклиптикой и горизонтом в момент восхода точки весеннего равноденствия, когда она имеет азимут  $90^\circ$  к востоку от точки севера.

2.9. Показать, что точка горизонта, в которой восходит звезда, лежит на расстоянии  $\arcsin(\sec \phi \sin \delta)$  к северу от точки востока, где  $\phi$  — широта наблюдателя, а  $\delta$  — склонение звезды.

2.10. Наблюдение Солнца проводилось приблизительно в 10 ч 50 мин поясного времени 12 декабря, при этом хронометр показывал всемирное время 04 ч 49 мин 16 с. Наблюдатель, находящийся в поясе — 6, имел координаты  $45^\circ N$ ,  $92^\circ 30' E$ , а уравнение времени (взятое из «Астрономических эфемерид») равнялось  $+6$  мин 38 с. Вычислить часовой угол Солнца с точки зрения наблюдателя.

2.11. Нанести на чертеж положение эклиптики с точки зрения наблюдателя из задачи 2.10, если в момент наблюдения склонение Солнца равнялось  $23^\circ S$ , а местное звездное время было 16 ч 35 мин.

2.12. Судно, идущее вдоль параллели со скоростью 15 узлов, покинуло пункт А ( $44^\circ 30' S$ ,  $58^\circ 20' W$ ) 3 января в 2 ч по поясному времени. Найти 1) его положение (пункт В) через 5 сут 6 ч; 2) дату и поясное время прибытия в пункт В.

2.13. Каково прямое восхождение искусственного спутника Satos II, если он пересекает меридиан наблюдателя в 09 ч 23 мин 41,6 с местного звездного времени?

2.14. Последовательные кульминации звезды с прямым восхождением  $8^{\text{h}}21^{\text{m}}47,4^{\text{s}}$  наблюдались в 8 ч 22 мин 00,8 с и 8 ч 21 мин 59,7 с (по звездным часам). Определить поправку к ход часов.

2.15. В третьем часовом поясе 12 декабря около 6 ч вечера (поясного времени) наблюдаться звезда с прямым восхождением  $6^{\text{h}}11^{\text{m}}12^{\text{s}}$ . При этом хронометр показал 21 ч 00 мин 04 с всемирного времени, а долгота наблюдателя равнялась  $46^{\circ} \text{W}$ . Найти часовой угол, с которым наблюдатель видел звезду, если 13 декабря гринвичское звездное время в 0 ч всемирного времени равнялось 5 ч 23 мин 07 с. Воспользоваться соотношением между звездным временем и средним солнечным временем, приведенным в разд. 2.11.2, или таблицами перехода в «Астрономических эфемеридах».

2.16. Вычислить часовой угол Солнца 8 июня 1962 г. в Сан-Франциско (долгота равна  $8^{\text{h}}09^{\text{m}}43^{\text{s}} \text{W}$ ) в 10 ч 30 мин утра по Тихоокеанскому времени. Уравнение времени равно +1 мин 14 с.

2.17. Вычислить продолжительность пребывания над горизонтом звезды Альтаир ( $\alpha = 19^{\text{h}}48^{\text{m}}0,6^{\text{s}}$ ,  $\delta = 8^{\circ}.43'$ ), если широта наблюдателя равна  $55^{\circ}52' \text{N}$ . В чем будет выражен ответ — в звездном или в среднем солнечном времени? Когда по местному звездному времени Альтаир заходит на этой широте? Чему равен азимут звезды в момент захода?

2.18. Показать, что гелиоцентрические экваториальные прямоугольные координаты космического аппарата на межпланетной орбите можно представить в виде

$$\begin{aligned}x &= r \sin a \sin (A + \omega + f), \\y &= r \sin b \sin (B + \omega + f), \\z &= r \sin c \sin (C + \omega + f)\end{aligned}$$

и дать выражения для вспомогательных углов  $a$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $B$ ,  $c$  и  $C$ .

2.19. Доказать, что если  $(\lambda_1, \beta_1)$ ,  $(\lambda_2, \beta_2)$  и  $(\lambda_3, \beta_3)$  — значения гелиоцентрической эклиптической долготы и широты планеты в трех точках ее орбиты, то

$$\operatorname{tg} \beta_1 \sin (\lambda_2 - \lambda_3) + \operatorname{tg} \beta_2 \sin (\lambda_3 - \lambda_1) + \operatorname{tg} \beta_3 \sin (\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

## Литература

1. *Astronomical Ephemeris*. London, HMSO.
2. *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. London, HMSO.
3. *McNally D.* Positional Astronomy. London, Frederick Muller, 1974.
4. *Smart W. M.* Textbook on Spherical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1956.

Ежегодник *Astronomical Ephemeris* [1] содержит предвычисленные координаты тел Солнечной системы, за исключением комет, метеоров и большинства астероидов (из них фигурируют только четыре самых крупных). Кроме того, в нем приводятся данные о ярких звездах, моментах восхода и захода Солнца и Луны, а также ряд важных табличных данных, в частности таблицы перевода звездного времени в среднее солнечное и обратно. Аналогичное американское издание, *The American Ephemeris*, US Government Printing Office, Washington, DC, также публикуется ежегодно.

*The Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris* [2] представляет собой ценный справочник, который не только поясняет данные, содержащиеся в *Astronomical Ephemeris*, и методы, которыми они получены, но и служит введением в круг вопросов, обсуждаемых в этой и следующей главах.

В учебнике *Textbook on Spherical Astronomy* [4] используется сравнительно несложный математический аппарат. В этой книге рассматриваются основы сферической астрономии и содержится много примеров для студентов.

## Обработка данных наблюдений

### 3.1. Введение

При определении направления и расстояния до тела, находящегося за пределами земной атмосферы, используется целый арсенал методов наблюдений. Большое разнообразие методов обусловлено тем, что расстояние до тела, его скорость, поток излучения и форма могут изменяться в широких пределах. Объект (искусственный) может находиться на орбите, близкой к Земле, на более значительном расстоянии или в межпланетном пространстве. Он может быть источником радиосигналов или же отражать солнечный свет. Его видимая скорость может изменяться от нескольких градусов в секунду до нескольких дуговых секунд в час. Если же объект является естественным телом Солнечной системы, то это может быть Солнце, Луна, планета, спутник, астероид или комета. Тогда тело (если это не Солнце) будет отражать солнечный свет, причем его яркость будет зависеть от формы, альbedo (отражательной способности) и расстояний от Солнца и наблюдателя. Видимая скорость тела относительно звезд может составлять  $13^\circ$  в сутки для Луны,  $1^\circ$  в сутки для Солнца и значительно меньше для других тел. Угловые скорости звезд и других тел, удаленных на значительное расстояние, настолько малы, что измерить их поперечное движение удастся лишь для объектов, ближайших к Солнечной системе. В основном судить об их движении мы можем только по результатам определения их лучевых скоростей. Кроме того, излучение этих тел может наблюдаться преимущественно в видимой части спектра, в радиодиапазоне, в рентгеновском или инфракрасном диапазонах.

Тем не менее, хотя нам приходится иметь дело с чрезвычайно разнообразными объектами и изменяющимися в очень широких пределах расстояниями, характером излучения и т. д., существуют стандартные методы, при помощи которых можно обрабатывать данные наблюдений объектов. Такие методы служат для того, чтобы, насколько это возможно, устранить эффекты, обусловленные положением наблюдателя во времени и пространстве, получая таким образом объективные данные наблюдений, которые можно было бы сравнивать и использовать в вычислительных центрах для определения элементов орбит и составления прогнозов. В случаях, когда мы имеем дело с объектами, созданными че-

ловеком (такими, как искусственные спутники), планетами, спутниками и другими телами внутри Солнечной системы, процедуры, использующие редуцированные данные, называются определением и улучшением орбит. В случае объектов, находящихся за пределами Солнечной системы, редуцированные данные могут использоваться для вычисления и уточнения элементов орбит (в случае двойной звездной системы) или для накопления статистических данных о движении групп звезд, изучая которые можно лучше понять строение и динамику нашей Галактики.

### 3.2. Методы наблюдений

Для слежения за космическими аппаратами используются либо оптические, либо электронные устройства. К типичным оптическим инструментам относятся:

1) Оптические следящие регистрирующие инструменты, имеющие небольшое поле зрения; они устанавливаются в горизонтальной системе, а значения высоты и азимута автоматически снимаются со специально отградуированных кругов. Калибровку таких инструментов надо проводить очень часто.

2) Кинотеодолит, также имеющий небольшое поле зрения и установленный на альтазимутальной монтировке. Используется для слежения за объектом и съемки на 35-миллиметровую пленку.

3) Баллистическая камера с очень широким полем, фотографирующая объект на фоне звезд.

4) Камера Бейкера—Нанна с очень широким полем, способная регистрировать слабые объекты (до  $+17,2^m$ ). Используются также камеры Хевитта.

5) Обычные астрономические телескопы, предназначенные для наблюдения объектов дальнего космоса, имеющих низкие угловые скорости и по своему блеску недоступных для камеры Бейкера—Нанна.

В астрономии для измерения блеска используется понятие звездной величины объекта. Впервые в приближенном виде шкала звездных величин была введена во II в. до н. э. Гиппархом, который всем звездам, видимым невооруженным глазом, в соответствии с их блеском приписал одну из шести звездных величин: к звездам первой величины он отнес двадцать самых ярких звезд, к звездам второй величины — следующие по блеску пятьдесят звезд и так далее до звезд шестой величины, к которым относятся самые слабые из видимых невооруженным глазом звезд.

Звезда величины  $m$  примерно в два с половиной раза ярче звезды величины  $m + 1$ , таким образом, шкала звездных величин является по существу логарифмической. Точное определение шкалы звездных величин формулируется следующим образом:



Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — значения блеска двух звезд, звездные величины которых равны  $m_1$  и  $m_2$ . Тогда

$$B_1 \propto 10^{-0,4m_1},$$

$$B_2 \propto 10^{-0,4m_2},$$

так что

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \lg(B_1/B_2).$$

Следовательно, разница в 5 звездных величин соответствует отношению значений блеска, равному 100. Заметим, что, чем больше звездная величина, тем меньше блеск объекта. Таким образом, для камеры Бейкера—Нанна предельная звездная величина (самый слабый объект, который еще может быть зарегистрирован) равна  $+17,2^m$ , а для 200-дюймового телескопа Хейла (обсерватория Маунт-Паломар) составляет  $+23,2^m$ .

Следует также заметить, что существуют различные системы звездных величин в зависимости от того, куда поступает излучение от объекта: в глаз, на фотопластинку или в фотоэлектрический прибор.

Для сравнения светимостей объектов используется система абсолютных звездных величин. Чтобы избавиться от зависимости звездной величины от расстояния до объекта, обычно рассматривают звездную величину, которую объект имел бы на стандартном расстоянии 10 пс (см. разд. 1.3). Если  $d$  — истинное расстояние до объекта в парсеках, а  $M$  и  $m$  — его видимые звездные величины на расстояниях 10 и  $d$  пс соответственно, то, принимая во внимание, что блеск убывает пропорционально квадрату расстояния, легко показать, что

$$M = m + 5 - 5 \lg d.$$

Величина  $M$  называется *абсолютной звездной величиной* объекта.

К типичным электронным инструментам относятся:

1) Радиотелескоп, используемый для приема радиосигналов, посылаемых космическим аппаратом, либо (при небольшом расстоянии) работающий как радиолокатор, который принимает отраженный от космического аппарата сигнал.

2) Интерферометр, представляющий собой антенную решетку, геометрическая форма которой известна с высокой точностью и может изменяться. Принцип, лежащий в основе такой системы определения направления, состоит в том, что между радиосигналами, одновременно приходящими в две различные точки, имеется сдвиг фаз, зависящий от различия путей, пройденных радиосигналами. Методы определения направления на источник относительно точек приема хорошо отработаны.

3) Аппаратура, регистрирующая доплеровский сдвиг. Пусть источник излучения движется со скоростью  $v$  относительно наблю-

дателя. Тогда принимаемое излучение, имеющее при нулевой относительной скорости источника длину волны  $\lambda$ , будет иметь длину волны  $\lambda'$ , причем

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad (3.1)$$

где  $c$  — скорость света. Что касается знака  $v$ , то если источник приближается к приемнику, то  $v$  считается отрицательным, а если источник удаляется, то  $v$  положительно. Длина волны  $\lambda$  и частота  $\nu$  связаны между собой известным соотношением

$$\nu\lambda = c,$$

так что уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = -\frac{v}{c}. \quad (3.2)$$

Это изменение длины волны и частоты, обусловленное относительной скоростью, называется эффектом Доплера.

Ясно, что при помощи электронной аппаратуры, измеряющей изменение частоты, может быть определена только радиальная составляющая скорости объекта, испускающего радиоволны. Следует заметить, что выше описана лишь принципиальная сущность этого сложного явления.

Существует много систем, основанных на эффекте Доплера. В некоторых из них наряду с радиальной скоростью (скоростью изменения расстояния) определяется и само расстояние до объекта, причем точность приборов, измеряющих расстояние и скорость его изменения, очень высока.

При исследовании естественных небесных объектов, таких, как планеты, звезды и галактики, используются оптические и радиотелескопы, причем при выполнении наблюдений на оптических телескопах широко применяется фотографирование.

Как оптические, так и радиотелескопы позволяют получить направление на объект в момент наблюдения. Если радиотелескоп не используется в режиме интерферометра совместно с другими радиотелескопами, то точность, с которой он нацеливается на небесный объект, испускающий радиоволны, значительно уступает точности оптических телескопов. Однако если радиотелескоп является частью интерферометра с большой базой (в некоторых случаях до нескольких тысяч километров), то точность определения положения объекта оказывается не хуже, чем у лучших оптических систем.

Большие радиотелескопы, работающие в режиме интерферометра, позволяют с высокой точностью измерять расстояния до тел Солнечной системы, таких, как Луна, Венера, Марс, Меркурий, Юпитер и Сатурн.

Резюмируя, можно сказать, что все оптические и электронные методы дают высоту и азимут объекта (или его положение на фотопластинке на фоне звездного неба). Расстояние от наблюдателя до объекта обычно не измеряется, если только не применяются радиолокационные устройства или специальная аппаратура, в которой используется эффект Доплера. Кроме того, фиксируется момент времени наблюдений. Это время приводится к всемирному времени, а затем, как правило, к местному звездному времени (если оно не использовалось с самого начала).

Для того чтобы по данным наблюдений получить геоцентрическое положение объекта в экваториальной системе, надо в эти данные внести ряд поправок. Если измеряются высота и азимут объекта, то сначала надо учесть известные инструментальные ошибки. Для этого приходится довольно часто проводить калибровку инструмента, поскольку, как правило, такие ошибки изменяются со временем.

### 3.3. Рефракция

Световой луч при входе в атмосферу Земли преломляется или изгибается, в результате чего кажущаяся высота источника света увеличивается. Как показано на рис. 3.1, световой луч, с точки зрения наблюдателя, расположенного в точке  $O$ , кажется прихо-

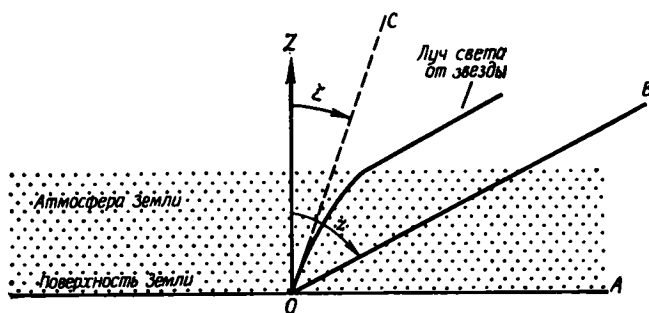


Рис. 3.1.

дящим из  $C$ , и, следовательно, измеренное зенитное расстояние источника  $\zeta$  равно углу  $ZOC$ , в то время как истинное зенитное расстояние равно углу  $ZOB$ , где  $OB$  параллельно первоначальному направлению луча до входа в атмосферу.

Полагая атмосферу состоящей из плоских параллельных слоев различной плотности, легко показать, что из закона преломления Снеллиуса следует соотношение

$$r = k \operatorname{tg} \zeta = k \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3.3)$$

где  $r = z - \zeta$ , а  $k \approx 58,2''$ . Поскольку наблюдаемая высота  $\alpha$  больше истинной, угол  $r$  из нее вычитается [1].

Уравнение (3.3) справедливо для зенитных расстояний, меньших  $45^\circ$ , и является довольно хорошим приближением, если зенитное расстояние меньше  $70^\circ$ . При больших значениях зенитного расстояния надо пользоваться более точными формулами, учитывающими кривизну поверхности Земли, а в случаях, когда зенитное расстояние близко к  $90^\circ$ , нужно обращаться к специальным таблицам.

Уравнение (3.3) имеет много разновидностей. Среди них уравнение Комстока

$$r = \frac{983p}{460 + T} \operatorname{tg} \zeta,$$

где  $r$  выражено в секундах дуги,  $p$  — барометрическое давление в дюймах ртутного столба, а  $T$  — температура по шкале Фаренгейта.

При измерениях в радиодиапазоне рефракция сильно зависит от используемой частоты. При этом эффект рефракции в нижних слоях атмосферы примерно вдвое больше, чем в оптическом диапазоне и быстро убывает с увеличением угла высоты. В ионосфере радиоволны преломляются еще и потому, что там индуцируется движение заряженных частиц, зависящее от градиента плотности ионов. Если  $N$  — концентрация электронов (на  $1 \text{ см}^3$ ), а  $\nu$  — частота в килогерцах, то локальная эффективная диэлектрическая постоянная  $n$  (различная в разных точках ионосферы) может быть представлена в виде

$$n = \left(1 - \frac{81N}{\nu^2}\right)^{1/2}.$$

При увеличении высоты над поверхностью Земли концентрация электронов сначала возрастает, а потом снова падает. При этом  $N$  может возрасти так сильно, что  $n$  становится равным нулю или мнимой величине. В этих случаях радиосигнал не может проникнуть сквозь ионосферу (изнутри или извне). В других случаях, когда частота достаточно велика, сигнал проникает сквозь ионосферу, но при этом его траектория изгибается. Если предположить, что ионосфера состоит из концентрических шаровых слоев, то, воспользовавшись законом Снеллиуса, можно рассчитать траекторию радиосигнала. Соотношение, которое при этом должно использоваться, имеет вид

$$nr \sin i = \text{const},$$

где  $r$  — радиус кривизны шарового слоя с диэлектрической постоянной  $n$ , а  $i$  — угол падения радиоволн. Ценные сведения дало исследование ионосферной рефракции путем сравнения результатов оптического и радиосопровождения искусственных спутников.

Учитывая поправки за рефракцию, можно перейти от топоцентрических горизонтальных к топоцентрическим экваториальным координатам, т. е. к часовому углу и склонению (см. разд. 2.9.2, пример 1). Топоцентрическое прямое восхождение можно найти, воспользовавшись уравнением (2.18) для местного звездного времени.

Если наблюдения дают положение объекта относительно звезд, то описанная выше методика должна быть модифицирована. Направления на звезды, изображения которых имеются на пленке, искажаются рефракцией, причем каждое направление по-своему. Поэтому, чтобы по изображению объекта среди звезд получить его прямое восхождение и склонение, необходимо вводить соответствующие поправки. В астрономии разработано несколько процедур учета таких поправок. В результате получаются экваториальные координаты объекта относительно наблюдателя. Схема метода приводится в разд. 3.4, посвященном прецессии и нутации. Если объектом наблюдения является ракета сразу после старта, то при учете рефракции надо принимать во внимание следующее дополнительное соображение: положения звезд из-за рефракции смещаются в результате прохождения света через всю толщу атмосферы, а путь в атмосфере световых лучей от ракеты может составлять меньше 50 км.

Таким образом, данные наблюдений могут быть выражены в экваториальных координатах относительно пункта наблюдения на поверхности Земли. Теперь нам необходимо более подробно рассмотреть способы определения таких координат.

### 3.4. Прецессия и нутация

До сих пор предполагалось, что плоскости эклиптики и экватора фиксированы относительно звезд, т. е. прямые восхождения и склонения звезд, измеряемые относительно экватора и точки весеннего равноденствия (одной из двух точек пересечения экватора и эклиптики), являются постоянными. Однако благодаря гравитационному притяжению, действующему со стороны Солнца и Луны на несферическую Землю, ось вращения Земли прецессирует, так что северный полюс мира  $P$  описывает вокруг полюса эклиптики  $K$  малый круг радиуса  $\epsilon = 23 \frac{1^\circ}{2}$  с периодом около 26 000 лет. Эклиптика остается фиксированной, а направление в точку весеннего равноденствия поворачивается в плоскости эклиптики в обратном направлении (т. е. в направлении возрастания эклиптической долготы звезд) со скоростью приблизительно  $50''$  в год. Это движение называется *лунно-солнечной прецессией*. Как показано на рис. 3.2, лунно-солнечная прецессия не

приводит к изменению эклиптической широты звезды (дуга  $BX$ ), но изменяет ее эклиптическую долготу  $\Upsilon B$ , которая в год увеличивается на  $50''$ . Характер изменения прямого восхождения  $\Upsilon A$  и склонения  $AX$  будет зависеть от текущих значений координат звезды. Легко показать [1], что если  $\theta$  — лунно-солнечная прецессия за год, то координаты звезды за это время изменятся и станут равными  $(\alpha_1, \delta_1)$ , где

$$\alpha_1 - \alpha = \theta (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta), \quad (3.4)$$

$$\delta_1 - \delta = \theta \sin \epsilon \cos \alpha. \quad (3.5)$$

Заметим, что эти формулы получены в предположении малости изменений координат.

Еще один эффект, обусловленный влиянием Солнца и Луны, называется нутацией. Это сложные колебания полюса  $P$  около положения, которое он занимал бы, если бы имела место только прецессия. Нутацию можно представить в виде ряда, членами которого являются периодические функции элементов орбит Солнца и Луны (относительно Земли), причем их периоды малы по сравнению с периодом лунно-солнечной прецессии. Кроме того, вследствие нутации испытывает колебания около своего среднего значения и величина наклона эклиптики к экватору.

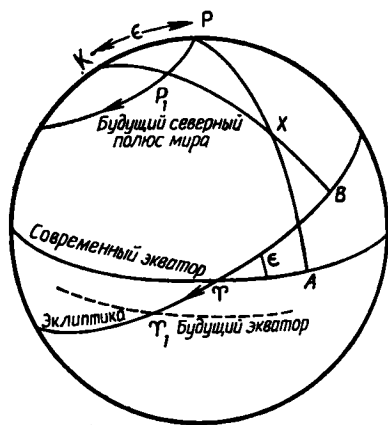


Рис. 3.2.

В результате воздействия планет на орбиту Земли происходит медленное изменение ориентации эклиптики. Эта так называемая *планетная прецессия* уменьшает прямое восхождение всех звезд примерно на  $0,13''$  в год.

Теперь можно определить *общую прецессию*. Это комбинация лунно-солнечной прецессии и планетной прецессии. Общая прецессия приводит к изменениям положений эклиптики, экватора и точки весеннего равноденствия. Если взять их положения, скажем, в начале 1950 г. (1950,0), то они могут служить фиксированными плоскостями отсчета. Из-за наличия общей прецессии эклиптика, экватор и точка весеннего равноденствия к началу 1951 г. изменятся, а их новые положения будут называться *средней эклиптикой*, *средним экватором* и *средней точкой весеннего равноденствия* для эпохи 1951,0.

Теперь можно определить *общую прецессию*. Это комбинация лунно-солнечной прецессии и планетной прецессии. Общая прецессия приводит к изменениям положений эклиптики, экватора и точки весеннего равноденствия. Если взять их положения, скажем, в начале 1950 г. (1950,0), то они могут служить фиксированными плоскостями отсчета. Из-за наличия общей прецессии эклиптика, экватор и точка весеннего равноденствия к началу 1951 г. изменятся, а их новые положения будут называться *средней эклиптикой*, *средним экватором* и *средней точкой весеннего равноденствия* для эпохи 1951,0.

Значения общей прецессии в долготе  $\chi$  и наклоне эклиптики  $\epsilon$  в эпоху  $t$  лет после 1900 г. определяются по формулам

$$\chi = 50,2564'' + 0,000222''t,$$

и

$$\epsilon = 23^{\circ}27'08,26'' - 0,4684''t.$$

*Среднее положение* звезды — это ее координаты, измеряемые на гелиоцентрической небесной сфере от среднего экватора и точки весеннего равноденствия в некоторый момент времени. При этом не принимается во внимание нутация, абберация, звездный параллакс и собственное движение звезды. Последние три величины будут определены позднее.

Обобщим теперь уравнения (3.4) и (3.5), включив в них планетную прецессию, которая уменьшает прямое восхождение на величину  $l = 0,13''$  в год и не влияет на склонение.

Для изменений прямого восхождения и склонения за один год, вызванных общей прецессией, получаем следующие формулы:

$$\alpha_1 - \alpha = (\theta \cos \epsilon - l) + \theta \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$\delta_1 - \delta = \theta \sin \epsilon \cos \alpha.$$

Вводя обозначения

$$m \equiv \theta \cos \epsilon - l, \quad n \equiv \theta \sin \epsilon,$$

записываем эти соотношения в виде

$$\alpha_1 - \alpha = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \quad (3.6)$$

$$\delta_1 - \delta = n \cos \alpha. \quad (3.7)$$

Величины  $m$  и  $n$  медленно меняются со временем. Имеем

$$m = 3,07327^s + 0,0000186^s (t - 1950),$$

$$n = 20,0426'' - 0,000085'' (t - 1950) = \quad (3.8)$$

$$= 1,33617^s - 0,0000057^s (t - 1950).$$

При интервалах времени, больших 5 лет, уравнения (3.6) и (3.7) уже неадекватны и надо вводить величину, называемую годичной вариацией. Если за единицу времени взять год, а скорость изменения  $\alpha$  вследствие прецессии обозначить  $d\alpha/dt$ , то из уравнения (3.6) получим

$$d\alpha/dt = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta. \quad (3.9)$$

Скорость изменения прямого восхождения за столетие  $d\alpha/dt$  определяется как вековая вариация  $s$  прямого восхождения. Тогда, пренебрегая изменениями самого  $s$ , получаем

$$\alpha - \alpha_0 = t \left[ \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_0 + \frac{st}{200} \right], \quad (3.10)$$

где индекс «0» обозначает, что величина вычисляется в более раннюю эпоху, а  $t$ , как и раньше, выражено в годах.

Итак, имеем

$$s = 100 \left( \frac{dm}{dt} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \frac{dn}{dt} + n \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \frac{d\alpha}{dt} + n \sin \alpha \sec^2 \delta \frac{d\delta}{dt} \right). \quad (3.11)$$

Аналогично

$$\delta - \delta_0 = t \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_0 + \frac{s't}{200} \right], \quad (3.12)$$

где  $s'$  — вековая вариация склонения, имеющая вид

$$s' = 100 \left( \cos \alpha \frac{dn}{dt} - n \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \right). \quad (3.13)$$

В главных звездных каталогах наряду с вековыми вариациями приводятся величины, называемые годовыми вариациями прямого восхождения и склонения. Эти величины представляют собой сумму годовых прецессий  $d\alpha/dt$  и  $d\delta/dt$  и собственного движения звезды (см. разд. 3.6).

*Истинное положение* звезды в некоторый момент времени задается ее гелиоцентрическими прямым восхождением и склонением, отсчитываемыми от истинного экватора и точки весеннего равноденствия в этот момент времени. Принимая во внимание нутацию, можно по среднему положению, вычисленному для данного момента времени, получить истинное положение для этого момента. Мы видели, что нутация изменяет долготу звезды и наклон эклиптики. Величины этих изменений (в интересующий нас момент времени)  $\Delta\psi$  и  $\Delta\epsilon$  могут быть найдены. Изменение  $\Delta_1\alpha$ , обусловленное наличием  $\Delta\psi$  и  $\Delta\epsilon$ , определяется по формуле

$$\Delta_1\alpha = \Delta\psi (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) - \Delta\epsilon \cos \alpha \operatorname{tg} \delta.$$

Аналогичное выражение имеет место для изменения склонения, которое также является следствием нутации.

Однако за время  $\tau$  (напомним, что за единицу времени берется год), прошедшее от начала текущего года до данного момента, прецессия приводит к изменению прямого восхождения, равному  $\Delta_2\alpha$ . Используя уравнение (3.6), можно написать

$$\Delta_2\alpha = \tau (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta).$$

Складывая  $\Delta_1\alpha$  и  $\Delta_2\alpha$  и учитывая, что

$$m \equiv \theta \cos \epsilon - l,$$

$$n \equiv \theta \sin \epsilon,$$

получаем

$$\Delta\alpha = \Delta_1\alpha + \Delta_2\alpha = (\tau + \Delta\psi/\theta) (m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) + + l\Delta/\theta - \Delta\epsilon \cos \alpha \operatorname{tg} \delta.$$



Если теперь выразить  $m$  и  $n$  в секундах времени, а  $l$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\theta$  и  $\Delta\epsilon$  в секундах дуги и ввести величины  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $a$  и  $b$ , определяемые следующим образом:

$$A \equiv (\tau + \Delta\psi/\theta), \quad a \equiv m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$B \equiv -\Delta\epsilon, \quad b \equiv (1/15) \cos \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$E \equiv l \Delta\psi/15\theta,$$

то получим формулу

$$\Delta\alpha = Aa + Bb + E, \quad (3.14)$$

в которой правая часть выражена в секундах времени.

Аналогично можно найти, что

$$\Delta\delta = Aa' + Bb'. \quad (3.15)$$

Здесь  $a' = n \cos \alpha$ ,  $b' = -\sin \alpha$ , а  $n$  выражено в секундах дуги.

Величины  $A$ ,  $B$ ,  $E$  не являются функциями положения звезды. Их значения на каждый день года приводятся в таблицах под заголовком «Бесселевы суточные числа». Величины  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  могут быть вычислены для каждой рассматриваемой звезды.

Таким образом, процедура получения истинного положения звезды на данную эпоху (какой-то день определенного года) по ее среднему положению в каталоге на эпоху 1950,0 состоит в следующем:

- 1) вычисляем средние координаты на начало данного года;
- 2) по средним координатам находим истинные координаты в интересующий нас момент времени.

После этого остается еще одна, последняя, коррекция: перенос начала координат из центра Солнца в центр Земли. В результате мы получаем *видимое место* звезды в данный момент времени — положение на геоцентрической небесной сфере относительно истинного равноденствия и экватора в этот момент. Несовпадение видимого и истинного положения обусловлено абберацией и годичным звездным параллаксом (см. разд. 3.5 и 3.7).

Забегая вперед, укажем, что для всех звезд, кроме нескольких ближайших, параллаксом можно пренебречь, а поправка, обусловленная абберацией, имеет вид

$$RA_{\text{вид}} + RA_{\text{ист}} + Cc + Dd, \quad (3.16)$$

$$DEC_{\text{вид}} = DEC_{\text{ист}} + Cc' + Dd', \quad (3.17)$$

где  $C$  и  $D$  — затабулированы в ежегодниках, а  $c$ ,  $d$ ,  $c'$  и  $d'$  — функции положений звезд.

Теперь видимое геоцентрическое положение звезды в момент наблюдения известно и выражено через прямое восхождение и

склонение, отнесенные к истинным экватору и равноденствию в этот момент.

При измерении положений ярких звезд применяется обратная процедура. Вводя поправку за рефракцию, находим видимое геоцентрическое положение звезды. Уравнения (3.14), (3.15), (3.16) и (3.17) дают средние координаты, отнесенные к средним экватору и равноденствию, соответствующим началу того года, когда проводились наблюдения. При помощи уравнений (3.8)—(3.13) можно получить средние координаты звезды относительно экватора и равноденствия в эпоху составления звездного каталога. В результате сравнения этих координат с координатами, приведенными в каталоге, можно получить информацию о собственном движении звезды (см. разд. 3.6).

Для измерения положений более слабых звезд применяется фотографирование. На любой фотопластинке обычно имеются изображения звезд, координаты которых уже известны и содержатся в каталоге. Их можно использовать в качестве опорных и определять относительно них положения слабых звезд.

На практике для измерений используются фотоизмерительные машины различных типов, причем измерения производятся на негативах, поскольку изготовление позитивов неизбежно приводит к размытию изображения. В процессе измерений определяются координаты  $x$  и  $y$  изображения относительно системы прямоугольных осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Теоретически эти оси выбираются так, что:

1) начало отсчета лежит на оптической оси телескопа, что соответствует заданному прямому восхождению и склонению, отнесенным к средним экватору и равноденствию, например, в эпоху 1950, 0;

2) ось  $y$  — это проекция большого круга, проходящего через северный полюс мира эпохи 1950,0 и точку, в которую направлен телескоп;

3) ось  $x$  проводится под прямым углом к оси  $y$ .

Ошибки, возникающие на практике, обусловлены неточной ориентацией, ошибочным масштабом, неперпендикулярностью осей, плохой центровкой и наклоном плоскости фотопластинки к плоскости, перпендикулярной оптической оси. Кроме того, сюда вносят вклад рефракция и абберация. Таким образом, надо различать два набора координат: измеряемые координаты изображения звезды  $x$ ,  $y$  и стандартные координаты  $\xi$  и  $\eta$ , свободные от перечисленных выше ошибок, которые и должны быть найдены. К счастью, эти координаты связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$\xi - x = ax + by + c, \quad (3.18)$$

$$\eta - y = dx + ey + f. \quad (3.19)$$

В специальных случаях [1] в эти соотношения входят также члены второго порядка по  $x$  и  $y$ . Величины  $a, b, c, d, e$  и  $f$  называются постоянными пластинки и в каждом случае должны вычисляться.

Пусть на пластинке имеются изображения  $n$  звезд, стандартные координаты которых  $(\xi_i, \eta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) уже известны, так как эти звезды содержатся в каталоге. Если по фотопластинке определить их измеряемые координаты  $(x_i, y_i)$ , то постоянные фотопластинки можно найти из системы уравнений

$$\xi_i - x_i = ax_i + by_i + c,$$

$$\eta_i - y_i = dx_i + ey_i + f$$

методом наименьших квадратов или каким-нибудь аналогичным методом.

Затем, воспользовавшись уравнениями (3.18) и (3.19), можно определить искомые стандартные координаты звезды  $(\xi, \eta)$ . Теперь их можно преобразовать в экваториальные координаты  $\alpha$  и  $\delta$  (при этом должно учитываться положение наблюдателя относительно точки весеннего равноденствия и экватора). Точка весеннего равноденствия и экватор как раз и определяют ту систему координат, относительно которой задаются положения звезд.

Используемые при этом формулы имеют вид

$$\operatorname{ctg} \delta \sin(\alpha - A) = \frac{\xi \sec D}{\eta + \operatorname{tg} D}, \quad (3.20)$$

$$\operatorname{ctg} \delta \cos(\alpha - A) = \frac{1 - \eta \operatorname{tg} D}{\eta + \operatorname{tg} D}, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - A) = \frac{\xi \sec D}{1 - \eta \operatorname{tg} D}. \quad (3.22)$$

Здесь  $A$  и  $D$  — прямое восхождение и склонение теоретического центра фотопластинки.

Если мы имеем дело с объектом внутри Солнечной системы, то звезду надо заменить на соответствующий объект (планету, спутник, космический аппарат), но при этом принципы, изложенные в этом разделе, изменятся только в деталях. Следует заметить, что если используемый инструмент дает высоту и азимут объекта, то полученные по ним прямое восхождение и склонение (с учетом поправок на рефракцию) являются величинами, отсчитываемыми от истинных экватора и равноденствия в момент наблюдения.

### 3.5. Аберрация

Вследствие того, что скорость света конечна, наблюдается кажущееся угловое смещение звезды в направлении собственного движения наблюдателя относительно звезды. Таким образом, го-

дичное обращение Земли по своей орбите приводит к годичному смещению каждой звезды, которая на небесной сфере описывает эллипс с большой полуосью  $\kappa = 20,47''$ . Это надо учитывать при измерении положений звезд по их изображениям на фотопластинке.

При наблюдении отдельной звезды абберационное смещение может быть выражено как в экваториальных, так и в эклиптических координатах (индекс 1 обозначает координаты звезды, искаженные абберацией).

В первом случае имеем

$$\alpha_1 - \alpha = Cc + Dd,$$

$$\delta_1 - \delta = Cc' + Dd'.$$

Здесь

$$C = -\kappa \cos \epsilon \cos \odot, \quad D = \\ = -\kappa \sin \odot,$$

$$c = \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta,$$

$$d = \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta,$$

$$c' = \operatorname{tg} \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta,$$

$$d' = \cos \alpha \sin \delta.$$

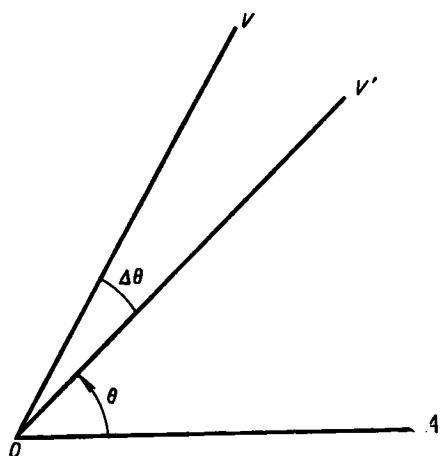


Рис. 3.3.

Величины  $C$  и  $D$  зависят только от долготы Солнца  $\odot$ . В ежегодниках приводятся значения  $\lg C$  и  $\lg D$ .

Во втором случае

$$\lambda_1 - \lambda = -\kappa \sec \beta \cos (\odot - \lambda),$$

$$\beta_1 - \beta = -\kappa \sin \beta \sin (\odot - \lambda),$$

где  $\odot$  означает долготу Солнца.

Если объект принадлежит Солнечной системе, то эффект абберации возникает вследствие движения объекта относительно наблюдателя. Вообще говоря, он отличается от звездной абберации, так что положение изображения объекта на фотопластинке должно быть исправлено. Если, как это обычно бывает, скорость объекта и расстояние до него приблизительно известны, то такую коррекцию сделать несложно.

Можно показать [1], что если  $v$  — относительная скорость объекта и наблюдателя, а  $c$  — скорость света, то

$$\Delta\theta = k \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол между направлением на объект и направлением движения наблюдателя относительно объекта. Здесь  $\Delta\theta$  — выраженное в дуговых секундах абберационное смещение, а  $k = = 206\,265$  ( $v/c$ ).

На рис. 3.3 показаны истинное направление на объект  $OV$  и кажущееся, смещенное вследствие абберации, направление  $OV'$ . Наблюдатель  $O$  движется в направлении  $A$  со скоростью  $v$  относительно объекта. Скорость  $v$  складывается из скорости движения объекта относительно центра Земли и скорости вращения пункта наблюдения, расположенного на поверхности Земли, вокруг ее центра.

Смещение  $\Delta\theta$  приводит к смещениям  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$ , которые можно вычислить из геометрических соображений. В то же время надо отметить, что в приведенных выше уравнениях нельзя заменять величину  $k$  на  $k$ .

### 3.6. Собственное движение

Звезды, в том числе и Солнце, движутся по орбитам внутри Галактики. Обнаружить эти движения можно по изменениям относительных положений звезд. Относительные скорости звезд в окрестности Солнца имеют величину порядка 20 км/с, но расстояния между звездами настолько велики, что годовые изменения направлений даже на ближайшие звезды, вызванные их движением относительно Солнца, обычно составляют менее 5". Это годовое изменение направления на звезду называется ее *собственным движением*. Для большинства ярких звезд собственные движения известны и приводятся в каталогах.

По фотоснимкам, сделанным с интервалом в несколько лет, можно измерить изменения прямого восхождения и склонения интересующей нас звезды. При этом следует принимать во внимание влияние абберации, параллакса (разд. 3.7), прецессии и нутации (в соответствии с процедурами, описанными в разд. 3.4).

### 3.7. Годичный параллакс

Направление, в котором звезда видна с Земли, отличается от направления, в котором она была бы видна гипотетическому наблюдателю, расположенному на Солнце. При движении Земли по своей орбите вокруг Солнца геоцентрическое направление (положение звезды на геоцентрической небесной сфере) изменяется и описывает параллактический эллипс. На рис. 3.4 звезда  $X$ , находящаяся на расстоянии  $d$ , видна с Земли в положении  $E_1$  в направлении  $E_1X_1$  ( $SX'$  — гелиоцентрическое направление звезды). Через шесть месяцев Земля, двигаясь по своей орбите, перейдет в положение  $E_2$  и геоцентрическое направление звезды будет  $E_2X_2$ .

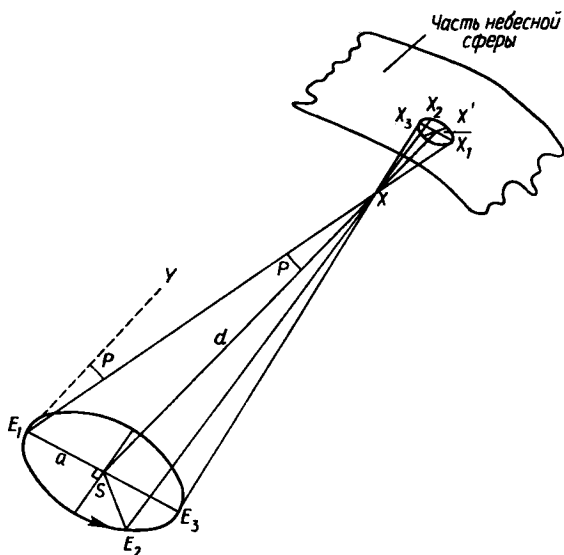


Рис. 3.4.

По определению годичный параллакс звезды равен углу  $P$  с вершиной в звезде, который стягивается отрезком, равным большой полуоси  $a$  орбиты Земли, проведенным под прямым углом к гелиоцентрическому направлению на звезду. Поскольку  $d$  много больше  $a$ ,  $E_1X = E_3X = SX$ . Следовательно,  $\sin P = a/d$ .

Парсек (пс) — это расстояние, при котором параллакс небесного объекта равен  $1''$ . Легко видеть, что  $1$  пс в  $206\,265$  раз превосходит большую полуось орбиты Земли  $a$ . Для звезд с достаточной степенью точности можно написать  $P = 1/d$ , где  $P$  измеряется в дуговых секундах, а  $d$  в парсеках. Таким образом, уравнение из разд. 3.2, связывающее абсолютную звездную величину объекта  $M$  с видимой звездной величиной  $m$ , можно переписать в виде

$$M = m + 5 + 5 \lg P.$$

Можно показать, что видимое направление на звезду в некоторый момент времени отличается от гелиоцентрического направления на угол

$$p = P \sin \theta.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением на звезду и направлением на Солнце. При этом смещение происходит в сторону Солнца. На рис. 3.4 в момент нахождения Земли в точке  $E_2$  угол  $XE_2S$  равен  $\theta$ .

Даже для ближайшей звезды параллакс  $P$  меньше  $1''$  и известно всего два десятка звезд, параллакс которых больше  $0,25''$ .

### 3.8. Геоцентрический параллакс

Теоретически направление на небесный объект, наблюдаемый из точки на поверхности Земли (топоцентрическое направление), не совпадает с геоцентрическим направлением. Практически же, если объектом является звезда, то эти направления неразличимы; если объект — Солнце, то угол между этими направлениями может достигать  $8,8''$ ; для ближайших планет угол может достигать  $32''$ , а для Луны его значение может равняться приблизительно  $1^\circ$ .

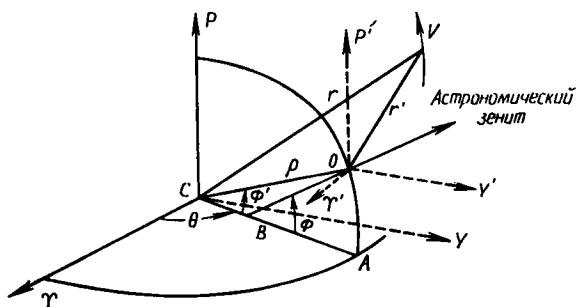


Рис. 3.5.

Для близкого искусственного спутника направление, в котором он виден со станции на Земле, и его геоцентрическое направление могут различаться почти на  $90^\circ$ .

Чтобы избавиться от влияния этого геоцентрического параллакса, обусловленного конечными размерами Земли, надо топоцентрические экваториальные координаты объекта привести к центру Земли.

На рис. 3.5 изображена станция наблюдения  $O$ , расположенная на поверхности Земли на расстоянии  $\rho$  от ее центра  $C$ . С нее осуществляется слежение за спутником  $V$ , находящимся на расстоянии  $r'$  от  $O$  и  $r$  от  $C$ . Меридиан, проходящий через северный полюс Земли  $P$  и точку  $O$ , пересекает земной экватор  $\Upsilon A$  в точке  $A$  ( $\Upsilon$  — направление в точку весеннего равноденствия).  $O\Upsilon'$  — это направление, в котором точка  $\Upsilon$  видна из  $O$ . Оно параллельно  $C\Upsilon$ . Геоцентрическая и астрономическая широты  $O$  равны соответственно углам  $OCA$  ( $\phi'$ ) и  $OBA$  ( $\phi$ ).

Обозначим угол  $\Upsilon CA = \theta$ . Поскольку Земля вместе с расположенным на ней наблюдателем поворачивается вокруг своей оси, угол  $\Upsilon CA$  увеличивается. Но угол  $\Upsilon CA$  равен местному звездному времени наблюдателя. Таким образом,

$$\theta = \text{LST}. \quad (3.23)$$

Если взять тройку невращающихся прямоугольных осей  $CY$ ,  $CY$  и  $CP$  (см. рис. 3.5), то координаты точки  $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  будут выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho \cos \phi' \cos \theta, \\ \bar{y} &= \rho \cos \phi' \sin \theta, \\ \bar{z} &= \rho \sin \phi',\end{aligned}\tag{3.24}$$

где  $\theta$  задается уравнением (3.23).

Если большая и малая полуоси эллипса, образованного при сечении Земли (по дуге  $POA$ ), равны соответственно  $a$  и  $b$ , то можно показать, что

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \phi$$

и

$$\rho = a \left[ \frac{1 - (2e^2 - e^4) \sin^2 \phi}{1 - e^2 \sin^2 \phi} \right]^{1/2},$$

где  $e^2 = 1 - b^2/a^2$ .

Следует отметить, что  $\rho$  — это расстояние до уровня моря. Если станция  $O$  расположена на высоте  $h$  над уровнем моря, то вместо  $\rho$  надо взять  $(\rho + h)$ .

Теперь можно вычислить мгновенные прямоугольные координаты  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  станции.

Данными наблюдений являются видимые прямое восхождение  $\alpha'$  и склонение  $\delta'$  аппарата (видимые, так как измеряются на небесной сфере с центром в точке наблюдения). До тех пор, пока не выполнены еще и измерения дальности, расстояние  $r'$  в общем случае неизвестно (или известно только приблизительно).

Нам хотелось бы, устраняя влияние геоцентрического параллакса, получить геоцентрические координаты: прямое восхождение  $\alpha$ , склонение  $\delta$  и расстояние  $r$ . Аналогичная задача у нас уже встречалась (разд. 2.9.2, пример 3, части 2, 3).

Возьмем тройку прямоугольных осей  $OY'$ ,  $OY'$ ,  $OP'$ , проходящих через  $O$  и параллельных соответственно осям  $CY$ ,  $CY$ ,  $CP$ . Пусть  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — координаты спутника  $V$  относительно этих осей. Тогда

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \delta' \cos \alpha', \\ y' &= r' \cos \delta' \sin \alpha', \\ z' &= r' \sin \delta'.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Если  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — геоцентрические прямоугольные координаты спутника  $V$ , то

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= r \sin \delta.\end{aligned}\tag{3.26}$$



Очевидно,

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} + x', \\y &= \bar{y} + y', \\z &= \bar{z} + z'.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Следовательно, если в уравнения (3.27) подставить (3.24), (3.25) и (3.26), то из получившихся соотношений можно найти  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $r$  как функции  $\alpha'$ ,  $\delta'$  и  $r'$ . Кроме того, туда войдут известные величины  $\rho$ ,  $\phi'$  и  $\theta$ . Три уравнения имеют вид

$$r \cos \delta \cos \alpha = \rho \cos \phi' \cos \theta + r' \cos \delta' \cos \alpha',\tag{3.28}$$

$$r \cos \delta \sin \alpha = \rho \cos \phi' \sin \theta + r' \cos \delta' \sin \alpha',\tag{3.29}$$

$$r \sin \delta = \rho \sin \phi' + r' \sin \delta'.\tag{3.30}$$

На практике часто бывает намного удобнее вычислять  $(\alpha' - \alpha)$  и  $(\delta' - \delta)$ .

Умножая (3.28) на  $\sin \alpha'$ , (3.29) на  $\cos \alpha'$  и складывая результаты, получаем

$$r \cos \delta \sin (\alpha' - \alpha) = \rho \cos \phi' \sin (\alpha' - \theta).\tag{3.31}$$

Умножая (3.28) на  $\cos \alpha'$ , (3.29) на  $\sin \alpha'$  и складывая, получаем

$$r \cos \delta \cos (\alpha' - \alpha) = r' \cos \delta' + \rho \cos \phi' \cos (\alpha' - \theta).\tag{3.32}$$

Разделив (3.31) на (3.32), находим

$$\operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = \frac{(\rho/r') \cos \phi' \sin (\alpha' - \theta)}{\cos \delta' + (\rho/r') \cos \phi' \cos (\alpha' - \theta)}.\tag{3.33}$$

Подставив в (3.32)

$$\cos (\alpha' - \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$$

и воспользовавшись уравнением (3.31), после небольших упрощений получаем

$$r \cos \delta = r' \cos \delta' + \rho \cos \phi' \frac{\cos [1/2 (\alpha' + \alpha) - \theta]}{\cos 1/2 (\alpha' - \alpha)}.$$

Определим величины  $m$  и  $\gamma$  следующим образом:

$$m \sin \gamma \equiv \sin \phi',$$

$$m \cos \gamma \equiv \cos \phi' \frac{\cos [1/2 (\alpha' + \alpha) - \theta]}{\cos 1/2 (\alpha' - \alpha)}.$$

Тогда

$$r \cos \delta = r' \cos \delta' + \rho m \cos \gamma\tag{3.34}$$

и в силу (3.30)

$$r \sin \delta = r' \sin \delta' + \rho m \sin \gamma.\tag{3.35}$$

Умножая (3.34) на  $\sin \delta'$ , (3.35) на  $\cos \delta'$  и вычитая, получаем

$$r \sin (\delta' - \delta) = \rho m \sin (\delta' - \gamma). \quad (3.36)$$

Умножая (3.34) на  $\cos \delta'$ , (3.35) на  $\sin \delta'$  и складывая, находим

$$r \cos (\delta' - \delta) = r' + \rho m \cos (\delta' - \gamma). \quad (3.37)$$

Таким образом, из (3.36) и (3.37) получаем

$$\operatorname{tg} (\delta' - \delta) = \frac{\rho m \sin (\delta' - \gamma)}{r' + \rho m \cos (\delta' - \gamma)} \quad (3.38)$$

или

$$\operatorname{tg} (\delta' - \delta) = \frac{(\rho/r') \sin \phi' \sin (\delta' - \gamma)}{\sin \gamma + (\rho/r') \sin \phi' \cos (\delta' - \gamma)}, \quad (3.39)$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \phi' \cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}{\cos \left[ \frac{1}{2} (\alpha' + \alpha) - \theta \right]}. \quad (3.40)$$

Аналогичным образом при помощи уравнений (3.34) и (3.35) можно получить

$$r \cos (\delta' - \delta) = r' \left[ 1 + \frac{\rho}{r'} \frac{\sin \phi' \cos (\delta' - \gamma)}{\sin \gamma} \right]. \quad (3.41)$$

Четыре уравнения (3.33), (3.39), (3.40) и (3.41) являются точными и дают поправки, обусловленные геоцентрическим параллаксом. Можно рассмотреть несколько случаев:

1) Объект находится на расстоянии, намного превышающем расстояние до Луны (например, межпланетный зонд). В этом случае поправки  $(\alpha' - \alpha)$  и  $(\delta' - \delta)$  намного меньше  $1^\circ$ , поскольку  $\rho/r'$  намного меньше  $1/60$ .

Тогда, выразив  $(\alpha' - \alpha)$  в радианах, можно с достаточной степенью точности записать уравнение (3.33) в виде

$$\alpha' - \alpha = \frac{\rho}{r'} \cos \phi' \sin (\alpha' - \theta) \sec \delta'. \quad (3.42)$$

Аналогично уравнение (3.39) можно записать в виде

$$\delta' - \delta = \frac{\rho}{r'} \sin \phi' \sin (\delta' - \gamma) \operatorname{cosec} \gamma, \quad (3.43)$$

где  $\gamma$  задается соотношением

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \phi' \sec (\alpha' - \theta). \quad (3.44)$$

Точно так же из уравнения (3.41) можно получить

$$r' - r = -\rho \sin \phi' \cos (\delta' - \gamma) \operatorname{cosec} \gamma. \quad (3.45)$$

Для того чтобы пользоваться этими уравнениями, необходимо знать значения  $\alpha'$ ,  $\delta'$  и  $r'$ . На практике это требование обычно удовлетворяется.

2) Расстояние до объекта порядка расстояния от Земли до Луны (например, искусственный спутник Луны). В этом случае величины  $(\alpha' - \alpha)$ ,  $(\delta' - \delta)$  и  $(r' - r)$  являются малыми поправками. Углы имеют величины порядка  $1^\circ$  или менее, а величина  $(r' - r)$  порядка  $1/60$  расстояния до аппарата или менее. Углы  $\alpha'$  и  $\delta'$  измеряются легко и точно; дальность  $r'$  при помощи радиолокатора также может быть измерена достаточно точно. Таким образом, как и в первом случае, можно пользоваться уравнениями (3.42)—(3.45), но если объект движется между орбитами Земли и Луны, то следует применять точные уравнения (3.33), (3.39), (3.40) и (3.41).

3) Расстояние до объекта порядка радиуса Земли (например, спутник Земли). В этом случае должны применяться точные уравнения. Величины  $(\alpha' - \alpha)$ ,  $(\delta' - \delta)$  и  $(r' - r)$  теперь уже не являются малыми. Дальность  $r'$  либо может быть непосредственно измерена при помощи радиолокатора, либо, если орбита спутника известна, может быть найдена приближенно. Если ни одно из этих условий не выполняется, то учесть поправки, обусловленные геоцентрическим параллаксом, уже не так просто. Для того чтобы получить расстояние, надо иметь данные наблюдений по крайней мере из двух точек на поверхности Земли. Если спутник наблюдают одновременно с двух станций  $O'$  и  $O''$ , то на каждой станции получают его видимое положение. Пусть эти положения задаются парами чисел  $(\alpha', \delta')$  и  $(\alpha'', \delta'')$ . Геоцентрическое положение спутника задается парой чисел  $(\alpha, \delta)$ . Если расстояния от спутника до точек  $O'$ ,  $O''$  и до центра Земли обозначить  $r'$ ,  $r''$  и  $r$ , то тогда мы имеем пять неизвестных величин  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $r'$ ,  $r''$  и  $r$ . Уравнения (3.28), (3.29) и (3.30) записываются сначала применительно к  $O'$ , а затем к  $O''$ . Из полученных таким образом шести уравнений могут быть найдены наши пять неизвестных. Заметим, что на практике одновременное проведение наблюдений маловероятно, так что задача обработки данных наблюдений оказывается значительно более сложной.

### 3.9. Обзор процедур

Теперь будет полезно дать сводку процедур, используемых при обработке данных наблюдений.

Наблюдения могут выполняться:

- 1) в горизонтальных координатах (высота и азимут);
- 2) в экваториальных координатах (часовой угол и склонение);
- 3) путем фотографирования объекта на фоне звезд.

Кроме того, во всех случаях должно фиксироваться время наблюдений.

В первом случае процедура редукции состоит в следующем:

- а) учитываем известные инструментальные ошибки;
- б) учитываем рефракцию;
- в) зная широту станции наблюдения, приводим данные к часовому углу и склонению;
- г) приводим время к местному звездному времени (если нужно);
- д) используя местное звездное время, преобразуем часовой угол и склонение в прямое восхождение и склонение;
- е) учитываем поправку за аберрацию;
- ж) используя измеренное или вычисленное расстояние до объекта, либо данные наблюдений станции (или нескольких станций), учитываем поправку, обусловленную геоцентрическим параллаксом;
- з) если нужно, преобразуем геоцентрические координаты, отнесенные к современным экватору и равноденствию, в координаты, отнесенные к стандартным экватору и равноденствию.

Во втором случае процедура совпадает с процедурой в первом случае, из которой следует исключить пункт в). В третьем случае процедура следующая:

- а) производим замеры на фотопластинке, определяем ее постоянные и вычисляем топоцентрические прямое восхождение и склонение объекта, отнесенные к тем экватору и равноденствию, которые приняты в используемом звездном каталоге;
- б) учитываем поправку за аберрацию;
- в) приводим координаты объекта к современным экватору и равноденствию;
- г) учитываем поправку за геоцентрический параллакс (как в предыдущей процедуре в пункте ж);
- д) если нужно, приводим геоцентрические прямое восхождение и склонение к стандартным экватору и равноденствию.

Разумеется, если объект находится за пределами Солнечной системы, то учитывать геоцентрический параллакс не имеет смысла.

Если объект принадлежит Солнечной системе, то редуцированные данные, которые могут собираться со многих станций наблюдений и обрабатываться в общем вычислительном центре, затем могут использоваться для получения или уточнения уже имеющихся элементов его орбиты. Затем по результатам вычислений делается прогноз орбиты, который впоследствии может использоваться на пунктах наблюдения.

Описание методов определения орбиты тела по данным наблюдений будет дано в последующих главах.

## Задачи

3.1. Видимая визуальная величина Сириуса равна  $-1,58^m$ , а Проциона  $+0,48^m$ . Во сколько раз Сириус ярче, чем Процион?

3.2. Расстояния до Сириуса и Проциона равны соответственно 2,70 и 3,21 пс. Вычислить их абсолютные звездные величины.

3.3. Звезда  $R$  Льва имеет переменный блеск; ее звездная величина изменяется в диапазоне от  $+5,0^m$  до  $+10,5^m$ . В каком диапазоне изменяется ее светимость?

3.4. Наземная станция слежения приняла со спутника «Ариэль-1» радиосигнал частоты 136,4057 МГц, хотя передатчик спутника работает на частоте 136,4080 МГц. Какова радиальная скорость спутника в этот момент времени? (Принять скорость распространения электромагнитных волн равной  $3 \cdot 10^8$  км/с.)

3.5. Видимое зенитное расстояние спутника равно  $28^\circ$ . Получить истинное значение зенитного расстояния с учетом рефракции, считая постоянную рефракции равной  $58,2''$ .

3.6. Зенитные расстояния незаходящей звезды в моменты верхней и нижней кульминаций составляют соответственно  $10^\circ 17' 24''$  и  $56^\circ 42' 49''$ , причем точка верхней кульминации звезды расположена к югу от зенита. Наблюдения проводятся из обсерватории в северном полушарии. Определить с учетом рефракции широту обсерватории и склонение звезды.

3.7. Учитывая только лунно-солнечную прецессию, определить координаты звезды через четверть и через полпериода прецессии, если в данный момент ее прямое восхождение и склонение равны соответственно  $18^h$  и  $-23^\circ 27'$ .

3.8. В 1962 г. прямое восхождение и склонение звезды  $\alpha$  Возничего равнялись  $5^h 13^m 52,7^s$  и  $+45^\circ 57' 1''$ . Каковы были в это время скорости изменения координат, вызванные прецессией?

3.9. Показать, что если угол  $KXP = 90^\circ$  ( $K$  — полюс эклиптики,  $P$  — полюс мира,  $X$  — звезда), то для такой звезды лунно-солнечная прецессия по прямому восхождению отсутствует.

3.10. В 06 ч 00 мин местного звездного времени при наблюдении за близким спутником Земли с наземной станции слежения  $Y$  были получены высота и азимут (измеряемый к востоку от точки севера), равные соответственно  $45$  и  $265^\circ$  (с учетом инструментальных ошибок и поправок за рефракцию). Расстояние до спутника, полученное методом радиолокации, равнялось 225 миль. Астрономическая широта  $Y$  равна  $55^\circ 00' N$ . Воспользовавшись значениями параметров эллипсоида Хейфорда, приведенными в разд. 22, найти топоцентрические и геоцентрические прямое восхождение и склонение спутника в момент наблюдения (абберацией пренебречь).

## Литература

1. Smart W. M. Textbook on Spherical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1956.

## Рекомендуемая литература

Astronomical Ephemeris. London, HMSO.

Evans D. S. Observation in Modern Astronomy. London, English University Press, 1968.

Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac. London, HMSO.

McNally D. Positional Astronomy. London, Frederick Muller, 1974.

Pausey J. L., Bracewell R. N. Radio Astronomy. London, Oxford University Press, 1955.

Smith F. G. Radio Astronomy. London, Penguin, 1974.

Vonbun F. O. NASA Technical Note D-1178, 1962.

Woolard E. W., Clemence E. M. Spherical Astronomy. New York, Academic, 1966.

# Задача двух тел

### 4.1. Введение

Задача двух тел, впервые поставленная и решенная Ньютоном, формулируется следующим образом: «По заданным в некоторый момент времени положениям и скоростям двух частиц с известными массами, движущихся под действием сил взаимного притяжения, вычислить их положения и скорости в любой момент времени».

Задача двух тел важна по двум причинам. Во-первых, это единственная задача динамики гравитирующих тел, не считая некоторых специальных случаев задачи трех тел, для которой мы имеем полное и общее решение. Во-вторых, многие практические задачи орбитального движения могут быть отнесены в первом приближении к задаче двух тел. Решение задачи двух тел может быть использовано для получения приближенных параметров орбиты и при предварительных вычислениях. Оно может служить начальным приближением при получении аналитических решений, обладающих более высокой степенью точности. Такие решения, относящиеся к общей теории возмущений, будут обсуждаться в последующих разделах.

Например, задача определения орбиты Луны, движущейся вокруг Земли, так же как орбиты планеты, движущейся вокруг Солнца, является (в первом приближении) задачей двух тел. Однако в обоих случаях влияние притяжения других тел (в первом случае — Солнца, во втором случае — других планет) усложняет простую картину, получающуюся из решения задачи двух тел. Еще пример: полет межпланетного космического аппарата (КА) от Земли к Марсу представляет собой задачу четырех тел: Солнце—Земля—Марс—КА. Тем не менее, если разбить эту задачу на три задачи двух тел

- 1) Земля—КА (вблизи Земли),
- 2) Солнце—КА (в межпланетном пространстве),
- 3) Марс—КА (вблизи Марса),

то можно получить информацию, полезную на этапе предварительного планирования полета.

Таким образом, общее решение задачи двух тел имеет большую практическую ценность. Поэтому такое решение будет подробно рассмотрено в данной главе.

## 4.2. Законы Ньютона

Законы движения Ньютона заложили фундамент динамики. Некоторые, а может быть и все, из этих законов неявно содержались в сумме научных знаний того времени. Однако данные Ньютоном точные формулировки законов движения и анализ полученных из них и из закона всемирного тяготения следствий внесли в науку больший вклад, чем работа любого из современников Ньютона. Законы Ньютона можно сформулировать следующим образом:

1) каждое тело остается в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока оно не будет выведено из этого состояния под действием силы, приложенной извне;

2) скорость изменения импульса тела пропорциональна приложенной силе и направлена вдоль линии действия силы;

3) каждому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Система векторных обозначений является удобным способом лаконичного выражения динамических понятий. На любом этапе исследования можно перейти от векторных величин к скалярным, введя удобную систему координат и используя связи между векторами и их проекциями на координатные оси.

Пусть  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{a}$  обозначают положение, скорость и ускорение тела массы  $m$  в системе с началом в  $O$ , так что

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

и

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Тогда импульс тела равен  $m\mathbf{V}$ , а его кинетический момент равен

$$m\mathbf{r} \times \mathbf{V} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

В векторных обозначениях соотношение

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

объединяет законы 1) и 2). Здесь  $\mathbf{V}$  — скорость тела,  $m$  — его масса и  $\mathbf{F}$  — внешняя сила, причем единица силы выбрана таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности равнялся единице. Таким образом, имеем

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (4.2)$$

Здесь предполагается, что масса тела постоянна. Следует заметить, что в случае движения ракеты такое предположение делать нельзя, если двигатель ракеты работает.

Если на тело действует более одной силы, то уравнение (4.2) может быть записано в более общем виде:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i, \quad (4.3)$$

где  $k$  действующих сил складываются векторно.

### 4.3. Закон всемирного тяготения Ньютона

Ньютонов закон всемирного тяготения, один из самых фундаментальных научных законов, является основой небесной механики и астродинамики. Изучением следствий этого закона в течение двух с половиной столетий, прошедших с момента его открытия, занимались самые выдающиеся математики и астрономы. Много изящных математических методов было разработано, чтобы решить сложные системы уравнений, к которым приводят задачи движения систем гравитирующих тел.

Сам закон формулируется с обманчивой простотой: каждая частица вещества во Вселенной притягивает каждую другую частицу вещества с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Следовательно, для двух частиц на расстоянии  $r$  имеет место соотношение

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где  $F$  — сила притяжения,  $m_1$  и  $m_2$  — массы частиц,  $r$  — расстояние между ними, а  $G$  — гравитационная постоянная, часто называемая универсальной гравитационной постоянной.

### 4.4. Решение задачи двух тел

На рис. 4.1 сила тяготения  $\mathbf{F}_1$ , действующая на  $m_1$ , направлена вдоль вектора  $\mathbf{r}$  в сторону тела  $m_2$ , в то время как сила  $\mathbf{F}_2$ , приложенная к  $m_2$ , действует в противоположном направлении.

Из третьего закона Ньютона

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (4.4)$$

Имеем

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.5)$$



Введем векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , направленные из некоторой фиксированной точки  $O$  к частицам с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. После подстановки (4.2) в (4.4), (4.5) уравнения движения частиц под действием сил взаимного притяжения принимают вид

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.6)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (4.7)$$

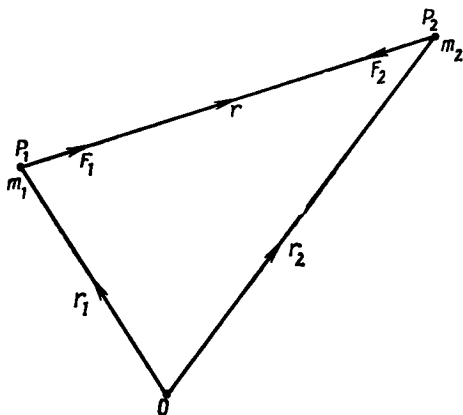


Рис. 4.1.

Складывая уравнения (4.6) и (4.7), получаем

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0,$$

откуда следуют два интеграла:

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{a} \quad (4.8)$$

и

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — постоянные векторы.

Если ввести радиус-вектор  $\mathbf{R}$  центра масс  $G$  двух частиц  $m_1$  и  $m_2$ , то

$$M\mathbf{R} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2,$$

где  $M = m_1 + m_2$ .

Тогда уравнения (4.8) и (4.9) принимают вид

$$M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{a}, \quad M\mathbf{R} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}.$$

Эти соотношения показывают, что центр масс системы движется с постоянной скоростью.

Уравнения (4.6) и (4.7) можно переписать так:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = Gm_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4.10)$$

и

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.11)$$

Вычитая (4.11) из (4.10), получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

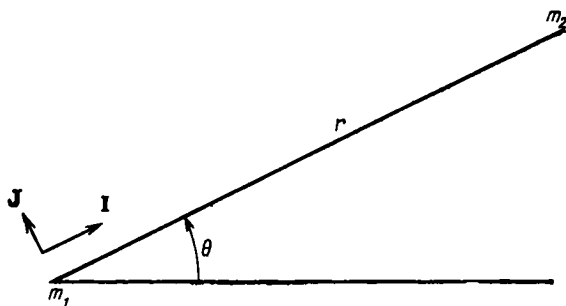


Рис. 4.2.

но  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}$ , следовательно,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (4.12)$$

где  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

Умножая векторно (4.12) на  $\mathbf{r}$ , получаем

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0$$

и после интегрирования

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}, \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{h}$  — постоянный вектор.

Это есть интеграл кинетического момента. Поскольку  $\mathbf{h}$  — постоянный вектор, имеющий неизменное направление при всех  $t$ , то движение одного тела относительно другого совершается в плоскости, определяемой направлением  $\mathbf{h}$ .

В этой плоскости вводятся полярные координаты  $r$  и  $\theta$  (рис. 4.2). Проекции скорости на направление радиуса-вектора, проведенного из  $m_1$  в  $m_2$ , и на перпендикуляр к радиусу-вектору равны  $\dot{r}$  и  $r\dot{\theta}$ , где точкой обозначается дифференцирование по времени  $d/dt$ .

Тогда

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{I}\dot{r} + \mathbf{J}r\dot{\theta}. \quad (4.14)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{J}$  — это единичные векторы, направленные вдоль радиуса-вектора и вдоль перпендикуляра к нему. Подставляя (4.14) в (4.13), получаем

$$\mathbf{I}r \times (\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}r\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}\mathbf{K} = \mathbf{h},$$

где  $\mathbf{K}$  — единичный вектор вдоль нормали к плоскости орбиты. Тогда можно написать

$$r^2\dot{\theta} = h. \quad (4.15)$$

Как видно, постоянная  $h$  равна удвоенной скорости, с которой радиус-вектор заметает площадь. Это и есть математическая форма второго закона Кеплера.

Если теперь умножить уравнение (4.12) скалярно на  $\dot{\mathbf{r}}$ , то получим соотношение

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = 0,$$

которое можно проинтегрировать. В результате находим

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} = C$$

или

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C. \quad (4.16)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Это соотношение представляет собой закон сохранения энергии системы. Заметим, что величина  $C$  не есть полная энергия системы; член  $\frac{1}{2}v^2$  относится к кинетической энергии, а член  $-\mu/r$  — к потенциальной энергии системы (см. разд. 4.10).

Обращаясь снова к рис. 4.2 и вспоминая, что проекции ускорения тела  $m_2$  на радиус-вектор и на перпендикулярное направление равны соответственно  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  и  $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ , уравнение (4.12) можно записать в виде

$$\mathbf{I}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \mathbf{J}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right] + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{I}r = 0.$$

откуда следуют два скалярных уравнения:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (4.18)$$

Из второго уравнения получаем интеграл кинетического момента

$$r^2 \dot{\theta} = h. \quad (4.19)$$

Используя обычную подстановку  $u = 1/r$  и исключая из (4.17), (4.19) время, получаем

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{\mu}{h^2} + A \cos(\theta - \omega), \quad (4.20)$$

где  $A$  и  $\omega$  — две постоянные интегрирования.

После обратного перехода к  $r$  (4.20) принимает вид

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (Ah^2/\mu) \cos(\theta - \omega)}.$$

Уравнение конического сечения в полярных координатах можно записать следующим образом:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (4.21)$$

где

$$p = h^2/\mu, \quad e = Ah^2/\mu.$$

Из решения задачи двух тел следует, в частности, и первый закон Кеплера. Орбиты одного тела относительно другого классифицируются в соответствии с величиной эксцентриситета: при  $0 \leq e < 1$  орбита является эллипсом, при  $e = 1$  — параболой, при  $e > 1$  — гиперболой.

Следует заметить, что случай  $e = 1$  включает в себя также вырожденные в прямую линию эллипс, параболу и гиперболу (см. разд. 4.8). Случай  $e = 0$  соответствует эллипсу с нулевым эксцентриситетом (т. е. окружности). Далее все эти случаи будут подробно исследованы.

## 4.5. Эллиптическая орбита

Эллипс — это геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки, называемой фокусом, к расстоянию до фиксированной линии, называемой директрисой, постоянно (и меньше единицы).

Пусть на рис. 4.3 точка  $S$  будет фокусом, а линия  $KL$  директрисой, причем  $SZ \perp KL$ . Возьмем такую точку  $P$ , чтобы длины  $SP$  и  $PM$  были связаны соотношением

$$SP/PM = e (< 1). \quad (4.22)$$

Тогда геометрическое место таких точек (т. е. фигура  $APBA'B'A'$ ), для которых имеет место соотношение (4.22) при постоянном  $e$ , является эллипсом с эксцентриситетом  $e$  и с центром в  $C$ . В этом эллипсе точка  $S'$  является вторым фокусом,  $AA' = 2a$  (большая ось),  $BB' = 2b$  (малая ось),  $b = a(1 - e^2)^{1/2}$ ,  $CS/CA = e$  и  $SP + PS' = 2a$ .

Кроме того, хорда  $QQ'$ , проходящая через  $S$  и параллельная малой оси, называется *фокальным параметром*; фокальный полу-параметр  $SQ (=SQ')$  имеет длину  $p = a(1 - e^2)$ .

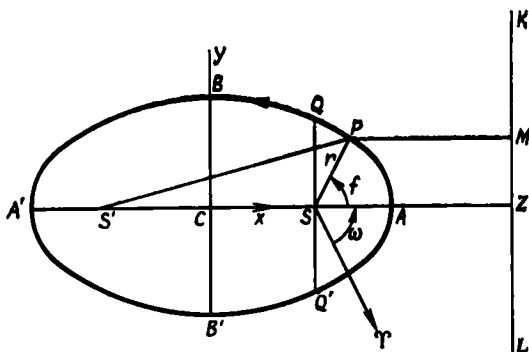


Рис. 4.3.

В декартовых координатах  $Cx$  и  $Cy$ , введенных так, как показано на рис. 4.3, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если полярные координаты  $r$  и  $f$  введены таким образом, что  $r = SP$ , а  $f = \angle ASP$ , то уравнение эллипса в полярной форме примет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (4.23)$$

Доказательство всех приведенных выше утверждений можно найти в любой книге, посвященной коническим сечениям.

В оставшейся части этой главы решение задачи двух тел применяется к задачам орбитального движения в Солнечной системе; однако, как будет видно в дальнейшем, многие понятия и результаты могут быть оставлены без изменений и в случаях, когда, например, рассматриваются двойные звезды.

Итак, пусть тело  $P$  движется вокруг Солнца  $S$ . Фокус  $S'$  часто называют пустым фокусом. Пусть в данный момент плоскость орбиты совпадает с плоскостью эклиптики. Возьмем в качестве

опорного направление на точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$  (см. рис. 4.3). Тогда, если  $\angle PS\Upsilon = \theta$  и  $\angle AS\Upsilon = \omega$ , истинная аномалия  $f = \theta - \omega$  и уравнение орбиты имеет вид

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (4.24)$$

Видно, что если  $\theta = \omega$ , то тело находится в перигелии и  $r = a(1 - e)$ . Если  $\theta = 180^\circ + \omega$ , то тело находится в афелии и  $r = a(1 + e)$ .

Из уравнения (4.15) получаем соотношение

$$r^2 \dot{f} = h, \quad (4.25)$$

где  $h$  — удвоенная секториальная скорость.

Поскольку площадь эллипса равна  $\pi ab$  и эта площадь должна заметаться за время  $T$ , равное периоду обращения тела по орбите, то

$$\frac{2\pi ab}{T} = h$$

или

$$2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2} = hT.$$

Далее, из уравнений (4.21) и (4.24) получаем

$$h^3 = \mu a (1 - e^2),$$

где  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . Исключая  $h$ , окончательно находим

$$T = 2\pi (a^3/\mu)^{1/2}. \quad (4.26)$$

Это важное соотношение показывает, что период зависит только от величины большой полуоси и суммы масс.

Если  $M_S$  и  $m_1$  — массы Солнца и планеты соответственно, а  $T_1$  и  $a_1$  — период и большая полуось орбиты планеты, то уравнение (4.26) дает

$$G(M_S + m_1) = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^3}. \quad (4.27)$$

Для другой планеты массы  $m_2$ , движущейся по орбите с периодом  $T_2$  и большой полуосью  $a_2$ , имеем

$$G(M_S + m_2) = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^3}. \quad (4.28)$$

Следовательно, из (4.27), (4.28) получаем

$$\frac{M_S + m_1}{M_S + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2. \quad (4.29)$$

Уравнение (4.29) представляет собой точную форму третьего закона Кеплера. Заметим, что фактически даже для Юпитера, самой массивной планеты,  $m/M_S \sim 10^{-3}$ , так что левая часть уравнения (4.29) близка к единице.

#### 4.5.1. Измерение массы планеты

Если у планеты есть спутник, естественный или искусственный, то путем изучения орбиты этого спутника можно измерить массу планеты.

Пусть уравнение (4.27) относится к движению Земли по орбите вокруг Солнца ( $m_1$  — масса Земли), причем искусственный спутник Земли массы  $m'$  движется по орбите вокруг Земли с периодом  $T'$  и большой полуосью  $a'$ . Тогда

$$G(m_1 + m') = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{m_1 + m'}{M_S + m_1} = \left(\frac{a'}{a_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T'}\right)^2. \quad (4.30)$$

Массой спутника по сравнению с массой Земли, так же как массой Земли по сравнению с массой Солнца можно пренебречь. Тогда можно написать

$$\frac{m_1}{M_S} = \left(\frac{a'}{a_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T'}\right)^2. \quad (4.31)$$

Величины в правой части уравнения (4.31) могут быть измерены, и, таким образом, может быть найдена масса Земли в единицах, равных массе Солнца.

Только три планеты в Солнечной системе не имеют спутников: Меркурий, Венера и Плутон\*. Их массы были получены косвенным путем (значительно менее точно, чем массы других планет) по воздействиям на орбиты других планет. Эти *возмущения* слегка изменяют элементы орбит планет. Измерения таких отклонений позволяют получить значения масс планет, не имеющих спутников. В последние годы массы Венеры и Меркурия были измерены более точно, благодаря наблюдениям за искажениями орбит космических аппаратов, например «Маринера-10», вызванных влиянием гравитационных полей планет.

#### 4.5.2. Скорость движения по эллиптической орбите

Пусть тело в точке  $P$  ( $SP = r$ ) имеет скорость  $V$ . Эта скорость, направленная по касательной к эллипсу в точке  $P$ , имеет радиальную компоненту  $\dot{r}$  и поперечную компоненту  $r\dot{\theta}$ . Следовательно,

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (4.32)$$

\* См. прим. ред. на с. 12.

Из (4.23) и (4.25) получаем

$$\dot{r} = \frac{h}{p} e \sin f. \quad (4.33)$$

Кроме того, используя (4.25), находим

$$rf = \frac{h}{r} = \frac{h}{p} (1 + e \cos f). \quad (4.34)$$

Возводя в квадрат и складывая (4.33) и (4.34), получаем

$$V^2 = \left(\frac{h}{p}\right)^2 (1 + 2e \cos f + e^2)$$

или

$$V^2 = \left(\frac{h}{p}\right)^2 [2 + 2e \cos f - (1 - e^2)]. \quad (4.35)$$

Воспользовавшись (4.23), уравнение (4.35) можно преобразовать к виду

$$V^2 = \frac{2h^2}{rp} - \left(\frac{h}{p}\right)^2 (1 - e^2).$$

Но  $h^2/\mu = p = a(1 - e^2)$ , следовательно,

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (4.36)$$

Видно, что в перигелии, где  $r = a(1 - e)$ , скорость  $V$  максимальна:

$$V_P^2 = \frac{\mu}{a} \left(\frac{1+e}{1-e}\right),$$

а в афелии, где  $r = a(1 + e)$ , минимальна:

$$V_A^2 = \frac{\mu}{a} \left(\frac{1-e}{1+e}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что  $V_A V_P = \mu/a = \text{const.}$

Надо также отметить, что  $V$  является функцией только расстояния  $r$  [см. (4.36)]. Перепишем (4.36) по-другому:

$$a = \frac{\mu}{(2\mu/r) - V^2}. \quad (4.37)$$

Но

$$T = 2\pi \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{1/2}, \quad (4.38)$$

следовательно,

$$T = 2\pi \left(V^2 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-3/2}. \quad (4.39)$$



Эти соотношения освещают некоторые интересные свойства эллиптического движения. Видно, что величина большой полуоси есть функция длины радиуса-вектора и квадрата скорости. Таким образом, если тело массы  $m_1$  брошено на данном расстоянии  $r$  от другого тела массы  $m_2$  со скоростью  $V$ , то величина большой полуоси орбиты зависит только от величины скорости и не зависит от ее направления. На рис. 4.4 все орбиты имеют один и тот же начальный радиус-вектор  $SP$  и одинаковую по величине, но различную по направлению начальную скорость  $V$ . Все орбиты имеют одинаковую большую полуось  $a$ , определяемую выражением (4.37).

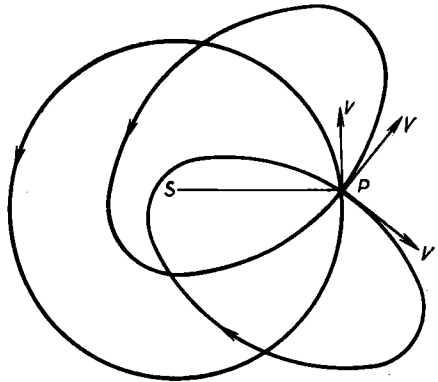


Рис. 4.4.

Из уравнения (4.38) или (4.39) также следует, что периоды этих орбит также должны быть одинаковыми. Если бы из точки  $P$  одновременно были брошены частицы с одинаковыми по величине, но различными по направлению скоростями, то после прохождения орбит, имеющих совершенно различную форму, эти частицы вернулись бы в точку  $P$  в один и тот же момент времени.

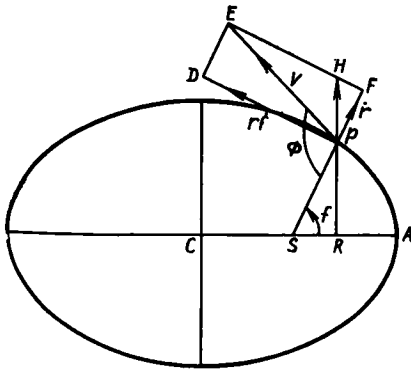


Рис. 4.5.

Скорость на эллиптической орбите бывает удобно раскладывать на две компоненты, постоянные по величине. Одна компонента перпендикулярна радиусу-вектору и, таким образом, изменяется по направлению; другая компонента перпендикулярна большой оси и, следовательно, постоянна как по величине, так и по направлению.

На рис. 4.5 скорость  $V$  разложена на компоненты  $\dot{r}$  (направлена вдоль  $SP$ , равна  $PE$ ) и  $r\dot{f}$  (перпендикулярна  $SP$ , равна  $PD$ ). Тогда нужные нам компоненты будут равны  $HE$  и  $PH$ .

Имеем

$$HE = PD - FH = r\dot{f} - \dot{r} \operatorname{ctg} f.$$

Воспользовавшись уравнениями (4.33) и (4.34), получим

$$HE = h/p. \quad (4.40)$$

Далее можно написать

$$PH = PF \operatorname{cosec} f = r \operatorname{cosec} f,$$

откуда, учитывая (4.33), находим

$$PH = eh/p. \quad (4.41)$$

Следует отметить, что в случае круговой орбиты  $e = 0$  и постоянная компонента представляет собой круговую скорость  $V_c$ , определяемую формулой

$$V_c = h/p = (\mu/a)^{1/2}, \quad (4.42)$$

где  $a$  — радиус круговой орбиты.

### 4.5.3. Угол между вектором скорости и радиусом-вектором

Пусть  $\phi$  на рис. 4.5 обозначает угол между вектором скорости  $PE$  и радиусом-вектором  $SP$ . Тогда

$$\angle SPE = 90^\circ + \angle DPE.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \cos \angle DPE &= DP/PE = r\dot{f}/V, \\ \sin \angle DPE &= \dot{r}/V. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Из первого уравнения (4.43), используя (4.25) и (4.36), получаем

$$\cos \angle DPE = \frac{h}{r\mu^{1/2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)^{1/2}}.$$

Учитывая, что  $h^2 = \mu a (1 - e^2)$ , после несложных преобразований находим

$$\cos \angle DPE = \left[ \frac{a^2 (1 - e^2)}{r(2a - r)} \right]^{1/2},$$

откуда

$$\phi = 90^\circ + \arccos \left[ \frac{a^2 (1 - e^2)}{r(2a - r)} \right]^{1/2}$$

или

$$\sin \phi = \left[ \frac{a^2 (1 - e^2)}{r(2a - r)} \right]^{1/2}. \quad (4.44)$$

Разрешая (4.44) относительно  $e$ , получаем

$$e = \left[ 1 - \frac{r}{a^2} (2a - r) \sin^2 \phi \right]^{1/2}. \quad (4.45)$$

Если воспользоваться уравнениями (4.24), (4.25), (4.43) и (4.53), то можно получить следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \left( \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 E} \right)^{1/2} = \frac{1 + e \cos f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}, \\ \cos \phi &= - \frac{e \sin E}{(1 - e^2 \cos^2 E)^{1/2}} = - \frac{e \sin f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Величина  $E$  называется эксцентрической аномалией и будет определена в следующем разделе.

#### 4.5.4. Средняя, эксцентрическая и истинная аномалии

В этом разделе будут рассмотрены средняя, эксцентрическая и истинная аномалии и связи между ними для случая эллиптической орбиты.

Радиус-вектор за период  $T$  поворачивается на  $2\pi$  радиан, поэтому для средней угловой скорости  $n$  (среднего движения) справедлива формула

$$n = 2\pi/T. \quad (4.47)$$

Соотношение

$$\frac{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}}{T} = h$$

можно переписать в виде

$$na^2 (1 - e^2)^{1/2} = h. \quad (4.48)$$

Если  $\tau$  — момент прохождения через перигелий, то радиус-вектор, вращающийся вокруг  $S$  со средней угловой скоростью  $n$ , за время  $(t - \tau)$  описывает угол

$$M = n(t - \tau). \quad (4.49)$$

Введенная таким образом величина  $M$  называется *средней аномалией*.

Построим на  $AA'$  как на диаметре окружность (рис. 4.6) и проведем через точку  $P$  на эллипсе линию, перпендикулярную большой оси  $AA'$ , до пересечения с окружностью в точке  $Q$ . Угол  $QCA$ , обычно обозначаемый  $E$ , называется *эксцентрической аномалией* и связан с истинной аномалией  $f$ .

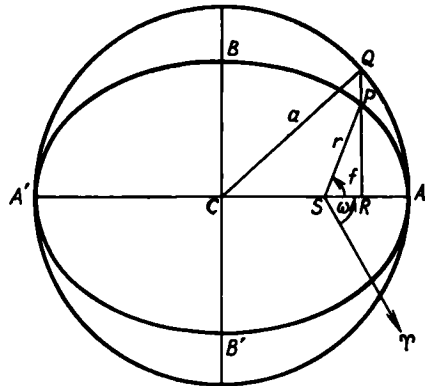


Рис. 4.6.

Имеем

$$SR = CR - CS = a \cos E - ae,$$

но

$$SR = r \cos f,$$

следовательно,

$$r \cos f = a (\cos E - e). \quad (4.50)$$

Кроме того, в силу свойств эллипса имеет место соотношение

$$PR/QR = b/a. \quad (4.51)$$

В результате получаем

$$r \sin f = b \sin E$$

или

$$r \sin f = a (1 - e^2)^{1/2} \sin E. \quad (4.52)$$

Возводя в квадрат (4.50) и (4.52) и складывая, находим

$$r = a (1 - e \cos E). \quad (4.53)$$

Имеем

$$r \cos f = r \left(1 - 2 \sin^2 \frac{f}{2}\right),$$

откуда

$$2r \sin^2 (f/2) = r (1 - \cos f). \quad (4.54)$$

Используя (4.50) и (4.53), получаем

$$2r \sin^2 (f/2) = a (1 + e) (1 - \cos E), \quad (4.55)$$

и аналогично

$$2r \cos^2 (f/2) = a (1 - e) (1 + \cos E). \quad (4.56)$$

Разделив (4.55) на (4.56), окончательно находим

$$\operatorname{tg} \left( \frac{f}{2} \right) = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left( \frac{E}{2} \right). \quad (4.57)$$

Эксцентрическая аномалия  $E$  и средняя аномалия  $M$  связаны между собой важным уравнением, называемым уравнением Кеплера. Выведем его.

Из второго закона Кеплера имеем

$$\frac{\text{площадь } SPA}{\text{площадь эллипса}} = \frac{t - \tau}{T},$$

или

$$\text{площадь } SPA = \frac{\pi ab (t - \tau)}{T},$$

или, используя (4.47),

$$\text{площадь } SPA = \frac{1}{2} ab M. \quad (4.58)$$

С другой стороны, имеем

$$\text{площадь } SPA = \text{площадь } SPR + \text{площадь } RPA.$$

Если разделить площадь  $RPA$  на узкие полосы, параллельные малой оси, и воспользоваться свойством (4.51), то можно показать, что

$$\text{площадь } RPA = \frac{b}{a} (\text{площадь } QRA).$$

Тогда, воспользовавшись (4.50) и (4.52), получаем

$$\begin{aligned} \text{площадь } SPA &= \text{площадь } SPR + \frac{b}{a} (\text{площадь } QRA) = \\ &= \text{площадь } SPR + \frac{b}{a} (\text{площадь } QCA - \text{площадь } QCR) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin f \cos f + \frac{b}{a} (\frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \sin E \cos E) = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Если сравнить (4.58) и (4.59), то видно, что имеет место связь

$$E - e \sin E = M = n(t - \tau). \quad (4.60)$$

Это и есть уравнение Кеплера. Следует отметить, что здесь и  $E$  и  $M$  измеряются в радианах.

#### 4.5.5. Решение уравнения Кеплера

В некоторых астрономических и астродинамических приложениях по заданной эксцентрической аномалии  $E$  и известному эксцентриситету орбиты требуется определить среднюю аномалию  $M$ . В этих случаях  $M$  без всяких затруднений определяется из уравнения Кеплера (4.60). Однако значительно чаще бывают известны  $M$  и  $e$  и требуется найти соответствующее значение  $E$ . Для решения этой задачи используются различные методы последовательных приближений. Разработкой таких методов решения уравнения Кеплера занимались многие математики и астрономы, в том числе и сам Кеплер.

Обычный метод решения состоит в получении приближенного значения  $E$ , почти удовлетворяющего уравнению (4.60), с использованием таблиц или графиков [1, 2, 6]. Если эксцентриситет меньше 0,1, то в качестве хорошего начального приближения  $E$  (обозначим его  $E_0$ ) можно взять  $E_0 = M$ ; в других случаях необходимо воспользоваться таблицами или графиками. Пусть мы имеем начальное значение  $E_0$ , тогда истинное значение  $E$  может быть представлено в виде

$$E = E_0 + \Delta E_0,$$

где  $\Delta E_0$  мало по сравнению с  $E_0$ .

Подставляя  $E$  в (4.60), получаем

$$(E_0 + \Delta E_0) - e \sin (E_0 + \Delta E_0) = M. \quad (4.61)$$

Раскладывая в ряд и оставляя члены только нулевого и первого порядка по  $\Delta E_0$ , находим

$$E_0 - e \sin E_0 + \Delta E_0 (1 - e \cos E_0) = M$$

или

$$\Delta E_0 = \frac{M - (E_0 - e \sin E_0)}{1 - e \cos E_0}.$$

Таким образом, получаем  $E_1 = E_0 + \Delta E_0$ , представляющее собой более точное значение  $E$ , и вся процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

Другой метод строится по следующей схеме: переписываем уравнение Кеплера в виде

$$E = M + e \sin E,$$

выбираем, как и раньше, начальное приближение  $E_0$ , а затем вычисляем

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e \sin E_0, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

и т. д.

*Пример.* Известно, что для орбиты Юпитера  $T = 11,8622$  лет,  $e = 0,04844$ . Вычислить с точностью  $10''$  величину эксцентрической аномалии  $E$  Юпитера через пять лет после прохождения им перигелия.

Поскольку мы хотим, чтобы средняя аномалия  $M$  выражалась в градусах, а  $(t - \tau)$  выражено в годах, то нужно, чтобы среднее движение выражалось в градусах в год.

Так как  $M$  увеличивается на  $360^\circ$  за  $T$  лет, то среднее движение  $n$  равно  $360^\circ/T$ , так что

$$M = 5n = \frac{5 \times 360^\circ}{11,8622} = 151^\circ 44' 33,0''.$$

По величине  $E$  должно быть того же порядка, что и  $M$  (т. е.  $\sim 540\,000''$ ). Поэтому, чтобы получить  $E$  в градусах с точностью до  $10''$ , нужно знать пять значащих цифр. Если в нашем распоряжении нет электронного калькулятора, то необходимо воспользоваться шестизначными логарифмическими таблицами.

*Первое приближение.* Поскольку  $e$  мало, можно положить

$$E_1 = M = 151^\circ 44' 30''.$$

*Второе приближение.* Прежде чем воспользоваться уравнением Кеплера в виде

$$E = M + e \sin E,$$

переведем  $M$  из градусов в радианы при помощи соотношения

$$M^\circ = \left( \frac{\pi M^\circ}{180} \right) [\text{радиан}].$$

Тогда получаем

$$E^\circ = M^\circ + \left( \frac{180e}{\pi} \right)^\circ \sin E^\circ.$$

В нашем примере  $(180e/\pi) = 2,77541^\circ$ , следовательно,

$$E_2^\circ = M^\circ + 2,77541^\circ \sin M^\circ = 151^\circ 44' 30'' + 1^\circ 18' 50''$$

или

$$E_2^\circ = 153^\circ 03' 20''.$$

*Третье приближение.* Имеем

$$E_3 = M + e \sin E_2,$$

откуда

$$\begin{aligned} E_3 &= 151^\circ 44' 30'' + 2,77541^\circ \sin 153^\circ 03' 20'' = \\ &= 151^\circ 44' 30'' + 1^\circ 15' 27,4'', \end{aligned}$$

т. е.

$$E_3 = 152^\circ 59' 57,4''.$$

*Четвертое приближение.* Находим значение

$$E_4 = 153^\circ 00' 06'',$$

которое и является решением задачи.

#### 4.5.6. Уравнение центра

Истинную аномалию  $f$  можно представить в виде ряда, члены которого зависят от эксцентриситета  $e$  и средней аномалии  $M$ .

Легко видно, что если в процедуре (4.62) положить  $E_0 = M$ , то, проведя разложение по степеням  $e$  и выполнив соответствующие аналитические выкладки, можно получить

$$\begin{aligned} E &= M + (e - e^3/8) \sin M + 1/2 e^2 \sin 2M + \\ &+ 3/8 e^3 \sin 3M + O(e^4), \end{aligned} \quad (4.63)$$

где  $O(e^4)$  обозначает члены порядка  $e^4$  и выше.

Кроме того, используя уравнение (4.57), можно показать [9], что справедливо следующее представление  $f$  в виде ряда по  $e$  и  $E$ :

$$\begin{aligned} f &= E + (e + 1/4 e^3) \sin E + 1/4 e^2 \sin 2E + \\ &+ 1/12 e^3 \sin 3E + O(e^4). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Объединение уравнений (4.63) и (4.64) дает уравнение центра

$$\begin{aligned} f - M &= (2e - 1/4 e^3) \sin M + 5/4 e^2 \sin 2M + \\ &+ 13/12 e^3 \sin 3M + O(e^4). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Таким образом, если даны  $e$  и  $M$ , то истинную аномалию можно найти непосредственно из уравнения (4.65). Заметим, однако, что использование этих разложений ограничивается орбитами с малым эксцентриситетом.

В ряде таблиц [7, 12] приведены значения истинной аномалии  $f$  или значения величин  $(r/a) \cos f$  и  $(r/a) \sin f$  для различных эксцентриситетов. В подробных таблицах Кейли [3] собраны разложения большого числа часто используемых функций эллиптического движения.

#### 4.5.7. Положение тела на эллиптической орбите

Как в астрономии, так и в астродинамике часто встречаются следующие две задачи: 1) определить положение и скорость тела по заданным элементам и времени; 2) определить элементы орбиты по заданному положению, скорости и времени.

Пример второй задачи: с Земли на орбиту вокруг Солнца запускается космический аппарат, причем известны его положение и скорость в момент запуска; требуется определить элементы эллиптической орбиты  $a$ ,  $e$  и  $\tau$ . Пример первой задачи: требуется найти положение тела спустя некоторое время после того, как оно было запущено на орбиту вокруг Солнца (элементы орбиты известны).

Ниже приводятся полученные в предыдущих разделах формулы, которые используются при решении этих задач:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}, \quad (4.66)$$

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (4.67)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right), \quad (4.68)$$

$$M = E - e \sin E, \quad (4.69)$$

$$M = n(t - \tau), \quad (4.70)$$

$$h^2 = \mu a(1 - e^2), \quad (4.71)$$

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (4.72)$$

$$T = 2\pi/n, \quad (4.73)$$

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}, \quad (4.74)$$

$$\sin \phi = \left[ \frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)} \right]^{1/2}. \quad (4.75)$$

Заметим, что в этих формулах  $a$ ,  $e$  и  $\tau$  — три элемента эллиптической орбиты. Предполагается, что  $\mu$  известно. Если заданы



эти элементы и время, то положение и скорость тела на орбите могут быть найдены следующим образом:

- 1) из уравнения (4.74) находим  $n$ ;
- 2) подставляя  $n$  в (4.70), определяем  $M$ ;
- 3) решая уравнение Кеплера (4.69), находим  $E$ ;
- 4) из (4.67) получаем  $r$ ;
- 5) значение  $r$  можно проверить, вычислив его независимо при помощи (4.68) и (4.66);
- 6) из уравнения (4.72) вычисляем  $V$ ;
- 7) из (4.75) вычисляем  $\phi$ .

В другой задаче, когда предполагается, что заданы величины  $r$ ,  $\phi$ ,  $t$  и  $\mu$ , последовательность действий следующая:

- 1) из уравнения (4.72) вычисляем  $a$ ;
- 2) из (4.75) вычисляем  $e$ ;
- 3) из (4.67) получаем  $E$ ;
- 4) для вычисления  $f$  используем выражение (4.66);
- 5) проверяем  $f$ , вычислив его независимо при помощи уравнения (4.68);
- 6) находим  $M$  из уравнения (4.69);
- 7) находим  $\tau$  из (4.70).

## 4.6. Параболическая орбита

В этом случае задачи двух тел (при  $e = 1$ ) орбита незамкнута. Второе тело, приходя из бесконечности, при наибольшем сближении достигает максимальной скорости, после чего снова уходит в бесконечность (рис. 4.7).

Уравнение параболической орбиты, получающееся из (4.21), если в нем положить  $e = 1$ , имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \cos f}, \quad (4.76)$$

где, как и раньше,  $p$  и  $f$  представляют соответственно фокальный полупараметр и истинную аномалию.

Интеграл площадей имеет вид

$$r^2 \dot{f} = h, \quad (4.77)$$

где  $p = h^2/\mu$ . Видно, что при  $f = 0$   $r = p/2$ .

Если оси декартовой системы координат  $Ax$  и  $Ay$  направлены так, как показано на рис. 4.7, то каноническое уравнение параболы записывается следующим образом:

$$y^2 = 2px.$$

Скорость  $V$  тела на параболической орбите, как и раньше, представляется в виде

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2.$$

Дифференцируя (4.76) и учитывая (4.77), можно показать, что для  $V$  справедливо следующее простое соотношение:

$$V^2 = 2\mu/r. \quad (4.78)$$

Имеет место интересная связь между круговой и параболической скоростями. В разд. 4.5.2 было показано, что скорость  $V_c$  на круговой орбите радиуса  $a$  определяется формулой

$$V_c^2 = \mu/a. \quad (4.79)$$

Если тело получит такой импульс, что его скорость  $V$  станет удовлетворять соотношению

$$V^2 = 2\mu/a, \quad (4.80)$$

то тело перейдет на параболическую орбиту и уйдет по ней в бесконечность. Тело достигнет бесконечности с нулевой скоростью (в уравнении (4.78) надо положить  $r = \infty$ ), поэтому параболическую скорость называют еще скоростью освобождения. Из уравнений (4.79) и (4.80) видно, что

$$\begin{aligned} & \text{(скорость освобождения)} = \\ & = (\text{круговая скорость}) \times \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

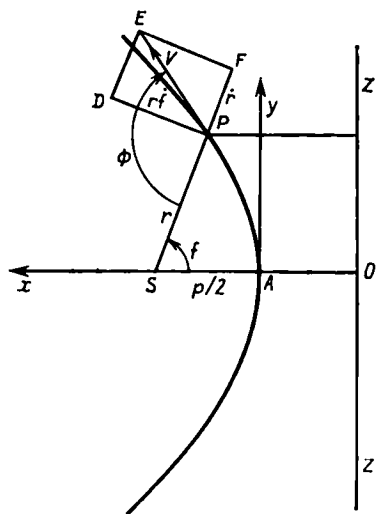


Рис. 4.7.

Это соотношение полезно запомнить.

Теперь уравнение (4.76) можно записать в виде

$$r = \frac{p}{2} \sec^2 \frac{f}{2} = \frac{p}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} \right).$$

Тогда (4.77) даст

$$\left( \frac{p}{2} \right)^2 f \sec^4 \frac{f}{2} = (p\mu)^{1/2}$$

или

$$4 \left( \frac{\mu}{p^3} \right)^{1/2} dt = \left( \sec^2 \frac{f}{2} + \sec^2 \frac{f}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} \right) df.$$

Интегрируя, получаем

$$2 \left( \frac{\mu}{p^3} \right)^{1/2} (t - \tau) = \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2}, \quad (4.82)$$

где  $\tau$  — момент прохождения перигелия.

Если ввести  $\bar{n}$  таким образом, чтобы

$$\bar{n}^2 \rho^3 = \mu,$$

[ср. с (4.74)] и положить

$$D = \operatorname{tg} \frac{f}{2},$$

то уравнение (4.82) запишется в виде

$$D + \frac{D^3}{3} = 2\bar{n}(t - \tau). \quad (4.83)$$

Уравнения (4.82) и (4.83) представляют собой модификации уравнения Баркера, которое широко применялось при изучении орбит комет, а теперь используется в астродинамике. При помощи этого уравнения были составлены таблицы, позволяющие путем интерполяции находить  $f$  по  $t - \tau$  и наоборот [13].

Чтобы решить уравнение Баркера, являющееся кубическим относительно  $\operatorname{tg}(f/2)$ , положим

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{ctg} \theta - \operatorname{tg} \theta,$$

так что

$$\operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = -3 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \operatorname{ctg}^3 \theta - \operatorname{tg}^3 \theta.$$

Тогда (4.82) преобразуется к виду

$$\operatorname{ctg}^3 \theta - \operatorname{tg}^3 \theta = 6\bar{n}(t - \tau).$$

Введем  $s$  следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \theta = \left( \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right)^{1/3}.$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} s = 3\bar{n}(t - \tau),$$

и путем последовательного решения уравнений

$$\operatorname{ctg} s = 3\bar{n}(t - \tau),$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \left( \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right)^{1/3}, \quad (4.84)$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2\theta$$

можно получить решение уравнения Баркера. После определения  $\operatorname{tg} \frac{f}{2}$  значение  $r$  находится из соотношения

$$r = \frac{\rho}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} \right). \quad (4.85)$$

Скорость определяется из уравнения (4.78).

Для угла  $\phi$  между вектором скорости и радиусом-вектором получаем формулу

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{r\dot{f}}{V}\right),$$

которая при помощи (4.77) и (4.78) приводится к виду

$$\phi = 90^\circ + \arccos\left(\frac{p}{2r}\right)^{1/2}. \quad (4.86)$$

Эту связь можно выразить следующим образом:

$$p = 2r \sin^2 \phi. \quad (4.87)$$

Итак, если известны элементы параболической орбиты  $p$  и  $\tau$ , то возможно прямое вычисление значений  $r$ ,  $V$  и  $\phi$  для данного  $t$  ( $\mu$  считается известным).

Если, наоборот, заданы значения  $\mu$ ,  $r$ ,  $V$ ,  $\phi$  и  $t$ , то элементы параболической орбиты  $p$  и  $\tau$  могут быть найдены последовательным применением (4.87), (4.85) и (4.82).

## 4.7. Гиперболическая орбита

В астрономии гиперболические орбиты встречаются главным образом при исследовании движения комет и метеоров, в астродинамике же с такими орбитами сталкиваются очень часто. Например, для того чтобы вывести космический аппарат на межпланетную орбиту, требуется такая энергия, что орбиту космического аппарата относительно Земли, пока он не удалится приблизительно на один миллион километров, можно считать гиперболой.

Пусть точка  $P$  движется так, что  $SP/PM = e$  (см. рис. 4.8), где  $e$  постоянно и больше единицы, а прямая  $Z'XZ$  перпендикулярна  $SX$ . Тогда  $P$  описывает ветвь гиперболы  $Q'AQ$ , уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f}. \quad (4.88)$$

При  $f = 0$ ,  $r = a(e - 1)$ .

В декартовых координатах каноническое уравнение гиперболы записывается следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Здесь  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ .

Очевидно, ветвь гиперболы  $Q_1'A'Q_1$  может быть описана точкой  $P_1$ , движущейся аналогичным образом относительно  $S'$ , но эта ветвь нас не интересует, поскольку каждая конкретная точка описывает только одну ветвь.

Когда  $r$  обращается в бесконечность, выполняется условие  $1 + e \cos f = 0$ . (4.89)

Обозначив соответствующее значение  $f$  через  $f_0$ , получаем

$$f_0 = \arccos(-1/e),$$

а это означает, что истинная аномалия может изменяться только от  $-\pi + \arccos(1/e)$  до  $+\pi - \arccos(1/e)$ . Прямые, соответствующие этим предельным значениям, касаются гиперболы и являются ее асимптотами. Они составляют с осью абсцисс угол  $\pi - \arccos(1/e)$ . Заметим, что асимптоты могут определяться также из соотношений

$$\operatorname{tg} \psi = \pm b/a,$$

где  $\psi$  — угол с осью абсцисс. Фокальный полупараметр задается формулой

$$SQ = p = a(e^2 - 1).$$

Как и для случая эллиптического движения, доказательство всех этих свойств можно найти в любой книге, посвященной коническим сечениям.

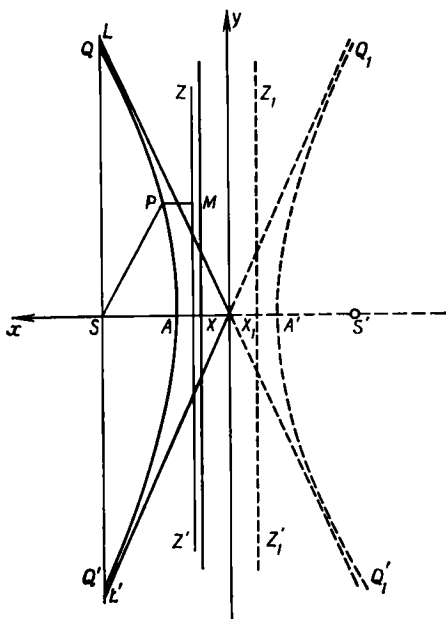


Рис. 4.8.

### 4.7.1. Скорость на гиперболической орбите

Интеграл площадей в случае гиперболической орбиты имеет вид

$$r^2 \dot{f} = h = \mu^{1/2} p^{1/2}. \quad (4.90)$$

Действуя так же, как в разд. 4.5.2 и воспользовавшись уравнениями (4.88) и (4.90), найдем, что для скорости  $V$  имеет место формула

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right). \quad (4.91)$$

В перигелии

$$V_P^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{e+1}{e-1} \right). \quad (4.92)$$

Заметим, что при  $r = \infty$

$$V^2 = \mu/a. \quad (4.93)$$

Другими словами, тело, достигнув бесконечности, имеет ненулевую скорость.

Скорость на гиперболической орбите можно разложить на две компоненты  $h/p$  и  $eh/p$ , перпендикулярные радиусу-вектору и оси  $SA$  соответственно. Это следует непосредственно из того, что уравнение и для эллипса, и для гиперболы имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

так что соответствующий анализ, выполненный в разд. 4.6.3, справедлив и для гиперболического случая. Такой же вывод справедлив и для параболической орбиты, когда  $e = 1$ , причем тогда обе компоненты равны по величине.

Угол между вектором скорости и радиусом-вектором находится так же, как и в случае эллиптической орбиты. Имеем

$$\phi = 90^\circ + \arccos \left( \frac{rf}{V} \right),$$

откуда, воспользовавшись (4.90) и (4.91), получаем

$$\phi = 90^\circ + \arccos \left[ \frac{a^2 (e^2 - 1)}{r(2a + r)} \right]^{1/2}. \quad (4.94)$$

Разрешив уравнение (4.94) относительно  $e$ , находим

$$e = \left[ 1 + \frac{r}{a^2} (2a + r) \sin^2 \phi \right]^{1/2}. \quad (4.95)$$

Как и в случае эллиптической орбиты, легко получаются следующие соотношения между  $\phi$ ,  $f$  и  $F$ :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \left( \frac{e^2 - 1}{e^2 \operatorname{ch} F - 1} \right)^{1/2} = \frac{1 + e \cos f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}, \\ \cos \phi &= - \frac{e \operatorname{sh} F}{(e^2 \operatorname{ch}^2 F - 1)^{1/2}} = - \frac{e \sin f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Здесь  $F$  — величина, аналогичная эксцентрической аномалии, которая будет введена в следующем разделе.

#### 4.7.2. Положение на гиперболической орбите

В случае гиперболической орбиты справедливы все уравнения, аналогичные уравнениям (4.66)—(4.75) для эллиптической орбиты, за исключением (4.73).

Введем  $v$  так, что

$$v^2 a^3 = \mu. \quad (4.97)$$

Из уравнения (4.88) получаем

$$\cos f = \frac{a(e^2 - 1)}{er} - \frac{1}{e},$$

откуда находим

$$\frac{df}{dr} = \frac{a(e^2 - 1)^{1/2}}{r[(a+r)^2 - a^2 e^2]^{1/2}}. \quad (4.98)$$

Из уравнений (4.90) и (4.97) получаем

$$v \frac{dt}{dr} = \frac{r}{a[(a+r)^2 - a^2 e^2]^{1/2}}. \quad (4.99)$$

Введем теперь переменную  $F$ , аналогичную эксцентрической аномалии  $E$  для эллиптической орбиты, следующим образом:

$$r = a(e \operatorname{ch} F - 1). \quad (4.100)$$

Тогда

$$\operatorname{ch} F = \frac{a+r}{ae}$$

и уравнение (4.99) принимает вид

$$v \frac{dt}{dF} = e \operatorname{ch} F - 1.$$

Интегрируя, получаем уравнение

$$e \operatorname{sh} F - F = M = v(t - \tau), \quad (4.101)$$

аналогичное уравнению Кеплера.

При решении уравнения (4.101) возникают те же проблемы, что и при решении уравнения Кеплера для эллиптического движения. Первая проблема состоит в нахождении приближенного значения  $F$ . Один из возможных методов решения этой задачи состоит в том, что строятся графики функций

$$y_1 = \frac{M+F}{e} \quad \text{и} \quad y_2 = \operatorname{sh} F.$$

Их пересечение ( $y_1 = y_2$ ) дает необходимое приближение  $F$  при данном  $M$ . Другой метод состоит в следующем: заметим, что при  $F < 2,5$  можно написать

$$(e \operatorname{sh} F) - F \simeq \frac{eF^3}{6} + (e-1)F = M.$$

Кубическое уравнение

$$F^3 + \frac{6(e-1)}{e} F - \frac{6M}{e} = 0 \quad (4.102)$$

имеет решение

$$F = Y \operatorname{sh} \omega,$$

где  $\operatorname{sh} 3\omega = 3M/Y(e-1)$ ,  $Y = [8(e-1)/e]^{1/2}$ .

Следует отметить, что если  $e \sim 1$ , то надо решать уравнение

$$F^3 = 6M/e.$$

Если  $F > 2,5$ , то в качестве начального приближения можно использовать значение

$$F \approx \ln(2M/e), \quad (4.103)$$

где  $\ln$  — натуральный логарифм.

Выбор уравнения (4.102) или (4.103) определяется величиной  $M$ , соответствующей значению  $F = 2,5$ ; эта величина приблизительно равна

$$m = 5e - 5/2.$$

Если  $M < (5e - 5/2)$ , то  $F < 2,5$ ; если  $M > (5e - 5/2)$ , то  $F > 2,5$ .

После того как  $F$  найдено, из уравнения

$$\operatorname{tg}(45^\circ + q/2) = \exp F$$

получаем функцию Гудермана  $q$  от  $F$ . Тогда  $f$  определяется из соотношений

$$\sin f = \frac{(e^2 - 1)^{1/2} \sin q}{e - \cos q},$$

$$\cos f = \frac{e \cos q - 1}{e - \cos q}.$$

Этот метод позволяет обойтись без гиперболических функций. С другой стороны, из уравнений (4.88) и (4.100) имеем

$$\frac{(e^2 - 1)}{1 + e \cos f} = e \operatorname{ch} F - 1. \quad (4.104)$$

Воспользовавшись формулами

$$\cos f = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(f/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(f/2)},$$

$$\operatorname{ch} F = \frac{1 + \operatorname{th}^2(F/2)}{1 - \operatorname{th}^2(F/2)},$$

уравнение (4.104) можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \left( \frac{e+1}{e-1} \right)^{1/2} \operatorname{th} \frac{F}{2}. \quad (4.105)$$



Соотношения, полученные в этом разделе, а также в разд. 4.7 и 4.7.1, могут быть использованы для определения положения тела на орбите в любой момент времени (при условии, что элементы  $a$ ,  $e$  и  $\tau$  заданы) или для определения элементов по заданному положению и скорости. Метод решения этих задач аналогичен методу, описанному в разд. 4.5.7.

#### 4.8. Прямолинейная орбита

Предположим, что длина большой оси эллиптической орбиты остается постоянной, а эксцентриситет стремится к единице. Тогда эллипс становится все более и более сплюснутым, а расстояние перигелия от фокуса  $a(1 - e)$  стремится к нулю. В пределе эллипс вырождается в отрезок прямой, соединяющий два фокуса. Такая орбита называется прямолинейным эллипсом. Аналогичными предельными переходами получают прямолинейные парабола и гипербола, представляющие собой прямые, проведенные из фокуса вдоль оси симметрии в бесконечность. При движении по прямолинейному эллипсу скорость максимальна в одном из фокусов и равна нулю в другом фокусе. В случае прямолинейной параболы скорость максимальна в фокусе и равна нулю на бесконечности. При движении по прямолинейной гиперболе скорость максимальна в фокусе, а на бесконечности имеет некоторую конечную величину.

Такие орбиты могут показаться абстрактными и не имеющими практического значения, однако это отнюдь не так. Например, для многих эллиптических и гиперболических орбит комет величина  $e$  настолько близка к единице, что характер движения кометы по орбите весьма близок к поведению тела на прямолинейном эллипсе или на прямолинейной гиперболе. Во многих задачах астродинамики тела могут вести себя так, как если бы они двигались по прямолинейным гиперболам.

Если движение происходит по прямой линии (т. е. если  $V = \dot{r}$ ), то справедливы следующие соотношения задачи двух тел, связывающие время, положение и скорость тела:

1) прямолинейный эллипс

$$\begin{aligned} M &= n(t - \tau), \\ M &= E - \sin E, \\ r &= a(1 - \cos E), \\ \dot{r} &= a^{1/2} \mu^{1/2} \sin E; \end{aligned} \tag{4.106}$$

## 2) прямолинейная парабола

$$\begin{aligned}
 M &= \mu^{1/2} (t - \tau), \\
 M &= B^3/6, \\
 r &= B^2/2, \\
 \dot{r} &= \mu^{1/2} B;
 \end{aligned}
 \tag{4.107}$$

## 3) прямолинейная гипербола

$$\begin{aligned}
 M &= v (t - \tau), \\
 M &= (\text{sh } F) - F, \\
 r &= a [(\text{ch } F) - 1], \\
 \dot{r} &= a^{1/2} \mu^{1/2} \text{sh } F.
 \end{aligned}
 \tag{4.108}$$

Уравнения (4.107) можно легко вывести из (4.78) при условии  $V = dr/dt$ .

Херрик [4] при помощи слегка модифицированных уравнений (4.106), (4.107) и (4.108) составил таблицы, из которых, зная время, можно находить путем прямой интерполяции положение и скорость тела, не прибегая к разложениям в ряды или методам последовательных приближений. Эти таблицы могут применяться также в случае почти прямолинейного движения, часто встречающегося в астродинамике. Способ применения таблиц в этом случае можно пояснить, если рассмотреть эллиптическую орбиту с  $e$ , близким к единице. Уравнение Кеплера представим в виде

$$\begin{aligned}
 M &= E - e \sin E = (E - \sin E) + (1 - e) \sin E = \\
 &= (E - \sin E) + \epsilon \sin E.
 \end{aligned}
 \tag{4.109}$$

При  $e \sim 1$  величина  $\epsilon$  мала и отличие (4.109) от «прямолинейного» уравнения ( $M = E - \sin E$ ) по существу такое же, как отличие уравнения Кеплера от «кругового» уравнения ( $M = E$ ), когда  $e$  близко нулю. Таким образом, уравнение (4.109) может быть решено методом последовательных приближений (см. разд. 4.5.5). Исходное значение  $E$  для решения уравнения  $E - \sin E = M$  берется из таблиц Херрика. Если это значение обозначить  $E_0$ , а истинное значение обозначить  $E$ , так что  $E = E_0 + \Delta E_0$ , то уравнение (4.109) примет вид

$$(E_0 + \Delta E_0) - \sin (E_0 + \Delta E_0) + \epsilon \sin E_0 = M.$$

Раскладывая в ряд и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем

$$\Delta E_0 = - \frac{\epsilon \sin E_0}{1 - \cos E_0}.$$

Если нужно получить более точное значение  $E$ , процесс можно продолжить. Аналогичными процедурами можно воспользоваться в случаях почти прямолинейной параболы или гиперболы. Подробное описание быстрых и эффективных методов решения можно найти в [4].

#### 4.9. Барицентрические орбиты

На рис. 4.9 точки  $P_1$  и  $P_2$ , как и раньше (см. разд. 4.4), обозначают положения двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , точка  $O$  — фиксированное начало отсчета, а  $G$  — центр масс системы  $m_1, m_2$ . Тогда

$$MR = m_1 r_1 + m_2 r_2,$$

где  $M$  — сумма  $m_1$  и  $m_2$ .

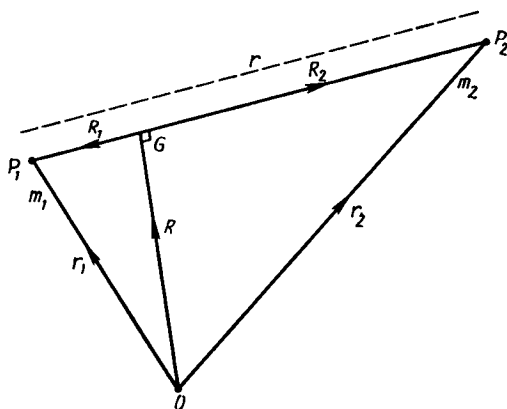


Рис. 4.9.

Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — векторы, направленные из  $G$  в  $P_1$  и в  $P_2$  соответственно. Тогда

$$m_1 R_1 = m_2 R_2, \quad R_1 + R_2 = r,$$

откуда

$$R_1 = \left( \frac{m_2}{M} \right) r, \quad R_2 = \left( \frac{m_1}{M} \right) r.$$

В разд. 4.4 было показано, что центр масс системы движется с постоянной скоростью и в силу второго закона Кеплера радиус-вектор  $r$  заметает одинаковые площади за равные промежутки времени. Следовательно, для относительного движения (движения одного тела относительно другого) имеет место соотношение

$$r^2 \dot{\varphi} = h.$$

Линия  $P_1GP_2$  должна быть всегда прямой, значит радиусы-векторы орбит  $m_1$  и  $m_2$  относительно  $G$  (радиусы-векторы барицентрических орбит) также должны подчиняться второму закону Кеплера, т. е.

$$R_1^2 \dot{f} = h_1, \quad R_2^2 \dot{f} = h_2.$$

Но

$$R_1^2 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 r^2,$$

откуда

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 r^2 \dot{f} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 h.$$

Аналогично

$$h_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 h.$$

Таким образом, барицентрические орбиты  $m_1$  и  $m_2$  геометрически подобны друг другу и подобны орбите относительного движения. Например, в случае эллиптического движения, если  $a$  — большая полуось относительной орбиты и  $a_1, a_2$  — большие полуоси барицентрических орбит ( $a_1 + a_2 = a$ ), то

$$a_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right) a, \quad a_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right) a.$$

Вследствие своего геометрического подобия орбиты имеют одинаковые эксцентриситеты и одинаковые периоды.

Легко видно, что, когда масса одной частицы много меньше массы другой частицы, орбита меньшей частицы относительно большей имеет почти такой же размер, как барицентрическая орбита меньшей частицы. При этом размер барицентрической орбиты большей частицы очень мал.

#### 4.10. Классификация орбит по величине константы энергии

При исследовании движения одной частицы относительно другой было получено уравнение сохранения энергии (4.16)

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r} = C, \quad (4.110)$$

где  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

Если  $V_1$  и  $V_2$  — скорости  $m_1$  и  $m_2$  относительно центра масс (центр масс покоится), то полная энергия  $E$  системы задается формулой

$$E = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r},$$

где сумма первых двух членов — это кинетическая энергия, а  $-Gm_1m_2/r$  — потенциальная энергия системы.

На основании результатов, полученных в предыдущих разделах, имеем

$$V_1^2 = \dot{R}_1^2 + R_1^2\dot{f}_1^2 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2\dot{f}^2) = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 V^2.$$

Аналогично

$$V_2^2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 V^2.$$

Таким образом, воспользовавшись уравнением (4.110), получаем

$$E = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \left(\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}\right) = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} C.$$

В астродинамике, когда  $m_1$  — масса космического аппарата, а  $m_2$  — масса планеты много большая чем  $m_1$ , можно написать

$$E = m_1 \left(\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r}\right) = m_1 C,$$

где  $\mu = Gm_2$ .

Таким образом,  $C$  представляет собой полную энергию космического аппарата на единицу массы ( $\frac{1}{2}V^2$  — это кинетическая энергия, а  $-\mu/r$  — потенциальная энергия на единицу массы). В результате орбиту можно классифицировать как эллипс, параболу или гиперболу в зависимости от значения  $C$  для космического аппарата. В астродинамике, где часто возникает задача определения энергии, необходимой для того, чтобы покинуть круговую орбиту вокруг планеты и достигнуть скорости освобождения, т. е. превратить планетоцентрическую орбиту в параболу или гиперболу, такая классификация является очень удобной. Ясно, что величина скорости  $V$  на данном расстоянии — это решающий фактор, от которого зависит форма орбиты. Имеем

- 1) для эллипса  $V^2 = \mu [(2/r) - (1/a)]$ , следовательно,  $C = -\mu/2a$ ;
- 2) для параболы  $V^2 = 2\mu/r$ , следовательно,  $C = 0$ ; (4.111)
- 3) для гиперболы  $V^2 = \mu [(2/r) + (1/a)]$ , следовательно,  $C = \mu/2a$ .

Итак, для замкнутой орбиты полная энергия (кинетическая плюс потенциальная) должна быть отрицательной; для освобождения тела его скорость должна увеличиться до значения, при котором полная энергия равна нулю; если энергия больше нуля, то освобождение происходит по гиперболе. В частности, чтобы тело, находящееся на круговой орбите, где  $V^2 = \mu/r$ , покинуло орбиту, его скорость должна возрасти в  $\sqrt{2}$  раз.

#### 4.11. Орбита в пространстве

До сих пор в этой главе ориентация орбиты в пространстве не рассматривалась. В разд. 2.6 были введены три величины, определяющие ориентацию. Это долгота восходящего узла  $\Omega$ , долгота перигелия  $\omega$  (если речь идет об орбите вокруг Солнца) и наклонение  $i$ .

Поскольку в астродинамике вычисления производятся в основном в прямоугольных координатах  $x, y, z$ , необходимо знать

их связь с элементами орбиты и начальными значениями положения и скорости на орбите.

Пусть космический аппарат  $V$  движется по орбите вокруг Солнца  $S$ , и пусть его радиус-вектор  $SV$  и истинная аномалия  $\angle VSA$  в момент времени  $t$  имеют значения  $r$  и  $f$  (рис. 4.10). Если в плоскости орбиты провести ось  $S\xi$  вдоль большой оси в направлении перигелия и ось  $S\eta$  перпендикулярно большой оси, то  $V$  относительно введенных осей будет иметь следующие координаты:

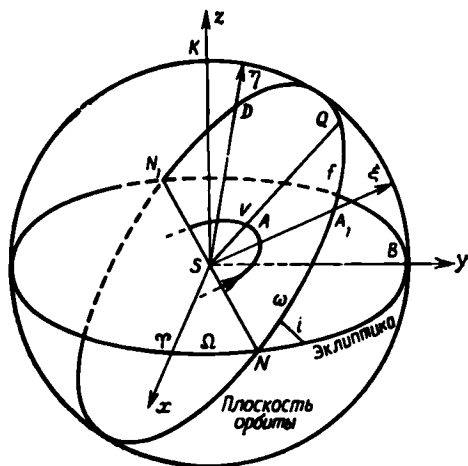


Рис. 4.10.

$$\xi = r \cos f, \quad \eta = r \sin f.$$

Пусть прямоугольные оси  $Sx, Sy$  и  $Sz$  выбраны так, что ось  $Sx$  направлена в точку весеннего равноденствия  $\Upsilon$ , ось  $Sy$  проведена в плоскости эклиптики под углом  $90^\circ$  к оси  $Sx$ , а ось  $Sz$  направлена в северный полюс эклиптики. Тогда на основании (2.4), (2.5) и (2.6) для координат  $V(x, y, z)$  получаем

$$\begin{aligned} x &= r [\cos \Omega \cos (\omega + f) - \sin \Omega \sin (\omega + f) \cos i], \\ y &= r [\sin \Omega \cos (\omega + f) + \cos \Omega \sin (\omega + f) \cos i], \\ z &= r \sin (\omega + f) \sin i. \end{aligned}$$

Значение радиуса-вектора в данный момент времени можно получить из соотношения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

где  $p$  и  $e$  — постоянные величины для данной орбиты, а истинная аномалия вычисляется по схеме, описанной в предыдущих разделах этой главы.

С другой стороны, если  $(l_1, m_1, n_1)$  и  $(l_2, m_2, n_2)$  — направляющие косинусы осей  $S\xi$  и  $S\eta$  относительно осей  $Sx$ ,  $Sy$  и  $Sz$ , то

$$\begin{aligned} x &= l_1 \xi + l_2 \eta, \\ y &= m_1 \xi + m_2 \eta, \\ z &= n_1 \xi + n_2 \eta, \end{aligned} \quad (4.112)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l_1 \dot{\xi} + l_2 \dot{\eta}, \\ \dot{y} &= m_1 \dot{\xi} + m_2 \dot{\eta}, \\ \dot{z} &= n_1 \dot{\xi} + n_2 \dot{\eta}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Из треугольников  $A_1 \Upsilon N$ ,  $A_1BN$  и  $A_1KN$  имеем

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos A_1 \Upsilon = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ m_1 &= \cos A_1 B = \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\ n_1 &= \cos A_1 K = \sin \omega \sin i. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Из треугольников  $D \Upsilon N$ ,  $DBN$  и  $DKN$  следует

$$\begin{aligned} l_2 &= \cos D \Upsilon = -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ m_2 &= \cos DB = -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ n_2 &= \cos DK = \cos \omega \sin i. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Следовательно, координаты  $(x, y, z)$  и компоненты скорости  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  можно вычислить по известным элементам и времени. Например, в случае эллиптического движения

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos f = a (\cos E - e), \\ \eta &= r \sin f = a (1 - e^2)^{1/2} \sin E, \end{aligned}$$

откуда нетрудно получить

$$\begin{aligned} x &= al_1 \cos E + bl_2 \sin E - ael_1, \\ y &= am_1 \cos E + bm_2 \sin E - aem_1, \\ z &= an_1 \cos E + bn_2 \sin E - aen_1; \\ \dot{x} &= \frac{na}{r} (bl_2 \cos E - al_1 \sin E), \\ \dot{y} &= \frac{na}{r} (bm_2 \cos E - am_1 \sin E), \\ \dot{z} &= \frac{na}{r} (bn_2 \cos E - an_1 \sin E). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь обратную задачу, а именно задачу определения элементов орбиты по известным положению и скорости в данный момент времени.

Пусть в момент времени  $t$  тело имеет координаты  $(x, y, z)$  и компоненты скорости  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (4.116)$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (4.117)$$

Если  $i, j$  и  $k$  — единичные векторы вдоль осей  $S\Upsilon, SB$  и  $SK$ , то

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz,$$

$$\mathbf{V} = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}$$

и

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{h}.$$

Компоненты вектора  $\mathbf{h}$  имеют вид

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h_z,$$

$$y\dot{z} - z\dot{y} = h_x,$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = h_y$$

и являются постоянными компонентами кинетического момента тела (на единицу массы). Тогда из соотношения

$$h^2 = \mu p = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 \quad (4.118)$$

можно получить  $p$ , поскольку  $\mu$  известно.

Тип орбиты, как конического сечения, можно определить на основании (4.111), если предварительно вычислить постоянную  $C$  из уравнения энергии (4.110):

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = C.$$

После выяснения типа конического сечения можно воспользоваться соответствующим набором формул.

Если орбита эллиптическая, то из соотношения

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

получаем  $a$ . Кроме того,

$$p = a(1 - e^2),$$

откуда находим  $e$ . Проектируя  $\mathbf{h}$  на оси  $Sx, Sy$  и  $Sz$ , получаем

$$h \cos i = h_z, \quad (4.119)$$

$$h \sin i \sin \Omega = \pm h_x, \quad (4.120)$$

$$h \sin i \cos \Omega = \mp h_y, \quad (4.121)$$



откуда

$$\operatorname{tg} \Omega = (-h_x/h_y)$$

и

$$\cos i = \frac{h_z}{(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{1/2}} = \frac{h_z}{h}.$$

Таким образом, уравнения (4.119), (4.120) и (4.121) определяют  $i$  и  $\Omega$ , причем верхний или нижний знак в уравнениях (4.120) и (4.121) выбирается в зависимости от того, меньше или больше  $i$ , чем  $90^\circ$  (т. е. положительно или отрицательно  $h_z$ ).

Из уравнений (2.4), (2.5) и (2.6) следуют соотношения

$$\sin(\omega + f) = \frac{z}{r} \operatorname{cosec} i,$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{1}{r}(x \cos \Omega + y \sin \Omega),$$

однозначно определяющие величину  $(\omega + f)$ .

Если  $i = 0$ , то величина  $(\omega + f)$  определяется из соотношений

$$\sin(\omega + f) = \frac{1}{r}(y \cos \Omega - x \sin \Omega),$$

$$\cos(\omega + f) = \frac{1}{r}(x \cos \Omega + y \sin \Omega).$$

Из уравнения

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos f}$$

можно выразить  $f$  и, таким образом, определить  $\omega$ .

Остается еще найти момент прохождения перигелия  $\tau$ . В случае эллиптической орбиты, воспользовавшись соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{f}{2}$$

или

$$r = a(1 - e \cos E),$$

находим эксцентрическую аномалию  $E$ , а затем из соотношения

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E$$

получаем  $\tau$ , так как величины  $t$ ,  $n$ ,  $E$  и  $e$  известны.

В случае гиперболического движения делается то же самое, но используются уравнения (4.100) и (4.101) или (4.105). Если орбита параболическая, то используется уравнение (4.82).

4.12. Ряды для  $f$  и  $g$ 

Решение уравнения

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \mu \frac{r}{r^3} = 0, \quad (4.122)$$

где  $\mu = G(m_1 + m_2)$ , можно получить в виде временного ряда, у которого коэффициенты при разных степенях времени являются функциями постоянных  $\mu$ ,  $r_0$  и  $(dr/dt)_0$ , т. е. значений  $r$  и  $dr/dt$  при  $t = 0$ .

Прежде всего введем новую независимую переменную

$$\tau = \mu^{1/2} t.$$

Тогда уравнение (4.122) примет вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{r}{r^3} = 0. \quad (4.123)$$

Для того чтобы найти коэффициенты ряда, будем дифференцировать уравнение (4.123), получая более высокие производные и исключать при помощи (4.123) все производные  $r$  выше первого порядка, появляющиеся в правой части. Затем подставим значения  $r$  и  $dr/d\tau$  при  $\tau = 0$ . Таким образом получим

$$r_0 = r_0 \quad (\dot{r}_0 = \dot{r}_0),$$

$$\ddot{r}_0 = -\frac{r_0}{r_0^3},$$

$$\dddot{r}_0 = -\left( \frac{\dot{r}_0}{r_0^3} - \frac{3r_0 \dot{r}_0 \dot{r}_0}{r_0^4} \right),$$

$$\dots \ddot{r}_0 = -\left\{ \left[ \frac{2\mu}{r_0^6} - \frac{3\dot{r}_0 \cdot \dot{r}_0}{r_0^5} + \frac{15(\dot{r}_0 \cdot r_0)^2}{r_0^7} \right] r_0 - 6 \frac{\dot{r}_0 \cdot r_0}{r_0^5} \dot{r}_0 \right\}$$

и т. д. Здесь  $\dot{r}_0 \equiv (dr/d\tau)_0$  и т. д.

Введем постоянные  $s$ ,  $u$  и  $w$  следующим образом:

$$s = \frac{\dot{r}_0 \cdot r_0}{r_0^2}, \quad u = \frac{1}{r_0^3}, \quad w = \frac{\dot{r}_0 \cdot \dot{r}_0}{r_0^2}.$$

Тогда видно, что ряд Тейлора

$$r = r_0 + \dot{r}_0 \tau + \frac{1}{2!} \ddot{r}_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} \dddot{r}_0 \tau^3 + \frac{1}{4!} \dots \ddot{r}_0 \tau^4 + \dots,$$

в котором коэффициенты при степенях  $\tau$  имеют вид

$$\Gamma_0 = \Gamma_0,$$

$$\dot{\Gamma}_0 = \dot{\Gamma}_0,$$

$$\frac{1}{2} \ddot{\Gamma}_0 = -\frac{1}{2} u \Gamma_0,$$

$$\frac{1}{6} \dddot{\Gamma}_0 = \frac{1}{2} u s \dot{\Gamma}_0 - \frac{1}{6} u \dot{\Gamma}_0,$$

$$\frac{1}{24} \Gamma_0^{(4)} = \frac{1}{24} u (3\omega - 2u - 15s^2) \Gamma_0 + \frac{1}{4} u s \dot{\Gamma}_0$$

и т. д., является решением уравнения.

Решение можно представить в виде

$$r = f\Gamma_0 + g\dot{\Gamma}_0,$$

где

$$f = 1 - \frac{1}{2} u \tau^2 + \frac{1}{2} u s \tau^3 + \frac{1}{24} (3\omega - 2u - 15s^2) \tau^4 - \\ - \frac{1}{8} u s (3\omega - 2u - 7s^2) \tau^5 + \dots,$$

$$g = \tau - \frac{1}{6} u \tau^3 + \frac{1}{4} u s \tau^4 + \frac{1}{120} u (9\omega - \\ - 8u - 45s^2) \tau^5 + \dots$$

Если  $\tau$  мало, то ряды  $f$  и  $g$  быстро сходятся и могут быть полезны, например, при определении орбит (см. гл. 13). Однако, поскольку уравнение (4.12) нелинейное, коэффициенты при более высоких степенях  $\tau$  становятся очень громоздкими. Поэтому применение рядов ограничивается малыми величинами  $\tau$ , при которых членами более высокого порядка можно пренебречь. Заметим, однако, что в [8] были даны точные выражения для коэффициентов  $f$  и  $g$  по  $\tau^{27}$ , полученные при выполнении аналитических выкладок на ЭВМ.

При использовании рядов надо помнить, что единица измерения  $\tau$  такова, что  $\mu = 1$ .

В разд. 4.5.5 и 4.5.6 было показано, что уравнение Кеплера можно решить итерационным численным методом или при помощи аналитической процедуры, приводящей к так называемому уравнению центра. Точно так же существуют численные методы, позволяющие находить значения коэффициентов  $\tau$  более высокого порядка, не зная их точного аналитического вида. Методы, основанные на рекуррентных формулах, предпочтительнее применять в тех случаях, когда мы можем воспользоваться ЭВМ.

### 4.13. Использование рекуррентных соотношений

Стеффенсон [10, 11] предложил и применил метод, который позволил провести рекуррентное вычисление производных, необходимых при разложении в ряд Тейлора. После него неоднократно применялись различные модификации этого метода. Сначала путем введения вспомогательных переменных преобразуется исходное уравнение движения, причем эти переменные вводятся таким образом, чтобы и само уравнение, и дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных в правой части были квадратичными.

Итак, если ввести переменные  $u = r^{-3}$ ,  $w = r^{-2}$ ,  $\sigma = ws$  и  $s = r \cdot \dot{r}$  (это только один из возможных наборов переменных), то легко показать, что уравнение (4.123) сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -ru, \\ \dot{u} &= -3u\sigma, \\ \dot{w} &= -2u\sigma, \\ s &= r \cdot \dot{r}, \\ \sigma &= ws. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Правые части всех этих уравнений имеют квадратичную форму. Подставляя в уравнения (4.124) бесконечные ряды

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=0}^{\infty} r_i \tau^i, \\ u &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i \tau^i, \\ w &= \sum_{i=0}^{\infty} w_i \tau^i, \\ s &= \sum_{i=0}^{\infty} s_i \tau^i, \\ \sigma &= \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \tau^i \end{aligned} \tag{4.125}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ , получаем рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} r_{j+2} &= -\frac{1}{(j+1)(j+2)} \sum_{i=0}^j r_i u_{j-i}, \\ u_j &= -\frac{3}{j} \sum_{i=0}^{j-1} u_i \sigma_{j-i-1}, \\ \omega_j &= -\frac{2}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \omega_i \sigma_{j-i-1}, \\ s_j &= \sum_{i=0}^j (i+1) r_{i+1} \cdot r_{j-1}, \\ \sigma_j &= \sum_{i=0}^j \omega_i s_{j-1}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Начальные значения  $u$ ,  $\omega$ ,  $s$  и  $\sigma$  получаются из начальных условий для положения и скорости. Затем, используя соотношения (4.126), шаг за шагом вычисляют производные всех порядков величин  $u$ ,  $\omega$ ,  $s$ ,  $\sigma$  и  $r$ . Хотя описанная процедура может показаться громоздкой и длительной, на практике при использовании ЭВМ она значительно более эффективна, чем получение точных выражений для членов высокого порядка рядов  $f$  и  $g$ .

Более подробную информацию можно найти в работе Херрика [5].

#### 4.14. Универсальные переменные

Как показано в этой главе, для движения по эллиптическим, параболическим и гиперболическим орбитам, как и для трех соответствующих типов прямолинейного движения, имеются специальные наборы формул. Более того, даже в случае движения по эллипсу при приближении эксцентриситета к нулю (т. е. когда орбита стремится к окружности) нарушаются многие соотношения, справедливые для эллиптической орбиты. Например, в разд. 4.12 при определении элементов орбиты по заданному положению и скорости нельзя воспользоваться уравнением

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos f}$$

для получения  $f$  по известным  $r$ ,  $h$  и  $\mu$ , если орбита круговая. В этом случае  $e = 0$  и перигелия (или момента прохождения перигелия) не существует. Даже если  $e$  чуть больше нуля, применение обычных формул, выведенных для случая эллиптических орбит, приведет к значительным ошибкам при определении  $e$ ,  $\omega$  и  $\tau$ .

Аналогичная проблема возникает, когда наклонение стремится к нулю; в этом случае становится неопределенной долгота восходящего узла  $\Omega$  (см. разд. 4.11) и, для того чтобы обойти эту трудность, приходится использовать другие формулы.

Предпринимались различные попытки получить набор универсальных либо унифицированных формул, которые могли бы применяться ко всем типам конических сечений — орбит задачи двух тел. Различие между универсальными и унифицированными формулами состоит в том, что первые могут применяться, даже если  $e$  стремится к нулю, а последние в таком случае неприменимы. Описание этих попыток выходит за пределы данной книги. Подробное обсуждение универсальных и унифицированных переменных и параметров можно найти в работе [5].

## Задачи

Данные, необходимые для решения задач, следует взять из приложений.

4.1. Пользуясь соотношениями (4.17) и (4.19), вывести уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}.$$

4.2. Комета Галлея движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом 0,9673. Сравнить ее скорости (линейную и угловую) в перигелии и афелии.

4.3. Используя ряды (4.63) и (4.64), получить уравнение центра с точностью до  $O(e^3)$ .

4.4. Найти расстояние от Солнца перигелия той кометы, которая, двигаясь по параболической орбите в плоскости эклиптики, остается внутри орбиты Земли (по предположению круговой) наибольшее время.

4.5. Доказать, что средняя аномалия  $M$  и истинная аномалия  $f$  в случае движения по эллиптической орбите связаны соотношением

$$M = (1 - e^2)^{3/2} \int_0^f \frac{df}{(1 + e \cos f)^2}.$$

Используя это соотношение, показать, что с точностью до  $O(e^2)$

$$M = f - 2e \sin f + \frac{3}{4} e^2 \sin 2f,$$

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M.$$

4.6. Космический аппарат движется по эллиптической орбите с периодом  $T$  под действием притяжения Солнца (масса  $M$ ). В результате мгновенного включения двигателя его орбитальная скорость  $V$  увеличивается на  $\Delta V$ . Показать, что изменение периода  $\Delta T$  выражается формулой

$$\Delta T = 3(2\pi GM)^{-2/3} T^{5/3} V \Delta V.$$

4.7. Малая планета движется по орбите с эксцентриситетом 0,21654 и периодом 4,3856 года. Вычислить с точностью до  $1'$  значение эксцентрической аномалии спустя 1,2841 года после прохождения перигелия.

4.8. Ракета выходит из атмосферы Земли непосредственно перед выключением двигателя на высоте 640 км. В этот момент ее геоцентрическая скорость равна 10,4 км/с. В каком направлении должна двигаться ракета, чтобы достигнуть максимального расстояния от центра Земли? Вычислить это расстояние. Вычислить период движения ракеты по орбите, если направление движения в момент выключения двигателя составляет угол  $88^\circ$  с геоцентрическим радиусом-вектором.

4.9. Искусственный спутник Земли «Спутник-16» был выведен на орбиту, имеющую большую полуось 1,0478 земного радиуса и период 90,54 мин. Вычислить массу Земли в единицах, равных массе Солнца.

4.10. В 10 ч 1 января 1963 г. межпланетный зонд имел следующие гелиоцентрические эклиптические прямоугольные координаты и компоненты скорости:  $x = 0,68$ ,  $y = 0,52$ ,  $z = 0,18$ ,  $\dot{x} = -2,2$ ,  $\dot{y} = 28,1$ ,  $\dot{z} = 2,6$  (расстояние измеряется в единицах, равных большой полуоси орбиты Земли, а скорость — км/с). Найти элементы орбиты Земли.

## Литература

1. *Astrand J. J.* Huelftafeln zur Leichten und Genauen Aufloesung des Keplerischen Problems. Leipzig, Engelmann, 1890.\*
2. *Bauschinger J.* Tafeln zur theoretischen Astronomie. Leipzig, Engelmann, 1901.\*
3. *Cayley A.* Mem. Roy. Astron. Soc., 29, 191, 1861.\*
4. *Herrick S.* Tables for Rocket and Comet Orbits AMC 20. Washington, National Bureau of Standards, 1953.
5. *Herrick S.* Astrodynamics, vols. 1 and 2. London, Van Nostrand, 1971, 1972.\*\* [Имеется перевод: Херрик С. Астродинамика, тт. 1, 2, 3. — М.: Мир, 1976, 1977, 1978.]
6. *Moulton F. R.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1914.
7. *Schlesinger F., Udick S.* Tables for the True Anomaly in Elliptic Orbits, 2, No. 17 (Publications of the Allegheny Observatory), 1912.\*
8. *Sconzo P., Le Shak A. R., Tobey R.* Astron. J., 70, 269, 1965.
9. *Smart W. M.* Textbook on Spherical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1956.
10. *Steffensen J. F. K.* Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Meddr., 30, No. 3, 18, 1956.
11. *Steffensen J. F. K.* Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Meddr., 31, No. 3, 1957.
12. *Stracke G.* Tafeln der Elliptischen Koordinaten  $C = (r/a) \cos v$  und  $S = (r/a) \sin v$  fuer Exzentrizitaetswinkel von  $0^\circ$  bis  $25^\circ$ . Veroeffentlichen des Astronomisches Recheninstitute, 1928.\*
13. *Watson J. C.* Theoretical Astronomy. Philadelphia, Lippincott, 1892.

\* Приведены таблицы для решения задачи двух тел.

\*\* Приведены различные таблицы, в частности, для решения уравнения Баркера.

## Задача $n$ тел

### 5.1. Введение

Впервые задача  $n$  тел в точной постановке была сформулирована Ньютоном. Под телами он подразумевал материальные точки, и задача ставилась следующим образом. В некоторый момент времени заданы положения и скорости трех или более материальных точек, движущихся под действием сил взаимного притяжения. Массы тел известны. Вычислить их положения и скорости в любой момент времени.

Задача становится более сложной, если (как, например, при исследовании движения системы Земля—Луна—Солнце) надо учитывать форму и внутреннее строение тел. Задача  $n$  материальных точек вдохновляла и приводила в уныние многих знаменитых астрономов и математиков трех последних столетий. Возможно, этот факт не для всех очевиден, но уже при  $n = 3$  задача оказывается значительно более сложной, чем задача двух тел. Представим себе, что на каждое тело действует сложное изменяющееся со временем гравитационное поле двух других тел, способное приводить к тесным сближениям, в результате которых тела будут переходить на совершенно другие орбиты. Очевидно, общее решение такой задачи, описывающее все возможные последствия таких сближений, выражалось бы формулой невообразимой сложности.

При рассмотрении задачи  $n$  тел можно сформулировать несколько полезных утверждений, имеющих общий характер и представляющих собой десять интегралов движения. Эти интегралы были известны уже Эйлеру, но с тех пор других подобных соотношений не обнаружено. Кроме того, Лагранжем были найдены некоторые частные решения задачи трех тел, представляющие интерес как для астрономии, так и для астродинамики. Эти решения реализуются, если начальные условия удовлетворяют определенным соотношениям.

С тех пор исследователи смогли продвинуться только в изучении специальных задач, в которых можно было использовать те или иные приближения. Например, в ограниченной круговой задаче трех тел два массивных тела движутся по невозмущенным круговым орбитам вокруг своего общего центра масс и притягивают третье тело, масса которого настолько мала, что оно прак-



тически не возмущает круговые орбиты первых двух тел. В такой постановке можно сделать определенные выводы об орбите тела бесконечно малой массы и установить для него существование семейств периодических орбит. Многие эпохальные исследования Пуанкаре были посвящены этой задаче. Особый интерес в связи с этим представляет система Земля—Луна—космический аппарат, которую можно приближенно рассматривать как пример системы трех тел такого типа.

Известно, что планеты движутся вокруг Солнца по почти-эллиптическим орбитам, так как взаимное притяжение планет во много раз меньше, чем притяжение Солнца. Это приближение, сводящее задачу движения планет к задаче двух тел, служило основой для построения многих теорий движения планет. У кеплеровской (опорной) орбиты элементы постоянны; если теперь предположить, что вследствие взаимного гравитационного притяжения планет они изменяются, то для этих изменяющихся элементов можно составить дифференциальные уравнения. Выражения для элементов, получающиеся в результате решения уравнений (представляющие собой в общем случае длинные суммы синусоидальных, косинусоидальных и вековых членов), можно использовать для построения более точного приближения. Этот метод трудоемок, но на практике он быстро сходится, и более трех приближений приходится делать очень редко. Полученные таким образом аналитические выражения, справедливые на заданном интервале времени, называются *общими возмущениями*. Они позволяют нам сделать некоторые заключения о прошлом и будущем планетной системы, однако следует подчеркнуть, что указанным методом нельзя получить результаты, справедливые на любом, сколь угодно большом интервале времени. Метод общих возмущений применяется также к спутниковым системам, к орбитам астероидов, возмущаемым Юпитером, и к орбитам искусственных спутников. Этот метод является мощным инструментом астродинамики, поскольку в аналитических выражениях находят свое отражение различные возмущающие силы (например, влияние на спутник сплюснутости Земли).

Другой подход к решению задачи  $n$  тел связан с использованием *специальных возмущений*. Поскольку при этом производится пошаговое численное интегрирование дифференциальных уравнений движения от начальной эпохи до эпохи, в которую нам нужно знать положения тел, то до тех пор, пока не были созданы быстродействующие вычислительные машины, многие ученые — небесные механики избегали пользоваться таким методом. Однако метод специальных возмущений обладает большим преимуществом, которое состоит в том, что его можно применять к любым орбитам и к системам, состоящим из любого числа тел. В наши дни внимание ученых направлено на применение специальных возмущений

для решения всех типов астродинамических задач главным образом потому, что многие из них принадлежат к областям, в которых теории общих возмущений пока не созданы. Одним из таких случаев является задача облета Луны: точный расчет орбиты космического аппарата в поле системы Земля—Луна может быть выполнен только при помощи специальных возмущений. Большой недостаток метода состоит в том, что он редко приводит к каким-то общим формулам; кроме того, при таком подходе приходится рассчитывать промежуточные положения тел, а цель работы часто состоит в определении их конечной конфигурации.

Возмущения можно разделить на два различных класса: *периодические и вековые*. Любое возмущение опорной орбиты, повторяющееся с заданным периодом, называется периодическим и обычно является следствием периодического повторения одной и той же конфигурации тел системы. Поскольку точное повторение конфигурации маловероятно, то такое периодическое возмущение (короткопериодическое) часто связывается с циклическими вариациями много большего периода и при этом говорят о долгопериодическом возмущении.

Вековое возмущение вызывает изменение, пропорциональное времени, например смещение (в направлении движения) перигелия или регрессию восходящего узла орбиты планеты. Во многих случаях бывает трудно отличить долгопериодические возмущения с очень большим периодом от вековых возмущений, поскольку время, в течение которого проводятся наблюдения, меньше предполагаемого периода.

Наконец, мы должны заметить, что, говоря о задаче  $n$  тел, надо различать задачу нескольких тел и задачу многих тел. При рассмотрении Солнечной системы имеем мы дело с задачей нескольких тел, когда орбиты должны вычисляться точно. В этом случае тел слишком мало, чтобы можно было воспользоваться статистическим или гидродинамическим подходом. При рассмотрении звездных систем мы сталкиваемся с задачей многих тел, и это позволяет нам применять указанные методы. Однако описание этих методов мы приведем лишь в последней главе.

## 5.2. Уравнения движения задачи $n$ тел

Выведем уравнения движения  $n$  материальных точек с массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и радиусами-векторами  $\mathbf{R}_i$  относительно инерциальной точки  $O$ . Взаимные радиусы-векторы обозначим  $\mathbf{r}_{ij}$ , т. е.

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i. \quad (5.1)$$

Тогда на основании ньютоновских законов движения и закона тяготения имеем

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.2)$$

Заметим, что вектор  $\mathbf{r}_{ij}$  направлен от  $m_i$  к  $m_j$ , следовательно,

$$\mathbf{r}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij}. \quad (5.3)$$

Уравнения (5.2) являются искомыми уравнениями движения;  $G$  — гравитационная постоянная.

### 5.3. Десять известных интегралов и их смысл

Складывая уравнения (5.2) и учитывая (5.3), получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = 0.$$

Дважды интегрируя, находим

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{a} \quad (5.4)$$

и

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (5.5)$$

По определению центр масс системы имеет радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , причем

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i$$

и

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Тогда уравнения (5.4) и (5.5) преобразуются к виду

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a}t + \mathbf{b})/M \quad (5.6)$$

и

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}/M. \quad (5.7)$$

Соотношения (5.6) и (5.7) выражают тот факт, что центр масс системы движется с постоянной скоростью. Если выразить соотношения (5.6) и (5.7) через проекции на три инерциальные прямоугольные оси, проходящие через  $O$ , то получим шесть постоянных интегрирования  $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ .

Умножая каждое уравнение (5.2) векторно на соответствующее  $\mathbf{R}_i$  и складывая результаты, находим

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_i = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{R}_i \times \mathbf{r}_{ij} \quad (j \neq i). \quad (5.8)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\mathbf{R}_i \times \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_i \times (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j,$$

$$\mathbf{R}_j \times \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j.$$

Следовательно, правая часть (5.8) равна нулю, откуда

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_i = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{C}. \quad (5.9)$$

Соотношение (5.9) выражает тот факт, что сумма моментов количества движения (кинетических моментов) тел системы постоянна. Постоянный вектор  $\mathbf{C}$  определяет плоскость, называемую *неизменяемой плоскостью* Лапласа. Были предложения использовать ее в качестве основной плоскости планетной системы вместо плоскости эклиптики. Однако точность, с которой известно положение этой плоскости, хотя и высока, но недостаточна для того, чтобы оправдать такую замену. В настоящее время эта плоскость наклонена к плоскости эклиптики под углом около полутора градусов и лежит между плоскостями орбит Юпитера и Сатурна, двух самых массивных планет.

Если спроектировать (5.9) на три инерциальные прямоугольные оси, проходящие через  $O$ , то получим следующие три «интеграла площадей»:

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = C_1,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C_2,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = C_3,$$

где

$$C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2.$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  представляют собой еще три постоянные интегрирования в дополнение к уже полученным шести постоянным. Таким образом, суммы моментов количества движения  $n$  тел относительно каждой из координатных осей постоянны.

Десятая постоянная получается, если каждое из уравнений (5.2) умножить скалярно на соответствующее  $\dot{R}_i$  и сложить все произведения. Тогда

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i \cdot \ddot{R}_i = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{R}_i \cdot r_{ij} \quad (j \neq i). \quad (5.10)$$

Кроме того,

$$\dot{R}_i \cdot r_{ij} = \dot{R}_i \cdot (R_j - R_i), \quad (5.11)$$

$$\dot{R}_j \cdot r_{ji} = \dot{R}_j \cdot (R_i - R_j). \quad (5.12)$$

Складывая (5.11) и (5.12), получаем

$$\dot{R}_i \cdot r_{ij} + \dot{R}_j \cdot r_{ji} = -(\dot{R}_j - \dot{R}_i) \cdot (R_j - R_i).$$

Таким образом, если принять во внимание (5.1), то уравнение (5.10) после интегрирования дает

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{R}_i \cdot \dot{R}_i - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = E \quad (j \neq i). \quad (5.13)$$

Если  $V_i$  — скорость  $i$ -го тела, то

$$V_i^2 = \dot{R}_i \cdot \dot{R}_i,$$

и после введения обозначения

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

уравнение (5.13) принимает вид

$$T - U = E,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V_i^2.$$

Первый член в (5.13)  $T$  — это кинетическая энергия системы, а  $-U$  — потенциальная энергия. Из соотношения (5.13) следует, что полная энергия системы  $n$  тел постоянна.  $E$  является десятой постоянной интегрирования. Таким образом, хотя и кинетическая энергия, и потенциальная энергия системы изменяются и между телами системы происходит непрерывный «обмен» кинетической и потенциальной энергией, полная энергия остается

постоянной. Системы с постоянной полной энергией, к которым принадлежит и данная система, называются консервативными.

Найти другие интегралы никому не удалось, а Брунс и Пуанкаре доказали, что в задаче  $n$  тел кроме интеграла энергии, интегралов площадей и интегралов, определяющих движение центра масс системы, не существует других интегралов, которые выражались бы соотношениями, включающими только алгебраические и интегральные функции координат и скоростей тел, были справедливы для любых тел и удовлетворяли уравнениям движения.

#### 5.4. Силовая функция

В этом разделе рассмотрим более подробно функцию  $U$ , задаваемую формулой

$$U := \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j).$$

Она является симметричной функцией масс всех тел и взаимных расстояний между ними, причем  $U$  явно не зависит ни от времени, ни от расстояний тел от начала координат. Именно эти свойства функции  $U$  и позволяют получить десять интегралов движения. Первые девять интегралов являются следствием того, что  $U$  инвариантно по отношению к поворотам осей и переносам начала отсчета. Интеграл энергии имеет место благодаря тому, что в  $U$  явно не входит время (хотя, разумеется,  $U$  косвенно зависит от времени через  $r_{ij}$ ).

Если обозначить единичные векторы, направленные вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  через  $i$ ,  $j$  и  $k$ , то

$$\nabla U \equiv \text{grad} U := i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Символ  $\nabla$  (набла) обозначает оператор  $\text{grad}$ , т. е.

$$\nabla \equiv \text{grad} = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Поскольку

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = i \ddot{x}_i + j \ddot{y}_i + k \ddot{z}_i,$$

то видно, что для тела с массой  $m_i$  справедливо уравнение

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \text{grad}_i U, \quad (5.14)$$

где

$$\text{grad} U := i \frac{\partial U}{\partial x_i} + j \frac{\partial U}{\partial y_i} + k \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Приравнивая коэффициенты при единичных векторах, получаем

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Система (5.15) представляет собой уравнения движения тела с массой  $m_i$  в прямоугольной системе координат. Функция  $U$  называется силовой функцией, так как частные производные  $U$  представляют собой компоненты сил, действующих на тела.

Покажем теперь, что потенциальная энергия системы действительно равна  $-U$ . Пусть тела расположены таким образом, что любые два из них находятся на бесконечном расстоянии друг от друга. Предположим, что тело  $m_1$  фиксировано в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{R}_1$ , а тело  $m_2$  перемещается из бесконечности в точку  $\mathbf{R}_2$  вдоль пути  $s$ . Тогда, если в каждой точке траектории для перемещения тела вдоль малого элемента кривой  $ds$  требуется сила  $\mathbf{F}$ , то при этом совершается работа

$$\mathbf{F} \cdot ds.$$

Общая работа определяется криволинейным интегралом

$$\int_S \mathbf{F} \cdot ds.$$

Однако  $\mathbf{F}$  — это сила притяжения тела  $m_2$  телом  $m_1$ , т. е.

$$\mathbf{F} = \nabla U_2,$$

где

$$U_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Следовательно,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot ds = \int_S \nabla U_2 \cdot ds,$$

где

$$ds = i dx + j dy + k dz.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot ds &= \int_{R_\infty}^{R_2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} dx + \frac{\partial U_2}{\partial y} dy + \frac{\partial U_2}{\partial z} dz \right) = \\ &= U_2(\mathbf{R}_2) - U_2(\mathbf{R}_\infty) = U_2(\mathbf{R}_2) = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}, \end{aligned}$$

поскольку

$$U_2(\mathbf{R}_\infty) = G \frac{m_1 m_2}{\infty} = 0.$$

Рассмотрим теперь процесс перемещения тела  $m_3$  в точку  $\mathbf{R}_3$  в поле сил тяготения тел  $m_1$  и  $m_2$ , которые предполагаются закрепленными в точках  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ . Работа, совершенная при этом, определяется выражением

$$W = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla U_3 \cdot d\mathbf{s},$$

где

$$U_3 = G \left( \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right).$$

Как и раньше, можно показать, что при перенесении тела  $m_3$  в точку  $\mathbf{R}_3$  совершается работа

$$W = U_3(\mathbf{R}_3) = G \left( \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right).$$

Таким образом, полная работа, совершаемая при образовании системы трех тел, равна

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i).$$

Очевидно, при образовании системы  $n$  тел совершается работа

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i).$$

Потенциальная энергия системы по определению равна работе, совершаемой при разнесении всех тел на бесконечные расстояния друг от друга, т. е. в данном случае потенциальная энергия равна  $-U$ .

## 5.5. Теорема вириала

Пусть  $I$  — момент инерции системы, определяемый формулой

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i^2.$$

Дважды дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i \cdot \ddot{\mathbf{R}}_i$$



или

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \nabla_i U. \quad (5.16)$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \nabla_i U = \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i \frac{\partial U}{\partial z_i} \right).$$

Поскольку  $U$  является однородной функцией всех координат порядка  $-1$ , то в силу теоремы Эйлера можно написать

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \nabla_i U = -U$$

и (5.16) принимает вид

$$\ddot{I} = 4T - 2U.$$

Однако

$$T - U = C,$$

следовательно,

$$\ddot{I} = 2U + 4C = 2T + 2C.$$

С другой стороны,

$$\ddot{I} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i^2.$$

Функции  $U$  и  $T$  положительны. Поэтому, если  $C > 0$ , то  $\ddot{I} > 0$  и  $I$  бесконечно увеличивается. А если это так, то по крайней мере одно тело должно покинуть систему. Если ни одно из тел не покидает систему, то  $C$  должно быть отрицательным, причем таким, чтобы  $\dot{I}$  было также отрицательным. Однако это условие не является достаточным для устойчивости системы.

## 5.6. Теорема зеркальности

Из уравнений движения можно вывести еще два следствия. Первое из них — теорема зеркальности — формулируется следующим образом: если в некоторый момент времени  $t_0$  радиус-вектор, проведенный из центра масс системы  $n$  материальных точек, движущихся под действием только сил взаимного притяжения, перпендикулярен вектору скорости для каждой из точек системы, то орбита каждой материальной точки при  $t > t_0$  представляет собой зеркальное отражение ее орбиты при  $t < t_0$ . Такая конфигурация радиусов-векторов и векторов скоростей называется зеркальной.

Из первого утверждения непосредственно следует второе: орбиты  $n$  материальных точек, движущихся под действием только сил взаимного притяжения, являются периодическими, если в два различных момента времени система имеет зеркальную конфигурацию. Заметим, что орбитальное движение системы тел является периодическим, если через одинаковые промежутки времени система имеет одинаковые конфигурации радиусов-векторов и векторов скоростей всех тел.

Строгое доказательство теоремы зеркальности [29] легко провести, если заметить, что в уравнения движения не входят скорости. Следовательно, при обращении времени тела будут двигаться по своим собственным траекториям, но в обратном направлении. Если в некоторый момент времени имеет место зеркальная конфигурация, то орбита каждой частицы до и после этого момента не только является непрерывной, но и обладает тем свойством, что при  $t > t_0$  на частицы действуют силы, «обратные» действующим в соответствующие моменты времени при  $t < t_0$ .

Возможно существование только двух зеркальных конфигураций:

1) все материальные точки лежат в одной плоскости, а все векторы скоростей перпендикулярны этой плоскости и, следовательно, параллельны друг другу;

2) все материальные точки лежат на одной прямой, а их векторы скоростей перпендикулярны этой прямой, но не обязательно параллельны друг другу.

Доказательство утверждения о периодичности тривиально. Если зеркальные конфигурации  $A$  и  $B$  имеют место при  $t = -t_0$  и  $t = 0$ , то  $A$  снова имеет место при  $t = +t_0$ , а  $B$  — при  $t = +2t_0$  и т. д. Следовательно, орбиты являются периодическими с периодом  $2t_0$ .

## 5.7. Снова о задаче $n$ тел

Дифференциальные уравнения задачи  $n$  тел ( $n \geq 3$ ) представляют собой систему  $3n$  уравнений второго порядка, так что для полного определения поведения тел требуется знать  $6n$  постоянных интегрирования. Из этих  $6n$  постоянных было найдено только десять.

Используя десять полученных интегралов, можно понизить порядок системы: начало отсчета переносится в центр масс системы, а затем при помощи интегралов площадей и энергии получается система уравнений порядка  $(6n - 10)$ . Если исключить время, взяв в качестве независимой какую-нибудь другую переменную, и осуществить так называемое исключение узлов (по Якоби), то порядок системы можно понизить до  $(6n - 12)$ . Тем не менее видно, что даже в случае  $n = 3$  порядок оставшихся уравнений,

которые должны быть решены, равен шести. Общее решение задачи трех тел было получено в 1912 г. Зундманом, но оно оказалось настолько сложным, а полученные ряды сходятся настолько медленно, что для практических целей это решение бесполезно.

Следует заметить, что интегралы площадей и энергии могут быть использованы для контроля численных исследований консервативных систем. При проведении длительного численного исследования, такого, например, как выполненное несколько лет назад вычисление координат пяти внешних планет для периода времени в один миллион лет, можно, попутно вычисляя интеграл энергии системы (подставляя в него координаты и импульсы), следить за накоплением ошибок округления.

Для дальнейшего продвижения в этой области нужно обратиться к методам специальных или общих возмущений. Возможность разработки удовлетворительных теорий общих возмущений основана на очень важной теореме Коши. Эта теорема по существу утверждает, что если в некоторый момент времени материальные точки расположены на конечных расстояниях друг от друга, то система дифференциальных уравнений имеет решение в том смысле, что на конечном интервале времени координаты и скорости точек могут быть представлены сходящимися рядами.

Однако, прежде чем перейти к описанию таких методов, рассмотрим частные решения задачи трех тел, полученные Лагранжем. При этом будем следовать Дэнби [5].

## 5.8. Лагранжевы решения задачи трех тел

Возможны случаи, когда форма геометрической фигуры, образованной тремя телами, остается неизменной, хотя ее размеры при этом могут меняться, а вся фигура в целом может вращаться. В одном таком случае три тела располагаются в вершинах равностороннего треугольника, в другом — на одной прямой. В 1772 г. Лагранж показал, что такие решения может иметь система трех тел произвольной массы, если выполнены следующие условия:

- 1) направление суммарной силы, действующей на каждое из тел, проходит через центр масс системы;
- 2) эта сила прямо пропорциональна расстоянию тела от центра масс;
- 3) начальные скорости пропорциональны расстояниям тел от центра масс, а направления скоростей составляют равные углы с радиусами-векторами тел, проведенными из центра масс.

В силу (5.1)—(5.3) уравнения движения системы трех тел имеют вид

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = G \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, 3), \quad (5.17)$$

где

$$r_{ij} = R_j - R_i, \quad r_{ij} = -r_{ji},$$

а  $m_1, m_2, m_3$  — массы частиц.

Используя шесть интегралов, определяющих движение центра масс системы, перенесем начало отсчета, из которого проводятся радиусы-векторы  $R_i$ , в центр масс. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 m_i R_i = 0, \quad (5.18)$$

откуда

$$(m_1 + m_2 + m_3)R_1 + m_2(R_2 - R_1) + m_3(R_3 - R_1) = 0$$

или

$$MR_1 = -m_2 r_{12} - m_3 r_{13}, \quad (5.19)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Возводя (5.19) в квадрат, получаем

$$M^2 R_1^2 = m_2^2 r_{12}^2 + m_3^2 r_{13}^2 + 2m_2 m_3 r_{12} \cdot r_{13}. \quad (5.20)$$

Если форма фигуры не изменяется, то для относительных расстояний  $r_{12}$ ,  $r_{23}$  и  $r_{31}$  должно выполняться соотношение

$$\frac{r_{12}}{(r_{12})_0} = \frac{r_{23}}{(r_{23})_0} = \frac{r_{31}}{(r_{31})_0} = f(t), \quad (5.21)$$

где  $(r_{ij})_0$  обозначает величину  $r_{ij}$  при  $t = 0$ , т. е. в начальный момент, когда тела составляют требуемую конфигурацию.

Кроме того, если угол между  $r_{12}$  и  $r_{13}$  в (5.20) постоянен, то должно выполняться условие

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}(t), \quad (5.22)$$

где  $\dot{\theta}_i$  — угловая скорость частицы массы  $m_i$  относительно центра масс.

Однако в силу интеграла момента количества движения (5.9) суммарный кинетический момент системы относительно начала отсчета равен постоянному вектору  $C$ , т. е.

$$C = \sum_{i=1}^3 m_i R_i \times \dot{R}_i. \quad (5.23)$$

Используя (5.20), (5.21) и (5.22), получаем

$$MR_1^2 = [f(t)]^2 [m_2^2 (r_{12})_0^2 + m_3^2 (r_{13})_0^2 + 2m_2 m_3 (r_{12})_0 (r_{13})_0 \cos \alpha_1], \quad (5.24)$$

где  $\alpha_1$  — постоянный угол между  $r_{12}$  и  $r_{13}$ . Следовательно,

$$R_1 = (R_1)_0 f(t)$$

и аналогично

$$R_i = (R_i)_0 f(t). \quad (5.25)$$

Из (5.22) и (5.25) находим

$$C = \sum_{i=1}^3 [m_i (R_i)_0^2] f^2 \dot{\theta}. \quad (5.26)$$

Из соотношения (5.26), указывающего на то, что момент количества движения каждого тела относительно центра масс есть величина постоянная, следует, что сила, действующая на тело, проходит через центр масс.

Если  $F_i$  — сила, действующая на  $m_i$ , отнесенная к единице массы, то уравнение движения имеет вид

$$m_i F_i = m_i (\ddot{R}_i - R_i \dot{\theta}^2),$$

откуда в силу (5.22) и (5.25) получаем

$$m_i F_i = m_i [\ddot{f}(R_i)_0 - R_i \dot{\theta}^2]$$

или

$$m_i F_i = R_i m_i [\ddot{f}/f - \dot{\theta}^2].$$

Отсюда следует

$$F_1 : F_2 : F_3 = R_1 : R_2 : R_3. \quad (5.27)$$

Рассмотрим теперь два случая, удовлетворяющие сформулированным выше условиям. Имеем

$$\mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

или

$$\mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{R}} = 0.$$

Если левую и правую части (5.17) при  $i = 1$  умножить векторно на  $\mathbf{R}_1$ , то получим уравнение

$$\mathbf{R}_1 \times \left( m_2 \frac{\mathbf{R}_2}{r_{12}^3} + m_3 \frac{\mathbf{R}_3}{r_{13}^3} \right) = 0, \quad (5.28)$$

которое с учетом (5.18) приводится к виду

$$m_2 \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \left( \frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) = 0.$$

Естественно, для двух оставшихся тел справедливы аналогичные уравнения. Легко показать, что полученной системе уравнений удовлетворяют два решения. Первое решение имеет вид

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = r,$$

т. е. тела расположены в вершинах равностороннего треугольника. Второе решение

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 = 0$$

соответствует расположению тел на прямой линии. Других решений система не имеет.

В первом случае первое уравнение системы (5.17) принимает вид

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_1}{r^3} (m_2 \mathbf{r}_{12} + m_3 \mathbf{r}_{13})$$

или с учетом (5.19)

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{GM}{r^3} \mathbf{R}_1 = 0. \quad (5.29)$$

Кроме того, поскольку угол между  $\mathbf{r}_{12}$  и  $\mathbf{r}_{13}$  равен  $60^\circ$ , из (5.20) получаем

$$M^2 R_1^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) r^2.$$

Выражая отсюда  $r$  и подставляя его в (5.29), находим

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 + GM_1 \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} = 0, \quad (5.30)$$

где

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \quad (5.31)$$

Таким образом в силу уравнения (5.30), которое представляет собой уравнение движения для задачи двух тел [см. уравнение (4.12)], тело массы  $m_1$  движется вокруг центра масс по такой орбите (эллипсу, параболе или гиперболе, в зависимости от начальных скоростей), по какой двигалось бы тело единичной массы вокруг тела массы  $M_1$ . Соответствующий результат получается и для двух других тел. Если начальные условия удовлетворяют сформулированным требованиям, то соответствующие точки все время будут составлять равносторонний треугольник. Заметим, что его размеры могут колебаться или даже увеличиваться до бесконечности.

Во втором случае (точки расположены на одной прямой), если в качестве оси  $x$  выбрать данную прямую, то сила, действующая на  $m_1$ , будет представляться следующим выражением:

$$F_1 = m_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3}.$$

Однако в силу (5.25)

$$x_i = (x_i)_0 f(t),$$

так что

$$F_1 = \frac{1}{f^2} \left[ m_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} \right]_0 = \frac{\text{const}}{f^2}.$$

Поскольку  $f$  пропорционально расстоянию, то сила, действующая на  $m_1$ , центральна и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Следовательно, орбита  $m_1$  (как и орбиты двух других тел) представляет собой коническое сечение.

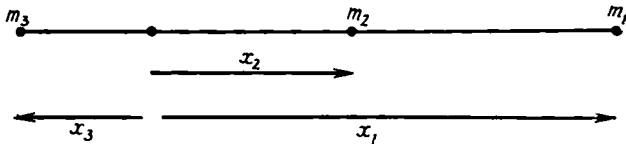


Рис. 5.1.

Пусть выполняется условие

$$F_1 : F_2 : F_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Предположим, что ось  $x$  вращается с угловой скоростью  $\dot{\theta}$ , и будем искать решение, удовлетворяющее условиям

$$Ax_1 = m_2 \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3}, \quad (5.32)$$

$$Ax_2 = m_3 \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} + m_1 \frac{x_1 - x_2}{x_{12}^3}, \quad (5.33)$$

$$Ax_3 = m_1 \frac{x_1 - x_3}{x_{13}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_3}{x_{23}^3}. \quad (5.34)$$

Здесь  $A$  — постоянная, зависящая от начальных условий. Возможны следующие варианты расположения тел: 321, 231 и 213. Рассмотрим первый случай (рис. 5.1) и введем положительную величину  $X$ , определяемую формулой

$$X = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2},$$

откуда

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} = 1 + X.$$

Вычитая (5.33) из (5.32) и (5.34) из (5.33), получаем

$$Ax_{12} = -\frac{m_1 + m_2}{x_{12}^2} + m_3 \left( \frac{1}{x_{23}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right) \quad (5.35)$$

и

$$Ax_{23} = -\frac{m_2 + m_3}{x_{23}^2} + m_1 \left( \frac{1}{x_{12}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right). \quad (5.36)$$

Затем подставляем  $X$  в (5.35) и (5.36), исключаем из полученных уравнений  $Ax_{12}^3$  и расписываем окончательное уравнение по степеням  $X$ . В результате получаем уравнение Лагранжа пятой степени

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2) X^5 + (3m_1 + 2m_2) X^4 + \\ & + (3m_1 + m_2) X^3 - (m_2 + 3m_3) X^2 - \\ & - (2m_2 + 3m_3) X - (m_2 + m_3) = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Поскольку коэффициенты при степенях  $X$  меняют знак только один раз, то по правилу знаков Декарта уравнение (5.37) имеет только один положительный корень.

Соответствующее положительное значение  $X$  однозначно определяет относительное расположение трех частиц в рассматриваемом случае. Очевидно, рассматривая два других порядка расположения частиц (а именно 231 и 213), можно получить два других решения, соответствующих расположению частиц на одной прямой.

## 5.9. Общие замечания о лагранжевых решениях

Если размеры системы не изменяются, то решения называются *стационарными*; при этом относительные расстояния остаются неизменными, а вся система вращается в одной плоскости с постоянной скоростью вокруг центра масс. Если две частицы  $m_1$  и  $m_2$  поместить в точки  $A$  и  $B$ , то видно, что существует пять точек, куда может быть помещена третья частица. Эти точки обозначаются  $L_1, L_2, L_3, L_4$  и  $L_5$  (рис. 5.2) и называются точками Лагранжа.

И треугольные, и коллинеарные решения задачи трех тел в течение долгого времени после их открытия считались хотя и интересными, но имеющими чисто теоретическое значение. Казалось чрезвычайно маловероятным, чтобы в природе могли существовать такие необычные конфигурации. В действительности же в Солнечной системе реализованы оба решения такого типа.

Около точек  $L_1$  и  $L_5$  относительно Солнца и Юпитера совершают колебания 12 астероидов (Троянцы). Точки  $L_1$  и  $L_5$  вместе с



Солнцем и Юпитером могут служить примерами треугольных решений (см. разд. 1.2.3). Отклонение Троянца от точки  $L_4$  или  $L_5$  может достигать  $20^\circ$  (угол измеряется относительно Солнца), но тем не менее он остается вблизи этой точки (точка либрации) в течение долгого времени. Кроме того, по предположению Кордылевского, окрестности точек  $L_4$  и  $L_5$  в системе Земля — Луна заполнены метеорными частицами. При хорошей видимости в этих местах можно наблюдать слабые туманные пятна.

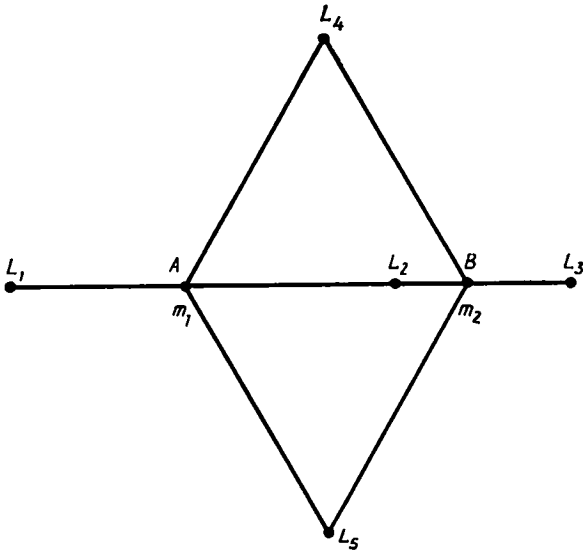


Рис. 5.2.

Что касается коллинеарных решений, то едва видимое свечение (противосияние), наблюдаемое после захода Солнца в плоскости эклиптики в направлении, противоположном направлению на Солнце, может быть солнечным светом, отраженным от скопления метеорных частиц в точке Лагранжа  $L_3$ . В этом случае тела  $m_1$  и  $m_2$  — это соответственно Солнце и Земля.

В дальнейшем будет исследован вопрос об устойчивости таких точек либрации. Это нужно для того, чтобы определить, приведет ли незначительное воздействие на частицу в точке Лагранжа к уходу частицы на большие расстояния или просто вызовет ее колебания около точки либрации.

В заключение можно заметить, что специальные решения, соответствующие решениям Лагранжа, существуют и в общем случае задачи  $n$  тел (при  $n > 3$ ). При этом материальные точки располагаются в вершинах правильного многогранника.

## 5.10. Ограниченная круговая задача трех тел

Пытаясь разобраться в возможных типах движения в задаче трех тел, Пуанкаре, Хилл и другие ученые многие свои исследования посвятили так называемой ограниченной круговой задаче трех тел. В этой задаче два массивных тела движутся по окружностям вокруг общего центра масс и притягивают (но сами не притягиваются) третье тело бесконечно малой массы. Орбиты и массы двух массивных тел известны, и задача состоит в том, чтобы определить возможные движения третьего тела, если в некоторый момент времени заданы его координаты и скорость.

Таким образом, общая задача трех тел, описываемая девятью дифференциальными уравнениями второго порядка, сводится к трем дифференциальным уравнениям второго порядка, т. е. порядок системы понижается от 18 до 6. Если задачу ограничить еще больше, потребовав, чтобы третье тело двигалось в плоскости орбит двух массивных тел, то останется только два уравнения второго порядка, так что система будет иметь четвертый порядок. Такой частный случай называется плоской ограниченной круговой задачей трех тел. Из приведенных выше рассуждений становится понятным, почему пространственной и плоской ограниченной круговой задаче трех тел было посвящено большое число аналитических и численных исследований, хотя при такой постановке задачи мы волей-неволей лишаем себя возможности использовать десять известных интегралов движения. Однако при этом можно найти новый интеграл (впервые полученный Якоби), который будет полезен при исследовании поведения малой частицы.

### 5.10.1. Интеграл Якоби

Пусть единица массы выбрана такой, что сумма масс двух массивных тел равна единице. При этом массы тел будут  $1 - \mu$  и  $\mu$ , где  $\mu \leq 1/2$ . Единицу длины выберем равной постоянному расстоянию между двумя массивными телами, а единицу времени введем так, чтобы гравитационная постоянная  $G$  также равнялась единице.

В силу (4.74) средняя угловая скорость (среднее движение)  $n$  двух тел удовлетворяет соотношению

$$n^2 a^3 = G (m_1 + m_2).$$

Видно, что при указанном выборе единиц угловая скорость двух тел конечной массы также равна единице.

Рассмотрим систему координат с началом в центре масс двух тел и невращающимися осями  $\xi, \eta, \zeta$ . Пусть  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  и  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  — координаты тел с массами  $(1 - \mu)$  и  $\mu$ , а  $(\xi, \eta, \zeta)$  — координаты

наты малой частицы. Тогда уравнения движения малой частицы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= (1 - \mu) \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \\ \ddot{\eta} &= (1 - \mu) \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \\ \ddot{\zeta} &= (1 - \mu) \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3},\end{aligned}\quad (5.38)$$

где

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2$$

и

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2.$$

Если ось  $\zeta$  перпендикулярна плоскости вращения двух массивных тел, то  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ .

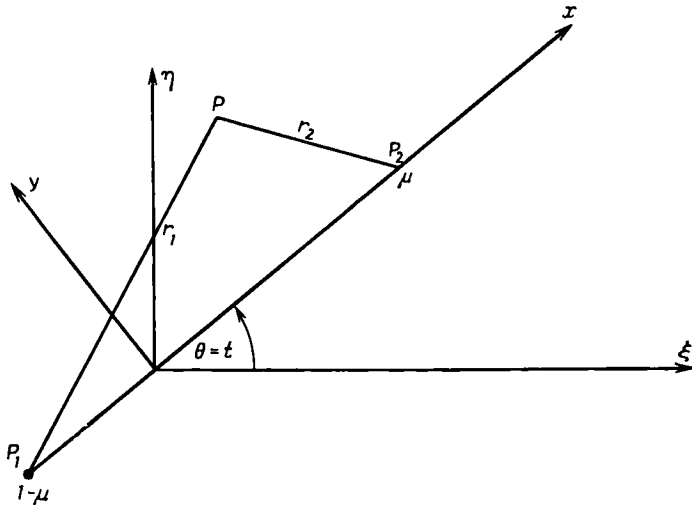


Рис. 5.3.

Введем оси  $x, y, z$  с тем же началом, что и оси  $\xi, \eta, \zeta$ , и пусть оси  $x$  и  $y$  вращаются с единичной угловой скоростью вокруг оси  $z$ , совпадающей с осью  $\zeta$  (она перпендикулярна плоскости рис. 5.3). Направление оси  $x$  можно выбрать так, чтобы два массивных тела  $P_1$  и  $P_2$  всегда лежали на ней. При этом их координаты будут  $(-x_1, 0, 0)$  и  $(x_2, 0, 0)$ , так что

$$x_2 - x_1 = 1.$$

Кроме того, при таком выборе единиц

$$\begin{aligned}x_1 &= -\mu, \\x_2 &= 1 - \mu.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + y^2 + z^2$$

и

$$r_2^2 = (x_2 - x)^2 + y^2 + z^2.$$

Здесь  $(x, y, z)$  — координаты бесконечно малой частицы относительно вращающейся системы координат. Они связаны со старыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos t - y \sin t, \\ \eta &= x \sin t + y \cos t, \\ \zeta &= z.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Для координат двух тел конечной массы справедливы аналогичные уравнения.

Дважды дифференцируя (5.39) и подставляя результат в (5.38), получаем

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \sin t &= \\ = \left[ (1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos t + \left[ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] y \sin t, \\ (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos t &= \\ = \left[ (1 - \mu) \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin t - \left[ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] y \cos t, \\ \ddot{z} &= - \left[ \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] z.\end{aligned}\tag{5.40}$$

Умножим первое уравнение (5.40) на  $\cos t$ , второе на  $\sin t$  и сложим результаты. Затем умножим первое уравнение (5.40) на  $-\sin t$ , второе на  $\cos t$  и снова сложим результаты. Тогда мы получим два уравнения, которые вместе с третьим уравнением (5.40) образуют систему

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= - (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x - x_2}{r_2^3}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= - \left( \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) y, \\ \ddot{z} &= - \left( \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) z.\end{aligned}\tag{5.41}$$

Уравнения (5.41), в которые явно не входит независимая переменная  $t$ , являются уравнениями движения бесконечно малой частицы относительно вращающейся системы координат.

Введем функцию  $U$  следующим образом:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Тогда, как легко показать, систему (5.41) можно переписать в виде

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (5.42)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (5.43)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.44)$$

Если умножить (5.42) на  $\dot{x}$ , (5.43) на  $\dot{y}$ , а (5.44) на  $\dot{z}$  и результаты сложить, то получим

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z},$$

а это есть полный дифференциал, так как  $U$  является функцией только  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Интегрируя, получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C. \quad (5.45)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования.

В левой части уравнения стоит квадрат скорости частицы бесконечно малой массы относительно вращающейся системы координат. Обозначив его  $V^2$ , получаем

$$V^2 = 2U - C \quad (5.46)$$

или

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C. \quad (5.47)$$

Это интеграл Якоби, называемый иногда интегралом относительной энергии. Интеграл Якоби является единственным интегралом, который можно получить в ограниченной круговой задаче трех тел.

Разумеется, этот интеграл можно выразить также через координаты и компоненты скорости в невращающейся системе координат. Тогда он имеет вид

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = 2\left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\right) - C. \quad (5.48)$$

### 5.10.2. Критерий Тиссерана

Может случиться, что комета подойдет близко к Юпитеру или какой-либо другой планете. В результате такого сближения элементы орбиты кометы могут существенно измениться. Предположим, что в течение интересующего нас интервала времени комета не находится под непрерывным наблюдением и ее орбита точно не рассчитана. Тогда, если бы все характеристики гелиоцентрической орбиты кометы подвергались возмущающему действию планеты, то мы не смогли бы отождествить комету, наблюдавшуюся до сближения с планетой, с той же кометой после сближения.

Характеристики гелиоцентрической орбиты кометы, не подверженные возмущающему воздействию планеты, были обнаружены Тиссераном, который предположил, что систему Солнце—планета—комета можно приближенно считать примером ограниченной круговой задачи трех тел. При этом комета играет роль бесконечно малой частицы. Планетой, рассматриваемой в таких задачах, чаще всего является Юпитер (вследствие его большой массы и значительного расстояния от Солнца). Орбита Юпитера не является круговой, но ее эксцентриситет настолько мал, что его можно считать нулевым.

Тогда из интеграла Якоби следует, что при сближении должна сохраняться постоянная  $C$ . Если эта величина (вычисленная по элементам орбит двух рассматриваемых комет) оказывается приблизительно одной и той же, то две кометы, вероятнее всего, представляют собой одну комету, наблюдаемую в два различных момента времени. Чтобы убедиться в этом, надо выполнить численное интегрирование.

На практике значительно удобнее в уравнении (5.48) координаты и компоненты скорости заменить элементами орбиты.

В случае Юпитера и Солнца  $\mu \sim 10^{-3}$ . Таким образом, с достаточной степенью точности центр Солнца можно принять в качестве начала отсчета. Пусть  $r$  — гелиоцентрический радиус-вектор кометы,  $h$  — постоянная площадей в задаче двух тел Солнце—комета;  $a$ ,  $e$  и  $i$  — соответственно большая полуось, эксцентриситет и наклонение плоскости орбиты кометы к плоскости орбиты Юпитера. Тогда имеем

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

$$\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} = h \cos i$$

и

$$h^2 = a(1 - e^2).$$

Здесь мы воспользовались результатами, полученными в разд. 4.6, 4.6.2, и учли, что в принятых единицах

$$G(m_{\text{С}} + m_{\text{ЮМ}}) = 1.$$

Таким образом, уравнение (5.48) принимает вид

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2a^{1/2} (1 - e^2)^{1/2} \cos i = \frac{2}{r_1} - \frac{2\mu}{r_2} - C. \quad (5.49)$$

Величина  $r$  приблизительно равна  $r_1$ ; кроме того, поскольку гелиоцентрические элементы орбиты кометы определяются, когда она находится далеко от Юпитера, то вторым членом в правой части (5.49) можно пренебречь. В результате получаем

$$\frac{1}{2a} + a^{1/2} (1 - e^2)^{1/2} \cos i = C', \quad (5.50)$$

где  $C'$  — постоянная.

Тогда, если  $a_0, e_0, i_0$  и  $a_1, e_1, i_1$  — соответствующие элементы орбит двух комет, то они связаны между собой следующим образом:

$$\frac{1}{2a_0} + a_0^{1/2} (1 - e_0^2)^{1/2} \cos i_0 = \frac{1}{2a_1} + a_1^{1/2} (1 - e_1^2)^{1/2} \cos i_1. \quad (5.51)$$

Это и есть критерий Тиссерана. Напомним, что единица длины равна расстоянию между Солнцем и Юпитером, а единица массы равна массе Солнца; кроме того, шкала времени такова, что Юпитер вращается вокруг Солнца с единичной угловой скоростью. Следует заметить, что критерий Тиссерана является приближенным. Тем не менее, если при подстановке двух наборов орбитальных элементов в (5.51) получается заметное расхождение, то можно с уверенностью сказать, что они не относятся к одной и той же комете.

### 5.10.3. Поверхности нулевой скорости

Интеграл Якоби имеет вид

$$V^2 = 2U - C$$

или

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C, \quad (5.52)$$

где

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2$$

и

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2.$$

Соотношение (5.52) представляет собой связь между квадратом скорости и координатами бесконечно малой частицы относи-

тельно вращающихся осей. Если скорость частицы становится равной нулю, то

$$2U = C$$

или

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C. \quad (5.53)$$

Здесь  $C$  — постоянная, определяемая по начальным условиям.

Важность уравнения (5.53) состоит в том, что при заданной величине  $C$  оно определяет границы областей, в которых может находиться частица. Это области, где  $2U > C$ , так как иначе  $V^2$  было бы отрицательным, т. е. значение скорости было бы мнимым.

Уравнение (5.53), называемое уравнением поверхностей Хилла, ничего не говорит нам об орбитах частицы внутри допустимого для нее пространства; для получения такой информации надо найти другие интегралы задачи. Однако мы можем исследовать поведение поверхностей Хилла при различных  $C$ .

Если  $\mu$  и  $C$ , и  $(x^2 + y^2)$  велики, то из уравнения (5.53) получаем уравнение окружности

$$x^2 + y^2 \sim C_1.$$

Однако если  $C$  велико ( $\sim C_1$ ), а  $r_1$  либо  $r_2$  очень мало, то поверхности превращаются в отдельные овалы, окружающие точки  $(1-\mu)$  и  $\mu$ . Этот случай

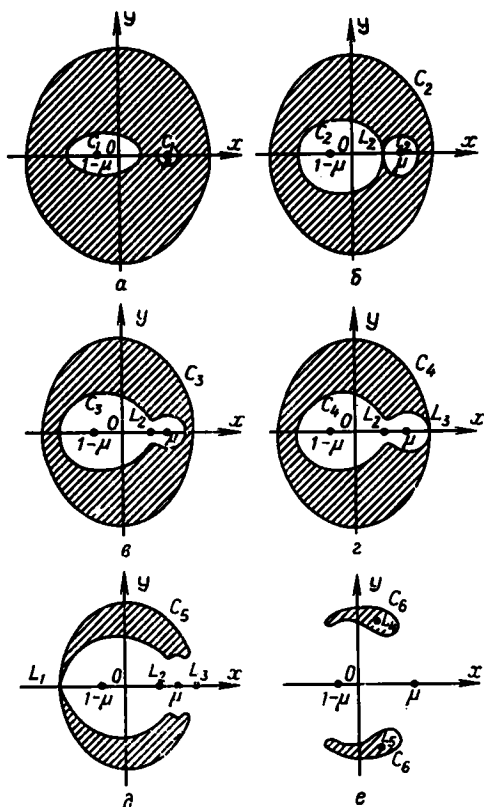


Рис. 5.4.

схематически изображен на рис. 5.4, а (ось  $z$  перпендикулярна плоскости рисунка); заштрихована та часть пространства, где скорость частицы была бы мнимой (там частица находиться не может). Если в начальный момент частица находится внутри одного из овалов или вне близкого к окружности контура, окружа-



ющего оба овала (этот контур получается при пересечении плоскости  $xy$  с цилиндром, параллельным оси  $z$ ), то частица там и останется, поскольку эти три области разделены «запрещенной» областью.

При уменьшении  $C$  внутренние овалы расширяются, а внешняя поверхность (в поперечном сечении близкая к окружности) сжимается. При определенном значении  $C$  (скажем,  $C_2$ ) внутренние овалы касаются друг друга в точке  $L_2$  (имеют общую касательную; такие точки будем называть двойными). Этот случай показан на рис. 5.4, б. Дальнейшее уменьшение  $C$  приводит к слиянию овалов и образованию поверхности, имеющей форму гантели, с узкой перемычкой, через которую частица может из окрестности одной конечной массы уйти в окрестность другой конечной массы. Однако частица все еще не может перейти во внешнюю область (рис. 5.4, в). При дальнейшем уменьшении  $C$  внутренняя и внешняя области сливаются в двойной точке  $L_3$  (рис. 5.4, г), а затем, при еще меньшем  $C$ , эти области сливаются также и в точке  $L_1$ . При этом по мере расширения перемычки у точки  $L_3$  частица получает возможность покинуть окрестность двух конечных масс и перейти во внешнее пространство (рис. 5.4, д). Если этот процесс продолжать, то «запрещенные» области в плоскости  $xy$ , в которые частица попасть не может, будут сжиматься до тех пор, пока не стянутся в точки  $L_4$  и  $L_5$  (рис. 5.4, е).

Из аналитической геометрии известно, что при наличии двойной точки частные производные функции должны обращаться в нуль. В нашем случае функция  $f$  задается формулой

$$f = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C = 2U - C.$$

Следовательно, должно быть

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (5.54)$$

Но в силу уравнений движения частицы имеем

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.55)$$

Поскольку рассматриваемые поверхности являются поверхностями нулевой скорости (т. е.  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ), то из (5.54), (5.55) следует  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ .

Полученный результат можно сформулировать так: если частица находится в одной из пяти двойных точек  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ , то равнодействующая всех приложенных к ней сил равна нулю. Если частицу поместить в одну из этих точек, то она там и останется. Следовательно, двойные точки совпадают с ранее полученными точками Лагранжа.

На рис. 5.5 и 5.6 изображены линии пересечения поверхностей нулевой скорости (при разных значениях  $C$ ) с плоскостями  $xz$

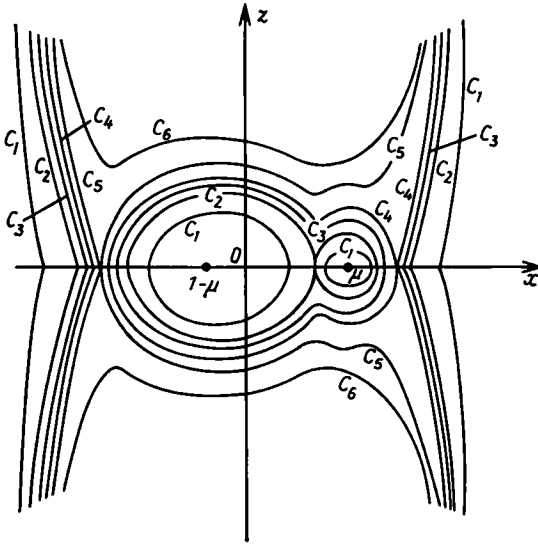


Рис. 5.5.

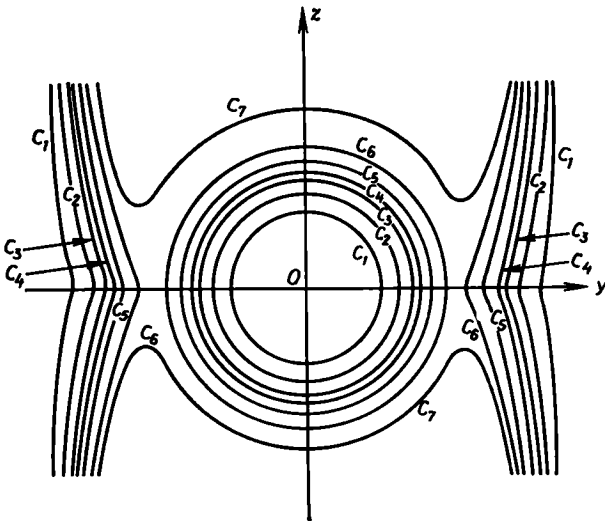


Рис. 5.6

и  $yz$ . При этом значения  $C$  взяты такими же, как и на рис. 5.4.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, отметим, что поверхность нулевой скорости можно использовать в рассматриваемой ограниченной круговой задаче трех тел для того, чтобы указать область, в которой может двигаться частица. Например, если постоянная  $C$  такова, что частица находится в овале, построенном вокруг тела массы  $\mu$ , то можно сказать, что эта частица никогда не пересечет поверхность нулевой скорости, хотя и неизвестно, столкнется ли она с телом  $\mu$ .

Если два тела движутся по эллипсам вокруг их общего центра масс (ограниченная эллиптическая задача трех тел), то интеграла Якоби не существует. Однако заманчиво предположить (как часто поступают), что если эксцентриситет эллиптической орбиты одного тела конечной массы относительно другого мал, то результаты, полученные для круговой задачи, можно применять к эллиптической задаче на больших интервалах времени. Можно показать [24], что это действительно так. Более того, можно сказать, что прогноз движения, полученный при помощи интеграла Якоби, справедлив на интервале времени порядка нескольких периодов обращения двух тел конечной массы.

#### 5.10.4. Устойчивость точек либрации

Посмотрим теперь, что будет происходить с бесконечно малой частицей, если ее поместить вблизи одной из точек либрации. Такая ситуация может возникнуть, если частица, находившаяся в точке либрации, испытает на себе возмущающее воздействие какого-то постороннего тела. Будем, кроме того, предполагать, что не только смещение частицы от точки либрации, но и ее скорость малы. Если в дальнейшем частица будет быстро удаляться от точки либрации, то такое положение равновесия можно назвать *неустойчивым*; если же частица будет колебаться около точки либрации, то положение равновесия *устойчиво*. В небесной механике часто применялся именно такой метод исследования устойчивости решения.

Пусть во вращающейся системе точка Лагранжа имеет координаты  $(x_0, y_0)$ , а частица смещена в точку  $(x_0 + \xi, y_0 + \eta, \zeta)$ ; при этом ее скорость имеет компоненты  $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ . Подставляя эти величины в уравнения движения частицы (5.55) и раскладывая в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 + \eta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 + \zeta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 + \dots, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 + \eta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 + \zeta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 + \dots, \\ \ddot{\zeta} &= \xi \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 + \eta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 + \zeta \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \dots.\end{aligned}$$

Здесь индекс «0» означает, что частные производные  $U$  вычисляются в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Если смещения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  малы, то членами, в которые входят квадраты, произведения и члены более высокого порядка по  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , можно пренебречь. Тогда уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi U_{xx} + \eta U_{xy} + \zeta U_{xz}, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi U_{yx} + \eta U_{yy} + \zeta U_{yz}, \\ \ddot{\zeta} &= \xi U_{zx} + \eta U_{zy} + \zeta U_{zz},\end{aligned}\quad (5.56)$$

где величины  $U$  и

$$U_{xx} \equiv \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 \text{ и т. д.}$$

постоянны, так как вычисляются в точке Лагранжа.

Рассмотрим сначала двумерный случай — движение в плоскости  $xy$ . Тогда имеет место система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi U_{xx} + \eta U_{xy}, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \xi U_{yx} + \eta U_{yy}. \quad (5.57)$$

Ее общее решение можно записать следующим образом:

$$\xi = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \exp(\lambda_i t), \quad \eta = \sum_{i=1}^4 \beta_i \exp(\lambda_i t).$$

Здесь  $\alpha_i$  — постоянные интегрирования;  $\beta_i$  — постоянные, зависящие от  $\alpha_i$  и постоянных коэффициентов в дифференциальных уравнениях. Величины  $\lambda_i$  являются корнями уравнения, получающегося приравниванием нулю характеристического детерминанта системы (5.57), переписанной в виде

$$\begin{aligned}(D^2 - U_{xx})\xi - (2D + U_{xy})\eta &= 0, \\ (2D - U_{xy})\xi + (D^2 - U_{yy})\eta &= 0,\end{aligned}\quad (5.58)$$

где

$$D \equiv \frac{d}{dt}.$$

Подставляя в (5.58)

$$\xi = \alpha e^{\lambda t}, \quad \eta = \beta e^{\lambda t},$$

получаем

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{xy} & \lambda^2 - U_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\lambda^2 - U_{xx})(\lambda^2 - U_{yy}) + 4\lambda^2 - (U_{xy})^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0. \quad (5.59)$$

Если все  $\lambda_i$ , полученные из уравнения (5.59), есть чисто мнимые числа, то  $\xi$  и  $\eta$  являются периодическими функциями и, следовательно, в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  дают устойчивые периодические решения. Если же какие-нибудь из  $\lambda_i$  — действительные или комплексные числа, то  $\xi$  и  $\eta$  со временем будут возрастать, так что решение будет неустойчивым.

Возможно, однако, что решение помимо экспонент будет содержать постоянные. Тогда решение будет устойчивым, если у остальных экспонент показатели чисто мнимые.

Исследуем теперь точки Лагранжа более подробно. Имеем

$$U = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2},$$

где

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2 \quad (i = 1, 2).$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}, \quad B = 3 \left( \frac{1-\mu}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^5} \right)$$

и

$$C = 3 \left[ \frac{1-\mu}{r_1^5} (x_0 - x_1) + \frac{\mu}{r_2^5} (x_0 - x_2) \right].$$

Тогда найдем, что

$$U_{xx} = 1 - A + 3(1-\mu) \frac{(x_0 - x_1)^2}{r_1^5} + 3\mu \frac{(x_0 - x_2)^2}{r_2^5},$$

$$U_{yy} = 1 - A + B y_0^2, \quad U_{zz} = -A + B z_0^2,$$

$$U_{xy} = C y_0, \quad U_{xz} = C z_0, \quad U_{yz} = B y_0 z_0.$$

В случае решения, соответствующего расположению точек Лагранжа на одной прямой,  $y_0 = z_0 = 0$ , так что

$$r_i^2 = (x_0 - x_i)^2 \quad (i = 1, 2),$$

следовательно,

$$U_{xy} = U_{xz} = U_{yz} = 0$$

и уравнения движения для малых смещений записываются в виде  $\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \xi U_{xx} = \xi(1 + 2A)$ ,  $\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \eta U_{yy} = \eta(1 - A)$ ,  $\ddot{\zeta} = -A\zeta$ .

Уравнение для  $\zeta$  не зависит от первых двух уравнений и, поскольку  $A$  положительно, представляет собой просто уравнение синусоидального движения, имеющее решение

$$\zeta = C_1 \cos(At)^{1/2} + C_2 \sin(At)^{1/2},$$

откуда видно, что колебания по  $z$  конечны, малы и совершаются с периодом  $2\pi A^{-1/2}$ .

Подставляя  $U_{xx}$ ,  $U_{xy}$  и  $U_{yy}$  в уравнение (5.59), получаем

$$\lambda^4 + [4 - (1 + 2A) - (1 - A)] \lambda^2 + (1 + 2A)(1 - A) = 0$$

или

$$\lambda^4 + (2 - A) \lambda^2 + (1 + A - 2A^2) = 0, \quad (5.60)$$

где

$$A = \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}.$$

Существует три значения  $A$ , соответствующие трем точкам Лагранжа  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  (см. рис. 5.4), полученным из трех уравнений пятой степени [(5.37) — одно из этих уравнений]. Можно показать, что все три значения удовлетворяют неравенству

$$1 + A - 2A^2 < 0$$

при любых  $\mu$  (напомним, что  $\mu < 1/2$ ). Следовательно, из четырех корней уравнения (5.60) два корня действительные (равные по величине, но противоположные по знаку), а два корня чисто мнимые сопряженные. Значит, решение в этом случае неустойчиво. В то же время, если аккуратно подобрать начальные значения  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , то движение можно сделать периодическим. При этом частица будет двигаться по эллиптической орбите вокруг точки Лагранжа. Однако в общем случае коллинеарное решение следует считать неустойчивым. Используя численное интегрирование, Абханкер [1] обнаружил, что частица уйдет от точки  $L_2$ , совершив вокруг нее не более двух оборотов.

Рассмотрим теперь треугольные решения, соответствующие точкам Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$ . В этом случае  $r_1 = r_2 = r_3 = r = 1$ , так что

$$x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = 0.$$

Если взять точку  $L_4$ , то

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{3}{4}, & U_{zz} &= -1, \\ U_{yy} &= \frac{9}{4}, & U_{xy} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1), \\ U_{xz} &= U_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения для малых смещений принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \xi U_{xx} + \eta U_{xy} = \frac{3}{4} \xi - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \eta, \\ \dot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \xi U_{xy} + \eta U_{yy} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \xi + \frac{9}{4} \eta, \\ \ddot{\zeta} &= \zeta U_{zz} = -\zeta. \end{aligned}$$

Снова колебания по  $z$  являются устойчивыми и описываются уравнением

$$\xi = C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — постоянные интегрирования. При этом период колебаний равен периоду обращения тел конечной массы, т. е.  $2\pi$ .

Используя, как и прежде, уравнение (5.59), получаем

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) = 0.$$

Чтобы четыре корня биквадратного уравнения были попарно сопряженными и чисто мнимыми, должно выполняться условие

$$1 - 27\mu (1 - \mu) \geq 0.$$

Переписав это неравенство в виде

$$1 - 27\mu (1 - \mu) = \epsilon,$$

можно получить

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{23 + 4\epsilon}{108}}.$$

Поскольку  $\mu \leq \frac{1}{2}$ , то перед корнем надо взять знак минус. Если  $\epsilon = 0$ , то  $\mu = 0,0385$ , так что для устойчивости необходимо, чтобы

$$\mu < 0,0385.$$

Если это условие выполнено, то в малой окрестности точки либрации  $L_4$  (или  $L_5$ ) частица движется по периодической орбите. В системе Солнце—Юпитер  $\mu \sim 0,001$ , так что условие выполняется. Действительно, известна группа астероидов (Троянцы), колеблющихся около точек Лагранжа. Для системы Земля—Луна  $\mu \sim 0,01$  и указанное условие также удовлетворяется, хотя в данном случае из-за влияния Солнца задача значительно усложняется. В дальнейшем мы вернемся к этой системе.

### 5.10.5. Периодические орбиты

Поскольку других интегралов кроме интеграла Якоби не существует, то получить полный набор решений ограниченной задачи невозможно. По этой причине внимание исследователей уже очень давно было обращено на изучение периодических орбит. Согласно предположению Пуанкаре, такие орбиты должны часто встречаться среди всех возможных решений задачи, ограниченных в фазовом пространстве. Предполагалось, что их обнаружение и исследование будет достаточным для качественного описания всех возможных решений, а периодичность решений облегчит их нахождение и изучение их свойств.

Под фазовым пространством подразумевается  $6n$ -мерное пространство, образованное  $6n$  координатами и скоростями  $n$  тел. В общей задаче  $n$  тел эти  $6n$  величин удовлетворяют 10 интегральным соотношениям, поэтому размерность фазового пространства можно понизить до  $(6n - 10)$ . В трехмерной (пространственной) ограниченной задаче трех тел координаты и компоненты скоростей частиц связаны между собой интегралом Якоби и размерность фазового пространства можно уменьшить до пяти. Если траекторию частицы ограничить плоскостью орбит двух массивных тел, то размерность фазового пространства уменьшается до трех.

Точка в фазовом пространстве определяет состояние системы в данный момент времени  $t$ . С течением времени точка в фазовом пространстве описывает траекторию, которую не следует путать с физической траекторией какой-либо частицы в реальном пространстве. Фазовая траектория определяется уравнениями движения и начальными условиями. В случае плоской ограниченной круговой задачи трех тел начальные условия представлены значениями  $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$  (в момент  $t_0$ ), между которыми в силу интеграла Якоби существует связь

$$f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = C.$$

В это соотношение массы двух тел и расстояния между ними входят как параметры. Если начальные условия изменить ( $x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, \dot{x}_0 + \delta \dot{x}_0, \dot{y}_0 + \delta \dot{y}_0$ ), то они определяют новую траекторию.

В ограниченной задаче трех тел орбиты называются периодическими, если периодическим является движение бесконечно малой частицы относительно вращающейся системы координат. Пуанкаре в своей классической работе, посвященной ограниченной задаче, говорил, что изучение периодических орбит является важнейшим вопросом и отправным пунктом в задаче классификации решений. Особое значение, которое он придавал периодическим орбитам, отражается в его знаменитом предположении: если дано частное решение ограниченной задачи, то всегда можно найти периодическое решение (быть может, с очень большим периодом), обладающее тем свойством, что при любом  $t$  оно сколь угодно мало отличается от исходного решения. В терминах фазового пространства это утверждение можно выразить следующим образом: если дана точка в фазовом пространстве, то сколь угодно близко от нее всегда существует другая точка, соответствующая периодической орбите. Предположение Пуанкаре относилось только к решениям, ограниченным в фазовом пространстве, т. е. он не рассматривал орбиты, соответствующие уходу или столкновению.

Задача состоит в том, чтобы дать полную, «глобальную», картину свойств ограниченной круговой задачи трех тел при любых значениях инерционного параметра  $\mu$  (отношения массы меньшего



из двух конечных тел к массе всей системы). Поиск семейств периодических орбит выполняется при данном значении  $\mu$ . Теоретически, для того чтобы доказать существование периодических орбит в ограниченной задаче, можно провести исследование при  $\mu = 0$ , а затем аналитически продолжить полученные результаты в область положительных  $\mu$ . Такой подход, примененный впервые Пуанкаре, использовался и многими другими исследователями. Пуанкаре в своей работе, основанной на методе аналитического продолжения, разделил периодические орбиты ограниченной задачи на три класса. Орбиты первого класса рождаются из круговых орбит задачи двух тел ( $e = 0, i = 0$ ), орбиты второго класса рождаются из эллиптических орбит задачи двух тел ( $e \neq 0, i = 0$ ). Периодические орбиты третьего класса также рождаются из орбит задачи двух тел, но при отличном от нуля наклонении орбиты бесконечно малой частицы к плоскости движения основных тел ( $e = 0, i \neq 0$ ). Другими словами, первые два класса орбит относятся к плоской ограниченной круговой задаче, а третий класс относится к пространственной ограниченной круговой задаче.

Возможны и другие методы исследования. Это численно-аналитические или численные методы, использующие для поиска семейств периодических орбит подходящие методы численного интегрирования.

Помимо работы Дарвина и Штрёмгрена, положившей начало таким исследованиям, наиболее полный анализ периодических орбит в ограниченной задаче был выполнен Эноном [10, 11], [14] и Броуке [2]. Ими были рассмотрены случаи  $\mu = 0,5; 0$  и  $0,012$  соответственно. Здесь под исследованием случая  $\mu = 0$  подразумевается не задача двух тел, а система, получающаяся в результате специального предельного перехода из ограниченной задачи трех тел в форме Хилла.

Другими исследователями [6, 7, 27, 28] были рассмотрены случаи  $\mu = 0,00095$  (система Солнце — Юпитер) и  $\mu = 0,012$  (система Земля — Луна). Кроме того, исследованию системы Солнце — Юпитер посвящены работы [3, 4, 8, 18—23, 30, 31].

Можно отметить, что заниматься исследованием периодических орбит нас побуждают следующие причины:

- 1) они играют важную роль в природе;
- 2) возможно их использование в качестве опорных орбит (как подразумевалось в гипотезе Пуанкаре);
- 3) их поиск и классификация практически осуществимы (например, при помощи метода аналитического продолжения Пуанкаре и деления на три класса);
- 4) находить их можно точно и быстро, так как для этого требуется интегрирование на конечном отрезке времени (на периоде).

### 5.10.6. Поиск симметричных периодических орбит

Решение

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(t, \mu, C), \quad \mathbf{s} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (5.61)$$

уравнений движения (5.55) является периодическим, если для фиксированного значения  $T$  и любых  $t_0$  выполняется соотношение

$$\mathbf{s}(t_0, \mu) = \mathbf{s}(t_0 + T, \mu). \quad (5.62)$$

Значение  $T$  (период) соответствует первому моменту времени после  $t_0$ , удовлетворяющему (5.62). Очевидно, имеет место соотношение

$$\mathbf{s}(t_0 + nT) = \mathbf{s}(t_0), \quad (5.63)$$

т. е. решение можно считать периодическим с периодом  $nT = T^*$ , где  $n$  — любое целое число.

При обсуждении периодичности можно воспользоваться понятием зеркальной конфигурации (см. разд. 5.6). Если применить теорему о периодичности к пространственной ограниченной задаче, то видно, что существует два типа зеркальных конфигураций:

а) третье тело расположено в плоскости  $(x, z)$ , а вектор его скорости перпендикулярен плоскости  $(x, z)$ ;

б) третье тело расположено на оси  $x$ , а вектор его скорости перпендикулярен оси  $x$ .

Эти два случая показаны на рис. 5.7. Периодичность орбиты устанавливается при помощи сформулированной выше теоремы, если на этой орбите зеркальная конфигурация достигается дважды.

Для нахождения пространственных периодических орбит Гудас [9] использовал комбинацию случаев (а) и (б). В зависимости от характера используемой комбинации эти орбиты обладают простой или двойной симметрией.

Поиск симметричных периодических орбит в плоской ограниченной задаче состоит в нахождении орбит, на которых дважды реализуется зеркальная конфигурация типа б). В обоих случаях вектор скорости третьего тела перпендикулярен оси  $x$  [напомним, что он всегда лежит в плоскости  $(x, y)$ ]. Такие орбиты симметричны относительно оси  $x$ .

Возьмем начальные условия, удовлетворяющие зеркальной конфигурации; затем, изменяя начальные условия (но так, чтобы зеркальная конфигурация сохранялась), будем искать такие значения, при которых достигается вторая зеркальная конфигурация. Требование сохранения зеркальной конфигурации приводит к тому, что в любом допустимом наборе начальных условий  $(x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$  только две величины можно изменять, а другие две вели-

чины фиксированы (и равны нулю). Обычно эти значения находятся с использованием метода дифференциальной коррекции. Пусть

$$\begin{aligned} y &= f(x_0, 0, 0, \dot{y}_0), \\ \dot{x} &= g(x_0, 0, 0, \dot{y}_0) \end{aligned} \quad (5.64)$$

есть значения  $y$ ,  $\dot{x}$  в момент времени, соответствующий периоду искомой периодической орбиты, и пусть

$$\begin{aligned} y &= f(x_0 + \Delta x_0, 0, 0, \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}_0), \\ \dot{x} &= g(x_0 + \Delta x_0, 0, 0, \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}_0) \end{aligned} \quad (5.65)$$

— соответствующие значения «исправленных» начальных условий, где  $\Delta x_0$ ,  $\Delta \dot{y}_0$  — поправки. Раскладывая функции в ряды Тейлора в точке  $(x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$ , можно линеаризовать систему (5.65) и, на-

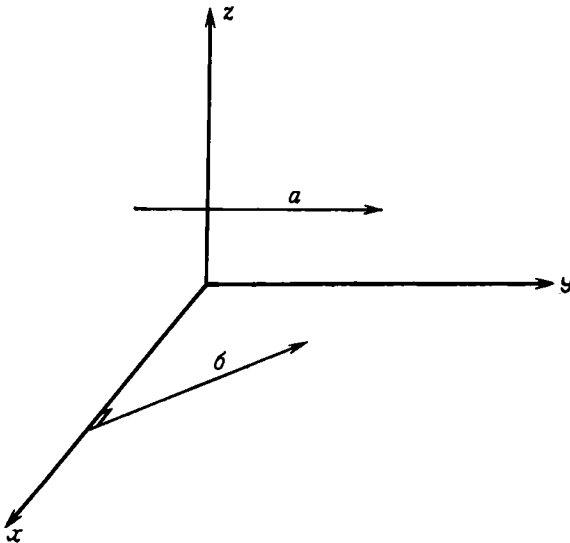


Рис. 5.7.

ложив условия периодичности ( $y = \dot{x} = 0$ ), получить выражения для поправок. Эту процедуру можно повторять, получая на каждом шаге все более точные результаты, до тех пор, пока отклонения не станут меньше допустимых. Опуская нули в скобках, можно написать

$$\begin{aligned} f(x_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 &= 0, \\ g(x_0, \dot{y}_0) + \frac{\partial g}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

или, используя значения функций  $f$  и  $g$ , полученные в (5.64),

$$\begin{aligned} a \Delta x_0 + b \Delta \dot{y}_0 &= -\dot{x}, \\ c \Delta x_0 + d \Delta \dot{y}_0 &= -y, \end{aligned} \quad (5.67)$$

где

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad b = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_0}, \quad c = \frac{\partial g}{\partial x_0}, \quad d = \frac{\partial g}{\partial \dot{y}_0}. \quad (5.68)$$

Решение уравнений (5.66) дает необходимые поправки начальных условий  $x_0, \dot{y}_0$ .

Заметим, что поиск значительно упростится, если свести его к одномерному поиску. Будем считать функции  $f$  и  $g$  в (5.64) значениями  $y$  и  $\dot{x}$  при  $p$ -м пересечении орбиты с осью  $x$ . Тогда первое уравнение (5.64) примет вид

$$y = 0 = f(x_0, 0, 0, \dot{y}_0),$$

и остается только одно условие, которому нужно удовлетворить, т. е. условие

$$\dot{x} = g(x_0, 0, 0, \dot{y}_0) = 0. \quad (5.69)$$

Зафиксируем одну из двух свободных переменных  $x_0, \dot{y}_0$  (скажем,  $\dot{y}_0$ ). Тогда поиск сводится к задаче нахождения нуля функции одной переменной

$$\dot{x} = g(x_0). \quad (5.70)$$

Здесь можно воспользоваться интегралом Якоби. Действительно, разрешив (5.47) относительно  $\dot{y}$ , получаем

$$\dot{y}^2 = 2U - C - \dot{x}^2,$$

или

$$\dot{y} = \pm [2U - C - \dot{x}^2]^{1/2}. \quad (5.71)$$

Любой допустимый набор начальных условий имеет вид

$$s_0 = \{x_0, 0, 0, \dot{y}_0(x_0, C)\}. \quad (5.72)$$

Таким образом, поиск является одномерным и проводится вдоль оси  $x$ . Для того чтобы каждому  $x$  соответствовало одно значение  $\dot{y}$ , в (5.71) все время берется знак минус. При этом  $\dot{x}$  равно нулю, а постоянная Якоби фиксирована. Для заданного значения постоянной Якоби  $C$  выполняется численное интегрирование уравнений движения и при  $p$ -м пересечении оси  $x$  регистрируется знак функции

$$\dot{x} = \dot{x}(t, x_0, C). \quad (5.73)$$

Функция (5.73) непрерывна по начальным условиям. Поэтому изменение ее знака при двух значениях  $x_0$  указывает на существование нуля функции на интервале между этими двумя значениями.

Если нуль найден, то это означает, что установлена вторая зеркальная конфигурация (поскольку при пересечении оси  $x$   $y = 0$ ), а следовательно, найдена периодическая орбита. Эта орбита замкнется при  $2p$ -м пересечении с осью  $x$  (если до  $p$ -го пересечения система не имела зеркальных конфигураций).

### 5.10.7. Примеры семейств периодических орбит

К настоящему времени обнаружено и исследовано огромное число периодических орбит. В этом разделе будет приведено только несколько примеров. В период 1913—1939 гг. Штрёмгреном и учеными копенгагенской школы было выполнено исчерпывающее исследование плоской ограниченной задачи при  $\mu = 1/2$ , когда оба массивных тела имеют единичные массы и отстоят друг от друга на единичном расстоянии (рассмотренную ими специальную задачу обычно называют копенгагенской). Периодические орбиты в этой задаче симметричны относительно оси  $y$  (во вращающейся системе координат с началом в центре масс двух массивных тел). Что касается изучения эволюции периодических орбит внутри семейства, то выполненное ими исследование имеет огромную ценность, но ограничено случаем  $\mu = 1/2$ . Поскольку нам известно, что устойчивые периодические орбиты около треугольных точек Лагранжа существуют при  $\mu < 0,0385$  (значение  $\mu^* = 0,0385$  называется значением Рауса), то изучением одной копенгагенской задачи ограничиваться нельзя.

Свойства решений ограниченной задачи зависят от величины параметра  $\mu$ . Существуют такие особые значения (например, значение Рауса), при переходе через которые определенные классы орбит могут исчезать, появляться или изменять свой характер. Поэтому необходима полная, «глобальная», картина решений задачи при различных  $\mu$ .

При исследовании копенгагенской задачи было обнаружено много семейств периодических орбит. Здесь подробно рассматривается только одно из них, но этого вполне достаточно, чтобы показать, что понимается под семейством и под эволюцией орбит в семействе. Кроме того, это поможет лучше понять методику поиска. На рис. 5.8, *a—в* показаны характерные черты и эволюция орбит класса *f* семейства копенгагенской задачи.

Это набор обратных периодических орбит вокруг одной из двух равных масс, скажем  $m_1$ . Так как обе массы равны, то орбиты можно с одинаковым успехом считать орбитами вокруг планеты или вокруг спутника.

Эволюция начинается с малых круговых орбит вокруг  $m_1$ . Если орбиты проходят через точки положительной полуоси  $x$  на все больших расстояниях от  $m_1$  и  $m_2$ , то размер орбит возрастает, причем они эволюционируют от овала к орбите, по форме,

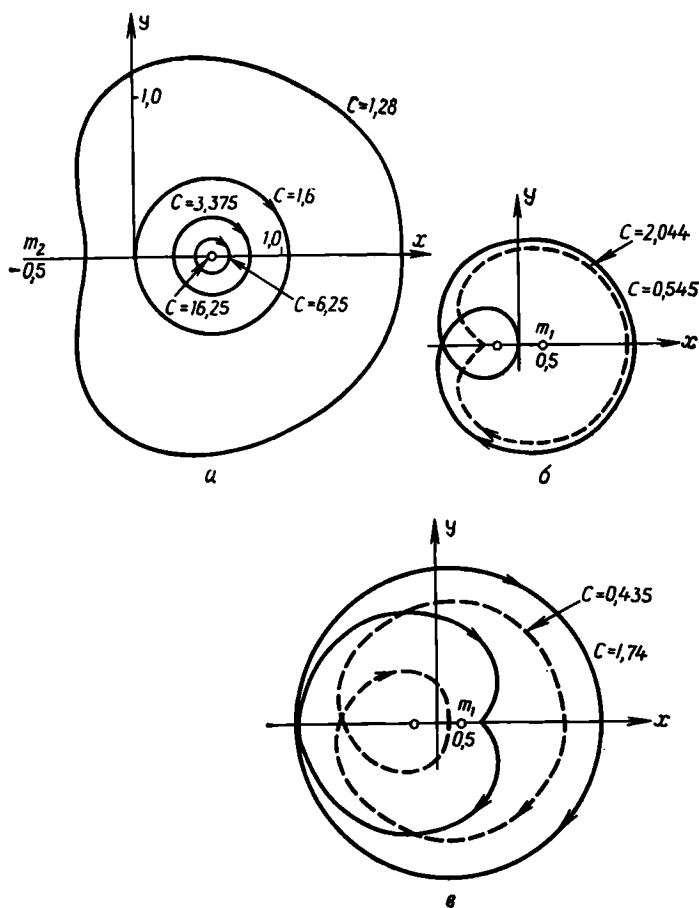


Рис. 5.8.

напоминающей почку. В процессе эволюции орбита по форме все более и более отклоняется от окружности, пока она не перейдет в орбиту столкновения (бесконечно малая частица сталкивается с  $m_2$ ). Этой орбитой (которая одновременно является и орбитой выброса) заканчивается первая фаза эволюции. На рис. 5.8, б показана вторая фаза. Эволюция орбиты приводит к тому, что вокруг точки (столкновения и выброса в  $m_2$ ) описывается петля. От орбиты к орбите петля увеличивается и искажается до тех пор, пока столкновением с  $m_1$  не завершится вторая фаза. Затем появляется новый овал, размеры его увеличиваются, происходит новое столкновение и т. д.

Вычисление постоянной Якоби для орбит семейства показывает, что, как и ожидалось, ее значение быстро уменьшается.

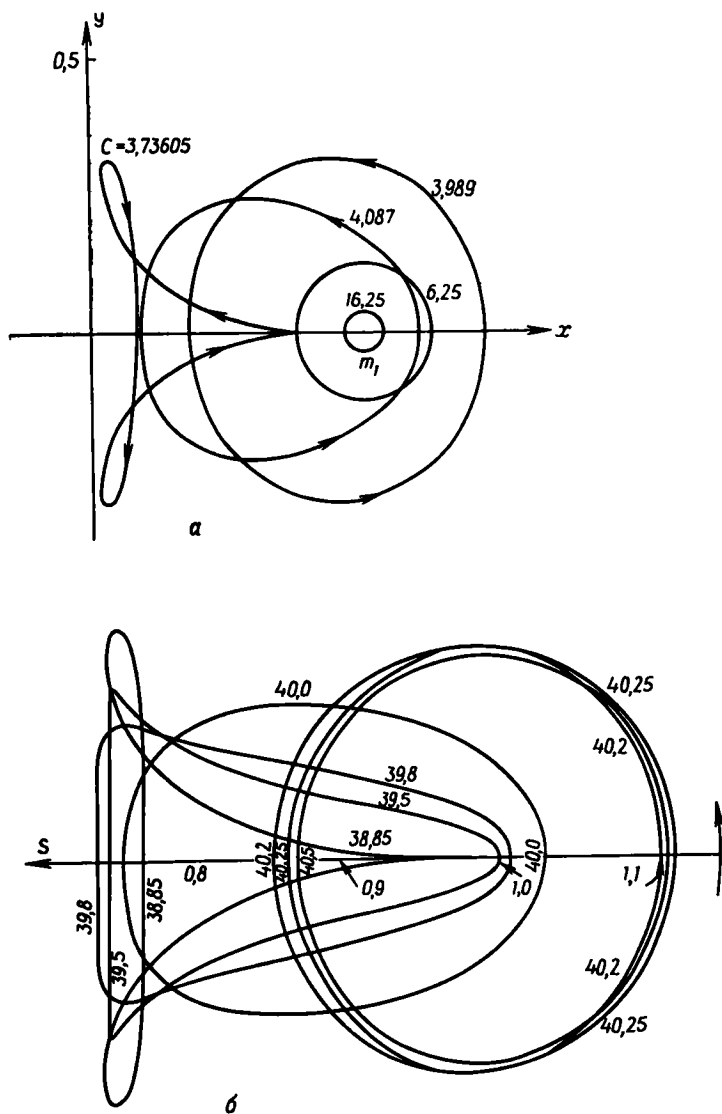


Рис. 5.9.

Вначале в случае бесконечно малой орбиты вокруг  $m_1$  постоянная Якоби бесконечно велика. При первом столкновении с  $m_2$  она достигает значения 2,044; при столкновении с  $m_1$  ее значение равно 1,74.

На рис. 5.9 сравнивается первая фаза периодических орбит класса  $g$  копенгагенской задачи (а) с дарвиновским семейством

А орбит спутников (б). Класс  $g$  состоит из периодических орбит с прямым движением вокруг  $m_1$ . Дарвин выполнял вычисления для значения  $\mu = 1/11$ . Тела  $S$  и  $J$  (массы соответственно 10 и 1) находились на единичном расстоянии друг от друга. Поэтому возмущения со стороны  $S$  на орбиты вокруг  $J$  значительно сильнее, чем в копенгагенской задаче. Тем не менее орбиты на рис. 5.9, а, б очень похожи.

Американская и советская лунные космические программы послужили сильным стимулом к проведению численного и аналитического поиска периодических орбит в системе Земля — Луна ( $\mu \approx 1/82,3$ ). В результате было найдено большое число орбит, многие из которых имеют чрезвычайно сложную форму. При этом наибольший интерес вызывают те орбиты, которые близко подходят и к Земле, и к Луне.

### 5.10.8. Устойчивость периодических орбит

На основании эмпирических соображений сложилось мнение, что орбиты более сложной формы обладают меньшей устойчивостью, чем простые орбиты. Однако, прежде чем сделать обоснованное заключение, следует поближе ознакомиться с понятием устойчивости.

В начале этой главы был рассмотрен вопрос об устойчивости пяти точек Лагранжа в ограниченной задаче трех тел. Что будет с частицей, находящейся в точке Лагранжа, если ее координаты и скорости получат малые приращения? Будет ли она колебаться около точки Лагранжа или быстро уйдет от нее? Точку Лагранжа в этих случаях называют соответственно устойчивой или неустойчивой. Для того чтобы ответить на вопрос, устойчиво или неустойчиво решение Лагранжа, мы линеаризовывали уравнения в вариациях, решали их и анализировали корни характеристического детерминанта.

Понятие устойчивости можно ввести также и для периодических орбит. По традиции это делается с использованием характеристических показателей Пуанкаре. Для строгого определения и исследования устойчивости периодических орбит необходимо проинтегрировать уравнения в вариациях. Вначале рассмотрим понятие *поверхности сечения*.

### 5.10.9. Поверхность сечения

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения автономной системы

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5.74)$$



где  $m = 2n$ ,  $n$  — число степеней свободы системы. Пусть  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$  — вектор, компоненты которого равны значениям в эпоху  $t = 0$ . Тогда решение уравнения (5.74) можно записать в виде

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}, t). \quad (5.75)$$

Кривые (5.75) в фазовом пространстве  $(x_1, \dots, x_m)$  называются «характеристиками», а их проекции в пространстве положений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — траекториями движущейся частицы.

Характеристики (5.75) определяют преобразование  $\tau(t)$  точки  $\mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , т. е.

$$\mathbf{x} = \tau(t) \mathbf{x}_0. \quad (5.76)$$

Оператор  $\tau(t)$  переводит точку  $\mathbf{x}_0$  в фазовом пространстве (в которой частица находилась в момент  $t_0 = 0$ ) в точку  $\mathbf{x}$  (в которой частица находится в момент  $t$ ). В ограниченной задаче якобиан (матрица) преобразования  $\tau(t)$  имеет единичный определитель, т. е.

$$\det \mathbf{J} = \det \frac{\partial (x_i)}{\partial (x_{0j})} = 1, \quad (5.77)$$

поскольку для автономной системы

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \Delta \mathbf{J}, \quad (5.78)$$

где  $\Delta$  — дивергенция вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  (для гамильтоновых систем  $\Delta = 0$ ).

С другой стороны, при  $t = 0$  имеем  $\mathbf{J} = \mathbf{I}$  (единичная матрица  $4 \times 4$ ). Отсюда следует знаменитая теорема Лиувилля: «Объем в фазовом пространстве сохраняется». В этой связи обычно говорят, что «жидкость несжимаема». Возьмем в фазовом пространстве некоторую область и измерим ее  $m$ -мерный объем. Если мы теперь будем следить за тем, что происходит с этой областью при ее движении вдоль траекторий в фазовом пространстве, то обнаружим следующие закономерности: 1) траектории (называемые линиями тока) не пересекаются, т. е. через каждую точку фазового пространства проходит только одна линия тока; 2) какие бы деформации ни испытывала данная область, ее объем остается неизменным. Эта теорема имеет большое значение в гидродинамике и звездной динамике.

Возвращаясь к ограниченной задаче, предположим, что в фазовом пространстве можно построить такую двумерную поверхность, что в течение фиксированного промежутка времени упоминаемые выше характеристики пересекут ее по крайней мере один раз. Пуанкаре и Биркгофф исследовали эти пересечения с рассматриваемой «поверхностью сечения» и обнаружили, что с изме-

нением времени характеристика пересекает поверхность сечения в разных точках, но сама поверхность сечения является инвариантной. В плоской ограниченной задаче  $n = 2$ ,  $m = 2n = 4$ , и, если воспользоваться интегралом Якоби, размерность фазового пространства можно понизить до трех. Другими словами, можно ограничиться исследованием трехмерного подпространства фазового пространства, соответствующего фиксированному значению постоянной Якоби. В этом трехмерном подпространстве имеются двумерные поверхности, которые могут рассматриваться как поверхности сечения. Например, если в фазовом пространстве

$$(x_1, x_2, x_3 = \dot{x}_1, x_4 = \dot{x}_2)$$

$x_4$  заменить постоянной Якоби  $C$  (фиксированной), то получим трехмерное пространство

$$(x_1, x_2, x_3, C).$$

Если затем положить  $x_2 = 0$ , то мы придем к поверхности сечения  $(x_1, x_3)$ . Можно определить отображение  $M^p$ , которое каждой точке плоскости  $(x_1, x_3)$  ставит в соответствие другую точку той же плоскости:

$$(x_{01}, x_{03}) \xrightarrow{M^p} (x_1, x_3). \quad (5.79)$$

Поскольку каждой динамической системе соответствует такое отображение поверхности сечения самой на себя, то свойства системы становятся также и свойствами этого отображения. Периодичность некоторых решений динамической системы соответствует свойству инвариантности некоторых точек этой поверхности относительно отображения  $M^p$ . Например, неподвижные относительно  $M^p$  точки, для которых  $x_3 = x_{03} = 0$ , соответствуют симметричным периодическим орбитам, которые могут быть найдены методом, описанным в разд. 5.10.5. Они называются «симметричными периодическими орбитами порядка  $p$ ».

Впервые подход, основанный на понятии поверхности сечения, был применен в работе [17] для выяснения вопроса о применимости для Галактики третьего интеграла движения (гипотеза Контопулоса). Этот подход применялся также в [12, 13] для исследования вопроса о возможном существовании при определенных условиях такого интеграла в ограниченной задаче и при исследовании глобальной устойчивости.

#### 5.10.10. Матрица устойчивости

Вернемся к понятию устойчивости. Здесь центральную роль играет якобиан преобразования  $T(t)$  в соотношении (5.76).

$$\mathbf{x} = T(t) \mathbf{x}_0.$$

Пусть  $\mathbf{x}_0$  — начальное состояние, соответствующее периодической орбите с периодом  $T$ , а  $\Delta \mathbf{x}_0$  — малое приращение. Если в фазовом пространстве определить вектор

$$y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t),$$

то можно показать, что

$$y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, t + T) = \Delta(\mathbf{x}_0, t + T) y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, 0), \quad (5.80)$$

где

$$\Delta(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial(x_i)}{\partial(x_{0j})}. \quad (5.81)$$

Кроме того, имеем

$$\Delta(\mathbf{x}_0, t + T) = \Delta(\mathbf{x}_0, t) \Delta(\mathbf{x}_0, T) \quad (5.82)$$

и (5.80) принимает вид

$$y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, t + T) = \Delta(\mathbf{x}_0, t) \Delta(\mathbf{x}_0, T) y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, 0). \quad (5.83)$$

Используя это соотношение, можно показать, что

$$y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, pT) = \Delta^p(\mathbf{x}_0, T) y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, 0), \quad (5.84)$$

т. е. что «расстояние»  $y(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, t)$  между периодической орбитой и близкой апериодической орбитой в первом приближении зависит только от матрицы  $\Delta(\mathbf{x}_0, T)$  и ее степеней.

Именно это свойство и лежит в основе строгого математического определения устойчивости периодической орбиты. Можно доказать ряд свойств матрицы  $\Delta(\mathbf{x}_0, T)$ . При исследовании устойчивости в ограниченной задаче находятся собственные значения этой матрицы; по традиции их совокупность называется следом матрицы. Можно показать, что в ограниченной задаче два собственных значения равны единице, а два других таковы, что их произведение также равно единице [25]. Здесь мы ограничимся тем, что приведем соотношение между следом матрицы  $\Delta(T)$ , ее собственными значениями и характеристическими показателями Пуанкаре  $\alpha$ ,  $-\alpha$ :

$$\text{Tr} \Delta(T) = 1 + 1 + \lambda + \frac{1}{\lambda},$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \exp(\alpha T) + \exp(-\alpha T) = 2 \text{ch}(\alpha T).$$

При исследовании устойчивости периодических решений в ограниченной задаче применялись и другие методы. Многие орбиты являются неустойчивыми, однако показано, что области устойчивости существуют. В такой области возмущение частицы в некоторой точке ее орбиты, сопровождающееся незначительным изменением ее скорости, переводит ее на новую траекторию, которая в течение сколь угодно большого времени будет мало отличаться от первоначальной.

### 5.11. Общая задача трех тел

Можно было бы подумать, что, кроме известных интегралов и теоремы вириала, в задаче трех тел не удастся получить никакие другие общие результаты, поскольку и в ограниченной задаче исследованы еще не все решения. В самом деле, даже в ограниченной задаче, если два тела конечной массы двигаются не по окружностям, а по эллипсам, то интеграл Якоби не имеет места. Тем не менее работы последних лет (главным образом численное интегрирование общей задачи трех тел, выполненное для широкого спектра начальных условий и масс) позволили сделать определенные выводы о поведении системы трех тел вообще, но не о поведении какой-то конкретной системы. Точно так же статистик страхового общества сейчас может сделать точный прогноз об изменении со временем численности населения (сколько процентов умрет в следующем году и т. д.), но он не в состоянии сказать что-либо определенное о каком-то конкретном человеке.

Шебехели [32] ввел удобную систему классификации динамического поведения в общей задаче трех тел. Однако, прежде чем перейти к ней, приведем уравнения движения и определим некоторые величины.

Пусть индекс  $i = 1, 2, 3$  обозначает три тела,  $I$  — момент инерции системы,  $T$  — суммарная кинетическая энергия,  $U$  — силовая функция,  $C$  — полная энергия системы. Введем вектор положения  $i$ -го тела  $\mathbf{r}_i$  (с массой  $m_i$ ) и вектор положения  $j$ -го тела относительно  $i$ -го тела  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ . Тогда уравнения движения имеют вид

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U, \quad (5.85)$$

причем силовая функция  $U$  определяется обычным образом:

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Здесь  $G$  — гравитационная постоянная, а  $\nabla_i$  — оператор grad для  $i$ -го тела.

Из этих уравнений получаются 10 интегралов, в том числе интеграл энергии

$$T - U = C.$$

Момент инерции  $I$  определяется по формуле

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2.$$

Из теоремы вириала следует, что при положительной энергии ( $C > 0$ ) система должна распасться, так как в этом случае

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 \right) = 2U + 4C$$

или

$$\frac{d^2 I}{dt^2} > 0.$$

Значит, либо одно тело уйдет на бесконечное расстояние (а два другие образуют двойную систему), либо все три тела разлетятся по гиперболическим орбитам. Шебехели назвал первый случай *уходом* (иногда такое движение называют *гиперболическо-эллиптическим*), а второй случай *разлетом*.

### 5.11.1. Случай $C < 0$

Случай отрицательной полной энергии ( $C < 0$ ) является более сложным и распадается на несколько классов, причем можно отметить, что один тип динамического поведения системы совсем не обязательно исключает остальные возможные типы. В процессе взаимодействия тела описывают сложные траектории, включающие тесные сближения друг с другом. При этом во многих случаях  $|r_{ij}| < r$  ( $r$  — малое расстояние). За этим может последовать *выброс*, если два тела образуют двойную систему, а третье тело удаляется с эллиптической скоростью относительно центра масс этой системы. Если третье тело достигнет скорости освобождения, то оно удаляется на бесконечное расстояние. Такую ситуацию можно классифицировать как *уход* (*гиперболическо-эллиптическое движение*).

Если большая полуось орбиты возмущенного эллиптического движения третьего тела относительно центра масс двойной системы велика по сравнению с расстоянием между компонентами этой системы, то такая конфигурация является относительно устойчивой. Заметим, что именно такая ситуация обычно наблюдается в тройных звездных системах. Шебехели классифицировал такое движение как *обращение*.

Все специальные решения Лагранжа представляют собой *равновесные конфигурации*, но являются неустойчивыми (относительно положения бесконечно малой массы, не говоря уже о других двух телах, для которых величина  $\mu$  меньше значения Рауса). Следовательно, если конфигурация тройной системы оказывается близкой к какому-то решению Лагранжа, то она переходит в класс *взаимодействующих систем*.

*Периодические орбиты* в общей задаче трех тел при  $C < 0$  известны, но они неустойчивы.

### 5.11.2. Случай $C = 0$

Случай  $C = 0$  занимает особое место. Он разделяет области положительных и отрицательных полных энергий. Маловероятно, чтобы такая ситуация имела место в природе. Случай  $C = 0$  может соответствовать гиперболическо-параболическому или гиперболическо-эллиптическому типу движения (*разлету* или *уходу*).

Суммируя сказанное выше, отразим все возможные типы поведения системы в таблице, аналогичной приведенной Шебехели (табл. 5.1). Если в системе не происходит уход или разлет, то момент инерции  $I$  все время остается ограниченным; в противном случае  $I \rightarrow \infty$ .

Установлено, что для подавляющего большинства начальных конфигураций системы трех тел в конце концов (по истечении достаточно большого времени) имеет место уход, т. е. такие системы относятся к гиперболическо-эллиптическому классу. Именно этим фактом объясняется соотношение между числом одинарных, двойных и тройных звездных систем в Галактике. Установлено также, что при распаде тройной системы обычно выбрасывается тело с наименьшей массой.

### 5.11.3. Координаты Якоби

Введем уравнения движения общей задачи трех тел в форме, чрезвычайно удобной при исследовании систем типа Земля — Луна — Солнце и тройных звезд.

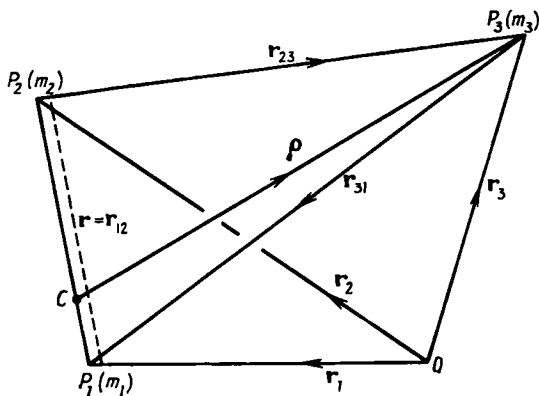


Рис. 5.10.

Если  $C$  — центр масс системы тел  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 5.10), то в качестве векторов положений можно взять вектор  $CP_3$  ( $\rho$ ) и вектор  $P_1P_3$  ( $r$ ). Такие переменные впервые ввели Якоби и Лагранж.

Уравнения относительного движения трех тел могут быть получены из уравнений (5.85), если каждое из них разделить на  $m_i$

( $i = 1, 2, 3$ ), воспользоваться оператором grad и учесть, что  $r_{ij} = r_j - r_i$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{12} + GM \frac{r_{12}}{r_{12}^3} &= Gm_3 F, \\ \ddot{r}_{23} + GM \frac{r_{23}}{r_{23}^3} &= Gm_1 F, \\ \ddot{r}_{31} + GM \frac{r_{31}}{r_{31}^3} &= Gm_2 F, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

и

$$F = \frac{r_{12}}{r_{12}^3} + \frac{r_{23}}{r_{23}^3} + \frac{r_{31}}{r_{31}^3}. \quad (5.87)$$

В нашем случае  $r = r_{12}$  и, кроме того,  $\rho = (m_1/\mu) r + r_{23} = = (-m_2/\mu) r - r_{31}$  (где  $\mu = m_1 + m_2$ ), так как векторная сумма трех сторон треугольника равна нулю. Тогда из первого уравнения (5.86) получаем

$$\ddot{r} = -G\mu \frac{r}{r^3} + Gm_3 \left( \frac{r_{23}}{r_{23}^3} + \frac{r_{31}}{r_{31}^3} \right)$$

или

$$\ddot{r} = -G\mu \frac{r}{r^3} + Gm_3 \left( \frac{\rho - \frac{m_1}{\mu} r}{\left| \rho - \frac{m_1}{\mu} r \right|^3} - \frac{\rho + \frac{m_2}{\mu} r}{\left| \rho + \frac{m_2}{\mu} r \right|^3} \right). \quad (5.88)$$

Таблица 5.1

C	Поведение $I$	Тип движения
Положительное	Стремится к $\infty$	Гиперболическое, разлет Гиперболическо-параболическое, разлет Гиперболическо-эллиптическое, уход
Нулевое	Стремится к $\infty$	Гиперболическо-эллиптическое, уход Параболическое, разлет
Отрицательное	Меньше $I_0$	Взаимодействие Выброс Обращение Равновесие Периодические орбиты Колебания
	Стремится к $\infty$	Гиперболическо-эллиптическое, уход Параболическо-эллиптическое, уход

} Движение ограничено

Кроме того, имеем

$$\ddot{\rho} = \frac{m_1}{\mu} \ddot{r} + \ddot{r}_{23}.$$

Воспользовавшись вторым из уравнений (5.86) и уравнением (5.88), после простых преобразований получаем

$$\ddot{\rho} = -\frac{GM}{\mu} \left[ m_1 \frac{\rho + \frac{m_2}{\mu} r}{\left| \rho + \frac{m_2}{\mu} r \right|^3} + m_2 \frac{\rho - \frac{m_1}{\mu} r}{\left| \rho - \frac{m_1}{\mu} r \right|^3} \right]. \quad (5.89)$$

Следуя Шебехели, введем вектор  $f(\mathbf{x})$  таким образом:

$$f(\mathbf{x}) = G\mathbf{x} |\mathbf{x}|^{-3}.$$

Кроме того, введем обозначения  $\nu = m_1/\mu$ ,  $\nu^* = m_2/\mu$ . Тогда уравнения (5.88) и (5.89) примут вид

$$\ddot{r} + \mu f(r) = (M - \mu) [f(\rho - \nu r) - f(\rho + \nu^* r)] \quad (5.90)$$

и

$$\ddot{\rho} = -M [\nu^* f(\rho - \nu r) + \nu f(\rho + \nu^* r)]. \quad (5.91)$$

Уравнения (5.90) и (5.91) в координатах Якоби образуют систему 12-го порядка. Понижение порядка от 18 до 12 было выполнено с использованием шести интегралов движения центра масс. Таким образом, остаются еще интегралы энергии и момента количества движения. Читателю предлагается в качестве упражнения получить их из (5.90) и (5.91).

Уравнения (5.90) и (5.91) можно представить в более компактной форме, которая в дальнейшем будет использоваться при исследовании движения Луны (гл. 9) и тройной звездной системы (гл. 14). Введем функцию

$$U = G \left( \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_2 m_1}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) = U(r, \rho). \quad (5.92)$$

Тогда уравнения (5.90) и (5.91) принимают вид

$$\ddot{r} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \ddot{\rho} = \frac{1}{g_2} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad (5.93)$$

где

$$g_1 = \frac{m_1 m_2}{\mu}, \quad g_2 = \frac{m_3 \mu}{M}. \quad (5.94)$$



## Задачи

5.1. Показать, что если бы в нашем распоряжении было точное решение задачи  $n$  тел, то, умножая все линейные размеры на постоянный коэффициент  $D$ , а все интервалы времени на  $D^{3/2}$ , можно было бы построить бесконечное число других решений задачи.

5.2. Какую форму примут поверхности нулевой скорости в задаче двух тел при рассмотрении орбиты одного тела относительно другого? Орбиту какого типа должно иметь тело, если она касается поверхности нулевой скорости?

5.3. Система  $n$  частиц с массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) движется под действием такого закона тяготения, что сила притяжения между каждой парой частиц прямо пропорциональна произведению их масс и прямо пропорциональна расстоянию между ними. Показать, что в этом случае орбита любой частицы относительно любой другой частицы является эллипсом, причем вторая частица находится в центре эллипса. Показать, что орбита любой частицы относительно центра масс системы также является эллипсом.

5.4. Каков период орбит в системе из задачи 5.3? Как движется центр масс системы?

## Литература

1. *Abhyankar K. D.* Astron. J., **64**, 163, 1959.
2. *Broucke R.* JPL Tech. Rep. 32-1168, 1968.
3. *Carpenter L., Stumpff K.* Astron. Notes, **291**, 25, 1968.
4. *Colombo G., Franklin F. A., Munford C. M.* Astron. J., **73**, 111, 1970.
5. *Danby J. M. A.* Fundamentals of Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1962, ch. 8.
6. *Deprit A., Henrard J.* Astron. J., **70**, 271, 1965.
7. *Deprit A., Henrard J.* Astron. J., **72**, 158, 1967.
8. *Frangakis C.* Astrophys. and Space Sci., **23**, 17, 1973.
9. *Goudas C. L.* Bull. de la Soc. Math. de Grece; Nouv. Ser., **2**, 1, 1961.
10. *Hénon M.* Ann. Astrophys., **28**, 499, 992, 1965.
11. *Hénon M.* Ann. Astrophys., **1**, part 1, 49; part 2, 57, 1965.
12. *Hénon M.* Bull. Astron., **1**, part 1, 49, 1966.
13. *Hénon M.* Bull. Astron., **1**, part 2, 57, 1966.
14. *Hénon M.* Astron. Astrophys., **1**, 223, 1969.
15. *Hénon M.* Astron. Astrophys., **9**, 24, 1970.
16. *Hénon M.* Cel. Mech., **8**, 269, 1973.
17. *Hénon M., Heiles C.* Astrophys. J., **69**, 73, 1964.
18. *Markellos V. V.* Cel. Mech., **9**, 365, 1974.
19. *Markellos V. V.* Cel. Mech., **10**, 87, 1974.
20. *Markellos V. V., Black W., Moran P. E.* Cel. Mech., **9**, 507, 1974.
21. *Markellos V. V., Motan P. E., Black W.* Astrophys. and Space Sci., **33**, 129, 1975.
22. *Markellos V. V., Moran P. E., Black W.* Astrophys. and Space Sci., **33**, 385, 1975.
23. *Message P. J.* Astron. J. **64**, 226, 1959.
24. *Ovenden M. W., Roy A. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **123**, 1, 1961.
25. *Pars L. A.* Treatise on Analytical Dynamics. London, Heinemann, 1965.
26. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste. Paris, Gauthier-Villars, 1895.
27. *Rabe E.* Astron. J., **66**, 500, 1961.
28. *Rabe E.* Astron., J., **67**, 382, 1962.
29. *Roy A. E., Ovenden M. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **115**, 297, 1955.
30. *Schanzle A. F.* Astron. J., **72**, 149, 1967.
31. *Sinclair A. T.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **148**, 289, 1970.
32. *Szebehely V.* Theory of Orbits. New York, Academic, 1967.

## Рекомендуемая литература

- Brower D., Clemence G. M.* Methods of Celestial Mechanics. New York and London, Academic, 1961. [Имеется перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. — М.: ИЛ, 1964.]
- Giacaglia G. E. D. (ed.)* Periodic Orbits, Stability and Resonances, Dordrecht, Reidel, 1969.
- Plummer H. C.* An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1918.
- Rutherford D. E.* Vector Methods. London and Edinburgh, Oliver and Boyd; New York, Interscience, 1948.
- Smart W. M.* Celestial Mechanics. London and New York, Longmans, 1953. [Имеется перевод: Смарт У. М. Небесная механика. — М.: Мир, 1965.]
- Sterne T. E.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Interscience, 1960. [Имеется перевод: Штерн Т. Введение в небесную механику. — М.: Мир, 1964.]
- Tapley B. D., Szebehely V.* Recent Advances in Dynamical Astronomy, Dordrecht, Reidel, 1973.
- Tisserand F.* Traité de la Mécanique Céleste. Paris, Gauthier-Villars, 1889.
- Whittaker E. T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge, Cambridge University Press, 1959.

## Общие возмущения

### 6.1. Введение

Как нам уже известно, задача двух тел \* может быть решена до конца. В то же время задача многих тел, кроме специальных случаев и нескольких общих результатов, является неразрешимой в том смысле, что нельзя получить аналитические выражения, описывающие поведение тел в любой момент времени. Даже в случае задачи двух тел, когда одно из тел имеет произвольные форму и распределение масс, задача не может быть полностью решена в общем виде.

Однако в дальнейшем в этой главе будет показано, что при рассмотрении движения планеты вокруг Солнца и движения близкого спутника вокруг несферической планеты потенциальная функция  $U$  может быть представлена в виде

$$U = U_0 + R,$$

где  $U_0$  — потенциальная функция, обусловленная точечной массой (потенциальная функция задачи двух тел), а  $R$  — потенциальная функция, обусловленная либо влиянием других притягивающих тел в системе, либо сплюснутостью планеты, вокруг которой обращается тело. Как правило, влияние возмущающей функции  $R$  по крайней мере на порядок меньше влияния  $U_0$ . Поэтому для того, чтобы предсказать с любой степенью точности поведение тела в будущем, можно воспользоваться методами общих или специальных возмущений. В противном случае (когда влияние возмущения велико), например при тесном сближении кометы с Юпитером или на определенном этапе полета Земля — Луна, должны использоваться методы специальных возмущений, описанные в следующей главе.

Многие теории общих возмущений основаны на том, что орбита задачи двух тел (обусловленная  $U_0$ ) под действием  $R$  испытывает только медленные изменения. В таких теориях делаются попытки получить аналитические выражения для изменений элементов орбиты, обусловленных влиянием  $R$ , причем эти выражения должны быть справедливы на определенном интервале времени. Если в момент времени  $t_0$  орбита (пусть она будет эллипсом) имеет

---

\* Здесь под телами следует понимать материальные точки или тела конечных размеров со сферическим распределением плотности. — *Прим. перев.*

элементы  $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0$  и  $\tau_0$ , то эллипс с такими элементами называется *оскулирующим эллипсом*, а элементы называются *оскулирующими элементами* в момент времени  $t_0$ . Скорость возмущенного движения планеты на оскулирующем эллипсе в этот момент времени равна скорости на действительной орбите.

Из-за наличия  $R$  элементы орбиты в некоторый последующий момент  $t_1$  будут равны  $a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1$  и  $\tau_1$ . Величины  $(a_1 - a_0)$  и т. д. являются *возмущениями* элементов на интервале  $(t_1 - t_0)$ . Очевидно, этим возмущениям элементов соответствуют возмущения координат и компонент скорости. Если для получения положения  $(x, y, z)$  и скорости  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  в момент  $t_1$  использовать формулы задачи двух тел (гл. 4), а в качестве элементов взять оскулирующие элементы при  $t_0$ , то полученные величины будут отличаться от соответствующих величин  $(x', y', z')$  и  $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ , вычисленных по оскулирующим элементам при  $t_1$ . Отклонения  $(x - x')$  и т. д. являются возмущениями координат и т. д. Использование решения задачи двух тел (конического сечения) в качестве средней орбиты дает хорошее приближение действительной орбиты тела на значительном интервале времени. Делались попытки использовать в качестве средней орбиты более точные приближения действительной орбиты. Примером может служить приближение, использованное Хиллом в построенной им теории движения Луны. В дальнейшем будет показано, что при рассмотрении движения искусственного спутника можно в первом приближении выбрать такую орбиту, которая будет описывать движение значительно точнее, чем простой кеплеровский эллипс.

Общие возмущения полезны не только в задаче прогнозирования будущего положения тела, но также и потому, что позволяют обнаружить источник наблюдаемых возмущений. Это становится возможным благодаря тому, что различные части возмущающей функции входят в аналитические выражения явным образом. Например, грушевидность Земли была обнаружена О'Кифом, Эккелсом и Сквайресом на основании изучения долгопериодических возмущений орбиты спутника Земли 1958 ( $\beta_2$ ), обусловленных третьей гармоникой гравитационного потенциала Земли.

В последующих разделах будет рассмотрен метод вариации параметров, поскольку в нем нашли отражение основные идеи и результаты общей теории возмущений. Будет также описано несколько полезных способов разложения возмущающей силы.

## 6.2. Уравнения относительного движения

В последующих разделах при обсуждении методов специальных и общих возмущений нам понадобятся дифференциальные уравнения относительного движения  $n$  тел ( $n \geq 2$ ) для случаев, когда начало системы координат совпадает с центром одного из тел.

В разд. 5.2 было получено соотношение

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (j \neq i, i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i = -\mathbf{r}_{ji}.$$

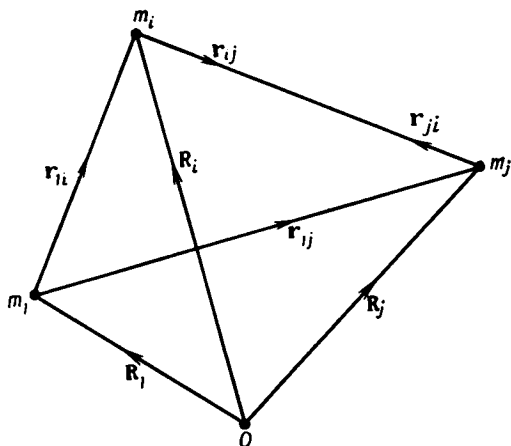


Рис. 6.1.

Будем считать основным тело массы  $m_1$ . Для него уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = G \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{1j}^3} \mathbf{r}_{1j}, \quad (6.1)$$

а уравнения движения других тел (с массами  $m_i$ ) имеют вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \quad (i \neq 1, j \neq i). \quad (6.2)$$

Вычитая (6.1) из (6.2), получаем

$$\ddot{\mathbf{r}}_{1i} = \ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_1 = G \left[ -(m_i + m_1) \frac{\mathbf{r}_{1i}}{r_{1i}^3} + \sum_{j=2}^n m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \sum_{j=2}^n m_j \frac{\mathbf{r}_{1j}}{r_{1j}^3} \right],$$

где снова при суммировании исключается случай  $i = j$ . Поскольку

$$r_{ij} = r_{1j} - r_{1i},$$

то

$$r_{ij}^3 = [(r_{1j} - r_{1i}) \cdot (r_{1j} - r_{1i})]^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\ddot{r}_{1i} + G(m_1 + m_i) \frac{r_{1i}}{r_{1i}^3} = G \sum_{j=2}^n m_j \left( \frac{r_{1j} - r_{1i}}{r_{ij}^3} - \frac{r_{1j}}{r_{1j}^3} \right) \quad (j \neq i).$$

Опуская индекс 1, получаем уравнение движения тела  $m_i$  относительно тела  $m$

$$\ddot{r}_i = G(m + m_i) \frac{r_i}{r_i^3} = G \sum_{j=2}^n m_j \left( \frac{r_j - r_i}{r_{ij}^3} - \frac{r_j}{r_j^3} \right) \quad (j \neq i). \quad (6.3)$$

Совокупность таких уравнений при  $i = 2, 3, \dots, n$  является искомой системой уравнений относительного движения  $n$  тел. Ясно, что 1) если в системе нет других тел  $m_j$  ( $j \neq i$ ) или они пренебрежимо малы, то правая часть уравнения становится равной нулю и в результате получается уравнение задачи двух тел (уравнение движения  $m_i$  относительно  $m$ ), 2) первый член в скобках в правой части представляет собой ускорение тела  $m_i$ , вызванное влиянием тела  $m_j$  ( $j \neq i$ ), 3) второй член в скобках в правой части равен взятому со знаком минус ускорению тела  $m$ , обусловленному влиянием тела  $m_j$  ( $j \neq i$ ).

Таким образом, правая часть уравнения состоит из возмущений, вносимых телами  $m_j$  ( $j \neq i$ ) в орбиту  $m_i$  относительно  $m$ . В планетной системе  $m$  — масса Солнца, а отношение  $m_j/m$  не превосходит  $10^{-3}$  даже для Юпитера. Уже одного этого достаточно, чтобы влияние правых частей было мало.

Рассмотрим систему трех тел (Солнце — Земля — Луна), причем начало отсчета совместим с Землей, массу Луны обозначим  $m_i$ , а массу Солнца —  $m_j$ . Тогда

$$m_j \approx 330\,000 (m + m_i)$$

и, как известно, сила, действующая на Луну со стороны Солнца, значительно больше, чем сила со стороны Земли. Тем не менее Луна обращается вокруг Земли. Чтобы объяснить такое, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, поведение земного спутника, надо провести более подробное рассмотрение. В правой части уравнения (6.3) стоит разность сил притяжения, действующих со стороны Солнца на Землю и на Луну. Поскольку Луна и Земля находятся от Солнца на почти одинаковых расстояниях,

эта разность мала по сравнению с членом, обусловленным притяжением Земли. Поэтому влияние Солнца можно рассматривать как возмущающее воздействие на кеплеровскую орбиту Луны вокруг Земли.

Описанные выше примеры (планеты, движущиеся по гелиоцентрическим орбитам с взаимными возмущениями, и движение Луны по геоцентрической орбите, возмущаемой Солнцем) иллюстрируют два совершенно различных типа задач, решаемых в рамках общей теории возмущений. В первом случае в качестве малого параметра, по которому проводятся разложения в степенные ряды, используется отношение массы возмущающей планеты к массе Солнца. Во втором случае в разложениях используется малая величина, равная отношению расстояния от спутника до планеты к расстоянию от Солнца до планеты. Уже говорилось, что даже в случае, когда возмущающей планетой является Юпитер,  $m_j/m \sim 10^{-3}$ , тогда как в системе Земля — Луна — Солнце  $r_j/r_c \sim \sim 1/400$ . Кроме того, применяются разложения по степеням и произведениям эксцентриситетов и наклонений.

В случае движения искусственного спутника Земли основные возмущения обусловлены несферичностью Земли и сопротивлением атмосферы.

### 6.3. Возмущающая функция

Введем скалярную функцию

$$R_i = G \sum_{j=2}^n m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (j \neq i), \quad (6.4)$$

где

$$r_{ij} = [(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)]^{1/2} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2}$$

и

$$r_j = (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j)^{1/2} = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{1/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_i R_i &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \left[ G \sum_{j=2}^n m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \right] = \\ &= G \sum_{j=2}^n m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (j \neq i), \end{aligned}$$

так как  $\mathbf{r}_j$  не зависит от  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$ . Кроме того,

$$\nabla_i \left( \frac{1}{r_i} \right) = - \left( \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right)$$

и, следовательно, уравнение (6.3) можно переписать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_i - \nabla_i(U_i + R_i). \quad (6.5)$$

Здесь

$$U_i = \frac{G(m + m_i)}{r_i}.$$

Функция  $R_i$  называется возмущающей функцией, а ее введение является важным этапом применения общей теории возмущений. Каждому телу массы  $m_i$  соответствует своя возмущающая функция  $R_i$ , определяемая уравнением (6.4).

#### 6.4. Гравитационная сфера влияния

При движении кометы или космического аппарата вблизи планеты удобным является понятие *гравитационной сферы влияния* (сферы действия). Сфера влияния планеты представляет собой почти сферическую поверхность, центр которой совпадает с планетой. Внутри этой поверхности орбиту кометы или аппарата

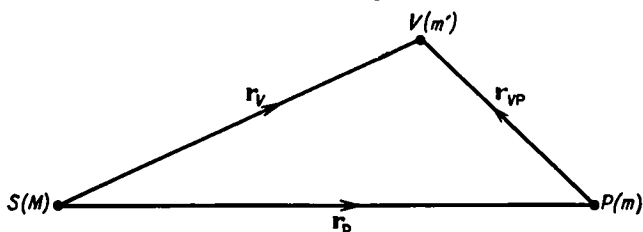


Рис. 6.2.

удобнее считать планетоцентрической орбитой, испытывающей возмущения со стороны Солнца. Точно так же лунный зонд (в системе Земля — Луна) вблизи Луны можно считать движущимся в сфере влияния Луны.

Размер данной сферы может быть получен из следующих соображений. Пусть планета  $P$ , Солнце  $S$  и космический аппарат  $V$  имеют массы  $m$ ,  $M$  и  $m'$ , причем  $m \ll M$ , а  $m'$  пренебрежимо мало по сравнению с  $m$  и  $M$ . Тогда, воспользовавшись уравнением (6.3), получаем уравнение движения аппарата относительно Солнца в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_V + G(M + m') \frac{\mathbf{r}_V}{r_V^3} = Gm \left( \frac{\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_V}{r_{VP}^3} - \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right). \quad (6.6)$$

Уравнение движения аппарата относительно планеты, которое также следует из (6.3), имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_{VP} + G(m + m') \frac{\mathbf{r}_{VP}}{r_{VP}^3} = GM \left( \frac{-\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{VP}}{r_V^3} + \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right). \quad (6.7)$$



Пренебрегая массой  $m'$  и замечая, что

$$\mathbf{r}_{VP} := \mathbf{r}_V - \mathbf{r}_P,$$

$$\mathbf{r}_V = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{VP},$$

уравнения (6.6) и (6.7) можно переписать следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{r}}_V + GM \frac{\mathbf{r}_V}{r_V^3} = -Gm \left( \frac{\mathbf{r}_{VP}}{r_{VP}^3} + \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right), \quad (6.8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{VP} + Gm \frac{\mathbf{r}_{VP}}{r_{VP}^3} = -GM \left( \frac{\mathbf{r}_V}{r_V^3} - \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right). \quad (6.9)$$

Вводя  $\mathbf{A}_S$ ,  $\mathbf{P}_P$ ,  $\mathbf{A}_P$  и  $\mathbf{P}_S$  при помощи формул

$$\mathbf{A}_S = GM \frac{\mathbf{r}_V}{r_V^3},$$

$$\mathbf{A}_P = Gm \frac{\mathbf{r}_{VP}}{r_{VP}^3},$$

$$\mathbf{P}_P = -Gm \left( \frac{\mathbf{r}_{VP}}{r_{VP}^3} + \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right),$$

$$\mathbf{P}_S = -GM \left( \frac{\mathbf{r}_V}{r_V^3} - \frac{\mathbf{r}_P}{r_P^3} \right),$$

получаем

$$\ddot{\mathbf{r}}_V + \mathbf{A}_S = \mathbf{P}_P$$

и

$$\ddot{\mathbf{r}}_{VP} + \mathbf{A}_P = \mathbf{P}_S.$$

Отношения  $|\mathbf{P}_P|/|\mathbf{A}_S|$  и  $|\mathbf{P}_S|/|\mathbf{A}_P|$  определяют соответственно порядок величины возмущения со стороны планеты на кеплеровскую гелиоцентрическую орбиту и порядок величины возмущения со стороны Солнца на кеплеровскую планетоцентрическую орбиту. В качестве сферы влияния выбирается такая поверхность вокруг планеты, в каждой точке которой эти отношения равны. Вне этой поверхности  $|\mathbf{P}_P|/|\mathbf{A}_S|$  меньше, чем  $|\mathbf{P}_S|/|\mathbf{A}_P|$ , поэтому удобнее считать, что аппарат движется по гелиоцентрической орбите и испытывает возмущения со стороны планеты. Внутри поверхности отношение  $|\mathbf{P}_P|/|\mathbf{A}_S|$  больше, чем  $|\mathbf{P}_S|/|\mathbf{A}_P|$ , и в этой области лучше рассматривать планетоцентрическую орбиту, возмущаемую Солнцем.

На практике величина  $r_{VP}$  всегда много меньше, чем  $r_V$  и  $r_P$ . Исходя из этого, Тиссеран показал, что поверхность близка к сфере с радиусом

$$r_A = \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5} r_P. \quad (6.10)$$

В случае системы Земля — Луна радиус сферы действия Луны определяется формулой

$$r'_A = \left( \frac{m'}{M'} \right)^{2/5} r_D, \quad (6.11)$$

где  $r_D$  — геоцентрическое расстояние Луны, а  $m'$  и  $M'$  — массы Луны и Земли соответственно. Размеры сфер влияния планет приведены в табл. 12.1 (гл. 12).

В астродинамике при рассмотрении так называемых вопросов осуществимости применяется более точный критерий, приводящий к двум сферам влияния. Будем пренебрегать возмущением, действующим со стороны планеты на космический аппарат, если оно не превосходит некоторой малой доли  $\epsilon_P$  от кеплеровского гелиоцентрического ускорения. Тогда уравнение

$$|P_P| = \epsilon_P |A_S|$$

определяет внешнюю сферу влияния. За ее пределами могут использоваться обычные уравнения задачи двух тел. Аналогичное уравнение

$$|P_S| = \epsilon_S |A_P|$$

определяет вторую, внутреннюю, сферу влияния, в пределах которой возмущение от Солнца меньше, чем кеплеровское планетоцентрическое ускорение, умноженное на  $\epsilon_S$ . Внутри нее могут использоваться обычные уравнения задачи двух тел для системы планета — космический аппарат. Чтобы получить всю траекторию аппарата, пересекающего обе сферы влияния, нужно в пространстве между сферами воспользоваться каким-нибудь методом общих или специальных возмущений. Однако в некоторых задачах, например при исследовании вопросов осуществимости, этой частью траектории можно пренебречь, так как космический аппарат находится между сферами не настолько долго, чтобы орбита успела заметно отклониться от конического сечения.

Чтобы получить из уравнений (6.8) и (6.9) простые формулы для  $\epsilon_P$  и  $\epsilon_S$ , заметим, что если космический аппарат  $V$  расположен между планетой и Солнцем на соединяющей их прямой линии, то имеет место соотношение

$$|\epsilon_P| = \frac{m}{M} \left( \frac{r^3}{x} \right) \left( \frac{x_P - x}{\rho^3} - \frac{x_P}{r_P^3} \right).$$

Здесь предполагается, что гелиоцентрическая ось  $x$  направлена вдоль радиуса-вектора Солнце — планета, а  $x_P$  и  $x$  — соответственно гелиоцентрические координаты планеты и аппарата. Заметим также, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_P &= |r_P|, \\ \rho &= |r_{VP}|, \\ r &= |r_V|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$|\epsilon_S| = \frac{M}{m} \left( \frac{\rho^3}{X} \right) \left( \frac{X_S - X}{r^3} - \frac{X_S}{r_P^3} \right).$$

Здесь предполагается, что планетоцентрическая ось  $x$  направлена вдоль радиуса-вектора планета — Солнце, а  $X_S$  и  $X$  — соответственно планетоцентрические координаты Солнца и аппарата.

Полагая теперь

$$\begin{aligned} x &= r, \\ X &= \rho, \\ x_P &= X_S = r_P, \\ \rho/r &= d, \\ r_P &= \rho + r \end{aligned}$$

и обозначая  $m/M = m'$ , получаем выражения

$$|\epsilon_P| = \frac{m'}{d^3} \left[ 1 - \left( \frac{d}{1+d} \right)^2 \right],$$

$$|\epsilon_S| = \frac{d^3}{m'} [1 - (1+d)^{-2}],$$

дающие значения  $|\epsilon_P|$  и  $|\epsilon_S|$  для  $d = \rho/r$ .

Например, радиусы внешней и внутренней сфер влияния вокруг Земли в системе Солнце — Земля (если  $\epsilon = 0,01$ ) равны соответственно 0,0178 и 0,0027 астрономических единиц (а. е.), а радиус, вычисленный по формуле (5.70), равен 0,0062 а. е. (См. также табл. 12.2 в гл. 12.)

## 6.5. Потенциал тела произвольной формы

Рассмотрим два тела  $P_1$  и  $P$  с массами  $M_1$  и  $m$  (рис. 6.3). Тогда, как и раньше,

$$M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = GM_1 m \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}, \quad m \ddot{\mathbf{R}} = -GM_1 m \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3},$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{R}_1.$$

Потенциал  $U$  в точке  $P$ , создаваемый телом  $P_1$  с массой  $M_1$ , имеет вид

$$U = \frac{GM_1}{r_1}.$$

Следовательно,

$$m\ddot{\mathbf{R}} = m\nabla U,$$

где

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Если теперь предположить, что в конечном объеме имеется несколько тел с массами  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то для потенциала в точке  $P$  справедлива формула

$$U = G \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_i}$$

и снова имеет место соотношение

$$m\ddot{\mathbf{R}} = m\nabla U.$$

Величину  $U$  часто называют ньютоновским потенциалом. До сих пор в задаче  $n$  тел рассматривались только точечные массы; теперь перейдем к рассмотрению случая, когда одна или несколько масс представляют собой твердые тела конечного размера. Для простоты рассмотрим потенциал в точке, создаваемый одним твердым телом произвольной формы с произвольным распределе-

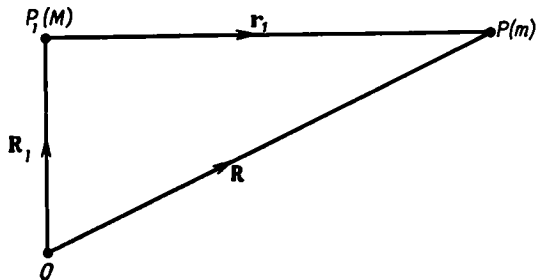


Рис. 6.3.

нием масс, причем взятая точка расположена вне тела (рис. 6.4). Потенциал в  $P$ , создаваемый элементом массы  $\Delta M$ , расположенным внутри тела в точке  $Q$  на расстоянии  $\rho$  от центра масс  $O$ , имеет вид

$$\Delta U = G \frac{\Delta M}{PQ}$$

и, следовательно, потенциал в  $P$  от всего тела равен

$$U = G \int \frac{dM}{PQ}.$$

Здесь интеграл берется по всему телу.

Пусть координаты точек  $P$  и  $Q$  относительно фиксированных в теле осей  $(x, y, z)$  с началом в  $O$  будут соответственно  $(x, y, z)$  и  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Тогда

$$PQ^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \quad (6.12)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.13)$$

и

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \quad (6.14)$$

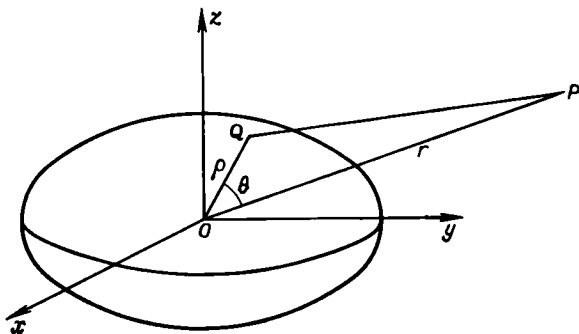


Рис. 6.4.

Из (6.12), (6.13) и (6.14) получаем

$$PQ^2 = r^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} \right) \frac{\rho}{r} + \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right].$$

Вводя  $\alpha$ ,  $q$  и  $\theta$  по формулам

$$\alpha = \rho/r, \quad q = \cos \theta = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho},$$

где, как легко видно,  $\theta$  представляет собой угол  $POQ$ , можно написать

$$PQ^2 = r^2 (1 - 2q\alpha + \alpha^2).$$

Тогда

$$U = G \int \frac{dM}{r(1 - 2q\alpha + \alpha^2)^{1/2}}.$$

Поскольку по определению  $\alpha < 1$  и  $q \leq 1$ , то квадратный корень можно разложить в ряд. В результате получаем

$$U = \frac{G}{r} \left( \int P_0 dM + \int P_1 \alpha dM + \int P_2 \alpha^2 dM + \dots + \int P_n \alpha^n dM \dots \right), \quad (6.15)$$

так как  $r$  можно вынести из-под знака интеграла. Здесь

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = q,$$

$$P_2 = 1/2 (3q^2 - 1),$$

$$P_3 = 1/2 (5q^3 - 3q)$$

и т. д.

Здесь  $P_i$  — полиномы Лежандра — функции, часто встречающиеся в математической физике (см. приложение II).

Теперь уравнение (6.15) можно переписать в виде

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots,$$

где

$$U_0 = \frac{G}{r} \int P_0 dM, \quad U_1 = \frac{G}{r} \int P_1 x dM, \quad U_2 = \frac{G}{r} \int P_2 x^2 dM \text{ и т. д.},$$

и задача сводится к тому, чтобы вычислить эти интегралы. Имеем

$$(1) \quad U_0 = \frac{G}{r} \int dM = \frac{GM}{r}.$$

$$(2) \quad U_1 = \frac{G}{r} \int q \alpha dM = \frac{G}{r^2} \int \left( \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} \right) dM = \\ = \frac{G}{r^3} \left( x \int \xi dM + y \int \eta dM + z \int \zeta dM \right).$$

Поскольку точка  $O$  является центром масс тела, то

$$\int \xi dM = \int \eta dM = \int \zeta dM = 0,$$

следовательно,

$$U_1 = 0.$$

$$(3) \quad U_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{r^3} \int (3q^2 - 1) \rho^2 dM = \frac{G}{2r^3} \left( 3 \int X^2 dM - \int \rho^2 dM \right),$$

где  $X$  — проекция  $\rho$  на  $OP$ . Если проекции  $\rho$  на другие оси, дополняющие  $OP$  до прямоугольной тройки, равны  $Y$  и  $Z$ , то

$$U_2 = \frac{G}{2r^3} \int [2\rho^2 - 3(Y^2 + Z^2)] dM, \quad (6.16)$$

Кроме того, моменты инерции тела относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и  $OP$  равны соответственно

$$A = \int (y^2 + z^2) dM,$$

$$B = \int (z^2 + x^2) dM,$$

$$C = \int (x^2 + y^2) dM$$

и

$$I = \int (Y^2 + Z^2) dM.$$

Тогда (6.16) принимает вид

$$U_2 = \frac{G}{2r^3} (A + B + C - 3I).$$

Форма большинства небесных тел очень близка к сфере, поэтому  $U_2$  мало по сравнению с  $U_0$ .

Формула для потенциала, в которой учтены только  $U_0$ ,  $U_1$ , и  $U_2$ , а именно

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} (A + B + C - 3I),$$

называется формулой Мак-Калуфа. Для большинства астрономических задач она достаточно точна.

Если тело является шаром, то

$$A = B = C = I$$

и

$$U = \frac{GM}{r},$$

т. е. получился потенциал материальной точки массы  $M$ . Это указывает на то, что шар массы  $M$  с радиально-симметричным (сферическим) распределением плотности имеет такой же потенциал, как если бы вся его масса была сконцентрирована в центре. Впервые этот результат был получен Ньютоном.

$$(4) \quad U_3 = \frac{G}{2r^4} \int (5q^3 - 3q) \rho^3 dM.$$

При вычислении этого интеграла мы приходим к сложному выражению, содержащему интегралы вида

$$\int \xi^a \eta^b \zeta^c dM,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — положительные целые числа и

$$a + b + c = 3.$$

Если тело симметрично относительно всех трех координатных плоскостей (например, однородный эллипсоид с тремя неравными осями), то все такие интегралы равны нулю, так что  $U_3 = 0$ . Более того, в этом случае в ноль обращаются все  $U$  с нечетными индексами, т. е.

$$U_3 = U_5 = U_7 = \dots = 0.$$

Исследования, проводимые с использованием искусственных спутников, показали, что для Земли это условие не выполняется. Земля имеет слегка грушевидную форму, так что  $U_3$  хотя и мало, но нулю не равно.

Действуя таким образом, можно показать, что гравитационный потенциал тела в любой точке можно представить в виде суммы различных потенциальных функций, зависящих от положения точки, формы тела и распределения масс. Во все потенциальные функции в качестве сомножителей входят различные обратные степени расстояния от точки до центра масс тела. Кроме того, поскольку Солнце, планеты и спутники представляют собой по существу сферические тела, то их с высокой степенью точности можно аппроксимировать точечными массами (т. е. за потенциал принимать потенциальную функцию нулевого порядка  $U_0 = GM/r$ ). Член  $U_2$  приходится учитывать только при рассмотрении движения спутника вокруг сплюснутой планеты или при исследовании прецессии и нутации. Член  $U_3$  и члены более высоких порядков принимаются во внимание при рассмотрении движения близких искусственных спутников.

Удобно ввести полярные координаты  $r$ ,  $\lambda$  и  $\phi$  ( $r$  уже определено, а  $\lambda$  и  $\phi$  — долгота и широта точки или спутника). Тогда

$$x = r \cos \lambda \cos \phi, \quad y = r \sin \lambda \cos \phi, \quad z = r \sin \phi.$$

Выражение для  $U_2$  после небольшого упрощения принимает вид

$$U_2 = \frac{G}{r^3} \left[ \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) - \frac{3}{4} (A-B) \cos^2 \phi \cos 2\lambda \right].$$

Если тело обладает симметрией относительно оси  $z$ , но не обязательно симметрично относительно экватора (т. е. оно может иметь форму груши), то  $A$  равно  $B$  и

$$U_2 = \frac{G}{r^3} (C - A) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right).$$

Потенциал Земли на расстоянии  $r$  от ее центра масс можно аппроксимировать выражением

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 + J \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \phi \right) + H \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left( \frac{3}{5} - \sin^2 \phi \right) \sin \phi + K \left( \frac{R}{r} \right)^4 \left( \frac{1}{10} - \sin^2 \phi + \frac{7}{6} \sin^4 \phi \right) + \dots \right], \quad (6.17)$$



где постоянные  $J$ ,  $H$  и  $K$  называются коэффициентами второй, третьей и четвертой гармоник гравитационного потенциала Земли;  $R$  — экваториальный радиус Земли,  $M$  — масса Земли. Если предположить, что Земля является сфероидом, то ее потенциал можно разложить по сферическим функциям

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right],$$

где  $P_n(\sin \phi)$  — полиномы Лежандра. Первые три полинома имеют вид

$$P_0(\sin \phi) = 1, \quad P_1(\sin \phi) = \sin \phi, \quad P_2(\sin \phi) = \frac{1}{2}(3\sin^2 \phi - 1).$$

При этом началом координат считается центр масс Земли.

Впервые этот результат был получен Лапласом. Заметим, что если в уравнении (6.17) положить

$$J = {}^3/2 J_2, \quad H = {}^5/2 J_3, \quad K = -{}^{15}/4 J_4,$$

то получится то же самое.

В гл. 10 будет показано, как при помощи изучения орбит искусственных спутников можно находить эти коэффициенты и коэффициенты более высоких порядков (см. также приложение II).

## 6.6. Потенциал шара во внутренней точке

В гл. 15 нам понадобится выражение для потенциала массивного шара в его внутренней точке.

Рассмотрим сначала притяжение в точке  $O$  со стороны шарового слоя плотности  $\rho$ , ограниченного двумя концентрическими сферами (рис. 6.5). Пусть конус с вершиной в  $O$  вырезает в нем два элемента  $A'B'BA$  и  $D'E'ED$ . Если угол  $d\omega$  при вершине конуса мал, то масса элемента  $ABB'A'$  равна  $\rho r^2 d\omega BA$  ( $r = OB$ ), а сила притяжения, действующая со стороны этого элемента на единичную массу в точке  $O$ , равна  $G\rho d\omega BA$ . Аналогично сила притяжения, действующая на единичную массу в точке  $O$  со стороны элемента  $DEE'D'$ , равна  $G\rho d\omega DE$ . Но  $AB = DE$ , поскольку при пересечении любой хорды (например,  $ABODE$ ) с концентрическими сферами от нее отсекаются равные отрезки. Следовательно, рассматриваемые силы притяжения равны и противоположно направлены. Поскольку для каждого направления можно построить соответствующие конусы с вершиной в  $O$ , то видно, что суммарная сила притяжения, действующая на единичную массу в точке  $O$  со стороны шарового слоя, равна нулю. Точка  $O$

внутри шарового слоя была взята произвольным образом. Поэтому притяжение со стороны слоя в любой точке внутри него везде равно нулю. Отсюда следует, что потенциал во всех внутренних

точках должен быть постоянным и равным потенциалу в центре сферы  $C$ . По определению, если  $m$  есть масса слоя, а  $a$  — его радиус, то потенциал равен  $Gm/a$ .

Сплошной шар можно представить состоящим из концентрических шаровых слоев. Возьмем точку  $O$  на расстоянии  $r$  от центра. Удалим из шара тонкий слой толщины  $2\epsilon$  и среднего радиуса  $r$ , так что  $O$  будет теперь лежать внутри образовавшейся щели (рис. 6.6). Со стороны шаровых слоев, внешних по отношению к ще-

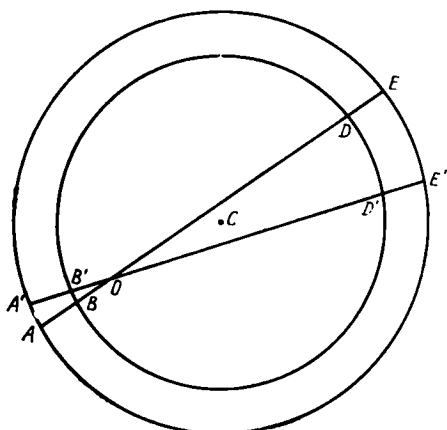


Рис. 6.5.

ли, на точку  $O$  силы не действуют, а притяжение со стороны внутренних слоев будет таким, как если бы вся их масса была сосредоточена в центре сферы  $C$ . Следовательно, если вещество имеет плотность  $\rho$ , то сила притяжения в  $O$  определяется выражением

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3}G\rho\pi(r - \epsilon)^3/r^2 = \frac{4}{3}G\rho\pi r.$$

Мы видим, что сила притяжения однородного сплошного шара, в его внутренней точке прямо пропорциональна расстоянию этой точки от центра.

Чтобы получить гравитационный потенциал в точке  $O$ , вспомним, что потенциал шара с радиусом  $(r - \epsilon)$  и плотностью  $\rho$  на внешнюю точку на расстоянии  $(r - \epsilon)$  от центра равен

$$\frac{4}{3}G\rho\pi(r - \epsilon)^3/(r - \epsilon) = \frac{4}{3}G\rho\pi(r - \epsilon)^2. \quad (6.18)$$

Пусть  $s$  — радиус шарового слоя с толщиной  $ds$ , причем  $s > r + \epsilon$ . Тогда масса этого слоя равна  $4\pi s^2\rho ds$  и потенциал, соз-

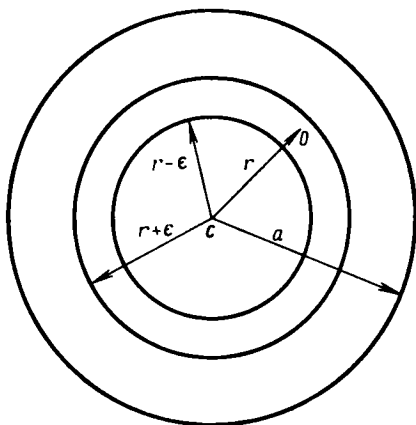


Рис. 6.6.

даваемый им в точке  $O$ , равен  $4\pi G\rho s ds$  (потенциал, создаваемый шаровым слоем во внутренней точке). Интегрируя, получим суммарный потенциал, создаваемый всеми такими слоями:

$$\int_{r+\epsilon}^a 4\pi G\rho s ds = 2\pi G\rho [a^2 - (r + \epsilon)^2]. \quad (6.19)$$

Складывая (6.18) и (6.19) и переходя к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ , получим для потенциала, создаваемого однородным шаром с радиусом  $a$  во внутренней точке на расстоянии  $r$  от центра, выражение  $(2/3) G\rho r (3a^2 - r^2)$ .

Заметим, что сила притяжения со стороны однородного слоя, ограниченного двумя подобными эллипсоидами, во внутренней точке также равна нулю.

## 6.7. Метод вариации параметров

Рассмотрим движение планеты  $P$  с массой  $m$  по гелиоцентрической орбите (масса Солнца —  $M$ ), возмущаемой второй планетой  $P_1$  с массой  $m_1$ . Тогда уравнение движения планеты  $P$  в силу (6.3) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right), \quad (6.20)$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$  — гелиоцентрические радиусы-векторы планет  $P$ ,  $P_1$  и

$$\rho = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})]^{1/2}.$$

Уравнение (6.20) можно переписать следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U = \nabla (U_0 + R), \quad (6.21)$$

где

$$U_0 = -\frac{G(M + m)}{r},$$

$$R = Gm_1 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right)$$

и

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Соответствующее уравнение движения планеты  $P_1$  имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + G(M + m_1) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = Gm \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (6.22)$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_1 U_1 = \nabla_1 (U'_0 + R_1), \quad (6.23)$$

где

$$U'_0 = \frac{G(M + m_1)}{r_1}$$

и

$$R_1 = Gm \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Если в первом приближении правые части уравнений (6.20) и (6.22) положить равными нулю, то мы придем к двум задачам двух тел, которые могут быть решены методами главы 4. В результате будут найдены невозмущенные кеплеровские эллиптические гелиоцентрические орбиты планет, каждая из которых определяется шестью элементами.

Координаты планеты  $P$  можно записать в виде

$$x = x(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t),$$

$$y = y(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t),$$

$$z = z(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t),$$

где справа стоят функции шести элементов и времени (см. разд. 4.12). Компоненты скорости также выражаются в виде функций элементов и времени

$$\dot{x} = \dot{x}(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t),$$

$$\dot{y} = \dot{y}(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t),$$

$$\dot{z} = \dot{z}(a, e, i; \Omega, \omega, \tau; t).$$

Соответствующие функции можно записать и для второй планеты.

При использовании метода вариации параметров (в данном случае параметрами являются элементы орбиты) выражения для координат дифференцируются (теперь элементы рассматриваются как переменные) и снова подставляются в уравнения (6.20) и (6.22), так как вариации элементов обусловлены ненулевыми правыми частями этих уравнений (которыми до сих пор пренебрегали). В результате для элементов орбиты получается три дифференциальных уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}, \quad (6.24)$$

где  $\alpha_i$  — один из шести элементов.

Запишем уже решенные (невозмущенные) уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \nabla U_0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial t^2} = \nabla_1 U'_0. \quad (6.25)$$

Здесь знак частного дифференцирования  $\partial^2/\partial t^2$  указывает на то, что при решении этих уравнений элементы считаются постоянными. В результате решения уравнений получаются оскулирующие орбиты двух планет.

В любой момент времени можно считать, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t}, \quad (6.26)$$

т. е. действительные векторы скоростей в момент времени  $t$  можно получить дифференцированием эллиптических формул, в которых мгновенные значения элементов полагаются постоянными (на это и указывают знаки частного дифференцирования).

Таким образом, из (6.24) получаем

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0. \quad (6.27)$$

Два аналогичных уравнения имеют место для  $y$  и  $z$ . Уравнения вида (6.27) дают нам для каждой планеты по три функциональных соотношения.

Продифференцировав уравнение для  $x$  и  $z$  компоненты системы (6.26), получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{dx}{dt} \right) \frac{d\alpha_j}{dt}.$$

Но в силу (6.26)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_j} \frac{d\alpha_j}{dt}.$$

Из уравнений (6.21) и (6.25) имеем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U_0}{\partial x}.$$

Следовательно, можно написать

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha_j} \frac{d\alpha_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (6.28)$$

Для  $y$  и  $z$  имеют место два аналогичных уравнения.

Затем шесть уравнений (6.27) и (6.28) преобразуются таким образом, чтобы получилось шесть дифференциальных уравнений первого порядка для скоростей изменения элементов. Такое преобразование впервые было выполнено Лагранжем. Полученные в результате уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1 - e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi} - \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\}, \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \left\{ \operatorname{ctg} i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где  $n^2 a^3 = G(M + m)$  и  $\chi = -nt$ .

Эти уравнения представляют собой одну из форм *планетных уравнений Лагранжа*. Очевидно, соответствующая система уравнений имеет место и для планеты с массой  $m_1$ .

Следует отметить, что полученные уравнения являются точными. Первоначально они были выведены для случая, когда возмущением является притяжение второй планеты, но уравнения будут справедливы и тогда, когда функция  $R$  обусловлена рядом других причин. Такими возмущающими факторами могут быть форма планеты, ее внутреннее распределение масс, влияющее на близкий спутник, или сила сопротивления атмосферы. Разумеется, аналитическая форма  $R$  зависит от природы действующей силы.

Следующим этапом преобразования системы уравнений является замена элементов  $\omega$  и  $\chi$  на  $\bar{\omega}$  и  $\epsilon$ . Здесь  $\bar{\omega}$ , если речь идет о планете, обозначает долготу перигелия (см. разд. 2.6), а величина  $\epsilon$  называется *средней долготой в эпоху* и определяется следующим образом.

Истинная долгота планеты  $L$ , измеряемая от  $\underline{\gamma}$  до направления на восходящий узел  $N$  вдоль дуги большого круга, образованного пересечением плоскости орбиты с небесной сферой, равна

$$L = \Omega + \omega + f = \bar{\omega} + f,$$

где  $f$  — истинная аномалия.

Средняя долгота планеты  $l$  задается формулой

$$l = \bar{\omega} + M = \bar{\omega} + n(t - \tau),$$

где  $M$  — средняя аномалия, а  $n$ , как и прежде, — среднее движение. Тогда  $\epsilon$  определяется из соотношения

$$l = nt + \epsilon = \bar{\omega} + n(t - \tau).$$

Таким образом,  $\epsilon$  представляет собой среднюю долготу планеты при  $t = 0$ .

Возмущающая функция  $R$ , которая первоначально выражалась через элементы  $a, e, i, \Omega, \omega, \chi$  обеих планет, теперь преобразуется в функцию  $R_1$  элементов  $a, e, i, \Omega, \bar{\omega}, \epsilon$ , где  $\bar{\omega} = \Omega + \omega$ , а  $\epsilon = \Omega + \omega + \chi$ , так как  $\chi = -n\tau$ . Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \frac{\partial R_1}{\partial \Omega} + \frac{\partial R_1}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R_1}{\partial \epsilon},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{\partial R_1}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R_1}{\partial \epsilon},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \chi} = \frac{\partial R_1}{\partial \epsilon}.$$

Подставляя эти выражения в систему (6.29), получаем

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}. \end{aligned}$$

(6.30)

Здесь индекс 1 опущен.

Заметим, что если  $e$  или  $i$  очень малы, то уравнения становятся малоприспособными, поскольку в их правых частях в знаменателе встречаются малые величины  $e$  и  $\sin i$ .

Однако если ввести в рассмотрение величины

$$h = e \sin \bar{\omega}, \quad k = e \cos \bar{\omega}, \\ p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega,$$

то их можно использовать для того, чтобы в системе (6.30) уравнения для  $\dot{e}$ ,  $\dot{\bar{\omega}}$ ,  $\dot{i}$  и  $\dot{\Omega}$  заменить уравнениями для  $\dot{h}$ ,  $\dot{k}$ ,  $\dot{p}$  и  $\dot{q}$ .

### 6.7.1. Модификация средней долготы в эпоху

Более серьезные трудности при использовании уравнений движения планет в форме Лагранжа (6.30) возникают в следующем случае.

Известно, что разложение возмущающей функции  $R$  в ряд с периодическими членами имеет вид

$$R = Gm_1 \sum P \cos Q + Gm_1 \sum P' \cos Q'. \quad (6.31)$$

При этом коэффициенты  $P$  и  $P'$  зависят от элементов орбит  $a$ ,  $e$ ,  $i$  обеих планет, а аргументы зависят от элементов  $\Omega$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\epsilon$ , так что

$$Q = j\Omega + j_1\Omega_1 + k\bar{\omega} + k_1\bar{\omega}_1 \quad (6.32)$$

и

$$Q' = h(nt + \epsilon) + h_1(n_1t + \epsilon_1) + j\Omega + j_1\Omega_1 + \\ + k\bar{\omega} + k_1\bar{\omega}_1 = hl + h_1l_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\bar{\omega} + k_1\bar{\omega}_1.$$

Здесь  $h$ ,  $h_1$ ,  $j$ ,  $j_1$ ,  $k$ ,  $k_1$  — целые числа.

В частности, поскольку  $n^2a^3 = \mu$ ,  $n$  и  $n_1$  являются функциями  $a$  и  $a_1$  соответственно и, следовательно,  $a$  и  $a_1$  явно входят в коэффициенты и неявно в аргументы.

Теперь в уравнении Лагранжа для  $d\epsilon/dt$  появляется частная производная  $\partial R/\partial a$ . Она встречается в члене, имеющем вид

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial n} \frac{dn}{da},$$

где в скобках подразумевается та часть  $\partial R/\partial a$ , которая обусловлена явной зависимостью коэффициентов  $P$  и  $P'$  от  $a$ . Тогда имеем

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2l}{na} \frac{dn}{da} \frac{\partial R}{\partial l}. \quad (6.33)$$

Обычно вариации элементов малы на значительном интервале времени. Поэтому для решения системы уравнений (6.30) можно воспользоваться одним из методов последовательных приближений. Первое приближение решения (после того, как частные произ-



водные  $R$  определены) находится путем интегрирования полученных в результате уравнений. При этом элементы в правых частях считаются постоянными. Из уравнений (6.31) и (6.32) видно, что выражение

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2t}{na} \frac{dn}{da} \frac{\partial R}{\partial t}$$

в первом приближении решения дифференциального уравнения для  $\epsilon$  дает ряд, в который время входит как множитель в коэффициентах при периодических членах.

Чтобы избавиться от этих нежелательных смешанных членов, поступают следующим образом.

Из уравнений (6.31) и (6.32) следует

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \epsilon}.$$

Кроме того, воспользовавшись первым уравнением (6.30), получаем

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{da} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{dn}{da} \frac{\partial R}{\partial \epsilon},$$

и уравнение (6.33) принимает вид

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{dn}{dt}.$$

Уравнение для  $\epsilon$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = & -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{dn}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \\ & + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned}$$

Пусть  $\epsilon'$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon'}{dt} = & -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \\ & + \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned}$$

Если последнее уравнение проинтегрировать, то в него уже не будут входить нежелательные смешанные члены.

Имеем

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{d}{dt}(nt) - n,$$

так что

$$l = nt + \epsilon = \int n dt + \epsilon'.$$

Вводя  $\rho$  по формуле

$$\rho = \int n dt, \quad (6.34)$$

получаем  $l = \rho + \epsilon'$ . Из уравнения (6.34) следует, что  $(d\rho/dt) = n$  и

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a} \frac{da}{dt},$$

откуда

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}. \quad (6.35)$$

Уравнением (6.30) можно воспользоваться и в том виде, как оно есть, если сделать следующие замечания:

1) теперь уже  $\epsilon$  будет означать  $\epsilon'$ , так что

$$l = \rho + \epsilon; \quad (6.36)$$

2) при вычислении частной производной  $\partial R/\partial a$  надо считать, что среднее движение  $n$  не зависит от  $a$ ;

3) к системе (6.30) надо добавить уравнения (6.35) и (6.36).

Такой подход оказывается проще способа, в котором исключается возможность появления смешанных членов. Он применяется также в теории движения искусственных спутников.

### 6.7.2. Решение уравнений движения планет в форме Лагранжа

Уже отмечалось, что поскольку возмущающее ускорение мало по сравнению с кеплеровским ускорением, то изменения орбитальных элементов также малы на значительных интервалах времени. Поэтому в первом приближении правые части уравнений (6.30) можно считать функциями только  $t$ .

Имеем

$$R = Gm_1 \left( \sum P \cos Q + \sum P' \cos Q' \right),$$

где  $P, P'$  — функции  $a, a_1, e, e_1, i$  и  $i_1$ ,

$$Q = j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1$$

и

$$Q' = h(\rho + \epsilon) + h_1(\rho_1 + \epsilon_1) + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1.$$

В первом приближении  $\rho = n_0 t$  и  $\rho_1 = n_{10} t$ , где  $n_0$  и  $n_{10}$  — оскулирующие значения средних движений в эпоху.

Тогда видно, что уравнения (6.30) могут быть непосредственно проинтегрированы. Это даст  $\alpha = \alpha_0 + \lambda t +$  (периодические члены), где  $\alpha$  — некоторый элемент,  $\lambda$  — постоянная, отличная от нуля для всех элементов, кроме  $a$ . Известно, что выражения для  $a$ ,  $e$  и  $i$  представляют собой разложения по косинусам, а выражения для  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $\epsilon$  — по синусам. Например, уравнение для  $\Omega$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}$$

теперь записывается в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Gm_1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \left( \sum \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q + \sum \frac{\partial P'}{\partial i} \cos Q' \right),$$

что после интегрирования дает

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{Gm_1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0} \left[ \left( \sum \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q \right) t + \right. \\ \left. + \sum \frac{1}{hn_0 + h_1 n_{10}} \frac{\partial P'}{\partial i} \sin Q' \right],$$

где  $i$ ,  $i_1$  — целые числа.

Уравнение для большой полуоси

$$\frac{da}{dt} = - \frac{2Gm_1}{n_0 a_0} \left( \sum h P' \sin Q' \right),$$

где  $h$  — целое, дает  $a = a_0 +$  (периодические члены).

В этом методе до сих пор не было никаких математических сложностей, хотя, очевидно, выкладки могут быть очень громоздкими. При переходе же ко второму приближению начинается действительно тяжелая рутинная работа. В первом приближении решения уравнений Лагранжа для планет возмущения, обусловленные влиянием каждой планеты, не зависят от возмущений от других планет. При получении второго приближения возмущения второго порядка, действующие на планету с массой  $m$  со стороны планеты с массой  $m_1$ , включают члены с коэффициентами  $m_1^2$  и  $mm_1$ ; если же в задаче более одной возмущающей планеты, то возмущающих членов еще больше. При наличии в системе третьей планеты с массой  $m_2$  в возмущениях второго порядка для орбиты планеты с массой  $m$  появляются члены с коэффициентами  $m_1 m_2$ .

Ограничимся кратким описанием процедуры получения возмущений второго порядка в случае, когда есть только две планеты. Пусть элемент  $\alpha$  представлен в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta_1 \alpha + \Delta_2 \alpha + \Delta_3 \alpha + \dots,$$

где  $\Delta_1\alpha$ ,  $\Delta_2\alpha$  и т. д. обозначают возмущения  $\alpha$  соответственно первого порядка, второго порядка и т. д. Суть метода состоит в разложении правых частей уравнений в ряды Тейлора и объединении членов одного и того же порядка малости. Если, например, взять уравнение для  $\Omega$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i},$$

то его можно переписать в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Gm_1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left( \sum \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q + \sum \frac{\partial P'}{\partial i} \cos Q' \right).$$

Пусть  $f$  — функция шести элементов орбиты планеты  $P$  и шести элементов орбиты планеты  $P_1$ , определяемая формулой

$$f = \frac{Gm_1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left( \sum \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q + \sum \frac{\partial P'}{\partial i} \cos Q' \right).$$

Раскладывая  $f$  в ряд Тейлора и обозначая через  $\alpha_i$  некоторый элемент, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Omega_0 + \Delta_1\Omega + \Delta_2\Omega + \dots) = f_0 + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_0 \Delta_1\alpha_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)_0 \Delta_1\alpha_i \Delta_1\alpha_j + \dots \end{aligned}$$

По поводу этого уравнения надо сделать следующие замечания:

1)  $f_0$  означает, что в функции  $f$  используются лишь оскулирующие значения элементов;

2) второй член указывает на то, что после получения формулы для величины  $\partial f / \partial \alpha_i$  и вычисления ее значения для оскулирующих элементов (на это указывают скобки и индекс нуль) это значение умножается на соответствующий ряд, полученный в первом приближении для  $\Delta_1\alpha_i$ ; знак суммирования показывает, что в этот член входят все такие произведения;

3) третий член указывает на то, что в приближениях более высокого порядка наряду со вторыми частными производными функции  $f$  в формулу входят также и перекрестные произведения рядов первого порядка.

Приравнявая члены одного и того же порядка и учитывая, что нулевой порядок соответствует задаче двух тел с постоянными элементами, получаем

$$\frac{d\Omega_0}{dt} = 0, \quad (6.37)$$

$$\frac{d(\Delta_1\Omega)}{dt} = f_0, \quad (6.38)$$

$$\frac{d(\Delta_2\Omega)}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_0 \Delta_1 \alpha_i, \quad (6.39)$$

$$\frac{d(\Delta_3\Omega)}{dt} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)_0 \Delta_1 \alpha_i \Delta_1 \alpha_j \quad (6.40)$$

и т. д.

Аналогичные ряды получаются и для других элементов [а также для  $\rho$ , если воспользоваться уравнением (6.35)]. Зная значения оскулирующих элементов и решения первого порядка, полученные из уравнений (6.38), мы можем получить решения второго порядка из уравнений (6.39). В результате мы получим возмущения второго порядка. Очевидно, продолжая этот процесс, можно получать возмущения все более и более высокого порядка. В то же время очевидно, что с каждым последующим порядком многократно возрастает объем работы, которая должна быть выполнена. К счастью, на практике уже члены третьего порядка включать в рассмотрение не обязательно. Исключением являются взаимные возмущения гигантских планет, Юпитера и Сатурна.

Выражения для элементов, полученные с учетом возмущений второго порядка, должны иметь вид

$$\alpha = \alpha_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + (\text{периодические члены}) + \\ + [t \times (\text{периодические члены})],$$

где  $\alpha$  — какой-то элемент, а  $\alpha_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — постоянные. (Если  $\alpha$  — большая полуось, то  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .) Видно, что в формулы для всех элементов, кроме  $a$ , наряду с вековыми членами входят также и вековые ускорения; в то же время смешанные члены присутствуют в формулах для всех элементов, в том числе и для  $a$ .

Сходимости таких рядов и применению их при исследовании устойчивости Солнечной системы было посвящено большое число работ.

Может показаться, что, хотя выражения для больших полуосей орбит планет не содержат вековых членов до второго порядка включительно, наличие вековых членов в выражениях для эксцентриситетов указывает на неустойчивость системы. Однако это не так. Даже при наличии вековых или смешанных членов мы ничего не можем сказать о сходимости или устойчивости. В этой связи Штерн показал, что функцию  $\sin(1+a)t$  можно записать в виде ряда

$$\sin t + at \cos t - \frac{1}{2}a^2 t^2 \sin t - \frac{1}{6}a^3 t^3 \cos t + \dots,$$

который сходится при всех  $t$ , хотя и содержит смешанные члены, а ряд

$$\sin bt = bt - \frac{1}{16}b^3 t^3 + \frac{1}{120}b^5 t^5 - \dots$$

также сходится при всех  $t$ , хотя в правой части имеются «вековые» члены.

Более того, следует помнить, что при использовании метода вариации параметров применение рядов Тейлора было оправдано предположением о малости возмущений первого порядка  $\Delta_1\Omega$ ,  $\Delta_1e$  и т. д., так что их квадратами, произведениями и более высокими степенями можно пренебречь. Однако наличие вековых членов означает, что полученные ряды обеспечивают достаточную точность только на определенном интервале времени и не позволяют сделать никакого заключения об устойчивости Солнечной системы. В дальнейшем мы вернемся к этому вопросу. Тем не менее метод вариации параметров общей теории возмущений является очень полезным при определении вариаций орбит планет или искусственных спутников на значительных интервалах времени.

### 6.7.3. Коротко- и долгопериодические вариации

Мы видели, что в случае движения планет возмущающая функция после разложения представляется в виде (6.31), (6.32). При определении возмущений первого порядка в результате интегрирования получаются члены вида

$$\frac{A(h, h_1)}{hn + h_1n_1} \sin[(hn + h_1n_1)t + B],$$

где

$$B = h\epsilon + h_1\epsilon_1 + j\Omega + j_1\Omega_1 + k\tilde{\omega} + k_1\tilde{\omega}_1,$$

$A(h, h_1)$  — постоянная, величина которой является функцией эксцентриситетов и наклонов. При увеличении  $h$  и  $h_1$   $A(h, h_1)$  быстро уменьшается по абсолютной величине.

Пусть  $h$  положительно, а  $h_1$  произвольно (положительно или отрицательно). Период  $T$  такого члена определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{hn + h_1n_1},$$

а его амплитуда равна  $A(h, h_1)/(hn + h_1n_1)$ . Средние движения  $n$  и  $n_1$  определяются из наблюдений с достаточной степенью точности и могут считаться известными. Два целых числа  $h$  и  $h_1$  всегда можно подобрать так, чтобы

$$hn \pm h_1n_1 < \nu,$$

где  $\nu$  сколь угодно мало.

Обычно в подавляющем большинстве случаев значения  $h$  и  $h_1$  таковы, что величина  $(hn + h_1n_1)$  по сравнению с  $hn$  и  $h_1n_1$  не очень мала, и периоды таких членов имеют тот же порядок, что и орбитальные периоды рассматриваемых планет. Такие члены называют *короткопериодическими вариациями*.

Значительно интереснее те члены, в которых пара величин  $h$  и  $h_1$  такова, что  $(hn + h_1n_1)$  мало.

Функция эксцентриситетов и наклонов  $A(h, h_1)$  очень мала, если  $h$  или  $h_1$  велики и, следовательно, амплитуда колебаний  $A(h, h_1)/(hn + h_1n_1)$  в общем случае не будет сильно расти при уменьшении  $(hn + h_1n_1)$ . Однако если при малых целых значениях  $h$  и  $h_1$  получается малое значение  $(hn + h_1n_1)$ , то амплитуда будет большой.

Если отношение средних движений двух тел приближенно равно простой дроби, то говорят, что две орбиты *соизмеримы*. Соизмеримость может приводить к *долгопериодическим вариациям* значительной амплитуды. Такой замечательный факт имеет место при взаимном возмущении Юпитера и Сатурна. Для этих планет  $n = 0,083091$  и  $n_1 = 0,033460$  (здесь среднее движение выражено в градусах за средние солнечные сутки).

Полагая  $h = -2$  и  $h_1 = 5$ , получаем

$$hn + h_1n_1 = 0,001118^\circ.$$

Период возмущения составляет приблизительно 900 лет. Наиболее очевидно его влияние на среднюю долготу планет.

Поскольку  $l = \rho + \epsilon$ , то возмущение  $l$  первого порядка, обозначаемое  $\Delta_1 l$ , определяется по формуле

$$\Delta_1 l = \Delta_1 \rho + \Delta_1 \epsilon.$$

Наличие  $\Delta_1 \epsilon$  приводит к появлению в периодических членах коротко- и долгопериодических вариаций, о которых говорилось выше. К значительно более интересному эффекту приводит член  $\Delta_1 \rho$ .

По определению

$$\rho = \int n dt,$$

откуда

$$\rho_0 + \Delta_1 \rho + \Delta_2 \rho + \dots = \int (n_0 + \Delta_1 n + \Delta_2 n + \dots) dt,$$

так что

$$\Delta_1 \rho = \int \Delta_1 n dt.$$

Имеем

$$n^2 a^3 = \mu$$

и, следовательно,

$$n_0 + \Delta_1 n + \Delta_2 n + \dots = \mu^{1/2} (a_0 + \Delta_1 a + \Delta_2 a + \dots)^{-3/2}.$$

Раскладывая правую часть в ряд, получаем

$$n_0 + \Delta_1 n + \Delta_2 n + \dots = \mu^{1/2} a_0^{-3/2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta_1 a}{a_0} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{15}{8} \left( \frac{\Delta_1 a}{a_0} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta_2 a}{a_0} \right] + \dots \right\},$$

откуда

$$\Delta_{1\rho} = \int \left( -3 \frac{\mu^{1/2} \Delta_1 a}{a_0^{3/2}} \right) dt = -\frac{3n_0}{2a_0} \int \Delta_1 a dt.$$

Величина  $\Delta_1 a$  имеет вид

$$\sum \frac{A(h, h_1)}{hn + h_1 n_1} \cos[(hn + h_1 n_1)t + B],$$

где

$$B = h\epsilon + h_1 \epsilon_1 + j\Omega + j_1 \Omega_1 + k\bar{\omega} + k_1 \bar{\omega}_1.$$

Следовательно,  $\Delta_{1\rho}$  можно представить следующим образом:

$$\sum \frac{A(h, h_1)}{(hn + h_1 n_1)^2} \sin[(hn + h_1 n_1)t + B].$$

Амплитуда долгопериодической вариации средней долготы существенно увеличивается из-за наличия в знаменателе квадрата малой величины. В случае Юпитера и Сатурна средняя долгота под действием таких возмущений может изменяться соответственно на  $21'$  и  $49'$ .

#### 6.7.4. Разложение возмущающей силы

В рассматриваемых до сих пор уравнениях движения планет правые части содержат частные производные возмущающей функции  $R$  по элементам орбиты. Уже указывалось (без доказательства), что возмущающую функцию можно представить в виде ряда

$$R = Gm_1 \sum P \cos Q + Gm_1 \sum P' \cos Q'.$$

Зная частные производные, можно путем интегрирования получить для каждого элемента длинные и сложные ряды. Вычисление значений элементов при помощи таких рядов требует значительного времени, особенно при высоких эксцентриситетах, когда в разложениях приходится учитывать большое число членов с высокими степенями  $e$ .

Гауссом был предложен метод, при использовании которого эта работа значительно сокращается. Суть метода состоит в том, что для элементов орбиты составляются дифференциальные уравнения, куда входят три взаимно перпендикулярные компоненты возмущающего ускорения. Следует заметить, что в небесной механике и астродинамике правая часть уравнения относительного движения

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right)$$



представляет собой, строго говоря, возмущающее ускорение, хотя ее часто и называют возмущающей силой. Этими компонентами являются  $S$ ,  $T$  и  $W$ , где  $S$  — радиальная компонента, направленная вдоль гелиоцентрического радиуса планеты;  $T$  — трансверсальная компонента, лежащая в плоскости орбиты, перпендикулярная  $S$  и составляющая с вектором скорости угол, меньший  $90^\circ$ ;  $W$  — компонента, перпендикулярная плоскости орбиты (она считается положительной, если направлена на север относительно плоскости орбиты).

Для того чтобы выразить правые части уравнений (6.30) через  $S$ ,  $T$  и  $W$ , надо сначала выразить через эти компоненты  $\partial R/\partial \sigma$  ( $\sigma$  — элемент).

Известно, что

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{r}{a} S,$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -a S \cos f + r \sin f \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) T,$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = r W \sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -2r T \sin^2(i/2) - r W \cos u \sin i,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \frac{aeS \sin f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{Ta^2 \sqrt{1-e^2}}{r},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = -\frac{\partial R}{\partial \epsilon} + r T,$$

где  $u = \tilde{\omega} - \Omega + f$ , а  $f$  — истинная аномалия.

Подставляя эти выражения в (6.30), получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left( Se \sin f + \frac{pT}{r} \right),$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [S \sin f + T (\cos E + \cos f)],$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{Wr \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Wr \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i},$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -S \cos f + T \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] + 2 \frac{d\Omega}{dt} \sin^2 \frac{i}{2},$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2 \frac{d\Omega}{dt} \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} - \frac{2rS}{na^2}.$$

Здесь  $E$  — эксцентрисическая аномалия,  $\rho = a(1 - e)^2$ . Кроме того, имеем

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a\sqrt{1-e^2}} \left( Se \sin f + \frac{\rho T}{r} \right).$$

Следует заметить, что в силу определения элемента  $\epsilon$  в разд. 6.7.1 для средней долготы  $l$  справедлива формула

$$l = \rho + \epsilon = \int n dt + \epsilon.$$

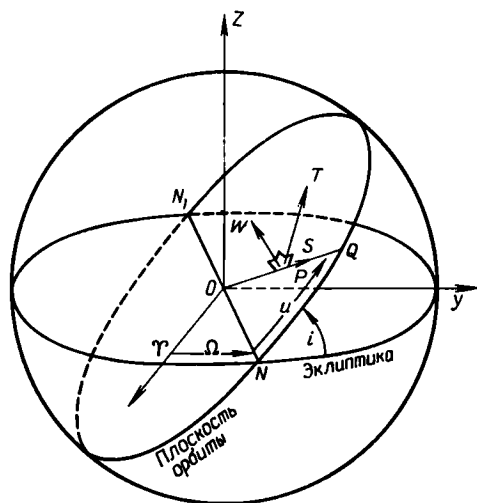


Рис. 6.7.

Отметим также, что форма уравнений (6.41) сохранится и в том случае, когда компоненты сил не могут быть представлены в виде дифференциалов какой-то одной функции. Эти уравнения будут справедливы, например, и тогда, когда возмущение обусловлено силой сопротивления среды.

Уравнения (6.41) часто применяются в теории специальных возмущений. Что касается компонент  $S$ ,  $T$  и  $W$ , то их можно

вычислить в любой момент времени следующим образом. В случае одной возмущающей планеты  $P_1$  имеем

$$R = Gm_1 \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right),$$

где  $(x, y, z)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$  — гелиоцентрические прямоугольные координаты планет  $P$  и  $P_1$  соответственно, а

$$\Delta^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -Gm_1 \left( \frac{x - x_1}{\Delta^3} + \frac{x_1}{r_1^3} \right).$$

Координатам  $y$  и  $z$  соответствуют два аналогичных уравнения.

Компоненты  $S$ ,  $T$  и  $W$  образуют правую прямоугольную тройку осей (рис. 6.7). Обозначим направляющие косинусы этих

осей относительно  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  соответственно  $(l_S, m_S, n_S)$ ,  $(l_T, m_T, n_T)$  и  $(l_W, m_W, n_W)$ . Тогда можно написать

$$\frac{\partial R}{\partial x} = l_S S + l_T T + l_W W,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = m_S S + m_T T + m_W W,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = n_S S + n_T T + n_W W,$$

откуда получаем

$$S = l_S \frac{\partial R}{\partial x} + m_S \frac{\partial R}{\partial y} + n_S \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$T = l_T \frac{\partial R}{\partial x} + m_T \frac{\partial R}{\partial y} + n_T \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$W = l_W \frac{\partial R}{\partial x} + m_W \frac{\partial R}{\partial y} + n_W \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Воспользовавшись теоремой косинусов, направляющие косинусы можно выразить через величины  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$  и  $f$  (см. рис. 6.7). Например,

$$l_S = \cos \Omega \cos (\tilde{\omega} - \Omega + f) - \sin \Omega \sin (\tilde{\omega} - \Omega + f) \cos i.$$

Таким образом, если известны элементы орбиты планеты  $P$  и положения  $P$  и  $P_1$ , то  $S$ ,  $T$  и  $W$  можно вычислить для любого момента времени.

Иногда бывает удобно раскладывать возмущающее ускорение на другие компоненты, вводя тангенциальную составляющую  $T'$ , касательную к орбите и направленную в сторону движения, и нормальную составляющую  $N$ , перпендикулярную к касательной (за положительное направление выбирается направление внешней нормали). Тангенциальная компонента  $T'$  и нормальная компонента  $N$  заменяют введенные ранее компоненты  $S$  и  $T$ . Третьей компонентой, как и раньше, остается ортогональная им компонента  $W$ .

Воспользовавшись уравнением (4.46), легко показать, что

$$\begin{aligned} T &= \frac{T' (1 + e \cos f)}{\sqrt{1 - e^2 + 2e \cos f}} + \frac{Ne \sin f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}}, \\ S &= \frac{T' e \sin f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} - \frac{N (1 + e \cos f)}{\sqrt{1 - e^2 + 2e \cos f}}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Здесь  $f$  — истинная аномалия.

Такой способ разложения применяется при исследовании влияния сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника. Если сила сопротивления имеет только отрицательную тангенциальную компоненту и является единственной возмущающей силой, то из уравнений (6.41) и (6.42) следует, что  $\Omega$  и  $i$  изменяться не будут, а большая полуось  $a$  будет монотонно уменьшаться. Изменения остальных элементов будут рассмотрены более подробно в гл. 10.

## 6.8. Уравнения Лагранжа

Большое распространение получила введенная Лагранжем специальная форма уравнений движения, с которой связано понятие *обобщенных координат*. Рассмотрим систему  $n$  частиц с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть эти координаты могут быть выражены в виде функций от  $3n$  обобщенных координат  $q_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 3n$ ) и времени  $t$ , т. е.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_r, t), & (i = 1, 2, \dots, n), \\ y_i &= y_i(q_r, t), & (r = 1, 2, \dots, 3n), \\ z_i &= z_i(q_r, t). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Для  $x_i$  имеет место соотношение

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r. \quad (6.44)$$

Два аналогичных соотношения справедливы и для координат  $y_i, z_i$ .

Тогда для какого-либо  $q$  (скажем,  $q_k$ ) получаем

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \quad (6.45)$$

Кроме того, имеют место уравнения движения  $n$  частиц

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, & (i = 1, 2, \dots, n), \\ m_i \ddot{z}_i &= \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

где  $U$  — силовая функция или взятая с обратным знаком потенциальная энергия (см. разд. 5.4).

Если  $T$  — кинетическая энергия всей системы, то

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (6.46)$$

Подставляя в (6.46) соотношения вида (6.44), преобразуем  $T$  в функцию  $T(q_r, \dot{q}_r, t)$  ( $r = 1, 2, \dots, 3n$ ), а применяя преобразование (6.43) к функции  $U(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), получаем функцию  $U(q_r, t)$  ( $r = 1, 2, \dots, 3n$ ). Тогда можно записать

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

или, воспользовавшись (6.45),

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \quad (6.47)$$

Дифференцируя (6.47) и учитывая (6.45), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \right. \\ &+ \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \left. \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) + \right. \\ &+ m_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Выражения в правой части, заключенные в первые и вторые скобки, представляют собой соответственно  $\partial U / \partial q_k$  и  $\partial T / \partial q_k$ . Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (6.48)$$

Но  $U$  не зависит от  $\dot{q}_k$ . Поэтому, вводя функцию  $L = T + U$ , можно написать

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, 3n). \quad (6.49)$$

Мы получили стандартную форму уравнений Лагранжа. Функция  $L$ , часто называемая *кинетическим потенциалом* или *лагранжианом*, является функцией  $q, \dot{q}$  и  $t$ .

Величина  $\partial L/\partial \dot{q}_k$  представляет собой обобщенный импульс, соответствующий обобщенной координате  $q_k$ . Если  $L$  не зависит явно от  $\dot{q}_k$ , то  $q_k$  называется *циклической координатой* и из уравнения (6.49) видно, что  $\partial L/\partial \dot{q}_k = \text{const}$ . Очевидно также, что если  $L$  не зависит явно от  $t$ , то уравнения Лагранжа допускают интеграл энергии. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{j=1}^{3n} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{3n} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = C.$$

При этом  $L = T + U$ ,  $T$  — однородная квадратичная форма  $\dot{q}_j$ , а  $U$  не зависит от  $\dot{q}_j$ . Поэтому по теореме Эйлера

$$C = 2T - (T + U) = T - U,$$

следовательно,  $C$  — полная энергия системы.

В качестве иллюстрации рассмотрим планету, движущуюся по невозмущенной гелиоцентрической орбите. В прямоугольной эклиптической системе планета имеет координаты  $(x, y, z)$ . Предположим, мы хотим получить уравнения движения планеты в форме Лагранжа, используя обобщенные координаты  $(r, \beta, \lambda)$ , где  $r$  — радиус-вектор планеты,  $\beta$  — эклиптическая широта, а  $\lambda$  — эклиптическая долгота. Тогда справедливы соотношения

$$x = r \cos \lambda \cos \beta,$$

$$y = r \sin \lambda \cos \beta,$$

$$z = r \sin \beta.$$

Определяя отсюда  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , найдем, что выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta).$$

Кроме того,

$$U = U(r, \beta, \lambda) = \frac{\mu}{r},$$

где  $\mu = G(M + m)$ , т. е. в этом случае  $U$  является функцией только  $r$ .

Тогда уравнения движения получаются из (6.49) при

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta) + \frac{\mu}{r}.$$

Для первой координаты ( $r$ ) имеем

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) = r \dot{\beta}^2 + r \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta - \frac{\mu}{r^2}$$

или

$$\ddot{r} = r \dot{\beta}^2 - r \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta + \frac{\mu}{r^2} = 0. \quad (6.50)$$

Для второй координаты ( $\beta$ )

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\beta}) = -r^2 \dot{\lambda}^2 \cos \beta \sin \beta \quad (6.51)$$

и для третьей координаты ( $\lambda$ )

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \beta) = 0.$$

Уравнение для  $\lambda$  можно сразу проинтегрировать и получить

$$r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \beta = h. \quad (6.52)$$

Кроме того, поскольку  $L$  не зависит явно от времени, то  $T - U = C$ , или, иначе,

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta) - \frac{\mu}{r} = C. \quad (6.53)$$

Интегралы (6.52) и (6.53) являются соответственно интегралами кинетического момента и энергии.

## 6.9. Канонические уравнения Гамильтона

Во многих руководствах по небесной механике большие разделы посвящены каноническим уравнениям Гамильтона, методу Гамильтона—Якоби и теории контактных преобразований\*. Детальное изучение этих вопросов выходит за пределы нашей книги, однако, принимая во внимание важную роль, которую они играют в динамике, здесь будет приведен очень краткий перечень основных сведений. Более полное изложение читатель может найти в книгах Смарта, Штерна или Пламмера, указанных в списке рекомендуемой литературы в конце главы.

\* В отечественной литературе такие преобразования называют также каноническими. — *Прим. перев.*

Если определить переменные  $p_r$  при помощи соотношений

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 3n), \quad (6.54)$$

то переменная  $p_k$  будет представлять собой обобщенный импульс, соответствующий  $q_k$ . В силу уравнений Лагранжа

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 3n). \quad (6.55)$$

Введем функцию  $H(q_r, p_r, t)$  следующим образом:

$$H(q_r, p_r, t) = \sum_{r=1}^{3n} p_r \dot{q}_r - L. \quad (6.56)$$

Тогда можно показать, что

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = - \frac{\partial H}{\partial q_r}. \quad (6.57)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка (всего их  $6n$ ) являются каноническими уравнениями Гамильтона. Функция  $H$  называется гамильтонианом.

Видно, что если лагранжиан  $L$  не зависит явно от времени, то то же самое справедливо и для  $H$ . Воспользовавшись уравнениями Гамильтона, получаем

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial H}{\partial p_r} \dot{p}_r + \sum_{r=1}^{3n} \frac{\partial H}{\partial q_r} \dot{q}_r = 0,$$

т. е.  $H = \text{const} = T - U$ . Полученное соотношение представляет собой интеграл энергии.

После того как динамическая система описана каноническими уравнениями Гамильтона, возникает проблема решения этих уравнений. В задаче двух тел канонические уравнения Гамильтона могут быть решены аналитически. В большинстве других задач, встречающихся в небесной механике и астродинамике, решить уравнения аналитически не удастся. Однако, используя методы общей теории возмущений, можно строить решения в виде рядов. Найденные таким образом решения будут справедливы на некотором отрезке времени. При построении полного решения методом последовательных приближений можно, проводя соответствующие преобразования, на каждом этапе получать дифференциальные уравнения, являющиеся по форме по-прежнему каноническими и имеющие в качестве переменных так называемые постоянные интегрирования, полученные в предыдущем приближении. Описанная процедура может повторяться столько раз, сколько потребуется.



Можно доказать, что для того, чтобы найти решение канонических уравнений (6.57), надо построить функцию  $S$ , являющуюся одним из полных решений уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_r, \frac{\partial S}{\partial q_r}, t\right) = 0, \quad (6.58)$$

называемого уравнением Гамильтона—Якоби. Гамильтониан задачи представлен в нем в виде функции  $q$ ,  $t$  и величин  $\partial S/\partial q_r$ , где

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r.$$

Функция  $S$  находится из уравнения Гамильтона—Якоби. При этом она оказывается зависящей от  $q$ ,  $3n$  постоянных  $\alpha_r$  и  $t$ . Тогда решения канонических уравнений Гамильтона получаются из уравнений

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_r} \quad (i = 1, 2, \dots, 3n), \\ \beta_r &= \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 3n), \end{aligned} \quad (6.59)$$

где  $\beta_r$  — независимые постоянные. Появляющиеся в процессе решения  $6n$  постоянных  $\alpha_r$  и  $\beta_r$  являются каноническими постоянными интегрирования.

Теперь предположим, что уравнения (6.57) таким методом решить невозможно, но что решение может быть получено, если в канонических уравнениях  $H$  заменить на  $H_0$ . Тогда можно показать, что решение этих измененных канонических уравнений описанным выше методом приведет к  $6n$  каноническим постоянным  $\alpha_r$  и  $\beta_r$ . В следующем приближении они будут играть роль канонических переменных, для которых дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r}, \quad (6.60)$$

где  $H_1 = H_0 - H$ .

Затем в качестве гамильтониана можно взять  $H_1$  и, решив уравнения (6.60), получить новые канонические постоянные.

Уравнения возмущенного движения планеты имеют вид (см. разд. 6.3)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U = \nabla(U_0 + R). \quad (6.61)$$

Расписанные покомпонентно:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

они представляют собой уравнения движения в форме Лагранжа, если в качестве лагранжиана взять

$$L = 1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U.$$

Заметим, что, поскольку  $U$  является функцией зависящих от времени координат возмущающих тел, ее нельзя считать потенциальной энергией. Тогда

$$H = 1/2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - U,$$

а уравнения

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

и аналогичные уравнения для компонент  $y$  и  $z$  являются каноническими уравнениями Гамильтона.

Для задачи двух тел можно получить точное решение. Поэтому на первом этапе решаются уравнения

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial p_x},$$

где

$$H_0 = 1/2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{r}.$$

Шесть канонических уравнений дают канонические постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ , которые затем считаются переменными, удовлетворяющими каноническим уравнениям

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r},$$

где  $H_1 = H_0 - H$ .

В заключение этого раздела для иллюстрации метода Гамильтона—Якоби применим его к задаче двух тел (невозмущенной). Как и в предыдущем разделе, в качестве обобщенных координат возьмем  $r, \beta$  и  $\lambda$ . Тогда

$$T = 1/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta), \quad U_0 = \frac{\mu}{r}.$$

Как и раньше, можно написать

$$L_0 = 1/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta) + \frac{\mu}{r}.$$

Используя (6.54), получаем

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\lambda = r^2 \cos^2 \beta \dot{\lambda}, \quad p_\beta = r^2 \dot{\beta},$$

так что в силу (6.55) находим

$$H_0 = 1/2 \left( p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}.$$

Уравнение Гамильтона—Якоби (6.58) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + 1/2 \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \beta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = 0. \quad (6.62)$$

Поскольку теперь  $H_0$  не зависит явно от  $t$ , то

$$H = \text{const} = \alpha_1.$$

Тогда в силу (6.62)

$$\left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 = 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r}. \quad (6.63)$$

Из вида полученного уравнения следует, что переменные разделяются. Отметим сначала, что  $H_0$  не зависит от  $\lambda$ , т. е.

$$\frac{\partial H_0}{\partial \lambda} = 0,$$

откуда

$$\dot{p}_\lambda = \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_\lambda = \alpha_3.$$

Тогда уравнение (6.63) можно записать в виде

$$\left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \beta} \right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \beta \right] + r^2 \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left( 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} \right) \right] = 0$$

или

$$f_1(\beta) + f_2(r) = 0.$$

$f_1$  и  $f_2$  являются функциями независимых переменных, поэтому можно положить

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \left( 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \alpha_3,$$

(6.64)

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = (\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \beta)^{1/2},$$

откуда

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1(r) + S_2(\beta),$$

где

$$S_1 = \int_{r_1}^r (2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2)^{1/2} \frac{dr}{r}$$

и

$$S_2 = \int_0^\beta (\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \beta)^{1/2} d\beta.$$

Постоянная  $r_1$  равна меньшему из двух корней уравнения

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 0,$$

имеющего по предположению два действительных положительных корня.

Таким образом, полное решение в силу (6.59) и (6.64) имеет вид

$$\beta_1 = -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2}, \quad (6.65)$$

$$\beta_3 = \lambda + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3}$$

и

$$p_r = \dot{r} = \left( 2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right)^{1/2},$$

$$p_\beta = r^2 \dot{\beta} = (\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \beta)^{1/2},$$

$$p_\lambda = r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \beta = \alpha_3.$$

При интегрировании правых частей (6.65) (с использованием свойств кеплеровского движения) канонические постоянные выражаются через хорошо знакомые элементы эллиптической орбиты следующим образом:

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \beta_1 = -\tau = \chi/n,$$

$$\alpha_2 = [\mu a (1 - e^2)]^{1/2}, \quad \beta_2 = \omega,$$

$$\alpha_3 = [\mu a (1 - e^2)]^{1/2} \cos i, \quad \beta_3 = \Omega.$$

## Задачи

6.1. Движение единичной массы по прямой линии описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(1 + \epsilon x),$$

где  $g$  и  $\epsilon$  — постоянные и  $0 < \epsilon x \ll 1$ . Показать, используя метод вариации параметров, что движение частицы приближенно задается формулой

$$x = at + b + \frac{1}{2}gt^2 [1 + \epsilon (\frac{1}{12}gt^2 + \frac{1}{3}at + b)],$$

где  $a$  и  $b$  — значения  $dx/dt$  и  $x$  при  $t = 0$ .

6.2. Используя выражение для возмущающей функции  $R$  вида (6.31), (6.32), получить первое приближение решения уравнения для эксцентриситета из системы (6.30).

6.3. Гравитационный потенциал Юпитера в точке экваториальной плоскости на расстоянии  $r$  от его центра равен приблизительно

$$\frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{\lambda}{3} \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 \right],$$

где  $\rho$  — радиус Юпитера,  $\lambda$  — малая постоянная, а  $\mu = GM$ .

Доказать, что если другие возмущения отсутствуют, то большая ось орбиты экваториального спутника Юпитера вращается со средней скоростью, составляющей приблизительно

$$\frac{2\pi\rho^2\lambda}{a^2T}.$$

Здесь  $T$  — период орбиты,  $a$  — большая полуось. (Эксцентриситет можно считать малым, так что  $f = M + 2e \sin M$ .)

6.4. Вокруг сферической звезды, масса которой вследствие излучения медленно уменьшается с постоянной скоростью, движется единственная планета пренебрежимо малой массы. Показать, что наклонение и долгота восходящего узла орбиты при этом не испытывают возмущений. Выяснить, каковы будут возмущения первого порядка для других элементов, если в данный момент эксцентриситет оскулирующей орбиты мал.

6.5. Пусть планета движется вокруг звезды в среде с таким сопротивлением, что возмущающее ускорение  $D$ , действующее на планету, задается выражением

$$D = kV^2r^{-2},$$

где  $k$  — постоянная, а  $V$  и  $r$  — соответственно скорость и радиус-вектор планеты. Показать, что  $da/dt$  в этом случае определяется следующей формулой:

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2kn}{(1 - e^2)^{7/2}} (1 + e \cos f)^2 (1 + e^2 + 2e \cos f)^{3/2}.$$

6.6. Две планеты с массами  $m$  и  $m_1$  обращаются вокруг Солнца по орбитам с малыми наклонениями  $i$  и  $i_1$ . Если сделать преобразование

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega,$$

$$p_1 = \operatorname{tg} i_1 \sin \Omega_1, \quad q_1 = \operatorname{tg} i_1 \cos \Omega_1,$$

то аperiодическая часть возмущающей функции  $R$ , обусловленной влиянием планеты  $m_1$  на планету  $m$ , имеет вид

$$R' = -Gm_1D(p^2 + q^2 + p_1^2 + q_1^2 - 2pp_1 - 2qq_1).$$

Здесь  $D$  — симметричная функция  $a$  и  $a_1$ . Соответствующая возмущающая функция  $R'_1$  для планеты  $m_1$  удовлетворяет условию

$$\frac{R'_1}{m} = \frac{R'}{m_1}.$$

Кроме того, можно показать, что

$$\dot{p} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R'}{\partial q},$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R'}{\partial p}.$$

Соответствующие уравнения имеют место и для  $p_1, q_1$ . Показать, что

$$1) \quad mna^2\gamma^2 + m_1n_1a_1^2\gamma_1^2 = \text{const},$$

$$2) \quad p = A \sin(ft + c_1) + B \sin c_2,$$

где  $\gamma = \text{tg } i, \gamma_1 = \text{tg } i_1; A, B, f, c_1$  и  $c_2$  — постоянные.

## Рекомендуемая литература

- Browner D., Clemence G. M.* Methods of Celestial Mechanics. New York and London, Academic, 1961. [Имеется перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. — М.: ИЛ, 1964.]
- Danby J. M. A.* Fundamentals of Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1967.
- Herrick S.* Astrodynamics, vols. 1 and 2. London, Reinhold, Van Nostrand, 1971, 1972. [Имеется перевод: Херрик С. Астродинамика, тт. 1, 2, 3. — М.: Мир, 1976, 1977, 1978.]
- Moulton F. R.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1914.
- Plummer A. C.* An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, London, Cambridge University Press, 1918.
- Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Paris, Gauthier-Villars, 1895; NASA, TTF-450, Washington, 1967.
- Ramsey A. S.* Newtonian Attraction, London, Cambridge University Press, 1949
- Smart W. M.* Celestial Mechanics. London, New York, Toronto, Longmans, 1953 [Имеется перевод: Сمارт У. М. Небесная механика. — М.: Мир, 1965.]
- Sterne T. E.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Interscience 1960. [Имеется перевод: Штерн Т. Введение в небесную механику. — М.: Мир, 1964.]
- Tisserand F.* Traité de Mécanique Céleste, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

## Специальные возмущения

### 7.1. Введение

Теория общих возмущений применима при решении далеко не всех задач орбитального движения. Однако в таких случаях всегда можно использовать специальные возмущения, т. е. методы численного интегрирования уравнений движения в той или иной форме. Имея в качестве исходной информации координаты и скорости тел в заданный момент времени, можно с помощью одного из таких методов вычислить из уравнений движения новые координаты и скорости, которые будут характеризовать систему тел спустя малый интервал времени. При этом удастся учесть влияние всех действующих на тела сил. Полученные значения координат и скоростей, позволяют выполнить новые вычисления для последующего интервала времени и т. д. Каждый цикл вычислений называется *шагом*. Теоретически численное интегрирование можно выполнять на сколь угодно большом интервале времени. На практике же при реализации любого численного процесса возникают так называемые *ошибки округления*. Поскольку все вычисления выполняются с определенным числом значащих цифр, математику или вычислительной машине приходится постоянно оперировать с округленными величинами, что неизбежно порождает ошибки.

При этом, вообще говоря, ошибки имеют тенденцию накапливаться. Чем больше требуется шагов, тем больше ошибка. Таким образом, к концу вычислений ошибка может возрасти в несколько тысяч раз, т. е. неверными могут оказаться до четырех последних цифр.

Очевидно, один из способов борьбы с такой ошибкой заключается в том, что вычисления выполняются с большим, чем это нужно в окончательном результате, числом значащих цифр. Тогда ошибка округления, накопленная к концу вычислений, не повлияет на те цифры, которые должны быть точными. Другой способ состоит в том, что интервал времени берется по возможности максимальным, благодаря чему число шагов сводится к минимуму. Однако эти способы не позволяют полностью исключить ошибку округления. В первом случае может потребоваться выполнять интегрирование на таком большом промежутке времени, что число необходимых десятичных знаков будет слишком

велико даже для вычислительной машины. Во втором случае шаг всегда должен быть меньше определенной величины, характерной для используемого метода численного интегрирования.

В важной работе Брауэра [3] показано, что при двукратном интегрировании *вероятная ошибка* равна  $0,1124n^{-3/2}$ , где  $n$  — число шагов (величина ошибки выражена в единицах, соответствующих последней значащей цифре). Так, например, после 100 шагов численного интегрирования уравнений второго порядка, описывающих движение спутника, мы с вероятностью 50% можем ожидать, что ошибка округления будет меньше 112,4. В этой работе также показано, что средние ошибки оскулирующих элементов орбиты, полученных численным интегрированием уравнений движения планет в форме Лагранжа (уравнений первого порядка) или при помощи обычных формул по компонентам ( $x, y, z$ ) и ( $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ), будут пропорциональны  $n^{1/2}$ . Исключением является средняя орбитальная долгота, для которой средняя ошибка опять-таки пропорциональна  $n^{1/2}$ . Правда, следует заметить, что она получается в результате двукратного интегрирования.

## 7.2. Основные факторы теории специальных возмущений

Мерсон [20] систематизировал теорию специальных возмущений, выделив пять существенных факторов: 1) тип орбиты, 2) требования к вычислительному процессу, 3) форма уравнений движения, 4) метод численного интегрирования и 5) имеющиеся вычислительные средства. Далее мы обсудим каждый из этих факторов в отдельности, но при этом надо иметь в виду, что на практике они неразрывно взаимосвязаны.

### 7.2.1. Тип орбиты

Грубо говоря, орбиты, которые приходится вычислять, можно классифицировать на почти круговые, сильно эксцентрические и параболически-гиперболические. Примерами могут служить соответственно орбиты планет, комет и космических аппаратов, уходящих от Земли. Однако возможно, что в процессе вычислений орбита из одного класса перейдет в другой. Кроме того, орбита может испытывать на себе слабые, средние или сильные возмущения, свойственные, например, орбитам планет, близких искусственных спутников или орбите межпланетного зонда при облете планеты.

### 7.2.2. Требования к вычислительному процессу

Таковыми требованиями могут быть заданная точность (т. е. число значащих цифр) и продолжительность вычислений.



### 7.2.3. Форма уравнений движения

В некоторых случаях дифференциальные уравнения имеют первый порядок, в других это уравнения второго порядка; возможны также системы, включающие уравнения первого и второго порядка. Уравнения Лагранжа для планет — это пример системы первого порядка; уравнения относительного движения в прямоугольных координатах представляют собой систему второго порядка; применение метода Ганзена приводит к смешанной системе.

### 7.2.4. Метод численного интегрирования

Если при вычислении очередного набора значений (т. е. в конце текущего шага численного интегрирования) полученные ранее наборы значений переменных не используются, то такой метод обычно называют одношаговым. Достоинство одношагового метода состоит в том, что при его реализации не требуется никакой начальной настройки, и, кроме того, в процессе вычислений по мере надобности можно легко изменять величину шага (например, вблизи перигелия в случае сильно эксцентрической орбиты кометы).

В многошаговых методах используются и предыдущие наборы значений переменных. Формулы, применяемые в этих методах, как правило, просты, так что объем вычислений на каждом шаге невелик. Однако при этом в начале интегрирования и при изменении величины шага необходимо проводить специальную настройку процесса вычислений. Что касается необходимости начальной настройки, то это не является большим недостатком, особенно при интегрировании на больших интервалах времени. В то же время частая перенастройка процесса при изменении шага (например, в случае орбиты с высоким эксцентриситетом) создает большие неудобства.

### 7.2.5. Вычислительные средства

В наш век полупроводниковых карманных компьютеров и больших электронных вычислительных машин, как и ранее, в эпоху таблиц логарифмов и настольных механических арифмометров, основное внимание уделяется скорости вычислений, допустимому числу знаков и емкости памяти. Во времена Дж. Дарвина при использовании таблиц логарифмов запоминание осуществлялось при помощи бумаги и карандаша, а скорость определялась вычислительными способностями и выносливостью человека. Однако даже сегодня, когда большинство вычислительных машин оснащены совершенными запоминающими устройст-

вами и трансляторами и обладают таким быстрым действием, что вычисления, на которые Дарвину потребовались годы, можно проделать всего за час, некоторые задачи орбитального движения остаются слишком сложными, чтобы можно было браться за их решение. Другие задачи поддаются исследованию только при тщательном выборе подходящей формы уравнений движения и метода численного интегрирования и использовании программ двойной точности, позволяющих избежать чрезмерной потери значащих цифр. Наконец, не надо забывать, что при проведении вычислений нас интересует не только скорость и рост ошибок округления; вычисления стоят денег. Во многих задачах орбитального движения в силу ограничений, связанных с временем счета и стоимостью, часто приходится отказываться от подробного исследования и довольствоваться выяснением лишь порядков интересующих нас величин.

В этой главе мы более подробно обсудим факторы, упомянутые в разд. 7.2.3 и 7.2.4, рассмотрим достоинства и недостатки различных форм уравнений движения и проведем сравнение некоторых из применяющихся в настоящее время методов численного интегрирования. Анализ проблем, затронутых в этой главе, ни в коей мере нельзя считать исчерпывающим. Читатель, желающий получить более полное представление об этих проблемах, может воспользоваться литературой, список которой приводится в конце главы.

### 7.3. Метод Коуэлла

В 1908 г. Коуэлл и Кроммелин опубликовали статью [6], в которой методом специальных возмущений исследовалось движение VIII спутника Юпитера. Уравнения движения они записали в прямоугольных координатах, а для численного интегрирования применили многошаговый алгоритм. С тех пор всякий раз при использовании термина «метод Коуэлла» возникает большая неразбериха. В книгах по численному анализу (например, [11]) методами Коуэлла называют многошаговые алгоритмы, похожие на алгоритм, использованный в [6]. Алгоритмы такого типа могут применяться для решения соответствующих дифференциальных уравнений как в небесной механике, так и в других областях. С другой стороны, в литературе по небесной механике термин «метод Коуэлла» широко используется в связи со специальной формой уравнений движения (при которой дифференциальные уравнения записываются в прямоугольных координатах) без применения каких-либо сведений об орбите, которые могли бы ускорить решение. Интегрирование этих уравнений может выполняться любым подходящим численным методом, например по формулам Рунге—Кутты.

Такой прямой метод находит широкое применение, поскольку в нем не проводится различия между возмущающей функцией и центральным (т. е. кеплеровским) ускорением. Однако в этом состоит и его основной недостаток, так как вследствие большой величины центральной силы приходится сохранять много значащих цифр и соответственно выбирать меньший шаг интегрирования. С появлением быстродействующих ЭВМ этот недостаток стал значительно менее существенным. Одной из первых задач, решенных в наши дни методом Коуэлла, было вычисление прямоугольных координат пяти внешних планет на интервале времени в 400 лет. При этом использовалась вычислительная машина SSEC (Selective Sequence Electronic Calculator) фирмы IBM (США).

Достоинство метода Коуэлла состоит в том, что его просто формализовать и запрограммировать. Однако он не лишен уязвимых мест и недостатков. Трудности возникают, например, в случае тесного сближения (соударения) тел. При этом шаг становится настолько мал, что приходится расходовать чрезмерно большое машинное время. Кроме того, из-за накопления большой ошибки округления сильно падает точность. В таких случаях обычно пользуются другими методами, в которых вводится некоторая промежуточная опорная орбита. Если мы имеем дело с опорной орбитой кометы с высоким эксцентриситетом, то часто бывает удобнее интегрировать отклонение траектории реальной кометы от невозмущенной кеплеровской траектории гипотетической кометы. Увеличение объема вычислений на каждом шаге с лихвой окупается тем, что шаг можно выбрать значительно большим, особенно если орбита имеет высокий эксцентриситет. Такой метод известен под названием «метод Энке». В последние годы некоторые авторы модифицировали классический метод Энке. В следующем разделе будет описан классический метод Энке и некоторые его разновидности.

## 7.4. Метод Энке

В методе Энке используется тот факт, что в первом приближении орбита является коническим сечением. В результате интегрирования мы получаем отклонения действительных координат тела от координат на коническом сечении. Кеплерова орбита является оскулирующей, и в эпоху оскуляции эти отклонения равны нулю. С течением времени отклонения растут до тех пор, пока не станут настолько большими, что приходится переходить к новой оскулирующей орбите. Этот процесс называется *спрямлением орбиты*. Основное преимущество метода Энке состоит в том, что в нем интервал интегрирования больше, чем это возможно в методе Коуэлла, поскольку вблизи эпохи оскуляции отклонения малы и могут быть выражены небольшим числом зна-

чащих цифр. С другой стороны, в методе Энке каждый шаг интегрирования значительно более трудоемок, чем в методе Коуэлла.

Энке предложил прием, который значительно повысил практическую ценность его метода. Он состоит в следующем. Будем индексом  $e$  обозначать радиус-вектор, получаемый из уравнений движения задачи двух тел, т. е.

$$\ddot{\mathbf{r}}_e + \mu \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3} = 0. \quad (7.1)$$

Для реального движения имеем

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}$  обусловлено притяжением других тел, сопротивлением атмосферы и т. д.

Пусть  $\rho$  обозначает разность  $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e$ . Тогда

$$\ddot{\rho} = \mathbf{F} + \mu \left( \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (7.2)$$

Оскулирующая орбита в некоторую эпоху определяется уже известным нам решением уравнения (7.1). Поэтому для любого последующего момента времени можно вычислить прямоугольные координаты  $x_e$ ,  $y_e$ ,  $z_e$  и  $r_e$ .

Поскольку реальная орбита и коническое сечение отличаются незначительно, то величина

$$\frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

представляет собой разность двух почти равных векторов, что приводит к увеличению необходимого числа значащих цифр. Чтобы избежать этого, Энке, положил

$$\frac{r^2}{r_e^2} = 1 + 2q$$

и

$$\left( \frac{r_e}{r} \right)^3 = (1 + 2q)^{-3/2} = 1 - fq.$$

Значения функции  $f$  от малой величины  $q$  приводятся в таблицах (Planetary Coordinates, 1960—1980). Тогда имеем

$$\mu \left( \frac{\mathbf{r}_e}{r_e^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu}{r_e^3} (fq\mathbf{r} - \rho),$$

где

$$fq = \frac{3q}{1} - \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 + \dots$$

и

$$q = \frac{1}{r_e^2} [(x_e + 1/2\xi)\xi + (y_e + 1/2\eta)\eta + (z_e + 1/2\zeta)\zeta].$$

Здесь вектор  $\rho$  выражается в виде

$$\rho = i\xi + j\eta + k\zeta,$$

где  $i, j$  и  $k$  — единичные векторы, направленные вдоль осей  $x, y$  и  $z$  соответственно. Тогда уравнение (7.2) принимает вид

$$\ddot{\rho} = F + \frac{\mu}{r_e^3} (fq\mathbf{r} - \rho)$$

или

$$\ddot{\rho} = F + hfq\mathbf{r} - h\rho,$$

где

$$h = \mu/r_e^3.$$

Другой прием, позволяющий обойтись без разложения  $f$ , состоит в следующем. Рассмотрим выражение

$$\frac{r_e}{r_e^3} - \frac{r}{r^3} = r_e \left( \frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3} \right) - \frac{\rho}{r^3}.$$

Имеем

$$\rho \cdot (\mathbf{r} + r_e) = (\mathbf{r} - r_e) \cdot (\mathbf{r} + r_e) = r^2 - r_e^2$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3} = \left( \frac{r - r_e}{r^3 r_e^3} \right) (r^2 + rr_e + r_e^2) = \left( \frac{r^2 - r_e^2}{r^3 r_e^3} \right) \left( \frac{r^2 + rr_e + r_e^2}{r + r_e} \right)$$

или окончательно

$$\frac{1}{r_e^3} - \frac{1}{r^3} = \left( \frac{\rho^2 + 2\rho \cdot r_e}{r^3 r_e^3} \right) \left( \frac{r^2 + rr_e + r_e^2}{r + r_e} \right).$$

Тогда уравнение (7.2) принимает вид

$$\ddot{\rho} = F + \mu \left( Q\mathbf{r}_e - \frac{\rho}{r^3} \right),$$

где

$$Q = \left( \frac{r^2 + rr_e + r_e^2}{r + r_e} \right) \left( \frac{\rho^2 + 2\rho \cdot r_e}{r^3 r_e^3} \right).$$

Метод Энке широко применяется не только в работах, посвященных орбитам комет, но также и при расчете орбит в зоне вблизи системы Земля—Луна. При этом Луна играет роль возмуща-

ющего тела. Он также применяется при вычислении орбит, которые из-за слабого отклонения начальных условий мало отличаются от некоторой стандартной орбиты. Такая ситуация возникает, например, при исследовании чувствительности орбит к ошибкам.

В последнее время предпринимались попытки усовершенствовать метод Энке путем использования лучшей опорной орбиты. Кайнер и Беннет [17] показали, что при интегрировании уравнений движения низкого спутника Земли метод Энке можно значительно улучшить, если при построении опорной траектории учесть эффект первого порядка от сжатия Земли. Такое улучшение опорной орбиты не только значительно увеличивает интервал времени между спрямлениями орбиты, но и приводит к существенному повышению точности интегрирования по сравнению с классическими методами Энке и Коуэлла.

Штумпф и Вейс [30] показали, что время, необходимое для интегрирования уравнений движения четырех или более тел модифицированным методом Энке, при котором в качестве опорной орбиты используется комбинация нескольких кеплеровских орбит, может составлять одну десятую времени, требуемого для решения задачи классическим методом Энке.

Таким образом, основная идея метода Энке состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка реальной эволюционирующей орбите. Для отклонения параметров реальной орбиты от соответствующих величин на опорной траектории составляется система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численными методами. Следует заметить, что эти величины (параметры) совсем не обязательно должны быть постоянными. Если выбор опорной орбиты удачен, то шаг интегрирования можно взять много большим, чем при интегрировании исходных дифференциальных уравнений, соответствующих реальной орбите. При этом мы получаем выигрыш даже с учетом того, что на каждом шаге приходится выполнять дополнительные вычисления. Следует также заметить, что аналитические выражения для вычисления координат положения и скорости на опорной орбите вовсе не обязательны.

## 7.5. Использование возмущенных уравнений

Уравнения Лагранжа для планет (6.30), (6.35) и (6.36) можно интегрировать не аналитически, а численно. При этом в вычислениях на каждом последующем шаге используются новые значения элементов, полученные в конце предыдущего шага. Другой способ состоит в том, что в правые части уравнений подставляются оскулирующие элементы и затем уравнения интегрируются численно на большом интервале времени. В результате для элемен-

тов получаются возмущения первого порядка. Возмущенные элементы снова подставляются в правые части уравнений, и уравнения интегрируются еще раз на всем интервале. Таким образом получаются возмущения второго порядка и т. д. Этот метод аналогичен аналитическому методу, описанному в разд. 6.2.3.

Как уже указывалось в разд. 6.7.4, в теории специальных возмущений часто применяются уравнения (6.41), в которых правые части выражены через компоненты  $S$ ,  $T$  и  $W$ .

С тех пор как Лагранж вывел свои уравнения для планет (в которых скорости изменения оскулирующих элементов орбиты планеты выражаются через элементы данной планеты и элементы планет, возмущающих ее гелиоцентрическую орбиту), многие авторы неоднократно пытались устранить некоторые серьезные недостатки этого метода, присущие ему наряду со многими достоинствами. Среди достоинств метода отметим следующие:

1) поскольку это метод теории возмущений, то в нем ускорение центрального тела не принимается во внимание;

2) при умеренных возмущениях дифференциалы элементов малы и, таким образом, величину шага можно взять намного большей, чем это возможно при методе Коуэлла, где на каждом шаге вычисляется ускорение, обусловленное влиянием центрального тела;

3) в процессе интегрирования сразу же проявляется характер изменения элементов.

Недостатки метода таковы:

1) правые части уравнений сложнее соответствующих частей уравнений в прямоугольных координатах;

2) в уравнениях присутствуют синусы и косинусы ряда аргументов;

3) уравнения недействительны при обращении эксцентриситета в нуль или единицу или при равенстве нулю наклона орбиты;

4) уравнения обычно выражаются через эллиптические элементы, и, следовательно, они неприменимы к параболическим, гиперболическим или прямолинейным орбитам;

5) необходимо решать уравнение Кеплера.

Что касается недостатков 1) и 2), то они приводят к увеличению объема вычислений, которые необходимо выполнять на каждом шаге, чтобы получить значения правых частей уравнений Лагранжа. Это обстоятельство в сочетании с необходимостью вычислять синусы и косинусы шести различных углов значительно сокращает экономию машинного времени, связанную с использованием большего (по сравнению с методом Коуэлла) шага интегрирования.

Недостаток 3) проявляется при работе с сильно эксцентрическими орбитами комет, а также с орбитами планет, поскольку

последние имеют малый эксцентриситет и небольшое наклонение относительно опорной плоскости (плоскости эклиптики или неизменяемой плоскости Солнечной системы). При уменьшении эксцентриситета становится неопределенным положение линии апсид, а при приближении к нулю наклонения становится невозможным точное вычисление долготы восходящего узла. Чтобы избежать этих трудностей, обычно вместо элементов  $e$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $i$  и  $\Omega$  вводят переменные  $h$ ,  $k$ ,  $p$ ,  $q$ :

$$\begin{aligned} h &= e \sin \tilde{\omega}, & k &= e \cos \tilde{\omega}, \\ p &= \sin i \sin \Omega, & q &= \sin i \cos \Omega. \end{aligned}$$

При стремлении эксцентриситета к единице применяют другие преобразования.

До наступления эры искусственных спутников и межпланетных космических аппаратов недостаток 4) считался несущественным. Он сказывался, только когда дело касалось комет. Однако в настоящее время указанный вид уравнений приводит к серьезным осложнениям, например, при рассмотрении ухода космического аппарата от Земли на гелиоцентрическую орбиту, особенно если уход осуществляется по гиперболической траектории. Другим примером может служить полет в окололунном пространстве, где возможны гиперболические (столкновение с Луной) и сильно эксцентрические орбиты.

Недостаток 5) является скорее кажущимся, поскольку такие методы, как метод последовательных приближений Ньютона—Рафсона [12], сходятся настолько быстро, что на это расходуется очень мало машинного времени. Кроме того, многими авторами было показано, что решения уравнения Кеплера можно избежать, если в качестве независимой переменной взять не время, а истинную или эксцентрическую аномалию. Эксцентрическую аномалию, например, впервые применил Оппольцер [24] при расчете возмущений кометы Понса—Виннеке в течение девяти витков (1819—1869 гг.).

Некоторым авторам удалось частично избавиться от перечисленных недостатков путем использования различных комбинаций векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= e\mathbf{P}, & \mathbf{b} &= e\sqrt{p}\mathbf{Q}, \\ \mathbf{c} &= \sqrt{p}\mathbf{R}, & \mathbf{g} &= \frac{e}{\sqrt{p}}\mathbf{Q}, \end{aligned}$$

где  $e$  — эксцентриситет;  $p$  — фокальный полупараметр, равный  $a(1 - e^2)$  ( $a$  — большая полуось);  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{R}$  — единичные векторы, направленные соответственно от центрального тела к перигею и вдоль нормали к плоскости орбиты;  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ . Например, Херрик [14] использовал векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , Миланкович [22] —



векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$ , а вектор  $\mathbf{g}$  в неявном виде применялся в теории Ганзена. Эти пары векторов дают только пять независимых скаляров, так что требуется еще шестой параметр. В качестве этого параметра обычно используется средняя аномалия, момент прохождения перицентра, средняя аномалия в эпоху или модифицированная средняя аномалия в эпоху. Метод, использующий в качестве независимой переменной среднюю аномалию, описан Мертоном [21].

Аллан [1] и Аллан и Уорд [2] использовали векторы  $\mathbf{h}$  (оскулирующий момент количества движения) и  $\mathbf{e}$  (вектор, имеющий величину  $e$  и направленный вдоль большой оси в сторону перигелия). Получающиеся в результате уравнения оказываются более компактными, и в них не входит большая часть тригонометрических членов, встречающихся в уравнениях Лагранжа. Однако и они все же остаются слишком громоздкими. Для указанных векторов имеет место ряд соотношений:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} = 0,$$

которые можно использовать для контроля.

Мазен [23] при записи системы дифференциальных уравнений в специальных возмущениях использовал векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{g}$ . Он показал, что при использовании метода Херрика присутствие  $e$  в выражениях для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  при малых  $e$  приводит к трудностям, хотя Херрик [14] предложил заменить среднюю аномалию средней долготой и вместо  $\mathbf{b}$  использовать  $\mathbf{c}$ . Герджет [13] описал систему уравнений, в которой устранена присущая методу Мазена особенность при нулевом эксцентриситете. Однако эти уравнения оказались очень громоздкими.

Другие подходы применялись Гарафало [9], Коэнном и Хаббардом [5] и Пайнсом [26]. Чтобы избежать особенностей при  $e = 0$ ,  $e = 1$  и  $i = 0$ , Гарафало [9] ввел систему переменных, пять из которых получаются интегрированием выражений, имеющих множителем возмущающую массу. Однако шестое выражение

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

( $\theta$  — истинная аномалия) имеет нулевой порядок и, как показал Гарафало, требует меньшего шага интегрирования.

Коэн и Хаббард [5] применили преобразование элементов эллиптической орбиты, позволяющее устранить особенности при  $e = 0$ ,  $i = 0$  и  $i = 180^\circ$ . Кроме того, как уже упоминалось, использование в их уравнениях в качестве независимой переменной истинной долготы позволяет избежать решения уравнения Кеплера. Однако, как уже говорилось выше, решение уравнения Кеплера при применении метода Ньютона—Рафсона не является сложной или требующей большого времени задачей. Полученная

система уравнений, выраженных через радиальную, трансверсальную и нормальную компоненты возмущающего ускорения, не очень проста и нарушается при  $h = 0$ .

Пайнс [26] также избежал трудностей, возникающих при малых эксцентриситетах и наклонениях, и обошелся без дополнительного уравнения для интегрирования среднего движения. В его методе в качестве параметров используются векторы начального положения и начальной скорости в плоскости оскулирующей орбиты, однако получающиеся в результате дифференциальные уравнения оказались очень сложными.

Ниже будет описана система возмущенных уравнений, для которой сведены к минимуму перечисленные выше недостатки и сохранены все достоинства уравнений Лагранжа. Кроме того, она справедлива для всех орбит, близких к коническим сечениям.

### 7.5.1. Вывод уравнений возмущенного движения (случай $h \neq 0$ )

Уравнение движения тела  $P$  с массой  $m$ , находящегося на возмущенной кеплеровской орбите вокруг тела  $S$  с массой  $M$ , имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из  $S$  в  $P$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $\mathbf{F}$  — возмущающее ускорение,  $\mu = G(M + m)$ . Пусть  $E$  — кеплеровская энергия, определяемая соотношением

$$E = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \frac{\mu}{r}, \quad (7.4)$$

а  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{e}$  — соответственно оскулирующий момент количества движения и вектор, направленный от  $S$  к перигею и равный по величине оскулирующему эксцентриситету.

Введем вектор

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mu \mathbf{e}. \quad (7.5)$$

Пусть  $\lambda$  — истинная долгота  $P$ , определяемая, как обычно, в виде суммы

$$\lambda = \Omega + \omega + \theta, \quad (7.6)$$

где  $\Omega$  — долгота восходящего узла,  $\omega$  — аргумент перигея, а  $\theta$  — истинная аномалия. Тогда, используя эти определения, уравнение (7.3), соотношение

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (7.7)$$

II интеграл Гамильтона

$$\epsilon = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.8)$$

можно легко показать, что

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (7.9)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = (\mathbf{F} \times \mathbf{h}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}}), \quad (7.10)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}. \quad (7.11)$$

Вывод выражения для производной по времени от истинной долготы  $\lambda$  значительно более трудоемок. Окончательная формула имеет вид

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{h_x h_y - h_y h_x}{h(h + h_z)}, \quad (7.12)$$

где

$$\mathbf{h} = ih_x + jh_y + kh_z, \quad (7.13)$$

$$h = (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{1/2},$$

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz, \quad (7.14)$$

$$\epsilon = i\epsilon_x + j\epsilon_y + k\epsilon_z, \quad (7.15)$$

а  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — единичные ортогональные векторы, такие, что  $i$  и  $j$  лежат в фундаментальной плоскости, а  $k$  перпендикулярен ей. Эти единичные векторы определяют оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Угол  $\Omega$  измеряется в фундаментальной плоскости от оси  $x$ . Если возмущения отсутствуют, то оскулирующая орбита будет невозмущенной кеплеровской орбитой со свойствами обычного конического сечения в задаче двух тел.

Обозначая индексом  $k$  невозмущенные величины и воспользовавшись вторым законом Кеплера, получаем

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \frac{h_k}{r_k^2} \quad (7.16)$$

благодаря тому, что

$$\frac{d\Omega_k}{dt} = \frac{d\omega_k}{dt} = 0. \quad (7.17)$$

Вычитая из (7.12) уравнение (7.16), получаем

$$\frac{d\lambda_p}{dt} = \left( \frac{h}{r^2} - \frac{h_k}{r_k^2} \right) + \frac{h_x \dot{h}_y - h_y \dot{h}_x}{h(h+h_x)}, \quad (7.18)$$

где  $\lambda_p$  (возмущение  $\lambda$ ) определяется из соотношения

$$\lambda = \lambda_k + \lambda_p. \quad (7.19)$$

Заметим, что углы  $\lambda$  и  $\lambda_k$  не обязательно компланарны.

Уравнения (7.9), (7.10) и (7.18) можно взять в качестве системы, которую будем интегрировать. Следует заметить, что она определяет только шесть независимых величин, поскольку имеет место связь

$$\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0. \quad (7.20)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{h}} = 0, \quad (7.21)$$

которые вместе с уравнением (7.20) позволяют проверять правильность интегрирования.

Перепишем еще раз систему уравнений (7.9), (7.10) и (7.18):

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (7.9)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} = (\mathbf{F} \times \mathbf{h}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}}), \quad (7.10)$$

$$\frac{d\lambda_p}{dt} = \left( \frac{h}{r^2} - \frac{h_k}{r_k^2} \right) + \frac{h_x \dot{h}_y - h_y \dot{h}_x}{h(h+h_x)}. \quad (7.18)$$

Несмотря на то что уравнение (7.11) может показаться проще, чем уравнение (7.10) [так как при помощи (7.11) и (7.20) можно было бы исключить два из трех скалярных уравнений (7.10)], на практике оказывается, что уравнение (7.10) обычно короче, а (7.20) может привести к ошибке, если какая-нибудь из компонент становится равной нулю. Таким образом, уравнение (7.20) лучше всего использовать для контроля, а  $E$  можно получить из соотношения

$$E = \frac{\epsilon^2 - \mu^2}{2h^2}. \quad (7.22)$$

Заметим, кстати, что использование соотношения (7.18) напоминает метод Энке, и, следовательно, здесь также требуется спрямление орбиты, если выражение в скобках становится слишком большим. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться позднее.

### 7.5.2. Соотношения между возмущенными переменными, прямоугольными координатами, компонентами скорости и обычными элементами кеплеровского движения

По определению имеем

$$h_x = y\dot{z} - z\dot{y}, \quad h_y = z\dot{x} - x\dot{z}, \quad h_z = x\dot{y} - y\dot{x}, \quad (7.23)$$

$$h = (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^{1/2}. \quad (7.24)$$

Кроме того,

$$\epsilon_x = Dx - K\dot{x}, \quad \epsilon_y = Dy - K\dot{y}, \quad \epsilon_z = Dz - K\dot{z}, \quad (7.25)$$

$$\epsilon = (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2)^{1/2}, \quad (7.26)$$

где

$$K = r\dot{r}, \quad D = V^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (7.27)$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Также имеют место соотношения

$$\cos \lambda = \frac{x}{r} - \frac{z}{r} \frac{h_x}{h + h_z},$$

$$\sin \lambda = \frac{y}{r} - \frac{z}{r} \frac{h_y}{h + h_z}. \quad (7.28)$$

С другой стороны,

$$c \equiv \epsilon \cos \theta = \gamma \cos \lambda + \delta \sin \lambda,$$

$$s \equiv \epsilon \sin \theta = \gamma \sin \lambda - \delta \cos \lambda, \quad (7.29)$$

где

$$\gamma = \epsilon_x - \frac{\epsilon_z h_x}{h + h_z},$$

$$\delta = \epsilon_y - \frac{\epsilon_z h_y}{h + h_z}. \quad (7.30)$$

Тогда

$$r = \frac{h^2}{\mu + c}, \quad \dot{r} = \frac{s}{h}, \quad \epsilon = (c^2 + s^2)^{1/2}. \quad (7.31)$$

Координаты  $x$  и  $y$  получаются в виде

$$x = r \cos \lambda + \frac{zh_x}{h + h_z}, \quad (7.32)$$

$$y = r \sin \lambda + \frac{zh_y}{h + h_z}, \quad (7.33)$$

а  $z$  вычисляется по формуле

$$z = -\frac{r}{h} (h_x \cos \lambda + h_y \sin \lambda). \quad (7.34)$$

Тогда компоненты скорости могут быть вычислены следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{1}{r^2} (zh_y - yh_z + r\dot{r}x), \quad (7.35)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{r^2} (xh_z - zh_x + r\dot{r}y), \quad (7.36)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{r^2} (yh_x - xh_y + r\dot{r}z). \quad (7.37)$$

Кроме того, если  $\psi$  — угол между радиусом-вектором и вектором скорости, т. е.

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = rV \cos \psi, \quad (7.38)$$

то

$$\cos \psi = \frac{s}{hV},$$

$$\sin \psi = \frac{h}{rV} = \frac{\mu + c}{hV}, \quad (7.39)$$

где

$$V^2 = \frac{1}{h^2} (\mu^2 + \epsilon^2 + 2\mu\epsilon). \quad (7.40)$$

Обычные угловые элементы  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$  определяются из соотношений

$$\cos i = \frac{h_z}{h}, \quad \sin i = \frac{H}{h}, \quad (7.41)$$

$$\cos \Omega = -\frac{h_y}{H}, \quad \sin \Omega = \frac{h_x}{H}, \quad (7.42)$$

$$\cos \omega = \frac{\epsilon_y h_x - \epsilon_x h_y}{\epsilon H}, \quad \sin \omega = \frac{\epsilon_z h}{\epsilon H}, \quad (7.43)$$

где

$$H = (h_x^2 + h_y^2)^{1/2}.$$

Если  $i$  равно нулю, то вводится величина  $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$ , для которой справедливы формулы

$$\cos \tilde{\omega} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}, \quad \sin \tilde{\omega} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon}. \quad (7.44)$$

В соответствии со значениями трех оставшихся оскулирующих элементов оскулирующее коническое сечение представляет собой эллипс, параболу или гиперболу. Существуют три возможности:

- 1)  $0 \leq \epsilon < \mu$  — орбита эллиптическая;
- 2)  $\epsilon = \mu$  — орбита параболическая;
- 3)  $\epsilon > \mu$  — орбита гиперболическая.

Ниже эти три случая рассматриваются более подробно.

1) Эксцентриситет  $e = \epsilon/\mu$ , большая полуось  $a = h^2\mu/(\mu^2 - \epsilon^2)$  и момент прохождения через перигеум

$$\tau = t - \frac{E - e \sin E}{n},$$

где

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \left( \frac{\mu - \epsilon}{\mu + \epsilon} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Здесь  $E$  — эксцентрическая аномалия.

2) Эксцентриситет равен единице. Для перигеумного расстояния  $q$  справедлива формула

$$q = h^2/2\mu,$$

а  $\tau$  находится из уравнения Баркера:

$$\tau = t - \frac{h^3}{2\mu^3} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right].$$

3) Вводится гиперболический аналог  $F$  эксцентрической аномалии:

$$F = \ln \left[ \frac{\mu \cos \theta + \epsilon + (\epsilon^2 - \mu^2)^{1/2} \sin \theta}{\mu + \epsilon \cos \theta} \right]. \quad (7.45)$$

Тогда

$$\tau = t - \frac{h^3\mu}{(\epsilon^2 - \mu^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\epsilon}{2\mu} (e^F - e^{-F}) - F \right\}. \quad (7.46)$$

В выражениях (7.45) и (7.46) гиперболические функции не используются.

Следует заметить, что если  $r$  определяется из (7.31) по известному  $s$ , то при  $\mu \sim s$  и отрицательном  $s$  будет иметь место потеря точности. Такая ситуация наблюдается в случае почти параболической орбиты, если истинная аномалия приближается к  $180^\circ$ . Тогда лучше всего воспользоваться методикой, описанной в разд. 7.5.4, поскольку указанный случай соответствует почти прямолинейной орбите.

### 7.5.3. Процедура численного интегрирования

Предположим, что в момент  $t = t_0$  нам известны значения  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  и компоненты  $F_x, F_y, F_z$  возмущающего ускорения  $F$ . Тогда можно, воспользовавшись соотношениями (7.23)—(7.28), вычислить правые части уравнений (7.9), (7.10) и (7.18). Относительно уравнения (7.18) следует заметить, что если промежуточная орбита совпадает при  $t = t_0$  с реальной орбитой, то величина

$$l := \frac{h}{r^2} - \frac{h_k}{r_k^2}$$

в этот момент времени равна нулю. Однако она не равна нулю в последующие моменты времени, так как, во-первых,  $h$  изменяется, а  $h_k$  остается постоянным и, во-вторых,  $r$  и  $r_k$  изменяются со временем:

$$r := \frac{h^2}{\mu + \epsilon \cos \theta}, \quad r_k := \frac{h_k^2}{\mu + \epsilon_k \cos \theta_k}.$$

Значения  $h_x, h_y, h_z, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \lambda_p$  в конце интервала получают методом численного интегрирования.

При этом остается еще задача вычисления величины  $\lambda_k$  (кеплеровской истинной долготы) в конце шага  $t = t_1$ , которая необходима для получения возмущенной истинной долготы  $\lambda = \lambda_k + \lambda_p$ . Будем значения величин при  $t = t_0$  и  $t = t_1$  снабжать индексами (0) и (1) соответственно.

Имеем

$$\lambda_k = \tilde{\omega}_k + \theta_k,$$

так что

$$\lambda_k(1) - \lambda_k(0) = \theta_k(1) - \theta(0),$$

поскольку  $\tilde{\omega}_k$  для промежуточной орбиты постоянно.

Следовательно, изменение  $\lambda_k$  за шаг равно изменению на данном интервале кеплеровской (т. е. невозмущенной) истинной аномалии. При вычислениях используются стандартные формулы эллиптического, параболического или гиперболического движения.

Значение  $\epsilon_k$  при  $t = t_0$  известно. Характер промежуточной орбиты на шаге будет зависеть от этого значения:

- 1) если  $0 \leq \epsilon_k < \mu$ , то орбита эллиптическая;
- 2) если  $\epsilon_k = \mu$ , то орбита параболическая;
- 3) если  $\epsilon_k > \mu$ , то орбита гиперболическая.

В каждом из трех случаев процедура будет следующей:

- 1) Подставляя в соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \left( \frac{\mu - \epsilon}{\mu + \epsilon} \right)^{1,2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (7.47)$$



значения кеплеровских элементов  $\epsilon$  и  $\theta$  при  $t = t_0$ , получаем  $E_0$  — значение кеплеровской эксцентрической аномалии при  $t = 0$ . В конце шага значение  $E = E_1$  определяется из уравнения

$$E_1 - \frac{\epsilon}{\mu} \sin E_1 = M_1, \quad (7.48)$$

где

$$M_1 = n(t_1 - t_0) + \left( E_0 - \frac{\epsilon}{\mu} \sin E_0 \right)$$

и

$$n = (\mu^2 - \epsilon^2)^{3/2} / h^3 \mu.$$

Уравнение Кеплера (7.48) можно решить, применяя обычный метод Ньютона—Рафсона. Затем  $E_1$  подставляется в уравнения

$$\begin{aligned} \cos \theta_k &= \frac{\mu \cos E - \epsilon}{\mu - \epsilon \cos E}, \\ \sin \theta_k &= \frac{(\mu^2 - \epsilon^2)^{1/2} \sin E}{\mu - \epsilon \cos E} \end{aligned} \quad (7.49)$$

и определяется  $\theta_k$  при  $t = t_1$ .

2) Обозначим  $g = \operatorname{tg} \theta/2$ . Тогда, если  $J_0$  и  $J_1$  — значения  $J$  при  $t_0$  и  $t_1$ , то в силу уравнения Баркера имеем

$$J_1 + \frac{1}{3} J_1^3 = M'_1, \quad (7.50)$$

где

$$M'_1 = 2\bar{n}(t_1 - t_0) + \left( J_0 + \frac{1}{3} J_0^3 \right)$$

и

$$\bar{n} = \mu^2 / h^3.$$

Решить уравнение Баркера можно методом, описанным в в разд. 4.6.

3) Вводится гиперболическая «эксцентрическая аномалия»

$$F = \ln \left\{ \frac{\mu \cos \theta + \epsilon + (\epsilon^2 - \mu^2)^{1/2} \sin \theta}{\mu + \epsilon \cos \theta} \right\}. \quad (7.51)$$

Значение  $F$  при  $t = t_1$  определяется из уравнения

$$\frac{\epsilon}{\mu} \operatorname{sh} F_1 - F_1 = M''_1, \quad (7.52)$$

где

$$\begin{aligned} M''_1 &= \nu(t_1 - t_0) + M_0, \\ \nu &= (\epsilon^2 - \mu^2)^{3/2} / h^3 \mu \end{aligned}$$

и

$$M_0 = \frac{\epsilon}{\mu} \operatorname{sh} F_0 - F_0 = \frac{\epsilon}{2\mu} (e^{F_0} - e^{-F_0}) - F_0.$$

Уравнение (7.52) можно решить методом, описанным в разд. 4.7.2.

После того как найдено  $F_1$  (значение  $F$  при  $t = t_1$ ), можно определить функцию Гудермана от  $F$  (т. е.  $q$ ) из уравнения

$$\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1}{2} q \right) = e^F.$$

И наконец, из системы

$$\begin{aligned} \sin \theta_k &= \frac{(\epsilon^2 - \mu^2)^{1/2} \sin q}{\epsilon - \mu \cos q}, \\ \cos \theta_k &= \frac{\epsilon \cos q - \mu}{\epsilon - \mu \cos q} \end{aligned} \quad (7.53)$$

вычисляется  $\theta_k$  при  $t = t_1$ .

Таким образом, получаем

$$\lambda_k(1) = \lambda_k(0) + \theta_k(1) - \theta_k(0)$$

и

$$\lambda_1 = \lambda_k(1) + \lambda_p(1).$$

Уравнения (7.29)—(7.40) определяют значения  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, r, \dot{r}$  и  $V$  при  $t = t_1$ . Если нужно, то из уравнений (7.41)—(7.43) и уравнений, соответствующих эллиптическому, параболическому или гиперболическому движению (в зависимости от величины  $\epsilon$  при  $t = t_1$ ), можно найти новые оскулирующие элементы  $a$  (или  $q$ ),  $e, \tau, \Omega, \omega$  и  $i$ . При этом, разумеется, совсем не обязательно продолжать интегрирование.

Далее надо решать, следует ли спрямлять (т. е. улучшать) промежуточную орбиту. При решении этого вопроса надо учитывать трудоемкость спрямления, величину члена

$$\frac{h}{r^2} - \frac{h_k}{r_k^2}$$

и характер используемого метода численного интегрирования.

Что касается трудоемкости процедуры спрямления, то здесь она значительно проще, чем в методе Энке. Старые значения  $h_k, r_k, \epsilon_k$  и  $\theta_k$ , соответствующие концу шага, надо просто заменить на уже вычисленные значения  $h, r, \epsilon$  и  $\theta$ .

#### 7.5.4. Прямолинейные или почти прямолинейные орбиты

В принципе описанным выше методом можно пользоваться при любых значениях эксцентриситета и наклона. Однако, когда орбита прямолинейная или почти прямолинейная, эффективность метода падает. Объясняется это тем, что в ряде используемых соотношений, и в частности в уравнении (7.18), величина  $h$  стоит в знаменателе. Поэтому в случае, когда все три компоненты  $h$  становятся меньше некоторого предела, следует, чтобы не терять точность, перейти к другим переменным. В качестве таких новых переменных можно взять полярные координаты  $(r, \alpha, \beta)$ , для которых справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha \cos \beta, \\y &= r \sin \alpha \cos \beta, \\z &= r \sin \beta.\end{aligned}\tag{7.54}$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$  — это эклиптические долгота и широта (или прямое восхождение и склонение) соответственно.

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{r} \dot{r} - z \dot{\beta} \cos \alpha - y \dot{\alpha}, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} \dot{r} - z \dot{\beta} \sin \alpha + x \dot{\alpha}, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} \dot{r} + r \dot{\beta} \cos \beta.\end{aligned}\tag{7.55}$$

Таким образом, если даны  $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ , то при помощи (7.54) и (7.55) можно вычислить  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}\sin \beta &= z/r, \\ \operatorname{tg} \alpha &= y/x, \\ r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{7.56}$$

Заметим, что знак  $\sin \beta$  совпадает со знаком  $z$ , а соотношения

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r \cos \beta}, \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r \cos \beta}\end{aligned}$$

позволяют выбрать верное значение  $\alpha$ .

Кроме того,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r}, \\ \dot{\alpha} &= h_z/(x^2 + y^2), \\ \dot{\beta} &= \frac{\dot{z} - \dot{r} \sin \beta}{r \cos \beta} = \frac{r\dot{z} - z\dot{r}}{r^2 \cos \beta}\end{aligned}\quad (7.57)$$

и, следовательно, по  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  можно найти  $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$ .

Продифференцировав первое уравнение (7.57) и воспользовавшись (7.3), получаем

$$\ddot{r} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{h}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right],$$

где

$$h^2 = r^2 (V^2 - \dot{r}^2).$$

Надо сказать, что  $h$  равно нулю только в случае прямолинейной орбиты.

Снова обозначая индексами  $k$  величины, относящиеся к невозмущенной кеплеровской орбите, можно написать

$$\ddot{r}_k = \frac{1}{r_k} \left[ \left( \frac{h_k}{r_k} \right)^2 - \frac{\mu}{r_k} \right].$$

Возмущение величины радиуса-вектора равно  $r_p$ , так что  $r = r_k + r_p$ . Дважды дифференцируя это соотношение, получаем  $\ddot{r} = \ddot{r}_k + \ddot{r}_p$ , и, следовательно,

$$\ddot{r}_p = \left\{ \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{h}{r} \right)^2 - \frac{\mu}{r} \right] - \frac{1}{r_k} \left[ \left( \frac{h_k}{r_k} \right)^2 - \frac{\mu}{r_k} \right] \right\} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r}. \quad (7.58)$$

Дифференцируя второе и третье соотношения (7.57) и обозначая возмущения величин  $\alpha$  и  $\beta$  индексом  $p$ , т. е.

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_k + \alpha_p, \\ \beta &= \beta_k + \beta_p,\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_p &= \frac{h_z}{x^2 + y^2} - \frac{2h_z(x\dot{x} + y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^2} - \\ &- \left[ \frac{h_z}{x^2 + y^2} - \frac{2h_z(x\dot{x} + y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^2} \right]_k\end{aligned}\quad (7.59)$$

и

$$\ddot{\beta}_p = \left\{ \left[ \left( F_z - \frac{z}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right) - \frac{z}{r^2} \left( \frac{h}{r} \right)^2 + \dot{\beta} (z\dot{\beta} - 2\dot{r} \cos \beta) \right] / r \cos \beta \right\} + \left\{ \left[ \frac{z}{r^2} \left( \frac{h}{r} \right)^2 - \dot{\beta} (z\dot{\beta} - 2\dot{r} \cos \beta) \right] / r \cos \beta \right\}_k. \quad (7.60)$$

Здесь индекс  $k$  указывает на то, что величины, заключенные в скобки, соответствуют невозмущенному кеплеровскому движению.

Предположим, что опорная орбита все время является прямолинейной. Тогда в отличие от предыдущего случая ( $h \neq 0$ ) ее нельзя получить из оскулирующей орбиты, если только истинная орбита сама не является в точности прямолинейной. Если орбита прямолинейная, то

$$\begin{aligned} h_k &= \dot{h}_k = 0, \\ \dot{\alpha}_k &= \dot{\beta}_k = 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

и

$$\frac{\dot{x}_k}{x_k} = \frac{\dot{y}_k}{y_k} = \frac{\dot{z}_k}{z_k} = \frac{\dot{r}_k}{r_k},$$

так что уравнения (7.58)—(7.60) принимают вид соответственно

$$\ddot{r}_p = R - \mu \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_k^2} \right), \quad (7.62)$$

$$\ddot{\alpha}_p = \frac{\dot{h}_z}{x^2 + y^2} - \frac{2h_z(x\dot{x} + y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (7.63)$$

$$\ddot{\beta}_p = \left[ F_z - \left( \frac{z}{r} \right) R + \dot{\beta} (z\dot{\beta} - 2\dot{r} \cos \beta) \right] / r \cos \beta, \quad (7.64)$$

где

$$R = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{h}{r} \right)^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right].$$

Сама процедура вычислений очень похожа на соответствующую процедуру в случае орбиты, отличающейся от прямолинейной. При  $t = t_0$  по величинам  $x, y, z$  и  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  мы получаем  $r, \alpha, \beta, \dot{r}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, h_z, \dot{h}_z, h$  и вычисляем правые части уравнений (7.62)—(7.64). Если спрямление опорной орбиты производится в конце каждого шага, то  $r_k = r$ , так что  $\ddot{r}_p = R$  в начале шага. Внутри шага  $r$ , вообще говоря, отклоняется от  $r_k$ . Теперь для того, чтобы получить значения  $\dot{r}_p, \dot{\alpha}_p, \dot{\beta}_p$  и  $r_p, \alpha_p, \beta_p$  при  $t = t_1$ , проинтегрируем нашу систему на один шаг.

Чтобы определить  $\dot{r}_k$ ,  $\dot{\alpha}_k$ ,  $\dot{\beta}_k$  и  $r_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  при  $t = t_1$ , надо вспомнить, что опорная орбита все время является в точности прямолинейной. Поэтому  $\dot{\alpha}_k = \dot{\beta}_k = 0$  и  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  имеют те же значения, что и при  $t = t_0$ . Оставшиеся величины  $r_k$  и  $\dot{r}_k$  в течение шага меняются и могут быть получены из соответствующих соотношений для прямолинейных эллипса, параболы или гиперболы (см. разд. 4.8).

Выбор в качестве опорной орбиты на данном шаге прямолинейных эллипса, параболы или гиперболы зависит от того, будет ли в начале шага энергия

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

отрицательной, нулевой или положительной величиной.

Значения  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\dot{r}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  при  $t = t_1$  вычисляются по формулам  $r = r_{II} + r_k$  и т. д., а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  при  $t = t_1$  находятся из уравнений (7.54) и (7.55).

Теперь можно улучшить опорную орбиту. Если оскулирующая орбита все еще близка к прямолинейной, то в качестве новой опорной траектории опять берется прямолинейная орбита. Ее параметры в начале нового шага задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_k &= x, & \dot{x}_k &= x_k \dot{r}_k / r_k, \\ y_k &= y, & \dot{y}_k &= y_k \dot{r}_k / r_k, \\ z_k &= z, & \dot{z}_k &= z_k \dot{r}_k / r_k, \\ r_k &= r, & \dot{r}_k &= \dot{r}, \\ \alpha_k &= \alpha, & \dot{\alpha}_k &= 0, \\ \beta_k &= \beta, & \dot{\beta}_k &= 0. \end{aligned}$$

Новое значение энергии

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{r}_k^2 - \frac{\mu}{r_k}$$

определяет тип новой прямолинейной опорной орбиты (эллипс, парабола или гипербола). Когда момент количества движения  $h$  станет достаточно большим, следует использовать метод, разработанный для случая ненулевого  $h$ .

## 7.6. Методы регуляризации

Важная особенность ньютоновского закона тяготения состоит в том, что сила взаимодействия двух материальных точек становится бесконечно большой при стремлении к нулю расстояния между ними. Разумеется, понятие «точечной массы» является чисто математическим и на практике сингулярные точки никогда не до-

стигаются, поскольку, прежде чем это произойдет, поверхности взаимодействующих тел соприкоснутся. Однако при численном исследовании понятие точечной массы широко используется, и при этом значение сингулярностей очень сильно возрастает. Кроме того, когда одно тело близко подходит к другому (например, в перигентре сильно эксцентрической орбиты), значительно увеличивается их относительная скорость, а это с необходимостью влечет за собой значительное уменьшение шага интегрирования.

С наибольшей эффективностью многошаговые методы интегрирования используются тогда, когда в процессе численного интегрирования потребность в удваивании и делении шага пополам возникает как можно реже.

Характер сингулярностей, имеющих место при столкновениях, таков, что при соответствующем выборе независимой переменной (этот процесс называется регуляризацией) от них можно избавиться. Задачи, при решении которых используется процедура регуляризации, привлекали внимание многих исследователей. Превосходная библиография работ на эту тему приведена Шебехели [31], который исследовал регуляризацию в ограниченной задаче трех тел. Исчерпывающее обсуждение линеаризации и регуляризации уравнений движения можно найти в книге Штифеля и Шейфеле [29]. Обычно регуляризация сводится к замене физического времени  $t$  фиктивным временем  $s$ , таким, что  $dt = r^k ds$ . Здесь  $r$  — радиальное расстояние между притягивающими центрами. Если  $k = 1$ , то  $s$  эквивалентно эксцентрической аномалии; если  $k = 2$ , то  $s$  эквивалентно истинной аномалии. Такой процесс следует называть «аналитической регуляризацией» по Штифелю и Шейфеле.

В работе [28] Штифель использовал значение  $k = 1$  и линеаризовал уравнения движения задачи двух тел. Сравнив их с обычными уравнениями, он пришел к выводу, что регуляризация позволяет повысить точность вычислений примерно в 30 раз (без существенных потерь скорости). Эта и другие работы, выполненные в последние годы, показали исключительную важность регуляризации для численного решения задач небесной механики.

В работе [10] описана такая процедура регуляризации, где в качестве функции регуляризации времени используется потенциальная или кинетическая энергия. Эта процедура годится для систем двух и более тел. При лобовых столкновениях двух тел такая регуляризация менее полезна, чем регуляризация Кустанхеймо—Штифеля, описанная в [25], зато в более сложных ситуациях она оказывается весьма эффективной. Использование регуляризованных уравнений при интегрировании задачи 25 тел [19] привело к уменьшению времени счета на 50% по сравнению с временем, необходимым для интегрирования нерегуляризованных уравнений.

Кустанхеймо и Штифель предложили метод регуляризации (называемый обычно KS-преобразованием), в котором трехмерные дифференциальные уравнения движения, например уравнения задачи двух тел

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0,$$

регуляризуются путем преобразования трехмерного вектора  $\mathbf{r}$  в четырехмерный вектор  $\mathbf{u}$ . При этом независимая переменная  $t$  переходит в переменную  $s$ , так что  $dt/ds = r$ . Тогда движение в задаче двух тел описывается четырьмя простыми гармоническими линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} + \omega^2\mathbf{u} = 0,$$

где  $\omega$  — постоянная. Штифель и Шейфеле показали возможность применения KS-преобразования к задачам возмущенного движения, приводящим к различным типам возмущенных уравнений.

Регуляризация особенно важна при высокоточных численных исследованиях систем, состоящих из большого числа тел, между которыми возможны частые сближения, например в звездной динамике. Без применения регуляризации (или какой-либо другой аналогичной процедуры) каждое сближение тел будет приводить к большим затратам времени счета и к резкому увеличению ошибки округления.

## 7.7. Методы численного интегрирования

Чтобы продемонстрировать существенные различия между одно- и многошаговыми методами численного интегрирования, рассмотрим численное интегрирование уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad (7.65)$$

с начальными условиями  $x = x_0$ ,  $dx/dt = \dot{x}_0$  при  $t = t_0$ .

Рассмотрим ряд Тейлора

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_0^{(n)} (t - t_0)^n / n!, \quad (7.66)$$

где

$$x_0^{(n)} = (d^n x / dt^n)_0,$$

а нулевой индекс говорит о том, что значение производной берется при  $t = t_0$ .



Пусть

$$t_j = t_0 + jh, \quad t_{-j} = t_0 - jh \quad \text{и т. д.}$$

Здесь  $h$  — величина шага (предполагается постоянной), а  $j$  — целое число. Тогда, например, значение  $x$  в момент времени  $t_1 = t_0 + h$  (обозначается  $x_1$ ) определяется по формуле

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 h + \frac{\ddot{x}_0 h^2}{2!} + \frac{\overset{\dots}{x}_0 h^3}{3!} + \frac{\overset{\dots\dots}{x}_0 h^4}{4!} + \dots, \quad (7.67)$$

а в момент времени  $t_{-1} = t_0 - h$

$$x_{-1} = x_0 - \dot{x}_0 h + \frac{\ddot{x}_0 h^2}{2!} - \frac{\overset{\dots}{x}_0 h^3}{3!} + \frac{\overset{\dots\dots}{x}_0 h^4}{4!} - \dots \quad (7.68)$$

Нам известны значения  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  при  $t = t_0$ . Кроме того, в силу уравнения (7.65) имеем

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n} = - \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} = -x^{(n-2)}, \quad (7.69)$$

так что в принципе мы можем вычислить  $\overset{\dots}{x}_0$ ,  $\overset{\dots\dots}{x}_0$  и т. д. Следовательно, подставляя в уравнение (7.67) числовые значения, мы можем определить  $x_1$  с любой заданной точностью (поскольку  $h = t_1 - t_0$  — известная величина).

Аналогичным образом, используя ряд Тейлора

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 h + \frac{\overset{\dots}{x}_0 h^2}{2!} + \frac{\overset{\dots\dots}{x}_0 h^3}{3!} + \dots, \quad (7.70)$$

можно получить  $\dot{x}_1$ , т. е. значение  $dx/dt$  при  $t = t_1$ .

Используя уравнение (7.68) и соответствующее разложение для  $\dot{x}_{-1}$ , можно вычислить также  $x_{-1}$  и  $\dot{x}_{-1}$ . Очевидно, эту процедуру можно продолжить и вычислить, например,  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$ . На этот раз используются уравнения

$$x_2 = x_1 + \dot{x}_1 h + \frac{\ddot{x}_1 h^2}{2!} + \frac{\overset{\dots}{x}_1 h^3}{3!} + \dots,$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \ddot{x}_1 h + \frac{\overset{\dots}{x}_1 h^2}{2!} + \frac{\overset{\dots\dots}{x}_1 h^3}{3!} + \dots$$

и уравнение (7.69).

На этой стадии можно сделать следующие замечания:

1) рассмотренная процедура одношаговая; при вычислении значений переменных в конце шага используются значения, относящиеся только к данному шагу;

2) процедура не требует разгонки;

3) если для удовлетворения критерию точности придется делить шаг пополам или, наоборот, увеличивать его вдвое, то это, очевидно, не приведет ни к каким дополнительным трудностям;

4) поскольку в процедуре используются прямые разложения в ряд Тейлора, то существенным становится требование, чтобы производные высоких порядков вычислялись достаточно просто. Однако если одно или несколько уравнений являются нелинейными, то вычисление производных высоких порядков становится все более громоздким и длительным.

Преобразуем теперь рассматриваемый метод в многошаговую процедуру. Складывая уравнения (7.67) и (7.68), получаем

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + h^2 \ddot{x}_0 + \frac{2h^4 \overset{\dots}{x}_0}{4!} + \dots, \quad (7.71)$$

а складывая (7.70) и соответствующее уравнение для  $\dot{x}_{-1}$ , получаем

$$\dot{x}_1 = 2\dot{x}_0 - \dot{x}_{-1} + h^2 \overset{\dots}{\ddot{x}}_0 + \frac{2h^4 \overset{\dots}{\ddot{x}}_0}{4!} + \dots \quad (7.72)$$

Теперь для вычисления  $x_1$  и  $\dot{x}_1$  нам необходимы данные, относящиеся к началу предыдущего шага (т. е.  $x_{-1}$ ,  $\dot{x}_{-1}$ ) и к началу текущего шага. Пока что главное достоинство метода еще не проявилось. Однако можно показать, что, комбинируя соответствующие ряды Тейлора, удастся избежать вычисления всех производных, кроме второй, если использовать достаточно информации о предыдущих шагах. В общем виде можно написать

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + h^2 \sum_{i=0}^k a_i \ddot{x}_i, \quad (7.73)$$

где  $h$ , как и раньше, величина шага,  $k$  — положительное целое число,  $a_i$  — числовые коэффициенты,  $\ddot{x}_i$  — значения второй производной в начале текущего шага и в начале  $k$  предыдущих шагов. Значения коэффициентов  $a_i$  зависят от величины  $k$ . Например, если  $k = 0$ , то справедлива простая формула

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + h^2 \ddot{x}_0,$$

т. е.  $a_0 = 1$ . Сделаем несколько замечаний:

1) Эта формула верна с точностью до  $h^3$ , так как при ее выводе первым из отброшенных был член  $(2h^4 \overset{\dots}{x}_0/4!)$ . Про формулу (7.73) говорят, что она верна с точностью до  $h^{2k+3}$ , так как первый не учтенный в ней член имеет вид

$$qh^{2k+4}x^{(2k+4)},$$

где  $q$  — некоторый числовой множитель.

2) Вообще говоря, чем выше порядок первого неучтенного члена, тем большую величину шага можно брать. Однако при выборе шага надо принимать во внимание также соображения устойчивости (см. ниже).

3) При многошаговом методе объем вычислений, очевидно, меньше, чем при одношаговом, имеющем ту же точность. Следовательно, вычисления выполняются значительно быстрее. В то же время многошаговый метод требует разгонки и специальной процедуры деления или удвоения шага. Поэтому его лучше всего применять в случаях, когда шаг все время поддерживается минимальным (например, случай почти круговой орбиты или случаи, когда уравнения регуляризованы).

Рассмотрим теперь несколько одношаговых методов.

### 7.7.1. Метод рекуррентных соотношений

В разд. 4.13 уже обсуждались рекуррентные методы. Здесь достаточно будет заметить только, что при использовании таких методов задача численного определения производных высоких порядков в одношаговом методе, основанном на рядах Тейлора, решается значительно быстрее, если, как это обычно бывает в задачах орбитального движения, дифференциальные уравнения нелинейные.

### 7.7.2. Метод Рунге—Кутты четвертого порядка

Это одношаговая процедура, в которой ошибка имеет порядок  $h^5$  (порядок первого отбрасываемого члена). Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

где при  $t = t_0$   $x = x_0$ . Значение  $x$  при  $t = t_1 = t_0 + h$  обозначается  $x_1$  и определяется по формуле

$$x_1 = x_0 + 1/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = hf(x_0, t_0),$$

$$k_2 = hf \left[ \left( x_0 + \frac{1}{2} k_1 \right), \left( t_0 + \frac{1}{2} h \right) \right],$$

$$k_3 = hf \left[ \left( x_0 + \frac{1}{2} k_2 \right), \left( t_0 + \frac{1}{2} h \right) \right],$$

$$k_4 = hf(x_0 + k_3, (t_0 + h)).$$

Метод Рунге—Кутта четвертого порядка (RK4) очень популярен. Программы RK4 имеются в большинстве машинных библиотек. Эти программы обладают всеми достоинствами одношаговых процедур и легко могут быть применены к уравнениям второго порядка и к системам уравнений, например к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t),$$

если его представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = f(x, t).$$

Недостатки метода состоят в том, что он обеспечивает меньшую (иногда в 50 раз) скорость счета и менее точен по сравнению с методами, основанными на рядах Тейлора высокого порядка и рекуррентных соотношениях, или многошаговыми методами. Кроме того, на каждом шаге приходится четырежды вычислять функцию  $f$ . Различные исследователи пытались устранить или хотя бы уменьшить эти недостатки. Шенкс [27] и Бутчер [4] вывели формулы типа Рунге—Кутта, но более высокого порядка. Фелберг [7, 8] предложил процедуру восьмого порядка, в которой нужно только восемь раз вычислять функцию (обычно она называется методом Рунге—Кутта—Фелберга).

### 7.7.3. Многошаговые методы

Мы видели, что многошаговые методы проще и работают быстрее. С другой стороны, неудачно выбранные многошаговые методы имеют склонность к неустойчивости в том смысле, что любая ошибка с течением времени не затухает и влияет на будущее поведение системы [18]. Чтобы исправить эту неустойчивость, была проделана большая работа, и считается, что если можно зафиксировать шаг (или если число изменений шага поддерживать минимальным), то многошаговый алгоритм высокого порядка будет и точным, и быстрым. Мерсон [20] в результате исследования широкого класса методов специальных возмущений пришел к выводу, что для уравнений второго порядка, по-видимому, оптимальной комбинацией является метод восьмого порядка Гаусса—Джексона, примененный к уравнениям Коуэлла (в случае необходимости с аналитической стабилизацией шага). Херрик [15] также считал метод Гаусса—Джексона (по-другому называемый гауссовой формулой или процедурой «вторых сумм») наиболее подходящим. Для того чтобы стала понятной используемая терминология, ниже мы проиллюстрируем некоторые основные идеи теории конечных разностей, которые используются при численном интегрировании.

### 7.7.4. Численные методы

Предположим, что функция  $x$  от  $t$  затабулирована через равные промежутки времени (интервал равен  $h$ ), так что  $t_p$  задается формулой  $t_p = t_0 + hp$ , где  $t_0$  — эпоха, в которую  $x$  принимает значение  $x_0$ .

Тогда можно составить таблицу, подобную табл. 7.1.

Таблица 7.1

Аргумент	Сумма		Функция	Разности			
	2-я	1-я		1-я	2-я	3-я	4-я
$t_{-2}$	$\sum^2 x_{-2}$	$\sum^1 x_{-1^{1/2}}$	$x_{-2}$	$\delta x_{-1^{1/2}}$	$\delta^2 x_{-2}$	$\delta^3 x_{-1^{1/2}}$	$\delta^4 x_{-2}$
$t_{-1}$	$\sum^2 x_{-1}$	$\sum^1 x_{-1/2}$	$x_{-1}$	$\delta x_{-1/2}$	$\delta^2 x_{-1}$	$\delta^3 x_{-1/2}$	$\delta^4 x_{-1}$
$t_0$	$\sum^2 x_0$	$\sum^1 x_{1/2}$	$x_0$	$\delta x_{1/2}$	$\delta^2 x_0$	$\delta^3 x_{1/2}$	$\delta^4 x_0$
$t_1$	$\sum^2 x_1$	$\sum^1 x_{1^{1/2}}$	$x_1$	$\delta x_{1^{1/2}}$	$\delta^2 x_1$	$\delta^3 x_{1^{1/2}}$	$\delta^4 x_1$
$t_2$	$\sum^2 x_2$		$x_2$		$\delta^2 x_2$		$\delta^4 x_2$

Первая разность  $\delta x_{p+1/2}$  получается вычитанием  $x_p$  из  $x_{p+1}$ , вторая разность  $\delta^2 x_p$  — вычитанием  $\delta x_{p-1/2}$  из  $\delta x_{p+1/2}$  и т. д.

Первая сумма  $\sum^1 x_{p+1/2}$  находится по формуле

$$\sum^1 x_{p+1/2} = \sum^1 x_{p-1/2} + x_p, \quad (7.74)$$

вторая сумма — по формуле

$$\sum^2 x_{p+1} = \sum^2 x_p + \sum^1 x_{p+1/2}. \quad (7.75)$$

Полуразности в промежутках между нечетными разностями и столбцами сумм и между четными разностями и столбцами сумм вводятся по формулам

$$\mu \sum^1 x_p = 1/2 (\sum^1 x_{p-1/2} + \sum^1 x_{p+1/2}), \quad (7.76)$$

$$\mu \delta x_p = 1/2 (\delta x_{p-1/2} + \delta x_{p+1/2}). \quad (7.77)$$

Эти полуразности отличаются от предыдущих разностей буквой  $\mu$ .

Если  $t$  лежит внутри диапазона таблицы, то с ее помощью можно проводить интерполяцию (т. е. получать значения  $x$  для любого значения независимой переменной  $t$ , даже если это значение  $t$  и не отвечает целому  $p$ ).

Для этой цели существуют различные формулы, использующие затабулированные величины, например формула Бесселя

$$x_p = x_0 + p \delta x_{1/2} + B_2(\delta^2 x_0 + \delta^2 x_1) + B_3 \delta^3 x_{1/2} + B_4(\delta^4 x_0 + \delta^4 x_1) + \dots,$$

где  $B$  — интерполяционные коэффициенты Бесселя. Они являются функциями  $p$  и приведены во многих работах.

Существует также формула Эверетта

$$x_p = x_0 + p \delta x_{1/2} + E_2^0 \delta^2 x_0 + E_2^1 \delta^2 x_1 + E_4^0 \delta^4 x_0 + E_4^1 \delta^4 x_1 + \dots$$

Здесь  $E$  — коэффициенты Эверетта (функции  $p$ ), которые также можно найти во многих работах, например в [16].

Разности более высоких порядков в табл. вида 7.1 связаны с производными соответствующих порядков  $x$  по  $t$  формулами, при помощи которых можно выполнять численное дифференцирование. Так, формула численного дифференцирования Бесселя имеет вид

$$h \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = \delta x_{1/2} + \frac{1}{4} (2p - 1) (\delta^2 x_0 + \delta^2 x_1) + B_3' \delta^3 x_{1/2} + B_4' (\delta^4 x_0 + \delta^4 x_1) + \dots \quad (7.78)$$

(значения  $B'$  затабулированы).

Во многих задачах нужны значения производных только в узловых и полонизных точках. Если это так, то уравнение (7.78) принимает вид

$$h \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 = \mu \delta x_0 - \frac{1}{6} \mu \delta^3 x_0 + \frac{1}{30} \mu \delta^5 x_0 - \frac{1}{140} \mu \delta^7 x_0 + \dots$$

Рассмотрим теперь численное интегрирование дифференциального уравнения, которое нельзя проинтегрировать аналитически. Пусть уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = F,$$

где  $F$  — некоторая функция  $x$  и  $t$ .

Предположим, что мы подставили в уравнение ряд

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

и получили несколько первых постоянных  $a_n$ , выразив их через начальное условие  $x = x_0$  при  $t = t_0$ . Тогда при помощи этого ряда

для малого диапазона значений  $(t - t_0)$  мы сможем вычислить значения  $x$  и  $F$ . Можно составить таблицу значений  $x$  и  $F$  (типа табл. 7.1), в которой  $t$  принадлежит этому диапазону и принимает значения  $t_p = t_0 + ph$  ( $p$  — положительное или отрицательное целое число, а  $h$  — шаг таблицы).

Обычно вычисляют и заносят в таблицу функцию, равную не  $F$ , а  $F$ , умноженную на  $h$ , т. е.

$$X = hF = h \frac{dx}{dt}.$$

Тогда имеем

$$X_p = h \left( \frac{dx}{dt} \right)_p,$$

и можно показать, что

$$\Sigma^1 X_{1/2} = x_0 + \frac{1}{2} X_0 + \frac{1}{12} \mu \delta X_0 - \frac{11}{720} \mu \delta^3 X_0 + \frac{191}{60480} \mu \delta^5 X_0 - \dots \quad (7.79)$$

В эпоху, соответствующую следующему шагу таблицы, имеем

$$x = \mu \Sigma^1 X - \frac{1}{12} \mu \delta X + \frac{1}{720} \mu \delta^3 X - \frac{191}{60480} \mu \delta^5 X + \dots \quad (7.80)$$

По мере надобности разности можно оценить, основываясь на известной процедуре их формирования в таблице.

Кроме того, существуют экстраполяционные формулы, например

$$x_2 = x_0 + 2X_1 + \frac{1}{3} \delta^2 X_1 - \frac{1}{90} \delta^4 X_1 + \frac{1}{756} \delta^6 X_1 - \dots = \quad (7.81)$$

$$= x_2 + 4X_0 + \frac{8}{3} \delta^2 X_0 + \frac{14}{45} \delta^4 X_0 - \frac{8}{945} \delta^6 X_0 + \dots \quad (7.82)$$

В задачах орбитального движения уравнения, которые должны решаться, обычно являются нелинейными уравнениями второго порядка. Если уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (7.83)$$

представляет собой одно из уравнений системы, то мы можем написать

$$X_p = (h^2 F)_p = h^2 \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_p. \quad (7.84)$$

Процедуру решения, как и в случае уравнения первого порядка, можно начать с того, что при помощи решения в виде ряда

системы уравнений типа (7.83), справедливого на малом интервале времени, формируется таблица сумм и разностей. На практике при составлении таблицы для заданного интервала времени, с которого начинают решение, обычно используют невозмущенную кеплеровскую орбиту.

В случае когда уравнения имеют второй порядок

$$\sum^1 X_{1/2} = hx'_0 + \frac{1}{2} X_0 + \frac{1}{12} \mu \delta X_0 - \frac{11}{720} \mu \delta^3 X_0 + \dots, \quad (7.85)$$

$$\sum^2 X_0 = x_0 - \frac{1}{12} X_0 + \frac{1}{240} \delta^2 X_0 - \frac{31}{60480} \delta^4 X_0 + \dots, \quad (7.86)$$

где  $x_0$  и  $(dx/dt)_0 = x'_0$  — значения  $x$  и  $dx/dt$  при  $t = t_0$ . В следующем узле таблицы имеем

$$hx^1 = \mu \sum^1 X - \frac{1}{12} \mu \delta X + \frac{11}{720} \mu \delta^3 X - \frac{191}{60480} \mu \delta^5 X + \dots, \quad (7.87)$$

$$x = \sum^2 X + \frac{1}{12} X - \frac{1}{240} \delta^2 X + \frac{31}{60480} \delta^4 X - \dots. \quad (7.88)$$

Как и раньше, можно оценить разности, причем на практике оценку можно провести настолько точно, что после определения  $x$ , при помощи которого (совместно с  $y$  и  $z$ ) из уравнения (7.84) вычисляется значение  $X$ , часто оказывается, что дальнейшие итерации на этом шаге уже не нужны.

Уравнение (7.88) можно использовать для получения экстраполированного значения  $x$ , если оценить значения величины  $X$  и линейных разностей. Можно воспользоваться также другим соотношением:

$$x_2 = x_{-1} + 3 \sum^1 X_{1/2} + \frac{5}{4} \delta X_{1/2} + \frac{17}{240} \delta^3 X_{1/2} - \dots. \quad (7.89)$$

Иногда при приближении тела (например, кометы) к перигелию возникает необходимость деления шага таблицы пополам. После прохождения перигелия шаг снова может быть удвоен.

Чтобы проиллюстрировать некоторые из обсуждавшихся выше методов, рассмотрим численное интегрирование уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x \quad (7.90)$$

с начальными условиями  $x = 0,21856$  и  $dx/dt = 0,48273$  при  $t = 1,10512$ .

Подставляя в (7.90) ряд

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$



и вычисляя коэффициенты при степенях  $(t - t_0)$ , получаем

$$x = x_0 \left[ 1 - \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \frac{(t - t_0)^4}{4!} - \frac{(t - t_0)^6}{6!} + \dots \right] + \dot{x}_0 \left[ (t - t_0) - \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \frac{(t - t_0)^5}{5!} - \dots \right], \quad (7.91)$$

где  $x_0 = 0,21856$ ,  $\dot{x}_0 = 0,48273$ ,  $t_0 = 1,10512$ .

Положим шаг таблицы  $h$  равным 0,1. Ряд (7.91) можно использовать для вычисления значений  $x$  во втором столбце табл. 7.2.

Таблица 7.2

	$t_p$	$x_p$	$X_p = h^2 \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_p = -h^2 x_p$
$t_{-2}$	0,90512	0,11830	-0,0011830
$t_{-1}$	1,00512	0,16928	-0,0016928
$t_0$	1,10512	0,21856	-0,0021856
$t_1$	1,20512	0,26566	-0,0026566
$t_2$	1,30512	0,31010	-0,0031010

Значения функции  $X$  можно записать в третьем столбце таблицы.

Теперь мы можем составить таблицу для функции  $X$ , включая в нее, когда это возможно, разности  $\delta X$ ,  $\delta^2 X$ ,  $\delta^3 X$ ,  $\delta^4 X$ , а также полуразности  $\mu \delta X_0$ ,  $\mu \delta^3 X$ . При помощи уравнений (7.85) и (7.86) вычисляются и заносятся в таблицу значения  $\sum^1 X_{1/2}$  и  $\sum^2 X_0$ . Последовательные значения первой и второй сумм получаются при помощи (7.74) и (7.75). В результате на данном этапе мы получим новую таблицу (см. табл. 7.3 выше ступенчатой линии).

Чтобы получить значение  $x$  в момент  $t_3$ , мы можем оценить разности, входящие в (7.88). Считая, что  $\delta^4 X$  равно нулю, выпишем значения  $\delta^3 X_{1/2}$ ,  $\delta^2 X_2$ ,  $\delta^1 X_{2 1/2}$  и  $X_3$ . Они равны соответственно 0,0000048; 0,0000314; -0,0004130 и -0,0035140. Если к тому же предположить, что  $\delta^4 X_2$  равно нулю, то можно также выписать значения для  $\delta^3 X_{2 1/2}$  и  $\delta^2 X_3$ . Это соответственно 0,0000048 и 0,0000362. Значение  $\sum^2 X_3$  нам известно, так что при помощи (7.81) можно вычислить первое приближение  $x_3$ , которое оказывается равным 0,35145. Исходя из этого значения, можно записать новые значения разностей. Оказалось, что эти новые разности отличаются от своих прежних значений только в пятом знаке после запятой, так что новое значение  $x_3$  не надо вычислять из (7.88). Новые разности вписаны в табл. 7.3 ниже ступенчатой линии. Теперь можно записать первую и вторую суммы  $\sum^1 X_{3 1/2}$  и  $\sum^2 X_4$  и начать новый шаг (вычисление  $x_4$ ).

	Аргумент	Суммы		Функция
		2-я	1-я	
$t_{-2}$	0,90512			-0,0011830
$t_{-1}$	1,00512			-0,0016928
$t_0$	1,10512	0,21874		-0,0021856
$t_1$	1,20512	0,26588	0,047140	0,0026566
$t_2$	1,30512	0,31036	0,044483	-0,0031010
$t_3$	1,40512	0,35174	0,041382	-0,0035145
$t_4$	1,50512	0,38961	0,037867	

Другой способ состоит в том, что для получения первого приближения  $x_3$  используется уравнение (7.89) в виде

$$x_3 = x_0 + 3 \sum^1 X_{1^{1/2}} + \frac{5}{4} \delta^2 X_{1^{1/2}} + \frac{17}{240} \delta^3 X_{1^{1/2}} \dots$$

При этом нужно оценить только  $\delta^3 X_{1^{1/2}}$ .

Если требуется найти  $\dot{x}$ , то для того, чтобы можно было воспользоваться (7.87), надо заносить в таблицу еще и последовательные полуразности.

Численным методам посвящена обширная литература; многие математики, такие, как Ньютон, Гаусс, Лагранж, Бессель, Стирлинг и др., разработали изящные методы интерполяции, численного дифференцирования и интегрирования, решения дифференциальных уравнений, аппроксимации данных и т. д.

Ранее уже упоминалось, что одним из лучших методов численного интегрирования уравнений второго порядка, чаще всего встречающихся в задачах орбитального движения, является метод Гаусса—Джексона. Если придерживаться введенных выше обозначений, то для двукратного интегрирования используется формула

$$x = \sum^2 X + \frac{1}{12} X - \frac{1}{240} \delta^2 X + \frac{31}{60480} \delta^4 X - \frac{289}{3628800} \delta^6 X \dots,$$

Таблица 7.3

Разности			
1-я	2-я	3-я	4-я
-0,0005098	0,0000170	0,0000048	0,0000000
-0,0004928			
$\mu$ -0,0004819	0,0000218	$\mu$ 0,0000048	-0,0000005
-0,0004710	0,0000266	0,0000048	
-0,0004444		0,0000309	0,0000043
-0,0004135			

а для однократного интегрирования

$$\begin{aligned}
 h\dot{x} = & \mu \sum^1 X - \frac{1}{12} \mu \delta^2 X + \frac{11}{720} \mu \delta^3 X - \\
 & - \frac{191}{60480} \mu \delta^4 X + \frac{2497}{3628800} \mu \delta^5 X \dots
 \end{aligned}$$

Эти уравнения используются в качестве предиктора, т. е. с их помощью вычисляется первое приближение величины  $x$ ; при этом значения разностей ниже линии оцениваются так же, как при формировании их первых приближений. При разумном выборе величины шага (или шага таблицы) цикл коррекции оказывается ненужным, однако ради спокойствия вычислителя его можно включить в нашу процедуру. В нем будет применяться уравнение, определяющее значение  $X$  по  $x$ .

### Задачи

7.1. Взяв величину шага равной  $t = 1$ , сформировать таблицу разностей для уравнения

$$x = 1 + t + t^2 + t^3$$

(т. е.  $t_1 = 1, t_{-1} = -1, h = 0$  и т. д.). Почему четвертая разность равна нулю?

7.2. Как отразится удвоение или деление шага пополам на значениях разностей в таблице? Проверить ответ, увеличивая вдвое и деля пополам величину шага для таблицы, полученной в задаче 7.1.

7.3. Положить в задаче 6.1  $g = 9,81 \text{ м/с}^2, \epsilon = 0,01; x = 0, dx'/dt = 0,56 \text{ м/с}$  при  $t = 0$ . При помощи метода численного интегрирования Гаусса—

Джексона получить значение  $x$  при  $t = 1,00$  с. Результат проверить с помощью приближенной формулы, приведенной в задаче 6.1.

7.4. Получить значение  $x$  в примере из разд. 7.4 методом численного интегрирования и проверить ответ с помощью разложений (7.91).

## Литература

1. *Allan R. R.* Nature, **190**, No. 4776, 117, 1961.
2. *Allan R. R., Ward G. N.* Proc. Camb. Phil. Soc., **59**, 669, 1963.
3. *Brouwer D.* Astron., J., **46**, 199, 1937.
4. *Butcher J. C.* Math. Comput., **19**, 408, 1965.
5. *Cohen C. J., Hubbard E. C.* Astron. J., **67**, 10, 1962.
6. *Cowell P. H., Croomelin A. D.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **68**, 576, 1908.
7. *Fehlberg E.* NASA Tech. Rep. R-248, 1968.
8. *Fehlberg E.* NASA Tech. Rep. R-381, 1972.
9. *Garajala A. M.* Astron. J., **65**, 117, 1960.
10. *Heggie D. C.* Astrophys. Space Sci., **14**, 35, 1971.
11. *Henrici P.* Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York, Wiley, 1962.
12. *Henrici P.* Elements of Numerical Analysis. New York, Wiley, 1964.
13. *Herget P.* Astron. J., **67**, 16, 1962.
14. *Herrick S.* Astron. J., **58**, 156, 1953.
15. *Herrick S.* Astrodynamics. London, Van Nostrand Reinhold, 1971.
16. Interpolation and Allied Tables. London, HMSO, 1956.
17. *Kyner W. T., Bennet M. M.* Astron. J., **71**, 579, 1966.
18. *Lapidus L., Seinfeld J. H.* Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. New York, Academic, 1971.
19. *Lecar M.* Bull. Astron., **3**, 91, 1968.
20. *Merson R. H.* Numerical Integration of the Differential Equations of Celestial Mechanics. Farnborough, Royal Aircraft Establishment, 1973.
21. *Merton G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **109**, 421, 1949.
22. *Milankovic M.* Acad. Serbe. Bull. Acad. Sci. Mat. Nat. A, No. 6, 1939.
23. *Musen P.* Astron. J., **59**, 262, 1954.
24. *Oppolzer T. R.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. (Math. Classe), 1870.
25. *Peters C. F.* Bull. Astron., **3**, 167, 1968.
26. *Pines S.* Astron. J., **66**, 5, 1961.
27. *Shanks E. B.* Math. Comput., **20**, 21, 1966.
28. *Stiefel E. L.* Cel. Mech., **2**, 274, 1970.
29. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Springer-Verlag, 1971.
30. *Stumpff S., Weiss E. H.* NASA Tech. Note D-4470, 1967.
31. *Szebehely V.* Theory of Orbits. New York, Academic, 1967.

## Рекомендуемая литература

- Brouwer D., Clemence C. M.* Methods of Celestial Mechanics. New York and London, Academic, 1961. [Имеется перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. — М.: ИЛ, 1964.]
- Buckingham R. A.* Numerical Methods. London, Pitman, 1957.
- Herget P.* The Computation of Orbits. University of Cincinnati, 1948.
- Herrick S.* Astrodynamics, vols. 1 and 2. London, Van Nostrand Reinhold, 1971, 1972. [Имеется перевод: Херрик С. Астродинамика, тт. 1, 2, 3. — М.: Мир, 1976, 1977, 1978.]
- Jackson J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 602, 1924.
- Khabaza I. M.* Numerical Analysis. London, Pergamon, 1965.
- Milne E. A.* Vectorial Mechanics. London, Methuen, 1948.
- Moore R. E.* Interval Analysis. New York, 1966.
- Stumpff K.* Himmelsmechanik, vol. 1. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.

## Устойчивость и эволюция Солнечной системы

### 8.1. Введение

Вернемся теперь к обсуждению некоторых важных задач динамики Солнечной системы, связанных с вопросами эволюции и устойчивости. Наблюдая за телами Солнечной системы, мы видим, что планеты движутся вокруг Солнца по непересекающимся орбитам, медленные изменения которых достаточно точно описываются теориями общих возмущений. Большинство спутников ведет себя аналогичным образом, правда, есть подозрение, что спутники Юпитера и Сатурна, обращающиеся вокруг планет в обратном направлении, на самом деле представляют собой захваченные астероиды. Примечательно наличие большого числа почти точных соизмеримостей в средних движениях и «зон избегания» в поясе астероидов и структуре колец Сатурна, соответствующих определенным соизмеримостям. В отношении комет следует отметить, что их орбиты в результате столкновений с планетами могут испытывать существенные изменения.

Некоторые из вопросов, на которые нам хотелось бы дать ответы, формулируются следующим образом:

- 1) Каков возраст Солнечной системы?
- 2) Существенно ли изменяется распределение планетных орбит на протяжении астрономически больших интервалов времени?
- 3) Если такие изменения происходят, то являются ли они медленными. Возможны ли внезапные существенные изменения орбит одной или нескольких планет, приводящие к изменению порядка орбит (в соответствии с величинами средних расстояний планет от Солнца) или к столкновению?
- 4) Если Солнечная система устойчива и только медленно эволюционирует, то является ли это следствием ее современного состояния с почти круговыми орбитами, малыми наклонениями почти-соизмеримыми средними движениями?

Этими вопросами занимались многие исследователи. Однако лишь ответы на первый вопрос, даваемые геофизикой, определением возраста лунных пород и солнечной астрофизикой, хорошо согласуются между собой. Радиоактивное датирование земных и лунных пород дает в качестве минимального возраста Земли и Луны величину порядка  $4,5 \cdot 10^9$  лет. Теория внутреннего строения и энерговыделения звезд, будучи примененной к Солнцу, дает

для его возраста оценку  $5,0 \cdot 10^9$  лет. Поэтому кажется маловероятным, чтобы Солнечная система была сколько-нибудь моложе. Столь значительный интервал времени, соответствующий  $5 \cdot 10^9$  обращений Земли вокруг Солнца, наводит на мысль, что в ответ на второй вопрос надо сказать: «по-видимому, нет». Подтверждением этой точки зрения может служить то, что при исследовании ископаемых мы находим следы сложных форм жизни, существовавших на Земле по крайней мере за  $2 \cdot 10^9$  лет до наших дней. В течение этого времени интенсивность солнечного излучения, как и максимальное и минимальное расстояния Земли от Солнца, не могла существенно измениться. Изучая некоторые морские формы жизни, ученые получили данные, указывающие на то, как медленно эволюционировала система Земля—Луна под действием приливных сил.

К сожалению, приходится признать, что даже сегодня небесная механика не в состоянии с уверенностью указать возраст Солнечной системы и ответить на вопросы, относящиеся к ее устойчивости и эволюции. Однако это вовсе не означает, что за последние годы в этой области не было никакого продвижения. Несомненно большие успехи, достигнутые на многих направлениях исследования этой проблемы, в результате чего мы сейчас значительно яснее представляем себе механизмы гравитационного взаимодействия, определяющие движение различных подсистем. В последующих разделах будут рассмотрены некоторые из этих задач.

## 8.2. Эфемериды планет

Другим аспектом исследования динамики Солнечной системы является вычисление различных эфемерид. Большинство опубликованных к настоящему времени таблиц основаны на различных теориях движения Солнца, Луны и планет. Тщательными и очень трудоемкими расчетами по этим теориям занимались многие знаменитые астрономы. Используемые теории в большинстве случаев являются аналитическими и опираются на методы общих возмущений. Однако в течение последних лет было предложено несколько проектов составления эфемерид принципиально новыми методами. Один из таких проектов описан в работе Остервинтера и Коэна [24]. Исследования, связанные с другими проектами, проводились в Массачусетском технологическом институте и в Лаборатории реактивного движения в Пасадене (США). Поскольку важным элементом таких исследований является высокоточное численное интегрирование уравнений движения тел Солнечной системы, то здесь уместно будет обрисовать схему метода Остервинтера и Коэна. В их работе указывается, что основной недостаток к классических теорий следует из того, что они создавались для вычислений вручну. Поскольку человек за свою жизнь может

проделать только весьма ограниченный объем выкладок, то в разложениях всегда приходилось отбрасывать члены более высокого порядка. При этом бывает трудно найти все члены, величина которых больше некоторого порогового значения. Весьма трудной задачей является также привязка таких теорий к наблюдениям. Поэтому обычно в данные наблюдений вносились предварительные поправки. В результате опубликованные координаты некоторых планет имеют значительные погрешности. Например, истинные координаты Плутона отличаются от предвычисленных на  $10''$ . Эти соображения заставили Остервинтера и Козна попытаться получить полное решение задачи о движении Солнечной системы, т. е. одновременно определить элементы орбит планет и Луны, причем так, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение результатов вычислений от наблюдений на большом промежутке времени. Они воспользовались программой для задачи  $n$  тел, а Луну считали просто еще одной планетой, обращающейся вокруг Солнца. При таком подходе процесс интегрирования может быть сопряжен со значительными трудностями, поскольку гелиоцентрическая орбита Луны является сильно возмущенной, и шаг интегрирования приходится брать очень маленьким. Фактически использовавшийся шаг интегрирования всей системы составлял 0,4 сут. Модель включает в себя много интересных деталей, например оценку приливного взаимного действия в системе Земля—Луна и экстраполяцию атомного времени вплоть до 1912 г. По-видимому, эта модель на сегодняшний день является одной из лучших для предвычисления положений планет.

### 8.3. Соизмеримости в средних движениях

В небесной механике во многих исследованиях делались попытки понять причину существования такого большого числа почти точных соизмеримостей в средних движениях (резонансов), которые имеют место для пары планет (например, для Плутона и Нептуна) или пары спутников (Мимас и Тетия) или даже для тройки спутников (таких, как Ио, Ганимед и Каллисто). Рой и Овенден [29] показали, что таких соизмеримостей наблюдается слишком много, чтобы их можно было считать случайными. Также делались попытки объяснить отсутствие тел на орбитах, соответствующих некоторым соизмеримостям (например, промежутки Кирквуда в поясе астероидов или щель Кассини в кольцах Сатурна).

Можно поставить несколько вопросов, касающихся соизмеримостей. Обусловлено ли возникновение соизмеримостей самим процессом формирования планетной и спутниковых систем? В случае если это так, то уменьшается ли со временем их число под действием взаимного гравитационного притяжения? Возможно, од-

нако, что соизмеримости соответствуют конфигурациям, устойчивым по отношению к возмущениям, так что тела, орбиты которых не обладают свойством соизмеримости, под действием возмущений так меняют свои орбиты, что в конце концов происходит столкновение или уход тела из Солнечной системы. Может ли пара тел, орбиты которых между собой несоизмеримы, перейти на соизмеримые орбиты и так на них и остаться? Теперь мы обратимся к результатам исследований, которые проливают свет на эти вопросы.

## 8.4. Астероиды

Одной из задач орбитального движения астероидов является задача о распределении таких тел в Солнечной системе. Она включает в себя вопрос о том, как зависит число астероидов от среднего гелиоцентрического расстояния или, точнее, от среднего движения. Сюда же относится и такой вопрос: почему астероиды избегают занимать орбиты, соответствующие одним значениям среднего движения (промежутки Кирквуда), и предпочитают орбиты, соответствующие некоторым другим значениям (группа Гильды, Троянцы)? На рис. 8.1 [3] показано распределение астероидов в зависимости от значений их среднего движения вокруг Солнца в секундах дуги в сутки ( $q$  обозначает порядок соизмеримости). На рисунке ясно видны промежутки, которым соответствуют средние движения, соизмеримые со средним движением Юпитера ( $n_{\text{Ю}} = 299,13''$  в сутки). Кроме того, здесь же показаны положения соизмеримостей, выраженных отношениями малых целых чисел. Отчетливо видны промежутки за точкой  $2/1$  (так называемый промежуток Гекубы) и скопления астероидов около точек  $3/2$  (группа Гильды) и  $1/1$  (группа Троянцев).

При исследовании движения астероидов применялись как аналитические, так и численные методы. Масса астероида настолько мала по сравнению с массами Солнца и Юпитера, что многие возникающие здесь задачи можно рассматривать как практические примеры эллиптической или круговой ограниченной задачи трех тел. Среди тех, кто внес вклад в разработку и использование аналитических методов для случаев, когда средние движения астероидов соизмеримы со средним движением Юпитера, можно назвать Тиссерана, Пуанкаре, Андуайе, Брауэра и Месседжа. В таких задачах может использоваться и обычная теория общих возмущений, в том числе применительно к парам планет, для которых отношение средних движений близко к отношению целых чисел. При этом так называемые критические члены возмущающей функции приводят к появлению в возмущениях членов с малыми знаменателями, что в свою очередь обуславливает возникновение неравенств типа «большого неравенства» Юпитер—Сатурн с перио-



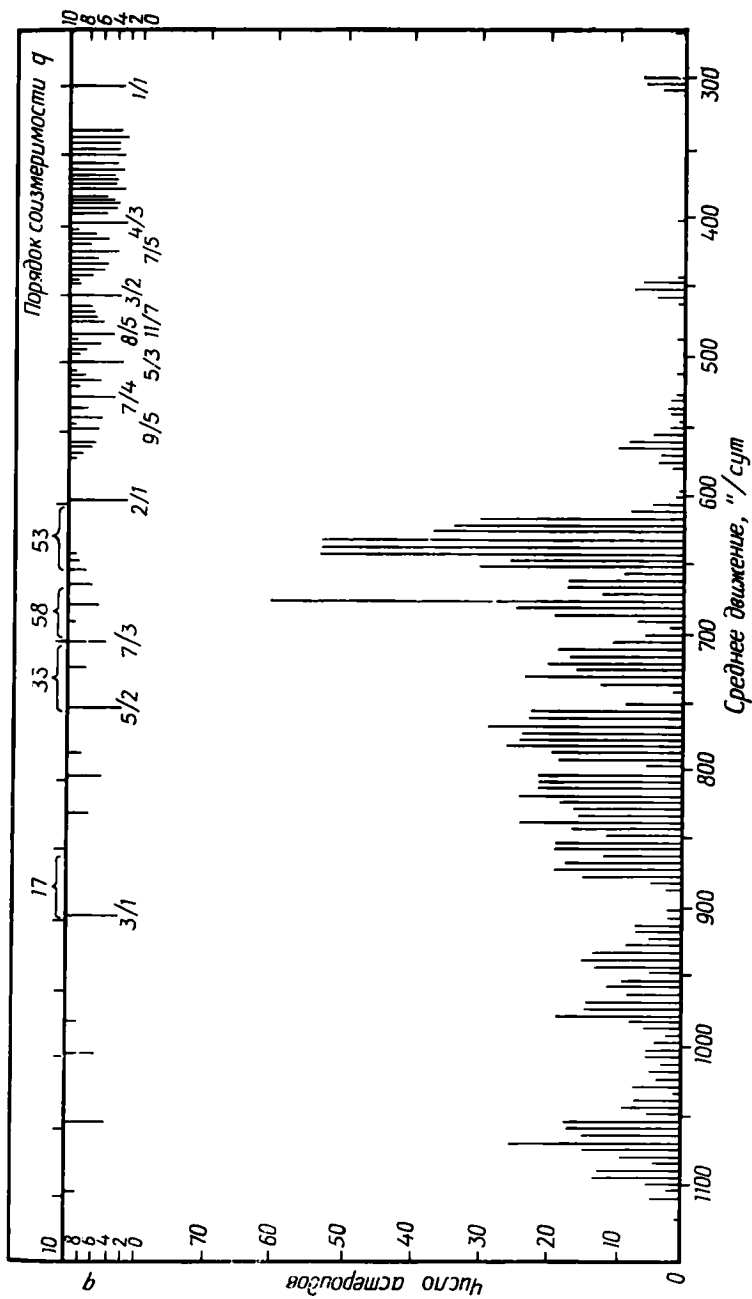


Рис. 8.1.

дом 900 лет (см. разд. 6.7.3). Однако в случаях, когда отношение средних движений очень близко к соизмеримости (например, для некоторых пар спутников, для систем Нептун—Плутон, или астероид—Юпитер), приходится применять другие методы теории возмущений.

Применение таких методов и численное интегрирование показало, что наличие промежутков и сгущений орбит астероидов в местах, соответствующих соизмеримостям, в самом деле обусловлено возмущающим действием Юпитера. В гл. 5 мы уже имели дело с Троянцами как с практическим случаем реализации одного из решений задачи трех тел — треугольных точек Лагранжа. Это решение устойчиво, так что астероиды группы Троянцев совершают колебания около треугольных точек либрации.

Для несоизмеримых орбит возмущения средних движений астероидов пропорциональны отношению массы Юпитера к массе Солнца. В случае соизмеримой орбиты критические члены вызывают большие долгопериодические либрации среднего движения и других элементов орбиты. Эти либрации приводят к тому, что средние движения астероидов с соизмеримостью, выраженной отношением малых целых чисел, будут наблюдаться очень редко. С аналогичной ситуацией мы столкнемся, если в темноте в случайные моменты времени будем фотографировать со вспышкой качающийся маятник. На подавляющем большинстве снимков маятник будет отклонен от своего вертикального положения. Таким образом, если взять распределение средних движений на поперечном разрезе около орбиты, соответствующей указанной соизмеримости, то мы обнаружим мало астероидов с оскулирующими в непосредственной близости от соизмеримости средними движениями, даже при условии, что соизмеримость является устойчивой. Приводя различные доводы, Брауэр [3] и Месседж [22] опирались на факты, доказывающие точку зрения, согласно которой провалы в поясе астероидов вовсе не являются областями неустойчивости. В одной из работ Шубарта [30] указывалось, что соизмеримость  $3/2$  (группа Гильды) представляет собой область, в которой могут иметь место устойчивые колебания около периодических орбит. Группа Гильды насчитывает около 40 членов.

В работе Хантера [18] и в более поздних исследованиях Лекара и Франклина [20] показано, что существует связь между астероидами, расположенными между орбитами Марса и Юпитера, а также между орбитами Юпитера и Сатурна, с процессами захвата и освобождения спутников Юпитера.

На рис. 8.1 виден резкий спад числа астероидов за промежутком Гекубы (соизмеримость  $2/1$ ). Эта зона по существу свободна от астероидов, кроме группы Гильды (соизмеримость  $3/2$ ) и Троянцев (соизмеримость  $1/1$ ). Изучая механизм освобождения спутников Юпитера под действием солнечных возмущений, Хантер

нашел, что такие гипотетические спутники должны превращаться в астероиды, орбиты которых расположены либо в этой пустой зоне, либо в области между Юпитером и Сатурном. Если обратить время, то движение по орбите будет происходить в противоположном направлении. Отсюда можно сделать вывод, что влияние Юпитера на некоторое первоначальное распределение астероидов привело к образованию в настоящее время рассматриваемой пустой зоны. При этом астероиды после сближения с Юпитером сразу же или после временного пребывания на спутниковой орбите выбрасываются в область между Юпитером и Сатурном или обратно в пояс астероидов. Заметим, что группа Гильды устойчива по отношению к такому процессу.

Лекар и Франклин занимались исследованием влияния Юпитера на первоначально однородное распределение астероидов между орбитами Марса и Юпитера. Путем численного интегрирования они показали, что спустя небольшой промежуток времени (примерно 2400 лет) большая часть астероидов, находящихся в области между орбитой Юпитера и орбитой, соответствующей соизмеримости  $3/2$ , будет оттуда выброшена; исключения составляют астероиды, совершающие устойчивые колебания (группа Гильды). В то же время выброс астероидов из области, лежащей между орбитами, соответствующими соизмеримостям  $2/1$  и  $3/2$ , должен быть очень незначительным. На основании этого Лекар и Франклин сделали вывод, что прежде, чем эта область опустеет, должно пройти существенно большее время, либо должен действовать еще какой-то механизм вывода астероидов из рассматриваемой области.

Что касается области между орбитами Юпитера и Сатурна, то указанные авторы нашли, что возмущающее действие этих двух массивных планет на первоначально однородное распределение астероидов должно привести к выбросу из этой области по крайней мере 85% астероидов всего за 6000 лет. В результате должны остаться только две группы астероидов, расположенные на расстояниях от Солнца, равных 1,30 и 1,45 среднего гелиоцентрического расстояния Юпитера (6,8 и 7,5 а. е.). Орбиты астероидов на таких расстояниях являются устойчивыми (по крайней мере на рассматриваемом интервале времени). Интересно отметить, что первое из этих расстояний (6,8 а. е.) соответствует соизмеримостям средних движений астероидов со средними движениями Юпитера и Сатурна порядка  $3/2$  и  $3/5$ , а второе (7,5 а. е.) — соизмеримостям  $7/4$  и  $7/10$ . Устойчивы ли такие орбиты на значительно больших промежутках времени, пока неизвестно. Важный вывод, который следует из указанной работы, заключается в том, что если даже между Юпитером и Сатурном и существовали астероиды, имеющие массы порядка масс Земли, Венеры и Марса, то в течение нескольких тысяч лет большинство из них было выброшено в другие части Солнечной системы.

## 8.5. Кольца Сатурна

В гл. 1 уже упоминалось, что кольца Сатурна не являются ни твердыми, ни жидкими образованиями. Максвелл математически доказал, что если бы они были таковыми, то гравитационное возмущение от экваториального вздутия Сатурна разрушило бы их за сравнительно короткое время. Килер, изучая спектр солнечного излучения, отраженного от системы колец, показал, что распределение доплеровских сдвигов подтверждает предположение об орбитальном движении вокруг планеты бесчисленного множества мелких частиц.

Ближайшие к планете три спутника Сатурна (Мимас, Энцелад и Тетия) расположены достаточно близко к кольцам и достаточно массивны, чтобы возмущать движение частиц колец. Щель Кассини между кольцами А и В соответствует расстояниям, при которых средние движения гипотетических частиц были бы соответственно в два, три и четыре раза больше, чем у Мимаса, Энцелада и Тетии. Граница между кольцами В и С лежит на таком расстоянии, где соответствующее среднее движение частиц в три раза больше, чем среднее движение Мимаса. Очевидно, здесь мы имеем дело с ситуацией, аналогичной промежуткам Кирквуда в поясе астероидов.

## 8.6. Почти-соизмеримые орбиты спутников

В системе спутников Сатурна есть три пары спутников, средние движения которых близки к соизмеримым. Близость отношений средних движений к простым дробям приводит к тому, что движение таких спутников является устойчивым резонансным; долгота линии соединения для каждой пары спутников колеблется около значения, соответствующего некоторому выделенному направлению.

1) Средние движения Титана (самого массивного спутника Сатурна) и Гипериона относятся друг к другу примерно как 4 : 3. При этом линия соединения спутников колеблется с амплитудой  $36^\circ$  относительно направления в апоцентр орбиты Гипериона.

Пусть  $\lambda$ ,  $\lambda'$  и  $\bar{\omega}$  — соответственно долгота Гипериона, Титана и перицентра орбиты Гипериона. Тогда величину  $\theta$ , называемую *критическим аргументом*, можно ввести следующим образом:

$$\theta = 4\lambda - 3\lambda' - \bar{\omega} \approx 180^\circ.$$

Заметим, что

$$4n - 3n' - \dot{\bar{\omega}} \approx 0,$$

где  $n$ ,  $n'$  и  $\dot{\bar{\omega}}$  — средние движения Гипериона, Титана и линии апсид орбиты Гипериона. Критический аргумент  $\theta$  колеблется,

как уже указывалось выше, с амплитудой  $36^\circ$ . Величина  $\bar{\omega}$  составляет приблизительно  $-20,3^\circ$  в год. Движение системы Сатурн—Титан—Гиперион фактически очень близко периодическому решению Пуанкаре второго сорта для ограниченной задачи трех тел.

2) Отношение средних движений Энцелада и Дионы близко к  $2 : 1$ ; линия соединения колеблется около перигентра орбиты Энцелада с амплитудой  $1,5^\circ$ . В этом случае

$$\theta = 2\lambda - \lambda' - \bar{\omega}' \approx 180^\circ,$$

$$2n - n' - \bar{\omega}' \approx 0^\circ.$$

Здесь величины со штрихами относятся к Энцеладу, а без штрихов — к Дионе. Движение системы Сатурн—Энцелад—Диона снова напоминает периодическое решение Пуанкаре второго сорта.

3) Отношение средних движений Мимаса и Тефии также близко к  $2 : 1$ , но в этом случае линия соединения спутников колеблется около точки, лежащей посредине между восходящими узлами орбит спутников на экваториальной плоскости Сатурна. Амплитуда колебаний составляет  $48,5^\circ$ . Критический аргумент  $\theta$  для системы Сатурн—Мимас—Тефия имеет вид

$$\theta = 4\lambda - 2\lambda' - \Omega - \Omega' \approx 0,$$

где  $\Omega$  — долгота восходящего узла, а величины со штрихами и без штрихов относятся соответственно к Мимасу и Тефии. Движение такой системы напоминает периодическое решение Пуанкаре третьего сорта для ограниченной задачи трех тел.

Все три системы являются устойчивыми, поскольку каждая пара спутников при движении очень часто проходит через конфигурации, близкие к зеркальным (см. разд. 5.6), что обеспечивает быструю компенсацию больших возмущений.

В последние годы большое внимание уделяется вопросу о происхождении таких резонансных систем. Голдрайх [14] показал, что существует механизм воздействия планеты через посредство приливных сил на величины больших полуосей пары спутников. Оказывается, если даже средние движения спутников вначале несоизмеримы, то со временем они не только становятся соизмеримыми, но и впоследствии, когда обе орбиты продолжают эволюционировать, условие соизмеримости уже не нарушается. Голдрайх был первым, кто указал на наличие такого механизма. Он показал, что если два спутника  $P_1$  и  $P_2$  движутся по орбитам с большими полуосями  $a_1$  и  $a_2$  ( $a_1 < a_2$ ), то при некоторых предположениях  $P_1$  под действием приливных сил будет двигаться по раскручивающейся спирали быстрее, чем  $P_2$ . По достижении почти-соизмеримости с  $P_2$  такого типа, который встречается в природе,  $P_1$  передает момент количества движения  $P_2$ , причем перекачка момента происходит с такой скоростью, чтобы достигнутая почти-соизмеримость сохранялась.

Возможно, именно так возникли резонансы Мимас—Тефия и Диона—Энцелад. Колумбо и Франклин [10] утверждают, что если даже причиной резонанса Титан—Гиперион и не был приливный механизм Голдрайха, то этот резонанс мог возникнуть естественным образом. Другими словами, возможно, что Титан и Гиперион с самого начала находились в резонансе, а поскольку он устойчив, то условие резонанса продолжает выполняться до сих пор.

В заключение этого раздела рассмотрим галилеевы спутники Юпитера: Ио (I), Европу (II), Ганимед (III) и Каллисто (IV). В обычных обозначениях (средние движения выражаются в градусах в сутки) имеем

$$n_1 = 203,488\ 992\ 435,$$

$$n_2 = 101,374\ 761\ 672,$$

$$n_3 = 50,317\ 646\ 290,$$

$$n_4 = 21,971\ 109\ 630.$$

Тогда

$$n_1 - 2n_2 = 0,739\ 469\ 091,$$

$$n_2 - 2n_3 = 0,739\ 469\ 092,$$

$$3n_3 - 7n_4 = -0,044\ 828\ 540.$$

Заметим также, что в пределах точности наблюдений  $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$ . Переходя к средним долготам, для первых трех спутников получаем

$$l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180^\circ.$$

Очевидно, эти соотношения устойчивы; четыре спутника наблюдались в течение более 350 лет, что соответствует приблизительно  $10^5$  оборотов этих тел, т. е. времени порядка  $10^5$  лет для внутренних планет Солнечной системы. Однако анализировать движение этих спутников довольно сложно. Согласно Голдрайху и Гриффину, пары спутников Юпитера I—II, II—III и III—IV представляют собой конфигурации двух тел, в которых существуют устойчивые соизмеримости по эксцентриситетам и положениям линии апсид (при этом все четыре орбиты по существу компланарны). Лаплас показал, что устойчивы также соотношения, включающие средние движения и долготы I, II и III спутников Юпитера.

Седьмое резонансное соотношение в Солнечной системе (между Плутоном и Нептуном), по-видимому, также должно быть устойчивым. Оно будет обсуждаться позднее.

## 8.7. Численное интегрирование на больших промежутках времени

С момента появления быстродействующих вычислительных машин (около двадцати лет назад) они использовались астрономами для решения многих различных задач. К числу этих задач относятся и интегрирование динамических систем на больших промежутках времени. Употребленное здесь слово «большой» может внести путаницу, поскольку его значение очень сильно изменилось за последние 15 лет. Задача, для решения которой раньше требовалось много часов машинного времени, теперь может быть решена за несколько минут. Мы, применяя слово «большой», обычно будем иметь в виду задачи, решение которых с достаточно высокой точностью требует использования всей мощности имеющейся в нашем распоряжении вычислительной системы; обычно подразумевается, что такие задачи требуют десятков часов машинного времени. Мы ограничимся задачами, типичными для Солнечной системы, и не будем рассматривать проблемы, связанные с более сложными динамическими системами, к которым можно отнести задачи звездных скоплений (задачи  $n$  тел, когда  $n > 10$ ) (см., например, [19]) и задачи динамики сплошной среды (см., например, [11]).

### 8.7.1. Внешние планеты на интервале 120 000 лет

Одна из первых попыток численного интегрирования задачи, типичной для Солнечной системы, была предпринята Коэном и Хаббардом [6]. К выполнению такой работы их побудило желание продолжить эфемериды Эккерта и др. [12], охватывающие интервал 400 лет. Орбиты пяти внешних планет были численно проинтегрированы от наших дней на 120 000 лет в прошлое. Вычисления проводились на 13-разрядной двоично-десятичной вычислительной машине NORC (Naval Ordinance Research Calculator) ВМС США. Использовался метод Коуэлла с вычислением девярых разностей. Интегрирование выполнялось с постоянным шагом 40 сут. Суммарное машинное время, потраченное на решение этой задачи, составило примерно 80 ч.

Одна из главных целей работы состояла в определении расстояния между Плутоном и Нептуном. Поскольку перигелийное расстояние Плутона меньше, чем перигелийное расстояние Нептуна, то предполагалось, что Плутон может довольно близко подходить к Нептуну. В действительности же обнаружилось, что угол  $\theta_{ПН} = 3\lambda_{П} - 2\lambda_{Н} - \tilde{\omega}_{П}''$  (где  $\lambda$  — средняя долгота,  $\tilde{\omega}$  — долгота перигелия, а индексы П и Н относятся соответственно к Плутоному и Нептуну) колеблется около  $180^\circ$  с амплитудой  $76'$  и периодом 19 670 лет. Поэтому две планеты никогда не могут прибли-

зятся друг к другу в окрестности перигелия Плутона. При максимальном сближении (имеющем место в афелии) расстояние между планетами составляет 18 а. е.

В более детальном и точном исследовании Козна и др. [7] элементы орбиты Плутона были уточнены и с этими новыми элементами было выполнено интегрирование на интервале в 300 000 лет. В результате выяснилось, что  $\theta_H$  колеблется с амплитудой  $80'$  и периодом 19 440 лет.

### 8.7.2. Эволюция элементов орбит на интервале 1 000 000 лет

Чтобы получить более полную картину движения взаимодействующих друг с другом внешних планет, Козн и др. [8] выполнили вычисление их орбит на интервале 1 000 000 лет (середина этого интервала приходилась на эпоху 1941 январь 6,0). Расчеты выполнялись на самой мощной машине того времени (IBM 7030-Stretch) с использованием предиктора Коуэлла 12-го порядка (шаг снова был фиксированным и составлял 40 сут). Указанная вычислительная машина оперирует с 48-разрядными мантиссами и обеспечивает точность порядка 14 десятичных знаков. Суммарное время интегрирования составило около 20 ч. Результаты были представлены в виде диаграмм элементов орбит для каждой из пяти планет с подробным обсуждением всех периодических модуляций, отраженных на диаграммах.

Например, в случае системы Юпитер—Сатурн на всех диаграммах хорошо видны известные колебания с периодом 900 лет, которые обусловлены тем, что периоды этих планет являются почти-соизмеримыми (соизмеримость порядка 2 : 5). Рассматривая весь интервал 1 000 000 лет, можно заметить, что эта основная частота модулируется колебаниями с периодом около 54 000 лет. Такие модуляции наблюдаются на диаграммах для больших полуосей и эксцентриситетов обеих планет. Если обратиться к диаграммам движения двух перигелиев (Юпитера и Сатурна), то видно, что перигелий Юпитера совершает один оборот за 300 000 лет, а перигелий Сатурна — за 46 000 лет. При таких значениях средних движений перигелиев синодический период составляет 50 000 лет, и это находит отражение в диаграмме для перигелия Юпитера, а также в диаграммах для большой полуоси и эксцентриситета. Еще одна интересная особенность системы Юпитер—Сатурн проявляется на диаграммах для наклона и долготы узлов. Оказывается, наклоны обеих планет колеблются с почти одинаковыми амплитудами, но со сдвигом фаз в  $180^\circ$ . Следовательно, две орбитальные плоскости движутся почти как твердое тело с общим периодом узлов в 50 000 лет.

Учитывая полученные данные о движении Плутона, интересно проследить его движение на большем интервале времени. Как и



следовало ожидать, на диаграммах для элементов орбиты Плутона хорошо видны сильные колебания с периодом около 19 500 лет, обусловленные уже известной нам либрацией в системе Нептун—Плутон. Однако на диаграммах для наклона и эксцентриситета на интервале в 1 000 000 лет, по-видимому, отражаются вековые вариации. Можно предположить, что они представляют собой части периодических вариаций, имеющих период, намного превышающий 1 000 000 лет, но диаграммы не дают ответа на этот вопрос. В заключение авторы проэкстраполировали долготу перигелия Плутона и сделали вывод, что ее период, возможно, составляет 4 000 000 лет. В действительности Брауэр [4] показал, что большое наклонение орбиты Плутона будет приводить к другому углу, аналогичному  $\theta_H$  (а именно  $\theta'_H = 3\lambda_{II} - 2\lambda_{HI} - \Omega_{II}$ , где  $\Omega$  — долгота узла), причем этот угол должен колебаться так же, как  $\theta_H$ . Таким образом, он предположил, что движение аргумента перигелия  $\omega = \theta'_{II} - \theta_{II}$  должно быть скорее ротационным, чем либрационным. Однако диаграммы Коэна и др., построенные на интервале 1 000 000 лет, не дают ответа и на этот вопрос.

### 8.7.3. Движение перигелия Плутона: ротационное или либрационное?

В работе Хорн и Джакалия [17] был сделан вывод, что перигелий Плутона должен испытывать ротационное движение с периодом 30 млн. лет. Однако Уильямс и Бенсон [32] полагали, что результаты Коэна и др. указывают на движение либрационного типа. Поэтому они предприняли интегрирование орбиты Плутона на интервале 4 500 000 лет. В отличие от Коэна и др., которые одновременно интегрировали прямоугольные координаты пяти внешних планет, Уильямс и Бенсон численно интегрировали уравнения только для Плутона. Орбиты остальных четырех планет считались полностью известными и не подверженными влиянию Плутона. Интегрирование выполнялось в предположении, что Плутон является материальной точкой. Вековые вариации элементов Нептуна, Урана, Сатурна и Юпитера моделировались в соответствии с расчетами Брауэра и Ван Веркома [5]. К тому же Уильямс и Бенсон в процессе исследования не интегрировали планетные уравнения в их обычном виде, поскольку в этом случае шаг интегрирования из-за присутствия короткопериодических членов следовало бы выбирать достаточно малым. Чтобы исключить эти члены, указанные авторы воспользовались методом Гаусса отделения вековых членов. В данном случае возмущающая функция  $R_j$  усредняется по средним аномалиям возмущенного и возмущающего тел  $M$  и  $M_j$ . При этом остальные элементы считаются

постоянными. В результате такой процедуры  $R_j$  заменяется величиной

$$\langle R_j \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_j dM_j dM.$$

Для интегрирования упрощенной модели применялся метод Рунге—Кутты четвертого порядка, причем шаг интегрирования был взят равным 500 лет. Чтобы проинтегрировать систему на интервале от 2,1 млн. лет до н. э. до 2,4 млн. лет н. э., машине IBM/360/91 потребовалось около одной минуты.

Результаты были представлены в виде диаграмм для  $\omega$ ,  $e$  и  $i$  Плутона, усредненных по либрации в системе Нептун—Плутон с периодом 19 500 лет. Было показано, что  $\omega$  (аргумент перигелия) испытывает либрацию близ значения  $90^\circ$  с амплитудой около  $24^\circ$  и периодом 3 955 000 лет. В работе Хори и Джакалия [17] отмечалось, что при данном значении большой полуоси решение для  $\omega$  является либрационным, если величина  $1 - (1 - e^2) \cos^2 i$  меньше некоторого критического значения. В противном же случае решение должно быть ротационным. Уильямс и Бенсон доказали, что если бы Плутон был близок к этому критическому значению, то амплитуда либрации была бы близка к  $90^\circ$ . Однако, поскольку эта амплитуда составляет всего  $24^\circ$ , Плутон должен находиться глубоко в области либрации. Уильямс и Бенсон полагают, что причиной расхождения их результатов с результатами Хори и Джакалия было ошибочное значение массы Нептуна, которым пользовались Хори и Джакалия. Интересен также сделанный в работе [32] вывод о том, что влияние Нептуна должно приводить к обратному движению перигелия, а влияние остальных трех планет к движению в прямом направлении. Эти эффекты почти полностью компенсируют друг друга, так что суммарный эффект иногда бывает положительным, а иногда отрицательным. В своей простой модели Хори и Джакалия пренебрегали влиянием всех других планет. Интересно отметить, что помимо Плутона только у одного из естественных тел Солнечной системы наблюдается либрационное, а не ротационное движение; этим телом является астероид (1373) Цинциннати [21].

#### 8.7.4. Сравнение аналитического и численного подходов

Чтобы завершить обсуждение исследований эволюции орбит внешних планет, сравним различные методы решения этой задачи. Первый метод основан на аналитической теории. Типичным примером такого подхода может служить вековая теория Брауэра

и Ван Веркома [5]. Слово «вековая» указывает на поиски решения, которое справедливо на большом интервале времени. Короткопериодические члены нас не интересуют, поэтому они с самого начала исключаются из возмущающей функции. Затем возмущающая функция раскладывается (до некоторого порядка) по возмущающим массам, эксцентриситетам и наклонениям. Разумеется, при этом очень важно учесть критические члены, которые обусловлены близостью параметров системы к резонансным значениям. Коэн и др. [9], исходя из такой теории, пришли к зависимостям элементов, аналогичным полученным в результате численного интегрирования. В разложении для возмущающей функции эти авторы оставили только члены до первого порядка (включительно) по возмущающим массам и до второго порядка по эксцентриситетам и наклонениям. В случае Юпитера и Сатурна было получено очень хорошее соответствие результатов, поскольку были учтены члены, связанные с близостью системы к резонансу, имеющие период около 900 лет. Однако в других случаях наблюдались значительные расхождения, хотя общий характер зависимостей и совпадал. По предположению Коэна и др. такое расхождение обусловлено тем, что они пренебрегали членами, связанными с большим неравенством в системе Уран—Нептун.

Второй возможный подход состоит в применении специальных, а не общих возмущений. Пример такого подхода также можно найти в работе Коэна и др. [9]. При этом подходе точные значения координат и скоростей получаются на возможно большем временном интервале, который ограничивается ошибками округления и погрешностями, вызванными отбрасыванием в разложениях членов высокого порядка. Другим важным фактором в этом случае является требуемое машинное время. Правда, современные вычислительные машины обладают таким быстродействием, что интегрирование может выполняться на любых разумных интервалах времени. Чтобы избежать чрезмерного роста ошибок округления и ошибок, связанных с отбрасыванием членов высокого порядка, следует выбирать модели, позволяющие использовать большой шаг интегрирования без значительного накопления ошибок.

Третий подход, примененный Уильямсом и Бенсоном [32], уже обсуждался. Указанные авторы весьма искусно построили упрощенную модель и были вознаграждены очень хорошим совпадением своих результатов с результатами Коэна и др. Однако такое явление, как либрационное движение перигелия Плутона с периодом около 4 000 000 лет, может быть обусловлено очень малыми силами; кроме того, чрезвычайно малые изменения модели могут приводить к значительным изменениям в конечных результатах. Рассмотренный подход можно назвать полуаналитическим (или получисленным).

## 8.8. Принцип Овендена

В работе Хиллса [15] были численно проинтегрированы уравнения движения для одиннадцати гипотетических компланарных планетных систем (большая центральная масса и несколько малых масс) при различных значениях масс и различных начальных условиях. Хиллс показал, что все системы в результате взаимодействия их элементов стремятся прийти в квазистойчивые состояния, причем в каждом таком состоянии хорошо прослеживается следующая тенденция: периоды соседних орбит оказываются почти-соизмеримыми (отношение периодов близко к отношению малых целых чисел). В более поздней работе, посвященной этой же теме, Овенден [25] подтвердил полученный Хиллсом результат и показал, что отношение средних движений любой пары планет чаще всего оказывалось (в процессе численного интегрирования) близким к рациональной дроби с малыми целыми членами. Следует заметить, что ни Хиллс, ни Овенден при моделировании не учитывали приливные силы, считая тела материальными точками.

Овенден пришел к выводу, что общие свойства рассматриваемой системы можно получить даже при таком грубом моделировании. Оказалось, что система лишь очень короткое время находится в состоянии, когда какие-либо планеты расположены близко друг к другу и сильно взаимодействуют между собой: большую часть времени планеты расположены друг от друга на значительных расстояниях и взаимодействуют довольно слабо. Овенден сформулировал свой принцип наименьшего взаимодействия, который гласит, что «спутниковая система из  $n$  точечных масс большую часть времени близка к такой конфигурации, в которой среднее (по времени) действие, связанное с взаимодействием тел системы, минимально». Можно показать, что это условие эквивалентно минимуму усредненной по времени функции

$$\bar{R} = - \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i),$$

где  $m_i$  и  $m_j$  — массы  $i$ -го и  $j$ -го спутников, а  $r_{ij}$  — мгновенное расстояние между ними. Этот принцип по существу был открыт еще Бассом [1] за несколько лет до Овендена, но тогда он был сформулирован как совершенно абстрактная теорема и не был применен к Солнечной системе. Овенден показал, что если этот принцип применить к случаю двух спутников, то мы получим резонансные конфигурации, подобные парам спутников Сатурна (см. разд. 8.6). Указанный принцип следует из теоремы Пуанкаре [28], которая гласит, что возмущающая функция гравитирующей резонансной системы, усредненная по критическому или резонансному

параметру, принимает значение, соответствующее локальному минимуму [13, 16].

Применяя свой принцип к системам, содержащим более двух спутников, Овенден получил некоторые интересные результаты.

1) Распределение пяти спутников Урана с точностью до 5% соответствует распределению, на котором достигается минимум действия взаимодействующих сил.

2) Средние движения V, I и II спутников Урана, а также I, II, и III спутников Юпитера связаны соотношениями Лапласа:

$$\text{Юпитер: } n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 2 \cdot 10^{-7} \approx 0;$$

$$\text{Уран: } n_3 - 3n_1 + 2n_2 = 3 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

3) Интервалы времени, в течение которых системы спутников Юпитера и Урана приходят в резонансные состояния (с точностью, соответствующей точности наблюдений), равны соответственно  $2 \cdot 10^9$  и  $6 \cdot 10^9$  лет. Эти значения хорошо согласуются с возрастом Солнечной системы, составляющим  $4,5 \cdot 10^9$  лет.

4) Состояние системы Юпитер—Сатурн—Уран—Нептун не соответствует минимуму взаимодействия.

Затем Овенден постулировал, что раньше на месте пояса астероидов была планета с массой  $M_A$ . В зависимости от величины параметра  $M_A$  он рассчитал семейство конфигураций, обладающих свойством минимума взаимодействия. Кроме того, он рассчитал семейство конфигураций для системы  $M_A$ —Юпитер—Сатурн—Уран—Нептун, взяв в качестве параметра время. В результате он нашел, что при  $M_A = 90M_{\oplus}$  и  $t = 1,6 \cdot 10^7$  лет система  $M_A$ —Юпитер—Сатурн—Уран—Нептун должна быть в состоянии, соответствующем минимуму взаимодействия. Если в указанное время планета  $M_A$  в результате какого-нибудь процесса распалась, то оставшаяся система в настоящее время находится на пути к своему минимуму взаимодействия, но еще не достигла его. Заметим, что, варьируя только два параметра, удалось с точностью 0,3% подогнать значения четырех отдельных величин. В качестве обоснования своей гипотезы Овенден указал на то, что ахондриты (каменные метеориты) имеют возраст порядка  $10^7$  лет, и поэтому можно предположить, что их происхождение имеет отношение к  $M_A$ .

Эти результаты, которые, несмотря на свою взаимную согласованность, представляются чрезвычайно спорными, были получены с использованием довольно грубой процедуры интегрирования. По предположению Овендена, в процессе эволюции система проходит через ряд квазикруговых орбит, причем механизм такой эволюции связан с вековым членом (пропорциональным  $em^3$ , где  $m$  — возмущающая масса, а  $e$  — эксцентриситет орбиты) в разложении для большой полуоси. Существование такого векового

члена само по себе является спорным; что касается вычислений Овендена, то они с точки зрения надежности оставляют желать много лучшего. Однако сам Овенден неоднократно указывал на то, что точно проинтегрировать уравнения движения для планетной системы на интервале  $10^6$  лет не представляется возможным. Очевидно, если бы такое интегрирование удалось осуществить, то оно с полным основанием могло бы либо подтвердить, либо опровергнуть гипотезу Овендена.

## 8.9. Выводы

Можно ли теперь ответить на вопросы, поставленные в разд. 8.1? Мы видели, что и геофизика, и селенофизика, и солнечная астрофизика для возраста Земли, Луны и Солнца дают значения порядка  $4,5 \cdot 10^9$  лет. В то же время ископаемые остатки сложных форм жизни на нашей планете говорят о том, что на протяжении последних  $2 \cdot 10^9$  лет орбита Земли существенно не изменялась. Что по этому поводу могут сказать специалисты по небесной механике? Теперь они уже совсем не так уверены в ответе, как когда-то, во времена категорических утверждений относительно устойчивости и правильного поведения планетных орбит.

В 1773 г. Лаплас опубликовал теорему, впоследствии уточненную Пуассоном (до второго порядка по возмущающим массам), из которой следовало, что Солнечная система устойчива в том смысле, что движение каждой планеты постоянно ограничено собственным сферическим слоем, причем слои разных планет никогда не пересекаются друг с другом. Другими словами, изменения больших полуосей являлись чисто периодическими. Затем (в 1784 г.) Лаплас, воспользовавшись уравнениями движения планет в форме Лагранжа, пришел к выводу, что наклоны и эксцентриситеты планетных орбит должны все время оставаться малыми. Свои результаты он получил, учитывая лишь первые и вторые порядки этих малых величин. Американский астроном Саймон Ньюком [23] показал, что если массы всех тел, кроме одного, малы (по сравнению с массой единственного большого тела) и орбиты малых тел имеют малые эксцентриситеты и наклоны, то такая задача  $n$  тел имеет решение в виде бесконечных многократных периодических тригонометрических рядов. При этом, однако, оставался решающий вопрос о том, сходятся или расходятся ряды Ньюкома. Если ряды сходятся, то реальные движения планет должны быть квазипериодическими; если они расходятся, то о поведении планетных орбит на больших интервалах времени ничего сказать нельзя.

В 1899 г. Пуанкаре строго доказал, что ряды Ньюкома в общем случае расходятся. Тем самым теоремы Лапласа—Пуассона—Лагранжа были сняты с повестки дня. Тем не менее эта кажущаяся неудача послужила поводом к созданию теории асимптоти-

ческих выражений, которая с успехом применяется в динамике жидкостей и газов.

В последние годы в математической работе Зигеля и Мозера [31] было показано, что некоторые классические разложения в ряды в небесной механике являются сходящимися и с их помощью можно описать решения задачи  $n$  тел, справедливые на всем интервале времени. Эта работа прояснила связь рядов Ньюкома с большинством типов планетных движений. Как отметил Басс [2]: «Для всех существенно нерезонансных начальных состояний ряды Ньюкома сходятся (неравномерно), и, таким образом, эти движения являются квазипериодическими; однако они не обладают орбитальной устойчивостью, и поэтому произвольные малые возмущения начальных условий могут вызвать беспорядочные движения. Если движения являются резонансными или почти-резонансными, то ряды могут сходиться равномерно (орбитально устойчивое квазипериодическое движение) или неравномерно (орбитально неустойчивое квазипериодическое движение), либо ряды могут расходиться (беспорядочное движение)».

В работах Хиллса и Овендена было показано, что после непродолжительного периода беспорядочного движения планетная система приходит к такому установившемуся состоянию, в котором распределение орбит очень похоже на распределение орбит в соизмеримой конфигурации типа конфигурации Боде. Затем под действием других сил, таких, как приливное трение, система слегка изменяет свою конфигурацию и приходит в действительно устойчивое состояние, в котором она может находиться весьма длительное время. Действительно, при выполнении численного интегрирования в обратном по времени направлении мы можем, отмечая какое-то время беспорядочное движение системы, получить в конце концов систему, поведение которой будет по-прежнему правильным (как будто период беспорядочного движения отсутствовал).

В Шотландии кроме обычных «виновен» и «невиновен» присяжные заседатели могут выносить еще третье решение: «преступление не доказано». Так поступают, если кто-то подозревается в совершении преступления, но суд не располагает достаточными доказательствами, чтобы осудить его. По-видимому, если бы сейчас Солнечной системе было предъявлено обвинение в долгосрочной устойчивости, то на основании показаний динамической астрономии присяжные заседатели вынесли бы вердикт «преступление не доказано».

## Литература

1. Bass R. W. Solution of the N-body Problem, part 3. Martin Marietta Corporation, 1958.
2. Bass R. W. Can Worlds Collide? *Pansée*, June 13, 1975.

3. *Brouwer D.* *Astron. J.*, **68**, 152, 1963.
4. *Brouwer D.* *The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems*, ed. G. Contopoulos. New York, Academic, 1966, p. 227.
5. *Brouwer D., Van Woerkom A. J. J.* *Astron. Pap. Am. Ephemeris*, **13**, 1950.
6. *Cohen C. J., Hubbard E. C.* *Astron. J.*, **70**, 10, 1965.
7. *Cohen C. J., Hubbard E. C., Oesterwinter C.* *Astron. J.*, **72**, 973, 1967.
8. *Cohen C. J., Hubbard E. C., Oesterwinter C.* *Astron. Pap. Am. Ephemeris*, **13**, 1972.
9. *Cohen C. J., Hubbard E. C., Oesterwinter C.* *Cel. Mech.*, **7**, 438, 1973.
10. *Colombo G., Franklin F. A.* *Recent Advances in Dynamical Astronomy*, eds. B. Tapley, V. Szebehely. Dordrecht, Reidel, 1973.
11. *Dormand J. R., Woolfson M. M.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **151**, 307, 1971.
12. *Eckert W. J., Brouwer D., Clemence G. M.* *Astron. Pap. Am. Ephemeris*, **12**, 1951.
13. *Giacaglia G. E. O., Nacozy P. E.* *Periodic Orbits, Stability and Resonances*, ed. G. E. O. Giacaglia. Dordrecht, Reidel, 1969, p. 96.
14. *Goldreich P.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **130**, 159, 1965.
15. *Hills J. G.* *Nature*, **225**, 840, 1970.
16. *Hori G.* *Astrophys. J.*, **74**, 1254, 1960.
17. *Hori G., Giacaglia G. E. O.* *Research in Celestial Mechanics and Differential Equations*. University of Sao Paulo, 1967.
18. *Hunter R. B.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **136**, 245, 267, 1967.
19. *Lecar M. (ed).* *IAU Colloquium No. 10*. Dordrecht, Reidel, 1970.
20. *Lecar M., Franklin F. A.* *IAU Symposium No. 62*, ed. T. Kozai. Dordrecht, Reidel, 1974.
21. *Marsden B. G.* *Astron. J.*, **75**, 206, 1970.
22. *Message P. J.* *IAU Symposium No. 25*. New York, Academic, 1966, p. 197.
23. *Newcomb S.* *Smithsonian Contribution to Knowledge*, **21**, 1876.
24. *Oesterwinter C., Cohen C. J.* *Naval Weapons Laboratory Technical Report TR-2693*. Virginia, USA, 1972.
25. *Ovenden M. W.* *Recent Advances in Dynamical Astronomy*, eds. B. Tapley, V. Szebehely. Dordrecht, Reidel, 1973.
26. *Ovenden M. W.* *Wistas in Astronomy*, **16**. Oxford, Pergamon, 1973.
27. *Ovenden M. W., Feagin T and Graf O.* *Cel. Mech.*, **8**, 465, 1974.
28. *Poincaré H.* *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris, Gauthier-Villars, 1895.
29. *Roy A. E., Ovenden M. W.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **114**, 232, 1954.
30. *Schubart J.* *IAU Symposium No. 25*, ed. G. Contopoulos. New York, Academic, 1966, p. 187.
31. *Siegel C. L., Moser J. K.* *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, 1971.
32. *Williams J. G., Benson G. S.* *Astron. J.*, **76**, 167, 1971.

## Рекомендуемая литература

- Message P. J.* *Astron. J.*, **63**, 443, 1958.  
*Moser J. K.* *Stable and Random Motions in Dynamical Systems, with Special Emphasis on Celestial Mechanics*. Princeton University Press, 1973.  
*Moser J. K.* *IAU Symposium No. 62*, ed. T. Kozai. Dordrecht, Reidel, 1974, p. 1.



# Теория движения Луны

## 9.1. Введение

В самой общей постановке теория движения Луны имеет дело с орбитальным движением спутника вокруг планеты; в частности, она в значительной степени посвящена случаю движения Луны вокруг Земли. Хотя мы будем рассматривать только систему Земля—Луна, многие из полученных результатов могут быть применены к какой-нибудь другой системе. Например, теория Делоне, построенная для системы Земля—Луна, может использоваться и при рассмотрении других аналогичных задач движения спутников.

Опишем сначала основные свойства системы Земля—Луна.

## 9.2. Система Земля—Луна

Луна движется по орбите, близкой к эллиптической, наклоненной под углом около пяти градусов к плоскости эклиптики. Средние значения большой полуоси  $a$ , эксцентриситета  $e$  и наклона  $i$  таковы:  $a = 384\,400$  км,  $e = 0,05490$ ,  $i = 5^\circ 09'$ .

Вследствие возмущающего воздействия Солнца все три элемента совершают периодические колебания около этих значений. В частности, эксцентриситет изменяется от 0,044 до 0,067, а наклонение колеблется между  $4^\circ 58'$  и  $5^\circ 19'$ .

Можно ввести различные периоды обращения Луны по своей орбите (месяцы): *сидерический* (*звездный*) — промежуток времени, за который Луна проходит по орбите дугу в  $360^\circ$ ; *синодический* — промежуток времени между двумя последовательными одноименными фазами Луны; *драконический* — промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями Луны через восходящий узел; *аномалистический* — промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями Луны через перигей; *тропический* — промежуток времени между двумя последовательными прохожденьями Луны через точку весеннего равноденствия. Средние значения этих периодов приведены в табл. 9.1.

Несмотря на то что при каждом отдельном обращении Луны по орбите длительность месяца может на несколько часов отличаться от его среднего значения, само среднее значение остается постоянным с точностью до секунды в течение многих столетий.

Таблица 9.1

Продолжительность месяца	сут	сут	ч	мин	с
Синодический	29,53059	29	12	44	03
Сидерический	27,32166	27	07	43	12
Аномалистический	27,55455	27	13	18	33
Драконический	27,21222	27	05	05	36
Тропический	27,32158	27	07	43	05

Оставшиеся три элемента орбиты Луны, а именно долгота восходящего узла  $\Omega$ , долгота перигея  $\tilde{\omega}$  и момент прохождения перигея  $\tau$  испытывают как периодические, так и вековые изменения, обусловленные главным образом воздействием гравитационного поля Солнца. Линия узлов регрессирует в плоскости эклиптики, совершая один оборот за 6798,3 сут (приблизительно 18,6 лет), а линия, проходящая через перигей и апогей (линия апсид), движется в прямом направлении, совершая один оборот за 3232,6 сут (8,85 лет).

Слабое воздействие на орбиту Луны оказывают также другие планеты. Кроме того, в возмущения вносят вклад фигуры Земли и Луны. В табл. 9.2, взятой из теории Брауна, приведены компоненты, из которых складывается вековое движение перигея и узла орбиты. Таблица дает наглядное представление об относительных порядках возмущающих воздействий со стороны Солнца, планет, фигур Луны и Земли и т. д.

Построение полной теории движения Луны, которая включала бы в себя влияние Земли, Солнца, планет и фигур Земли и Луны и соответствовала бы данным наблюдений, является одной

Таблица 9.2

Среднее вековое движение	перигей	узла
Основное воздействие Солнца	$\div 146\ 426,92''$	$-69\ 672,04''$
Масса Земли	$-0,68$	$\div 0,19$
Прямое воздействие планет	$\div 2,69$	$-1,42$
Косвенное воздействие планет	$-0,16$	$\div 0,05$
Фигура Земли	$\div 6,41$	$-6,00$
Фигура Луны	$\div 0,03$	$-0,14$
	$\div 146\ 435,21$	$-69\ 679,36$

из самых трудных задач астрономии. Ньютон, Эйлер, Клеро, Ганзен, Делоне, Хилл, Браун и многие другие исследователи при работе над этой проблемой использовали различные подходы. Наиболее исчерпывающим исследованием задачи Луны является теория Брауна и его таблицы движения Луны. Теория Брауна включает 1500 отдельных членов, среди которых главными являются так называемое уравнение центра, эвекция и вариация (см. ниже). Эта теория до сих пор используется при вычислении эфемерид Луны. Первые несколько членов в выражении для долготы Луны  $\lambda$  имеют вид

$$\lambda = L + (377 \sin l)' + (13 \sin 2l)' + [74 \sin (2D - l)]' + \\ + (40 \sin 2D)' - (11 \sin l')' + \dots$$

Здесь  $L$  — средняя долгота Луны,  $l$  — угловое расстояние средней Луны от среднего перигея,  $D$  — расстояние средней Луны от среднего Солнца и  $l'$  — расстояние среднего Солнца от точки перигея видимой орбиты Солнца вокруг Земли. Разложения для широты Луны и ее параллакса (угла с вершиной в центре Луны, стягиваемого экваториальным радиусом Земли) по существу аналогичны.

Члены с  $l$  и  $2l$  представляют собой обычные члены эллиптической задачи двух тел. Член с  $(2D - l)$  называется *эвекцией*. Он обусловлен изменениями эксцентриситета орбиты вследствие притяжения Солнца. Период эвекции равен 31,8 сут. Член с  $2D$ , называемый *вариацией*, обусловлен изменениями величины возмущающей силы со стороны Солнца в течение синодического месяца. Другое основное неравенство в движении Луны, *годовое уравнение* (представлено членом с  $l'$ ), имеет период один аномалистический год и обусловлено изменением расстояния Земли от Солнца в течение года.

Существуют и другие неравенства в движении Луны, обусловленные притяжением Солнца. *Параллактическое неравенство* — это вариация долготы с амплитудой, пропорциональной

$$\frac{E - M}{E + M} \left( \frac{a}{a_1} \right),$$

где  $E$  и  $M$  — соответственно масса Земли и Луны,  $a$  и  $a_1$  — средние геоцентрические расстояния Луны и Солнца. Параллактическое неравенство имеет амплитуду чуть больше  $2'$  и период один синодический месяц. Кроме того, основное неравенство в наклонении имеет амплитуду около  $9'$  и период, равный половине драконического года.

Эвекция была открыта Птолемеем и описана в «Альмагесте». Вариация, имеющая период половину синодического месяца, была впервые описана Тихо Браге, который открыл также годовое

уравнение. По-видимому, он же был первым, кто наблюдал вариацию наклона, указав, что максимум  $i$  равен  $5^\circ 18'$  в первой и третьей четвертях, а минимум равен  $4^\circ 58'$  в моменты новолуния и полнолуния. Это колебание тесно связано с регрессией узлов и, как указывалось выше, имеет период половину драконического года, а не один синодический месяц.

### 9.3. Сарос

Имеется еще одно свойство системы Земля—Луна—Солнце, известное по крайней мере уже 2500 лет. Сарос, который был знаком еще древним астрологам, — это период, составляющий приблизительно 18 лет и 10 или 11 суток (в зависимости от числа високосных лет в этом интервале). В конце сароса взаимное расположение тел в системе Земля—Луна—Солнце повторяется с такой высокой точностью, что ее вполне достаточно для предсказания солнечных и лунных затмений, если известны прошлые затмения с начала сароса. Например, в табл. 9.3 приведены значения угловых радиусов Луны и Солнца во время четырех затмений. Такие серии из четырех затмений наблюдались в 1898, 1916, 1934, 1952 и 1970 гг. В них входили следующие затмения: 1) частное затмение Луны (21 февраля 1970), 2) полное затмение Солнца (7 марта 1970), 3) частное затмение Луны (17 августа 1970), 4) кольцеобразное затмение Луны (31 августа—1 сентября 1970). Всякий раз, когда происходили эти затмения, их характеристики оставались неизменными. Если сравнить значения углового радиуса Луны (и, следовательно, ее геоцентрического расстояния) для разных саросов, то видно, насколько незначительно их изменение. То же самое спра-

Таблица 9.3

Угловые радиусы Солнца и Луны во время затмений

Год	1898	1916	1934	1952	1970
Дата	Янв. 7	Янв. 19	Янв. 30	Фев. 10—11	Фев. 21
Луна	14' 52,00"	14' 49,8"	14' 48,5"	14' 47,3"	14' 46,8"
Солнце	16' 15,87"	16' 15,3"	16' 14,1"	16' 12,4"	16' 10,3"
Дата	Янв. 21	Фев. 3	Фев. 13—14	Фев. 25	Март 7
Луна	16' 24,30"	16' 25,4"	16' 27,3"	16' 29,2"	16' 31,6"
Солнце	16' 14,83"	16' 13,5"	16' 11,6"	16' 09,4"	16' 06,8"
Дата	Июль 3	Июль 14	Июль 26	Авг. 5	Авг. 17
Луна	16' 43,32"	16' 42,9"	16' 43,1"	16' 43,2"	16' 43,9"
Солнце	15' 43,86"	15' 44,1"	15' 44,9"	15' 46,2"	15' 47,9"
Дата	Июль 18	Июль 29	Авг. 10	Авг. 20	Авг. 31— Сент. 1
Луна	14' 45,87"	14' 44,0"	14' 43,2"	14' 42,5"	14' 42,6"
Солнце	15' 44,36"	15' 45,3"	15' 46,8"	15' 48,6"	15' 50,8"

ведливо и для значений углового радиуса Солнца, хотя диапазоны, в которых могут изменяться радиусы Луны и Солнца, достаточно велики (для Солнца  $15' 45''$ — $16' 18''$ , для Луны  $14' 42''$ — $16' 44''$ ). Если из «Морского ежегодника» и «Астрономических эфемерид» [1] взять дополнительные данные о затмениях, а именно эклиптическую долготу  $\lambda$  и широту  $\beta$  Солнца и Луны, а также скорости изменения этих величин, то мы увидим, что в начале и в конце сароса они очень близки. В табл. 9.4 для сравнения приведены данные, относящиеся к частным лунным затмениям 1952 г. (10—11 февраля) и 1970 г. (21 февраля). В таблице для каждого затмения даны разности геоцентрических эклиптических координат Солнца и Луны. Индексы  $S$  и  $M$  относятся соответственно к Солнцу и Луне, точка означает суточную скорость изменения, а  $\sigma$  — радиус.

Еще один пример, на этот раз не связанный с затмениями, а произвольно взятый из эфемериды Луны, приведен в табл. 9.5. Вновь мы видим, насколько точно повторяются положения и скорости Солнца и Луны через сарос. Причина этого явления заключается в том, что значения синодического, аномалистического и драконического периодов обращения Луны являются почти соизмеримыми. Средние значения этих периодов приведены в [1]:

$$\begin{aligned} \text{Синодический } (S) &= 29,530\,589 \text{ сут,} \\ \text{Аномалистический } (L) &= 27,554\,551 \text{ сут,} \\ \text{Драконический } (D) &= 27,212\,220 \text{ сут.} \end{aligned}$$

Отсюда получаются следующие хорошо известные соотношения:

$$\begin{aligned} 223 S &= 6585,3213 \text{ сут,} \\ 239 L &= 6585,5377 \text{ сут,} \\ 242 D &= 6585,3572 \text{ сут.} \end{aligned}$$

Очевидное близкое совпадение полученных значений является причиной того, что конфигурация системы Земля—Луна—Солнце в любую эпоху почти точно повторяется в следующем саросе. Если элонгация Луны повторяется в конце сароса, то аргумент перигея и истинная аномалия также оказываются очень близкими своим прошлым значениям. Кроме того, поскольку продолжительность сароса лишь на 10 или 11 суток превышает 18 лет, то Солнце возвращается почти точно в такое положение, при котором его истинная аномалия и длина радиуса-вектора совпадают со своими первоначальными значениями. Таким образом, конфигурация системы повторяется не только по положениям, но и по скоростям.

Следует также заметить, что возмущения, действующие со стороны Солнца на систему Земля—Луна, в течение одного сароса почти полностью компенсируют сами себя. В частности, это касается значительных возмущений большой полуоси, эксцентриситета

Дата	$\lambda_S - \lambda_M$	$\beta_S - \beta_M$	$\sigma_M$	$\delta_S$
1952 фев. 11,02729	179° 54,9'	—0° 50,84'	14' 47,3"	16' 12,4"
1970 фев. 21,35467	179° 54,7'	—0° 51,69'	14' 46,8"	16' 10,3"

Дата	$\lambda_S - \lambda_M$	$\beta_S - \beta_M$	$\sigma_M$	$\sigma_S$
1952 март 18,0	104° 12,1'	5° 06,2'	15' 54,7"	16' 05,6"
1970 март 29,347	104° 21,9'	5° 05,8'	15' 52,9"	16' 02,6"

и наклона. По-видимому, наиболее ярко эта особенность проявляется, если в начале сароса наблюдается полнолуние, а Луна и Солнце находятся вблизи перигея, причем широта Луны равна нулю. Тогда векторы скорости Солнца и Луны перпендикулярны соответствующим радиусам-векторам, т. е. выполняется условие зеркальности и в силу теоремы зеркальности [3] движение системы в последующие моменты времени является зеркальным отражением ее движения в предыдущие моменты.

Примерно через 9 лет и 5 суток система вновь приходит в состояние, при котором выполняются условия зеркальности. На этот раз во время новолуния Солнце находится вблизи (6°) перигея, а Луна в апогее, причем широта Луны равна нулю. Векторы скорости Солнца и Луны почти перпендикулярны радиусам-векторам. Если бы такая конфигурация была в точности зеркальной, то орбита Луны была бы строго периодической и в конце сароса система возвращалась бы в исходную зеркальную конфигурацию. При этом влияние возмущений, действующих во время первой половины сароса, полностью компенсировалось бы возмущениями, действующими во время второй половины. Единственным результатом действия возмущения от Солнца была бы регрессия сидерического положения линии узлов орбиты Луны приблизительно на 11°. В действительности орбита Луны с учетом возмущений от Солнца очень близка к периодической с периодом в один сарос. Хорошая повторяемость геометрических конфигураций лунных и солнечных затмений свидетельствует о том, насколько близко движение системы Земля—Луна—Солнце к точному периодическому движению. Все остальные возмущения (от планет, приливные, обусловленные фигурами Земли и Луны) имеют очень малую величину.

Таблица 9.4

$\dot{\lambda}_M$	$\dot{\beta}_M$	$\dot{\sigma}_M$	$\dot{\lambda}_S$	$\dot{\beta}_S$	$\dot{\sigma}_S$
11,955'	-65,345'	3,84"	1,0114°	-0,15"	-0,18"
11,922'	-65,305'	3,49"	1,0069°	-0,28"	-0,22"

Таблица 9.5

$\dot{\lambda}_M$	$\dot{\beta}_M$	$\dot{\sigma}_M$	$\dot{\lambda}_S$	$\dot{\beta}_S$	$\dot{\sigma}_S$
13,801°	16,567'	8,01"	0,9945°	0,01"	-0,28"
13,984°	16,006'	8,52"	0,9883°	-0,14"	-0,28"

#### 9.4. Измерение большой полуоси орбиты, массы и диаметра Луны

Для определения большой полуоси орбиты Луны применялись самые разнообразные методы. При использовании тригонометрического метода для измерения сидерических положений Луны нужны две обсерватории с сильно различающимися широтами, обеспечивающие достаточно большую базу. Зная размеры Земли и координаты обсерваторий, можно вычислить большую полуось орбиты Луны по наблюдениям положения Луны с учетом времени наблюдений.

Радиолокация также позволяет найти расстояние до Луны, а по измерениям радиуса-вектора и радиальной скорости искусственного спутника Луны можно определить среднее расстояние от центра Земли до центра Луны. Наиболее современный и точный метод измерения расстояний основан на использовании лазерных лучей, отраженных от панелей уголковых отражателей, доставленных на поверхность Луны астронавтами на космическом корабле «Аполлон». Ошибка таких измерений, по-видимому, составляет меньше 0,2 м. Зная расстояние до Луны и измеряя ее угловой диаметр, можно определить линейные размеры Луны. Для линейного диаметра Луны получено значение 3476 км.

Прямой метод измерения массы Луны состоит в использовании информации о видимых месячных колебаниях направлений на внешние тела (например, Солнце, астероиды), возникающих из-за эллиптического движения центра Земли вокруг центра масс системы Земля—Луна. Для Солнца амплитуда этих колебаний доходит до 6", а для астероидов, близко подходящих к Земле,

амплитуда может быть в несколько раз больше. Полученное таким методом значение массы Луны составляет  $1/81,27$  массы Земли.

Второй метод основан на одном из возмущений движения Луны, вызванном притяжением Солнца, а именно на параллактическом неравенстве. Наблюдаемое значение этого возмущения равно (согласно Брауэру)  $124,97''$ , а теория движения Луны дает следующее выражение:

$$49853,2'' \frac{E - M}{E + M} \left( \frac{a}{a_1} \right).$$

Приравнивая их, получим значение  $M/E$  ( $a$  и  $a_1$  известны). Такой способ дает для  $M/E$  значение  $1/81,22$ . Современные измерения массы Луны являются значительно более точными и основаны на наблюдениях орбит искусственных спутников Луны. По существу при этом мы пользуемся ньютоновской формой третьего закона Кеплера.

Зная массу и диаметр Луны, можно вычислить ее среднюю плотность. Она оказалась в  $3,33$  раза больше плотности воды, что очень близко плотности основных горных пород, лежащих под тонким поверхностным слоем земной коры.

## 9.5. Вращение Луны

Вращение Луны вокруг ее центра масс описывается тремя эмпирическими законами, сформулированными Кассини в 1721 г.:

1. Луна вращается в восточном направлении вокруг оси, остающейся неподвижной в ее теле, с постоянной угловой скоростью. Период вращения равен среднему сидерическому периоду обращения Луны по орбите вокруг Земли.

2. Наклонение средней плоскости экватора Луны к плоскости эклиптики постоянно.

3. Полюса лунного экватора, эклиптики и плоскости орбиты Луны лежат на одном большом круге (в том порядке, как они здесь перечислены), т. е. линия пересечения плоскости среднего лунного экватора с эклиптической совпадает с линией узлов орбиты Луны, причем нисходящий узел экватора совпадает с восходящим узлом орбиты. На рис. 9.1 изображены селеноцентрическая небесная сфера и большие круги, получающиеся в результате пересечения с ней плоскости лунного экватора, эклиптики и плоскости орбиты Луны.

Законы Кассини выполняются с высокой степенью точности. Отклонения от них во вращении Луны представляют собой малые колебания, называемые *физической либрацией*, состоящие из свободных и вынужденных колебаний. Причинами этих малых колебаний являются форма Луны (приблизительно трехосный эллипсоид, самая длинная ось которого всегда направлена в сто-



рону Земли) и притяжение Землей лунных горбов. Поскольку Луна в своем движении по эллиптической орбите подчиняется второму закону Кеплера, а вращение Луны вокруг своей оси

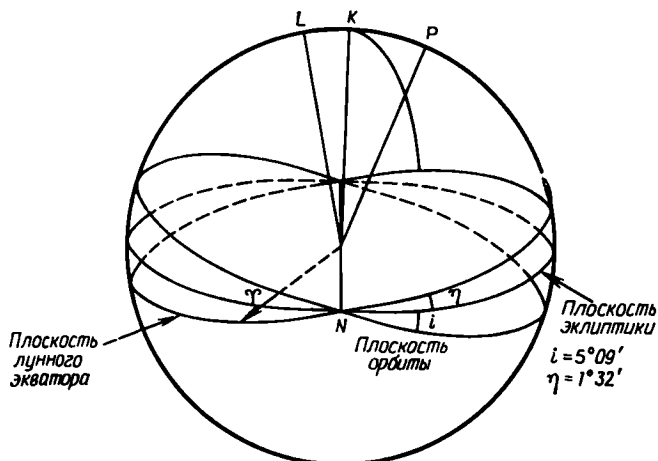


Рис. 9.1.

равномерно, то наибольшая ось лунного эллипсоида колеблется около линии, соединяющей центры Земли и Луны (рис. 9.2). Амплитуда этих колебаний (угол  $EMA$ ) составляет около  $8^\circ$ .

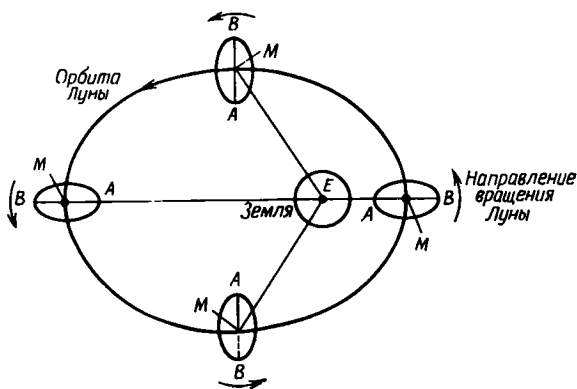


Рис. 9.2.

Таким образом, Земля стремится повернуть Луну, что вызывает вынужденные колебания. Максимальная амплитуда физической либрации равна приблизительно  $3,5'$ .

Как следствие законов Кассини и второго закона Кеплера наблюдается так называемая *геометрическая (оптическая) либра-*

ция по долготе и широте. Либрация по долготе, являющаяся следствием первого закона Кассини и второго закона Кеплера, приводит к тому, что тела на лунной поверхности смещаются по долготе на  $\pm 7,9^\circ$  относительно центра Луны. Либрация по широте — это следствие второго закона Кассини: лунные объекты смещаются по широте на  $\pm 6,7^\circ$  (также относительно центра Луны).

Наблюдается еще третья геометрическая либрация, называемая *суточной* или *параллактической либрацией*. Она возникает из-за того, что наблюдатель расположен на вращающейся Земле, имеющей конечные размеры. Это дает ему возможность наблюдать поверхность Луны на расстоянии примерно в  $1^\circ$  за кромкой видимого полушария Луны. Геометрическая либрация еще до того, как «Луна-3» сфотографировала в 1959 г. обратную сторону Луны, позволили нанести на карту Луны 59% ее поверхности.

## 9.6. Селенографические координаты

Для того чтобы учесть геометрическую и физическую либрации Луны, в астрономии была введена так называемая *селенографическая система координат*. Начало этой системы совпадает с центром Луны. Если Луна находится в среднем восходящем узле своей орбиты в момент времени, когда узел совпадает либо со средним перигеем, либо со средним апогеем, то точка пересечения линии, соединяющей центры Земли и Луны, с поверхностью Луны считается средним центром видимого диска. Эта точка, подобно гринвичскому меридиану на Земле, определяет главный лунный меридиан, от которого отсчитывается *селенографическая долгота*  $\lambda$  объекта на Луне. За положительное выбирается направление к Морю Кризисов (т. е. на запад на геоцентрической небесной сфере). *Селенографическая широта*  $\beta$  отсчитывается от лунного экватора вдоль меридиана, причем положительной считается широта в северном полушарии Луны (т. е. в том полушарии, где расположено Море Ясности).

В каждый момент времени в соответствии с фазами геометрической и физической либраций линия, соединяющая центры Земли и Луны, пересекает поверхность Луны в точке с определенной селенографической широтой и долготой. Эти значения широты и долготы, вычисленные на каждый день года, затабулированы в «Астрономических эфемеридах» и называются селенографическими широтой и долготой Земли. Они представляют собой суммы геоцентрических оптических и физических либраций. Позиционный угол указанной линии, т. е. угол, который образуют лунный меридиан и круг склонения, проведенный через центр видимого диска Луны, также затабулирован.

## 9.7. Фигура Луны

Фигура Луны аппроксимируется трехосным эллипсоидом, и поэтому существуют три момента инерции  $A$ ,  $B$  и  $C$  относительно трех неравных взаимно перпендикулярных осей. Самая длинная ось ( $Ox$ ) направлена в сторону Земли (приближенно), а самая короткая ( $Oz$ ) почти перпендикулярна плоскости орбиты ( $O$  — центр масс Луны). Таким образом, момент инерции  $A$  относительно наибольшей оси является минимальным, а момент инерции  $C$  относительно наименьшей оси — максимальным. Изучая динамику системы Земля—Луна, можно показать, что если выполняются законы Кассини, то указанное выше соотношение между моментами инерции ( $A < B < C$ ) действительно имеет место. Из законов Кассини также следует существование малых устойчивых колебаний около состояния стационарного движения.

Наилучший метод точного определения фигуры Луны состоит в изучении возмущений орбит искусственных спутников Луны, обусловленных влиянием ее гравитационного поля. Правда, такие спутники притягиваются помимо Луны еще Солнцем и Землей, так что их орбиты испытывают на себе возмущения и со стороны этих тел. Однако возмущение, обусловленное отличием гравитационного потенциала Луны от потенциала точечной массы, и возмущения, обусловленные притяжением Солнца и Земли, можно отделить друг от друга. В следующей главе мы остановимся на некоторых деталях построения теорий искусственных спутников Земли и на том, как они могут использоваться для получения значений гармонических постоянных, описывающих фигуру Земли. Здесь мы ограничимся утверждением, что для спутника Луны можно построить по существу аналогичные теории. Значения постоянных, определяющих гравитационный потенциал Луны, приведены в [2].

Моменты инерции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{C-A}{C} = 0,000629, \quad \frac{B-A}{C} = 0,000225.$$

Если  $M$  — масса Луны, а  $r_m$  — ее средний радиус, то

$$C/Mr_m^2 = 0,401.$$

Наибольшая и наименьшая оси различаются на 1,1 км, а в экваториальной плоскости разница осей составляет 0,3 км.

## 9.8. Основная проблема в теории движения Луны

Прежде чем приступить к качественному рассмотрению различных подходов к решению задачи орбитального движения Луны, поучительно вывести уравнения основной проблемы в теории движения Луны, а именно задачи о движении Луны под действием

взаимного ньютоновского притяжения Земли, Луны и Солнца, причем все три тела полагаются точечными массами. Все остальные факторы — конечные размеры Земли и Луны, приливные эффекты, притяжение планет и т. д. — можно считать малыми (табл. 9.2) и учесть их позднее.

В планетной задаче тела движутся вокруг Солнца на расстояниях, которые грубо можно считать сравнимыми, причем каждая планета оказывает возмущающее воздействие на гелиоцентрические орбиты других планет. В такой ситуации наиболее удобной является такая форма уравнений движения, когда за начало отсчета принимается центр Солнца. При этом в качестве малого параметра, по степеням которого разлагается возмущающая функция, удобнее всего использовать отношение массы возмущающей планеты к массе Солнца. Кроме того, применяются вспомогательные разложения по степеням и произведениям эксцентриситетов и наклонов.

В задаче движения Луны и Луна, и Земля находятся на почти одинаковых расстояниях от Солнца, но само это расстояние во много раз больше расстояния между Луной и Землей. Кроме того, масса возмущающего тела (Солнца) примерно в 330 000 раз больше суммарной массы Земли и Луны. В этом случае удобным малым параметром является отношение среднего расстояния Земля—Луна к среднему расстоянию Земля—Солнце, равное примерно 1/400. Система уравнений, при помощи которой будут получены некоторые результаты теории движения Луны, может быть выведена следующим образом.

В разд. 5.11.3 было показано, что, используя координаты Якоби, можно общие уравнения движения задачи трех тел выразить соотношениями (5.90) и (5.91). Если ввести силовую функцию

$$U = G \left( \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right) = U(r, \rho), \quad (9.1)$$

то уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \\ \ddot{\boldsymbol{\rho}} &= \frac{1}{g_2} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где

$$g_1 = \frac{m_1 m_2}{\mu}, \quad g_2 = \frac{m_3 \mu}{M} \quad (9.3)$$

(напомним, что  $\mu = m_1 + m_2$  и  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ).

Представим теперь функцию  $U$  в виде

$$U = G \left( \frac{m_1 m_2}{r} + F \right),$$

где

$$F = \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}. \quad (9.4)$$

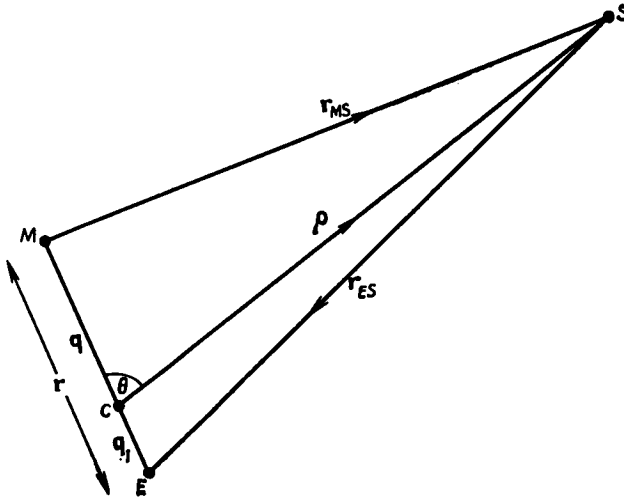


Рис. 9.3.

Вспоминая, что

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{r} \right) = 0,$$

можно уравнения (9.2) переписать в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{G(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \nabla F, \quad (9.5)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{GM}{m_3(m_1 + m_2)} \nabla_c F. \quad (9.6)$$

Пусть теперь  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  — массы Земли, Луны и Солнца соответственно. Обозначим их  $E$ ,  $M$  и  $S$  (рис. 9.3). Тогда уравнения основной проблемы теории движения Луны в координатах Якоби примут вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(E + M) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{GS(E + M)}{EM} \nabla F, \quad (9.7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{G(S + E + M)}{E + M} \nabla_c F, \quad (9.8)$$

где

$$F \equiv \frac{E}{r_{ES}} + \frac{M}{r_{MS}}. \quad (9.9)$$

Заметим, что пока в этой задаче не делалось никаких упрощающих предположений.

Посмотрим теперь, что можно сказать про орбиту Солнца, исходя из этих уравнений.

### 9.9. Орбита Солнца в основной проблеме теории движения Луны

Начнем с того, что разложим функцию

$$F = \frac{E}{r_{ES}} + \frac{M}{r_{MS}} \quad (9.10)$$

в ряд. При этом процедура разложения очень похожа на процедуру разложения знаменателя в выражении для потенциала тела произвольной формы (когда используются полиномы Лежандра). Положим угол  $MCS = \theta$ ,  $c = \cos \theta$ , векторы  $\overline{CM} = \mathbf{q}$  и  $\overline{EC} = \mathbf{q}_1$ . Тогда

$$\mathbf{q}_1 = \frac{Mr}{E+M},$$

$$\mathbf{q} = \frac{Er}{E+M}.$$

Из треугольника  $CMS$  имеем

$$r_{MS}^2 = \rho^2 + q_1^2 - 2\rho q_1 \cos \theta$$

или

$$\frac{\rho}{r_{MS}} = \left[ 1 + \left( \frac{q}{\rho} \right)^2 - 2 \left( \frac{q}{\rho} \right) \cos \theta \right]^{1/2},$$

или, другими словами,

$$\frac{\rho}{r_{MS}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i P_i(c), \quad (9.11)$$

где  $\alpha = q/\rho$ , а  $P_i(c)$  — полиномы Лежандра.

Аналогично из треугольника  $ECS$ , полагая  $\alpha_1 = q_1/\rho$  и замечая, что угол  $ECS = \pi - \theta$ , находим

$$\frac{\rho}{r_{ES}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-\alpha_1)^i P_i(c). \quad (9.12)$$

Записав уравнение (9.10) в виде

$$F = \frac{1}{\rho} \left[ E \frac{\rho}{r_{ES}} + M \frac{\rho}{r_{MS}} \right]$$

и подставив выражения (9.11) и (9.12), получим

$$F = \frac{E+M}{\rho} + \frac{ME}{E+M} \left[ \frac{r^2}{\rho^3} P_2 + \left( \frac{E-M}{E+M} \right) \frac{r^3}{\rho^4} P_3 + \right. \\ \left. + \frac{(E^2 - EM + M^2)}{E+M} \frac{r^4}{\rho^5} P_4 + \dots \right]. \quad (9.13)$$

Теперь мы можем воспользоваться этим выражением при рассмотрении орбиты Солнца. В силу уравнения (9.8) имеем

$$\ddot{\rho} = E(S + E + M) \nabla_c \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{ME}{(E+M)^2} \frac{r^2}{\rho^3} P_2 + \dots \right].$$

Отношение второго члена в скобках к первому равно

$$\frac{ME}{(E+M)^2} \frac{r^2}{\rho^2} = \left( \frac{M}{E} \right) \frac{1}{(1+M/E)^2} \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{-8}.$$

Следовательно, вторым и последующими членами в скобках с высокой степенью точности можно пренебречь. Таким образом, уравнение движения Солнца относительно центра масс системы Земля—Луна имеет вид

$$\ddot{\rho} + G(S + E + M) \frac{\rho}{\rho^3} = 0,$$

а это есть хорошо знакомое уравнение движения задачи двух тел, т. е. Солнце движется по орбите очень близкой кеплеровской эллиптической орбите. Следовательно, для координат Солнца справедливы обычные аналитические выражения, а элементы орбиты суть постоянные величины. На этом этапе задача движения Луны проще, чем планетная задача, в которой возмущающие тела сами испытывают заметные возмущения.

## 9.10. Орбита Луны

Из уравнения (9.7) следует, что для Луны возмущающая функция  $R$  имеет вид

$$R = \frac{GS(E+M)F}{EM}. \quad (9.14)$$

Если внимательно посмотреть на уравнение (9.13), то видно, что первый член в выражении для  $F$  зависит от  $\rho$ . Однако, поскольку  $\nabla \rho^{-1} = 0$ , этим членом можно пренебречь. Если мы обозначим

средние движения Солнца и Луны  $n$  и  $n_1$  соответственно и введем параметр

$$m = n_1/n, \quad (9.15)$$

то в силу третьего закона Кеплера с точностью до  $3 \cdot 10^{-6}$  получим

$$n_1^2 a_1^3 = G(S + E + M) = GS, \quad (9.16)$$

где  $a_1$  — большая полуось орбиты Солнца.

Воспользовавшись уравнениями (9.13)—(9.16), получаем возмущающую функцию

$$R = m^2 n^2 r^2 \left( \frac{a_1}{\rho} \right)^3 \left[ P_2 + \frac{E-M}{E+M} \left( \frac{r}{\rho} \right) P_3 + \right. \\ \left. + \frac{E^2 - EM + M^2}{E+M} \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 P_4 + \dots \right],$$

разложенную по степеням малой величины  $r/\rho \approx 1/400$ . Далее функцию  $R$  можно выразить через элементы и затем разложить по вспомогательным малым параметрам, зависящим от эксцентриситетов орбит Луны и Солнца, наклона орбиты Луны к эклиптике и отношения  $m$  средних движений. Прямое решение (требующее невероятно больших затрат времени при ручных вычислениях) сводится к выводу лагранжевых планетных уравнений в элементах орбиты Луны, разложению лунной возмущающей функции по степеням этих вспомогательных малых величин и затем решению уравнений методом последовательных приближений. Такой подход попытался реализовать Пуассон. После того как основная проблема теории движения Луны решена, можно перейти к учету возмущений от фигур Луны и Земли и т. д.

## 9.11. Теории Луны

Со времен Ньютона многие математики и астрономы пытались создать теорию движения Луны. Помимо естественного желания иметь аналитическую теорию, которая предсказывала бы положение Луны с точностью лучших методов наблюдений, позволила бы изучать эволюцию лунной орбиты и проверить, насколько полно объясняют движение спутника законы Ньютона, были и другие мотивы создания теории. Отсутствие точных часов (пока Харрисон не сделал в 1761 г. первый хронометр) не позволяло решить важную практическую задачу определения долготы судна в открытом море. Галилей высказал идею определения времени путем сравнения наблюдаемых положений спутников Юпитера с табличными значениями. Ньютон предпочитал использовать для этой цели Луну. Таким образом, вначале поиски, направленные на создание теории движения Луны, стимулировались военными, торговыми и исследовательскими потребностями. Однако и с исчезновением



этих стимулов поиск уже не мог прекратиться. Во все времена находилось достаточно людей, которые продолжали исследования из интереса к задаче самой по себе. К тому же по мере уточнения методов наблюдений старые теории становились недостаточно точными или в них обнаруживались ошибки и их надо было заменять (например, развитие Дамуазо теории Лапласа). В последнее время исследования в геофизике и теории приливов (в сочетании с методами лазерной локации Луны) дали возможность более точно вычислять эфемериды Луны.

Ньютон находил задачу движения Луны настолько трудной, что, как он жаловался, она вызывала у него головную боль, лишала сна и он больше не мог о ней думать. Однако ему удалось показать, что известные неравенства в орбитальном движении Луны вызваны Солнцем. Кроме того, учитывая члены второго порядка, он вычислил движение перигея, отличающееся от наблюдаемого значения всего на 8%.

Важный вклад в теории движения Луны внесли Ньютон, Эйлер, Клеро, Пуассон, Лаплас, Дамуазо, Ганзен, Делоне, Хилл, Браун и Депри. Все построенные ими теории имели две общие черты: они содержали большое число членов и требовали выбора промежуточной орбиты нулевого порядка. Необходимое число членов зависело не только от требуемой точности, но и от выбора промежуточной орбиты и метода исследования. В большинстве теорий на первом этапе использовались уравнения движения, в которые входили полярные координаты или функции орбитальных элементов. Правда, в теории Эйлера 1772 г., применялись прямоугольные координаты, причем оси  $x$  и  $y$  вращались со скоростью, равной среднему угловому движению Луны. В теории Понтекулана, опубликованной в 1846 г, использовались полярные координаты. В теории Хилла применялись вращающиеся прямоугольные координаты, но при этом ось  $x$  была постоянно направлена в точку, соответствующую положению среднего Солнца. В различных теориях в качестве промежуточной орбиты использовались неподвижный кеплеровский эллипс, вращающийся эллипс фиксированной формы, а также значительно более сложные периодические орбиты. Например, Хилл использовал периодическую орбиту, являющуюся частным решением системы двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $u$  и  $s$ , где

$$u = X + iY, \quad s = X - iY \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Здесь  $X$  и  $Y$  — геоцентрические эклиптические координаты Луны, ось  $X$  всегда направлена в среднее геоцентрическое положение Солнца. Независимая переменная  $\zeta$  определялась выражением

$$\zeta = \exp [i(n - n_1)(t - t_0)],$$

где  $n_1$  — среднее движение Солнца вокруг Земли,  $t$  — время, а  $t_0$  и  $n$  — постоянные, значения которых на этом этапе пока не определены.

Свои уравнения Хилл получил без учета эксцентриситета и параллакса для Солнца, а также широты и эксцентриситета для Луны. Решение, использованное Хиллом в качестве промежуточной орбиты, выражается рядом Фурье по  $(n - n_1) t$ . Оно представляет собой овал, симметричный относительно осей; при этом большая ось овала перпендикулярна направлению на Солнце. Эту фигуру называют вариационной кривой Хилла. Хилл и Браун аналитически исследовали отклонения истинной орбиты Луны от указанной промежуточной орбиты. Позднее Браун составил таблицы для теории движения Луны Хилла—Брауна, по которым можно вычислять эфемериду Луны. Однако в последнее время с развитием электронно-вычислительной техники для определения положений Луны стали использоваться более точные теории, в которые и сейчас продолжают вводиться дальнейшие усовершенствования.

Следует отметить следующие две характерные тенденции в развитии теории движения Луны:

1. Все теории можно разделить на три класса: аналитические, численно-аналитические и численные. Теория Делоне представляет собой пример аналитического подхода в чистом виде. Для возмущающей функции получено разложение по малому параметру до седьмого порядка. В процессе приведения этой функции к нормальному виду было сделано свыше 500 канонических преобразований, в результате чего в конце концов были получены выражения для широты, долготы и синуса параллакса Луны. Делоне на эту работу потребовалось около двадцати лет. Благодаря тому что метод является чисто аналитическим, его можно применять в любой задаче трех тел.

Численно-аналитический подход впервые реализовал Лаплас. Считая два эксцентриситета и  $\sin(i/2)$  неопределенными параметрами ( $i$  — наклонение), он вместо величины  $m = n_1/n$  использовал ее численное значение. Теория Хилла—Брауна также относится к классу численно-аналитических теорий.

Дж. Эри предложил численный метод уточнения теории Делоне. Его метод сулил большие выгоды, однако в работе самого Эри, опубликованной в 1886 г., была допущена ошибка. Недавно Эккерт применил метод Эри к основной задаче движения Луны в теории Брауна.

Переход от аналитических теорий к численным был обусловлен тем, что, применяя численный метод, можно значительно быстрее и с меньшими усилиями достигнуть требуемой точности. Создание быстродействующих ЭВМ с большим объемом памяти изменило такую точку зрения. Герджет и Мазен еще в 1959 г. показали, что

ЭВМ можно запрограммировать на выполнение аналитических выкладок, с которыми так часто имеют дело в небесной механике. На пути такого использования ЭВМ приходится преодолевать большие трудности. На написание, отладку и проверку программы для конкретной задачи может потребоваться несколько лет, но зато по окончании этих операций машина выдает все необходимые аналитические выражения. Типичным примером может служить выполненное Делоне разложение возмущающей функции для Луны. Для получения аналитического разложения возмущающей функции до значительно более высокого порядка с помощью ЭВМ потребовались не годы, а часы. Возможность выполнения аналитических выкладок на машине открыла новую эру в изучении орбитального движения.

Аналитические эфемериды Луны, полученные Депри, оказались значительно точнее, чем в теории Брауна (в части, касающейся основной проблемы в теории движения Луны). В табл. 9.6 (взятой из работы Депри) сравнивается число тригонометрических аргументов в выражениях для эклиптической долготы, широты и синуса параллакса, учитываемых в теории Брауна, в эфемеридах Луны, уточненных Эккертом (ILE), и в полученных на машине аналитических эфемеридах Луны (ALE).

Таблица 9.6

	Долгота	Широта	Синус параллакса
Теория Брауна	552	487	304
ILE	703	623	577
ALE	2427	2355	2013

2. Другая тенденция состоит в значительном повышении точности наблюдений и изменении относительной важности измеряемых величин. До появления радиолокатора в теории движения Луны использовались главным образом эклиптические долгота и широта Луны, а расстояние (или связанное с ним значение синуса параллакса) применялось уже в третью очередь. Такой порядок, или приоритет, был продиктован тем, что астрономы располагали только оптическими измерениями положений Луны на небесной сфере. Радиолокация, позволяющая непосредственно получить расстояние, повысила значение синуса параллакса. Установка на Луне лазерных угловых отражателей окончательно закрепила первую роль в лунной теории за рядами для синуса параллакса. Кроме того, поскольку точность лазерных измерений расстояния Земля—Луна составляет 25 см, то и ряды в теории Луны должны обеспечивать такую же точность. Ряды для двух других

координат должны быть уточнены аналогичным образом, так как все три координаты зависят друг от друга. Таким требованиям в состоянии удовлетворить только полученная на ЭВМ аналитическая лунная теория типа теории Депри.

## 9.12. Вековое ускорение Луны

До сих пор предполагалось, что среднее расстояние до Луны испытывает только периодические вариации. Следовательно, в силу третьего закона Кеплера точно так же должно себя вести и среднее движение Луны. Поэтому выражение для средней долготы Луны  $l$  должно иметь вид

$$l = l_0 + n_0 t + P,$$

где  $l_0$  и  $n_0$  — постоянные, а  $P$  обозначает величину периодической вариации в момент  $t$ . На самом деле, изучив данные о древних затмениях, описанных в птолемеевском «Альмагесте», и множестве затмений, наблюдавшихся арабскими астрономами в IX в. н. э., Галлей в 1693 г. показал, что выражение для  $l$  должно иметь вид

$$l = l_0 + n_0 t + \sigma \left( \frac{t}{100} \right)^2 + P.$$

Здесь  $t$  измеряется в юлианских годах, а  $\sigma$  — коэффициент векового ускорения, равный приблизительно  $11''$ .

Объяснение этому ускорению дал Лаплас, который показал, что возмущения со стороны планет приводят к изменению эксцентриситета орбиты Земли. Изменение это периодическое с основным периодом порядка 24 000 лет. На существенно более коротких интервалах времени это периодическое изменение можно трактовать как вековое. Вследствие того что в лагранжево планетное уравнение для  $\epsilon$  в теории Луны входит эксцентриситет орбиты Земли, оказалось, что  $\epsilon$  ведет себя следующим образом:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2.$$

Здесь  $\epsilon$  — средняя долгота в эпоху. Средняя долгота Луны  $l$  вычисляется по формуле

$$l = \int n dt + \epsilon,$$

откуда видно, что в нее входит член  $\epsilon_2 t^2$ , как раз и говорящий о наличии ускорения.

В результате дальнейшего усовершенствования теории Адамс в 1880 г. показал, что величина  $\sigma$  меньше  $6''$  (т. е. немного больше половины наблюдаемого значения в  $11''$ ). Сейчас считается, что это расхождение обусловлено приливным трением. Земля, вращающаяся со скоростью один оборот за звездные сутки, увлекает за собой приливные горбы, образовавшиеся под воздействием притяжения Луны. Луна же, наоборот, задерживает их, поскольку она

обращается вокруг Земли со значительно большим периодом (сидерический месяц, равный 27,22 сут). Это приводит к тому, что в результате приливного трения (главным образом на морских мелководьях) Земля теряет свой момент количества движения, так что период вращения Земли возрастает. Увеличение момента количества движения Луны приводит к тому, что она все больше удаляется от Земли, в результате чего продолжительность месяца увеличивается. Вычисления показывают, что Луна движется по своей орбите с таким ускорением, которое как раз соответствует наблюдаемому расхождению. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока Луна не уйдет по спирали на расстояние, при котором продолжительность периода вращения Земли (сутки) будет равна периоду обращения Луны (месяцу); последний будет составлять приблизительно 40 наших современных средних солнечных суток. Только тогда прекратится действие приливного трения Луны. Однако еще останется приливное трение, обусловленное притяжением Солнца. Оно будет уменьшать момент количества движения системы Земля—Луна, поскольку сила солнечного приливного торможения замедляет вращение системы. В результате Луна снова будет приближаться к Земле, двигаясь по медленно скручивающейся спирали. Не лишено интереса то обстоятельство, что на больших (в астрономических масштабах) интервалах времени этот эффект, пренебрежимо малый по сравнению с непосредственно наблюдаемыми значительными возмущениями, должен быть основным фактором, определяющим эволюцию лунной орбиты.

## Литература

1. *Astronomical Ephemeris*, 1970.
2. *Michael W. H., Jr., Blackshear W. T., Gopczynski L. P.* Dynamics of Satellites, ed. Bruno Morando. Springer-Verlag, 1970.

## Рекомендуемая литература

- Brouwer D., Clemence G. M.* Methods of Celestial Mechanics. New York and London, Academic, 1961. [Имеется перевод: *Брауэр Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. — М.: ИЛ, 1964.]
- Brown E. W.* An Introductory Treatise on the Lunar Theory London, Cambridge University Press, 1896.
- Brown E. W.* Tables of the Motion of the Moon. New Haven, Yale University Press, 1919.
- Dunby J. M.A.* Fundamentals of Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1962.
- Deprit A.* ELDO/ESRO Scientific and Technical Review, 3, No. 1, 77, 1971.
- Herget P., Musen P.* Astron. J., 64, 11, 1959.
- Moulton F. R.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1914.
- Plummer H. C.* An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1918; New York, Dover Publications, 1960.
- Smart W. M.* Celestial Mechanics. London, New York, Toronto, Longmans, 1953. [Имеется перевод: *Смарт У. М.* Небесная механика. — М.: Мир, 1965.]

# Искусственные спутники

## 10.1. Введение

В данной главе мы обратимся к динамике искусственных спутников. В основном мы уделим внимание искусственным спутникам Земли, но многие особенности их теории могут быть применены в неизменном виде и к исследованию искусственных спутников других планет. Чтобы выявить и сравнить между собой величины различных сил, действующих на искусственный спутник Земли, необходимо знать физические характеристики Земли и окружающего ее пространства. В нижеследующем изложении мы начнем с общего обзора Земли как планеты, затем кратко опишем ее внутреннее строение, атмосферу и магнитное поле. После этого мы перейдем к орбите спутника, движущегося под влиянием действующих на него сил.

## 10.2. Земля как планета

Орбиту Земли, лежащую между орбитами Венеры и Марса, можно с высокой степенью приближения представить как эллипс с малым эксцентриситетом. Элементы этой орбиты претерпевают изменения, природа которых описана в гл. 6; эти изменения могут быть измерены по отношению к некоторым фиксированным в пространстве плоскости отсчета и направлению, например по отношению к эклиптике и точке весеннего равноденствия для выбранной эпохи. Указанные изменения вызываются притяжением планет; кроме того, на земную орбиту воздействует и Луна вследствие ее близости. Мы уже видели, что именно центр масс системы Земля—Луна обращается по возмущенному эллипсу вокруг Солнца, в то время как Земля и Луна обращаются вокруг этого центра. Поскольку масса Луны составляет лишь  $1/81$  массы Земли, а геоцентрическое расстояние Луны равно примерно 60 радиусам Земли, центр масс системы лежит на расстоянии около 1600 км под земной поверхностью.

Для астрономов оказалось удобным принять величины, связанные с земной орбитой и Солнцем, за единицы массы, времени и расстояния. Выбирая в качестве соответствующих единиц массу Солнца, средние солнечные сутки и среднее расстояние Земли от

Солнца, запишем точное выражение третьего закона Кеплера для планеты с массой  $m_2$ , обращающейся вокруг Солнца с массой  $m_1$ :

$$k^2 (m_1 + m_2) T^2 = 4\pi^2 a^3,$$

в таком виде:

$$k^2 (1 + m_2) T^2 = 4\pi^2 a^3,$$

где  $k^2$  заменяет постоянную тяготения  $G$ , а  $m_2$ ,  $a$  и  $T$  выражены в единицах, определенных выше. Величина  $k$  называется *гауссовой постоянной тяготения*. Если (как было сделано Гауссом) выбранная нами планета — это Земля,  $T$  имеет значение 365,2563835 средних солнечных суток (продолжительность сидерического года, принятая Гауссом), а  $m_2$  положить равным  $1/354710$  массы Солнца, то  $k$  будет иметь значение 0,01720209895 (разумеется, значение  $a$  принимается равным единице).

Со времен Гаусса указанные величины время от времени изменялись более точно; однако, чтобы избежать перевычисления каждый раз, астрономы приняли предложение Ньюкома и сохранили первоначальное значение  $k$  как абсолютно точное. Это означает, что Земля теперь рассматривается таким же образом, как любая другая планета. За единицу времени теперь принимаются эфемеридные сутки. Среднее расстояние Земли от Солнца тогда составляет 1,00000003 астрономических единиц, а масса системы Земля—Луна равна  $1/329\,390$  массы Солнца.

Теперь можно заметить, что определение астрономической единицы дается третьим законом Кеплера:

$$k^2 (1 + m) T^2 = 4\pi^2 a^3.$$

Масса Солнца выбрана равной единице,  $k = 0,01720209895$ , за единицу времени взяты эфемеридные сутки. Таким образом, астрономическая единица — это радиус круговой орбиты, на которой тело пренебрежимо малой массы при полном отсутствии возмущений будет обращаться вокруг Солнца за один гауссов год, состоящий из  $2\pi/k$  эфемеридных суток.

Нередко требования к точности выполняемых исследований таковы, что оказывается достаточным использование в качестве единиц года и астрономической единицы, так что  $GM = 4\pi^2$ , где  $M$  — масса Солнца, а  $G$  — постоянная тяготения, поскольку для любой планеты и любого космического аппарата справедливо соотношение

$$GMT^2 = 4\pi^2 a^3.$$

Отсюда для тела на гелиоцентрической орбите с периодом  $T_1$  лет и большой полуосью  $a_1$  (измеренной в а. е.) мы имеем

$$T_1 = a_1^{3/2}.$$

Здесь необходимо отметить, что для движения спутника вокруг Земли удобно выбрать в качестве единиц времени, массы и расстояния эфемеридную минуту, массу и радиус Земли соответственно. Если  $m_E$  — масса Земли, а  $G$  — постоянная тяготения, то можно ввести постоянную  $k_E^2$ , положив

$$k_E^2 = Gm_E. \quad (10.1)$$

Эта величина может быть определена с достаточной точностью.

Как и раньше, значение  $k_E$  можно принять в качестве абсолютно точного и на его основе определять единицу расстояния, а именно радиус экваториальной круговой орбиты, на которой частица пренебрежимо малой массы (при полном отсутствии возмущений) будет обращаться вокруг Земли за период в  $2\pi/k$  эфемеридных минут. При  $k_E = 0,07436574$  мы имеем  $2\pi/k_E = 84,49032$ , так что единица расстояния равна 6378,270 км. Использование  $k_E^2$ , определяемого выражением (10.1), позволяет обойти трудность, связанную с малой точностью известных нам значений  $G$  и  $m_E$ .

Любое расстояние в пределах Солнечной системы можно выразить в астрономических единицах с высокой степенью точности, поскольку при этом требуется выполнить измерение лишь углов и времени. Однако для получения значения астрономической единицы в километрах или, другими словами, для получения масштаба Солнечной системы, приходится использовать другие методы. Величина, именуемая *солнечным параллаксом* и определяемая как угол, под которым виден экваториальный радиус Земли с расстояния в 1 а. е., связывает астрономическую единицу и размер Земли. Его значение составляет примерно  $8,80''$ .

Было разработано много прямых и косвенных методов для измерения этой важной величины. Некоторые методы, например прохождение Венеры по диску Солнца, представляют только исторический интерес и не обеспечивают высокой точности. До недавнего времени наиболее приемлемыми оказывались способы, при которых использовались наблюдения малой планеты Эрос, который иногда проходит на расстоянии 23 млн. км от Земли. В одном из подобных методов при помощи триангуляции, осуществленной под руководством Спенсер-Джонса, было определено геоцентрическое расстояние Эроса, что позволило вычислить солнечный параллакс. Во втором методе, примененном Рабе, использовалась динамическая особенность задачи: учитывались возмущения орбиты Эроса, производимые планетами.

Основной новейших методов является применение радиолокации. Расстояние между Венерой и Землей теперь можно измерить с очень высокой точностью путем послышки импульсов радиоволн на Венеру и определения времени прихода отраженных сигналов. Измеренный промежуток времени (время прохождения сигнала от Земли до Венеры и обратно) и известная скорость распространения



электромагнитных волн дают нам искомое расстояние. Для вывода расстояния между центрами Земли и Венеры необходимо ввести различные поправки. Из полученных значений можно вычислить солнечный параллакс  $P$ ; он равен  $8,794''$ .

### 10.2.1. Форма Земли

Грубо говоря, Земля имеет форму сплюснутого сфероида. Следствием отклонения Земли от точной сферы является лунно-солнечная прецессия (разд. 3.4), вызванная притяжением Солнцем и Луной экваториального вздутия вращающейся Земли. Общую картину этого воздействия можно получить, рассмотрев следующую несложную схему.

Мы видели в гл. 6, что если две планеты взаимно возмущают орбиты друг друга, то плоскости их орбит приобретают обратные движения. Теперь, если Луну и близкий спутник, обращающийся по круговой орбите в экваториальной плоскости Земли, заменить планетами (сферическая Земля играет роль Солнца), то взаимные возмущения двух спутников приведут к обратным движениям плоскостей их орбит, поскольку плоскость орбиты Луны и экваториальная плоскость Земли не компланарны. Присоединим теперь мысленно этот спутник к вращающейся сферической Земле; если вообразить себе много таких присоединенных «спутников» Земли, распределенных вокруг экватора для имитации экваториального вздутия, то легко видеть, что возмущающее воздействие Луны на Землю приведет к обратному движению (регрессии) экваториальной плоскости Земли. Солнце в роли спутника Земли создает добавочный эффект, складывающийся с лунным. Период прецессии составляет примерно 26 000 лет.

Хотя Клеро и другие ученые разработали достаточно детальную теорию фигуры Земли еще в XVIII в., большая часть данных о нашей планете была получена только в текущем столетии, особенно после запуска искусственных спутников Земли. Фигура Земли может быть определена из геодезических измерений, постоянной прецессии и движений Луны и искусственных спутников.

Геодезическая триангуляция дает возможность определить форму и размеры Земли путем измерения расстояний между точками земной поверхности с известными широтами и долготами. Основа метода состоит в очень точном измерении расстояния между двумя точками, выбираемого в качестве базиса. После этого при помощи теодолита с каждого конца базиса наблюдается третья точка; зная два угла и длину базиса, можно вычислить положение третьей точки. После этого теодолит используется для аналогичных наблюдений четвертой точки с одной из двух исходных точек и третьей точки, которые определяют концы нового базиса. Таким путем получается сеть точек триангуляции. Поскольку ошибки

наблюдений, вообще говоря, накапливаются, используется не один, а несколько точно измеренных базисов и в различных точках сети триангуляции (называемых точками Лапласа) выполняются астрономические наблюдения для нахождения их широт и долгот. Выполненные в США геодезические измерения позволяют установить сеть, внутренняя точность которой, по-видимому, составляет  $1/200\ 000$ . Подобные же измерения проведены в Европе и Африке.

Триангуляционные измерения должны быть отнесены к выбранному сфероиду относимости (референц-эллипсоиду). Международный эллипсоид 1924 г. представляет собой одну из удобных математических моделей поверхности Земли. Существует также эллипсоид Хейфорда 1909 г. с полярным радиусом  $6\ 356\ 912$  м и экваториальным радиусом  $6\ 378\ 388$  м, имеющий сжатие точно  $1/297,0$ . Имеются и другие модели, например эллипсоид Кларка 1880 г.; различия между ними достигают  $200$  м. В последние годы на орбиту были выведены спутники, специально разработанные для целей геодезии. Наблюдения, фиксирующие направление на спутник и расстояние до него, выполненные на большом числе станций в Европе и США, дали возможность увязать между собой геодезические сети Северной Америки и Европы.

Здесь следует упомянуть о понятии *геоида*. Это эквипотенциальная поверхность, которая совпадает со средним уровнем моря на океанах и повсюду перпендикулярна к отвесной линии, так что сила тяжести всегда перпендикулярна к поверхности геоида. Геоид ближе к эллипсоиду, чем сама Земля. Собственное притяжение различных земных масс приводит к некоторой нерегулярности геоида, хотя отклонения поверхностей эллипсоида и геоида друг от друга нигде не превышают  $100$  м.

### 10.2.2. Формула Клеро

Теперь рассмотрим в общем виде соображения, приводящие к выводу, что фигура Земли приближенно описывается сплюснутым сфероидом. С этой целью мы выведем формулу Клеро для силы тяжести.

Пусть  $U$  — потенциал земного поля тяготения, а  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли относительно полярной оси. Если выбранная нами поверхность является эквипотенциальной и находится в равновесии, то величина  $U'$ , определяемая как

$$U' = U + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi,$$

будет постоянной на этой поверхности ( $r$  и  $\phi$  — соответственно радиус-вектор и угол, который радиус-вектор образует с экваториальной плоскостью).

Отсюда видно (см. разд. 6.5), что потенциал тяготения можно записать в виде

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G(C-A)}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) + \\ + (\text{члены более высокого порядка}).$$

Пренебрегая членами более высокого порядка, имеем

$$U' = \frac{GM}{r} - \frac{G(C-A)}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi. \quad (10.2)$$

Величину  $\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi$  можно рассматривать как возмущающий потенциал, вызванный вращением Земли. Если теперь положить

$$r = R (1 - \eta), \quad (10.3)$$

где  $\eta$  — малая величина, а  $R$  — экваториальный радиус Земли, тогда путем подстановки в (10.2) мы получаем

$$\frac{GM}{R(1-\eta)} - \frac{G(C-A)}{2R^3(1-\eta)^3} (3 \sin^2 \phi - 1) + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 (1 - \eta)^2 \cos^2 \phi = \text{const.}$$

Подставляя  $(1 - \sin^2 \phi)$  вместо  $\cos^2 \phi$ , разлагая по формуле бинома и пренебрегая степенями  $\eta$  выше первой, получаем уравнение

$$\frac{GM}{R} (1 + \eta) - \frac{G(C-A)}{2R^3} (1 + 3\eta) (3 \sin^2 \phi - 1) + \\ + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 (1 - 2\eta) (1 - \sin^2 \phi) = \text{const.}$$

Если пренебречь произведениями малых величин  $\eta$  и  $G(C-A)/R^3$ , то

$$\eta = \left[ \frac{3(C-A)}{2MR^2} + \frac{\omega^2 R^3}{2GM} \right] \sin^2 \phi. \quad (10.4)$$

Представляя  $m$  как  $(\omega^2 R^3/GM)$ , мы видим, что  $m$  — это отношение центробежной силы на экваторе к силе тяготения на экваторе. Тогда

$$\eta = \left[ \frac{3(C-A)}{2MR^2} + \frac{1}{2} m \right] \sin^2 \phi. \quad (10.5)$$

Теперь уравнение сплюснутого сфероида записывается как

$$r^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)}{\sin^2 \phi + (1 - e^2) \cos^2 \phi}, \quad (10.6)$$

где  $a$  и  $e$  — полуось и эксцентриситет эллиптического сечения, проходящего через полярную ось. Сжатие (сплюснутость)  $\epsilon$  определяется как

$$\epsilon = \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2}$$

или

$$(1 - \epsilon)^2 = 1 - e^2.$$

Поэтому соотношение (10.6) можно записать в виде

$$r^2 = \frac{a^2 (1 - \epsilon)^2}{\sin^2 \phi + (1 - \epsilon)^2 \cos^2 \phi}.$$

Разлагая это выражение с помощью формулы бинома и ограничиваясь членами порядка  $\epsilon^2$ , мы получаем

$$r = a \left[ 1 - \left( \epsilon + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \sin^2 \phi + \frac{3}{2} \epsilon^2 \sin^4 \phi \right]$$

или

$$r = a \left( 1 - \epsilon \sin^2 \phi - \frac{3}{8} \epsilon^2 \sin^2 2\phi \right). \quad (10.7)$$

Сравнивая выражения (10.3), (10.5) и (10.7), мы видим, что с точностью до членов первого порядка по  $\epsilon$  равновесная поверхность представляет собой сплюснутый сфероид, определяемый уравнением

$$r = R (1 - \epsilon \sin^2 \phi), \quad (10.8)$$

где

$$\epsilon = \frac{3(C-A)}{2MR^2} + \frac{1}{2} m. \quad (10.9)$$

Если  $\epsilon$  может быть измерено, а  $m$  оказывается известным, то можно найти разность между полярным и экваториальным моментами инерции. Сплюснутость  $\epsilon$  выводится из измерений силы тяжести, а также из движения искусственных спутников.

Если теперь найти  $-\partial U'/\partial r$ , то мы получим ускорение, определяемое тяготением. С той же точностью по порядку малых величин, с которой мы работали до сих пор,

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3G(C-A)}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r (1 - \sin^2 \phi). \quad (10.10)$$

Используя (10.8) и исключая  $(C-A)$ , находим после небольших сокращений

$$g = \frac{GM}{R^2} \left( 1 + \epsilon - \frac{3}{2} m \right) + \left( \frac{5}{2} R \omega^2 - \frac{\epsilon GM}{R^2} \right) \sin^2 \phi$$

или

$$g = g_0 \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} m - \epsilon \right) \sin^2 \phi \right], \quad (10.11)$$

где  $g_0$  (значение силы тяжести на экваторе) определяется как

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \left( 1 + \epsilon - \frac{3}{2} m \right).$$

Формула (10.11) представляет собой уравнение Клеро; она показывает, что в первом приближении значение силы тяжести увеличивается пропорционально квадрату синуса широты. Следует заметить, что мы не делали никаких предположений относительно внутреннего строения Земли.

Наблюдения предвращения равноденствий дают информацию о значении величины  $(C - A)/C$ , называемой *динамическим сжатием* Земли. Используя уравнение (10.9), оказывается возможным вывести значение  $C/MR^2$ .

Эри, Калландро и другие ученые развили теорию Клеро с точностью до членов второго порядка. Тогда формула для  $g$  принимает вид

$$g = g_0 (1 + 0,0052884 \sin^2 \phi'' - 0,0000059 \sin^2 2\phi''),$$

где  $g_0 = 978,049$  см/с<sup>2</sup>, а  $\phi''$  — геодезическая или географическая широта. При этом не учитывается, что  $g_0$  — значение силы тяжести на экваторе, не исправленное за эффект вращения. Если же учесть эту поправку, то значение  $g_0$  становится равным 981,43 см/с<sup>2</sup>.

Разность между географической широтой  $\phi''$  и геодезической широтой  $\phi'$  определяется формулой

$$\phi'' - \phi' = 695,66'' \sin 2\phi'' - 1,17'' \sin 4\phi''.$$

Вводя в формулу (10.7) географическую широту, нетрудно показать, что эта формула принимает вид

$$r = R \left( 1 - \epsilon \sin^2 \phi'' + \frac{5}{8} \epsilon^2 \sin^2 2\phi'' \right).$$

Используя параметры Международного эллипсоида, получаем

$$r = 6\,378\,388 (1 - 0,0033670 \sin^2 \phi'' + 0,0000071 \sin^2 2\phi'') \text{ [м]}.$$

Наконец, мы можем видоизменить III закон Кеплера для спутника на круговой орбите, обращающегося вокруг сплюснутой планеты в плоскости экватора. Гравитационное ускорение спутника получается из (10.10), если исключить член с  $\omega^2$  и положить  $\phi = 0$ ; тогда

$$g = \frac{GM}{r^2} + \frac{3G(C - A)}{2r^4},$$

где  $r$  — планетоцентрическое расстояние спутника. С учетом (10.9) имеем

$$g = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \epsilon - \frac{m}{2} \right) \right].$$

После этого вместо простого соотношения для двух точечных масс  $m_1$  и  $m_2$ , а именно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}},$$

заменяя  $G(m_1 + m_2)$  на

$$GM \left[ 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\epsilon - \frac{m}{2}\right) \right],$$

получим

$$T = 2\pi \left\{ \frac{r^3}{GM} \left[ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\epsilon - \frac{m}{2}\right) \right] \right\}^{1/2},$$

если пренебречь массой спутника и вспомнить, что

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\epsilon - \frac{m}{2}\right) \ll 1.$$

### 10.2.3. Внутреннее строение Земли

Сведения о внутреннем строении Земли получают косвенным путем из анализа движения спутников, исследования упругих волн при землетрясениях, а также физических и химических свойств вещества при высоких давлениях и температурах. Измеренное значение отношения  $\epsilon/m$ , равное  $\sim 0,98$ , показывает, что имеет место возрастание плотности по направлению к центру Земли. Преломление, отражение и дифракция сейсмических волн свидетельствуют о существовании ядра с диаметром, превышающим 6400 км. Плотность вещества ядра в 10—12 раз превышает плотность воды. Выше ядра находится оболочка (мантия) со средней плотностью примерно в 4 раза больше плотности воды, возможно состоящая из тяжелых основных пород. Над мантией располагается тонкий слой из более легких пород толщиной менее 80 км.

Нет никаких сомнений, что ядро является жидким, хотя, согласно Буллену, возможно существование меньшего по размерам внутреннего твердого ядра. Каковы центральная температура и состав глубоких недр Земли, мы пока знаем весьма неуверенно. Было выдвинуто много гипотез, в том числе и давно высказанное предположение, что ядро почти целиком состоит из расплавленного железа. Рамзей показал, что эта точка зрения встречается с серьезными трудностями.

### 10.2.4. Магнитное поле Земли

В первом приближении магнитное поле Земли описывается как поле простого диполя, помещенного внутри Земли вблизи ее центра под углом  $\sim 11,4^\circ$  к оси вращения: прямая, соединяющая два геомагнитных полюса, проходит мимо центра на расстоянии

в несколько сот километров от него. Напряженность вертикального поля на магнитном полюсе составляет 0,63 Гс, на экваторе 0,31 Гс.

При более точном рассмотрении обнаруживается, что поле Земли отклоняется от простого дипольного в различных местах, что вызвано присутствием магнитных масс в земной коре. Кроме того, наблюдаются короткопериодные флуктуации поля, вызванные солнечной активностью. В выбранной точке на земной поверхности магнитное поле медленно изменяется; это изменение называется *вековой вариацией*. Много ценных сведений о протяженности и силе магнитного поля на расстояниях во много радиусов Земли от поверхности было собрано в последние годы при помощи искусственных спутников.

Источник земного магнитного поля почти несомненно находится в земном ядре; возможно, он представляет собой самовозбуждающееся динамо, связанное с движениями в проводящей жидкости земного ядра. Подходящим механизмом для приведения в движение этого динамо оказывается тепловая конвекция.

#### 10.2.5. Атмосфера Земли

Международный союз геодезии и геофизики на своей конференции 1951 г. в Брюсселе рекомендовал для классификации структуры земной атмосферы номенклатуру, представленную на рис. 10.1.

Основой для выделения тропосферы, стратосферы, мезосферы, термосферы и экзосферы являются тепловые характеристики; названия слоев, разделяющих эти области получают путем замены основы «сфера» на слово «пауза». При классификации по химическому составу выделяются такие основные области, как гомосфера и гетеросфера. Кроме того, структура атмосферы может подразделяться по многим другим признакам, например по степени ионизации.

В последние несколько лет применение ракет, спутников и других средств изучения атмосферы привело к необычайному росту наших знаний о ее составе и протяженности. Параметры атмосферы к настоящему времени очень хорошо известны до высоты ~30 км; выше этой области существует газовая оболочка с малой плотностью, достигающая высоты 700 км и постепенно переходящая в межпланетную среду.

Вплоть до высоты 70 км химический состав атмосферы остается неизменным. Основные составляющие атмосферы по объему — это молекулярный азот (78%) и молекулярный кислород (21%); оставшийся 1% в основном занимают аргон, водяной пар, углекислый газ. Кроме того, в очень малых количествах присутствуют другие постоянные составляющие, например неон. Близ уровня ~25 км в атмосфере появляется озон  $O_3$ , возникающий в резуль-

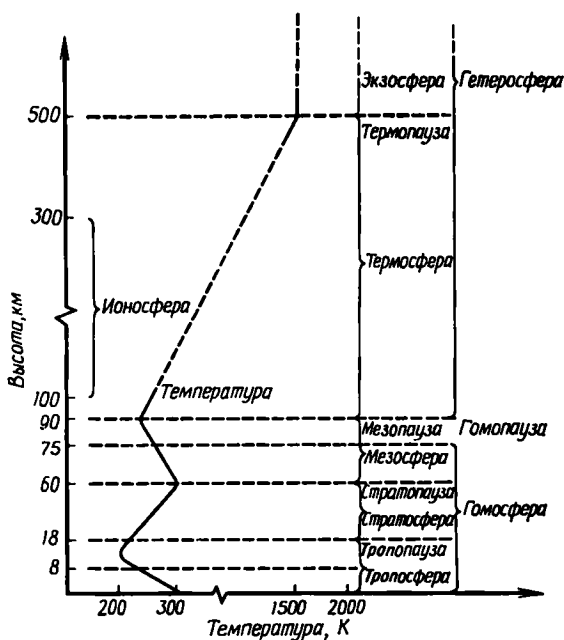


Рис. 10.1.

тате диссоциации молекулярного кислорода ультрафиолетовым излучением с последующим объединением атомов кислорода с кислородными молекулами.

На уровне гомопаузы (см. рис. 10.1) состав атмосферы начинает изменяться; в гетеросфере действуют процессы диффузии, перемешивания и фотодиссоциации, изменяющие состав этой области атмосферы.

В ионосфере присутствуют ионы и электроны, возникающие под действием коротковолнового излучения Солнца и космических лучей. Эта область подразделяется на несколько слоев, обозначаемых буквами D, E, F<sub>1</sub> и F<sub>2</sub> в порядке возрастания высоты. Ионосфера — постоянно изменяющаяся область; количество заряженных частиц в ней зависит от числа солнечных пятен, времени года, широты и перехода от дневных к ночным условиям.

Для представления связи между давлением, плотностью и температурой во всей толще атмосферы были разработаны теоретические модели, которые затем сравнивались с данными, полученными при вертикальных полетах ракет и наблюдений сопротивления атмосферы при движении искусственных спутников. В подобных моделях используется уравнение гидростатического равновесия

$$dp = -g\rho dh,$$



где  $g$  — ускорение силы тяжести на высоте  $h$ ,  $\rho$  — плотность на той же высоте,  $p$  — давление. Это уравнение определяет изменение давления при возрастании высоты от  $h$  до  $h + dh$ . Используя уравнение состояния идеального газа, получаем

$$p = \rho RT/\mu,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — средний молекулярный вес,  $p$  — давление. По мере накопления новых данных

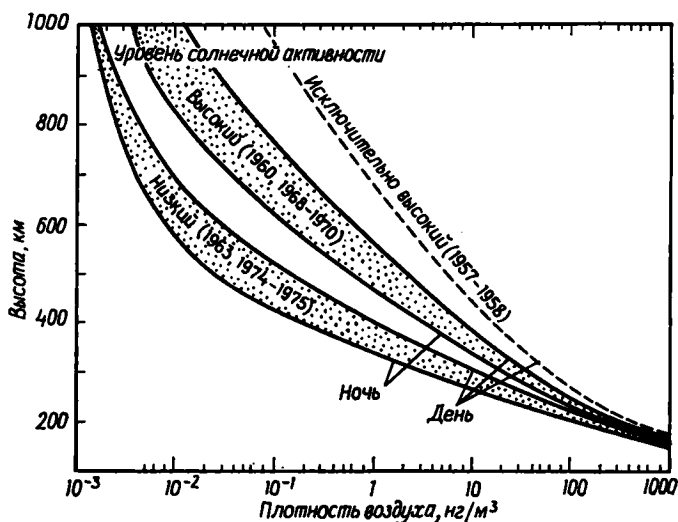


Рис. 10.2.

производится пересмотр таких моделей атмосферы, как модель ARDC (Службы исследований и развития ВВС США) 1956 г.

На основе изучения вариаций спутниковых орбит, вызванных сопротивлением атмосферы, Кинг-Хили [7] построил диаграмму, воспроизведенную на рис. 10.2.

Значения, приведенные на этой диаграмме, не остаются неизменными со временем, однако они указывают порядок величины плотности на различных высотах. Было также обнаружено, что существуют сезонные, суточные и широтные вариации плотности атмосферы. Основной причиной изменений плотности атмосферы на данных высоте и широте является солнечная активность.

С точки зрения аэродинамики любой спутник Земли на орбите, расположенной ниже 160 км, испытывает столь значительное сопротивление в атмосфере, что разрушается за несколько оборо-

тов, в то время как для спутника на орбите выше 500 км это сопротивление настолько мало, что промежуток времени от его запуска до падения на Землю измеряется годами.

### 10.2.6. Солнечно-земные связи

Корреляция таких земных событий, как появление ярких полярных сияний и магнитные бури, с солнечной активностью указывает на тесную связь между интенсивностью электромагнитного и корпускулярного излучения Солнца и изменениями плотности земной атмосферы, магнитного поля и электрической активности в атмосфере. Радиационные пояса, окружающие Землю за пределами атмосферы, также обязаны своим существованием солнечной активности и магнитному полю Земли.

Помимо флуктуаций плотности атмосферы, вызванных солнечным излучением, в земную атмосферу вторгаются потоки заряженных частиц (особенно во время солнечных вспышек), вызывающие сильные магнитные бури, резкие изменения плотности атмосферы и всплески полярных сияний. Такие потоки приводят также к увеличению количества заряженных частиц в радиационных поясах. Частицы (протоны и электроны) захватываются магнитным полем Земли и движутся по спиральям вдоль магнитных силовых линий. Витки спирали становятся все более тесными по мере приближения к Земле, и в конце концов частица меняет направление своего движения на обратное. Происходит также дрейф частиц по долготе, так что пучок частиц, инжектированный в какой-либо точке верхней части атмосферы, быстро растекается в кольцо вокруг Земли. Радиационные пояса и процесс захвата схематично показаны на рис. 10.3 и 10.4.

Существуют два радиационных пояса с максимальной концентрацией частиц: один на высоте  $\sim 4000$  км от земной поверхности, другой на высоте  $\sim 16\,000$  км. Эти области максимальной концентрации на рис. 10.3 заштрихованы. Орбиты частиц квазиустойчивы; нерегулярности земного поля и столкновения с молекулами воздуха постоянно уменьшают число частиц в поясах; однако вспышки и выбросы частиц Солнцем обеспечивают непрерывное пополнение поясов. Происходящие в поясах процессы сложны и до конца не поняты даже к настоящему времени. За пределами этих поясов, на расстоянии  $\sim 56\,000$  км, Землю окружает кольцевой поток электронов.

Наконец, магнитное поле Земли постоянно взаимодействует с солнечным ветром (потоком протонов и электронов, непрерывно испускаемых Солнцем), который сжимает поле на стороне планеты, обращенной к Солнцу, и вытягивает его в направлении от Земли на противоположной стороне. Область каплевидной формы, окружающая Землю, в которой земное магнитное поле играет доминирующую роль, называется *магнитосферой*.

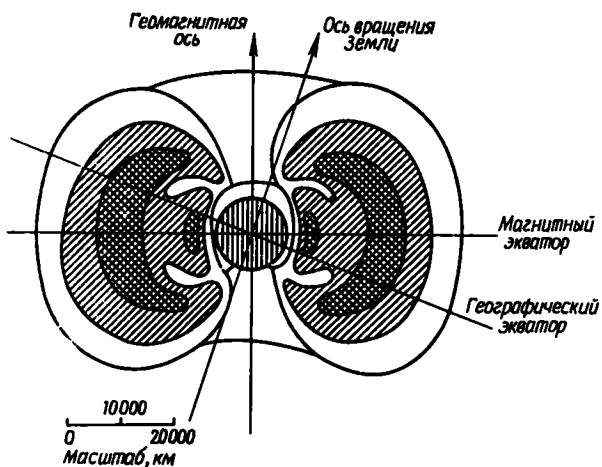


Рис. 10.3.

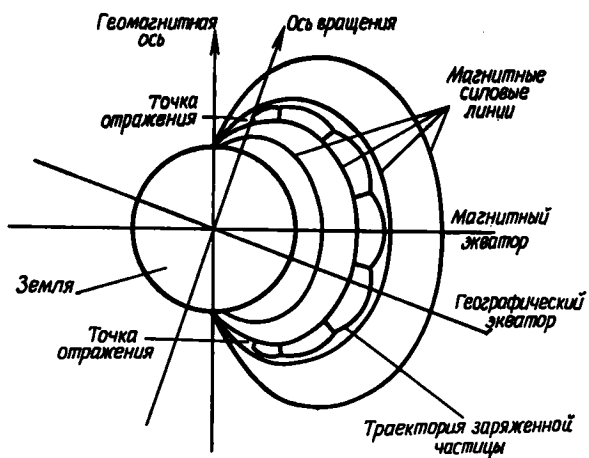


Рис. 10.4.

### 10.3. Силы, действующие на искусственные спутники Земли

Перечислим теперь силы, действующие на искусственный спутник, обращающийся вокруг Земли, и сравним их между собой. В общем случае факторы, воздействующие на орбиту спутника, будут таковы:

- 1) поле тяготения Земли;
- 2) притяжение Солнца, Луны и других планет;
- 3) атмосфера Земли;
- 4) магнитное поле Земли;
- 5) солнечное излучение;
- 6) заряженные и нейтральные частицы.

Рассмотрим эти факторы более подробно.

1. Главной силой, определяющей орбиту спутника Земли, является земное поле тяготения. Как было показано, потенциал этого поля выражается формулой

$$U = \frac{GM}{r} - \frac{G(C-A)}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) + \\ + (\text{члены более высокого порядка}).$$

Отсюда видно, что в первом приближении орбита спутника определяется формулами задачи двух тел, причем оба тела представляют собой материальные точки. Члены второго и более высоких порядков возмущают эту орбиту.

2. Для спутника на орбите с высотой меньше 1600 км эффекты, вызываемые Луной и Солнцем, очень малы, хотя ими нельзя пренебрегать, если из наблюдений спутников требуется получить данные о гармониках высокого порядка потенциала Земли. В числе других исследователей Козаи [8] вывел выражение для возмущающей функции  $R$ , описывающей эффекты притяжения Солнца и Луны, и получил методом вариации параметров изменения кеплеровских элементов орбиты спутника. Выяснилось, что большая полуось не подвержена вековым изменениям. Планеты не оказывают заметного воздействия на спутник Земли.

3. Земная атмосфера вызывает торможение спутника. Эта сила сопротивления среды вызывается непрерывными столкновениями спутника с молекулами, атомами и ионами воздуха. Величина сопротивления зависит от многочисленных факторов, меняющихся со временем, таких, как высота, долгота и (если спутник не сферический) ориентация спутника. Сопротивление атмосферы разумно рассматривать как возмущающую силу на высотах больше 150 км. Отметим, что возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы, отличаются по своим проявлениям от тех возмущений, которые определяются гармониками земного поля тяготения.

4. Если в конструкцию спутника входят металлические части, то земное магнитное поле возбуждает в них вихревые токи и на спутник действует слабая тормозящая сила. Впрочем, возникающие при этом изменения орбиты весьма незначительны.

5. Солнечное излучение может оказать заметное воздействие на орбиту спутника, если средняя плотность спутника мала (скажем, в случае спутника-баллона). В частности, у орбиты спутника «Эхо-1» было зафиксировано колебание высоты перигея около значения 500 км; период колебаний (порядка 10 месяцев) оказался равным синодическому периоду точки перигея, иными словами, промежуток времени, необходимому для совершения одного оборота по отношению к Солнцу. Однако эти изменения даже для спутников-баллонов могут быть проанализированы при помощи метода возмущений.

6. Незаряженные частицы (скажем, нейтральные атомы или метеорная пыль), с которыми сталкивается спутник, должны оказывать на него тормозящий эффект, сходный с воздействием атмосферы, однако величина этого эффекта пренебрежимо мала. Сопротивление, вызываемое заряженными частицами солнечного происхождения, или содержащимися в атмосфере, трудно рассчитать точно, поскольку для этого необходимо знать электростатический потенциал поверхности спутника, а также характеристики заряженного вещества, окружающего спутник. Однако оценки этого сопротивления по порядку величины показывают, что им безусловно можно пренебречь.

Итак, мы видим, что почти для всех спутников основные возмущения кеплеровской орбиты задачи двух тел вызываются сплюснутостью Земли и сопротивлением атмосферы. В оставшейся части главы будет рассмотрена эта основная проблема движения искусственного спутника, включая краткий очерк использования теории Гамильтона—Якоби, примененной к этой задаче Штерном, Гарфинкелем и другими исследователями.

#### 10.4. Орбита спутника вокруг сплюснутой планеты

В этом разделе мы рассмотрим орбиту спутника, определяемую тяготением Земли, пренебрегая эффектом сопротивления атмосферы. В последние годы эта задача была рассмотрена многими авторами, в том числе Козан [9], Мерсоном [11], Брауэром [1], Штерном [14], Гарфинкелем [2, 3] и Кинг-Хили [4].

В нашем изложении мы будем следовать Козан [9]. На рис. 10.5 положение  $S$  спутника на орбите в момент  $t$  характеризуется координатами  $r, \delta, \lambda$ ; начало координат (с невращающимися осями) совмещено с центром масс Земли; ось  $OX$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $OY$  смещена вдоль экватора на  $90^\circ$  от  $OX$  в направлении возрастания прямых восхождений, ось  $OZ$  направлена вдоль оси вращения Земли.

Обозначим теперь проекцию спутника  $S$  на небесную сферу через  $S'$  и проведем дугу большого круга  $ZS'Q$ ; после этого получаем

$$\begin{aligned} r &= OS = (\text{радиус-вектор } S), \\ \delta &= \angle QOS = (\text{склонение } S), \\ \lambda &= \angle XOQ = (\text{прямое восхождение } S). \end{aligned}$$

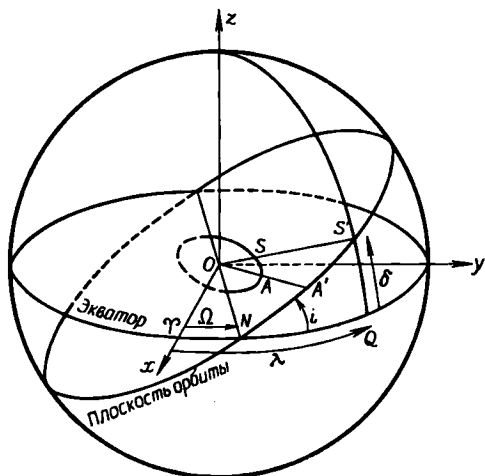


Рис. 10.5.

Оскулирующая орбита определяется шестью элементами  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$ . Здесь  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклонение плоскости орбиты к экватору,  $\Omega$  — прямое восхождение восходящего узла орбиты,  $\omega$  — аргумент перигея (дуга  $NA'$ ),  $M$  — средняя аномалия. Радиус-вектор  $r$  и склонение  $\delta$  связаны с элементами орбиты и истинной аномалией  $f$  следующими выражениями:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \quad (10.12)$$

$$\sin \delta = \sin i \sin (f + \omega).$$

Тогда уравнение движения спутника запишется как

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U,$$

где  $U$  — потенциал Земли. Для тела, обладающего осевой симметрией, потенциал для внешней точки можно выразить следующим образом (см. разд. 6.5):

$$U = \frac{Gm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right];$$

здесь  $r$  — расстояние точки от центра масс тела,  $J_n$  — постоянные,  $R$  — экваториальный радиус тела,  $m$  — масса тела,  $\phi$  — угол между экватором тела и радиусом-вектором точки,  $P_n(\sin \phi)$  — полиномы Лежандра по  $\sin \phi$  порядка  $n$ . С учетом того, что  $\delta \equiv \phi$ , заменяя  $Gm$  на  $\mu$ , имеем

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \right].$$

При использовании этого выражения для потенциала тяготения Земли мы предполагаем, что полностью отсутствуют эффекты, связанные с эллиптичностью экватора, хотя мы примем во внимание эффекты, вызванные асимметрией между северным и южным полушариями Земли. Теперь возмущающий потенциал  $F$  запишется в виде

$$F = U - U_0 = U - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \delta).$$

Для Земли  $J_2$  порядка  $10^{-3}$ , в то время как  $J_3, J_4$  и т. д. порядка  $10^{-6}$  или меньше. Поскольку  $J_4, J_5$  и т. д. не вносят ничего принципиально нового по сравнению с эффектами, вызываемыми  $J_2$  и  $J_3$ , мы ограничимся исследованием второй и третьей гармоник. С учетом сказанного имеем

$$F = -\frac{\mu}{r} \left[ J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \right) + J_3 \left( \frac{R}{r} \right)^3 \left( \frac{5}{2} \sin^3 \delta - \frac{3}{2} \right) \sin \delta \right].$$

Здесь использованы выражения для полиномов Лежандра:

$$P_2(\sin \delta) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \delta - 1),$$

$$P_3(\sin \delta) = \frac{1}{2} (5 \sin^3 \delta - 3 \sin \delta).$$

Используя второе из соотношений (10.12), мы получаем  $F$  в виде

$$F = \mu \left\{ \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(f + \omega) \right] - \frac{J_3 R^3}{a^4} \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left[ \left( \frac{15}{8} \sin^2 i - \frac{3}{2} \right) \sin(f + \omega) - \frac{5}{8} \sin^2 i \sin 3(f + \omega) \right] \sin i \right\}.$$

Истинную аномалию  $f$  легко преобразовать к средней аномалии  $M$ , которая представляет собой линейную функцию времени в невозмущенном движении, при помощи соотношения

$$\frac{df}{dM} = \frac{a^2}{r^2} (1 - e^2)^{1/2}.$$

Величины  $r/a$  и  $f$  в возмущающей функции  $F$  являются функциями только  $e$  и  $M$  и периодичны по  $M$ . Входящие в  $F$  члены, не зависящие ни от  $M$ , ни от  $\omega$ , являются вековыми; члены, зависящие от  $\omega$ , но не зависящие от  $M$ , оказываются долгопериодическими; члены, зависящие от  $M$ , — короткопериодическими.

Итак, долгопериодические возмущения возникают от членов второго порядка в  $F$ , так что в вековых и долгопериодических членах должны сохраняться члены второго порядка. С другой стороны, для короткопериодических членов необходимо принимать во внимание только члены первого порядка.

Для выделения таких членов следует принять во внимание, что короткопериодические возмущения появляются вследствие изменений  $M$  за время оборота по орбите, в то время как долгопериодические возмущения возникают в результате вековых изменений  $\omega$ . Учитывая это обстоятельство, мы возьмем среднее значение возмущающей функции  $F$  по  $M$ , чтобы получить долгопериодические возмущения; для того же, чтобы вывести вековые возмущения, мы аналогичным путем образуем среднее по  $M$  для тех частей возмущающей функции, которые не зависят ни от  $M$ , ни от  $\omega$ .

Для выполнения указанных операций эти величины интегрируются в пределах от 0 до  $2\pi$ ; для произвольного члена  $Q$  указанная операция дает

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q a M.$$

Согласно Тиссерану [16], необходимые соотношения получаются в таком виде:

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = (1 - e^2)^{-3/2},$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2f} = \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2f} = 0,$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos f} = e (1 - e^2)^{-5/2},$$

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin f} = \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \cos 3f} = \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 3f} = 0.$$



Интересующие нас части возмущающей функции  $F$  таковы:

$$\begin{aligned}
 F_1 &:= \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin i \right) (1 - e^2)^{-3/2}, \\
 F_2 &:= 0, \\
 F_3 &:= \frac{3}{2} \frac{\mu J_3 R^3}{a^4} \sin i \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) e (1 - e^2)^{-5/2} \sin \omega, \\
 F_4 &:= \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^3 (1 - e^2)^{-3/2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(f + \omega) \right\}, \quad (10.13)
 \end{aligned}$$

Здесь  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  представляют соответственно вековую первого порядка, вековую второго порядка, долгопериодическую и короткопериодическую части возмущающей функции.

#### 10.4.1. Короткопериодические возмущения первого порядка

Дифференциальные уравнения используемых элементов таковы:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{dF}{dM}, \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial \Omega}, \quad (10.14) \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial F}{\partial i} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial e}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1 - e^2}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a}.
 \end{aligned}$$

Величина  $n$  определяется уравнением

$$n^2 a^3 = \mu. \quad (10.15)$$

Система уравнений (10.14) представляет собой вариант лагранжевых уравнений для планет (6.29), где средняя аномалия  $M$  заменяет переменную  $\chi$  при помощи соотношения

$$M = n(t - \tau) = nt + \chi.$$

Для вывода короткопериодических возмущений первого порядка возмущающая функция в (10.14) заменяется на  $F_4$ . С точностью до указанного порядка величины  $a$ ,  $n$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$  в правых

частях полученных уравнений могут быть приняты постоянными, исключая последнее уравнение, где  $n$  появляется в первом члене без множителя; в этом случае  $n$  должно считаться переменным даже при рассмотрении с точностью до первого порядка.

В качестве независимой переменной вместо  $t$  вводится  $f$  при помощи соотношения

$$dt = \frac{dt}{dM} dM = \frac{1}{n} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} df.$$

Выбирая в качестве примера наклонение  $i$ , получаем

$$\Delta i_p = \frac{\cos i}{n^2 a^2 (1-e^2) \sin i} \int \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{\partial F_4}{\partial \omega} df,$$

причем индекс  $p$  обозначает короткопериодическое возмущение.

При подстановке выражения для  $F_4$  обнаруживается, что подынтегральное выражение представляется в виде конечных тригонометрических рядов, которые можно проинтегрировать. В результате получают следующие формулы для шести элементов:

$$\begin{aligned} \Delta a_p &= \frac{J_2 R^2}{a} \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^3 - (1-e^2)^{-3/2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(f+\omega) \right\}, \\ \Delta e_p &= \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2 (1-e^2)}{a^2 e} \left\{ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^3 - (1-e^2)^{-3/2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \sin^2 i \cos 2(f+\omega) \right\} - \\ &= \frac{3}{4} \frac{J_2 R^2 \sin^2 i}{a p e} \left[ \cos 2(f+\omega) + e \cos(f+2\omega) + \frac{1}{3} e \cos(3f+2\omega) \right], \\ \Delta i_p &= \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{p^2} \sin 2i \left[ \cos 2(f+\omega) + e \cos(f+2\omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{3} \cos(3f+2\omega) \right], \\ \Delta \Omega_p &= -\frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \cos i \left[ f - M + e \sin f - \frac{1}{2} \sin 2(f+\omega) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{2} \sin(f+2\omega) - \frac{e}{6} \sin(3f+2\omega) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_p = & \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{\rho^2} \left\{ \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) (f - M + e \sin f) + \right. \\
& \div \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin f + \frac{1}{2} \sin 2f + \frac{e}{12} \sin 3f \right] - \\
& - \frac{1}{e} \left[ \frac{1}{4} \sin^2 i + \left( \frac{1}{2} - \frac{15}{16} \sin^2 i \right) e^2 \right] \sin (f + 2\omega) + \\
& + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin (f - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \sin 2(f + \omega) + \\
& + \frac{1}{e} \left[ \frac{7}{12} \sin^2 i - \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{19}{8} \sin^2 i \right) e^2 \right] \sin (3f + 2\omega) + \\
& \left. + \frac{3}{8} \sin^2 i \sin (4f + 2\omega) + \frac{e}{16} \sin^2 i \sin (5f + 2\omega) \right\}, \\
e\Delta M_p = & \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{\rho^2} \sqrt{1 - e^2} \left\{ - \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \times \right. \\
& \times \left[ \left( 1 - \frac{e^2}{4} \right) \sin f + \frac{e}{2} \sin 2f + \frac{e^2}{12} \sin 3f \right] + \\
& + \sin^2 i \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{5}{4} e^2 \right) \sin (f + 2\omega) - \frac{e^2}{16} \sin (f - 2\omega) - \right. \\
& - \frac{7}{12} \left( 1 - \frac{e^2}{28} \right) \sin (3f + 2\omega) - \frac{3}{8} e \sin (4f + 2\omega) - \\
& \left. \left. - \frac{e^3}{16} \sin (5f + 2\omega) \right] \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\rho = a(1 - e^2).$$

Теперь среднее значение  $\cos jf$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) по  $M$  уже не обращается в нуль. В самом деле,

$$\overline{\cos jf} = \left( -\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^j (1 + j\sqrt{1 - e^2}). \quad (10.16)$$

Средние значения рассмотренных выше возмущений не равны нулю, за исключением возмущения  $a$ . Можно показать, что фактически средние значения по  $M$  выражаются следующим образом:

$$\overline{\Delta a_p} = 0,$$

$$\overline{\Delta e_p} = \frac{1}{4} \frac{J_2 R^2}{\rho^2} \sin^2 i \left( \frac{1 - e^2}{e} \right) \overline{\cos 2f} \cos 2\omega,$$

$$\overline{\Delta i_p} = -\frac{1}{8} \frac{J_2 R^2}{p^2} \sin 2i \overline{\cos 2f} \cos 2\omega,$$

$$\overline{\Delta \Omega_p} = -\frac{1}{4} \frac{J_2 R^2}{p^2} \cos i \overline{\cos 2f} \sin 2\omega,$$

$$\overline{\Delta \omega_p} = \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \left[ \sin^2 i \left( \frac{1}{8} + \frac{1-e^2}{6e^2} \overline{\cos 2f} \right) + \frac{1}{6} \cos^2 i \overline{\cos 2f} \right] \sin 2\omega,$$

$$\overline{\Delta M_p} = -\frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \sqrt{1-e^2} \sin^2 i \left( \frac{1}{8} + \frac{1+e^2/2}{6e^2} \overline{\cos 2f} \right) \sin 2\omega.$$

Здесь  $\overline{\cos 2f}$  определяется соотношением (10.16) при  $j = 2$ . Короткопериодические возмущения, средние значения которых по средней аномалии равны нулю, находятся как  $\Delta e_p - \overline{\Delta e_p}$ ,  $\Delta \omega_p - \overline{\Delta \omega_p}$  и т. д.

#### 10.4.2. Вековые возмущения первого порядка

Эти возмущения получаются путем подстановки  $F = F_1$  в (10.14); в результате имеем

$$\bar{a} = a_0,$$

$$\bar{e} = e_0,$$

$$\bar{i} = i_0,$$

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \bar{n} \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) t, \quad (10.17)$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \bar{n} (\cos i) t,$$

$$\bar{M} = M_0 + \bar{n} t,$$

$$\bar{n} = n_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{1/2} \right].$$

Здесь величины с индексом 0 представляют собой средние значения в эпоху, иными словами, начальные значения, из которых выделяются периодические возмущения. В частности,  $n_0$  — это невозмущенное среднее движение, связанное с невозмущенной большой осью посредством соотношения

$$n_0^2 a_0^3 = \mu.$$

На практике удобно принять в качестве среднего значения большой полуоси не  $a_0$ , а

$$\bar{a} = a_0 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{\rho^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{1/2} \right],$$

причем

$$\bar{n}^2 \bar{a}^3 = \mu \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{\rho^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{1/2} \right].$$

Подводя итоги на этом этапе, мы видим, что, в то время как все элементы орбиты подвержены периодическим возмущениям,  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $M$  изменяются также и вековым образом. В частности, при принятой нами точности плоскость орбиты прецессирует вплоть до  $i = 90^\circ$  (условие полярной орбиты), когда  $\Delta\Omega_p = 0$ .

Перигей движется в прямом направлении в плоскости орбиты, если  $i < 63^\circ 26'$ , или в обратном (также в плоскости орбиты), если  $i > 63^\circ 26'$ . Это критическое наклонение определяется приравнением нулю члена  $[1 - (5/4) \sin^2 i]$ . Однако при умеренном наклонении орбита близкого спутника Земли будет иметь вековое движение по  $\Omega$  и  $\omega$  порядка  $4^\circ$  в сутки.

Видно также, что возмущения  $M$  будут приводить к изменениям фактического периода, которые можно учесть усреднением за много обращений, позволяющим исключить действие короткопериодических возмущений, а также выбором возмущенного значения  $n$  (именно  $\bar{n}$ ), приведенного выше.

#### 10.4.3. Долгопериодические возмущения, обусловленные третьей гармоникой

Третья гармоника  $J_3$  дает вклад в  $F_3$  [уравнение (10.13)] и потому порождает различные периодические возмущения. Для Земли величина  $J_3$  порядка  $10^{-3} J_2$ , так что амплитуды короткопериодических возмущений оказываются весьма незначительными. С другой стороны, амплитуды долгопериодических возмущений, которые зависят от вековых возмущений в  $\omega$ , могут оказаться гораздо значительнее. Для иллюстрации подобных долгопериодических возмущений рассмотрим вариацию наклонения, обусловленную третьей гармоникой. Собирая соответствующие уравнения, имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 (1 - e^2)^{1/2} \sin i} \left( \frac{\partial F_3}{\partial \omega} \right), \quad (10.18)$$

$$F_3 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_3 R^3}{a^4} \sin i \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) e (1 - e^2)^{-5/2} \sin \omega, \quad (10.19)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3J_2 R^2 n}{\rho^2} \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right). \quad (10.20)$$

Поскольку нас интересует вековая часть вариации  $\omega$ , соотношение (10.20) получено из четвертого уравнения (10.17). Последующая подстановка выражения для  $F_3$  (10.19) в (10.18), дифференцирование по  $\omega$  и использование соотношения

$$n^2 a^3 = \mu$$

дает

$$\frac{di}{dt} = \frac{3}{2} \frac{n J_3 R^3}{a^3} \frac{e}{(1-e^2)^3} \cos i \left( 1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) \cos \omega.$$

Поскольку

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{d\omega} \frac{d\omega}{dt},$$

то

$$\frac{di}{d\omega} = \frac{di/dt}{d\omega/dt} = \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \left( \frac{R}{a} \right) \frac{e}{1-e^2} \cos i \cos \omega.$$

После интегрирования мы получаем долгопериодическое возмущение по  $i$  (обозначенное как  $\Delta_3 i$ ), обусловленное третьей гармоникой:

$$\Delta_3 i = \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \left( \frac{R}{a} \right) \frac{e}{1-e^2} \cos i \sin \omega.$$

Долгопериодическое возмущение эксцентриситета, вызванное  $J_3$ , в форме

$$\Delta_3 e = -\frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \left( \frac{R}{a} \right) \sin i \sin \omega$$

было использовано Козаи [10] для вывода значения  $J_3$ , поскольку эта гармоника не приводит к появлению векового члена, который можно было бы использовать для указанной цели.

#### 10.4.4. Вековые возмущения второго порядка и долгопериодические возмущения

Вывод этих возмущений элементов в основном аналогичен процессу, описанному в разд. 6.7.2 для решения лагранжевых планетных уравнений, в которых функции элементов в правых частях разложены в ряды Тейлора.

Следовательно, если  $\sigma_j$  — один из шести элементов орбиты, для которого уравнение в вариациях имеет вид  $(d\sigma_j/dt) = \phi_j$ , то можно записать

$$\frac{d\sigma_j}{dt} = (\phi_j)_0 + \sum_j \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial \sigma_j} \right)_0 \Delta \sigma_j + \dots,$$

где скобки и индекс 0 означают, что после дифференцирования используются средние значения элементов в эпоху (которые принимаются за постоянные) [9].

При исследовании получившихся выражений обнаруживается, что в знаменатель для некоторых возмущений входит множитель  $(4 - 5 \sin^2 i)$ . Это означает, что теория неприменима вблизи критического наклона  $63^\circ 26'$ . Как показано различными авторами, можно использовать другие варианты теории, обеспечивающие ее применимость вблизи критического наклона.

### 10.5. Использование теории Гамильтона—Якоби в задаче движения искусственного спутника

В разд. 6.9 было рассмотрено применение теории Гамильтона—Якоби к задаче многих тел. Было показано, что в первом приближении функция Гамильтона  $H_0$  берется с потенциалом  $\mu/r$ , так что невозмущенное решение, получаемое из известного решения  $S$  уравнения Гамильтона—Якоби, приводит к обыкновенному кеплеровскому эллипсу. Возмущенный гамильтониан  $H_1$  дает новые канонические уравнения, определяющие изменения со временем прежних канонических постоянных, полученных в первом приближении.

Тот же самый невозмущенный гамильтониан  $H_0$  можно использовать при решении задачи о движении искусственного спутника, когда возмущенный гамильтониан  $H_1$  определяется второй, третьей и т. д. гармониками, исключенными из невозмущенного решения. Однако Штерн [14] и Гарфинкель [2, 3] показали, что можно использовать и невозмущенный гамильтониан  $H_0$ , включающий основную часть эффектов сплюснутости и приводящий к уравнению Гамильтона—Якоби с разделяющимися переменными, которое можно разрешить.

Штерн и Гарфинкель применяли различные функции  $H_0$ , однако в обоих случаях возмущенный гамильтониан  $H_1$  состоял из оставшейся части второй гармоники и гармоник более высокого порядка и не содержал вековых возмущений первого порядка. Из-за отсутствия места мы сможем дать лишь краткий очерк подхода, использованного Штерном.

Штерн выбрал в качестве функции Гамильтона, для которой можно получить точное решение, следующее выражение:

$$H = -\frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \delta} + \frac{p_\delta^2}{r^2} \right) + U_1(r) + \frac{1}{r^2} U_2(\delta). \quad (10.21)$$

Здесь  $r$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  определяются, как показано на рис. 10.4;  $p_r$ ,  $p_\delta$ ,  $p_\lambda$  — сопряженные с  $r$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  моменты;  $U_1$  и  $U_2$  — произвольные функции радиуса-вектора и склонения соответственно.

Можно без труда показать, что уравнение Гамильтона—Якоби с функцией (10.21) имеет разделяющиеся переменные и его решение таково:

$$S = \int_{r_0}^r \frac{L}{r} dr + \int_0^\delta M d\delta + \alpha_3 \lambda - \alpha_1 t, \quad (10.22)$$

где

$$L = [2r^2\alpha_1 - 2r^2U_1(r) - \alpha_2^2]^{1/2},$$

$$M = [\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \delta - 2U_2(\delta)]^{1/2},$$

а  $r_0$  — перигейное расстояние.

Канонические постоянные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  (на единицу массы рассматриваемой частицы) имеют соответственно смысл полной энергии, полного момента количества движения по орбите при  $U_2 = 0$  и компоненты момента количества движения, направленной вдоль оси.

Тогда каноническое решение приобретает вид (см. разд. 6.9)

$$\begin{aligned} t + \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int_{r_0}^r \frac{r}{L} dr, \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \int_0^\delta \frac{\alpha_2}{M} d\delta - \int_{r_0}^r \frac{\alpha_2}{rL} dr, \\ \beta_3 &= \lambda + \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \lambda - \int_0^\delta \frac{\alpha_3}{M} \sec^2 \delta d\delta, \end{aligned} \quad (10.23)$$

$$p_r = \dot{r} = L/r,$$

$$p_\delta = r^2 \dot{\delta} = M,$$

$$p_\lambda = r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \delta = \alpha_3,$$

здесь  $r_0$  — расстояние перигея, а канонические постоянные  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  — это соответственно (отрицательный) момент времени прохождения перигея, выбранный за исходный; аргумент наклона в перигее при  $U_2 = 0$  и прямое восхождение выбранного восходящего узла на экваторе.

Теперь видно, что

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \delta - 1) \right]$$



является хорошим приближением действительного потенциала Земли, поскольку опущенные члены ( $J_3$ ,  $J_4$  и т. д.) примерно в  $10^3$  раз меньше, чем член с  $J_2$ .

Штерн выбрал в качестве невозмущенного гамильтониана  $H_0$  функцию

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \delta} + \frac{p_\delta^2}{r^2} \right) - \\ & - \frac{\mu}{r} \left[ 1 + \frac{J_2 R^2}{2r^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{ra(1-e^2)} \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right], \end{aligned} \quad (10.24)$$

которая имеет такую же форму, как и уравнение (10.21).

В (10.24) постоянная  $i$  представляет собой максимальное наклонение частицы, в то время как постоянная  $a(1-e^2)$  — это удвоенное произведение расстояний апогея и перигея, разделенное на их сумму. После этого возмущенный гамильтониан  $H_1$  определяется как

$$H_1 = H_0 - H$$

и имеет следующий вид:

$$H_1 = \frac{3}{2} \mu J_2 R^2 \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{ar^2(1-e^2)} \right).$$

Он определяет канонические уравнения для прежних канонических постоянных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ :

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Следует заметить, что  $H_1$  может содержать любую гармонику, которой раньше пренебрегали, но при частном дифференцировании  $H_1$  все его члены должны рассматриваться как функции канонических постоянных и времени. Исключениями являются  $a$ ,  $e$  и  $i$ , введенные в уравнение (10.24) в качестве постоянных.

Следующий шаг состоит в вычислении четырех интегралов, входящих в (10.23). Эти интегралы оказываются эллиптическими интегралами; их легче всего вычислить, сначала разлагая в ряды, а затем интегрируя почленно (см. [14]).

Нсвозмущенное решение, полученное таким образом, при небольшой подгонке значений двух из его канонических постоянных имеет тот же порядок точности, что и общеупотребительная кеплеровская орбита с учетом возмущений первого порядка.

Фактически, когда к решению Штерна добавляются возмущения первого порядка, то оказывается, что оно во всех отношениях

конкурирует с общепринятым выражением плюс возмущения первого и второго порядков. Эта работа Штерна, а также анализ Гарфинкеля той же самой задачи, показывает преимущества теории Гамильтона—Якоби, когда она применяется к задачам подобного типа.

## 10.6. Действие атмосферного торможения на искусственный спутник

Для большинства спутников Земли торможение атмосферой приводит к вековым изменениям орбиты и обычно оказывается силой, в конечном счете отбирающей энергию у спутника, что приводит к его спиральному движению по направлению к Земле. Хотя вековые возмущения, вызванные атмосферным торможением, воздействуют на элементы (именно  $a$  и  $e$ ), которые не изменяются вековым образом под действием гармоник поля тяготения Земли, использование двух отдельных теорий — одной для торможения, а другой для поля тяготения Земли — на практике не дает удовлетворительного решения задачи. Необходимо разработать теорию, которая включала бы как эффекты сплюснутости, так и атмосферного торможения. В то же время, чтобы общая картина оставалась достаточно ясной, пренебрежем эффектами сплюснутости в этом разделе и предположим, что мы рассматриваем случай невращающейся сферической планеты, обладающей атмосферой.

Тогда потенциальная функция тяготения выражается просто как  $U = \mu/r$ , и сила сопротивления действует в качестве возмущающей силы на кеплеровскую эллиптическую орбиту спутника.

Форма спутника является существенным фактором задачи, так же как и средняя плотность. В общем случае спутник произвольной формы, движущийся с некоторой скоростью  $v$  в атмосфере с плотностью  $\rho$ , оказывается подверженным действию как подъемной силы, так и торможения. Обе силы будут меняться со временем, если спутник вращается и кувыркается при своем движении по орбите; то же самое будет происходить и при движении спутника с переменной скоростью через области атмосферы с меняющейся плотностью. Не располагая точными сведениями об ориентации спутника, а также плотности атмосферы в произвольно заданный момент, мы не можем точно предсказать изменения орбиты спутника.

Однако для практических целей разумно предположить, что ввиду постоянных изменений ориентации спутника подъемная сила в среднем равна нулю. Кроме того, можно ввести определенное значение для средней площади поперечного сечения спутника, необходимого для расчета атмосферного торможения. В качестве закона изменения плотности с высотой иногда берется простая

зависимость падения плотности с высотой или используется некоторая модель атмосферы, параметры которой определяются эмпирическим путем из спутниковых наблюдений.

Ниже мы рассмотрим случай спутника массы  $m$  (пренебрежимо малой по сравнению с массой Земли), на который воздействует сила сопротивления  $F$  на единицу массы; сила сопротивления направлена в сторону, обратную направлению геоцентрической скорости спутника  $V$ . Указанная сила определяется выражением

$$F = \frac{1}{2m} C_D A \rho V^2.$$

Здесь  $C_D$  — аэродинамический коэффициент сопротивления,  $A$  — площадь среднего поперечного сечения спутника и  $\rho$  — плотность воздуха.

Значение коэффициента  $C_D$  лежит между 1 и 2. Оно оказывается ближе к 1, когда средняя длина свободного пробега молекул атмосферы мала по сравнению с размерами спутника, и ближе к 2, когда средняя длина пробега велика по сравнению с размерами спутника. Плотность  $\rho$  является функцией высоты над земной поверхностью, а следовательно, функцией расстояния от центра Земли.

Уравнения (6.41) определяют скорости изменения оскулирующих элементов орбиты в зависимости от компонент  $S$ ,  $T$  и  $W$  возмущающего ускорения ( $S$ ,  $T$  и  $W$  — радиальная, трансверсальная и ортогональная компоненты соответственно, как показано на рис. 10.6, где  $E$  — центр Земли, а  $P$  — положение спутника).

Уравнения (6.42) определяют связь между  $S$ ,  $T$ ,  $N_1$ ,  $T'$ :

$$T = \frac{(1 + e \cos f) T'}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} + \frac{(e \sin f) N_1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}},$$

$$S = \frac{(e \sin f) T'}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} - \frac{(1 + e \cos f) N_1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}}.$$

Здесь  $T'$  — компонента возмущающего ускорения, касательная к орбите в направлении движения, а  $N_1$  — компонента, перпендикулярная к касательной, положительная в направлении к Земле (рис. 10.6). Тогда сила сопротивления будет  $F = -T'$ , в то время как  $N_1 = W = 0$ .

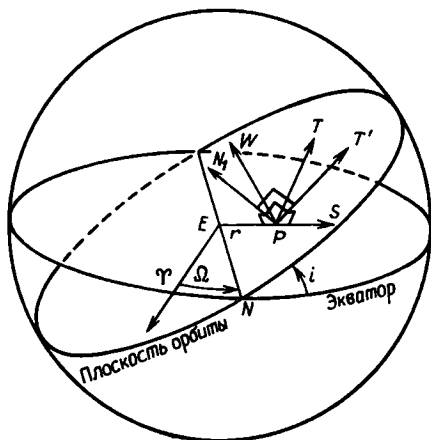


Рис. 10.6.

Используя известное соотношение для эллиптической орбиты

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f},$$

преобразуем уравнения (6.41) к виду

$$\frac{da}{dt} = - \left( \frac{A}{m} \right) \frac{C_{D\rho} V^2}{n(1-e^2)^{1/2}} (1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}, \quad (10.25)$$

$$\frac{de}{dt} = - \left( \frac{A}{m} \right) \frac{C_{D\rho} V^2 (1-e^2)^{1/2}}{na} \frac{\cos f + e}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}, \quad (10.26)$$

$$\frac{di}{dt} = 0, \quad (10.27)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad (10.28)$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = - \left( \frac{A}{m} \right) \frac{C_{D\rho} V^2 (1-e^2)^{1/2}}{nae} \frac{\sin f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}, \quad (10.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} = & - \left( \frac{A}{m} \right) \frac{C_{D\rho} V^2}{na} \frac{e(1-e^2) \sin f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos f}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{1 - e^2 + \sqrt{1 - e^2}} - \frac{1}{1 + e \cos f} \right\}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

При исследовании уравнений (10.27) и (10.28) становится ясным, что, как и предполагалось, ни прямое восхождение восходящего узла, ни наклонение плоскости орбиты не подвержены влиянию сопротивления атмосферы. Кроме того, мы замечали, что ненулевые правые части уравнений имеют множитель  $A/m$ , показывающий, что высокое отношение площади поперечного сечения к массе приводит к наибольшим эффектам сопротивления атмосферы. В идеальном случае спутник, специально разработанный для исследования внешних слоев атмосферы, должен иметь сферическую форму и высокое отношение  $A/m$ .

В оставшихся четырех уравнениях мы можем заменить  $V^2$  и преобразовать их к независимой переменной  $f$  вместо  $t$ , применяя соотношения задачи двух тел:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos f},$$

$$r_2 \dot{f} = h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

$$n^2 a^3 = \mu.$$

Отсюда

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 = \frac{n^2 a^3}{1 - e^2} (1 + e^2 + 2e \cos f)$$

и

$$\frac{dt}{df} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{n(1 + e \cos f)^2}.$$

После этого четыре уравнения записываются в таком виде:

$$\frac{da}{df} = - \left( \frac{A}{m} \right) C_{D\rho} a^2 \frac{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{3/2}}{(1 + e \cos f)^2},$$

$$\frac{de}{df} = - \left( \frac{A}{m} \right) C_{D\rho} a (1 - e^2) \frac{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}{(1 + e \cos f)^2} (\cos f + e),$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{df} = - \left( \frac{A}{m} \right) C_{D\rho} \frac{a(1 - e^2)}{e} \frac{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}{(1 + e \cos f)^2} \sin f,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{df} = & - \left( \frac{A}{m} \right) C_{D\rho} a e (1 - e^2) \frac{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}{(1 + e \cos f)^2} \times \\ & \times \left( \frac{1}{1 - e^2 + \sqrt{1 - e^2}} - \frac{1}{1 + e \cos f} \right) \sin f. \end{aligned}$$

Плотность атмосферы  $\rho$  является гладкой функцией  $f$  и  $r$ . Исследуя правые части четырех уравнений с учетом сделанного замечания, мы видим, что уравнения для  $a$  и  $e$  при интегрировании (если принять в первом приближении, что в правых частях значения  $a$  и  $e$  остаются постоянными) дают вековой член, указывающий, что  $a$  и  $e$  уменьшаются вековым образом в зависимости от  $f$ , а следовательно, и от  $t$ . С другой стороны, присутствие члена  $\sin f$  в двух других уравнениях приводит к тому, что  $\tilde{\omega}$  и  $\epsilon$  оказываются периодическими функциями времени. Колебания этих величин в общем случае имеют небольшие амплитуды вследствие малости коэффициента  $(A/m) C_{D\rho}$ . Эти элементы мы в дальнейшем рассматривать больше не будем.

Чтобы решить уравнения для  $a$  и  $e$ , полезно снова изменить независимую переменную, на этот раз на эксцентрическую аномалию, при помощи соотношений

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

и

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}.$$

После указанной замены получаем

$$\frac{da}{dE} = - \left( \frac{A}{m} \right) C_D \rho a^2 \frac{(1 + e \cos E)^{3/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}},$$

$$\frac{de}{dE} = - \left( \frac{A}{m} \right) C_D \rho a \frac{(1 + e \cos E)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} (1 - e^2) \cos E.$$

Если  $\Delta a$  и  $\Delta e$  — возмущения элементов  $a$  и  $e$  за один оборот спутника по орбите, то

$$\Delta a = - \left( \frac{A}{m} \right) C_D a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\rho (1 + e \cos E)^{3/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} dE,$$

$$\Delta e = - \left( \frac{A}{m} \right) C_D a \int_0^{2\pi} \frac{\rho (1 + e \cos E)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} (1 - e^2) \cos E dE;$$

интегрирование этих уравнений производится численными методами.

Плотность атмосферы  $\rho$  представляет собой эмпирическую функцию  $r$ , хотя в большом числе работ изменения плотности представляются простым экспоненциальным законом:

$$\rho = \rho_0 \exp [-(\eta - \eta_0)/H].$$

Здесь  $\eta$  — высота,  $\eta_0$  — некоторая стандартная высота (обычно — высота перигея),  $\rho_0$  — плотность атмосферы на стандартной высоте, а  $H$  — шкала высот (по предположению, постоянные). Шкала высот — это расстояние по вертикали, на котором плотность изменяется в  $e$  раз; ее значение зависит от высоты:  $H$  равно примерно 6 км на уровне моря и достигает 40 км на высоте около 200 км.

Здесь полезно сделать еще несколько замечаний. Расстояния перигея и апогея равны  $a(1 - e)$  и  $a(1 + e)$  соответственно. При вычислении изменений этих величин за один оборот спутника при помощи легко выводимых соотношений

$$\Delta [a(1 - e)] =$$

$$= - \left( \frac{A}{m} \right) C_D a^2 (1 - e) \int_0^{2\pi} \rho (1 - \cos E) \left( \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \right)^{1/2} dE,$$

$$\Delta [a(1 + e)] =$$

$$= - \left( \frac{A}{m} \right) C_D a^2 (1 + e) \int_0^{2\pi} \rho (1 + \cos E) \left( \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \right)^{1/2} dE$$

мы находим, что, пока значение эксцентриситета не станет очень малым, изменения высоты апогея оказываются значительно большими, чем изменения высоты перигея. Такие изменения орбиты спутника, вызванные сопротивлением атмосферы, с качественной стороны показаны на рис. 10.7.

Выше никак не принимались во внимание ни сплюснутость земной атмосферы, окутывающей несферическую Землю, ни

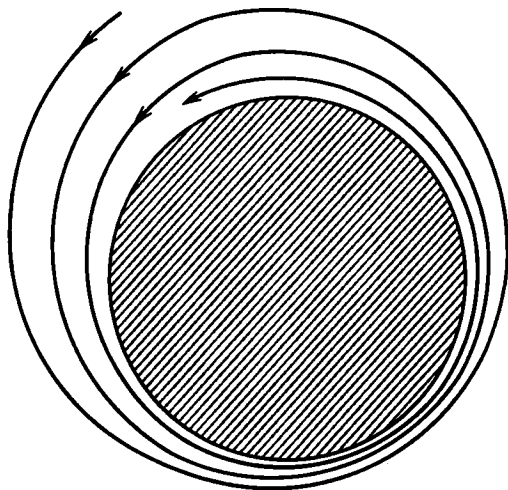


Рис. 10.7.

вращение этой атмосферы. Для планеты сфероидальной формы плотность оказывается функцией высоты, т. е. расстояния вдоль нормали к поверхности планеты; становится существенным и различие между скоростью вращения атмосферы и скоростью спутника [6, 12, 13, 15].

Температура, а следовательно, и плотность верхней атмосферы изменяются вследствие вариаций падающего потока солнечного излучения в зависимости от времени суток и времени года (суточные и сезонные вариации); эти изменения были изучены по их влиянию на орбиты спутников Земли. Солнечная активность, например появление вспышек, также вызывает возмущения, обусловленные нагревом атмосферы: плотность последней на высотах порядка 800 км временами увеличивается в 3—7 раз.

## 10.7. Тессеральные и секториальные гармоники поля тяготения Земли

До сих пор предполагалось, что Земля симметрична относительно своей полярной оси, так что ее потенциал  $U$  в точке  $P$ , удаленной на расстояние  $r$  от центра масс и имеющей склонение  $\delta$ , определяется выражением

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \right]. \quad (10.31)$$

Здесь  $\mu = GM$ ,  $J_n$  — постоянные,  $R$  и  $M$  — экваториальный радиус Земли и ее масса соответственно. Однако потенциал Земли, по-видимому, несколько отличается от потенциала тела, имеющего осевую симметрию. Более общая формула для потенциала, в которой учитываются эти отклонения, имеет вид

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n J_n^{(m)} \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos m(\lambda - \lambda_n^{(m)}) P_n^{(m)}(\sin \delta) \right]$$

или

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n (C_n^{(m)} \cos m\lambda + S_n^{(m)} \sin m\lambda) P_n^{(m)}(\sin \delta) \right].$$

Здесь  $P_n^{(m)}(\sin \delta)$  — присоединенные функции Лежандра, определяемые при помощи соотношения

$$P_n^{(m)}(\sin \delta) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}},$$

где  $x \equiv \sin \delta$ , а постоянные  $C_n^{(m)}$  и  $S_n^{(m)}$  являются мерами амплитуд различных гармоник. В формулу входит долгота  $\lambda$ , поскольку теперь геоид не может рассматриваться как осесимметричный. Если  $m = 0$  (т. е. геоид имеет осевую симметрию), общая формула упрощается до выражения (10.31), которое включает только одни *зональные гармоники*. Однако в общем случае в выражении для потенциала появляются так называемые *тессеральные* и *секториальные гармоники*, зависящие не только от широты, но и от долготы. Эти последние гармоники имеют малые амплитуды и в первом порядке не дают никаких вековых эффектов, вызывая лишь периодические возмущения элементов орбиты спутника. Долгопериодические колебания элементов были использованы многими исследователями для вывода значений некоторых постоянных. В частности, была измерена эллиптичность экватора



(см. разд. 10.2). Определение тессеральных и секториальных гармоник удалось выполнить из наблюдений спутников, редуцированных с высокой точностью [12].

## Задачи

10.1. Покажите, что

$$1) \quad \epsilon = \frac{1}{2} \left[ 3J_2 + \frac{\omega^2 R^3}{\mu} \right],$$

где  $R$  и  $\omega$  — радиус Земли и ее угловая скорость вращения соответственно,  $\epsilon$  — сплюснутость,  $J_2$  — коэффициент второй гармоники,  $\mu = GM$ ;

2) период обращения  $T$  искусственного спутника Земли по круговой орбите радиуса  $a$  в плоскости земного экватора приближенно дается выражением

$$T = 2\pi a^{3/2} \mu^{-1/2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{R}{a} \right)^2 J_2 \right].$$

10.2. Докажите, что

$$1) \quad \overline{\left( \frac{a}{r} \right)^3} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a}{r} \right)^3 dM = (1 - e^2)^{-3/2};$$

$$2) \quad \overline{\left( \frac{a}{r} \right)^3 \cos 2f} = 0.$$

10.3. При условии, что среднее берется по истинной аномалии  $f$ , докажите, что

$$1) \quad \overline{\left( \frac{r}{a} \right)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{r}{a} \right) df = (1 - e^2)^{1/2};$$

$$2) \quad \overline{\left( \frac{a}{r} \right)} = (1 - e^2)^{-1}.$$

10.4. Докажите, что члены возмущающей функции  $F$  для спутника Земли, содержащие  $J_4$ , определяются выражением

$$- \frac{\mu J_4 R^4}{r^5} \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \sin^2 \delta - \frac{35}{32} \sin^2 2\delta \right).$$

Преобразуйте это выражение в функцию от  $f$ ,  $i$  и  $\omega$  и затем покажите, что вековая часть второго порядка возмущающей функции равна

$$- \frac{\mu J_4 R^4}{8a^5} \left[ 3 - 15 \sin^2 i + \left( \frac{105}{8} \right) \sin^4 i \right] (1 - e^2)^{-7/2} \left( 1 + \frac{3e^2}{2} \right).$$

10.5. Покажите, что с точностью до величин первого порядка имеются два значения наклона к экватору орбиты искусственного спутника, для которых величина  $\dot{\omega} = \Omega + \omega$  не подвержена вековому изменению, и найдите эти значения.

10.6. Используя числовые данные приложения II, вычислите в первом порядке значения скоростей изменения (в градусах за сутки) аргумента перигея  $\omega$  и прямого восхождения восходящего узла  $\Omega$  искусственного спутника Земли, параметры орбиты которого таковы:  $a = 1,30262R$ ,  $e = 0,16561$ ,  $i = 32^\circ 52'$  ( $R$  — экваториальный радиус Земли).

10.7. Покажите, что функция  $S$ , определяемая уравнением (10.22), является решением уравнения Гамильтона—Якоби в том случае, если гамильтониан задачи имеет форму, определяемую выражением (10.21).

## Литература

1. Brouwer D. Astron. J., **64**, 378, 1959.
2. Garfinkel B. Astron. J., **63**, 88, 1958.
3. Garfinkel B. Astron. J., **64**, 353, 1959.
4. King-Hele D. G. Proc. Roy. Soc., **A247**, 49, 1958.
5. King-Hele D. G. Satellites and Scientific Research. London, Routledge and Kegan Paul, 1962.
6. King-Hele D. G. Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere. London, Butterworths, 1964. [Имеется перевод: Кинг-Хилл Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. — М.: Мир, 1966.]
7. King-Hele D. G. A View of Earth and Air. Royal Aircraft Establishment Tech. Memo. 212, 1974.
8. Kozai Y. Smithsonian Institution Astrophysical Observatory; Special Report 22, 1959.
9. Kozai Y. Astron. J., **64**, 367, 1959.
10. Kozai Y. Astron. J., **66**, 355, 1961.
11. Merson R. H. Geophysical Research, **4**, 17, 1960.
12. Morando B. (ed.). Dynamics of Satellites. Springer-Verlag, 1969.
13. Roy M. (ed.) Dynamics of Satellites. Springer-Verlag, 1963.
14. Sterne T. E. Astron. J., **63**, 28, 1958.
15. Sterne T. E. J. Am. Rocket Soc., **29**, 777, 1959.
16. Tisserand F. Traité de la Mécanique Céleste. Paris, Gauthier-Villars, 1889.

## Рекомендуемая литература

- Eckstein M. C. Astron. J., **68**, 231, 1963.  
 Izsak I. G. Space Res., **2**, 352, 1961.  
 Izsak I. G. Astron. J., **66**, 226, 1961.  
 Jeffreys H. The Earth, 4th ed. London, Cambridge University Press, 1959. [Имеется перевод: Джеффрис Г. Земля, ее происхождение, история и строение. — М.: ИЛ, 1960.]  
 Kaula W. M. Space Res., **2**, 360, 1961.  
 Kozai Y. Smithsonian Institution Astrophysical Observatory; Special Report 72, 1961.  
 Kuiper G. (ed.) The Earth as a Planet. Chicago, University of Chicago Press, 1954.  
 Muhleman D. O. et al. Astron. J., **67**, 191, 1962.  
 Newton R. R. J. Geophys. Res., **67**, 415, 1962.  
 O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K. Astron. J., **64**, 245, 1959.  
 Pettengill G. H. et al. Astron. J., **66**, 226, 1962.  
 Plummer H. C. An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. New York, Dover Publications, 1960.  
 Rabe E. Astron. J., **55**, 112, 1949.

# Динамика ракет и орбиты переходов

## 11.1. Введение

При современном уровне развития техники применение ракет, принцип работы которых основан на ньютоновских законах движения, позволяет осуществить на практике космические полеты пилотируемых или автоматических аппаратов между телами Солнечной системы. Поэтому в последние двадцать лет при изучении орбитального движения большое внимание уделялось динамике полета ракет в гравитационных полях, а также их способности осуществлять такие перелеты.

Настоящая глава посвящена основным принципам подобного движения. В первой части главы рассматриваются ракеты; во второй части обсуждается применение ракетных двигателей для переходов с одной орбиты на другую и в последней части на элементарном уровне исследуются возникающие при этом ошибки.

## 11.2. Движение ракеты

Для начала рассмотрим ракету, движущуюся в вакууме в отсутствие гравитационных полей. Пусть масса ракеты в момент времени  $t$  равна  $m$ , а ее тяга постоянна (и по величине, и по направлению). Движение ракеты обусловлено выбросом части ее массы с большой скоростью. Предполагая постоянство тяги, мы также должны предполагать, что постоянны масса, выбрасываемая в секунду, и скорость истечения  $v_e$  (измеряемая относительно аппарата). Пусть скорость ракеты в момент времени  $t$  равна  $v$ . Тогда ее количество движения равно  $mv$ .

Если в результате выброса массы  $dm$  скорость ракеты увеличилась на  $dv$ , то в силу закона сохранения количества движения можно написать

$$(m + dm)(v + dv) + (v_e - v) dm = mv.$$

Пренебрегая произведением  $dm$  и  $dv$  и сокращая общие члены, получаем соотношение

$$mdv = -v_e dm, \quad (11.1)$$

которое может быть проинтегрировано. В результате находим

$$v - v_0 = v_e \ln (m_0/m). \quad (11.2)$$

Здесь  $v_0$  и  $m_0$  — начальная скорость и масса ракеты, а  $m$  — масса ракеты в момент достижения скорости  $v$ .

Величина  $m_0/m$  называется отношением масс. Если к начальной скорости требуется добавить скорость, равную скорости истечения, то отношение масс при этом получится равным  $e = 2,718\dots$ . Уравнение (11.2) является фундаментальным уравнением теории полета ракеты. Из него также видно, что при отношении масс, большем чем  $e = 2,718$ , конечная скорость ракеты может превзойти скорость истечения.

Важным конструктивным параметром ракеты является удельный импульс  $I$ . Скорость истечения для ракеты, использующей химическое топливо, зависит от количества освобождаемой тепловой энергии на единицу массы и от молекулярного веса топлива. В оптимальном режиме первый параметр должен быть как можно больше, а второй как можно меньше. Поскольку тяга равна  $-v_e (dm/dt)$ , то удельный импульс  $I$ , определяемый соотношением

$$I = \frac{v_e}{g} = \frac{\text{тяга}}{\text{ускорение силы тяжести} \times \text{массовый расход топлива}},$$

имеет размерность времени.

Для двигателя на жидком кислороде и спирте (типа двигателя ракеты V-2) импульс  $I$  имеет величину около 240 с, в то время как фторо-водородный двигатель имеет удельный импульс в диапазоне 300—380 с.

### 11.2.1. Движение ракеты в гравитационном поле

Пусть ракета поднимается вертикально вверх (противоположно направлению постоянного вектора ускорения силы тяжести  $g$ ). Тогда изменение количества движения за время  $dt$  вследствие действия силы  $g$  (на единицу массы) равно  $mgdt$  и уравнение (11.1) принимает вид

$$mdv = -v_e dm - mgdt,$$

откуда

$$dv = -v_e \frac{dm}{m} - gdt. \quad (11.3)$$

Интегрируя, получаем

$$v - v_0 = v_e \ln (m_0/m) - gt. \quad (11.4)$$

Если  $g$  с высотой меняется, то

$$v - v_0 = v_e \ln (m_0/m) - \int_0^t g(h) dt, \quad (11.5)$$

где  $h$  — высота ракеты относительно некоторой точки отсчета.

Если гравитационное поле, создаваемое планетой радиуса  $R$  с величиной  $g_E$  ускорения силы тяжести на поверхности, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния, то величина  $g$  на расстоянии  $r$  от центра планеты равна

$$g = g_E (R/r)^2.$$

При движении ракеты  $r$  является функцией времени.

На практике топливо составляет только часть массы ракеты. Если  $m$  масса пустой ракеты, то уравнения (11.4) и (11.5) определяют максимально возможное увеличение скорости ракеты при заданной скорости истечения  $v_e$ . Если к моменту времени  $t$  все топливо сгорит, то после этого ракета будет двигаться по инерции под действием ускорения силы тяжести. Максимальное расстояние ракеты от точки выключения двигателя определяется энергией (суммой потенциальной и кинетической энергии), которую ракета приобрела к этому моменту. Это расстояние зависит от расстояния  $r$  ракеты от центра гравитационного поля и скорости  $v$  (см. разд. 4.5 и 4.11).

Из уравнений (11.4) и (11.5) видно, что для того, чтобы увеличить  $v$  и, следовательно, максимальное расстояние, надо увеличить отношение масс и (или) скорость истечения. Кроме того, надо стремиться к тому, чтобы топливо расходовалось побыстрее, поскольку, чем длительнее активный полет, тем меньше будет выигрыш от расхода топлива. Чтобы понять природу этих гравитационных потерь, обратимся к уравнению (11.3) и допустим, что расход топлива  $dm/dt$  так мал и изменяется таким образом, что

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} - g = 0.$$

Тогда  $v = v_0$ , и ракета расходует топливо только для того, чтобы оставаться в начальном положении.

Расстояние  $s$ , пройденное ракетой за время  $t$  активного полета, может быть легко найдено.

Если расход топлива  $f$  постоянен, то

$$\frac{dm}{dt} = -f,$$

откуда

$$m = m_0 - ft.$$

Тогда

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \left( v_0 - gt + v_e \ln \frac{m_0}{m} \right) dt$$

или

$$s = \int_0^t \left[ v_0 - gt - v_c \ln \left( 1 - \frac{ft}{m_0} \right) \right] dt.$$

Интегрируя, получаем

$$s = v_0 t + v_c \left[ t - \left( t - \frac{m_0}{f} \right) \ln \left( 1 - \frac{ft}{m_0} \right) \right] - \int_0^t gt dt$$

или, предполагая постоянство  $g$ ,

$$s = \frac{1}{f} \left[ (v_0 + v_c) (m_0 - m) + v_c m \ln \frac{m}{m_0} \right] - \frac{1}{2} gt^2.$$

### 11.2.2. Движение ракеты в атмосфере

Если ракета поднимается в атмосфере с плотностью  $\rho$  (являющейся некоторой функцией высоты), то на нее будут действовать подъемная сила и сила сопротивления (см. разд. 10.6). Если ракета поднимается вертикально, то подъемной силой можно пренебречь, а сила сопротивления  $F$  на единицу массы задается формулой

$$F = \frac{1}{2m} C_D A \rho V^2, \quad (11.6)$$

где, как и раньше,  $m$  — масса ракеты,  $V$  — ее скорость,  $C_D$  — коэффициент сопротивления,  $A$  — площадь поперечного сечения ракеты. Следует заметить, что коэффициент сопротивления зависит от формы ракеты и от ее скорости и может меняться в два раза.

Из уравнения (11.6) видно, что сила сопротивления приблизительно пропорциональна квадрату скорости и первой степени плотности. Таким образом, чтобы минимизировать влияние сопротивления атмосферы, ракета должна подниматься вертикально и как можно медленнее. Однако тогда мы вступаем в противоречие со стремлением как можно быстрее достигнуть высокой скорости, чтобы уменьшить гравитационные потери. Поскольку потери на сопротивление, если речь идет о подъеме космического аппарата, значительно менее важны, чем гравитационные, то первоочередная задача состоит в минимизации гравитационных потерь.

Для решения этой задачи на практике выбирают такую траекторию полета ракеты, которая очень быстро переходит из вертикальной в горизонтальную. Если в некоторый момент угол между направлением силы тяги и горизонтом равен  $\theta$ , то гравитационный компонент, действующий против силы тяги, равен  $g \sin \theta$ .

Если имеется атмосфера, то траектория разворота должна быть такой, чтобы в нижней части, в области более плотной атмосферы, скорость была невысокой. Активным траекториям разворота посвящена обширная литература; здесь этот вопрос рассматриваться не будет.

### 11.2.3. Многоступенчатые ракеты

Для ракеты типичными значениями отношения масс  $R$  и скорости истечения являются значения 5 и 2,5 км/с. Подставляя их в уравнение (11.2), находим

$$v - v_0 = 4,02 \text{ км/с.}$$

Скорость ухода от Земли (скорость освобождения) равна 11,2 км/с; таким образом, одна ракета, использующая даже высокоэффективное топливо, не в состоянии обеспечить необходимую скорость. Если принять во внимание гравитационные потери и потери на преодоление сопротивления атмосферы, то картина будет еще мрачнее.

Уже в начале истории космических полетов стало ясно, что только многоступенчатые ракеты обладают способностью достижения таких или еще больших скоростей. Чтобы проиллюстрировать принцип многоступенчатости, который основан

на возможности сбрасывания тех частей аппарата (пустых топливных баков), которые уже не могут использоваться, рассмотрим двухступенчатую ракету, показанную на рис. 11.1.

Пусть  $M_0$  — полная начальная масса,  $M_1$  — масса первой ступени (без топлива),  $m_1$  — масса топлива первой ступени,  $M_2$  — масса второй ступени (без топлива),  $m_2$  — масса топлива второй ступени,  $(v_c)_1$  — скорость истечения для первой ступени,  $(v_c)_2$  — скорость истечения для второй ступени.

Тогда

$$M_0 = (M_1 + m_1) + (M_2 + m_2).$$

Для простоты потерями на преодоление сопротивления атмосферы и гравитационными потерями пренебрегаем. Скорость, достигае-

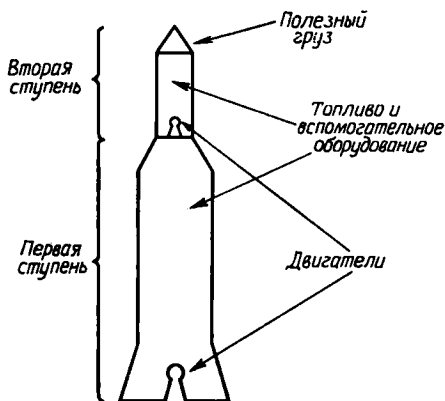


Рис. 11.1.

мая к моменту полного выгорания топлива первой ступени, находится из уравнения (11.2):

$$v_1 = (v_e)_1 \ln \left( \frac{M_0}{M_1 - m_1} \right). \quad (11.7)$$

Затем пустая первая ступень массы  $M_1$  сбрасывается и включается двигатель второй ступени. Увеличение скорости в результате сгорания топлива второй ступени определяется по формуле

$$v_2 = (v_e)_2 \ln \left[ \frac{M_0 - (M_1 + m_1)}{M_0 - (M_1 + m_1 + m_2)} \right]. \quad (11.8)$$

Суммарное увеличение скорости  $v$  с момента старта до момента выключения двигателя второй ступени равно

$$v = v_1 + v_2. \quad (11.9)$$

Введем теперь допустимое отношение масс  $R$  для одноступенчатой ракеты, а также долю  $x$  массы первой ступени (включая топливо), которую составляет вторая ступень, и предположим, что отношение масс для обеих ступеней равно  $R$ . Тогда соотношения

$$\frac{M_1 + m_1}{M_1} = \frac{M_2 + m_2}{M_2} = R,$$

$$(M_2 + m_2)/(M_1 + m_1) = x$$

и

$$(M_1 + m_1) + (M_2 + m_2) = M_0$$

вместе с уравнениями (11.7) и (11.8) дают

$$v_1 = (v_e)_1 \ln \left[ \frac{R(1+x)}{1+Rx} \right] \quad (11.10)$$

и

$$v_2 = (v_e)_2 \ln R. \quad (11.11)$$

В уравнении (11.10) эффективное отношение масс  $R'$  задается выражением

$$R' = \frac{R(1+x)}{1+Rx},$$

которое достигает максимального значения  $R$  при  $x = 0$  (так как  $R > 1$ ).

Если  $x = 0,1$ , то  $R' = 1,1R/(1 + 0,1R)$ ;

$x = 1,0$ , то  $R' = 2R/(1 + R)$ ;

$x = 10,0$ , то  $R' = 11R/(1 + 10R) \approx 1$ .



На основании таких простых соображений можно сказать, что вторая ступень должна быть значительно меньше по массе, чем первая ступень. Если, как и раньше, положить  $R = 5$ ,  $x = 0,1$  и принять  $(v_e)_1 = (v_e)_2 = 2,5$  км/с, то найдем, что увеличение скорости последней ступени будет равно 7,27 км/с, что значительно больше, чем полученное для одноступенчатой ракеты значение 4,02 км/с.

При рассмотрении двухступенчатой ракеты мы сильно упростили задачу. Помимо того что не учитывались гравитационные потери и потери на преодоление сопротивления атмосферы, нами не рассматривался дополнительный узел, который необходим для установки второй ступени в верхней части первой ступени. Кроме того, мы не учитывали тот факт, что в современных ракетах двигатель первой ступени обычно представляет собой пакет двигателей, что позволяет развивать значительно бóльшую тягу, чем тяга второй ступени. Однако учет этих факторов не изменит основного вывода о том, что для ухода от Земли или даже для выведения на орбиту спутника Земли необходимы многоступенчатые ракеты.

#### 11.2.4. Другие типы ракет

В настоящее время только ракеты с химическими двигателями в состоянии развивать тягу, достаточную для того, чтобы, преодолевая гравитационное поле, подняться с поверхности планеты и выйти на орбиту или совершить посадку. Разрабатываются и другие типы ракетных двигателей, но среди них только двигатель, построенный на основе ядерного реактора, сравним по тяге с химическим. Для других типов двигателей (например, для ионной ракеты) характерны очень низкая тяга и большое время «горения», так что энергия, необходимая для перелета из окрестности одной планеты в окрестность другой планеты, должна вырабатываться постепенно (этот процесс может длиться несколько суток). Системы с такими двигателями имеют ряд преимуществ по сравнению с химическими ракетными двигателями, способными развивать большую тягу. Например, при использовании их в межпланетном полете можно понизить отношение масс и заметно сократить время перелета, особенно в случае полетов к внешним планетам Солнечной системы.

Поскольку принцип работы всех ракетных двигателей основан на выбросе с большой скоростью части своей массы, то фундаментальное уравнение (11.2) справедливо и для двигателей малой тяги. Тем не менее исследование таких систем, функционирующих в течение большого промежутка времени в гравитационном поле, отличается от исследования двигателей с большой тягой, когда тяга настолько велика, что с высокой степенью точности можно считать, что она действует в течение такого короткого промежутка времени, за который изменяется только вектор скорости аппарата.

В оставшейся части этой главы мы будем рассматривать только системы с большой тягой. (Вопросам, связанным с применением двигателей малой тяги, посвящены, например, работы Эрнке [1, 2].)

### 11.3. Переходы между орбитами в силовом поле одного притягивающего центра

Если аппарат движется по орбите вокруг массивного сферического тела и на него не действуют возмущения со стороны других тел, то это означает, что аппарат движется в центральном поле сил. При этом, если полет аппарата является пассивным (двигатели выключены), то его орбита представляет собой коническое сечение, свойства которого описываются формулами гл. 4. При работающих двигателях орбита будет изменяться, причем в общем случае изменениям будут подвержены все шесть элементов орбиты. Поскольку мы имеем дело с системами, развивающими большую тягу, то можно считать, что двигатель работает такое короткое время, за которое создаваемый им импульс мгновенно изменяет вектор количества движения аппарата, а положение аппарата измениться не успевает. Положение вектора тяги двигателя относительно касательной к орбите определяет изменение величины и направления скорости аппарата. Тот факт, что изменение скорости не сопровождается заметным изменением положения, говорит об отсутствии каких бы то ни было гравитационных потерь.

В данном разделе вначале будут рассмотрены изменения орбиты, к которым приводят импульсы различных типов, а затем мы перейдем к исследованию переходов с одной орбиты на другую. При этом будут рассмотрены только простейшие случаи.

#### 11.3.1. Переход между круговыми компланарными орбитами

Предположим, что аппарат, находящийся на круговой орбите радиуса  $a_1$  вокруг тела массы  $M$ , требуется перевести на круговую орбиту большего радиуса  $a_2$  (рис. 11.2). Удобнее всего рассматривать эту задачу как задачу изменения энергии.

Энергия аппарата равна (см. разд. 4.5 и 4.11)

$$C_1 = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{\mu}{a_1}, \quad (11.12)$$

где  $\mu = GM$  и  $v_1 = (GM/a_1)^{1/2}$  — орбитальная скорость. Энергия аппарата на большей орбите равна  $C_2$  и определяется выражением

$$C_2 = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{\mu}{a_2}, \quad (11.13)$$

где  $v_2 = (GM/a_2)^{1/2}$  — орбитальная скорость на большей орбите. Таким образом, имеем

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{a_1}, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{a_2}.$$

Тогда минимальная энергия, необходимая для осуществления перехода, равна

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\mu}{2} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (11.14)$$

Если переход осуществляется по эллиптической орбите, касающейся обеих круговых орбит, как показано на рис. 11.2, тогда для такой операции требуется два импульса: первый (в точке  $A$ ) переводит аппарат на эллиптическую орбиту, второй (в точке  $B$ ) переводит аппарат на большую круговую орбиту. Эти импульсы прилагаются по касательной к орбите путем включения двигателя ракеты, направленного в сторону, противоположную движению.

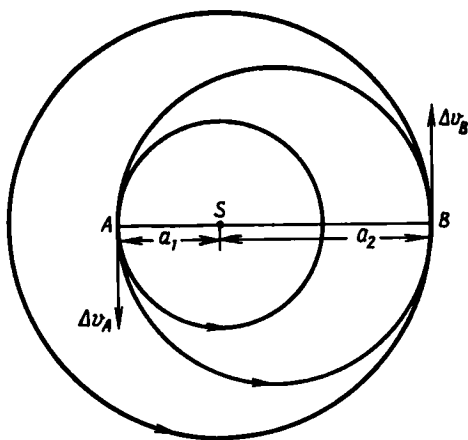


Рис. 11.2.

Если импульс  $I$ , вызывающий изменение количества движения  $m \Delta v$ , не совпадает с направлением скорости, а составляет с ним

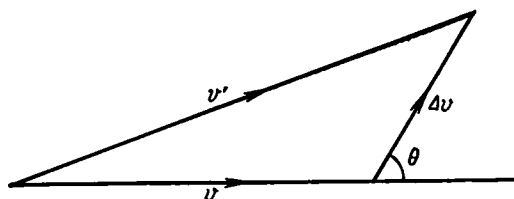


Рис. 11.3.

некоторый угол  $\theta$ , то новый вектор скорости  $v'$  определяется в результате векторного сложения  $\Delta v$  и  $v$  (рис. 11.3).

Если величина импульса задана, то приращение кинетической энергии, равное  $\frac{1}{2} (v'^2 - v^2)$ , максимально при  $\theta = 0$ . Таким образом, если надо изменить кинетическую энергию, то использование касательного импульса является самым экономичным с точки зрения расхода топлива.

Эллипсу перехода соответствует энергия

$$C_T = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}.$$

Но для эллиптического движения

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

откуда

$$C_T = - \frac{\mu}{2a_T}. \quad (11.15)$$

Здесь  $a_T$  — большая полуось эллипса. Поскольку

$$a_T = \frac{1}{2} (a_1 + a_2), \quad (11.16)$$

то

$$C_T = \frac{-\mu}{a_1 + a_2}.$$

Таким образом, для перевода аппарата на орбиту перехода нужно в точке  $A$  увеличить его энергию на величину, равную

$$\Delta C_A = C_T - C_1 = - \frac{\mu}{2a_1} \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right). \quad (11.17)$$

Аналогично в точке  $B$  требуется приращение энергии

$$\Delta C_B = C_2 - C_T = - \frac{\mu}{2a_2} \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right). \quad (11.18)$$

Изменения энергии обусловлены изменениями кинетической энергии, т. е.

$$\Delta C_A = \frac{1}{2} (v_A + \Delta v_A)^2 - \frac{1}{2} v_A^2 \quad (11.19)$$

и

$$\Delta C_B = \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} (v_B - \Delta v_B)^2. \quad (11.20)$$

Здесь  $\Delta v_A$  и  $\Delta v_B$  — необходимые приращения скорости в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Приравнявая (11.17) и (11.19), получаем

$$\Delta v_A = \left( \frac{\mu}{a_1} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{2a_2/a_1}{1 + a_2/a_1} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (11.21)$$

Аналогично, приравнявая (11.18) и (11.20), получаем

$$\Delta v_B = \left( \frac{\mu}{a_2} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{1 + a_2/a_1} \right)^{1/2} \right]. \quad (11.22)$$

Из уравнения (11.2), которое здесь можно применять, поскольку нет потерь на преодоление сопротивления атмосферы и гравитационных потерь, находим массу топлива, необходимого для выработки импульсов. Для первого импульса имеем

$$\Delta v_A = v_e \ln(m_0/m_A),$$

откуда можно найти  $m_0 - m_A$  (массу израсходованного топлива) как функцию  $\Delta v_A$ ,  $v_e$  (скорости истечения) и  $m_0$  (массы топлива до перехода).

Для второго импульса

$$\Delta v_B = v_e \ln\left(\frac{m_A}{m_B}\right).$$

Отсюда найдем  $m_A - m_B$  (масса израсходованного топлива) как функцию  $\Delta v_B$ ,  $v_e$  и  $m_A$ .

Складывая  $\Delta v_A$  и  $\Delta v_B$ , получаем полное приращение скорости при переходе с одной круговой орбиты на другую в виде

$$\Delta v = \Delta v_A + \Delta v_B = v_e \ln\left(\frac{m_0}{m_B}\right),$$

позволяющем в одно действие вычислить суммарный расход топлива.

Эксцентриситет  $e$  орбиты перехода получается из соотношений

$$a_1 = a_T (1 - e),$$

$$a_2 = a_T (1 + e)$$

и равен

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}. \quad (11.23)$$

Время, за которое совершается переход, равно половине периода  $T$  обращения тела по орбите перехода [см. (4.26)], а именно

$$t_T = T/2 = \pi \left(\frac{a_T^3}{\mu}\right)^{1/2}. \quad (11.24)$$

Положение и скорость аппарата на орбите перехода в любой момент времени могут быть вычислены по формулам гл. 4.

### 11.3.2. Параболические и гиперболические орбиты перехода

Если, увеличивая скорость аппарата, приложить достаточно большой импульс, направленный по касательной или под некоторым углом к орбите, то любую круговую орбиту можно преобразовать в параболическую или гиперболическую. Чтобы из круговой

орбиты, на которой скорость равна  $v_c = (GM/a)^{1/2}$ , получить параболическую орбиту, приращение скорости должно быть равно

$$\Delta v = (\sqrt{2} - 1) v_c, \quad (11.25)$$

поскольку параболическая скорость равна круговой скорости в той же точке, умноженной на  $\sqrt{2}$  [см. (4.81)]. Любое превышение этой параболической скорости превращает орбиту в гиперболическую траекторию с эксцентриситетом, большим единицы.

В перигеуме (ближайшей к центральной массе точке орбиты) гиперболическая скорость равна [см. (4.92)]

$$V_p^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{e+1}{e-1} \right), \quad (11.26)$$

где  $r_p = a(e-1)$  — радиус-вектор перигеума. Разность  $\Delta v_h$  между параболической и гиперболической скоростями равна

$$\Delta v_h = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}} (\sqrt{e+1} - \sqrt{2}). \quad (11.27)$$

Для таких орбит времена перехода меньше, чем для эллиптических орбит, однако при этом расходуется больше топлива, так как в этом случае больше приращения скорости, необходимые для преобразования орбит.

Остановимся еще на одном специфическом переходе, который называется биэллиптическим переходом. Мы приходим к нему в результате сравнения энергии, необходимой для приобретения аппаратом параболической скорости, и суммарной энергии, необходимой для двухимпульсного перехода аппарата с орбиты радиуса  $a_1$  на орбиту радиуса  $a_2$ . В первом случае в силу уравнения (11.25) имеем

$$\Delta v_p = (\sqrt{2} - 1) v_c = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{\mu}{a_1}}.$$

Во втором случае, складывая (11.21) и (11.22), получаем

$$\begin{aligned} \Delta v_A + \Delta v_B &= \left( \frac{\mu}{a_1} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{2a_2/a_1}{1+a_2/a_1} \right)^{1/2} - 1 \right] + \\ &+ \left( \frac{\mu}{a_2} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{1+a_2/a_1} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая эти два выражения, получаем квадратное уравнение относительно  $a_2/a_1$ , имеющее действительный корень  $a_2/a_1 \approx 3,4$ . Если  $a_2/a_1$  меньше этой величины, то касательный переход потребует меньшего количества топлива, чем импульс, увеличивающий скорость аппарата до скорости ухода с орбиты радиуса  $a_1$ . Если

$a_2/a_1$  больше 3,4, то энергия перехода больше энергии, нужной для увеличения скорости до ее параболического значения. Это наводит на мысль, что при переходе между орбитами в случае, когда  $a_2/a_1 \gg 3,4$ , простой касательный эллипс может оказаться не самым экономичным (по расходу топлива). Более выгодной может оказаться трехимпульсная орбита перехода, состоящая из двух полуэллипсов (рис. 11.4).

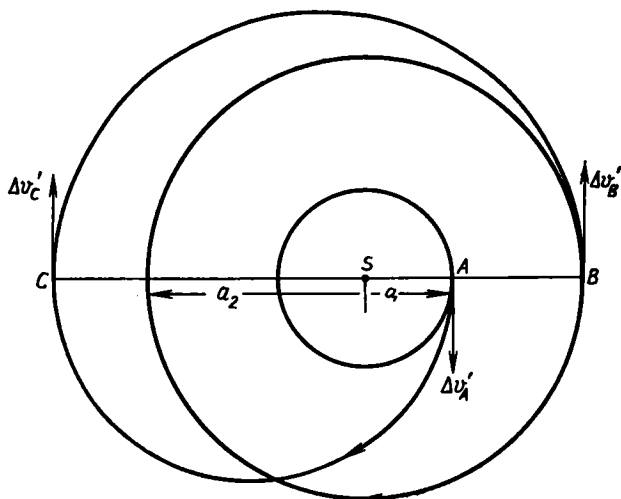


Рис. 11.4

Получая приращение скорости  $\Delta v'_A$ , аппарат выходит на эллиптическую орбиту, двигаясь по которой достигает апоцентра  $C$  далеко за пределами орбиты радиуса  $a_2$ . Там дается дополнительное приращение скорости  $\Delta v'_C$ , увеличивающее энергию настолько, чтобы перевести аппарат на новую эллиптическую орбиту с перигентром  $B$  на орбите радиуса  $a_2$ . Затем в точке  $B$  производится третье включение двигателя, в результате которого скорость уменьшается на  $\Delta v'_B$  и аппарат переходит на нужную круговую орбиту радиуса  $a_2$ .

Можно показать [2], что при  $a_2/a_1 \gg 15,582$  использование биэллиптической орбиты перехода такого вида приведет к экономии топлива. Недостатком таких орбит является очень большое время перехода.

### 11.3.3. Изменения элементов орбиты, вызванные малым импульсом

В этом разделе обсуждается влияние малого импульса  $I$ , направленного под произвольным углом к орбите, на изменение величины элементов орбиты. Поскольку за время действия импульса

радиус-вектор не изменяется, то все изменения элементов определяются изменением вектора скорости по величине и по направлению, вызванным приложением импульса  $I$ . Качественно многие из следствий станут сразу же понятными, если вспомнить, что изменение  $\Delta v$  вектора скорости  $v$  может быть разложено на компонент, нормальный к плоскости орбиты ( $\Delta v_W$ ), и два взаимно перпендикулярных компонента, лежащих в плоскости орбиты. Это могут быть либо компоненты вдоль радиуса-вектора и по нормали к нему ( $\Delta v_S$  и  $\Delta v_T$ ), либо по касательной и по нормали к орбите ( $\Delta v_{T'}$  и  $\Delta v_N$ ) (см. разд. 6.7.4). Таким образом,

$$\Delta v = \Delta v_W + \Delta v_S + \Delta v_T = \Delta v_W + \Delta v_{T'} + \Delta v_N. \quad (11.28)$$

Очевидно, что импульс, для которого  $\Delta v_W$  равно нулю, никак не влияет на наклонение или долготу восходящего узла, поскольку он не изменяет плоскости орбиты.

Кроме того, поскольку выражения для скорости в случае эллипса и гиперболы имеют вид соответственно

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right); \quad V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right),$$

то при изменении только направления вектора скорости элемент  $a$  не изменится (так как  $r$  за время импульса не изменяется).

Укажем на важное приложение формулы для эллиптической скорости. Дифференцируя и учитывая, что  $r$  постоянно, получаем соотношение

$$2V\Delta V = \frac{\mu}{a^2} \Delta a,$$

показывающее, что для изменения большой полуоси эллиптической орбиты оптимальной точкой приложения импульса является перигеум, где  $V$  максимально.

Уравнения (6.41) можно преобразовать таким образом, чтобы они давали обусловленное малым импульсом  $I$  изменение  $\Delta \sigma$  любого элемента  $\sigma$  эллиптической орбиты.

Поскольку

$$\Delta v_S = S \Delta t, \quad \Delta v_T = T \Delta t, \quad \Delta v_W = W \Delta t,$$

уравнения принимают вид

$$\Delta a = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left( e \sin f \Delta v_S + \frac{p}{r} \Delta v_T \right),$$

$$\Delta e = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\Delta v_S \sin f + (\cos E + \cos f) \Delta v_T],$$



$$\Delta i = \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \Delta v_W,$$

$$\Delta \Omega = \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \Delta v_W,$$

$$\Delta \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -\Delta v_S \cos f + \left(1 + \frac{r}{\rho}\right) \Delta v_T \sin f \right] + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \Delta \Omega,$$

$$\Delta \epsilon = \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \Delta \tilde{\omega} + 2 \sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \Delta \Omega - \frac{2r}{na^2} \Delta v_S, \quad (11.29)$$

где  $f$  и  $E$  соответственно истинная и эксцентрическая аномалии,  $\rho = a(1 - e^2)$  и  $u = f + \tilde{\omega} - \Omega = f + \omega$ .

Если  $e$  и  $i$  очень малы, то можно воспользоваться преобразованием из разд. 6.7, а именно ввести  $h$ ,  $k$ ,  $p$  и  $q$  по формулам

$$\begin{aligned} h &= e \sin \tilde{\omega}, & k &= e \cos \tilde{\omega}, \\ p &= \operatorname{tg} i \sin \Omega, & q &= \operatorname{tg} i \cos \Omega. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим некоторые следствия уравнений (11.29).

Выше уже указывалось на то, что для изменения  $i$  и  $\Omega$  обязательно наличие компонента импульса по нормали к плоскости орбиты. Из уравнений (11.29) видно, кроме того, что для максимального изменения  $i$  нормальный компонент должен прикладываться в точке узла ( $u = 0^\circ, 180^\circ$ ), а для максимального изменения  $\Omega$  импульс следует прикладывать в средней точке между узлами ( $u = 90^\circ, 270^\circ$ ). Изменения максимальны, если  $r = a(1 + e)$ , т. е. если аппарат находится в апоцентре. Нормальный компонент влияет также на  $\tilde{\omega}$  и  $\epsilon$ , если  $u \neq 0$ . Если  $u \neq 0$  и нормальный компонент является единственным ненулевым компонентом импульса, то

$$\Delta \tilde{\omega} = 2 \sin^2 \frac{i}{2} \Delta \Omega = \Delta \epsilon.$$

Из  $\omega = \tilde{\omega} - \Omega$  следует  $\Delta \omega = \Delta \tilde{\omega} - \Delta \Omega$ , и, таким образом, изменение, обусловленное нормальным компонентом, равно

$$\Delta \omega = -\cos i \Delta \Omega.$$

В правой части стоит изменение  $\omega$ , вызванное смещением линии узлов (линии, от которой отсчитывается  $\omega$ ). Таким образом, если величина  $\omega$  измеряется от некоторой фиксированной в плоскости орбиты линии, то она, подобно  $a$ ,  $e$  и  $T$  (период орбиты), не будет подвержена влиянию нормального компонента.

Поскольку в формулы входят тригонометрические функции  $f$  и  $E$ , величины и знаки изменений элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\tilde{\omega}$  и  $\epsilon$  зависят от того, в какой точке орбиты прикладывается импульс. Подробный анализ зависимостей изменений элементов от величин компонен-

тов импульса [определяемых уравнениями (11.29)] для случая эллипса и гиперболы содержится в работе [2]. В работе [1] приведена система уравнений, соответствующая (6.41) для гиперболического случая.

#### 11.3.4. Изменения элементов орбиты, вызванные большим импульсом

Если нужно осуществить переход от эллипса с заданными элементами к другому эллипсу с заметно отличающимися элементами (или даже к гиперболе) или наоборот, то это можно сделать, прикладывая импульс, т. е. включая на короткое время двигатель, один или несколько раз. Однако теперь импульсы должны иметь большую величину.

В разд. 4.12 были получены выражения для прямоугольных компонентов положения и скорости через элементы орбиты и время. Также была рассмотрена обратная задача выражения элементов через компоненты положения, скорости и заданное время. В принципе задача перехода с орбиты с заданными элементами (исходная орбита) на другую орбиту с заданными элементами (конечная, или целевая, орбита) может быть решена по следующей схеме с использованием формулы задачи двух тел из гл. 4:

1) Выбираем момент времени. По элементам исходной орбиты вычисляем положение и компоненты скорости аппарата в этот момент.

2) Вычисляем новые компоненты скорости в этот момент (положение считается неизменным), которые должен иметь аппарат для того, чтобы двигаться по нужной орбите перехода.

3) Вычитая старые компоненты скорости из новых, получаем необходимое приращение скорости и, следовательно, необходимую величину импульса.

4) По элементам орбиты перехода и моменту времени, в который она пересекает конечную орбиту, вычисляем положение и компоненты скорости аппарата в этот момент.

5) По элементам конечной орбиты вычисляем компоненты скорости и положение аппарата в этот момент.

6) Вычитая компоненты скорости, полученные в 5) из компонентов скорости, полученных в 4), находим приращение скорости, необходимое для перевода аппарата на конечную орбиту.

Единственным ограничением выбора орбиты перехода в приведенной выше схеме является условие, что орбита перехода должна касаться или пересекать и исходную, и конечную орбиты. На практике имеется много дополнительных ограничений, сужающих класс возможных орбит перехода. Они возникают из-за ограниченности запасов топлива, которые можно потратить на переход; есть ограничения на время перехода и на чувствительность ор-

биты перехода к ошибкам обработки импульса. Дополнительные ограничения могут также накладываться относительными положениями начальной и конечной точек (в случае межпланетного полета обе эти точки совпадают с положениями планет).

В следующих разделах будут сделаны некоторые общие замечания по поводу таких ограничений.

### 11.3.5. Зависимость расхода топлива от времени перехода

Было показано, что при заданной величине импульса он оказывает наибольшее влияние на изменение кинетической энергии аппарата, если прикладывается по касательной к орбите. Следовательно, наиболее экономное использование топлива имеет место в случае касательных импульсов. Однако такая экономия топлива приводит к касательным орбитам перехода, а они являются мед-

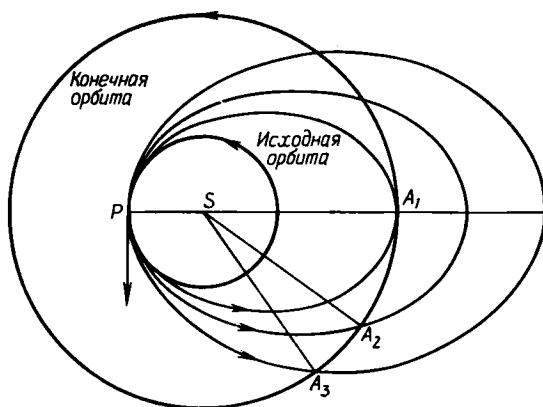


Рис. 11.5.

ленными. При таких переходах большая часть времени уходит на движение по тому участку кеплеровской орбиты, где истинная аномалия изменяется в пределах  $90^\circ < f < 180^\circ$ . Увеличивая импульс, предназначенный для перевода аппарата с исходной орбиты на орбиту перехода, но оставляя его по-прежнему касательным, можно увеличить большую полуось эллипса перехода. При этом, как видно из разд. 11.3.2, может быть получена даже параболическая или гиперболическая орбита перехода. Мы пока не будем рассматривать эти аperiodические орбиты. Очевидно, что при увеличении импульса точка пересечения эллипса перехода с конечной орбитой (которая предполагается круговой и компланарной с исходной круговой орбитой) регрессирует. На рис. 11.5 истинные аномалии точек  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  последовательно уменьшаются по мере увеличения импульса в точке  $P$ .

Время перехода  $t_T$  — это уже не время, определяемое полупериодом орбиты перехода, а время, которое требуется аппарату для прохождения по истинной аномалии угла  $PSA$ , который мы будем обозначать  $f_A$ .

Из гл. 4 имеем

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{f_A}{2}, \quad (11.30)$$

$$M = E - e \sin E \quad (11.31)$$

и

$$M = n(t - t_0), \quad t - t_0 = M/n, \quad (11.32)$$

где

$$n^2 a^3 = \mu. \quad (11.33)$$

Величины  $\mu$ ,  $a$  и  $e$  — это соответственно  $GM$ , большая полуось и эксцентриситет орбиты перехода;  $t$  и  $t_0$  — соответственно время достижения аппаратом конечной орбиты и время выхода на орбиту перехода. Следовательно, время перехода  $t_T$  равно  $(t - t_0)$ .

Если радиус исходной орбиты  $a_1$ , то

$$a(1 - e) = a_1. \quad (11.34)$$

Скорость  $V_P$  в перигентре орбиты перехода выражается формулой

$$V_P^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) = (V_D + V_I)^2, \quad (11.35)$$

где  $V_D$  — скорость на исходной орбите, а  $V_I$  — приращение скорости, обусловленное импульсом.

Имеем

$$V_D = \sqrt{\frac{\mu}{a_1}}.$$

Величины  $a$  и  $e$  находятся из уравнений (11.34) и (11.35), после чего, воспользовавшись уравнениями (11.30)–(11.33), определяется время перехода для данного значения  $f_A$ .

Если, как в рассматриваемом случае, конечная орбита является окружностью, то ее радиус  $a_2$  равен радиусу-вектору аппарата на орбите перехода в точке  $A$ , так что

$$a_2 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f_A},$$

откуда можно определить  $f_A$ . Если конечная орбита эллиптическая, то радиус-вектор точки пересечения может быть выражен через истинную аномалию, большую полуось и эксцентриситет конечной орбиты. Величину и направление скорости в этой точке как

для орбиты перехода, так и для конечной орбиты можно найти, воспользовавшись соотношениями из гл. 4, а именно

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

и

$$\sin \phi = \left[ \frac{a^2 (1 - e^2)}{r(2a - r)} \right]^{1/2},$$

где  $\phi$  — угол между вектором скорости и радиусом-вектором. Сравнение обоих векторов скорости дает возможность вычислить приведенным ниже способом величину импульса, необходимого для преобразования орбиты перехода в конечную орбиту аппарата.

На рис. 11.6, который представляет собой обобщение рис. 11.5 на случай, когда конечная орбита является эллипсом,  $V_T$  и  $V_N$  обозначают скорости в точке  $A$  на орбите перехода и на конечной орбите соответственно, а  $\phi_T$  и  $\phi_N$  — это углы между векторами ско-

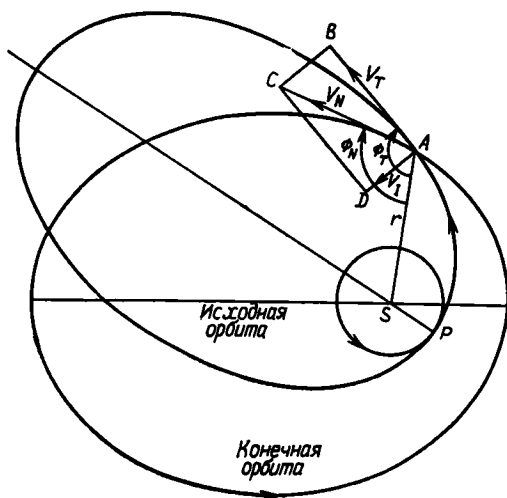


Рис. 11.6.

рости и радиусом-вектором. Тогда для того, чтобы преобразовать орбиту перехода в конечную орбиту, скорость должна быть изменена на величину  $V_I = V_N - V_T$ . Из параллелограмма скоростей  $ABCD$  следует, что

$$V_I = [V_N^2 + V_T^2 - 2V_N V_T \cos(\phi_T - \phi_N)]^{1/2} \quad (11.36)$$

и

$$\operatorname{tg}(\phi_N - \phi_I) = \frac{V_T \sin(\phi_T - \phi_N)}{V_N - V_T \cos(\phi_T - \phi_N)}, \quad (11.37)$$

где  $V_I = |V_I|$  и  $\phi_I = \angle DAS$ .

Таким образом, могут быть вычислены  $V_I$  и  $\phi_I$ . Для случаев параболических и гиперболических переходов можно воспользоваться соответствующими уравнениями гл. 4.

На рис. 11.5 также видно, что кроме регрессии точки  $A$  имеет место увеличение угла, под которым пересекаются орбита перехода и конечная орбита. Это является нежелательным, поскольку приводит к все большему росту импульса, необходимого для изменения орбиты в точке  $A$ . Таким образом, на практике сокращение времени перехода приводит к увеличению расхода топлива. Обобщение задачи на случай перехода между двумя эллипсами малого эксцентриситета, плоскости которых наклонены друг к другу под небольшим углом, не меняет основного вывода о том, что если существует быстрая орбита перехода, пересекающая один или оба эллипса, то на ней расходуется значительно больше топлива, чем на почти касательной орбите.

### 11.3.6. Зависимость орбиты перехода от малых ошибок положения и скорости в момент выключения двигателя

Рассмотрим теперь зависимость орбиты перехода от ошибок скорости и радиуса-вектора в момент выключения двигателя (т. е. в момент окончания отработки импульса). Такие ошибки возникают из-за того, что прилагаемый импульс немного отличается от импульса, необходимого для перевода аппарата на нужную орбиту перехода. В результате аппарат выходит на орбиту перехода с элементами  $\sigma' = \sigma + \Delta\sigma$ , где  $\sigma$  — это величина планируемого элемента, а  $\Delta\sigma$  — ошибка, обусловленная ошибкой импульса  $\Delta I$ .

Рассмотрим простой компланарный пример. Пусть в момент времени  $t_0$  (момент выключения) аппарат должен иметь долготу  $l$ , радиус-вектор  $r$  и скорость  $V$ , составляющую угол  $\phi$  с радиусом-вектором. В действительности импульс отрабатывается с ошибкой, так что в момент выключения долгота, радиус-вектор, величина скорости и угол равны соответственно  $l + \Delta l$ ,  $r + \Delta r$ ,  $V + \Delta V$  и  $\phi + \Delta\phi$  (рис. 11.7).

Таким образом, между элементами запланированной эллиптической орбиты  $a$ ,  $e$ ,  $\tau$  (момент прохождения перигея) и  $\omega$  (долгота перигея) и элементами реальной орбиты имеются расхождения  $\Delta a$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta\tau$  и  $\Delta\omega$ .

Ошибки, можно считать малыми, так что выражения для них могут быть получены частным дифференцированием соответствующих уравнений гл. 4. Для эллиптической орбиты имеем

$$V^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (11.38)$$

$$T = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}, \quad n = 2\pi/T, \quad (11.39)$$

$$e = \left[ 1 - \frac{r}{a^2} (2a - r) \sin^2 \phi \right]^{1/2}, \quad (11.40)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} = a(1 - e \cos E), \quad (11.41)$$

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (11.42)$$

$$l = f + \omega. \quad (11.43)$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (11.44)$$

$$\sin \phi = \left( \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 E} \right)^{1/2} = \frac{1 + e \cos f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}, \quad (11.45)$$

$$\cos \phi = \frac{-e \sin E}{(1 - e^2 \cos^2 E)^{1/2}} = \frac{-e \sin f}{(1 + e^2 + 2e \cos f)^{1/2}}. \quad (11.46)$$

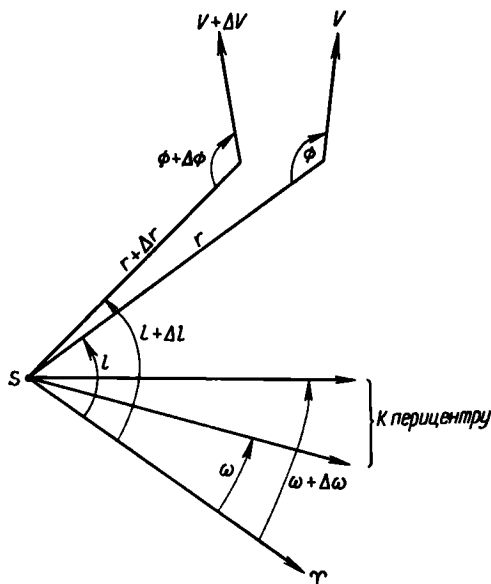


Рис. 11.7.

В общих чертах определение элементов  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  по  $r$ ,  $V$ ,  $\phi$ ,  $l$  и  $t$  было описано в гл. 4. Дифференцируя (11.38), получаем

$$\frac{\Delta a}{a} = 2a \left[ \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r^2} \right]. \quad (11.47)$$

Аналогично имеем

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}, \quad \frac{\Delta n}{n} = -\frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}. \quad (11.48)$$

Из уравнений (11.40) и (11.47) следует соотношение

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{r}{a} \left( \frac{r}{a} - 2 \right) \frac{\sin \phi}{e^2} \left[ \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \left( \frac{2\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \phi + \Delta \phi \cos \phi \right]. \quad (11.49)$$

Используя (11.42) и (11.43), находим

$$\Delta \tau = \frac{1}{n} \left[ (t - \tau) \Delta n + \Delta e \sin E - \frac{r}{a} \Delta E \right] \quad (11.50)$$

и

$$\Delta \omega = \Delta l - \Delta f. \quad (11.51)$$

Чтобы получить выражения для  $\Delta E$  и  $\Delta f$ , используем уравнения (11.41), (11.45), (11.46), (11.47) и (11.49). Искомые выражения имеют вид

$$\Delta E = -\frac{1}{e} \left[ \frac{a}{r} \left( \frac{2\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right) \sin E - \Delta \phi \cos E (1 - e^2)^{1/2} \right] \quad (11.52)$$

и

$$\Delta f = -\frac{1}{e} \left[ \left( \frac{2\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right) \sin f - \left( \frac{r}{a} \cos f + 2e \right) \Delta \phi \right], \quad (11.53)$$

откуда окончательно получаем

$$\Delta \tau = \frac{1}{n} \left\{ (t - \tau) \Delta n + \frac{1}{e} \left[ \frac{a}{r} (1 - e^3 \cos E) \left( \frac{2\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right) \sin E - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{1 - e^2} (\cos E - e) \Delta \phi \right] \right\} \quad (11.54)$$

и

$$\Delta \omega = \Delta l + \frac{1}{e} \left[ \sin f \left( \frac{2\Delta V}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right) + \left( \frac{r}{a} \cos f + 2e \right) \Delta \phi \right]. \quad (11.55)$$

Чтобы показать, как могут использоваться приведенные выше соотношения для  $\Delta a$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta \omega$  и  $\Delta \tau$ , рассмотрим такой пример. Предположим, что единственной ошибкой является ошибка в величине скорости, т. е.

$$\Delta r = \Delta \phi = \Delta l = 0.$$



Тогда ошибки величин  $a$ ,  $e$ ,  $T$  и  $n$  определяются по следующим формулам:

$$\frac{\Delta a}{a} = 2a \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\Delta V}{V}, \quad (11.56)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}, \quad \frac{\Delta n}{n} = -\frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}, \quad (11.57)$$

$$\frac{\Delta e}{e} = \left( \frac{r}{a} - 2 \right) \left( \frac{r}{a} - 1 \right) \frac{\sin^2 \varphi}{e^2} \frac{2 \Delta V}{V}. \quad (11.58)$$

Предположим еще, что импульс прикладывается в перигеуме, т. е.

$$r = a(1 - e), \quad \phi = \frac{\pi}{2}, \quad V^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right).$$

Тогда уравнения (11.56) и (11.58) принимают вид соответственно

$$\frac{\Delta a}{a} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \frac{2 \Delta V}{V} = 2 \left[ \frac{a}{\mu} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \right]^{1/2} \Delta V, \quad (11.59)$$

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{1+e}{e} \frac{2 \Delta V}{V} = 2 \left[ \frac{a}{\mu} (1 - e^2) \right]^{1/2} \frac{\Delta V}{e}. \quad (11.60)$$

Очевидно, что при стремлении эксцентриситета орбиты к единице влияние ошибки  $a$  очень сильно растет.

Рассмотрим пример, демонстрирующий характер зависимости орбиты от ошибок при больших значениях  $e$ . Для получения орбиты перехода от круговой орбиты высотой 500 км над поверхностью Земли к окрестности орбиты Луны необходимо приращение скорости, примерно равное 3,058 км/с. Такое приращение скорости нужно для того, чтобы из круговой скорости, равной 7,613 км/с, получить скорость в перигее 10,671 км/с. При этом после приложения соответствующего импульса ошибка скорости окажется равной  $\Delta V/V$ . Дифференцируя соотношение

$$r_A = a(1 + e),$$

можно найти ошибку  $\Delta r_A/r_A$  апогейного расстояния  $r_A$  конечной орбиты. Искомое выражение имеет вид

$$\frac{\Delta r_A}{r_A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta e}{1+e}. \quad (11.61)$$

Воспользовавшись уравнениями (11.59) и (11.60), получаем

$$\frac{\Delta r_A}{r_A} = \left( \frac{4}{1-e} \right) \frac{\Delta V}{V}. \quad (11.62)$$

Номинальная орбита перехода в этом примере имеет эксцентриситет 0,9648 и апогейное расстояние 384 400 км. Следовательно, ошибка всего в 30 см/с в стартовой скорости приведет к ошибке апогейного расстояния  $\Delta r_A$  порядка 1230 км.

Если единственной отличной от нуля ошибкой является ошибка величины радиуса-вектора в точке перехода, то из того же примера видно, что ошибка апогейного расстояния выражается формулой

$$\frac{\Delta r_A}{r_A} = \left( \frac{3 - e}{1 - e} \right) \frac{\Delta r}{r}. \quad (11.63)$$

Ошибка по радиусу-вектору в 1 км приведет к ошибке апогейного расстояния в 3231 км.

Аналогичный анализ может быть проведен и для гиперболических орбит. Кроме того, задача исследования чувствительности орбиты к ошибкам может быть рассмотрена с учетом ошибок наклона и долготы восходящего узла, т. е. когда ошибки векторов положения и скорости имеют компоненты по всем трем измерениям. С принципиальной стороны эта задача, хотя и более сложная, не отличается от плоского случая и здесь рассматриваться не будет.

### 11.3.7. Переход между частицами, движущимися по орбитам в центральном поле сил

Задача перехода с одной орбиты на другую в центральном поле сил обычно осложняется тем, что и начальная, и конечная точки сами движутся по орбитам (например, две планеты, обращающиеся по орбитам вокруг Солнца). Если пренебречь гравитационными полями этих тел, предполагая, что их массы бесконечно малы, то орбита перехода между двумя планетами должна пересекать орбиту планеты-цели в той точке, в которую она в этот момент времени приходит.

Основные характерные черты этой задачи снова можно продемонстрировать на простом примере. Пусть две частицы  $P_1$  и  $P_2$  обращаются по круговым компланарным орбитам с радиусами  $a_1$  и  $a_2$  вокруг тела массы  $M$  (рис. 11.8), и пусть в момент  $t_0$  они имеют долготы соответственно  $(l_1)_0$  и  $(l_2)_0$  (долгота измеряется от направления на точку весны  $\Upsilon$ ). Задача состоит в выборе для космического аппарата орбиты перехода от частицы  $P_1$  к частице  $P_2$ .

Угловые скорости  $n_1$ ,  $n_2$  частиц  $P_1$ ,  $P_2$  определяются как

$$n_1 = \sqrt{GM/a_1^3}, \quad n_2 = \sqrt{GM/a_2^3}, \quad (11.64)$$

так что долготы частиц в момент  $t$  равны соответственно

$$\begin{aligned} l_1 &= (l_1)_0 + n_1 (t - t_0), \\ l_2 &= (l_2)_0 + n_2 (t - t_0). \end{aligned} \quad (11.65)$$

Время, в течение которого аппарат движется по орбите перехода, должно быть равно времени, в течение которого частица  $P_2$  движется до точки пересечения орбиты перехода с конечной орби-

той. Следовательно, эта точка  $C$  расположена впереди положения  $P_2$  (точки  $B$ ) в момент начала движения аппарата от  $P_1$  в точке  $A$ .

Если  $\angle BSC = \theta$ , то время перехода  $t_T$  определяется по формуле

$$t_T = \theta/n_2. \quad (11.66)$$

Далее следует установить допустимую продолжительность перехода и допустимые затраты топлива. Если экономия топлива яв-

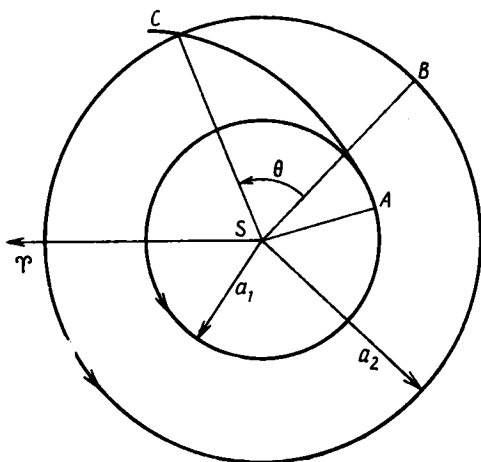


Рис. 11.8.

ляется главным требованием, то орбита перехода будет касательным эллипсом между орбитами  $P_1$  и  $P_2$  (если  $a_2/a_1 < 15,582$  — см. разд. 11.3.2). Время перехода  $t_T$  получается из (11.16) и (11.24) и равно

$$t_T = \pi \left[ \frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM} \right]^{1/2}.$$

Тогда в силу (11.66) получаем

$$\theta = \pi n_2 \left[ \frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM} \right]^{1/2}. \quad (11.67)$$

Долгота частицы  $P_1$  в момент старта аппарата на  $\pi$  радиан меньше долготы частицы  $P_2$  в момент достижения ее аппаратом. Таким образом, в момент старта аппарата долгота одной частицы отличается от долготы другой на  $(\pi - \theta)$  радиан или на величину  $L_{12}$ , определяемую по следующей формуле:

$$L_{12} = \pi \left\{ 1 - n_2 \left[ \frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM} \right]^{1/2} \right\} = \pi \left\{ 1 - \left[ \frac{1 + a_1/a_2}{2} \right]^{3/2} \right\}. \quad (11.68)$$

В силу (11.65) имеем

$$l_2 - l_1 = [(l_2)_0 - (l_1)_0] + (n_2 - n_1)(t - t_0). \quad (11.69)$$

Если в (11.69)  $(l_2 - l_1)$  приравнять правой части (11.68), то полученные в результате уравнения могут быть использованы для нахождения значений  $t$ . Эти значения определяют все будущие эпохи, в которые аппарат может начинать движение по касательной орбите перехода от  $P_1$  к  $P_2$ . Очевидно, в данной задаче эти эпохи отличаются на интервал времени  $S$ , называемый *синодическим периодом одной частицы относительно другой* и равный промежутку времени, который проходит между последовательными геометрически подобными конфигурациями частиц и центрального тела.

Синодический период легко находится из условия, что за один синодический период радиус-вектор движущегося с большей скоростью тела опережает радиус-вектор второго тела на  $360^\circ$  ( $2\pi$  радиан). Отсюда

$$S(n_1 - n_2) = 2\pi,$$

или, используя синодические периоды обращения частиц ( $T_1$  и  $T_2$ , определяемые соотношением  $n = 2\pi/T$ ), получаем

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \quad (11.70)$$

При обратном переходе по касательному эллипсу от  $P_2$  к  $P_1$  эпохи, соответствующие последовательным допустимым конфигурациям системы, отличаются на такой же период. Время перехода  $t_T$  должно быть таким же, как и для перехода от  $P_1$  к  $P_2$ , а угол  $\theta'$  между радиусом-вектором  $P_1$  в момент старта аппарата с  $P_2$  и радиусом-вектором точки встречи с  $P_1$  определяется по формуле

$$\theta' = n_1 t_T.$$

Тогда при соответствующей конфигурации тел отличие в долготе  $P_2$  и  $P_1$  должно равняться

$$L'_{21} = \pi \left\{ n_1 \left[ \frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM} \right]^{1/2} - 1 \right\} = \pi \left\{ \left[ \frac{1 + a_2/a_1}{2} \right]^{3/2} - 1 \right\}. \quad (11.71)$$

Таким образом, получаем

$$l_2 - l_1 = [(l_2)_0 - (l_1)_0] + (n_2 - n_1)(t - t_0). \quad (11.72)$$

Соотношение (11.71) может быть использовано вместе с (11.72) для вычисления допустимых эпох для обратного перелета. Для того чтобы найти продолжительность полета «туда и обратно», надо определить интервал ожидания между моментом возвращения в  $B$  и первым допустимым моментом старта и прибавить к нему  $2t_T$ .

Минимальное время ожидания  $t_w$  может быть легко получено из соображений симметрии. Если в момент окончания перехода от  $P_1$  к  $P_2$  тело  $P_1$  опережает  $P_2$  на  $\alpha$  градусов (рис. 11.9, а), то в первый допустимый для начала обратного перехода от  $P_2$  к  $P_1$  момент времени тело  $P_1$  должно на  $\alpha$  градусов отставать от  $P_2$ . Отсюда получаем

$$t_w = \left( \frac{360^\circ - 2\alpha}{360^\circ} \right) S = \frac{360^\circ - 2\alpha}{n_1 - n_2}. \quad (11.73)$$

Если же в момент завершения перехода от  $P_1$  к  $P_2$  тело  $P_1$  отставало от  $P_2$  на  $\alpha$  градусов (рис. 11.9, б), то первый допустимый

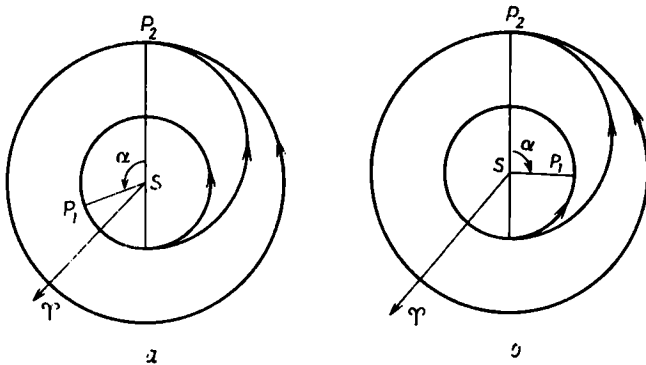


Рис. 11.9.

для возвращения от  $P_2$  к  $P_1$  момент наступит тогда, когда  $P_1$  достигнет точки на  $\alpha$  градусов впереди  $P_2$ . В этом случае имеем

$$t_w = \frac{\alpha}{180} S = \frac{2\alpha}{n_1 - n_2}. \quad (11.74)$$

Чтобы вычислить  $\alpha$ , заметим, что в силу уравнения (11.65)

$$l_1 - l_2 = [(l_1)_0 - (l_2)_0] + (n_1 - n_2)(t - t_0).$$

Пусть частицы в момент старта имели долготу соответственно  $(l_1)_0$  и  $(l_2)_0$ , а в момент возвращения  $t - l_1$  и  $l_2$ . Тогда

$$t - t_0 = t_T, \quad (l_1)_0 - (l_2)_0 = \theta - \pi = n_2 t_T - \pi$$

и, следовательно,

$$l_1 - l_2 = n_1 t_T - \pi. \quad (11.75)$$

Угол  $\alpha$  определяется из соотношения

$$n_1 t_T - \pi = 2\pi k + \alpha, \quad (11.76)$$

где  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ , а  $k$  — целое число, большее или равное нулю. Если  $\alpha$  положительно, то  $t_w$  определяется из (11.73), если отрицательно, то из (11.74).

Время ожидания  $t'_w$ , когда перелет осуществляется от частицы на внешней орбите к частице на внутренней орбите и обратно, определяется по формуле

$$t'_w = \frac{2t_T}{n_1/n_2 - 1}, \quad (11.77)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — средние движения на внутренней и внешней орбитах соответственно. В основе этого результата лежит тот факт, что в течение перехода к внутренней частице долгота внешней частицы увеличивается на угол  $\beta$ , меньший  $180^\circ$ . Поэтому ближайший момент времени, когда можно начать обратный переход, наступит тогда, когда разность долготы внешней частицы и долготы внутренней частицы увеличится на угол  $360^\circ - 2\beta$ . Таким образом, минимальное время ожидания равно

$$t'_w = \frac{360^\circ - 2\beta}{n_1 - n_2} = \frac{2n_2 t_T}{n_1 - n_2} = \frac{2t_T}{n_1/n_2 - 1}.$$

Если мы в состоянии затратить на переход большее количество топлива, то можно не только сократить время перехода, но и время ожидания в точке  $B$ . Задача отыскания подходящей стартовой конфигурации является не намного более сложной, поскольку, раз уж орбита перехода выбрана, продолжительность перехода, как и раньше, диктует необходимую конфигурацию. Задача усложняется, если надо осуществить переход между двумя некопланарными эллиптическими орбитами, имеющими различную долготу перигелия, однако и тогда орбита перехода может быть найдена при помощи формул задачи двух тел.

При большем количестве топлива выбор орбиты становится значительно более гибким. Тогда может быть поставлена задача оптимизации орбиты перехода по расходу топлива, чувствительности к ошибкам, времени перехода и времени суммарного полета «туда и обратно». Решением такой задачи занимались многие исследователи.

#### 11.4. Орбиты перехода в силовых полях двух или более притягивающих центров

Теоретически гравитационное поле любого тела простирается до бесконечности. Таким образом, в силу притяжения, действующую на космический аппарат в любой точке пространства, вносят вклад все тела Вселенной. На практике мы, конечно, можем пренебречь звездами и другими галактиками; кроме того, задачи, в которых должно было бы учитываться притяжение Солнца, планет и спутников, можно значительно упростить, поскольку в большинстве случаев одно из этих тел можно считать главным (благодаря его большой массе или близости к аппарату), а силами со стороны

других тел можно пренебречь либо считать их малыми возмущениями. Таким образом, анализ орбит перехода в силовом поле одного притягивающего центра, данный в разд. 11.3—11.3.7, имеет не только теоретическое, но и практическое значение.

Однако при рассмотрении перехода аппарата из близкой окрестности одного тела в близкую окрестность другого тела использование силового поля одного притягивающего центра даст нам уже неадекватную картину. Находясь вначале в силовом поле первого тела, аппарат входит в область, где поля обоих тел сравнимы по напряженности, а затем переходит в область, где преобладает поле второго тела. Если поведение аппарата при движении по орбите перехода надо исследовать с высокой степенью точности, то должны применяться специальные методы теории возмущений (по крайней мере во время движения в области, где силовые поля двух тел сравнимы). Тем не менее основные свойства таких переходов можно получить и при помощи формул задачи двух тел. В данном разделе будет описан способ применения этих формул.

#### 11.4.1. Гиперболический уход от первого тела

Здесь мы имеем дело с переходом аппарата из одного силового поля в другое. Поэтому аппарат, чтобы он смог покинуть первое поле, должен получить параболическую скорость (т. е. скорость ухода, или скорость освобождения). На практике, чтобы избежать больших времен, необходимых для осуществления такого маневра, аппарату стараются сообщить гиперболическую скорость. Если скорость больше параболической, то это приводит к резкому сокращению времени нахождения аппарата в поле первого тела. Процесс ухода заканчивается, когда аппарат удаляется на такое расстояние от первого тела, где его гравитационное поле уже не оказывает заметного влияния на орбиту аппарата, которую с этого момента следует рассматривать как орбиту относительно второго тела.

Предполагается, что выход на гиперболическую орбиту совершается с исходной орбиты вокруг первого тела. Эта исходная орбита может быть эллиптической или круговой и может быть компланарной или некомпланарной с гиперболической орбитой перехода. Для простоты мы рассмотрим только круговую исходную орбиту, компланарную с гиперболической орбитой. Переход на гиперболическую орбиту совершается в результате приложения касательного импульса. Схема перехода изображена на рис. 11.10, где  $V_c$  — круговая скорость на исходной орбите радиуса  $\rho_0$ ,  $V_p$  — скорость освобождения (параболическая),  $V_h$  — гиперболическая скорость, достигнутая фактически,  $U$  — точка пересечения асимптот гиперболы,  $V$  — скорость аппарата на расстоянии, соответствующем выходу из эффективного гравитационного поля центрального тела.

Скорость  $V$  выражается через массу  $m$  первого тела, расстояние  $\rho$  от центра, скорость освобождения  $V_e$  и дополнительное приращение скорости  $v_e$ , которое прибавляется к скорости освобождения, чтобы получить гиперболическую скорость  $V_h = V_e + v_e$  на расстоянии  $\rho_0$ , равном радиусу исходной круговой орбиты.

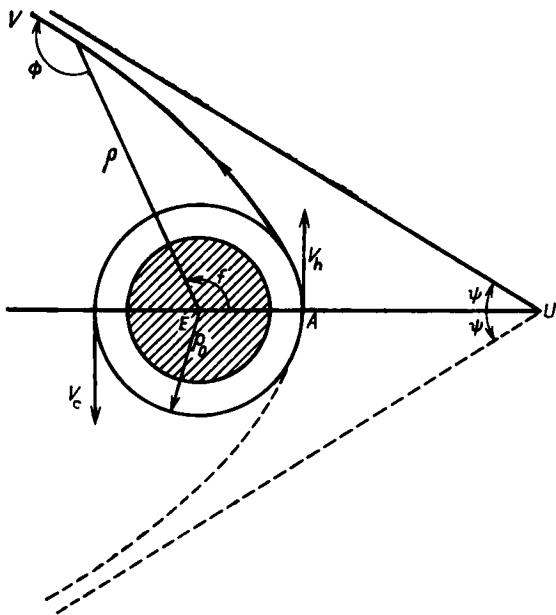


Рис. 11.10.

Если бы на расстоянии  $\rho_0$  была достигнута скорость освобождения, то мы имели бы

$$\frac{1}{2}V_e^2 - \frac{Gm}{\rho_0} = 0. \quad (11.78)$$

Однако если скорость аппарата на расстоянии  $\rho_0$  была не  $V_e$ , а  $V_e + v_e$ , то скорость  $V$  на расстоянии  $\rho$  определится из соотношения

$$\frac{1}{2}(V_e + v_e)^2 - \frac{Gm}{\rho_0} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{Gm}{\rho}$$

или, воспользовавшись (11.78),

$$V = \left[ \frac{2Gm}{\rho} + v_e(2V_e + v_e) \right]^{1/2}. \quad (11.79)$$



Выражение (11.79) дает значение скорости, которую аппарат имеет на расстоянии  $\rho$  от центрального тела, если на расстоянии  $\rho_0$  он получил кроме скорости освобождения  $V_c$  еще дополнительное приращение скорости  $v_e$ . Заметим, что

$$V_e = \sqrt{2}V_c = \sqrt{2Gm'/\rho_0}. \quad (11.80)$$

Обычно расстояние  $\rho$  во много раз больше, чем  $\rho_0$ , так что направление  $V$  по существу совпадает с направлением асимптоты гиперболы  $UB$ . Таким образом, угол  $EUB$  задает направление освобождения относительно направления  $EA$ , где  $A$  — точка, в которой включается двигатель.

Для угла  $EUB$  ( $= \psi$ ) имеет место соотношение (см. разд. 4.8)  $\operatorname{tg} \psi = \pm b/a$ , где  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ .

В перигентре в силу уравнений (4.88) и (4.92) имеем

$$V_h^2 = \frac{Gm}{a} \left( \frac{e+1}{e-1} \right), \quad \rho_0 = a(e-1) \quad (11.81)$$

и, следовательно,

$$e = \left( \frac{V_h}{V_c} \right)^2 - 1. \quad (11.82)$$

Таким образом, для угла  $\psi$  имеет место соотношение

$$\operatorname{tg} \psi = \pm \frac{V_h}{V_c} \left[ \left( \frac{V_h}{V_c} \right)^2 - 2 \right]^{1/2}. \quad (11.83)$$

Если требуется точное направление скорости  $V$  (т. е. угол  $\phi$  между радиусом-вектором и скоростью), то в силу (4.94) получаем

$$\phi = 90^\circ + \arccos \left[ \frac{a^2(e^2 - 1)}{\rho(2a + \rho)} \right]^{1/2}, \quad (11.84)$$

где  $a$  и  $e$  находятся из (11.81) и (11.82), а  $\rho$  известно, так как известно расстояние, на котором можно пренебречь полем тела  $m$ .

Поскольку значение  $V$  вычисляется в точке, находящейся на границе (условной) поля тела  $m$ , то эта величина называется *гиперболическим избытком*. С такой скоростью частица уходит на бесконечность.

#### 11.4.2. Выход на орбиту вокруг второго тела

Пусть теперь аппарат выходит на орбиту вокруг второго тела массы  $M$ . Если первое тело  $E$  отождествить с планетой, а второе с Солнцем  $S$ , то во всех практических случаях гелиоцентрическая орбита будет эллипсом, элементы которого определяются величинами гелиоцентрических радиуса-вектора и вектора скорости планеты и планетоцентрических радиуса-вектора и вектора скорости

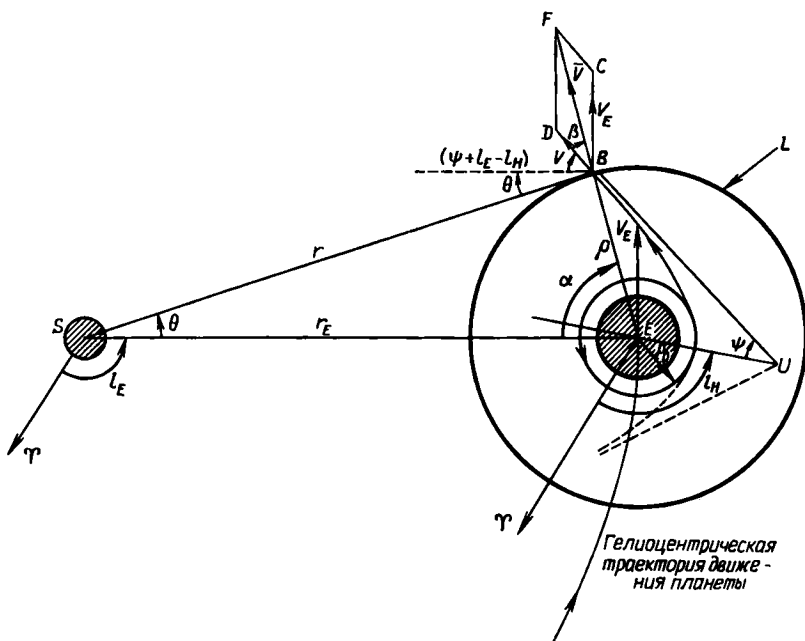


Рис. 11.11.

аппарата в момент выхода аппарата за пределы эффективного гравитационного поля планеты. Ситуация, соответствующая этому моменту времени, показана на рис. 11.11. Здесь орбита гиперболического ухода компланарна с плоскостью орбиты планеты вокруг Солнца. ( $L$  обозначает эффективную границу действия гравитационного поля планеты.) Предполагается, что эта плоскость совпадает с плоскостью эклиптики. Кроме того, предполагается, что вектор планетоцентрической скорости параллелен асимптоте гиперболы. В точке  $B$  аппарат имел планетоцентрический радиус-вектор  $\rho$  и скорость  $V$ , величина которой определяется по формуле (11.79). Направление скорости составляет угол  $\angle DBS$  с направлением на Солнце:

$$\angle DBS = \psi + \theta + (l_E - l_H). \quad (11.85)$$

Здесь  $\theta$  — угол между гелиоцентрическими радиусами-векторами планеты и аппарата,  $l_E$  и  $l_H$  — соответственно гелиоцентрическая долгота планеты и планетоцентрическая долгота точки приложения импульса.

Величину  $\psi$  находим из (11.83), а  $l_E$  и  $l_H$  заданы. Угол  $\theta$  получаем из треугольника  $SBE$ , решая уравнение

$$\cos \theta = \frac{1 - (\rho/r_E)^2 + (r/r_E)^2}{2\rho/r_E}, \quad (11.86)$$

где

$$\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\rho}{r_E}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho}{r_E}\right)\cos\alpha \quad (11.87)$$

и

$$\alpha = \pi - f + (l_E - l_H), \quad (11.88)$$

а  $f$  — планетоцентрическая истинная аномалия аппарата (т. е. угол  $UEB$ ).

Гелиоцентрическая скорость аппарата  $\bar{V}$  складывается из планетоцентрической скорости аппарата  $V$  и гелиоцентрической скорости планеты  $V_E$ , причем сложение производится по правилу параллелограмма ( $BCFD$  — параллелограмм скоростей).

Если  $\phi_E$  — угол между вектором скорости планеты и ее радиусом-вектором, то  $\angle CBD$  определяется по формуле

$$\angle CBD = \gamma = \phi_E - \psi - (l_E - l_H). \quad (11.89)$$

Тогда получаем

$$\bar{V}^2 = V_E^2 + V^2 + 2V_E V \cos \gamma \quad (11.90)$$

и

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_E \sin \gamma}{V + V_E \cos \gamma}. \quad (11.91)$$

Затем по величинам

$$\begin{aligned} l_V &= l_E + \theta, \\ \phi_V &= \beta + \psi + (l_E - l_H) + \theta, \\ &\bar{V} \text{ и } r, \end{aligned} \quad (11.92)$$

воспользовавшись соответствующими формулами задачи двух тел, можно вычислить элементы  $a'$ ,  $e'$ ,  $\tau'$  и  $\omega'$  (большую полуось, эксцентриситет, момент прохождения перигелия и долготу перигелия).

Заметим, что для всех планет  $\rho/\rho_0 \gg 1$  и  $r/\rho \gg 1$ , так что  $\theta$  обычно равно одному-двум градусам. При этом угол между направлением  $V$  и планетоцентрическим радиусом-вектором изменится в пределах нескольких градусов.

#### 11.4.3. Гиперболический захват

При таком переходе орбита вокруг большего тела превращается в замкнутую орбиту вокруг меньшего тела. Например, аппарат покидает эллиптическую орбиту в гелиоцентрическом поле и переходит на круговую или эллиптическую орбиту в гравитационном поле планеты-цели.

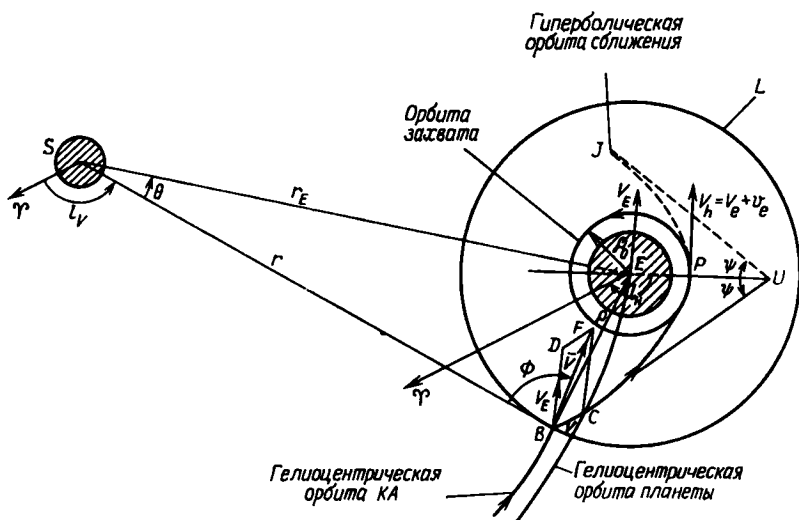


Рис. 11.12.

Теоретически в задаче трех тел захват может иметь место без всякого расхода топлива. Например, наиболее удаленные естественные спутники Юпитера с обратным движением, по всей вероятности, первоначально были астероидами, движущимися по гелиоцентрическим орбитам. При тесных сближениях этих астероидов с массивной планетой между ними происходил обмен энергией и кинетическим моментом, что в конце концов привело к тому, что они перешли на квазиустойчивые почти эллиптические орбиты вокруг Юпитера. Однако вычисления показывают, что конфигурации, благоприятные для таких захватов, встречаются очень редко, а получающиеся в результате орбиты оказываются сильно возмущенными, причем имеется довольно большая вероятность ухода тел с них при одном из последующих сближений.

Поэтому на практике, когда при сближении с планетой надо перейти с гиперболической на замкнутую орбиту, приходится расходовать топливо. Этот процесс, очевидно, является обратным по отношению к гиперболическому уходу, когда сила тяги прикладывается по направлению движения аппарата.

На рис. 11.12 изображена ситуация, соответствующая гиперболическому захвату ( $L$  снова обозначает границу эффективного гравитационного поля планеты). Гиперболическая орбита сближения  $BPJ$  после приложения в  $P$  обратного (тормозящего) импульса преобразуется в круговую орбиту вокруг планеты. Обратный импульс уменьшает планетоцентрическую гиперболическую скорость  $V_h$  до круговой скорости  $V_c$ . В рассматриваемом случае имеет ме-

сто прямое сближение и импульс прикладывается в перигецентре по касательной к орбите; разумеется, возможно и обратное сближение, тогда получающаяся в результате захвата орбита будет обратной.

Когда аппарат достигнет расстояния  $\rho$ , на котором гравитационное поле планеты становится существенным, можно, зная гелиоцентрическую скорость аппарата  $\bar{V}$ , угол  $\phi_V$ , который она составляет с гелиоцентрическим радиусом-вектором длины  $r$ , долготу аппарата  $l_V$  и соответствующие величины  $V_E$ ,  $\phi_E$ ,  $r_E$  и  $l_E = l_V + \theta$  для планеты, вычислить планетоцентрические радиус-вектор и скорость аппарата. Затем, используя полученные значения и обычные уравнения гиперболического движения, можно найти половинный угол  $\psi$  между асимптотами, долготу перигецентра  $l_H$ , расстояние  $\rho_0$  и скорость  $V_H$ , после чего можно вычислить изменение скорости, необходимое для перевода аппарата с гиперболической орбиты сближения на круговую орбиту.

#### 11.4.4. Точность проведенного анализа и влияние ошибок

В предыдущих разделах мы пренебрегали областью вокруг меньшего из двух тел, в которой оба силовых поля сравнимы по напряженности. Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно, для чего воспользуемся понятием сферы влияния. Формулы

$$|\epsilon_P| \sim \frac{m'}{d^3} \left[ 1 - \left( \frac{d}{1+d} \right)^2 \right], \quad (11.93)$$

$$|\epsilon_S| \sim \frac{d^3}{m'} [1 - (1+d)^{-2}] \quad (11.94)$$

определяют две сферы влияния вокруг спутника основного тела (планеты по отношению к Солнцу или Луны по отношению к планете). Здесь  $m'$  — масса спутника в единицах массы основного тела; чтобы определить величины радиусов сфер  $d$  вокруг спутника в единицах расстояния между спутником и основным телом, надо задать значения  $|\epsilon_P|$  и  $|\epsilon_S|$ . Последние две величины представляют собой соответственно отношение возмущающего ускорения аппарата, обусловленного влиянием спутника, к ускорению аппарата, вызванному действием центральной силы со стороны основного тела, и отношение возмущающего ускорения аппарата из-за притяжения основного тела к ускорению, вызванному центральной силой со стороны спутника.

Если  $|\epsilon_P|$  и  $|\epsilon_S|$  равны 0,1, то это соответствует слабому возмущению орбиты; фактически оно даже несколько меньше возмущения от Солнца на орбиты наиболее удаленных спутников Юпитера. Значение 0,01 соответствует очень слабому возмущению, в особенности если аппарат находится в возмущенной области

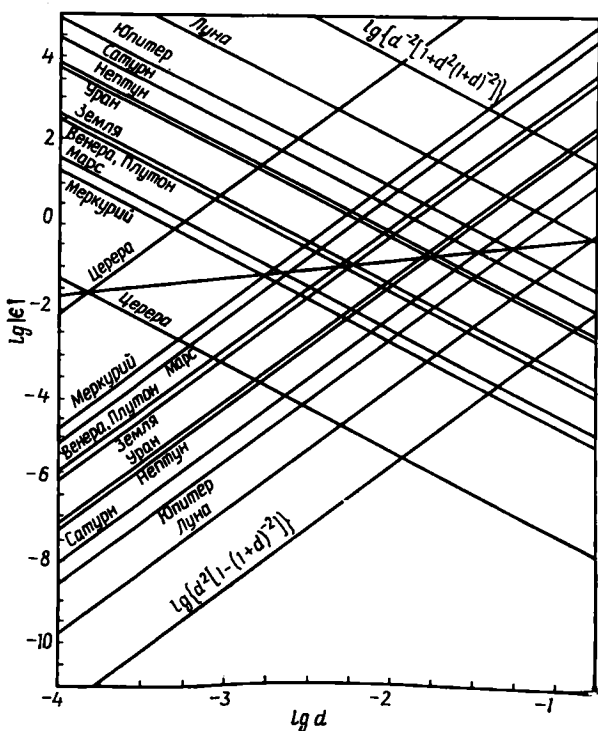


Рис. 11.13.

[т. е. в щели между двумя сферами влияния, определяемыми соотношениями (11.93), (11.94)] короткое время. Таким образом, в общем случае, если мы хотим получить результат с большой точностью, то движение аппарата вне щели между двумя сферами влияния нужно рассматривать в рамках задачи двух тел, а внутри щели применять более строгие методы.

На рис. 11.13 представлены зависимости  $|\epsilon_p|$  и  $|\epsilon_s|$  от  $d$  и  $m'$  (значения  $|\epsilon_s|$  увеличиваются слева направо, а  $|\epsilon_p|$  — наоборот).

Интересен тот факт, что для планет земной группы (Меркурия, Венеры, Земли, Марса и Плутона) при  $|\epsilon_p|$  и  $|\epsilon_s|$  больше 0,1 никакой щели между сферами влияния вокруг этих тел нет. А это означает, что если аппарат не будет длительное время находиться вблизи границы сферы влияния (условие, обычно реализуемое на практике), то применение формул задачи двух тел обеспечивает достаточную точность.

На рис. 11.13 также приведены зависимости  $|\epsilon_p|$  и  $|\epsilon_s|$  от  $d$  для системы Земля—Луна, из которых можно получить толщину

щели вокруг Луны, где Земля играет роль возмущающего тела. Кроме того, на рисунке изображены зависимости, относящиеся к наиболее массивному астероиду Церере [диаметр  $\sim 770$  км, масса  $\sim 1/(2,46 \times 10^9)$  массы Солнца], откуда видно, что если  $|\epsilon_p|$  и  $|\epsilon_s|$  одновременно больше 0,018, то щели нет (этот вывод справедлив для всех астероидов).

Чтобы вычислить точную орбиту на участке пересечения щели, можно воспользоваться либо методом Энке, либо методом Коуэлла. Примерно на полпути при движении сквозь щель [на границе сферы влияния, задаваемой формулой (6.10)] гелиоцентрические компоненты положения  $x, y, z$  и скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  аппарата путем простой замены осей преобразуются в планетоцентрические компоненты положения  $x', y', z'$  и скорости  $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ . При этом необходимо знать гелиоцентрические координаты и компоненты скорости планеты в этот момент времени. Такая задача во многом напоминает задачу из разд. 2.9.2, где осуществлялся переход от гелиоцентрических экваториальных прямоугольных координат к геоцентрическим экваториальным прямоугольным координатам. Соотношения между компонентами положения и скорости и элементами орбиты были приведены в разд. 4.12.

С момента входа аппарата во внутреннюю сферу влияния планеты и до тех пор, пока он ее не покинет, орбиту можно считать невозмущенной планетоцентрической.

Ошибки в импульсе, переводящем аппарат на гиперболическую орбиту ухода, имеют далеко идущие последствия. Во-первых, ошибки приведут к тому, что положение и скорость аппарата в момент выхода из эффективного гравитационного поля планеты будут немного отличаться от запланированных на этот момент времени положения и скорости. В свою очередь эта планетоцентрическая ошибка приведет к тому, что изменится точка входа гелиоцентрической орбиты перехода в сферу влияния планеты-цели и изменится соответствующая скорость аппарата. В результате изменится гиперболическая орбита захвата, так что для осуществления захвата потребуется другое количество энергии.

В разделе 11.3.6 был проведен элементарный анализ влияния ошибок импульса на элементы орбиты перехода в поле одного притягивающего центра. Точно так же можно выразить ошибки гиперболической орбиты освобождения (см. разд. 11.4.1) через ошибки импульса, прикладываемого на исходной круговой орбите. Воспользовавшись соотношениями (11.86) — (11.92), можно определить ошибки  $l_V, \phi_V, \bar{V}$  и  $r$ , а затем, применяя соответствующие уравнения задачи двух тел, можно получить ошибки элементов гелиоцентрической орбиты перехода и т. д.

Как и следовало ожидать, уравнения в этом случае оказываются значительно сложнее, чем в случае поля одного притяги-

вающего центра. Но самое неприятное состоит в том, что орбиты перехода от одной планеты к другой получаются настолько чувствительными к ошибкам, что при осуществлении пилотируемого или автоматического полета обязательно должна предусматриваться возможность корректировки орбиты аппарата. Таким образом, либо на аппарате, либо на Земле мы должны иметь соответствующие навигационные приборы.

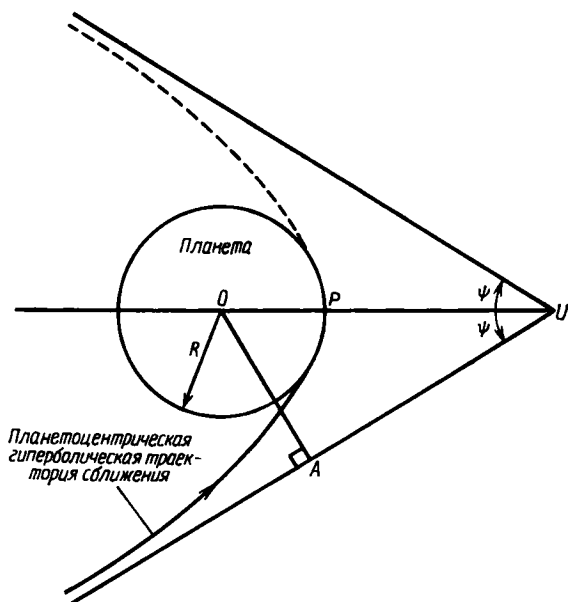


Рис. 11.14.

Еще одним эффектом, остававшимся до сих пор в тени, является фокусирующее действие гравитационного поля планеты-цели. Для того чтобы достигнуть планеты-цели, орбита зонда совсем не обязательно должна пересекать планету. Нужно лишь, чтобы перигиум гиперболической орбиты сближения касался поверхности планеты (рис. 11.14). Столкновение будет иметь место, если расстояние между асимптотой гиперболической орбиты и центром планеты меньше  $OA$ . Если  $R$  — радиус планеты, то для «радиуса столкновения»  $OA$  справедлива формула

$$OA = OU \sin \psi = (R + a) \sin \left[ \pi - \arccos \left( \frac{1}{e} \right) \right]$$

или

$$OA = (R + a) \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e},$$



где  $a = Gm/V^2$ , а  $V$ , как и раньше, — гиперболический избыток скорости. Тогда

$$OA = \left( R + \frac{Gm}{V^2} \right) \frac{V \sqrt{e^2 - 1}}{e}. \quad (11.95)$$

Таким образом, эффективный радиус столкновения может быть намного больше истинного радиуса тела. В особенности это относится к планетам-гигантам Юпитеру и Сатурну.

#### 11.4.5. Облет как средство увеличения скорости

В последние годы облет планеты применялся для такого изменения траектории аппарата, чтобы, двигаясь по новой траектории, аппарат мог достичь какой-либо другой планеты. Например, облет «Маринером-10» Венеры позволил ему совершить три последующих облета Меркурия; «Пионер-11» после облета в декабре 1974 г. Юпитера перешел на траекторию движения к Сатурну. В этом разделе будет рассмотрено использование сближения с планетой для изменения гелиоцентрической скорости зонда.

Пусть космический корабль движется по гомановскому касательному эллипсу между орбитами Земли и Юпитера. Гиперболический избыток скорости  $V$ , с которым космический корабль войдет в сферу влияния Юпитера, определяется приближенно уравнением (11.22):

$$V = \left( \frac{\mu}{a_2} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{1 + a_2/a_1} \right)^{1/2} \right], \quad (11.96)$$

где  $\mu = GM$  ( $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Солнца),  $a_1$  и  $a_2$  — радиусы орбит Земли и Юпитера соответственно. Предположим, что Юпитер догоняет космический корабль, который в это время движется почти по касательной к орбите Юпитера.

Радиус  $r$  сферы влияния Юпитера определяется по формуле

$$r = \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5} a_2, \quad (11.97)$$

где  $m$  — масса Юпитера. Подставляя соответствующие значения, находим, что  $r = 0,322$  а. е. Радиус Юпитера в этих единицах  $r_J$  равен 0,000477. Из уравнения (4.91), записанного в виде

$$V^2 = \mu_J \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) \quad (11.98)$$

(здесь  $\mu_J = Gm$ ), подставляя соответствующие значения из (11.96) и (11.97), можно найти величину  $a$ .

Внутри сферы влияния аппарат совершает гиперболический облет Юпитера, причем можно так подобрать точку входа в сферу

влияния, чтобы перигиуитерианское расстояние  $r_p$  было ненамного больше радиуса планеты  $r_J$ .

Используя соотношение  $r_p = a(e - 1)$ , получаем

$$e = \frac{r_p}{a} + 1.$$

Кроме того, имеем

$$b = a(e^2 - 1)^{1/2}. \quad (11.99)$$

Уравнения асимптот гиперболической орбиты сближения имеют вид

$$\operatorname{tg} \psi = \pm b/a, \quad (11.100)$$

и на рис. 11.15 хорошо видно, что в результате столкновения направление движения аппарата изменяется на угол

$$\theta = \pi - 2\psi. \quad (11.101)$$

Тогда на основании уравнений (11.99)—(11.101) можно написать

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = (e^2 - 1)^{-1/2}. \quad (11.102)$$

Подставляя числовые значения  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $Gm$ ,  $GM$ ,  $r$  и  $r_J$ , находим, что приближенно

$$V = 1,19 \text{ а. е./год}, \quad \theta = 160,3^\circ. \quad (11.103)$$

Круговая скорость  $V_c$  на расстоянии от Солнца, соответствующем радиусу орбиты Юпитера, равна 2,76 а. е./год. Поэтому скорость освобождения (на таком расстоянии) из Солнечной системы

равна  $V_c \sqrt{2}$  (т. е. 3,90 а. е./год). Из (11.103) видно, что столкновение приводит к тому, что космический корабль выходит из сферы влияния Юпитера в направлении, почти противоположном направлению входа, а его скорость после выхода, будучи сложеной с орбитальной скоростью Юпитера, превышает скорость освобождения из Солнечной системы. Эффект может быть еще большим, если включить в перигеитерианском двигателе, увеличив таким образом гиперболический избыток скорости (см. разд. 11.4.1). Таким образом, мы видим, что использование массы планеты в качестве ускорителя имеет практическое значение.

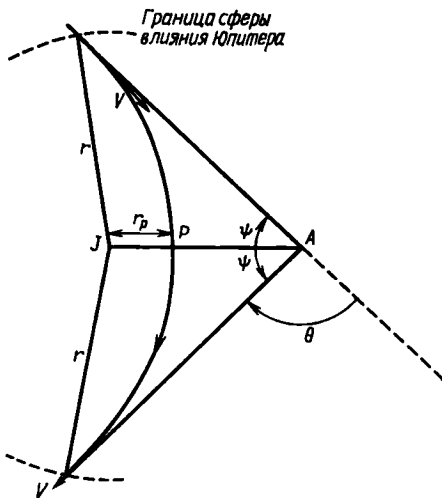


Рис. 11.15.

## Задачи

Необходимые для решения данные приведены в приложениях.

11.1. Как отразится на величине приращения скорости ракеты, движущейся в свободном пространстве (гравитационное поле отсутствует): 1) увеличение в два раза скорости истечения, 2) увеличение в два раза отношения масс?

11.2. На ракете с начальной массой  $10^7$  г имеется  $8 \times 10^6$  г топлива. Скорость истечения равна 2000 м/с, а секундный расход топлива составляет 130 000 г/с. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, вычислить скорость и высоту ракеты к моменту полного выгорания топлива, если ракета стартует вертикально вверх (считать ускорение свободного падения постоянным и равным  $981 \text{ см/с}^2$ ).

11.3. На круговую орбиту вокруг Земли предполагается вывести вторую ступень двухступенчатой ракеты (орбитальная скорость должна равняться  $7,73 \text{ км/с}$ ). Скорость истечения у двигателя второй ступени равна 3000 м/с (вдвое больше, чем у двигателя первой ступени); обе ступени имеют одинаковое отношение масс  $R$ , а отношение масс полностью заправленных топливом первой и второй ступеней равно 0,15. Масса второй ступени без топлива, которая и выводится на орбиту, равна  $10^7$  г. Пренебрегая потерями на преодоление гравитационного поля и аэродинамического сопротивления, вычислить  $R$  и начальную массу ракеты.

11.4. Сравнить суммарные приращения скорости, необходимые для перевода космического зонда на гелиоцентрическую круговую орбиту с радиусом 2 а.е.: 1) по биэллиптической касательной орбите перехода с афелием на расстоянии 60 а.е., 2) по касательной эллиптической орбите перехода.

11.5. Сравнить времена перехода в задаче 11.4.

11.6. Две круговые компланарные гелиоцентрические орбиты имеют радиусы 1 а.е. и 3 а.е. Ракета, движущаяся по внутренней орбите, в результате включения двигателя получает приращение скорости в 1,6 раз больше приращения скорости, необходимого для выхода на касательный эллипс перехода к внешней орбите. Насколько при этом сократится время перехода на внешнюю круговую орбиту?

11.7. Какое приращение скорости в предыдущей задаче нужно: 1) в конце касательной эллиптической орбиты перехода, 2) в точке пересечения быстрой орбиты с внешней круговой орбитой для того, чтобы перевести ракету на внешнюю орбиту?

11.8. Две круговые гелиоцентрические орбиты имеют радиусы 1 а.е. и 3 а.е. и взаимное наклонение  $5^\circ$ . Нам нужно двинувшийся по внешней орбите аппарат перевести по эллиптической траектории на внутреннюю орбиту, дважды изменяя его скорость. Когда должны прикладываться импульсы? Где с точки зрения экономии топлива надо изменять наклонение орбиты — во внешней или во внутренней точке перехода? Вычислить суммарную экономию требуемого приращения скорости, которую можно получить, приняв правильное решение.

11.9. Предположим, что в примере из разд. 11.3.6 (полет к Луне) единственной ошибкой является ошибка  $\Delta\phi = 1'$  дуги. Найти в первом приближении ошибки эксцентриситета, величины и ориентации большой полуоси, апогейного расстояния и момента прохождения перигея.

11.10. Два астероида движутся по круговым компланарным гелиоцентрическим орбитам со следующими элементами:

Астероид	Радиус орбиты, а. е.	Долгота в эпоху	Эпоха
A	2	139°	1985 январь 1,0
B	3,5	271	1985 январь 1,0

Один рассеянный исследователь астероидов, работающий на  $A$ , решил перебраться на  $B$  с минимальными затратами топлива. Когда он сможет начать переход? По прибытии на  $B$  исследователь обнаружил, что он забыл на  $A$  свой счетчик Гейгера. Сколько ему придется ждать на  $B$  до момента начала обратного перехода, если он снова хочет экономить топливо? (Гравитационными полями астероидов можно пренебречь.)

11.11. Межпланетный зонд уходит с начальной круговой гелиоцентрической орбиты радиуса 6630 км с тангенциальной скоростью 12 км/с. На расстоянии 1 500 000 км направление вектора геоцентрической скорости предполагается совпадающим с направлением асимптоты. Найти величину ошибки, к которой приводит такое предположение.

## Литература

1. *Ehrlicke K. A. Space Flight, vol. 1: Environment and Celestial Mechanics.* New Jersey, Van Nostrand, 1961.
2. *Ehrlicke K. A. Space Flight, vol. 2: Dynamics.* New Jersey, Van Nostrand, 1962.

## Траектории полетов к планетам и Луне

### 12.1. Введение

В этой главе результаты, полученные в предыдущих разделах, будут использованы для решения задач, возникающих при движении космических кораблей между планетами Солнечной системы. Сначала мы рассмотрим траектории полета в пространстве между Землей и Луной, а затем перейдем к межпланетным полетам.

### 12.2. Траектории полетов между Землей и Луной

Траектории, по которым перемещаются космические аппараты в пространстве между Землей и Луной (т. е. внутри сферы действия Земли, которая имеет радиус  $\sim 900\,000$  км), можно приближенно классифицировать следующим образом:

- 1) околоземные орбиты,
- 2) орбиты перелета из ближайших окрестностей Земли в окрестности Луны и обратно,
- 3) окололунные орбиты,
- 4) посадка на Луну или на Землю.

Комбинацией всех (или некоторых) из упомянутых выше четырех классов можно полностью описать полет космического корабля. Проект «Аполлон» (посадка людей на поверхность Луны и их безопасное возвращение) включает все четыре типа траекторий. Силы, которые могут действовать на космический корабль в пространстве между Землей и Луной, определяются следующими факторами:

- 1) тягой ракетных двигателей космического корабля,
- 2) полем тяготения Земли,
- 3) земной атмосферой,
- 4) полем тяготения Луны,
- 5) полем тяготения Солнца,
- 6) полем тяготения планеты,
- 7) давлением солнечного излучения,
- 8) электромагнитными полями и потоками плазмы от Солнца.

Возможно сразу же оценить относительную роль перечисленных сил. Если космический корабль не имеет двигателей малой тяги действующих в течение длительного времени, то работа двигателей займет лишь короткие интервалы времени, а в отсутствие

тяги аппарат будет подвержен лишь влиянию естественных сил. Поэтому действие двигателей большой тяги можно рассматривать, как и в гл. 1, как импульс, вызывающий рассчитанные изменения оскулирующих элементов орбиты.

Воздействие земной атмосферы уже рассматривалось в гл. 10 и не будет учитываться в дальнейшем, поскольку мы предположим, что в данной главе действие торможения атмосферы на любую промежуточную околоземную орбиту, с которой осуществляется последующий полет, пренебрежимо мало.

Воздействие давления солнечного излучения на космический корабль может безусловно оказаться существенным при детальных исследованиях многих полетов, особенно если корабль имеет высокое значение отношения площади поперечного сечения к массе; однако это воздействие всегда можно трактовать как возмущение.

Эффектами полей тяготения планет можно полностью пренебречь, как и воздействиями электромагнитных полей и потоков заряженных частиц от Солнца.

Поле тяготения Солнца определяет возмущающее ускорение, действующее на любое тело, движущееся в сфере действия Земли и Луны, и должно учитываться в более общих задачах, чем просто исследование возможных траекторий полетов Земля — Луна.

Преобладающей естественной силой, действующей на космический аппарат при полетах типа 1) или 2) и при посадке на Землю, оказывается сила, вызванная гравитационным потенциалом Земли. Часть, определяемая сжатием Земли, зависит от расстояния между телом и Землей. Если космический корабль не приближается к сфере действия Луны или не входит в нее (см. ниже), то все прочие силы, действующие на корабль, могут трактоваться как возмущения геоцентрической орбиты. Внутри сферы действия Луны преобладающей силой оказывается лунное тяготение, определяющее окололунную орбиту тела, в основном возмущаемую притяжением Земли.

Если пренебречь притяжением Солнца, то на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, существует точка, в которой силы тяготения двух масс, действующие на корабль, равны по величине и противоположны по направлению. Эта нейтральная точка удалена от центра Земли на 0,9 расстояния от Земли до Луны; ее положение отражает относительные порядки величин гравитационных воздействий Земли и Луны.

Используя уравнение (6.11), а именно

$$r'_A = \left( \frac{m'}{M'} \right)^{2/5} r_M, \quad (12.1)$$

где  $m'$ ,  $M'$  — соответственно массы Луны и Земли, а  $r'_A$  и  $r'_M$  — соответственно радиус сферы действия Луны и геоцентрическое рас-

стояние Луны, получим после подстановки численных значений  $m'$ ,  $M'$  и  $r_M$

$$r'_A = 66\,190 \text{ км.}$$

Найденное значение  $r'_A$  является средним, поскольку оно меняется при изменении расстояния Земля — Луна; однако оно указывает расстояние от центра Луны, в пределах которого лучше использовать селеноцентрическую орбиту, возмущаемую Землей.

### 12.3. Возможности и точность методов исследования

Проблема точного предвычисления орбиты космического корабля в пространстве между Луной и Землей по существу является задачей четырех тел (корабль, Земля, Луна и Солнце), которая еще больше усложняется при учете тяги, появляющейся при включении двигателей корабля, а возможно, и изменений, вызванных давлением излучения.

Общее аналитическое решение задачи невозможно, и необходимо прибегать к методам общих и специальных возмущений. Подобные методы трудоемки и дорогостоящи; обычно используемые методы специальных возмущений забирают много машинного времени. Поэтому любой подход, помогающий уяснить классификацию орбит данной задачи на явно непригодные или возможно подходящие, безусловно окажется полезным. Подобные подходы именуются «исследованием выполнимости» в противоположность точным методам, которые могут быть в последующем применены с целью отбора из класса возможных для данного случая орбит наилучшей.

Исследование выполнимости, как правило, зависит от формулировки модельной задачи, отражающей основные особенности реальной задачи, но упрощенной таким образом, что выводы, применимые с некоторым приближением к реальной задаче, могут быть сделаны на основе модели с наименьшими затратами труда. Некоторые приемы, использованные исследователями в последние годы в указанном плане, описываются ниже.

### 12.4. Использование интеграла Якоби

Если пренебречь тяготением Солнца, принять орбиту Луны вокруг Земли за правильную окружность и считать Землю и Луну материальными точками, то задача об орбите космического корабля в пространстве между Луной и Землей превращается в ограниченную круговую задачу трех тел, которая рассматривалась в разд. 5.10. В этой модели системы Земля — Луна — корабль Луна и Земля представляют собой две материальные точки с массами  $\mu$  и  $1 - \mu$  соответственно, а корабль считается материальной частицей с пренебрежимо малой массой.

Можно предполагать, что корабль начинает маневр перехода из окрестности Земли в окрестность Луны путем ухода с промежуточной орбиты (орбиты ожидания) вокруг Земли. При заданном импульсе (который обеспечивается двигателями корабля) произойдет требуемое увеличение его полной энергии (т. е. возрастание его кинетической энергии). Новая орбита корабля будет представлять собой геоцентрический эллипс, параболу или гиперболу (в зависимости от величины импульса), по которой он будет двигаться до тех пор, пока приближение Луны не вынудит его отклоняться все более и более от первоначальной траектории.

Интеграл Якоби и определяемые с его помощью поверхности нулевой скорости (см. разд. 5.10) позволяют сделать некоторые выводы о траектории полета корабля под влиянием притяжения Земли и Луны. В системе координат, вращающейся вместе с прямой Земля — Луна (см. рис. 5.3), положение и относительная скорость корабля после импульса, обеспечившего его уход, можно без труда рассчитать. Теперь соотношение (5.47) — интеграл Якоби — используется для вычисления  $C$  — постоянной относительной энергии — путем подстановки в (5.47) упомянутых выше величин.

На рис. 5.4, 5.5 и 5.6 (в особенности на первом из них) показаны поверхности нулевой скорости для различных значений  $C$ . Видно, что до тех пор, пока  $C$  меньше определенного значения  $C_0$  (рис. 5.4, б), корабль не может достичь окрестности Луны. Указанное значение определяет минимальную кинетическую энергию, а следовательно, и минимальный импульс, задаваемый двигателями, который необходим для осуществления перелета. Очевидно, полезно дальнейшее уменьшение  $C$  до значения  $C_0$  (рис. 5.4, в), т. е. использование большего по величине импульса, чтобы расширить горловину, через которую мог бы пройти корабль. Однако если импульс слишком велик и приводит к такому малому значению  $C$ , как  $C_0$ , то почти все пространство оказывается достижимым для корабля, хотя неизвестно, какова будет его траектория в этом пространстве. Например, корабль может пересечь пространство Земля — Луна и сделать несколько оборотов вокруг Луны в качестве ее временного спутника, прежде чем под влиянием накапливающихся воздействий Луны он не покинет Луну и вернется в окрестность Земли.

## 12.5. Использование решений Лагранжа

Лагранжевы частные решения задачи трех тел, ранее рассмотренные в разд. 5.7—5.9, показывают, что в пространстве между Землей и Луной существуют пять точек, в которых (если пренебречь возмущениями от Солнца) останется в равновесии частица, причем геометрия ее положения относительно Земли и Луны



будет сохраняться неизменной. Эти точки Лагранжа (точки либрации) приведены на рис. 5.2. Пусть  $A$  и  $B$  — положения Земли и Луны соответственно; в этом случае  $L_1A = 0,99AB$ ,  $L_2A = 0,85AB$ ,  $L_3A = 1,17AB$  и  $L_4A = L_5A = L_4B = L_5B = AB$ .

Было установлено, что в общем коллинеарные точки не могут рассматриваться как устойчивые положения равновесия. С другой стороны, треугольные (равносторонние) точки оказываются устойчивыми, если  $\mu < 0,0385$ . Поскольку для системы Земля — Луна  $\mu \approx 0,01$ , точки  $L_4$  и  $L_5$  в этой системе устойчивы. Напомним, однако, что солнечными возмущениями мы пренебрегли.

В разд. 5.10.3 было показано, что пять лагранжевых точек характеризуются также определенными значениями  $C$  (постоянной относительной энергии в интеграле Якоби), причем по мере уменьшения  $C$  (т. е. увеличения начальной энергии частицы) эти точки для системы Земля — Луна (для которой  $1 - \mu > \mu$ ) располагаются в такой последовательности:  $L_2, L_3, L_1, (L_4 \text{ и } L_5)$ .

Таким образом, результаты ограниченной круговой задачи трех тел еще раз оказались полезными для некоторых выводов об энергии, необходимой для различных типов полетов в системе Земля — Луна. Однако для дальнейшего продвижения вперед придется применить другие методы.

## 12.6. Использование решений задачи двух тел

Используя ту же самую модель системы Земля — Луна, можно получить ценную информацию о траекториях в пространстве Земля — Луна путем применения в качестве орбит конических сечений, приближенно представляющих реальные траектории. Здесь приходится прибегать к некоторым результатам исследования выполнимости, причем на этом пути, дающем нам моменты перехода, необходимую энергию и форму орбиты, требуется обеспечить высокую точность.

Вернемся снова к представлениям о внешней и внутренней сферах действия спутника относительно главного тела (планеты относительно Солнца или спутника планеты относительно планеты), введенных в разд. 6.4 и уже использованных в разд. 11.4.4.

В формулах (11.93) и (11.94) значения  $\sim 0,1$  для  $|\epsilon_p|$  и  $|\epsilon_s|$  определяют достаточно умеренную величину возмущений орбиты. Если принять указанное значение, полагая  $m' \approx 1/81,25$  (значение для системы Земля — Луна), то радиусы внутренней и внешней сфер действия относительно Луны, найденные из рис. 11.13, оказываются соответственно порядка 0,1 и 0,3 расстояния Земля — Луна.

Меньшее значение показывает, что космический корабль в пределах расстояния  $\sim 38\ 000$  км от центра Луны может описываться как движущийся по селеноцентрической орбите задачи двух тел;

большее значение свидетельствует, что вплоть до расстояния 269 000 км от центра Земли ( $\sim 42$  земных радиуса) корабль движется по геоцентрической орбите задачи двух тел. Поскольку расстояние Земля — Луна составляет  $\sim 60$  земных радиусов, то видно, что можно использовать формулы задачи двух тел в пределах  $2/3$  расстояния от Земли до Луны при исследованиях выполнимости с обеспечением удовлетворительной точности.

Однако следует заметить, что степень близости представления подобными модельными орбитами тех, которые требуются в действительности, зависит от продолжительности времени, затрачиваемого космическим кораблем на движение вблизи границ переходной области. Например, корабль, движущийся по геоцентрическому эллипсу с такими значениями большой оси и эксцентриситета, которые обеспечивают его удаление в апогее более чем на 42 земных радиуса, находился бы в силу II закона Кеплера гораздо более длительное время в пределах сферы действия Луны, чем корабль движущийся по орбите с другими значениями большой оси и эксцентриситета. Поэтому в первом случае можно ожидать гораздо более значительных изменений орбиты, чем во втором. Расчет орбиты прохождения через границу сферы действия можно выполнить по способу Энке или Коузлла методом, описанным в разд. 11.4.4. При входе во внутреннюю сферу действия Луны возможно использование невозмущенной селеноцентрической орбиты до тех пор, пока корабль не выйдет из этой сферы действия. Итак, сказано достаточно для того, чтобы подчеркнуть, что в исследованиях выполнимости можно нередко пользоваться решением задачи двух тел в виде конических сечений для получения данных о траекториях полета Земля — Луна. Более того, рассмотрение геоцентрической орбиты двух тел уже оказывается полезным при оценках и сравнениях времен перелета и скоростей корабля на расстоянии Луны от Земли.

Чтобы придать нашим рассуждениям количественный характер, предположим, что корабль находится на круговой орбите ожидания, расположенной на высоте 560 км от земной поверхности в плоскости лунной орбиты. Тогда круговая скорость  $V_c$  корабля на этой орбите задается выражением

$$V_c = \sqrt{GM/a_p},$$

где  $G$  — постоянная тяготения,  $M$  — масса Земли,  $a_p$  — радиус Земли плюс 560 км. Если корабль переводится на эллиптическую орбиту, касательную к промежуточной орбите перехода с перигеем  $a_p$  и апогеем  $a_A$ , где  $a_A$  — геоцентрическое расстояние Луны, то требуемое изменение скорости  $\Delta V$  определяется как

$$\Delta V = V_p - V_c,$$

где  $V_p$  — скорость в перигее на новой орбите.

Теперь имеем

$$V_P = \left[ \frac{GM}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \right]^{1/2},$$

где  $a$  и  $e$  — соответственно большая полуось и эксцентриситет промежуточной орбиты. Однако

$$a(1+e) = a_A,$$

$$a(1-e) = a_P,$$

так что  $a$  и  $e$  можно рассчитать по известным значениям  $a_P$  и  $a_A$ ; после этого по известным  $a$  и  $e$  вычисляется  $\Delta V$ .

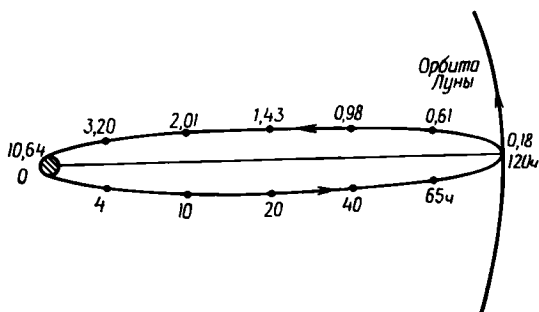


Рис. 12.1

В этом случае время, необходимое для достижения лунной орбиты, легко определяется из периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}.$$

Подставляя соответствующие численные значения, находим  $T = 239$  ч, так что время перелета к Луне равно 119,5 ч. Это — время полета до Луны с наименьшей затратой энергии. Чтобы уменьшить время перелета, необходимо увеличить  $V$ . Схема орбиты с указанием скорости корабля в различные моменты полета приведена на рис. 12.1.

Поскольку обратный полет к Земле является, так сказать, зеркальным отражением полета к Луне, скорости (в км/с) для упрощения рисунка размещены лишь в верхней части эллипса.

Видно, насколько быстро уменьшается скорость по мере удаления корабля от Земли (при этом кинетическая энергия преобразуется в потенциальную) и насколько эксцентричной ( $e = 0,964$ ) оказывается орбита, напоминая по виду прямолинейный эллипс (см. разд. 4.8).

Попытки снизить время перелета свидетельствуют, насколько чувствительно это время к изменениям скорости в перигее. Чтобы

уменьшить время, большая полуось эллиптической орбиты должна быть увеличена, так что апогей орбиты корабля оказывается за пределами лунной орбиты. Увеличение скорости в перигее всего на 18 м/с приводит к возрастанию расстояния апогея до 70 земных радиусов и уменьшает время полета до величины немного больше 80 ч. Если продолжить этот процесс, то эллиптическая орбита превращается в параболическую при достижении скорости освобождения  $V_e$ , определяемой для рассматриваемой нами промежуточной орбиты выражением

$$V_e = V_c \sqrt{2} = 10,73 \text{ км/с.}$$

Время полета до лунной орбиты тогда оказывается примерно 50 ч, а скорость, с которой корабль пересекает лунную орбиту, составляет около 1,433 км/с. Любое увеличение скорости в перигее сверх скорости освобождения превращает орбиту в гиперболу с дальнейшим сокращением времени перелета.

Любая орбита корабля за пределами расстояния в  $\frac{2}{3}$  расстояния Земля — Луна будет сильно возмущена, если Луна окажется вблизи пересечения орбиты корабля с лунной орбитой, когда корабль находится именно в этой части своей траектории. В подобных случаях возвратная половина орбиты (если она эллиптическая) может полностью измениться, но общая картина описанного выше изменения времени полета в зависимости от скорости в перигее остается справедливой.

Можно сделать ряд заключений об особенностях полета космического корабля, когда он входит в сферу действия Луны. Если пренебречь отклонениями фигуры Луны от сферы, то вклад лунного притяжения симметричен относительно радиуса. Однако из-за влияния земного поля эффективное поле тяготения внутри лунной сферы действия искажается; отклонения от радиальной симметрии оказываются наибольшими на обращенной к Земле стороне Луны.

Космический корабль, входящий в сферу действия Луны, обладает некоторым гиперболическим избытком скорости, так что его невозмущенная селеноцентрическая орбита будет гиперболой. Если только скорость входа корабля не близка к нулю или если (что крайне маловероятно) возмущения от Земли не уменьшат эту скорость в пределах сферы действия, корабль снова покинет эту сферу по другой ветви своей гиперболической траектории. Следовательно, в любом встречающемся на практике случае попытка перевода корабля на эллиптическую селеноцентрическую орбиту должна предусматривать импульс, уменьшающий скорость корабля до значения меньше скорости убегания, пока корабль находится достаточно глубоко внутри лунной сферы действия. Совершенно ясно, что малое время перелета, которое обеспечивается перелетом корабля в окрестности Луны с высокой селено-

центрической скоростью, потребует большого расхода топлива для преобразования гиперболической траектории в замкнутую селеноцентрическую орбиту. На основании только одной этой аргументации мы заключаем, что если для полета к Луне оказывается доступным лишь ограниченный запас энергии (например, если цель полета — создание искусственного спутника Луны), то, возможно, лучше выбрать более длительное время перелета. Однако если цель полета — жесткая посадка на Луну, без какого-либо торможения, то может оказаться предпочтительным короткое время перелета. Не упомянутый до сих пор фактор, оказывающий влияние на выбор решения, — это изменение точности в зависимости от скорости в перигее.

При обсуждении в разд. 11.3.6 чувствительности орбит перелета к малым ошибкам в положении и скорости мы видели, что ошибка конечной скорости всего в 30 см/с, определяющей расстояние апогея орбиты полета к Луне 384 400 км, приведет к ошибке в 1230 км. Если ошибка имела место в значении радиуса-вектора в момент прекращения работы двигателей, тот же самый пример дает ошибку в расстоянии апогея 3231 км при ошибке отсечки двигателей в 1 км. Приведенные числа свидетельствуют, что «медленные» траектории полета к Луне весьма чувствительны к ошибкам, что приводит к необходимости обеспечения коррекций во время полета, а также дополнительного топлива для преобразования гиперболической орбиты подлета к Луне в орбиту захвата, если последняя необходима. Приведенные числа также указывают на необходимость исследования точности траекторий полета к Луне с учетом эффектов солнечного поля тяготения.

## 12.7. Искусственные спутники Луны

Очевидно, что «быстрая» орбита полета, обеспечивающая падение на поверхность Луны, — самый простой тип полета к Луне. Поле тяготения Луны порождает фокусирующее действие (как это происходит, описано в разд. 11.4.4), что увеличивает эффективное сечение столкновения с Луной. Близкий облет Луны, приводящий корабль обратно в непосредственную окрестность Земли, — гораздо более трудная задача. Для вывода корабля на орбиту вокруг Луны также требуется тщательный выбор орбиты полета, но, кроме того, потребуется последующий маневр, обеспечивающий захват, поскольку корабль далеко углубляется внутрь сферы действия Луны. Импульс, приводящий к захвату на орбиту вокруг Луны, должен уменьшить селеноцентрическую гиперболическую скорость до эллиптической или даже круговой. На рис. 12.2 приведены изменения круговой и параболической скоростей с возрастанием расстояния от центра Луны. Эти изменения вычислены путем подстановки соответствующих числовых данных в формулу

(4.42). Указан также период для круговой орбиты. Даже если вход внутрь сферы действия Луны происходит с параболической скоростью, из рис. 12.2 видно, что для вывода на близкую круговую орбиту параболическая скорость в периселении 2,47 км/с должна быть уменьшена до 1,75 км/с, т. е. на 0,72 км/с. Если допустима эллиптическая орбита, то достаточен будет меньший импульс,

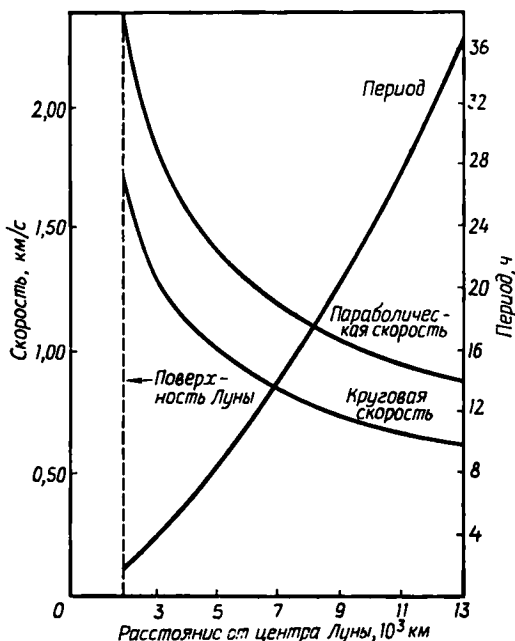


Рис. 12.2.

поскольку любая скорость ниже параболической на данном расстоянии определяет эллиптическую орбиту. Однако не все эллиптические орбиты оказываются подходящими, поскольку орбиты с большим эксцентриситетом вывели бы корабль во внешние районы сферы действия Луны, где возмущения от Земли сделали бы орбиту неустойчивой; это привело бы либо к выходу корабля из-под контроля тяготения Луны, либо к столкновению корабля с Луной. Подходящими эллиптическими орбитами оказываются те, у которых положение апоселения не выводит корабль из пределов внутренней сферы действия Луны. Согласно разд. 12.6, этот радиус внутренней сферы составляет  $\frac{1}{10}$  расстояния Земля — Луна. Для орбит спутников с большим временем жизни это расстояние, вероятно, еще меньше и близко к 20 000 км.

Требуемая скорость в периселении на эллиптической орбите при расстоянии аполесения 20 000 км находится из формулы (11.21) путем подстановки значений  $a_1 = 1738$  км,  $a_2 = 20\,000$  км; это дает  $a = 10\,869$  км,  $e = 0,8401$ ,  $V_p = 2,37$  км/с. Полученное значение скорости всего на 0,10 км/с ниже параболической скорости. Следовательно, если поставленная задача совместима с выводом на эллиптическую орбиту вокруг Луны, а не на круговую, можно достичь значительной экономии топлива. Разумеется, импульс от двигателей не должен быть приложен в периселении или касательно в плоскости гиперболической орбиты; впрочем, с такими случаями мы здесь встречаться не будем.

В следующем разделе будут рассмотрены более детально возмущения, которые испытывает искусственный спутник Луны.

### 12.7.1. Относительные величины возмущений спутника Луны для различных случаев

Основное возмущение, которому подвержен спутник на эллиптической орбите вокруг Луны, вызывается отклонением фигуры Луны от точного шара, а также притяжениями Земли и Солнца. Если спутник имеет высокое значение отношения площади поперечного сечения к массе, тогда заметный эффект будет вызывать давление солнечного излучения, однако для большинства спутников этим эффектом можно пренебречь.

Интересно сравнить величины возмущающих ускорений, вызываемых Солнцем, Землей и фигурой Луны. Как Солнце, так и Земля могут считаться материальными точками. Если  $m$ ,  $m_E$ ,  $m_S$  и  $m_l$  — соответственно массы Луны, Земли, Солнца и корабля и если  $r_E$ ,  $r_S$  и  $r$  — соответственно селеноцентрические радиусы-векторы Земли, Солнца и корабля, тогда с помощью уравнения (6.5), полагая, что  $U$  — потенциал лунного поля, действующего на спутник, мы можем записать в качестве уравнения движения спутника

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla(U + R),$$

где

$$U = \int \frac{dm}{\rho},$$

$$R = G \left[ m_E \left( \frac{1}{r_{VE}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_E}{r_E^3} \right) + m_S \left( \frac{1}{r_{VS}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_S}{r_S^3} \right) \right],$$

причем  $r_{VE}$  и  $r_{VS}$  — расстояния между космическим кораблем и Землей и кораблем и Солнцем соответственно.

Теперь учтем, что основной вклад в возмущающее ускорение, вызванное отклонением фигуры Луны от шара, определяется второй гармоникой. Следовательно,  $U$  для настоящей задачи можно взять в таком виде:

$$U = G \left[ \frac{m}{r} + \frac{B + C - 2A}{2r^3} + \frac{3(A - B)Y^2 - 3(C - A)Z^2}{2r^5} \right],$$

где оси  $X, Y, Z$  неподвижны относительно Луны. По существу это вариант формулы Мак-Калупа (см. разд. 6.5).

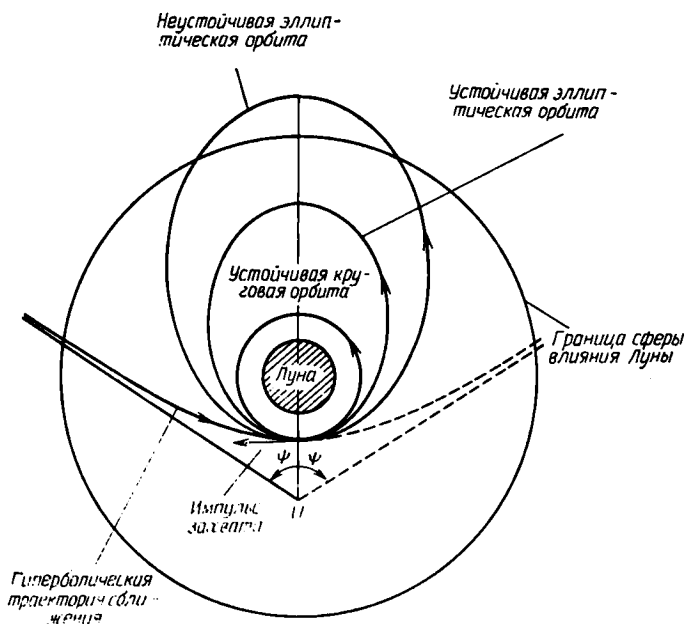


Рис. 12.3.

В соответствии с данными разд. 9.5

$$B - A \approx \frac{1}{8}(C - A),$$

откуда

$$U = G \left[ \frac{m}{r} + \frac{(C - A)}{r^3} \left( \frac{2}{3} - \frac{Y^2 + 3Z^2}{2r^2} \right) \right].$$

Для спутника вблизи экваториальной плоскости Луны  $Z \ll r$  и  $Y \ll r$ . Следовательно,  $U$  по порядку величины можно определить из выражения

$$U \approx G \left[ \frac{m}{r} + \frac{2(C - A)}{3r^3} \right].$$



Первый член описывает потенциал поля центральной силы, определяемый предположением, что Луна является материальной точкой; второй член дает (по порядку величины) возмущающий потенциал, определяемый фигурой Луны.

Беря градиент от  $(U + R)$ , получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} = G \left[ m_E \left( \frac{\mathbf{r}_E - \mathbf{r}}{r_{VE}^3} - \frac{\mathbf{r}_E}{r_E^3} \right) + m_S \left( \frac{\mathbf{r}_S - \mathbf{r}}{r_{VS}^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{r_S^3} \right) - \frac{2(C-A)}{r^5} \mathbf{r} \right].$$

Мы подчеркиваем, что полученное уравнение не является точным уравнением движения спутника, поскольку последний член — всего лишь приближение; оно выведено для сравнения по порядку величины различных возмущающих ускорений в правой части уравнения.

Теперь уравнение имеет подходящую форму для использования выводов разд. 6.4. Определяя  $|\epsilon_E|$ ,  $|\epsilon_S|$  и  $|\epsilon_M|$  как отношения возмущающих ускорений от Земли, Солнца и отклонений фигуры Луны от сферической к величине ускорения от поля центральной силы притяжения Луны, нетрудно получить, что

$$|\epsilon_E| \approx \frac{d_E^2}{m_E} [1 - (1 + d_E)^{-2}], \quad |\epsilon_S| \approx \frac{d_S^2}{m_S} [1 - (1 + d_S)^{-2}],$$

тогда как

$$|\epsilon_M| \approx \frac{2(C-A)}{mr^2},$$

где  $d_E = r/r_E$ ,  $d_S = r/r_S$ ,  $m_E$ ,  $m_S$  — массы Луны в единицах массы Земли и Солнца соответственно. Приведенные выше выражения приближенно справедливы для значений  $d_E$  и  $d_S$ , много меньших единицы; это условие на практике выполняется.

Теперь, подставляя значение для параметров

$$m_E = 1,81,25, \quad m_S = 1,27020000$$

и замечая, что

$$(C-A)/C = 0,000627,$$

в то время как

$$C = 0,401mr_A^2,$$

где  $r_A$  — радиус Луны, получаем

$$\begin{aligned} |\epsilon_E| &\approx 81,25d_E^2 [1 - (1 + d_E)^{-2}] = 162,5d_E^3 \left[ 1 - \frac{3}{2}d_E + 2d_E^2 + \dots \right], \\ |\epsilon_S| &\approx 2,702 \cdot 10^7 d_S^2 [1 - (1 + d_E)^{-2}] = \\ &= 5,404 \cdot 10^7 d_S^3 \left[ 1 - \frac{3}{2}d_S + 2d_S^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

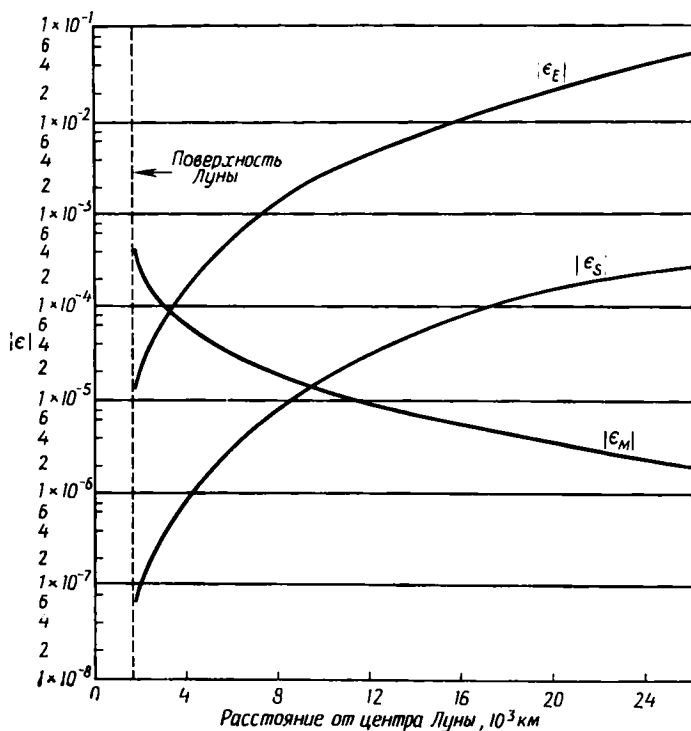


Рис. 12.4.

и

$$|\epsilon_M| \approx 0,000502 \left( \frac{r_A}{r} \right)^2.$$

На рис. 12.4 величины приведены в функции расстояния от центра Луны.

Видно, что на расстоянии около 30 000 км от центра Луны возмущающий эффект Земли гораздо значительнее, чем эффекты, вызванные двумя другими причинами; он составляет  $1/10$  величины ускорения от центральной силы, так что спутник Луны, достигающий таких расстояний, скорее всего окажется неустойчивым. До расстояний около 1600 км над поверхностью Луны эффект несферичности Луны превосходит возмущение от Земли; первый в 10 раз больше второго на высоте 400 км от лунной поверхности и в 4 раза больше на высоте 800 км. Во всей рассматриваемой области солнечный эффект составляет всего 0,005 эффекта от Земли.

Поскольку возмущения, вызванные эксцентриситетом и наклонением орбиты Земли к плоскости лунного экватора, будут меньше, чем возмущение от Земли, движущейся по круговой орбите в плоскости лунного экватора, то ясно, что до высоты примерно 1500 км от лунной поверхности основным возмущающим эффектом оказывается отклонение фигуры Луны от шара; следующим по порядку величины оказывается эффект, определяемый Землей, движущейся по круговой орбите в плоскости лунного экватора. Все прочие эффекты оказываются малыми по сравнению с описанными. Тот факт, что *при указанном упрощении* большая ось Луны неизменно направлена в центр Земли, позволяет подтвердить полезность использования интеграла Якоби в данной ситуации.

### 12.7.2. Интеграл Якоби для близкого спутника Луны

Выберем систему вращающихся осей координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , причем начало помещено в центре Луны, ось  $Ox$  направлена вдоль прямой, соединяющей центры масс Луны и Земли, ось  $Oy$  лежит в экваториальной плоскости Луны, образуя угол  $90^\circ$  с  $Ox$ , а ось  $Oz$  перпендикулярна к этой плоскости (рис. 12.5).

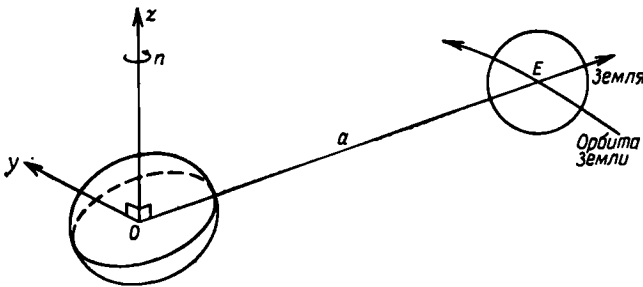


Рис. 12.5.

Указанный выбор осей идентичен с выбором осей, неподвижных относительно Луны и направленных вдоль ее главных осей инерции. Тогда координаты Земли в этой системе будут  $(a, 0, 0)$ , где  $a$  — радиус селеноцентрической орбиты Земли. Если обозначить через  $(x, y, z)$  координаты спутника по отношению к вращающимся осям, то потенциал  $V$ , определяемый полями тяготения Земли и Луны, дается выражением

$$V = G \int \frac{dm}{\rho} - Gm_E \left[ \frac{x}{a^2} - \frac{1}{(a-x)^2 + y^2 + z^2} \right],$$

которое не содержит времени явно. Тогда уравнения движения спутника будут

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Отсюда можно вывести интеграл Якоби. Умножив эти уравнения соответственно на  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , сложив и затем проинтегрировав, получим в результате

$$\frac{1}{2} [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - n^2(x^2 + y^2)] = V + C.$$

Следует отметить, что  $V$  содержит полный потенциал Луны.

Любая теория искусственного спутника Луны должна быть разработана гораздо детальнее описанной выше, если необходимо получить информацию о гармониках лунного поля более высокого порядка. Приемлемую теорию можно развить путем, аналогичным разработке теорий спутников Земли, но она оказывается сложнее, поскольку должна включать возмущающий эффект Земли. Последний не только значительно сильнее, чем возмущающий эффект Луны на типичный спутник Земли; большая ось фигуры Луны всегда направлена приблизительно на центр Земли, что поднимает проблему возможных резонансных явлений, которые могут вызвать колебания радиуса-вектора спутника с такой большой амплитудой, что он в конце концов разобьется о поверхность Луны. В числе лиц, разрабатывающих теории искусственных спутников Луны, упомянем Бурмберга [2], Козаи [4], Ласса и Солловэя [5], Остервинтера [6] и Роя [7].

## 12.8. Траектории межпланетных полетов

В гл. 1, разд. 1.1—1.2.5, и в таблицах в приложениях описана схема действий при полетах к планетам солнечной системы. Марс и Венера — наиболее легко достижимые планеты с точки зрения энергетических требований. Марс представляет гораздо меньше трудностей для посадки не только потому, что его масса меньше  $1/7$  массы Венеры, что требует преодоления гораздо более слабого гравитационного поля, но и в силу гораздо менее суровых условий на поверхности. Полеты к другим планетам (исключая Меркурий) оказываются значительно сложнее.

Терминология, обычно используемая при описании планетных конфигураций, иллюстрируется на рис. 12.6, где  $E$  — Земля, а  $S$  — Солнце. Буквами  $V$  и  $J$  соответственно отмечены *внутренняя* планета (орбита которой располагается внутри орбиты Земли) и *внешняя* планета (у которой орбита лежит за пределами орбиты Земли).

О внешней планете, проходящей меридиан наблюдателя в местную полночь, говорят, что она находится в *оппозиции* (конфигурация  $SEJ_1$ ). О планете, направление на которую совпадает с направлением на Солнце, говорят, что она находится в *соединении* (конфигурации  $EV_1S$ ,  $ESV_3$ ,  $ESJ_3$ ); внутренняя планета может находиться в *верхнем соединении* (конфигурация  $ESV_3$ ) или в *нижнем соединении* (конфигурация  $EV_1S$ ).

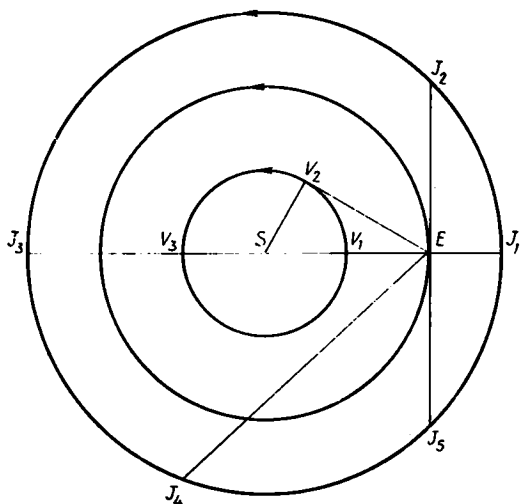


Рис. 12.6.

Угол, образованный геоцентрическим радиусом-вектором планеты и геоцентрическим радиусом-вектором Солнца, называется *элонгацией* планеты (например, конфигурации  $SEV_2$  или  $SEJ_2$ ). Очевидно, что внутренняя планета имеет равную нулю элонгацию в соединении и максимальную элонгацию (но меньше  $90^\circ$ ), когда ее геоцентрический радиус-вектор оказывается касательным к орбите (конфигурация  $SEV_2$ ). Элонгация внешней планеты может изменяться от нуля (конфигурация  $SEJ_3$ ) до  $180^\circ$  (конфигурация  $SEJ_1$ ). Когда элонгация равна  $90^\circ$ , то говорят, что планета находится в *квадратуре* (конфигурации  $SEJ_2$  и  $SEJ_3$ ). Эти квадратуры различаются добавлением слов *восточная* или *западная*; на схеме рис. 12.6 северный полюс эклиптики направлен на читателя, так что  $J_3$  и  $J_2$  суть соответственно восточная и западная квадратуры.

Наша диаграмма построена для случая круговых компланарных орбит; фактические орбиты планет представляют собой эллипсы с малыми эксцентриситетами, плоскости которых наклонены

друг к другу всего на несколько градусов; поэтому указанная выше терминология остается полностью справедливой.

В разд. 11.3.7 мы ввели еще одно полезное определение, а именно синодический период планеты  $S$ ; его можно теперь связать со временем наступления последовательных одинаковых конфигураций планеты, Земли и Солнца. Если  $T_P$  и  $T_E$  — звездные периоды обращения вокруг Солнца соответственно планеты и Земли, то имеем для внутренней планеты

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_E}$$

и для внешней

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_P}$$

Эти соотношения выведены для круговых компланарных орбит и, следовательно, справедливы лишь приближенно для Земли и любой другой планеты солнечной системы. Средние синодические периоды планет приведены в приложении III.

## 12.9. Солнечная система как поле центральной силы

Преобладающая роль поля тяготения Солнца (его масса более чем в 1000 раз превосходит массу крупнейшей планеты) означает, что на расстоянии нескольких миллионов километров от любой

Таблица 12.1

Планета	Радиус сферы действия $r_d$		
	Млн. км	Доля большой полуоси орбиты планеты	а. е.
Меркурий	0,112	0,00193	0,000747
Венера	0,615	0,00569	0,00411
Земля	0,925	0,00619	0,00619
Марс	0,579	0,00254	0,00387
Юпитер	48,1	0,0619	0,322
Сатурн	54,6	0,0382	0,365
Уран	52,0	0,0181	0,348
Нептун	86,9	0,0193	0,581
Плутон	34,0	0,00574	0,227

Таблица 12.2

Планета	$\epsilon$   = 0,1		$\epsilon$   = 0,01	
	Радиус внутр. границы оболочки. $10^6$ км	Радиус внешн. границы оболочки. $10^6$ км	Радиус внутр. границы оболочки. $10^6$ км	Радиус внешн. границы оболочки. $10^6$ км
Меркурий			0,053	0,243
Венера	Не существует оболочки для $ \epsilon\rho ,  \epsilon s  \approx 0,1$		0,24	2,04
Земля			0,40	2,66
Марс			0,27	1,27
Юпитер			29,0	70,8
Сатурн	35,4	80,5	15,7	243
Уран	38,6	64,3	17,2	195
Нептун	64,4	107,9	30,6	342
Плутон	Как для первых четырех планет		13,5	112

планеты космический корабль движется в поле тяготения, очень похожем на простое поле центральной силы, действие которой убывает пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Поэтому формулы и выводы гл. 4 и тех разделов гл. 11, в которых рассматривалось движение в поле единственной силы, можно с высокой степенью приближения использовать при исследовании межпланетных полетов.

На расстояниях от планет, приближенно определяемых их сферами действия, существуют области, где действия силовых полей как планеты, так и Солнца сравнимы. Поэтому для точных исследований необходимо использовать методы специальных возмущений, описанные в гл. 7; правда, во многих исследованиях выполнимости могут быть с успехом применены приближенные методы, кратко описанные в гл. 11. Именно эти методы отражены в табл. 12.1 и 12.2, а также на рис. 11.13.

В табл. 12.1 значения радиусов  $r_A$  — сфер действия планеты — даны в млн. км, в астрономических единицах и в долях средних расстояний планет от Солнца; значения были рассчитаны по формуле (6.10):

$$r_A = \left(\frac{m}{M}\right)^{2/5} r_p,$$

где  $m$  и  $M$  — соответственно массы планеты и Солнца,  $r_p$  — большая полуось орбиты планеты. Последовательное убывание

солнечного поля тяготения с расстоянием от Солнца становится очевидным при сравнении размеров сфер действия Земли и Плутона (в предположении близости их масс). Сфера действия Плутона в 30 раз превышает сферу действия Земли; ее протяженность составляет  $\frac{2}{3}$  от протяженности сферы действия Юпитера, хотя масса Юпитера примерно в 300 раз превышает массу Плутона.

Более широкое представление о сфере действия, описанное в разд. 6.4, где приведены определения внешней и внутренней границ оболочки, позволяет построить график, показанный на рис. 11.13, где оболочку, окружающую планету, можно определить для любого уровня возмущений, определяемого протяженностью области (т. е. толщиной оболочки), в пределах которой следует использовать методы специальных или общих возмущений. В табл. 12.2 указаны для двух значений  $|\epsilon|$  границы оболочек относительно планет; в этих границах применение указанных методов, которые потребовались бы при отношениях возмущений больше  $|\epsilon|$ , оказывается невозможным.

Числа в табл. 12.1 и 12.2 следует рассматривать как определяющие в основном порядки величины размеров сфер действия. Следует напомнить также, что сами «сферы» — это только приближение.

Тем не менее информация, содержащаяся в этих двух таблицах и на рис. 11.13, убедительно показывает, что планеты Солнечной системы в соответствии с исследованием выполнимости можно разбить на два класса.

Первый класс включает Меркурий, Венеру, Землю, Марс и Плутон (а также астероиды); в этом случае можно считать, что применение формул поля центральных сил (в соответствии с методами, изложенными в гл. 11) в исследованиях выполнимости даст достаточно точные данные для межпланетного полета, даже если пренебречь возмущениями вблизи границ сфер действия.

Разумеется, для точных исследований вблизи этих границ необходимо использовать методы специальных возмущений.

Второй класс образуют планеты-гиганты: Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Применение исследования выполнимости к перечисленным планетам (особенно к первым двум) в пренебрежении областями оболочек (возмущений) относительно этих планет способно в самом лучшем случае лишь указать порядок величины времени полета и требуемой затраты энергии и не может дать реальной информации о фактических орбитах космического корабля, как только он пересекает границу оболочки. Таким образом, для этих тел всегда необходимо выполнять точные исследования.



## 12.10. Орбиты межпланетных перелетов с минимальными затратами энергии

В предположении, что орбиты планет компланарные и круговые, формулы гл. II можно применить для получения информации о потребной энергии, а также временах полета и ожидания; полученные данные будут точны по порядку величины. Более детальные исследования, в которых учитывается, что на самом деле орбиты планет представляют собой эллипсы с малыми эксцентриситетами и малыми наклонами друг относительно друга, не изменяет по порядку величины полученные результаты.

Полет с поверхности одной планеты до поверхности другой планеты можно разбить на три фазы:

I. Подъем с поверхности одной планеты до границы ее сферы действия.

II. Полет в гелиоцентрическом пространстве до границы сферы действия другой планеты.

III. Спуск на поверхность другой планеты.

Фаза I может включать переход на орбиту ожидания вокруг исходной планеты в качестве промежуточного этапа для целей контроля, прежде чем импульс двигателей переведет корабль на заданную гиперболическую планетоцентрическую орбиту перелета с требуемым гиперболическим избытком скорости в точке, в которой корабль покидает сферу действия исходной планеты. Для кораблей с двигателями высокой тяги при полетах к планетам земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс) длительность фазы I не превышает недели.

Фаза II (исключая коррекции в ходе полета) будет состоять из пассивного полета под доминирующим воздействием поля тяготения Солнца и хорошо описывается отрезками эллиптической траектории (при допущении по крайней мере одной коррекции в ходе полета). Эта фаза занимает наибольшую часть времени перелета с одной планеты на другую.

Фаза III повторяет в обратной последовательности фазу I; она включает операцию по преобразованию планетоцентрической гиперболической орбиты сближения в орбиту ожидания вокруг планеты назначения впредь до спуска на ее поверхность. Длительность фазы III в общем не будет превышать длительности фазы I для планет земной группы.

Для обратного полета потребуются те же самые три фазы; во всех возможных случаях обратный полет отличается от простого возвращения временем ожидания, продолжительность которого определяется элементами орбит обеих планет, а также характеристиками используемого корабля.

Напомним, что время ожидания представляет собой время пребывания вблизи планеты назначения, прежде чем обе планеты

и Солнце займут положение, благоприятное для возвращения корабля. Поэтому полное время полета с возвращением в основном складывается из двух фаз II (не обязательно равных по длительности) и времени ожидания.

В гл. 11 было показано, что наиболее экономичные орбиты полета между двумя материальными точками на круговых орбитах в поле одной центральной силы состоят из двух касающихся эллипсов (опуская требующий больших затрат времени биэллиптический переход). Задача о перелете с одной планеты на другую и обратно при условии минимальной затраты топлива приводит к полному времени полета, которое легко получить из формул гл. 11. Первым, кто обратил внимание на такие орбиты с минимальной затратой энергии и вычислил времена межпланетных полетов для них, был Гоман [3]. При условии, что орбиты планет круговые и компланарные, Земля является исходной планетой во всех случаях, а также пренебрегая затратами времени на маневры в фазах I и III, использование формул (11.16) и (11.24) дает время полета  $t_T$ :

$$t_T = \pi \left[ \frac{(a_E + a_P)^3}{8\mu} \right]^{1/2},$$

где  $a_E$  и  $a_P$  — соответственно большие полуоси орбит Земли и планеты, а  $\mu$  — произведение массы Солнца на постоянную тяготения.

Период обращения Земли  $T_E$  определяется как

$$T_E = 2\pi \sqrt{\frac{a_E^3}{\mu'}},$$

где

$$\mu' = G(M + m_E) \approx GM,$$

поскольку  $m_E/M \approx 1/330\,000$ . Отсюда

$$t_T = (1 + a)^{3/2}/5,656 \text{ лет}; \quad (12.2)$$

большая полуось  $a$  орбиты планеты здесь выражена в астрономических единицах.

Минимальное время ожидания  $t_W$  находится путем использования формул (11.73)—(11.77), а полное время полета  $T$  равно  $2t_T + t_W$ . Эксцентриситет касательной орбиты перелета определяется из (11.23), а именно

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}.$$

Для внешней планеты

$$e = \frac{a-1}{a+1}, \quad (12.3)$$

в то время как для внутренней

$$e = \frac{1-a}{1+a}. \quad (12.4)$$

Здесь, как и в (12.2), большая полуось  $a$  планеты выражена в астрономических единицах.

В табл. 12.3 приведены времена перелета, времена ожидания и полные времена полета с возвращением по касательным эллиптическим орбитам с минимальными затратами энергии. Эта таблица позволяет сразу сделать несколько выводов. Полеты

Таблица 12.3

Планета	Время перелета $t_T$ , годы	Миним. время ожидания $t_W$ , годы	Полное время полета $T = 2t_T + t_W$ , годы	Эксцентриситет орбиты перелета
Меркурий	0,289	0,183	0,76	0,44
Венера	0,400	1,278	2,08	0,16
Марс	0,709	1,242	2,66	0,21
Юпитер	2,731	0,588	6,05	0,68
Сатурн	6,048	0,936	13,03	0,81
Уран	16,04	0,932	33,01	0,91
Нептун	30,62	0,766	62,01	0,94
Плутон	45,47	0,061	91,00	0,95

с участием человека к планетам более далеким, чем Марс, исключаются ввиду слишком большой длительности, если приходится использовать орбиты, близкие к орбитам с минимальными затратами энергии. Но даже если будут использоваться беспилотные аппараты, надежность деталей и компонентов оборудования в течение столь длительного времени вряд ли может быть гарантирована, даже если информация, собранная установленными на корабле приборами, будет передаваться на расстояния во много миллионов километров.

Времена полетов с возвращением к Венере, Марсу и Меркурию не являются невозможными для полетов с участием человека; интересен тот факт, что на полет к Меркурию и обратно затрачивается лишь  $1/3$  и  $1/4$  времени, затрачиваемого на полеты (с возвращением) к Венере и Марсу, соответственно. Важную роль в этом

случае играют большие времена ожидания в окрестностях Марса и Венеры, прежде чем окажется возможным начать обратный полет. Это позволяет предположить, что задача уменьшения столь длительного времени ожидания путем использования различных перелетных орбит, совместимых с имеющимися в распоряжении ресурсами энергии, должна занять важное место в числе факторов, учитываемых при планировании подобных полетов.

Теперь мы подготовили почву для рассмотрения фактических требований к скорости при подобных орбитах перелета. Рассчитаем значения приращений скорости, необходимых для вывода корабля на требуемую гелиоцентрическую орбиту. Благодаря первому приращению скорости корабль выводится на промежуточную орбиту вокруг Земли. Эта орбита (которая выбирается круговой), согласно предположению, имеет высоту 460 км; для вывода на такую орбиту требуется круговая скорость 7,635 км/с. Чтобы достичь параболической скорости (или скорости освобождения), необходимо дополнительное приращение скорости, равное  $(\sqrt{2}-1) \cdot 7,635$  км/с. Предположим, что указанное приращение скорости осуществляется в направлении касательной к орбите корабля. Теоретически это дало бы возможность кораблю достичь гелиоцентрического поля тяготения сразу за пределами сферы действия Земли почти с нулевой геоцентрической скоростью (нулевой гиперболический избыток) и гелиоцентрической скоростью, равной гелиоцентрической скорости Земли. Чтобы выполнить любой межпланетный полет, фактический выход из сферы действия Земли должен происходить с гиперболической скоростью:

Выражение (11.79) определяет гиперболический избыток  $V$ , с которым корабль покидает сферу действия Земли (радиус этой сферы  $\rho$ ); на геоцентрическом расстоянии  $\rho_0$  корабль к скорости освобождения  $V_e$ , где

$$V_e = V_c \sqrt{2} = \sqrt{2Gm/\rho_0}, \quad (12.5)$$

получает дополнительную скорость  $v_e$ .

Перепиывая (11.79), мы имеем

$$V = \left[ \frac{2Gm}{\rho} + v_e(2V_e + v_e) \right]^{1/2}. \quad (12.6)$$

На рис. 12.7 гиперболический избыток  $V$  отложен в зависимости от величины избытка  $v_e$  над скоростью освобождения, с которым корабль покидает промежуточную орбиту. Высота промежуточной орбиты принята равной 460 км, радиус внешней сферы действия  $\rho$  равен  $2,66 \cdot 10^9$  км, так что

$$|\epsilon_\rho| \ll 0,01.$$

Для котангенциальной гелиоцентрической орбиты перелета корабль покидает сферу действия Земли либо в направлении движения Земли по орбите, либо в противоположном. Если скорость движения Земли по орбите равна  $V_{\oplus}$ , то в первом случае гелиоцентрическая орбитальная скорость корабля равна

$$V_V = V_{\oplus} + V, \quad (12.7)$$

а во втором та же скорость будет

$$V_V = V_{\oplus} - V. \quad (12.8)$$

В первом случае корабль выводится на орбиту перелета, расстояние перигелия у которой равно 1 а. е.; во втором корабль выводится на орбиту с расстоянием афелия 1 а. е.

Уравнения (11.21) и (11.22) можно применить для расчета требуемого приращения скорости  $V$ , подставляя величину орбитальной скорости Земли 29,8 км/с вместо  $V \sqrt{\mu/a_1}$ , когда целью полета является внешняя планета, или вместо  $V \sqrt{\mu/a_2}$ , когда цель полета — внутренняя планета. Во втором столбце табл. 12.4 даны приращения скорости, необходимые для касательного перехода на орбиты перелета к различным планетам. После этого

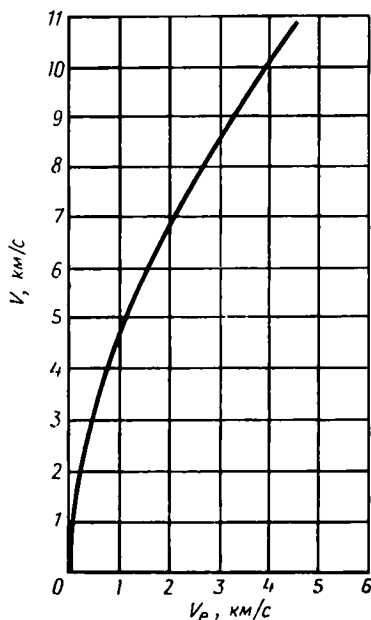


Рис. 12.7.

применение рис. 12.7 позволяет найти скорость  $v_e$  — превышение над скоростью освобождения на промежуточной орбите ожидания, соответствующее требуемому гиперболическому избытку скорости  $V$ . Значения  $v_e$  приведены в третьем столбце табл. 12.4. В таблице также указаны значения гиперболического избытка  $V$  и превышения скорости  $v_e$ , необходимые для достижения гелиоцентрической параболической скорости на расстоянии Земли от Солнца (т. е. обеспечить вылет из Солнечной системы).

Следовательно, чтобы достичь любой планеты, корабль должен приобрести приращение скорости  $v_e$  км/с сверх скорости освобождения (10,80 км/с) для промежуточной орбиты на высоте 460 км над земной поверхностью. Можно отметить, что все планеты оказываются в пределах достижимости ракеты такой мощности, как «Сатурн-5».

Следует заметить что в приведенных выше расчетах не рассматривалось преобразование получившейся гиперболической

Таблица 12.4

Планета	Скорость, необходимая в дополнение к круговой скорости для Земли $V_{\oplus}$ , км/с	Превышение скорости $v_e$ сверх скорости освобождения, км/с
Меркурий	7,537	2,362
Венера	2,497	0,290
Марс	2,947	0,396
Юпитер	8,797	3,139
Сатурн	10,30	4,115
Уран	11,29	4,831
Нептун	11,66	5,075
Плутон	11,82	5,197
Межзвездное пространство	12,34	5,608

орбиты сближения с планетой назначения в эллиптическую или круговую орбиту вокруг этой планеты.

Подобный маневр потребует существенного изменения скорости, поскольку корабль должен уменьшить свою планетоцентрическую скорость до значения, меньшего скорости освобождения. Изменение скорости при этом маневре будет того же порядка величины, как и изменение, с которым корабль покидает промежуточную орбиту вокруг исходной планеты или переходит на гелиоцентрическую орбиту для обратного перелета. Однако нужно отметить, что количество топлива, используемого для маневра отлета от планеты назначения, будет меньше, чем количество его, истраченное на переход на орбиту захвата, поскольку масса корабля уменьшается на величину массы топлива, израсходованного при маневре выхода на орбиту захвата. Это заключение может быть пересмотрено в свете выводов разд. 12.16.

Из приведенных аргументов следует, что главным препятствием для беспилотных полетов к дальним окраинам Солнечной системы является большая продолжительность полета (см. табл. 12.3). Надежность электронных систем должна быть такова, чтобы гарантировать работу систем в течение столь длительных промежутков времени. Полеты кораблей с экипажем непрактичны при орбитах, ограниченных гомановскими переходами; возможными исключениями могут быть Венера и Марс.

Впрочем, ситуация все же не так мрачна. В разд. 11.4.5 мы видели, что возможно использовать сближения с планетами в качестве своеобразного ускорителя; в качестве примера был указан пролет «Пионера-10» близ Юпитера, приведший к выбросу этого

космического аппарата из пределов Солнечной системы: его гелиоцентрическая скорость увеличилась с 1,57 а. е./год до 3,95 а. е./год.

Таким образом, массивные планеты Юпитер и Сатурн могут использоваться в качестве дополнительных источников энергии с целью ускорения космических кораблей и придания им скоростей, позволяющих достичь границ Солнечной системы за гораздо более короткие промежутки времени.

Кроме того, с появлением более мощных источников энергии, по-видимому, станут практически более доступными полеты с экипажем во внутренних районах Солнечной системы.

Сравнительно быстрые орбиты полетов можно выбрать таким образом, чтобы сократить длительность времен ожидания близ Марса или Венеры, особенно если учесть роль того факта, что траектории прямого и обратного полетов не обязательно должны иметь одинаковые эксцентриситеты или времена перелета.

## 12.11. Использование орбит ожидания при межпланетных полетах

Существенную экономию топлива можно достичь путем использования орбит ожидания у планет назначения в качестве своеобразных «складов». Хорошо известная аналогия описанной процедуры — это создание промежуточных баз при походе на Южный полюс или при подъеме на Эверест, на которых сохраняются запасы продовольствия и топлива для обратного путешествия или спуска; очевидно, что в конечном счете этот прием обеспечит сбережение энергии. В литературе по астронавтике существует много работ по указанному использованию орбит ожидания при полетах к Луне или планетам; в проекте «Аполлон» эта методика широко использовалась на стадии спуска на поверхность Луны. Ниже мы рассмотрим описанный метод на простом примере полета с поверхности планеты  $P_1$  на поверхность планеты  $P_2$  и обратно на поверхность планеты  $P_1$ . В первом случае полет осуществляется одним кораблем с использованием орбит ожидания вокруг планет  $P_1$  и  $P_2$  только для целей проверки («процедура 1»); во втором случае две орбиты ожидания используются для сбережения баков с топливом («процедура 2»). Фазы полета схематически показаны на рис. 12.8; здесь  $S$  — Солнце. Обратный полет показан пунктиром; следует помнить, что, хотя обратная траектория показана на схеме как зеркальное отображение прямой орбиты перелета, на самом деле необходимо конечное время ожидания вблизи  $P_2$ , прежде чем наступит момент отлета назад. Орбиты планет  $P_1$  и  $P_2$  предполагаются круговыми и компланарными. Размеры круговых орбит ожидания для ясности весьма сильно преувеличены. Ниже, в табл. 12.5, перечислены этапы действия согласно процедуре 1.

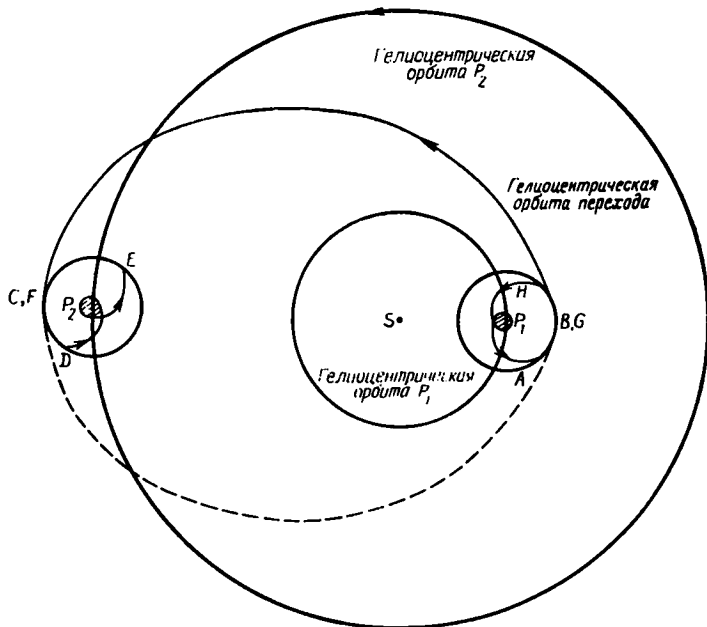


Рис. 12.8.

Поскольку обратный полет является зеркальным изображением прямого, хотя и смещенным по долготе, можно считать, что по абсолютной величине

$$\begin{aligned} v_A &= v_H, & v_D &= v_E, \\ v_C &= v_F, & v_B &= v_G, \end{aligned}$$

однако направления их противоположны. Если как посадка, так и взлет осуществляются только путем использования двигателей корабля, можно также положить

$$v_1 \approx v'_1, \quad v_2 \approx v'_2.$$

В данном разделе мы уделяем внимание сравнению использования и неиспользования орбиты ожидания в целях экономии топлива; наличием ступеней у космического корабля можно пренебречь и считать, что используется одноступенчатый корабль. Тогда, если  $m$  — масса капсулы и конструкции, которая заканчивает полет (причем в баках совершенно не осталось топлива), а  $M_0$  — стартовая масса, когда корабль покидает планету  $P_1$  в начале своего полета, уравнение (11.2) дает (в пренебрежении любыми гравитационными потерями)

$$M_0/m = \exp V,$$



где величина

$$V = 2(v_1 + v_A + v_B + v_C + v_D + v_2) \quad (12.9)$$

предполагается выраженной в единицах скорости истечения газов в двигателе ракеты, причем последняя считается постоянной величиной.

Положим

$$V_1 = v_1 + v_A, \quad V_2 = v_B + v_C, \quad V_3 = v_D + v_2;$$

тогда

$$M_0/m = \exp(2V_1 + 2V_2 + 2V_3). \quad (12.10)$$

Теперь рассмотрим процедуру 2. Пусть снова  $m$  — общая масса капсулы и конструкции, которая будет спускаться на поверхность планеты после перелета. Однако, конструкция видоизменена так, что одна из частей ее, содержащая запас топлива с полной массой  $m_{AR}$ , может быть оставлена на орбите вокруг планеты  $P_1$ , в то время как другая часть (также содержащая топливо) с полной массой  $m_{CR}$  может быть оставлена на орбите вокруг планеты  $P_2$ . Схема этапов полета для такого корабля с первоначальной массой  $m_0$  приведена в табл. 12.6.

Таблица 12.5

Этап полета	Требуемое приращение скорости	Пояснения (все скорости в единицах скорости истечения газов из двигателя ракеты, в предположении ее постоянства)
$P_1 \rightarrow A$	$v_1 + v_A$	$v_1$ обеспечивает этап перехода к $A$ , выводит ракету на круговую орбиту вокруг $P_1$
$A \rightarrow B$	0	При неработающем двигателе
$B \rightarrow C$	$v_B + v_C$	$v_B$ переводит ракету на гелиоцентрическую орбиту перехода; $v_C$ переводит ракету на круговую орбиту вокруг $P_2$
$C \rightarrow D$	0	При неработающем двигателе
$D \rightarrow P_2$	$v_D + v_2$	$v_D$ уводит ракету с орбиты вокруг $P_2$ ; $v_2$ обеспечивает ее посадку
$P_2 \rightarrow E$	$v'_2 + v_E$	$v'_2$ переводит ракету на этап $E$ ; $v_E$ переводит ракету на круговую орбиту вокруг $P_2$
$E \rightarrow F$	0	При неработающем двигателе
$F \rightarrow G$	$v_F + v_G$	$v_F$ переводит ракету на гелиоцентрическую орбиту перехода; $v_G$ переводит ракету на круговую орбиту вокруг $P_1$
$G \rightarrow H$	0	При неработающем двигателе
$H \rightarrow P_1$	$v_H + v'_1$	$v_H$ уводит ракету с орбиты вокруг $P_1$ ; $v'_1$ обеспечивает ее посадку.

Таблица 12.6

Этап полета	Требуемое приращение скорости	Пояснения (все скорости в единицах скорости истечения газов из двигателя, в предположении ее постоянства)	Масса ракеты в конце этапа
$P_1 \rightarrow A$	$v_1 \div v_A$	$v_1$ переводит ракету на этап $A$ ; $v_A$ переводит ее на круговую орбиту вокруг $P_1$	$m_A$
$A \rightarrow B$	0	Без тяги; отделяется бак с топливом массой $m_{AR}$	$m_A - m_{AR}$
$B \rightarrow C$	$v_B \div v_C$	$v_B$ переводит ракету на гелиоцентрическую орбиту перелета; $v_C$ переводит ее на круговую орбиту вокруг $P_2$	$m_C$
$C \rightarrow D$	0	Без тяги; отделяется бак с топливом массой $m_{CR}$	$m_C - m_{CR}$
$D \rightarrow P_2$	$v_D \div v_2$	$v_D$ уводит часть ракеты с орбиты вокруг $P_2$ ; $v_2$ обеспечивает посадку	$m_2$
$P_2 \rightarrow E$	$v'_2 \div v_E$	$v'_2$ переводит ракету на этап $E$ ; $v_E$ выводит ее на круговую орбиту вокруг $P_2$ рядом с баком топлива массой $m_{CR}$	$m_E$
$E \rightarrow F$	0	Без тяги; бак с топливом массой $m_{CR}$ присоединяется к ракете	$m_E + m_{CR}$
$F \rightarrow G$	$v_F \div v_G$	$v_F$ переводит ракету на гелиоцентрическую орбиту перехода; $v_G$ обеспечивает переход на круговую орбиту вокруг $P_1$ рядом с баком топлива массой $m_{AR}$	$m_G$
$G \rightarrow H$	0	Без тяги; бак с топливом массой $m_{AR}$ присоединяется к ракете	$m_G + m_{AR}$
$H \rightarrow P_1$	$v_H \div v'_1$	$v_H$ уводит ракету с орбиты вокруг $P_1$ ; $v'_1$ обеспечивает ее посадку	$m_1$

Снова предположим, что

$$\begin{aligned}
 v_A &= v_H, & v_D &= v_E, \\
 v_C &= v_F, & v_B &= v_G, \\
 v_1 &\approx v'_1, & v_2 &\approx v'_2,
 \end{aligned}$$

причем каждое приращение скорости имеет ту же величину, что и в процедуре 1. Кроме того, если корабль всегда полностью освобождается от топлива, когда к нему присоединяется очередной бак с топливом, то мы можем выбрать массу  $m$  для капсулы и конструкции после освобождения от топлива. В самом деле, поскольку на всех этапах операции, отличной от первой ( $P_1 \rightarrow A$ ), ступень корабля должна содержать меньше топлива, чем

аналогичная ступень при процедуре 1, то она вполне может иметь массу, меньшую  $m$ . Поэтому можно записать

$$m_E \approx m_G \approx m_1 \approx m. \quad (12.11)$$

Далее, в соответствии с (11.2)

$$m_0/m_A = \exp(v_1 + v_A) = \exp V_1, \quad (12.12)$$

$$(m_A - m_{AR})/m_C = \exp(v_B + v_C) = \exp V_2, \quad (12.13)$$

$$(m_C - m_{CR})/m_2 = \exp(v_D + v_2) = \exp V_3, \quad (12.14)$$

$$m_2/m_E = \exp(v'_2 + v_E) = \exp V_3, \quad (12.15)$$

$$(m_E + m_{CR})/m_G = \exp(v_F + v_G) = \exp V_2, \quad (12.16)$$

$$(m_G + m_{AR})/m_1 = \exp(v_H + v'_1) = \exp V_1. \quad (12.17)$$

Если все массы выражены в единицах массы  $m$ , тогда легко видеть, что

$$m_0 = e^{V_1} [e^{V_2} (e^{V_3} + e^{2V_3} - 1) + e^{V_1} - 1], \quad (12.18)$$

причем

$$M_0 = \exp 2 (V_1 + V_2 + V_3). \quad (12.19)$$

Таким образом,  $M_0 > m_0$  для всех положительных значений  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ . Отсюда

$$\frac{M_0}{m_0} = \frac{\exp(V_1 + 2V_2 + 2V_3)}{e^{V_1} (e^{2V_3} + e^{V_2} - 1) + e^{V_1} - 1}. \quad (12.20)$$

Приведем несколько численных примеров. Для современных видов химического топлива скорость истечения  $v_x$  составляет примерно 2,5 км/с. Для полета Земля — Марс — Земля при использовании орбит ожидания вокруг обеих планет с высотой 460 км,  $V_1 v_x \approx 7,635$  км/с (в пренебрежении гравитационными потерями при спуске). Напомним, что для  $V_2 v_x$  величина  $v_B$  — это приращение скорости, которое должно быть добавлено, чтобы придать кораблю требуемый гиперболический избыток скорости для выведения его на точную гелиоцентрическую орбиту перехода, в то время как  $v_C$  — приращение скорости, необходимое для преобразования ареоцентрической гиперболической траектории корабля в орбиту ожидания вокруг Марса.

Из табл. 12.4 имеем

$$v_B = (\sqrt{2} - 1) \times 7,635 + 0,396] \text{ км/с} = 3,558 \text{ км/с}.$$

Чтобы получить  $v_C$ , сначала находим из (11.22) величину гиперболического избытка  $V$ , когда корабль входит во внешнюю сферу действия Марса,

$$V \equiv \Delta v_B = \left(\frac{\mu}{a_2}\right)^{1/2} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1 + a_2/a_1}}\right],$$

где  $(\mu/a_2)^{1/2}$  — орбитальная скорость Марса,  $a_1$  и  $a_2$  — большие полуоси орбит Земли и Марса соответственно. Согласно данным, приведенным в приложении,

$$V = 2,657 \text{ км/с.}$$

Уравнения (12.5) и (12.6) определяют связь между  $V$  и  $v_c$ , именно:

$$V_e = V_c \sqrt{2} = \sqrt{2Gm/\rho_0}$$

и

$$V = \left[ \frac{2Gm}{\rho} + v_e(2V_e + v_e) \right]^{1/2}.$$

Поскольку

$$v_c = (\sqrt{2} - 1) V_c + v_e,$$

мы получаем

$$V = \left[ \left( \frac{2Gm}{\rho} - \frac{1}{2} V_e^2 \right) + v_c^2 + 2v_c V_c \right]^{1/2}. \quad (12.21)$$

Если теперь принять, что скорость освобождения на расстоянии  $\rho$  равна  $V_{\rho c}$ , то (12.21) принимает вид

$$V = [V_{\rho e}^2 + (V_c + v_c)^2]^{1/2}, \quad (12.22)$$

поскольку

$$V_{\rho e} = 2Gm/\rho.$$

Отсюда

$$v_c = [V^2 + (V_e^2 - V_{\rho e}^2)]^{1/2} - V_c. \quad (12.23)$$

Для Марса внешняя сфера действия имеет радиус  $1,27 \cdot 10^6$  км (см. табл. 12.2); используя это значение для  $\rho$  и беря другие необходимые величины из приложений, получаем при  $V = 2,657$  км/с  $v_c = 2,073$  км/с или  $v_e = 0,690$  км/с. Отсюда

$$V_2 v_x = v_B + v_c = 5,631 \text{ км/с.}$$

Для выхода на круговую орбиту вокруг Марса выражение

$$v'_2 + v_E = v_D + v_2 = \sqrt{Gm/\rho_0} = 3,340 \text{ км/с}$$

дает  $V_3 v_x = 3,340$  км/с. После этого из (12.18), (12.19) и (12.20) имеем

$$m_0 = 5060, M_0 = 588\,000, M_0/m_0 = 116.$$

Значения, полученные для отношения масс  $m_0$  и  $M_0$ , разумеется, совершенно нереальны для одноступенчатого корабля с двигателем на химическом топливе. Однако значение  $M_0/m_0$  позволяет предположить, что реальные успехи могут быть достигнуты при помощи каких-либо вариантов метода встреч на орбите.

Для второго примера предположим, что скорость истечения удвоена и доведена до 5 км/с. Тогда

$$V_1 = 1,527, V_2 = 1,126, V_3 = 0,668$$

и

$$m_0 = 100,1, M_0 = 767, M_0/m_0 = 7,66.$$

Отметим, насколько чувствительной оказывается начальная масса корабля к возрастанию скорости истечения, а также насколько преимущество сохранения топлива на орбитах ожидания убывает с увеличением скорости истечения, хотя возможность сбережения топлива остается весьма полезной особенностью.

Даже в том случае, когда рассматриваются многоступенчатые корабли, а не одноступенчатый, описанный в приведенном выше примере, сохраняется заметное преимущество при использовании метода встречи на орбите, поскольку сбережение топлива должно сказываться тогда, когда массе, остающейся на промежуточной станции, не требуется придавать ускорение при последующих включениях двигателей. Тем не менее методу встреч присущи определенные трудности; например, может оказаться невозможным хранение топлива в баках в космическом пространстве в течение достаточно длительного времени или обеспечение его перекачки из баков-хранилищ без дополнительного массивного оборудования. Возможное решение проблемы состоит в том, что топливо для конечного этапа ( $H \rightarrow P_1$ ) не выводится на орбиту вместе с космическим кораблем, но запускается на нужную околоземную орбиту при помощи специального грузового корабля, как только межпланетный космический корабль возвратится на околоземную орбиту. Если к тому же космический корабль снабжен двигателем малой тяги с высокой скоростью истечения, то он скорее всего будет снаряжаться на околоземной орбите, поскольку подобный корабль нельзя вывести на орбиту непосредственно с поверхности Земли. Поэтому заключительный этап полета будет обеспечиваться при помощи мощных грузовых кораблей. На другом конце траектории межпланетного перелета космический корабль остается на орбите вокруг Марса, в то время как другой грузовой корабль, перенесенный через межпланетное пространство космическим кораблем и выведенный последним на орбиту ожидания вокруг Марса, будет использован для осуществления этапов полета ( $D \rightarrow P_2$ ) и ( $P_2 \rightarrow E$ ). Большое число грузовых кораблей создаст дополнительные преимущества в тех случаях, когда уделяется особое внимание фактору безопасности. При некоторых исследованиях здравый смысл требует, чтобы какое-то количество подобных кораблей оставлялось экипажем в конце фазы ( $P_2 \rightarrow E$ ) вместе с грузовыми кораблями, использованными на планете назначения, прежде чем оставшийся межпланетный корабль будет выведен на гелиоцентрическую орбиту обратного полета.

Здесь же возникают проблемы навигации, поскольку корабли должны обнаруживать друг друга и согласовывать взаимные скорости для маневров встречи. Такие проблемы, однако, в основном уже были разрешены при полетах человека на Луну и при полетах с последующей стыковкой — в частности, в полете «Союз — Аполлон».

Некоторые специалисты высказывали мнение, что на подобные исследования было затрачено слишком много усилий и времени, особенно потому, что межпланетные полеты с возвращением, основанные на химическом топливе, почти наверняка не будут осуществлены на практике; однако, по мнению автора, такие исследования неочень при рассмотрении основных принципов и развитии большого числа полезных методов, которые впоследствии находят применение на практике.

## 12.12. Влияние ошибок на межпланетные орбиты

Результаты разд. 11.3.6 и 11.4.4 могут быть применены к межпланетным орбитам для получения представления о чувствительности таких орбит к малым ошибкам положения и скорости корабля в заданный момент.

Напомним, что ошибка в импульсе, который выводит корабль на гиперболическую орбиту, имеет далеко идущие последствия. Ошибка в импульсе будет вызывать ошибки в положении и скорости корабля, когда он покидает внешнюю сферу действия планеты. Эти ошибки порождают небольшие отличия гелиоцентрической орбиты от предвычисленной, что ведет к изменению точки подхода (и момента подхода) к сфере действия планеты назначения. Наконец, новая планетоцентрическая орбита захвата требует нового дополнительного расхода топлива для преобразования последней орбиты в замкнутую планетоцентрическую орбиту.

В разд. 11.4.4 был указан прием, при помощи которого можно вывести аналитические выражения, описывающие подобные цепочки ошибок; утверждалось, что применение таких функций показывает, насколько сильно чувствительны межпланетные орбиты к первоначальным ошибкам в импульсе. Эта чувствительность меняется с величиной гиперболического избытка скорости  $V$ , а также с его направлением относительно направления орбитальной скорости планеты; в свою очередь из разд. 12.10 (см. рис. 12.7) и из уравнений (12.5) и (12.6) следовало, что чувствительность  $V$  к изменению  $v_r$ , приращению скорости в дополнение к скорости освобождения  $V_e$  с околопланетной орбиты ожидания, сама является функцией  $v_r$ , изменяющейся особенно существенно при малых значениях  $v_r$ .

Численный пример показывает, насколько чувствительны подобные орбиты. При котангенциальном перелете Земля — Марс

двигатели ракеты дают ей ошибку скорости  $\Delta v_e = 30$  см/с в направлении скорости сверх значения скорости освобождения  $V_e$ , с которой ракета покидает околоземную орбиту ожидания. Какова будет результирующая ошибка в расстоянии афелия гелиоцентрической орбиты ракеты?

Согласно (12.6),

$$V = \left[ \frac{2Gm}{\rho} + v_e(2V_e + v_e) \right]^{1/2}. \quad (12.24)$$

Изменение  $\Delta v_e = 30$  см/с дает новый гиперболический избыток скорости  $V_1$ , определяемый разложением выражения (12.24) после подстановки в него  $(v_e + \Delta v_e)$  вместо  $v_e$ :

$$V_1 = V \left[ 1 + \left( \frac{v_e + \Delta v_e}{V_e} \right) \Delta v_e \right]. \quad (12.25)$$

После этого из табл. 12.4 мы имеем  $v_e = 0,396$  км/с,  $V = 2,947$  км/с; отсюда значение  $V_e = 10,80$  км/с и  $\Delta v_e = 30$  см/с дают  $V = (V + 0,00114)$  км/с. Далее, используя (12.7) и подставляя значение 29,8 км/с для орбитальной скорости Земли  $V_V$ , получаем значение скорости корабля в перигелии на его гелиоцентрической орбите перехода 32,7481 км/с вместо 32,7470 км/с.

Из (11.23), согласно которому

$$e = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1},$$

или из табл. 12.3 эксцентриситет орбиты перелета равен 0,21. Ошибка  $\Delta r_A$  расстояния афелия орбиты находится из (11.62):

$$\frac{\Delta r_A}{r_A} = \left( \frac{4}{1-e} \right) \frac{\Delta V}{V}$$

при подстановке значений:

$$r_A = a_2 = 1,5237 \text{ а. е.} = 227,8 \cdot 10^6 \text{ км,}$$

$$e = 0,21,$$

$$\Delta V = 0,00114 \text{ км/с,}$$

$$V = 32,7470 \text{ км/с.}$$

В результате находим, что эта ошибка равна 40 200 км, что в 6 раз превышает диаметр Марса. Аналогичный расчет для Юпитера дает ошибку в расстоянии афелия орбиты перелета для ошибки  $v_e$  в 30 см/с значение 118 000 км — немногим меньше диаметра Юпитера.

На самом деле, как упоминалось в разд. 11.4.4, эффективное сечение столкновения с планетой зависит от ее поля тяготения; таким образом, хотя приведенные выше примеры указывают на

высокую чувствительность орбиты перелета к значению ошибки при отсечке скорости, существует определенный «допуск» (особенно в случае Юпитера или Сатурна) на размеры их эффективных сфер действия, что связано с достаточно сильным фокусированием траектории вблизи планеты. Но даже в этом случае любая космическая ракета должна располагать определенным запасом топлива для коррекций в полете; это также требует наличия навигационного оборудования — либо на Земле, либо на корабле.

## Задачи

12.1. Астронавт на лунной поверхности наблюдает прохождение искусственного спутника Луны через местный зенит с определенной угловой скоростью. Предполагая, что спутник находится на круговой орбите с высотой 400 км над лунной поверхностью, рассчитать наблюдаемую угловую скорость спутника (в градусах за секунду).

12.2. Вычислите селеноцентрический радиус-вектор искусственного спутника Луны, движущегося по круговой орбите в плоскости лунного экватора и имеющего всегда одну и ту же селеноцентрическую долготу. Почему невозможно запустить спутник на подобную орбиту?

12.3. Найти с четырьмя значащими цифрами расстояние от центра Земли так называемой нейтральной точки на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, в долях расстояния Земля—Луна (принять массу Луны равной  $1/81,25$  массы Земли). Найдите расстояние от Земли до другой точки на этой же прямой, в которой величины сил притяжения ракеты Землей и Лунной равны.

12.4. Каково по порядку величины отношение возмущающего ускорения, вызванного Землей, к ускорению, вызванному Луной, для космического корабля в нейтральной точке, если принять, что центральное ускорение от Луны описывается соотношениями задачи двух тел?

12.5. Рассчитайте (с четырьмя значащими цифрами) расстояния точек  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  (см. рис. 5.2) от центра Земли для космического корабля в системе Земля—Луна. (Предположить, что орбита Луны вокруг Земли является круговой и что масса Луны составляет  $1/81,25$  массы Земли. Можно взять значения расстояний точек  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  из разд. 12.5 в качестве первого приближения.)

12.6. Сравните эффективные радиусы столкновений Юпитера и Марса для космического корабля, достигающего этих планет с гиперболическим избытком скорости  $2 \text{ км/с}$  и эксцентриситетом орбиты  $1,3426$ .

12.7. Рассчитайте два гиперболических избытка скорости для удаления из внешней сферы действия Земли ( $|\epsilon| = 0,01$ ), необходимых для вывода корабля на котангенциальную орбиту перехода, заканчивающуюся а) в перигелии, б) в афелии Марса. (Пренебречь эксцентриситетом земной орбиты, величиной сферы действия Земли по сравнению с радиусом ее орбиты, а также массой Луны; считать, что все орбиты компланарны.)

12.8. Открыт астероид, движущийся в плоскости эклиптики; большая полуось его орбиты  $2,0045 \text{ а. е.}$ , эксцентриситет  $0,08456$ . Пренебрегая эксцентриситетом земной орбиты, показать, что полная продолжительность полета для встречи с астероидом с целью получения фотографий его поверхности при близком пролете и возвращения их в окрестность Земли на расстоянии  $\sim 10^6 \text{ км}$  для последующей передачи изображений может занять не более 2 лет, даже если переход должен осуществляться по котангенциальной орбите.

Какой гиперболический избыток скорости требуется для внешней сферы действия Земли? (Предположить, что полем тяготения самого астероида можно пренебречь.)

12.9. В предыдущей задаче рассчитать продолжительность полета с круговой орбиты ожидания вокруг Земли (с высотой 480 км) до границы внешней



сферы действия и скорость ухода с орбиты ожидания, если гиперболическая орбита ухода касательна к орбите ожидания.

12.10. Космический корабль предназначен для непрерывного сбора данных об условиях в межпланетном пространстве вне плоскости эклиптики и передачи этих сведений на Землю. Для совершения указанного полета орбита корабля выбирается в виде окружности с периодом обращения 1 год. С целью вывода на гелиоцентрическую орбиту корабль покидает внешнюю сферу действия Земли радиально с гиперболическим избытком скорости 5 км/с и гелиоцентрическим радиусом-вектором 1 а. е. Показать, что гелиоцентрическая орбита корабля не является круговой, но ее эксцентриситет меньше 0,0015, вследствие чего им можно пренебречь. Рассчитать а) наклонение результирующей орбиты к плоскости эклиптики, б) максимальное геоцентрическое расстояние ракеты. Когда корабль (приблизительно) после его вывода на гелиоцентрическую орбиту в первый раз снова пересечет сферу действия Земли? (Пренебречь эксцентриситетом земной орбиты; радиус внешней сферы действия Земли принять равным  $2,66 \cdot 10^6$  км.)

## Литература

1. *Von Braun W.* The Mars Project. University of Illinois, 1953.
2. *Брумберг В. А.* Бюлл. Инст. теор. астрон. АН СССР, 8, 705, 1962.
3. *Hohmann W.* Die Erreichbarkeit der Himmelskorper. Munich, Oldenburg, 1925.
4. *Kozai Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, 15, 301, 1963.
5. *Lass H., Solloway C. R.* J. Am. Rocket Soc., 31, 220, 1961.
6. *Oesterwinter C.* Astron. J., 71, 987, 1966.
7. *Roy A. E.* Icarus, 9, 82, 133, 1968.

## Рекомендуемая литература

- Ehrlicke K. A.* Space Flight, vol. 1: Environment and Celestial Mechanics, New Jersey, Van Nostrand, 1961.
- Ehrlicke K. A.* Space Flight, vol. 2: Dynamics, New Jersey, Van Nostrand, 1962.

## Определение орбит и межпланетная навигация

### 13.1. Введение

В этой главе обсуждаются три тесно связанные между собой темы, а именно: определение орбит, улучшение орбит и межпланетная навигация. При *определении орбит* из наблюдений (после их редукции) находятся элементы орбиты тела солнечной системы. При использовании классических методов Лапласа, Гаусса и т. п. приходится исходить из наблюдений положений тела на небесной сфере (эти положения обычно задаются значениями прямых восхождений и склонений). Поскольку орбита тела, обращающегося вокруг Солнца, представляет собой коническое сечение (если пренебречь возмущениями), то в общем случае необходимо найти шесть элементов, так что наблюдения прямого восхождения и склонения небесного тела в три различных момента дают минимальное число данных, требующихся для определения орбиты тела. Это, безусловно, справедливо для эллиптической или гиперболической орбиты; в случае параболы ( $e = 1$ ) надо найти только пять элементов, так что теоретически достаточно трех значений прямого восхождения и двух значений склонения, в то время как для круговой орбиты (при этом  $e = 0$ , а долгота перигелия теряет смысл) достаточно двух наблюдений как прямого восхождения, так и склонения. Однако на практике приобретают значение различные обстоятельства, и можно утверждать, что для нахождения приемлемой предварительной орбиты требуются три различных наблюдения тела в разные моменты времени. Следовательно, цель определения орбиты состоит в выводе орбиты, которая приближенно представляет действительную орбиту небесного тела; из такой приближенной, или предварительной, орбиты можно рассчитать эфемериды, т. е. таблицы вычисленных положений, предсказывающих будущие координаты небесного тела. Эти эфемериды используются для слежения за объектом, в результате чего накапливаются наблюдения для последующих расчетов улучшенной орбиты, как будет показано ниже.

В частных задачах астродинамики могут оказаться подходящими данные наблюдений, дополняющие наблюдения прямых восхождений и склонений небесного тела. Подобные данные обычно получают посредством радиолокаторов; они включают измерения значений дальности и скорости изменения дальности

(см. гл. 3). Поэтому классические методы определения орбит видоизменяются с целью использования подобных дополнительных данных.

Задача *улучшения орбиты*, как показывает само название, сводится к получению более точных значений элементов орбиты тела. Если предварительная орбита достаточно близка к действительной, то ее орбитальные элементы будут отличаться от фактических лишь на малые величины. Поэтому можно составить систему уравнений, связывающих эти малые величины с разностями между наблюдаемыми прямыми восхождениями и склонениями тела и предвычисленными значениями этих небесных координат тела. Полученные уравнения (которые оказываются линейными) решаются методом наименьших квадратов, что дает поправки к элементам предварительной орбиты.

В астродинамике элементы предварительной орбиты могут быть известны заранее. Например, космический корабль обычно выводится на заранее заданную орбиту; можно ожидать, что после запуска он окажется на орбите, не слишком отличающейся от предвычисленной. В таком случае определение орбиты оказывается излишним. Однако в тех случаях, когда предвычисленная орбита оказывается непригодной, предварительную орбиту запущенного космического корабля приходится находить из наблюдений.

За последние несколько лет открылись новые перспективы в связи с выполнением наблюдений, обеспечивающих определение орбиты, при помощи инструментов, размещенных на самом космическом корабле. Рассмотрение подобных методов определения орбит составляет предмет *межпланетной навигации*; последнее наименование отражает тот факт, что названный метод наиболее интенсивно используется на аппаратах, направляемых к Луне или другим планетам, но не на искусственных спутниках. Здесь используются специальные оптические инструменты и электронная аппаратура; мы коснемся этой темы в конце настоящей главы. Но сначала мы кратко обсудим классические методы определения орбит и их современные модификации; после этого будут рассмотрены основные идеи, положенные в основу процедуры улучшения орбит.

## 13.2. Теория определения орбит

Пусть гелиоцентрические экваториальные координаты Земли  $E$  и космического корабля  $V$  определяются как  $(X, Y, Z)$  и  $(x, y, z)$  соответственно; тогда гелиоцентрические расстояния Земли  $R$  и корабля  $r$  определяются как

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Геоцентрическое расстояние  $\rho$  корабля связано с  $R$  и  $r$  соотношением

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \theta, \quad (13.1)$$

где  $\theta$  — угол  $SEV$  в треугольнике  $VSE$  (рис. 13.1), а  $S$  — Солнце. Геоцентрические координаты корабля  $(x', y', z')$  связаны с его прямым восхождением  $\alpha$ , склонением  $\delta$  и геоцентрическим расстоянием  $\rho$  (предполагается, что наблюдения  $\alpha$  и  $\delta$  исправлены за

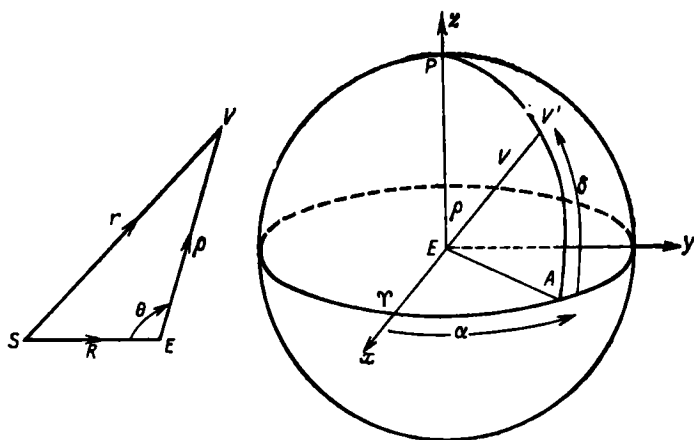


Рис. 13.1.

параллакс, прецессию и т. д. в соответствии с методами гл. 3) следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x' &= \rho \cos \delta \cos \alpha = \rho l, \\ y' &= \rho \cos \delta \sin \alpha = \rho m, \\ z' &= \rho \sin \delta = \rho n. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Здесь  $l$ ,  $m$  и  $n$  — геоцентрические направляющие косинусы корабля. Далее, имеем

$$\begin{aligned} x' &= x - X = \rho l, \\ y' &= y - Y = \rho m, \\ z' &= z - Z = \rho n. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Дифференцируя первое из выражений (13.3) дважды по времени, получаем

$$\dot{\rho} l + \rho \dot{l} = \dot{x} - \dot{X} \quad (13.4)$$

и

$$\ddot{\rho} l + 2\dot{\rho} \dot{l} + \rho \ddot{l} = \ddot{x} - \ddot{X}. \quad (13.5)$$

При этом как Земля (масса  $m_E$ ), так и космический аппарат (масса  $m_V$ ) движутся по орбитам вокруг Солнца (масса  $m_S$ ). Если пренебречь возмущениями, то эти орбиты определяются уравнениями

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m_V) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (13.6)$$

и

$$\ddot{\mathbf{R}} + G(M + m_E) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0. \quad (13.7)$$

Тогда (13.5) принимает вид

$$\ddot{\rho} l + 2\dot{\rho} l + \rho \ddot{l} = -G(M + m_V) \frac{X}{r^3} + G(M + m_E) \frac{X}{R^3}. \quad (13.8)$$

Пренебрегая массой корабля и подставляя  $\rho l + X$  вместо  $x$  в (13.8), получаем

$$\left( \ddot{\rho} + \frac{GM\rho}{r^3} \right) l + 2\dot{\rho} l + \rho \ddot{l} = -GX \left( \frac{M}{r^3} - \frac{M + m_E}{R^3} \right).$$

Сходным путем получаются уравнения для  $Y$  и  $Z$ .

Эти три уравнения можно разрешить для получения  $(\ddot{\rho} + GM\rho/r^3)$ ,  $2\dot{\rho}$ ,  $\rho$ , выраженных через  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ;  $\dot{l}$ ,  $\dot{m}$ ,  $\dot{n}$ ;  $l$ ,  $\dot{m}$ ,  $\dot{n}$ ;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ;  $G$ ,  $M$ ,  $m_E$ ,  $r$ . Все перечисленные величины, за исключением  $r$ , либо известны, либо выводятся из наблюдаемых величин. Последняя же величина исключается путем подстановки в приведенное выше уравнение для  $r$  выражения для  $\rho$ , полученное из соотношения

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2\rho(Xl + Ym + Zn). \quad (13.9)$$

Последнее соотношение выводится из треугольника  $SEV$ , откуда в силу (13.1)

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\angle SEV)$$

и

$$\cos(\angle SEV) = -\frac{Xx' + Yy' + Zz'}{R\rho} = -\frac{1}{R}(Xl + Ym + Zn).$$

После исключения  $r$  получившееся уравнение оказывается уравнением 8-й степени по  $\rho$ . Задача нахождения его корней рассматривается в большом числе руководств, в частности [4, 5, 6, 7].

После нахождения  $r$  и  $\rho$  гелиоцентрические координаты  $(x, y, z)$  и компоненты скорости  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  могут быть вычислены из выражений

$$x = \rho l + X$$

и

$$\dot{x} = \dot{\rho} l + \rho \dot{l} + \dot{X}$$

и аналогичных выражений для  $y$ ,  $z$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ .

Последующее применение способа, изложенного в разд. 4.12, даст нам элементы гелиоцентрической орбиты космического корабля.

### 13.3. Метод Лапласа

Схема, описанная в предыдущем разделе, была предложена Лапласом в качестве метода определения орбит. Чтобы ее реализовать на практике, необходимо найти первые и вторые производные  $l$ ,  $m$  и  $n$  по времени;  $l$ ,  $m$  и  $n$  прямо связаны с наблюдаемыми величинами  $\alpha$  и  $\delta$ , в то время как  $-X$ ,  $-Y$ ,  $-Z$  затабулированы в «Астрономическом ежегоднике» для каждого дня года, так что их первые производные  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$ ,  $\dot{Z}$  выводятся без труда.

Обозначим через  $\rho'$  единичный вектор вдоль направления от центра Земли на космический корабль; тогда

$$\rho' = il + jm + kn, \quad (13.10)$$

где  $i$ ,  $j$ ,  $k$  — единичные векторы вдоль геоцентрических осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно. Разлагая  $\rho'$  в ряд Тейлора относительно значения  $\rho'_0$  в момент  $t = 0$ , получаем

$$\rho' = \rho'_0 + \Delta t (\dot{\rho}')_0 + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (\ddot{\rho}')_0 + \dots,$$

где  $\rho'$  — значение  $\rho'_0$  через интервал времени  $\Delta t$  после того, как эта величина имела значение  $\rho'_0$ ; скобки и индекс «0» указывают, что после дифференцирования по  $t$  подставляются значения для  $t = 0$ .

При достаточно малом  $\Delta t$  можно пренебречь членами более высокого порядка, чем  $(\Delta t)^2$ ; тогда

$$\rho' = \rho'_0 + \Delta t (\dot{\rho}')_0 + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 (\ddot{\rho}')_0. \quad (13.11)$$

Три наблюдения обеспечивают нам три уравнения для величин  $\rho'_0$ ,  $\dot{\rho}'_0$ ,  $\ddot{\rho}'_0$ , так что при известном  $\rho'_0$  можно найти  $(\dot{\rho}')_0$  и  $(\ddot{\rho}')_0$ .

Обычно значение  $\rho'_0$  выбирается для среднего наблюдения. Найденные значения  $(\dot{\rho}')_0$  и  $(\ddot{\rho}')_0$ , разумеется, являются приближенными, но они могут быть улучшены, если имеются более чем три наблюдения. Тогда возможно выписать большее число уравнений и использовать эту систему сначала для исключения членов высокого порядка в  $\rho'_0$ , что обеспечивает вычисление более точных значений  $(\dot{\rho}')_0$  и  $(\ddot{\rho}')_0$ .

Первоначальный метод Лапласа подвергался модификациям для устранения различных неудобств. В одной из таких модификаций, предложенной Штумпфом, используются отношения

направляющих косинусов. Следуя рассмотрению Герджета [5], введем величины  $U$ ,  $V$ ,  $P$  и  $Q$ , определяемые равенствами

$$U = \frac{y+Y}{x+X} = \operatorname{tg} \alpha, \quad V = \frac{z+Z}{x+X} = \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha, \quad (13.12)$$

$$P = Y - UX, \quad Q = Z - VX;$$

величины в правых частях равенств имеют прежний смысл.  $U$  и  $V$  получаются из наблюдений;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  берутся из «Астрономического ежегодника». Тогда имеем

$$y = Ux + UX - Y = Ux - P. \quad (13.13)$$

Далее, аналогично

$$z = Vx - Q. \quad (13.14)$$

Дифференцируя (13.13) и (13.14) дважды по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{U}x + U\dot{x} - \dot{P}, & \dot{z} &= \dot{V}x + V\dot{x} - \dot{Q}, \\ \ddot{y} &= \ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x} + U\ddot{x} - \ddot{P}, & \ddot{z} &= \ddot{V}x + 2\dot{V}\dot{x} + V\ddot{x} - \ddot{Q}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Теперь

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (13.16)$$

где  $\mu = GM$ . Используя выражение уравнения (13.16) в компонентах для подстановки значений  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{z}$  в последние два уравнения системы (13.15), получаем

$$-\mu \frac{y}{r^3} = \ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x} - \mu \frac{x}{r^3} U - \ddot{P}$$

или

$$\ddot{P} - \frac{\mu}{r^3} (y - Ux) = \ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x}. \quad (13.17)$$

С учетом (13.13) находим, что

$$\ddot{U}x + 2\dot{U}\dot{x} = \ddot{P} + \frac{\mu P}{r^3}. \quad (13.18)$$

Аналогично

$$\ddot{V}x + 2\dot{V}\dot{x} = \ddot{Q} + \frac{\mu Q}{r^3}. \quad (13.19)$$

Определяя величину  $D$  при помощи соотношения

$$D = \frac{1}{2} \ddot{U}\dot{V} - \frac{1}{2} \ddot{V}\dot{U} \quad (13.20)$$

и используя (13.18) и (13.19), имеем

$$2Dx = \ddot{P}\dot{V} - \ddot{Q}\dot{U} + (P\dot{V} - Q\dot{U})/r^3, \quad (13.21)$$

а также

$$4D\dot{x} = \ddot{Q}\ddot{U} - \ddot{P}\ddot{V} + (\ddot{U}Q - \ddot{V}P)/r^3. \quad (13.22)$$

Далее,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

после чего

$$r^2 = (1 + U^2 + V^2) x^2 - 2(UP + VQ)x + (P^2 + Q^2). \quad (13.23)$$

Применяя усеченный ряд Тейлора (13.11) и располагая, как и раньше, тремя наблюдениями, можно найти численные значения  $\dot{U}$ ,  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$ ,  $\dot{V}$  из первых двух уравнений (13.12). Последние два уравнения (13.12) с использованием данных из «Астрономического ежегодника» дают нам  $P$  и  $Q$ , а после дифференцирования —  $\dot{P}$  и  $\dot{Q}$ .

Следующий шаг состоит в решении (13.21) и (13.23) способом итерации для определения  $r$  и  $x$ . После этого уравнение (13.22) дает  $\dot{x}$ ; затем первые два уравнения (13.15) дают нам  $\dot{y}$  и  $\dot{z}$ , в то время как (13.13) и (13.14) определяют  $y$  и  $z$  соответственно. Элементы орбиты теперь находятся в соответствии с разд. 4.12.

Хотя метод Штумпфа сводит определители  $3 \times 3$  до определителей  $2 \times 2$  и сберегает время при ручных вычислениях, это преимущество достигается за счет затрат труда на подразделение неба на районы, причем имеют место специальные случаи. Если в распоряжении имеется ЭВМ, то лучше остановиться на более общем методе.

### 13.4. Метод Гаусса

В другом основном методе определения орбит (разработанном Гауссом) берутся три положения и интервалы времени между этими положениями; при этом также используется второй закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости, которому должен удовлетворять объект, движущийся по гелиоцентрической орбите (в пренебрежении возмущениями), а также тот факт, что объект движется в плоскости, проходящей через центр Солнца. В этом разделе мы дадим лишь краткий очерк метода.

Уравнение плоскости, проходящей через начало системы прямоугольных координат, таково:

$$Ax + By + Cz = 0; \quad (13.24)$$

здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — постоянные.



Если три наблюдаемых положения описываются гелиоцентрическими экваториальными координатами  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), тогда имеем три уравнения вида

$$Ax_i + By_i + Cz_i = 0.$$

Исключая постоянные  $A, B$  и  $C$ , находим

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.25)$$

Это уравнение в виде детерминанта можно переписать в трех формах:

$$\begin{aligned} (y_2z_3 - z_2y_3) x_1 - (y_1z_3 - z_1y_3) x_2 + (y_1z_2 - z_1y_2) x_3 &= 0, \\ (x_2z_3 - z_2x_3) y_1 - (x_1z_3 - z_1x_3) y_2 + (x_1z_2 - z_1x_2) y_3 &= 0, \\ (x_2y_3 - y_2x_3) z_1 - (x_1y_3 - y_1x_3) z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2) z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (13.26)$$

Величины в скобках представляют собой проекции на три координатных плоскости удвоенных площадей треугольников, образованных Солнцем и (тремя) положениями тела, взятыми попарно. Если обозначить через  $[i, j]$  площадь треугольника, вершины которого определяются Солнцем и двумя положениями тела в моменты  $t_i, t_j$ , то тогда, замечая, что в каждом уравнении проектируется одна и та же плоскость [например, плоскость  $yz$  в первом из уравнений (13.26)], можно записать

$$\begin{aligned} [2, 3] x_1 - [1, 3] x_2 + [1, 2] x_3 &= 0, \\ [2, 3] y_1 - [1, 3] y_2 + [1, 2] y_3 &= 0, \\ [2, 3] z_1 - [1, 3] z_2 + [1, 2] z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Эти уравнения переписываются в форме

$$r_2 = c_1 r_1 + c_3 r_3, \quad (13.28)$$

где

$$c_1 = \frac{[2, 3]}{[1, 3]}, \quad c_3 = \frac{[1, 2]}{[1, 3]}.$$

Из треугольника  $ESV$

$$\rho = r - R, \quad (13.29)$$

так что

$$\rho_2 - c_1 \rho_1 - c_3 \rho_3 = c_1 R_1 + c_3 R_3 - R_2. \quad (13.30)$$

Если найдены  $c_1$  и  $c_2$  (так называемые «отношения треугольников»), то тогда система (13.30) оказывается системой трех линейно независимых уравнений для неизвестных геоцентрических расстояний, поскольку  $R$  известно из таблиц геоцентрических координат Солнца:

$$R = -(iX + jY + kZ).$$

Отношения треугольников  $c_1$  и  $c_3$  разлагаются в степенные ряды по интервалам времени  $(t_2 - t_1)$ ,  $(t_3 - t_2)$  и  $(t_3 - t_1)$ . Чтобы сделать это, можно использовать ряды для  $f$  и  $g$  из разд. 4.12. Полагая

$$(t_2 - t_1) \sqrt{GM} = \tau_3,$$

$$(t_3 - t_2) \sqrt{GM} = \tau_1,$$

$$(t_3 - t_1) \sqrt{GM} = \tau_2$$

и отбрасывая все степени, бóльшие  $\tau^3$ , находим

$$c_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{6r_2^3} \right], \quad c_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{(\tau_2^2 - \tau_3^2)}{6r_2^3} \right]. \quad (13.31)$$

Если составить скалярное произведение (13.30) на выражение

$$\frac{\rho_1}{\rho_1} \times \frac{\rho_3}{\rho_3}$$

и подставить выражения для  $c_1$  и  $c_3$  из (13.31) в результирующее выражение, то получим решение для  $\rho_2$  в форме

$$\rho_2 = A + B/r_2^3.$$

В этом уравнении два неизвестных  $\rho_2$  и  $r_2$ , поскольку  $A$  и  $B$  являются функциями затабулированных и наблюдаемых значений величин. Чтобы найти  $\rho_2$  и  $r_2$ , поступим как в методе Лапласа и используем уравнение (13.9), записанное в виде

$$r_2^2 = R_2^2 + \rho_2^2 + 2\rho_2(X_2t_2 + Y_2m_2 + Z_2n_2)$$

в качестве второго уравнения для  $r_2$  и  $\rho_2$ .

Вычислив  $r_2$  и  $\rho_2$ , по уравнению (13.30) найдем  $\rho_1$  и  $\rho_3$ , после этого из (13.29) находим  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ .

Элементы орбиты можно получить обычным способом из  $g_2$  и  $g_3$ ; здесь  $g_2$  вычисляется численным способом из  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  и  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ .

Сам Гаусс избрал несколько иной путь. Положения тела  $g_1$  и  $g_2$  определяют плоскость его орбиты. Оставшиеся элементы получают из двух уравнений, в которые входят два неизвестных. Гаусс вывел одно уравнение из отношения площади треугольника, определяемого радиусами-векторами  $g_1$  и  $g_3$ , к площади сектора, определяемого  $g_1$ ,  $g_3$  и дугой орбиты тела, заключенной между этими точками. Второе уравнение он нашел путем применения уравнения Кеплера для моментов  $t_1$  и  $t_3$ . Несомненно, метод Гаусса более сложен, чем метод Лапласа, хотя в последующем исследователи разработали приемы, исключающие значительное число трудностей, характерных для метода Гаусса.

### 13.5. Метод Ольберса для параболических орбит

Этот метод имеет некоторое сходство с гауссовым, но отличается тем, что в методе Ольберса используется уравнение Эйлера для параболического движения. Пусть  $s$  — длина хорды между двумя положениями  $r_1$  и  $r_3$ , которые тело, движущееся вокруг Солнца с массой  $M$  по параболической орбите, занимает в моменты  $t_1$  и  $t_3$ ; тогда можно показать, что

$$(r_1 + r_3 + s)^{3/2} - (r_1 + r_3 - s)^{3/2} = 6(t_3 - t_1) \sqrt{GM}. \quad (13.32)$$

Если разделить обе части (13.32) на  $(r_1 + r_3)^{3/2}$  и положить

$$\eta = \frac{2(t_3 - t_1) \sqrt{GM}}{(r_1 + r_3)^{3/2}}, \quad (13.33)$$

то (13.32) принимает вид

$$\left(1 + \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{s}{r_1 + r_3}\right)^{3/2} = 3\eta. \quad (13.34)$$

Существуют таблицы величины  $s/(r_1 + r_3)$  в функции  $\eta$  (например, таблицы Баушингера [2]).

Ольберс предположил, что если интервал времени между наблюдениями невелик, то «отношения треугольников» (те же величины  $c_1$  и  $c_3$ , которые были определены в предыдущем разделе) будут пропорциональны интервалам времени между наблюдениями. Тогда

$$c_1/c_3 = (t_3 - t_2)/(t_2 - t_1) = \tau_1/\tau_3. \quad (13.35)$$

Переписав уравнение (13.30) в виде

$$\rho_2 - c_1\rho_1 - c_3\rho_3 = c_1R_1 + c_3R_3 - R_2 = V, \quad (13.36)$$

мы тем самым введем вектор  $U$ , компланарный с  $V$  и  $\rho_2$ . Тогда скалярное произведение выражения (13.36) на величину  $(\rho_2/\rho_2) \times U$  оказывается таким, что остаются только члены с  $\rho_3$  и  $\rho_1$ , так что результирующее уравнение будет

$$\rho_3 = M\rho_1, \quad (13.37)$$

где

$$M = - \frac{c_1(\rho_1/\rho_1, \rho_3/\rho_3, U)}{c_3(\rho_3/\rho_3, \rho_2/\rho_2, U)}; \quad (13.38)$$

величины в скобках представляют собой тройные скалярные произведения. После этого Ольберс использовал выражение Эйлера (13.34) вместе с (13.38) следующим путем.

Хорда  $s$  определяется соотношением

$$s^2 = (r_3 - r_1) \cdot (r_3 - r_1).$$

Однако в силу (13.7)

$$r_1^2 = R_1^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1(X_1l_1 + Y_1m_1 + Z_1n_1)$$

или

$$r_1^2 = a_1 + b_1\rho_1 + d_1\rho_1^2. \quad (13.39)$$

Аналогично

$$r_3^2 = a_3 + b_3\rho_3 + d_3\rho_3^2. \quad (13.40)$$

Отсюда путем использования (13.29) и (13.35) для исключения  $\rho_3$  имеем

$$s^2 = a_2 + b_2\rho_1 + d_2\rho_1^2. \quad (13.41)$$

Если  $U$  известно, то можно найти  $M$ , а отсюда и  $s$ .

Теперь три положения Земли в моменты  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  связаны соотношением

$$R_2 = C_1R_1 + C_3R_3, \quad (13.42)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — отношения треугольников для гелиоцентрической орбиты Земли [см. уравнение (13.28)].

Далее приближенно, как и в (13.35),

$$C_1/C_3 = \tau_1/\tau_3,$$

так что

$$c_1 = \gamma C_1, \quad c_3 = \gamma C_3. \quad (13.43)$$

Но в силу (13.36)

$$V = c_1R_1 + c_3R_3 - R_2,$$

откуда с учетом (13.42) и (13.43),

$$V = R_2(\gamma - 1).$$

Таким образом, в качестве первого приближения для  $U$  (эта величина должна быть компланарна  $V$  и  $\rho_2$ ) можно положить  $U = R_2$ . После этого первые приближения для  $s$ ,  $r_1$  и  $r_3$  находятся из уравнений (13.39)—(13.41) при выборе определенного значения для  $\rho_1$ . В свою очередь,  $\eta$  вычисляется из уравнения (13.33); далее, из таблицы  $s/(r_1 + r_3)$  в функции  $\eta$  получается значение  $s/(r_1 + r_3)$ , соответствующее найденному значению  $\eta$ . В общем случае это значение  $s/(r_1 + r_3)$  не будет согласовываться с вычисленным по значениям  $s$ ,  $r_1$  и  $r_3$  в первом приближении, однако метод проб и ошибок позволяет подобрать такие значения, которые обеспечивают нужное согласие. Из уравнения (13.37) вычисляется  $\rho_3$ , а отсюда из (13.29) и (13.36) выводятся значения  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$ . Элементы орбиты (причем эксцентриситет равняется 1) можно вычислить обычным путем; при этом для определения времени прохождения перигелия используется уравнение Баркера.

Различные методы улучшения этой предварительной орбиты без привлечения дополнительных данных наблюдений здесь излагаться не будут.

### 13.6. Определение орбит при наличии дополнительных данных наблюдений

Появление искусственных спутников Земли, а также лунных и межпланетных космических кораблей привели к необходимости модификаций классических способов определения орбит.

В случае вновь запущенного искусственного спутника Земли предварительную орбиту можно найти путем измерения положения и компонент скорости в момент выключения двигателя и последующего вычисления элементов по методу разд. 4.12. Впоследствии эту орбиту можно улучшить при сборе наблюдений за спутником станциями слежения. В альтернативном способе, примененном Бриггсом и Слоуэем [3], используется метод итерации и высокоскоростная цифровая вычислительная машина; этот способ описан ниже.

Предположим, что три станции слежения  $S_1, S_2, S_3$  (с известными геоцентрическими координатами) регистрируют направления на спутник в моменты  $t_1, t_2, t_3$ , когда спутник находится на своей геоцентрической орбите в точках  $V_1, V_2, V_3$  соответственно (рис. 13.2).

Поскольку орбита спутника лежит в плоскости, проходящей через центр Земли, три геоцентрических радиуса-вектора  $EV_1, EV_2$  и  $EV_3$  (или  $r_1, r_2$  и  $r_3$ ) находятся в одной плоскости. Пусть  $l_i, m_i, n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы трех положений спутника при наблюдении со станций  $S_1, S_2, S_3$ , причем геоцентрические радиусы-векторы  $R_i$  станций  $S_i$  определяются как

$$R_i = iX_i + jY_i + kZ_i, \quad (13.44)$$

где  $X_i, Y_i, Z_i$  — геоцентрические прямоугольные координаты  $S_i$  в момент  $t_i$ , а  $i, j, k$  — единичные векторы осей, определенные выше.

После этого топоцентрические радиусы-векторы  $\rho_i$  спутника определяются как

$$\rho_i = \rho_i (il_i + jm_i + kn_i); \quad (13.45)$$

при этом топоцентрические расстояния будут неизвестными задачи.

Далее,

$$r_i = ix_i + jy_i + kz_i \quad (13.46)$$

и

$$\rho_i = r_i - R_i. \quad (13.47)$$

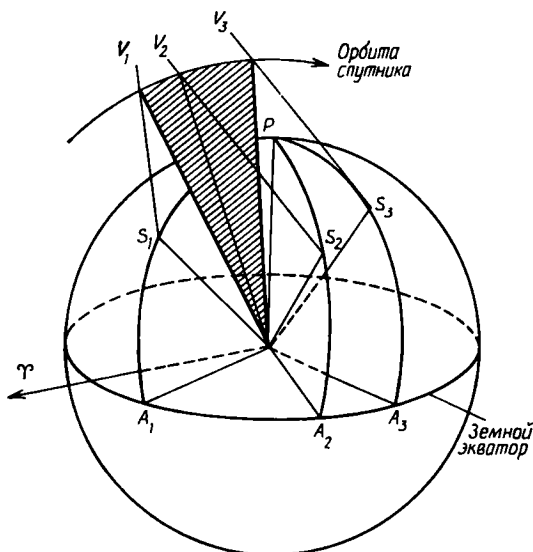


Рис. 13.2.

Если пренебречь возмущениями, векторы  $\mathbf{r}_i$  оказываются компланарными, так что

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = 0. \quad (13.48)$$

С учетом (13.47) предыдущее уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} X_1 + \rho_1 l_1 & X_2 + \rho_2 l_2 & X_3 + \rho_3 l_3 \\ Y_1 + \rho_1 m_1 & Y_2 + \rho_2 m_2 & Y_3 + \rho_3 m_3 \\ Z_1 + \rho_1 n_1 & Z_2 + \rho_2 n_2 & Z_3 + \rho_3 n_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.49)$$

Если теперь выбрать подходящие значения для  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , то из (13.49) можно получить значение  $\rho_3$ . Общепринятый способ состоит в вычислении  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  из (13.45) и (13.47) с последующим нахождением величин  $L$ ,  $M$  и  $N$  из соотношения

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = iL + jM + kN. \quad (13.50)$$

После этого находим

$$\rho_3 = -\frac{LX_3 + MY_3 + NZ_3}{Ll_3 + Mm_3 + Nn_3}, \quad (13.51)$$

что позволяет вычислить  $\mathbf{r}_3$ .

Теперь можно рассчитать разности истинной аномалии  $f$  из соотношений

$$\begin{aligned} \sin(f_3 - f_i) &= \pm |\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_3| / r_3 r_i, \\ \cos(f_3 - f_i) &= \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_i / r_3 r_i, \\ i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (13.52)$$

Для орбиты с прямым движением  $\sin(f_3 - f_i)$  имеет тот же знак, что и  $z$ -компонента векторного произведения  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_3$ .

Затем из уравнения эллипса

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \mp e \cos f} \quad (13.53)$$

находим, что

$$\operatorname{tg} f_3 = - \frac{r_1(r_2 - r_3) \cos(f_3 - f_1) + r_2(r_3 - r_1) \cos(f_3 - f_2) + r_3(r_1 - r_2)}{r_1(r_2 - r_3) \sin(f_3 - f_1) + r_2(r_3 - r_1) \sin(f_3 - f_2)} \quad (13.54)$$

и что для любых  $i$  и  $j$  и  $\cos f_i \neq \cos f_j$

$$e = \frac{r_i - r_j}{r_j \cos f_j - r_i \cos f_i}. \quad (13.55)$$

Далее,

$$a = \frac{r_i(1 + e \cos f_i)}{1 - e^2}. \quad (13.56)$$

Из уравнения (13.54) определяется  $f_3$ . Из двух возможных вариантов для  $f_3$  выбирается тот, при котором  $e$  в (13.55) имеет положительное значение; после этого соотношение (13.52) используется для нахождения  $f_1$  и  $f_2$ . Теперь (13.56) дает нам  $a$ . Момент прохождения перигея  $\tau$ , наступающий непосредственно после момента наблюдения спутника, можно найти из уже знакомого выражения в гл. 4:

$$\operatorname{tg} \frac{E_i}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{f_i}{2}, \quad (13.57)$$

$$\bar{M}_i = E_i - e \sin E_i \quad (13.58)$$

и

$$\tau = t_i - \frac{\bar{M}_i}{n_i}, \quad (13.59)$$

где  $n_i = (Gm)^{1/2} a^{-3/2}$ ,  $m$  — масса Земли,  $G$  — постоянная тяготения,  $\bar{M}_i$ ,  $E_i$ ,  $f_i$  — значения средней, эксцентрической и истинной аномалии соответственно для спутника в момент наблюдения  $t_i$ . Если на этом этапе вычисленные элементы используются для расчета интервалов времени между моментами наблюдений, то обнаружатся несогласия с наблюдаемыми интервалами времени, поскольку использовались лишь оцененные значения топоцентрических расстояний  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Путем использования ЭВМ и итеративной процедуры, аналогичной методу Ньютона—Рафсона, численные значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  исправляются до тех пор, пока рассчитанные и наблюдаемые интервалы времени не будут согласовываться между собой.

После вывода исправленной орбиты легко рассчитать остающиеся элементы  $i$ ,  $\Omega$  и аргумент перигея  $\omega$ . Наклонение находится из уравнения (13.50), из которого следует

$$i = \arccos \left( \frac{|N|}{L^2 + M^2 + N^2} \right), \quad (13.60)$$

тогда как  $\Omega$  определяется выражением

$$\Omega = \arctg (M/L) \pm 90^\circ, \quad (13.61)$$

где знак выбирается таким же, как у произведения  $LN$ . Аргумент перигея  $\omega$  находится из данных любого наблюдения:

$$\omega = \pm u_i - f_i, \quad (13.62)$$

где

$$u_i = \arccos \left( \frac{x_i \cos \Omega + y_i \sin \Omega}{r_i} \right). \quad (13.63)$$

Знак выбирается такой же, как у  $z_i$ . После того как становятся известными элементы предварительной орбиты, можно использовать теорию искусственного спутника Земли для вычисления вековых возмущений среднего движения, прямого восхождения узла и аргумента перигея, обеспечивая тем самым эфемериды спутника; затем накопление последующих наблюдений позволит улучшить орбиту. Когда оказываются доступными данные о дальности и скорости изменения дальности спутника, классические методы определения орбит можно модифицировать так, чтобы воспользоваться этими дополнительными данными. Например, в только что рассмотренном случае данные о дальности дадут нам значения  $\rho_i$ , что существенно упростит расчет.

Возможно также получить элементы предварительной орбиты только из данных о дальности и скорости изменения дальности спутника. В принципе это возможно сделать следующим образом, исходя из трех пар наблюдений дальности и скорости ее изменения. Сам способ представляет собой видоизменение метода Лапласа; в нем используются усеченные ряды для  $f$  и  $g$ . Выбирая те же обозначения, что и раньше, положим  $\rho_i$  и  $\dot{\rho}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равными измеренным дальностям и скоростям изменения дальности космического корабля в моменты  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  соответственно. Тогда

$$(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2 + (z_i - Z_i)^2 = \rho_i^2 \quad (13.64)$$

и

$$(x_i - X_i)(\dot{x}_i - \dot{X}_i) + (y_i - Y_i)(\dot{y}_i - \dot{Y}_i) + (z_i - Z_i)(\dot{z}_i - \dot{Z}_i) = \rho_i \dot{\rho}_i, \quad (13.65)$$

где  $i = 1, 2, 3$ .



Теперь имеем

$$r_i = r_2 f_i + \dot{r}_2 g_i \quad (i = 1, 3),$$

откуда

$$x_i = x_2 f_i + \dot{x}_2 g_i, \quad (i = 1, 3) \quad (13.66)$$

$$\dot{x}_i = x_2 \dot{f}_i + \dot{x}_2 \dot{g}_i \quad (i = 1, 3), \quad (13.67)$$

и аналогичные уравнения по  $y$  и  $z$ . Подставляя полученные соотношения в (13.64) и (13.65), после некоторых преобразований получаем

$$r_2^2 \dot{f}_1^2 + v_2^2 \dot{g}_1^2 + R_1^2 + 2r_2 \dot{r}_2 f_1 g_1 - 2 \sum_{x, y, z} X_1 (x_2 f_1 + \dot{x}_2 g_1) = \rho_1^2,$$

$$r_2^2 + R_2^2 - 2 \sum_{x, y, z} X_2 x_2 = \rho_2^2,$$

$$r_2^2 \dot{f}_3^2 + v_2^2 \dot{g}_3^2 + R_3^2 + 2r_2 \dot{r}_2 f_3 g_3 - 2 \sum_{x, y, z} X_3 (x_2 f_3 + \dot{x}_2 g_3) = \rho_3^2,$$

$$\begin{aligned} & r_2^2 \dot{f}_1 \dot{f}_1 + v_2^2 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + R_1 \dot{R}_1 + r_2 \dot{r}_2 (g_1 \dot{f}_1 + f_1 \dot{g}_1) - \\ & - \sum_{x, y, z} X_1 (x_2 \dot{f}_1 + \dot{x}_2 \dot{g}_1) - \sum_{x, y, z} \dot{X}_1 (x_2 f_1 + \dot{x}_2 g_1) = \rho_1 \dot{\rho}_1, \\ & R_2 \dot{R}_2 + r_2 \dot{r}_2 - \sum_{x, y, z} X_2 \dot{x}_2 - \sum_{x, y, z} \dot{X}_2 x_2 = \rho_2 \dot{\rho}_2, \end{aligned} \quad (13.68)$$

$$\begin{aligned} & r_2^2 \dot{f}_3 \dot{f}_3 + v_2^2 \dot{g}_3 \dot{g}_3 + R_3 \dot{R}_3 + r_2 \dot{r}_2 (g_3 \dot{f}_3 + f_3 \dot{g}_3) - \\ & - \sum_{x, y, z} X_3 (x_2 \dot{f}_3 + \dot{x}_2 \dot{g}_3) - \sum_{x, y, z} \dot{X}_3 (x_2 f_3 + \dot{x}_2 g_3) = \rho_3 \dot{\rho}_3, \end{aligned}$$

где

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$r_2 \dot{r}_2 = x_2 \dot{x}_2 + y_2 \dot{y}_2 + z_2 \dot{z}_2,$$

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2, \quad (13.69)$$

$$R_i \dot{R}_i = X_i \dot{X}_i + Y_i \dot{Y}_i + Z_i \dot{Z}_i,$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2.$$

Если все три пары наблюдений выполнены за короткие промежутки времени одно за другим, то ряды для  $f$  и  $g$  (а также продифференцированные по времени ряды для  $\dot{f}$  и  $\dot{g}$ ) можно обрезать следующим образом:

$$f_i = 1 - \frac{1}{2} ut_i^2 + \frac{1}{2} ust_i^3, \quad g_i = t_i - \frac{1}{6} ut_i^3 + \frac{1}{4} ust_i^4,$$

$$\dot{f}_i = -ut_i + \frac{3}{2} ust_i^2, \quad \dot{g}_i = 1 - \frac{1}{2} ut_i^2 + ust_i^3,$$

где

$$u = 1/r_2^3, \quad s = \dot{r}_2/r_2.$$

Следует напомнить, что хотя независимую переменную мы обозначили через  $t$ , единица времени выбрана так, что  $GM = 1$ .

С учетом (13.69) уравнения (13.68) дают нам систему шести уравнений для шести неизвестных  $x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ , которую можно решить способом итераций. Сначала сделаем определенное предположение о значениях  $u$  и  $s$ , после чего окажется возможным решить систему (13.68). Найденные значения позволяют вычислить новые значения  $u$  и  $s$  и получить новые решения. По значениям компонент положения и скорости  $x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$  в момент  $t_2$  можно вывести элементы обычным путем.

Обычно при наличии данных о дальности и скорости изменения дальности имеются также и определенные сведения о направлении на космический корабль, или значении элонгации  $\theta$  (см. разд. 13.2); поэтому из уравнения

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta$$

определяется достаточно точное значение  $r_2$ ; первое приближение для  $x_2, y_2, z_2$  также получается из уравнения (11.3); они проверяются при помощи второго уравнения системы (13.68). Если к тому же имеются грубые оценки  $\dot{l}, \dot{m}, \dot{n}$ , тогда возможно получить из уравнений (13.4) первые приближения для  $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ , а следовательно, и для  $\dot{r}_2$  и  $v_2$ . Затем систему уравнений (13.68) можно линеаризовать по  $\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2, \Delta \dot{x}_2, \Delta \dot{y}_2, \Delta \dot{z}_2$ , что даст нам поправки к первому приближению значений  $x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ .

Подробности многочисленных методов, в которых для определения орбит используются данные о дальностях и скоростях изменения дальности, читатель найдет в важной статье Бейкера [1].

### 13.7. Улучшение орбит

Пусть предварительная гелиоцентрическая орбита описывается элементами  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Тогда любая наблюдаемая (геоцентрическая) величина  $\phi$  в момент  $t$  будет определяться как

$$\phi = \phi(\sigma_i, p_i, t) \quad (i = 1 \dots 6), \quad (13.70)$$

где шесть параметров  $p_i$  определяют элементы орбиты Земли, а  $\phi(\sigma_i, p_i, t)$  — функция двенадцати элементов и времени.

Если  $\sigma_i$  изменены произвольным образом на малые величины  $\delta\sigma_i$ , то изменение  $\phi$  окажется равным  $\delta\phi$ , причем

$$\delta\phi = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_i} \delta\sigma_i. \quad (13.71)$$

В общем случае элементы предварительной орбиты не являются в точности элементами орбиты, по которой фактически движется



где через  $t$  обозначено время, входящее в уравнения движения вместе с возмущениями (если последние учитываются). Выражения для функций  $F$ ,  $G$ ,  $H$  известны. Тогда численное интегрирование системы (13.73) на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_E$  дает нам набор значений  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для шагов по времени.

Эти значения зависят от выбранных начальных значений в момент  $t_0$ , т. е.  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$ . Последние величины выводятся из элементов предварительной орбиты обычным путем. Далее, формально можно записать

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t), \\ y &= y(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t), \\ z &= z(x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t). \end{aligned} \quad (13.74)$$

Хотя виды функций  $x$ ,  $y$ ,  $z$  неизвестны, можно путем интерполяции затабулировать значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для любого значения  $t$  из интервала от  $t_0$  до  $t_E$ . Если теперь слегка изменить *одну* из величин  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$  (для определенности выберем  $x_0$ ), но сохранить неизменными все пять остальных начальных значений, путем нового численного интегрирования получается новый набор величин  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для интервала времени от  $t_0$  до  $t_E$ . Пусть  $x_2$  и  $x_1$  — два значения  $x$ , полученные для любого выбранного момента времени описанным выше путем; тогда можно написать

$$x_2 - x_1 = \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) \delta x_0,$$

где  $\delta x_0$  — сделанные нами изменения величины  $x_0$ . Это можно сделать, хотя в общем случае

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \right) \delta \sigma_i,$$

где  $\sigma_i$  — любая из величин  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$ , причем все  $\delta \sigma_i$  равны нулю, за исключением  $\delta x_0$ . Тогда

$$\left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{x_2 - x_1}{\delta x_0},$$

причем правая часть известна для любого момента времени между  $t_0$  и  $t_E$  из уже имеющейся таблицы решений. Аналогичным образом получаем

$$\left( \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = \frac{y_2 - y_1}{\delta x_0}, \quad \left( \frac{\partial z}{\partial x_0} \right) = \frac{z_2 - z_1}{\delta x_0}.$$

Выполним еще пять интегрирований, в каждом случае придавая одной из пяти оставшихся величин  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$ ,  $\dot{z}_0$  слегка отличное значение и сохраняя все остальные величины неизменными.

Таким путем все величины

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \right) &= \frac{x_j - x_1}{\delta \sigma_i} \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \sigma_i} \right) &= \frac{y_j - y_1}{\delta \sigma_i} \quad (j = 1 + i), \\ \left( \frac{\partial z}{\partial \sigma_i} \right) &= \frac{z_j - z_1}{\delta \sigma_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \end{aligned} \quad (13.75)$$

табулируются для моментов между  $t_0$  и  $t_E$ , причем  $\sigma_i$  — любая из шести величин  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ . Если теперь наблюдения, сделанные в интервале между  $t_0$  и  $t_E$ , дают нам значения  $x, y, z$  (обозначим их  $x_{obs}, y_{obs}, z_{obs}$  для различных моментов), то можно написать

$$x_{obs} - x_{cal} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma_i} \right) \delta \sigma_i, \quad (13.76)$$

с аналогичными уравнениями для  $y$  и  $z$ . Однако из набора табулированных значений (13.75) нам известны все  $\partial x / \partial \sigma_i$ , так что уравнение (13.76), определяемое наблюдаемыми величинами, можно разрешить и получить значения шести величин  $\delta \sigma_i$ . Затем, прибавляя их к значениям величин  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ , находим улучшенные значения элементов предварительной орбиты.

### 13.8. Межпланетная навигация

Основная задача космической навигации состоит в том, чтобы установить, где находился корабль и какова его скорость (относительно заданной системы координат) в выбранный момент (эпоху). Если эта задача выполнена успешно, то можно рассчитать элементы орбиты космического корабля и, приняв во внимание известные возмущения, найти его положение и скорость в любой будущий момент. В общем фактическая орбита будет отличаться от требуемой; тогда следует предусмотреть коррекцию в пути, чтобы вывести корабль на новую орбиту. Стоит упомянуть, что эта новая орбита не обязательно окажется прежней заданной, поскольку не совпадающее с требуемым ошибочное положение корабля после корректировки может сделать его дальнейший путь, который также обеспечивает достижение цели полета, более экономичным с точки зрения расхода топлива, чем попытка новой коррекции, которая привела бы корабль на прежнюю заданную орбиту.

Существуют многочисленные методы навигации, используемые на практике. Одни методы являются наземными, другие связаны с космическим кораблем; выбор метода зависит не только от

задачи полета и полезной нагрузки, которая предназначена для навигационного оборудования, но и от этапа полета. Таким образом, даже для одного полета, возможно, понадобится применить несколько методов.

Чаще всего на практике применяют те, которые основываются на оптическом и радиолокационном слежении, а также на использовании инерционной аппаратуры (включающей стабилизированные платформы и акселерометры). Кроме того, требуются быстродействующие ЭВМ.

В первом случае сам космический корабль прослеживается при помощи наземных оптических инструментов, хотя на расстояниях от Земли, превышающих несколько миллионов километров, любой корабль разумных размеров не будет виден даже с помощью самых мощных из современных инструментов. Например, на расстоянии 80 млн. км шар радиусом 150 м, отражающий 100% падающего на него света, будет наблюдаться как звезда 19-й величины (см. разд. 3.2), что далеко превышает возможности камеры Бейкера—Нанна. Однако методы оптического прослеживания могут быть использованы с самого космического корабля, что потребует небольшой по массе и размерам аппаратуры. Подобные методы описываются ниже.

Второй метод — радиолокационное прослеживание — может осуществляться либо с Земли, либо с космического корабля; правда, на корабле возможно использовать лишь инструменты ограниченной мощности и дальности действия. Данные, полученные этими методами, представляют собой высокоточные значения дальности, скорости изменения дальности и (в случае больших радиолокационных антенн) направлений. Станции сети дальнего космического слежения (США) заведомо способны прослеживать космические корабли, снабженные импульсными повторителями, за пределами орбиты Сатурна. Бортовые радиолокаторы оказываются важными, когда межпланетный корабль вступает в конечный этап полета к цели и достигает планеты назначения. Такой локатор также необходим при маневрах встречи.

### 13.8.1. Стабилизированные платформы и акселерометры

*Стабилизированная платформа* обеспечивает инерциальную пространственную систему координат при помощи гироскопов — по одному гироскопу на одну степень свободы для обеспечения сохранения направления каждой из трех взаимно перпендикулярных осей. Гироскопы монтируются на платформе; для учета углового движения космического корабля относительно этой платформы последняя монтируется на двух кардановых подвесах (рис. 13.3). Поворот корабля относительно стабилизированной посредством гироскопа оси вызывает появление момента сил,

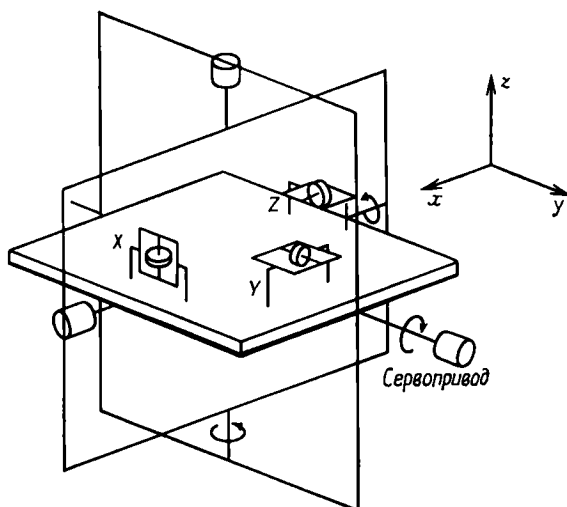


Рис. 13.3.

действующего на платформу и приводящего к ее повороту относительно этой оси. В результате ось гироскопа начинает прецессировать. Угловая скорость прецессии воспринимается электронным устройством; затем полученный сигнал усиливается и управляет сервомотором, который компенсирует возмущающий момент. После выполнения этой операции платформа принимает прежнее фиксированное положение. На многих кораблях платформа устанавливается на четырех карданных подвесах, что позволяет кораблю совершать кувыркательное движение без выхода гироскопов на упоры, что может случиться в случае установки платформы на трех карданных подвесах.

Для измерения ускорения корабля в заданном направлении (скажем, в направлении  $XX'$  на рис. 13.4) используется *акселерометр*. Когда корабль испытывает ускорение, то масса вследствие своей инерции сжимает одну из пружин и перемещает скользящий контакт по сопротивлению до точки, определяемой ускорением корабля и силой сжатия пружины. Если между точками  $A$  и  $B$  имеет место падение напряжения, то напряжение на выходе потенциометра  $C$  пропорционально ускорению корабля. Три акселерометра, смонтированные на стабилизированной платформе взаимно перпендикулярно друг другу, обеспечивают получение необходимых данных для инерциальной системы навигации.

Перед запуском корабля платформа фиксируется в заданной системе координат. В период работы двигателей в компьютер поступают данные с акселерометров; двукратное интегрирование этих данных дает компоненты положения и скорости корабля

для любого момента времени. В частности, в конце активной фазы могут быть рассчитаны элементы орбиты корабля. После сравнения их с заданной орбитой можно вычислить программу первой коррекции траектории. После этого инерциальная система наведения может быть использована для контроля маневра.

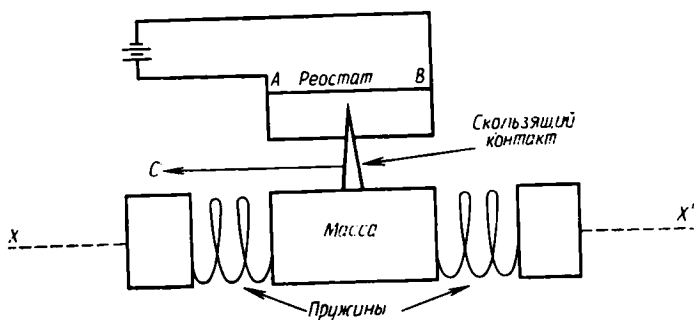


Рис. 13.4.

### 13.8.2. Навигация при помощи бортовой оптической аппаратуры

Хотя представляется вполне разумным, что межпланетный корабль будет располагать постоянной радиосвязью с Землей и наземными радиолокационными установками, что обеспечит получение данных о направлении, дальности и скорости изменения дальности, для навигации возможно использовать и наблюдения, выполненные с борта корабля. Эти оптические наблюдения могут быть обработаны посредством бортовой ЭВМ или транслированы на Землю для обработки при помощи мощных быстродействующих универсальных ЭВМ. Независимо от того, где выполняется эта работа, метод нахождения положения и скорости на основе оптических наблюдений можно развить следующим образом (см. [8]). Сначала мы рассмотрим теорию метода, а затем некоторые трудности, встречающиеся на практике; после этого упомянем другие возможные источники определения положения и скорости космического корабля.

Полезную систему координат для космической навигации образуют звезды. Поэтому в качестве системы координат выберем эклиптическую прямоугольную систему, оси которой направлены в точку весеннего равноденствия, в точку эклиптики, имеющую на  $90^\circ$  бóльшую долготу, чем точка весны, и в северный полюс эклиптики. Обозначим эти координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда гелиоцентрическая небесная долгота  $\lambda$ , широта  $\beta$  и радиус-вектор  $r$  косми-



ческого корабля связаны с его прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda, & y &= r \cos \beta \sin \lambda, & (13.77) \\ z &= r \sin \beta. \end{aligned}$$

Долгота  $\lambda_p$ , широта  $\beta_p$  и радиус-вектор  $r_p$  каждой планеты в любой момент времени известны. Если последующие расчеты должны выполняться на борту корабля, то навигатору понадобится «Астрономический ежегодник», в котором содержится нужная информация.

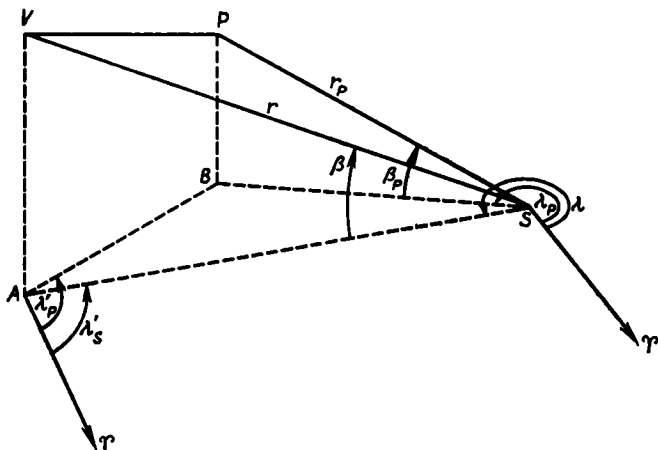


Рис. 13.5.

На рис. 13.5 показаны корабль  $V$ , планета  $P$ , Солнце  $S$  и направление на точку весны  $\gamma$ . Показаны также проекции  $V$  и  $P$  на плоскость эклиптики ( $A$  и  $B$  соответственно). Навигатор в известную эпоху измеряет:

- 1) видимую долготу Солнца  $\lambda'_S = \angle \gamma AS$ ,
- 2) видимую долготу планеты  $\lambda'_P = \angle \gamma AB$ ,
- 3) видимую широту Солнца  $\beta'_S = \angle VSA = -\beta$ .

Тогда

$$AS = r \cos \beta, \quad BS = r_p \cos \beta_p.$$

Далее, из треугольника  $ABC$

$$\frac{AS}{\sin \angle ABS} = \frac{BS}{\sin \angle BAS}.$$

Но

$$\angle ABS = 360^\circ + \lambda_p - \lambda'_P,$$

$$\angle BAS = \lambda'_P - \lambda'_S,$$

$$\beta = -\beta'_S.$$

Отсюда

$$r = r_P \frac{\cos \beta_P \sin (\lambda_P - \lambda'_P)}{\cos \beta'_S \sin (\lambda'_P - \lambda'_S)}. \quad (13.78)$$

Все величины в правой стороне (13.78) получаются из данных измерений. Затем имеем

$$\lambda = 180^\circ + \lambda'_S \quad (13.79)$$

и

$$\beta = -\beta'_S. \quad (13.80)$$

Таким образом, координаты космического корабля  $r$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  в момент  $t$  оказываются известными. Отсюда с помощью (13.77) можно найти прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в момент  $t$ .

Аналогичный набор результатов измерений в подходящий интервал времени обеспечит теорию достаточными данными для получения  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ . На практике обычно выбираются несколько эпох наблюдений, так что, например, ряды для  $f$  и  $g$  окажется возможным использовать с целью получения более точных значений компонентов скорости в одну из этих эпох. Эти данные вместе с координатами положения корабля в каждую эпоху могут быть использованы при вычислении элементов орбиты. Очевидно, как правило, будут наблюдаться более одной планеты, так что за счет включения наблюдений всех подходящих планет и усреднения можно будет получить более точные значения.

Описанные методы нахождения скорости и положения дают возможность контролировать стабилизированную платформу. При выполнении коррекции инерционная навигационная система может быть использована для контроля приложенной тяги.

### 13.8.3. Методы наблюдений и достижимая точность

Метод навигации, описанный в предыдущем разделе, опирается на измерения трех углов в эклиптической системе координат: двух относительно Солнца и третьего относительно планеты. Можно подумать, что при использовании звезд, которые определяют плоскость эклиптики и направление прямой, лежащей в этой плоскости (не обязательно направление на точку весеннего равноденствия), для измерения требуемых углов возможно применить инструмент, аналогичный секстанту. Однако здесь возникает серьезное затруднение с конструкцией инструмента, который обеспечивал бы требуемую точность при достаточно малой массе. Точность  $\sim 1''$  была бы труднодостижима; между тем именно такая точность необходима при измерении расстояний порядка нескольких тысяч километров.

Значительно лучший метод состоит в использовании звезд фона в качестве системы координат и проведении дифференциальных измерений, скажем положений планеты по отношению к по-

ложениям соседних звезд. Тогда по известным координатам звезд вычисляются эклиптические долготы и широты планеты. Точность инструмента, необходимого для измерения относительно малых углов, характерных для данного метода, не должна быть очень велика, чтобы обеспечить точности измерений 1".

При измерении видимой долготы Солнца необходимо принять во внимание, что соседние звезды не будут видны; однако эту трудность можно преодолеть, спроектировав слабое изображение Солнца на звездное поле в окрестностях точки небесной сферы, находящейся в оппозиции к Солнцу (см. разд. 12.8). С помощью такого приема можно выполнить дифференциальные измерения положения центра диска Солнца относительно звезд поля; определенные таким путем видимые долгота  $\lambda'_S$  и широта  $\beta'_S$  дадут нам видимые долготу  $\lambda_S$  и широту  $\beta_S$  Солнца из соотношений

$$\lambda'_S = \lambda_S - 180, \quad \beta'_S = -\beta_S.$$

Были предложены и другие методы получения данных о положении и скорости космического корабля.

Например, для нахождения величины гелиоцентрического радиуса-вектора корабля можно использовать измерение углового диаметра Солнца; последний убывает пропорционально квадрату расстояния корабля от Солнца. Аналогично поток солнечного излучения, также убывающий пропорционально квадрату расстояния от Солнца, образует еще одну измеримую величину, которая характеризует значение радиуса-вектора корабля. С приближением корабля к сфере действия планеты назначения измерение углового диаметра планеты позволит оценить планетоцентрическое расстояние.

Итак, даже если корабль располагает лишь собственным источником навигационных данных, установленная на борту аппаратура достаточной точности и приемлемых размеров и массы обеспечит поступление и сбор всей информации, необходимой для управления кораблем.

## Литература

1. *Backer R. M., Jr.* J. Am. Rocket Soc., Preprint No. 1220-60, 1960.
2. *Bauschinger J.* Tafeln zur Theoretischen Astronomie. Leipzig, Engelmann, 1901.
3. *Briggs R. E., Slowey J. W.* Smithsonian Institution Astrophysical Observatory Research in Space Science, Special Report No. 27, 1959.
4. *Danby J. M. A.* Fundamentals of Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1962.
5. *Herget P.* The Computation of Orbits. University of Cincinnati, 1948.
6. *Moulton F. R.* An Introduction to Celestial Mechanics. New York, Macmillan, 1914.
7. *Plummer H. C.* An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1918.
8. *Vertregt M. J.* Br. Interplanet. Soc., 15, 324, 1956.

## Двойные системы и системы нескольких тел

### 14.1. Введение

Как мы видели в гл. 1, более половины звезд в нашей Галактике являются составляющими двойных звезд, тройных звезд или систем звезд еще большей кратности. В этой главе мы в основном рассмотрим двойные и тройные системы; системы многих тел будут обсуждены в последней главе. Сначала мы изучим на элементарном уровне двойные системы, начав с применяемых методов наблюдений и основных выводов, сделанных на основе данных наблюдений.

Сам по себе факт объединения звезд в пары проявляет себя тремя различными путями. Прежде всего, видимая близость составляющих многих пар звезд на небе оказывается статистически значительно выше, чем можно было бы предполагать для чисто случайной близости положений звезд, находящихся на разных расстояниях от Земли. В гл. 1 мы видели, что Уильям Гершель опубликовал каталог положений многих пар звезд. Цель проведенной Гершелем работы состояла в выполнении регулярных наблюдений этих звезд и выявлении того, будет ли более яркая звезда пары показывать параллактическое смещение по отношению к более слабому и предположительно более далекому компоненту.

Последующие наблюдения некоторых пар в течение нескольких лет показали, что эти звезды в действительности гравитационно связаны между собой и движутся по орбитам друг относительно друга. Поэтому члены подобных пар близки друг к другу в пространстве настолько, что силы взаимного тяготения оказываются достаточно сильными. Такие звезды называются *визуально-двойными*.

Если мысленно представить себе звезды, постепенно сближающиеся друг с другом, то их среднее орбитальное движение возрастает в соответствии с III законом Кеплера; наконец наступит ситуация, когда звезды окажутся неразрешимыми для удаленного наблюдателя. Если к тому же звезды обращаются друг относительно друга в плоскости, в которой лежит (или к которой близок) луч зрения, то в соответствии с относительным положением звезд на орбите будут наступать моменты, когда одна звезда станет затмевать другую. Затмение будет регистрироваться

наблюдателем как уменьшение блеска звезды, кажущейся ему одиночной. Звезды меняющегося блеска, причина переменности которых может быть сведена к затмениям, не являются редкостью. Примером может служить звезда Алголь, имеющая регулярные колебания блеска с периодом 2 сут 20 ч 49 мин; этот период был открыт Гудрайком в 1783 г. Наблюдения изменений блеска позволяют построить кривую блеска, из которой можно вывести параметры орбиты и физические свойства затменной пары. Таким

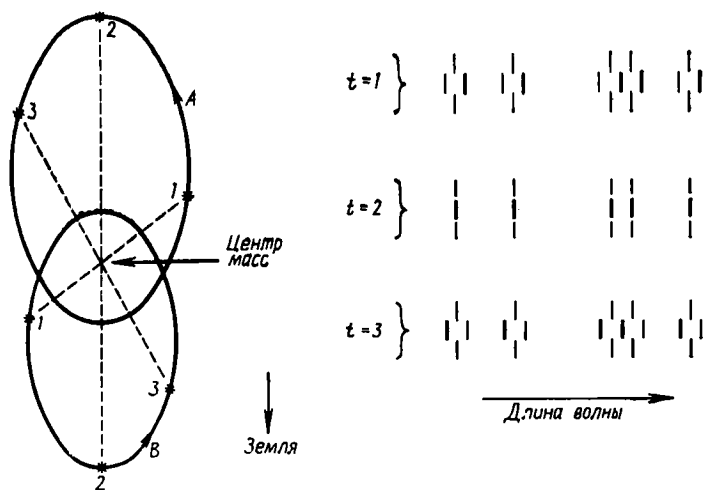


Рис. 14.1.

образом, интерпретация кривых блеска затменных двойных систем обеспечивает второй способ исследования подобных систем.

Третий путь открывается благодаря анализу звездных спектров. У некоторых звезд, которые, по всей видимости, можно было бы считать одиночными, временами появляется двойственность спектральных линий. Каждая линия спектра удваивается, показывая тем самым, что кажущаяся одиночной звезда имеет два компонента и что эти компоненты движутся с различными относительными скоростями по отношению к наблюдателю. На протяжении периода наблюдается изменение относительных положений линий, свидетельствующее об изменении скоростей двух звезд. Это можно интерпретировать только как обращение двух компонентов звезд друг относительно друга. На рис. 14.1 показан эффект, когда две звезды находятся на орбите, которая содержит линию зрения; представлены также типичные спектры для трех эпох на орбите.

В момент  $t = 1$  (верхний и нижний набор линий для каждой эпохи соответствует лабораторному стандарту) звезда *A* уда-

ляется от Земли, а звезда  $B$  приближается к Земле. Линии спектра звезды  $A$  (обозначенные толстыми линиями) благодаря этому вследствие эффекта Доплера смещаются к красному концу спектра, а аналогичные линии звезды  $B$  — к синему. При  $t = 2$  обе звезды не имеют радиальных скоростей относительно Земли и спектральные линии совмещаются друг с другом. При  $t = 3$  звезда  $A$  приближается к Земле и дает спектр, смещенный к синему концу, в то время как звезда  $B$  удаляется от Земли и линии в ее спектре смещаются к красному концу. Регулярное проследивание спектра показывает, что у звезд периодически меняются знаки лучевых скоростей и что период может быть приписан их орбитальному движению.

Такие системы, показывающие периодические изменения описанного выше характера, именуется *спектрально-двойными*. Построение графика изменения со временем лучевых скоростей каждого компонента дает нам *кривую скоростей*. Анализ кривой скоростей позволяет определить орбиту звезды относительно центра масс системы. В некоторых случаях кажущаяся одиночной звезда показывает, как и ожидалось, спектр с единичными линиями, но обнаруживается, что звезда обладает лучевой скоростью, которая подвержена периодическим изменениям. Это снова интерпретируется как случай звезды, входящей в качестве компонента в двойную систему, вторая звезда которой, однако, слишком слаба, чтобы внести сколько-нибудь значительный вклад в общий спектр системы.

## 14.2. Визуально-двойные звезды

Угловое разделение компонентов визуально-двойных звезд может быть измерено либо визуально (с помощью поворачивающегося микрометра на окуляре), либо их положения регистрируются с помощью фотографии для последующего измерения в лаборатории. Путем регулярных наблюдений можно определить видимые орбиты этих звезд. Типичные периоды обращения лежат в пределах от немногих десятков до сотен лет. Некоторые двойные звезды не измерялись в течение времени, достаточного для завершения одного оборота в системе, так что значение периода обращения содержит значительную неточность.

Обычно в качестве начала системы координат выбирается одна из звезд. Удобнее выбрать более яркую; она именуется *главной звездой*, вторая — *спутником*. При наблюдении в выбранный момент  $t$  измеряется угловое расстояние  $\rho$  спутника от главной звезды и *позиционный угол*  $\theta$  спутника;  $\theta$  определяется как угол между северным полюсом мира и прямой, проходящей через главную звезду и спутник;  $\theta$  положительно в направлении возрастания прямых восхождений (рис. 14.2).

Эллиптическая орбита, которая получается построением графика положений звезды по данным наблюдений, называется *видимой орбитой*.

Плоскость *истинной орбиты* в общем случае наклонена относительно плоскости, перпендикулярной линии зрения. То, что наблюдатель фиксирует в качестве видимой орбиты, — это проекция истинной орбиты на указанную плоскость. Поэтому, если он хочет узнать все параметры орбиты двойной звезды, ему не-

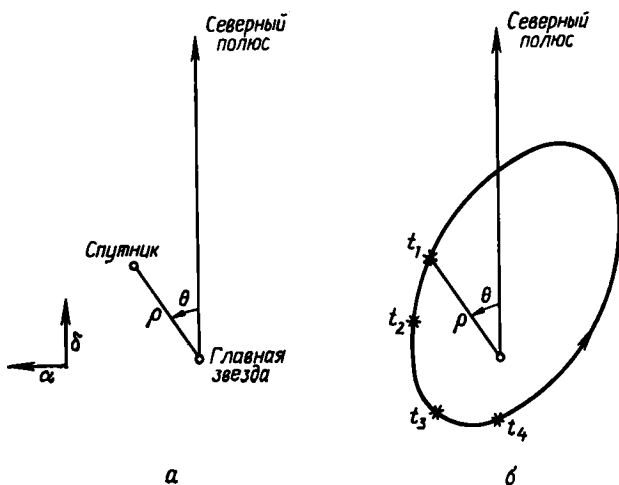


Рис. 14.2.

обходимо определить наклон орбиты относительно плоскости, перпендикулярной линии зрения. Для этого существует несколько стандартных математических приемов.

Если произвольный эллипс, лежащий в какой-либо плоскости, спроектировать на другую плоскость, то его проекцией снова будет эллипс, но с иными характеристиками. Более того, фокус исходного эллипса при проекции не занимает положения фокуса эллипса-проекции. Следовательно, при исследовании видимой эллиптической орбиты двойной звезды в общем случае обнаруживается, что главная звезда не находится в ее фокусе. Изменение перспективы, необходимое для того, чтобы главная звезда переместилась в фокус, можно определить посредством одного из стандартных приемов при задании наклона истинной орбиты по отношению к небесной сфере. После определения этого угла легко получить все параметры истинной орбиты. Следует отметить, однако, что знак угла наклона остается неопределенным: положительный или отрицательный наклон одинаковой абсолютной величины приводит к идентичным видимым орбитам. Если

можно измерить лучевую скорость обращающейся по орбите звезды, то указанная двузначность ликвидируется. Мы определим элементы орбиты двойной звезды в следующем разделе.

Непосредственно можно сразу использовать период обращения  $T$  (который выводится прямо из видимой орбиты) и величину большой оси  $a$ . Если расстояние двойной звезды известно, то возможно определить сумму масс звезд следующим образом.

Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — массы главной звезды и спутника; тогда можно выразить период обращения спутника вокруг главной звезды:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(M_1 + M_2)}}, \quad (14.1)$$

где  $a$  — большая полуось орбитального эллипса, а  $G$  — универсальная постоянная тяготения. Соответствующая формула для обращения Земли вокруг Солнца будет

$$T_{\oplus} = 2\pi \sqrt{\frac{A^3}{G(M_{\odot} + M_{\oplus})}}.$$

Если выразить период обращения в годах и учесть, что  $M_{\odot} \gg M_{\oplus}$ , то

$$1 = 2\pi \left( \frac{A^3}{GM_{\odot}} \right)^{1/2},$$

откуда

$$G^{1/2} = 2\pi \left( \frac{A^3}{M_{\odot}} \right)^{1/2}.$$

Подставляя это выражение в (14.1), получаем

$$T = \left[ \frac{a^3}{M_1 + M_2} \left( \frac{M_{\odot}}{A^3} \right) \right]^{1/2},$$

так что

$$M_1 + M_2 = \left( \frac{a}{A} \right)^3 \frac{M_{\odot}}{T^2}.$$

Полагая массу Солнца равной 1, получаем из предыдущего выражения

$$M_1 + M_2 = \left( \frac{a}{A} \right)^3 \frac{1}{T^2}. \quad (14.2)$$

Таким образом, если определен период вращения и известен размер орбиты, то можно найти сумму масс обеих звезд в единицах массы Солнца.

Пусть  $d$  — расстояние двойной звезды; тогда видимый угловой размер  $\alpha$  большой полуоси орбиты определяется как

$$\sin \alpha = a/d, \quad (14.3)$$

и, поскольку угол  $\alpha$  весьма мал, можно записать

$$\alpha \approx a/d. \quad (14.4)$$



Теперь введем параллакс звезд  $P$  (разд. 3.7) при помощи выражения

$$\sin P = A/d.$$

Так как  $P$  тоже весьма малый угол, можно снова записать

$$P \approx A/d. \quad (14.5)$$

Отсюда

$$\alpha/P = a/A.$$

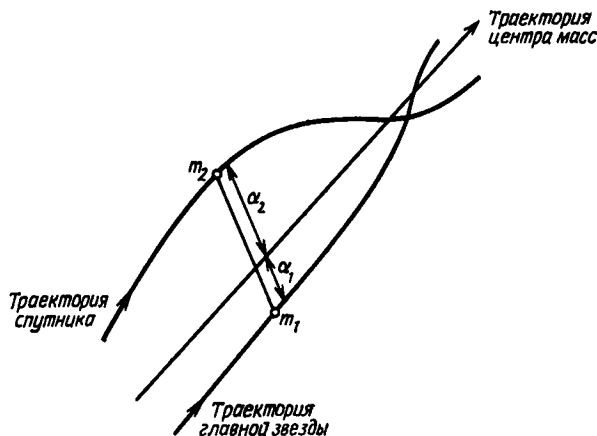


Рис. 14.3.

Подставляя это выражение (в 14.2), имеем

$$M_1 + M_2 = \left( \frac{\alpha}{P} \right)^3 \frac{1}{T^2}, \quad (14.6)$$

где  $\alpha$  и  $P$  обычно выражаются в секундах дуги.

В том случае, когда можно измерить положения звезд относительно центра их масс, оказывается возможным определить отношение масс компонентов. Этот вид измерений требует весьма точного знания положений обеих звезд относительно далеких звезд фона за достаточно длительное время наблюдений. Продолжительные наблюдения одиночной звезды в течение многих лет показывают, что она имеет собственное движение относительно звезд фона, причем ее путь является отрезком дуги большого круга на небесной сфере. Однако если изучаемая звезда — двойная, то по дуге большого круга перемещается центр масс системы. Две звезды, образующие систему, движутся по кривым со слабыми колебаниями относительно центра масс (рис. 14.3). На

основе измерений положений обеих звезд можно определить траекторию центра масс, а затем и индивидуальные орбиты компонентов.

Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — угловые расстояния главной звезды и спутника от видимого положения центра масс системы. Тогда

$$M_1\alpha_1 = M_2\alpha_2,$$

откуда

$$M_1/M_2 = \alpha_2/\alpha_1. \quad (14.7)$$

Если наблюдения дают нам все параметры, которые должны быть включены в оба выражения (14.6) и (14.7), тогда возможно вычисление масс индивидуальных звезд. Типичные массы, полученные путем изучения визуальных двойных звезд, лежат в пределах от 0,1 до 20 масс Солнца.

### 14.3. Соотношение масса—светимость

Обеспечивая нас данными о звездных массах, двойные звезды с известными расстояниями (или параллаксами) дают нам также данные, свидетельствующие о существовании определенного соотношения между светимостью звезды и ее массой. Этот эмпирический закон, называемый «соотношением масса — светимость», подтверждается теориями внутреннего строения звезд (рис. 14.4). Для наглядности на рис. 14.4 абсолютная болометрическая звездная величина, непосредственно связанная со светимостью, отложена в зависимости от десятичного логарифма массы звезды (в единицах солнечной массы). Солнце, с абсолютной болометрической величиной  $+4,79$  и  $\lg M_C = 0$ , также лежит на построенной кривой.

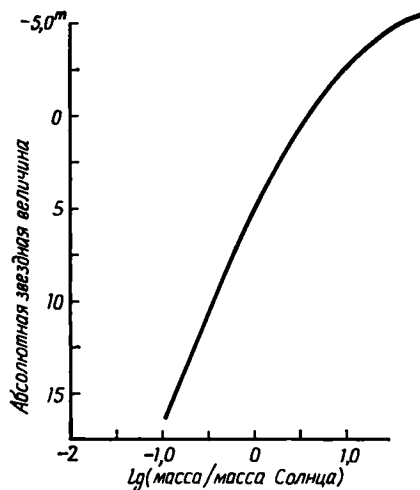


Рис. 14.4.

Обнаруживается, что с хорошим приближением на значительном интервале масс и светимостей

$$L \sim M^{3,1},$$

где  $L$  — светимость звезды, а  $M$  — ее масса. Соотношение масса—светимость можно использовать для оценки масс звезд, если известны их светимости.

## 14.4. Динамические параллаксы

Тот факт, что массы наблюдаемых визуально-двойных звезд охватывают не слишком широкий диапазон, можно использовать для оценки расстояний, которые лежат за пределами возможностей обычного метода параллаксов. Этот метод определения расстояний называется методом *динамических параллаксов*. Он включает некоторое число шагов, повторяющихся до получения удовлетворительного ответа.

1. В качестве первого приближения предположим, что каждая звезда имеет массу, равную солнечной. Тогда  $M_1 + M_2 = 2$  и, используя (14.6) в виде

$$P = \frac{\alpha}{T^{3/2}} \frac{1}{(M_1 + M_2)^{1/3}}, \quad (14.8)$$

получаем первое приближение для параллакса, подставляя в (14.8) полученные из наблюдений значения  $\alpha$  и  $T$  и полагая  $M_1 + M_2 = 2$ .

2. Теперь используем наблюдаемые видимые звездные величины  $m_1$  и  $m_2$  компонентов двойной звезды. Из разд. 3.7 имеем  $M = m + 5 + 5 \lg P$ .

Если  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  — абсолютные звездные величины компонентов, тогда

$$\mathcal{M}_1 = m_1 + 5 + 5 \lg P, \quad \mathcal{M}_2 = m_2 + 5 + 5 \lg P.$$

Подставляя сюда первое приближение для параллакса, после шага «1», получим первое приближение для абсолютных звездных величин  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  обоих компонентов.

3. Применим соотношение масса—светимость. Для этого используем значения первых приближений для абсолютных величин компонентов  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$ , полученные после шага «2»; в результате мы будем располагать улучшенными значениями масс  $M_1$  и  $M_2$  компонентов.

4. Теперь подставим полученные значения масс в (14.8) и найдем улучшенное значение параллакса.

5. Вернемся к шагу «2» и продолжим операции до получения удовлетворяющего нас результата.

На практике обнаруживается, что значения  $P$  сходятся очень быстро. Процесс итерации останавливается, когда разность между двумя последовательными приближениями оказывается меньше единицы последней значащей цифры известного значения видимой звездной величины. Например, если видимые звездные величины равны 0,16 и 0,85 и получено, что  $P_3 = 0,15''$ , а  $P_2 = 0,14''$ , то бессмысленно продолжать процесс вычислений. Следует также отметить, что в (14.8) необходимо подставлять только однократно вычисленное значение  $\alpha T^{-2/3}$ .

Даже если первое предположение  $M_1 + M_2 = 2$  оказывается слишком грубым, все же выражение (14.8) минимизирует ошибку, поскольку величина  $(M_1 + M_2)$  входит только в степени  $1/3$ . Следовательно, если на самом деле  $M_1 + M_2 = 20$  (необычно большая масса для двойной звезды), но мы возьмем как первое приближение  $M_1 + M_2 = 2$ , то  $20^{1/3} = 2,714$ , тогда как  $2^{1/3} = 1,260$ . Множитель 10 в члене  $(M_1 + M_2)$  сразу уменьшается до  $2^{1/2}$  в члене  $(M_1 + M_2)^{1/3}$ . Указанный факт делает вполне надежными динамические параллаксы, дающими существенный вклад в наше знание расстояний и масс звезд.

## 14.5. Затменные двойные

Периоды кривых блеска затменных двойных обычно составляют несколько суток; это показывает, что компоненты этого типа систем гораздо ближе друг к другу, чем в случае визуальных двойных.

Реальные формы кривых блеска меняются от одной двойной звезды к другой, но общими особенностями у них являются два падения блеска на протяжении одного периода. Этот факт можно интерпретировать, рассматривая систему двух звезд, обращающихся друг относительно друга и затмевающих одна другую и затмеваемых одна другой.

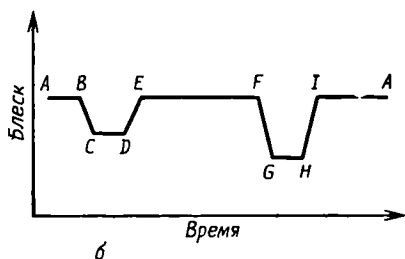
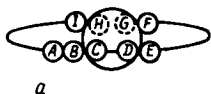


Рис. 14.5.

Основной тип кривой блеска затменной двойной представлен на рис. 14.5; здесь для периодов минимумов блеск принят постоянным. Эта специфическая форма кривой указывает, что затмения являются полными. На рис. 14.5, а иллюстрирована конфигурация, которая порождает тип кривой блеска, представленной на рис. 14, б; изображена орбита, которую мы наблюдали бы в случае возможности разрешения компонентов двойной звезды.

При сравнении рис. 14, а и 14, б видно, что, когда меньшая звезда находится в положении А, каждый компонент дает полный вклад в общий блеск звезды.

В положении В меньшая звезда находится в начале своего прохождения по диску большей звезды. При изменении положения от В до С меньшая звезда начинает экранировать свет от большей звезды и общий уровень блеска плавно падает. Затем

падение блеска прекращается, и он сохраняется на одном уровне, пока меньшая звезда не достигает положения  $D$ . При перемещении меньшей звезды от  $D$  к  $E$  диск большей звезды постепенно освобождается, пока в положении  $E$  уровень блеска не примет полного значения.

Полный блеск сохраняется до тех пор, пока меньшая звезда перемещается от  $E$  к  $F$ . В этом положении начинается ее затмение большей звездой, и блеск падает. В положении  $G$  меньшая звезда полностью затмевается и остается в таком состоянии до достижения точки  $H$ . Во время перемещения от точки  $G$  до  $H$  блеск остается постоянным, но в общем не таким, как в минимуме, имевшем место между точками  $C$  и  $D$ , поскольку блеск компонентов обычно бывает разным. При перемещении звезды от  $H$  к  $I$  блеск возрастает, пока не достигнет максимального уровня. Этот блеск сохраняется неизменным, пока меньшая звезда снова не достигнет точки  $B$ , откуда начинается новый цикл кривой блеска.

Теперь рассмотрим кривую блеска с количественной стороны. Хотя кривые блеска иногда можно выразить через изменения звездной величины, удобнее выразить их через изменения блеска. Предположим, что меньшая звезда имеет светимость  $L_1$ , а большая  $L_2$ . (Обычно имеет место  $L_1 > L_2$ .) Очевидно, видимая светимость системы равна сумме светимостей обеих звезд. Они дают вклад в общую светимость в соответствии с их индивидуальной светимостью и долей поверхности, которую можно наблюдать. Если полные наблюдаемые поверхности равны  $S_1$  и  $S_2$  для меньшей и большей звезд соответственно и если измеренный блеск между затмениями (т. е. полный видимый блеск) равен  $B$ , можно написать

$$L_1 S_1 + L_2 S_2 = kB, \quad (14.9)$$

где  $k$  — постоянная, определяемая расстоянием звезд от наблюдателя.

Предположим, что в первом минимуме (меньшая звезда в положении перед большей звездой) видимый блеск падает до  $B_1$ , а во втором минимуме (меньшая звезда за большей звездой) видимый блеск равен  $B_2$ . Легко видеть, что

$$L_1 S_1 + L_2 (S_2 - S_1) = kB_1, \quad (14.10)$$

а также

$$L_2 S_2 = kB_2. \quad (14.11)$$

Пусть  $b_1$ ,  $b_2$  — потери блеска во время минимумов, так что

$$b_1 = B - B_1, \quad b_2 = B - B_2.$$

Вычтем поочередно выражения (14.10) и (14.11) из (14.9); получим

$$L_2 S_2 - L_2 (S_2 - S_1) = k(B - B_1)$$

или

$$L_2 S_1 = kb_1, \quad (14.12)$$

а также

$$L_1 S_1 = k (B - B_2)$$

или

$$L_1 S_1 = k B_2. \quad (14.13)$$

Разделив (14.13) на (14.12), имеем

$$L_1 / L_2 = b_2 / b_1. \quad (14.14)$$

Этот простой анализ сразу показывает, что отношение светимостей звезд можно непосредственно получить из отношения видимых потерь блеска в двух минимумах.

Используя выражения (14.9), (14.11) и (14.14), легко показать, что

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{B - b_2}. \quad (14.15)$$

Поскольку значения  $S_1$  и  $S_2$  пропорциональны квадратам радиусов звезд  $R_1$  и  $R_2$ , можно записать

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{b_1}{B - b_2},$$

откуда

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{b_1}{B - b_2}\right)^{1/2}. \quad (14.16)$$

Следовательно, путем измерения блеска в максимумах и потерь блеска в минимумах мы определяем отношение радиусов звезд.

Значения отношений светимостей и радиусов звезд помогает нам сравнить свойства звезд, являющихся компонентами затменной двойной системы. Дальнейший анализ кривых блеска во многих случаях позволяет связать радиусы звезд с размерами их орбит; возможно также определить наклонение орбиты звезды по отношению к наблюдателю. Вся эта информация особенно полезна, если затменная двойная также наблюдается как спектрально-двойная (см. разд. 14.6). Однако изящные методы, используемые для такого анализа кривых блеска, выходят за рамки нашего изложения и не будут здесь рассматриваться.

Правда, стоит отметить, что приведенная выше кривая блеска описывает систему, в которой наблюдаются полные затмения. Несомненно, что существуют системы, в которых происходят частные затмения. Для таких систем не существует сколь угодно протяженных периодов, в течение которых сохраняется неизменным минимальное значение блеска; кривая блеска имеет два V-образных минимума обычно различной глубины. На рис. 14.6, а представлена подобная частично затменная система; на рис. 14.6, б показана соответствующая кривая блеска.

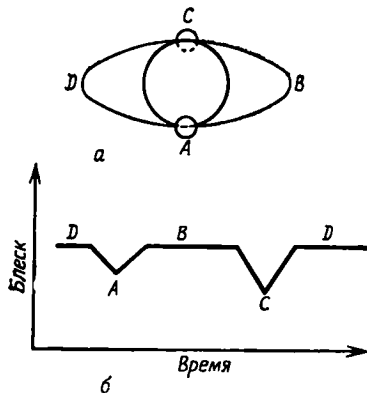


Рис. 14.6.

Из рис. 14.6 видно, что максимальная площадь диска большой звезды, затмеваемая меньшей, имеет место в положении *A*. Поскольку затмение частное, кривая блеска после достижения минимума сразу начинает возрастать. Легко показать, что глубины минимумов на подобной кривой блеска по-прежнему позволяют определить отношение светимостей; однако отношение радиусов уже нельзя получить с помощью простой формулы (14.15). Для получения этих данных из кривой блеска применяют другие стандартные, но более сложные приемы.

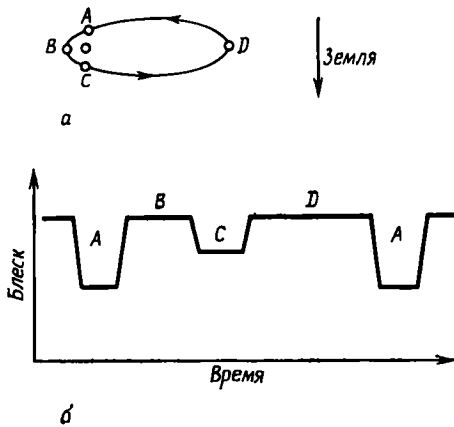


Рис. 14.7.

Кривая блеска также дает нам возможность вывести эксцентриситет орбиты одной звезды относительно другой. В качестве примера на рис. 14.7 представлен предельный случай, когда большая ось орбиты перпендикулярна к лучу зрения. Обе звезды подчиняются закону всемирного тяготения, а следовательно, и трем законам Кеплера. Поэтому спутник движется по орбите быстрее всего, когда он всего ближе к главной звезде или, как говорят, когда спутник находится в периастре. Вследствие этого вторичное затмение, имеющее место в положении *C*, происходит ближе по времени к предшествующему главному затмению *A* (рис. 14.7, б), чем к последующему главному затмению, и периоды максимальной яркости (*B* и *D*) оказываются неравной длины.

Помимо данных об орбите, детальный анализ кривой блеска обеспечивает нас также следующей информацией:

- 1) отклонения фигур звезд от сферической;
- 2) однородность яркости по дискам звезд (т. е. потемнение к лимбу);

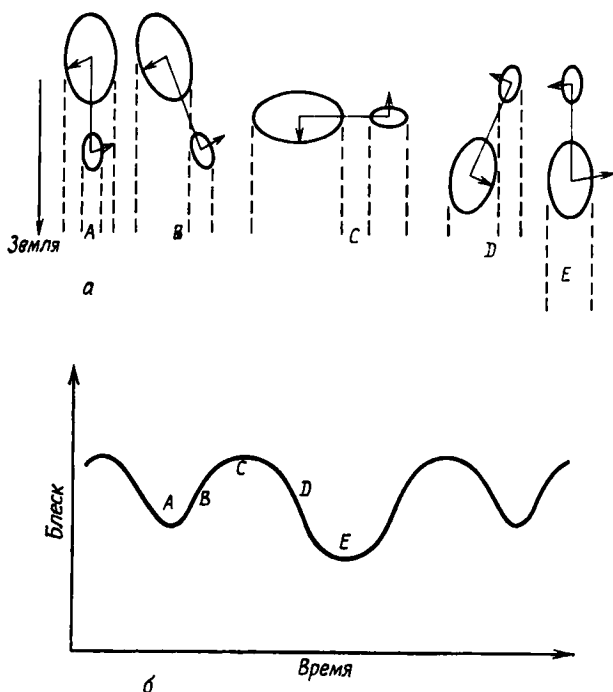


Рис. 14.8.

3) эффекты отражения света одной звезды от другой в направлении наблюдателя.

Ниже мы рассмотрим кратко эти данные.

1) Некоторые звезды расположены так близко друг к другу, что возникают гравитационные искажения их фигур: обе звезды оказываются вытянутыми вдоль прямой, соединяющей их центры. Таким образом (это иллюстрировано на рис. 14.8), если две звезды со сплюснутыми фигурами обращаются друг относительно друга в такой плоскости, что происходят затмения, то кривая блеска не будет содержать прямолинейных отрезков: кривая будет меняться гладко, поскольку полная площадь звездных дисков, видимая наблюдателю, никогда не остается постоянной.

2) Хорошо известно, что Солнце не имеет однородной яркости по диску: яркость падает по направлению к солнечному лимбу. Этот эффект называется потемнением к лимбу. Из кривых блеска затменных двойных мы знаем, что некоторые звезды должны показывать тот же самый эффект. Когда начинается затмение (рис. 14.9), первоначальное падение блеска происходит медленно, поскольку сначала экранируются менее яркие области звездного диска. Убывание яркости происходит с возрастающей скоростью,



по мере того как экранирующая звезда покрывает все более яркие области затмеваемой звезды. Таким образом, падения и возрастания яркости происходят не по линейному закону, если у звезд существует потемнение к лимбу.

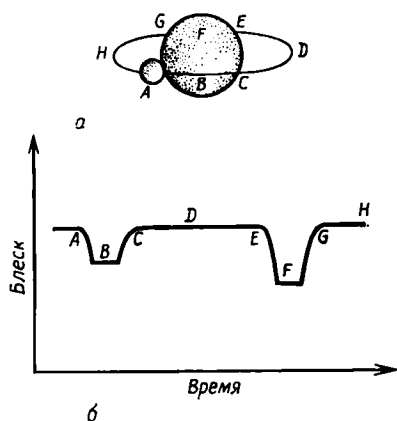


Рис. 14.9.

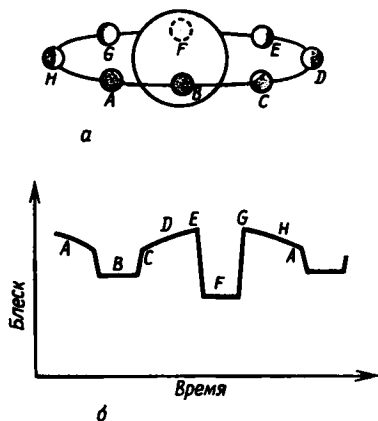


Рис. 14.10.

3) В этом случае участки кривой блеска между минимумами обладают наклоном и искривлены (рис. 14.10), так что, хотя звезда не входит и не выходит из затмения, блеск звезды изменяется. Происходит то, что меньшая звезда показывает фазы, аналогичные существующим у Венеры или Луны. Сторона спутника, обращенная к большей звезде, оказывается ярче, чем противоположная сторона. Следует напомнить, однако, что в противоположность случаю Венеры или Луны, меньшая звезда — самосветящееся тело.

## 14.6. Спектрально-двойные звезды

Представление о форме, которую можно предполагать для кривой лучевой скорости, возможно получить путем рассмотрения трех различных типов орбит. Для простоты будем рассматривать орбиту одной звезды относительно центра масс и предположим, что орбита лежит в плоскости, которая содержит и линию зрения. Рассмотрим следующие орбиты: а) окружность, б) эллипс, большая ось которого составляет прямой угол с лучом зрения, в) эллипс, большая ось которого расположена вдоль луча зрения. Эти типы орбит представлены на рис. 14.11, а — вместе с соответствующими кривыми лучевых скоростей. Во всех случаях заметно, что в положениях 1 и 3 движение происходит по кас-

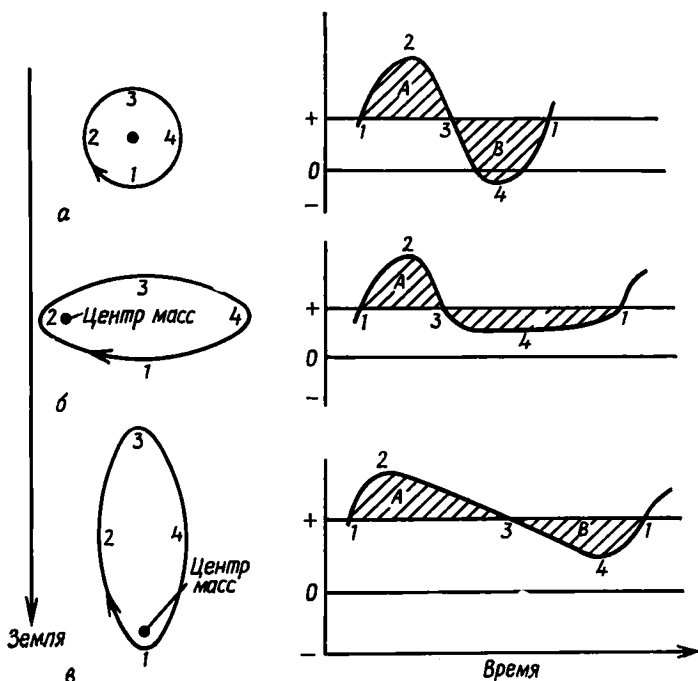


Рис. 14.11.

тельной и лучевая скорость равна нулю. Измеренная лучевая скорость в этих точках соответствует движению относительно Земли системы в целом.

Для круговой орбиты кривая лучевых скоростей оказывается симметричной. Движение звезды по направлению к наблюдателю и от наблюдателя аналогично простому гармоническому движению, откуда следует, что кривая скоростей оказывается синусоидой.

Для случая эллиптической орбиты с главной осью, перпендикулярной линии зрения наблюдателя, законы Кеплера предсказывают, что скорость звезды наибольшая в периастре; вследствие этого звезда проводит относительно короткое время на этом участке своей орбиты. Кривая скоростей показывает крутой пик для периода, охватывающего точки 1, 2, 3. В дальнейшем движение становится почти касательным и занимает большее время; это соответствует движению по орбите от точки 3 через 4 к точке 1.

Для эллиптической орбиты с большой осью, расположенной вдоль луча зрения, скорость меняет знак с отрицательного на положительный очень быстро в точке 1 вблизи периастра. В точке 3 орбитальная скорость гораздо меньше, чем в точке 1. Поэтому

обратный переход от положительной лучевой скорости к отрицательной происходит значительно медленнее, чем обратный переход в точке  $l$  орбиты.

Все три приведенных выше примера представляют собой частные случаи. Если рассматривается случай, когда большая полуось орбиты расположена под отличающимися от прямого углами и лежит в плоскости, наклоненной к наблюдателю, тогда на форму кривой должны оказывать воздействие оба фактора. Поскольку суммарная орбитальная скорость за один период равна нулю и поскольку кривая скорости выражает зависимость скорости от времени, на кривую скоростей можно наложить прямую, соответствующую постоянной скорости таким образом, что ограниченная кривой скоростей площадь над этой прямой и под ней окажутся равными. Скорость, указанная этой прямой, соответствует постоянной лучевой скорости двойной системы в целом относительно Солнца. Когда оба компонента дают вклад в общий спектр, можно построить две кривые скорости, соответствующие орбитам каждой звезды относительно центра масс системы. Мы не упоминали до сих пор, что любая определяемая лучевая скорость должна быть исправлена за движение Земли по орбите вокруг Солнца, прежде чем значения скорости будут нанесены на график лучевой скорости.

Если рассматривается произвольная орбиты двойной звезды, то возможно вывести выражения для значения лучевой скорости каждого компонента в любой момент времени. В выражение для лучевой скорости главной звезды входит произведение  $a_1 \sin i$ , а в аналогичное выражение для спутника входит произведение  $a_2 \sin i$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — большие полуоси орбит относительно центра масс системы; оба произведения представляют собой проекции этих осей на плоскость, расположенную перпендикулярно линии зрения (иными словами,  $i$  является углом наклона плоскости орбиты к плоскости, касательной к небесной сфере). Анализ обеих кривых скоростей позволяет найти оба указанных произведения. Однако, используя только данные о лучевых скоростях, невозможно получить раздельно параметры  $a_1$ ,  $a_2$  и  $\sin i$ . Из определения центра масс имеем соотношение

$$M_1 a_1 = M_2 a_2.$$

Умножая обе стороны этого равенства на  $\sin i$ , получаем

$$M_1 a_1 \sin i = M_2 a_2 \sin i,$$

откуда

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2 \sin i}{a_1 \sin i}. \quad (14.17)$$

Числитель и знаменатель в правой части (14.17) являются теми самыми величинами, которые можно определить из анализа кривых лучевых скоростей.

Когда получены обе кривые, становится видно, что одна кривая представляет собой зеркальное изображение другой относительно прямой, соответствующей нулевой лучевой скорости, хотя, возможно, с различными амплитудами. Отношение амплитуд двух кривых скоростей обратно пропорционально отношению масс звезд. Таким образом, если возможно построить кривые скоростей для обоих компонентов, то отношение масс получается непосредственно из этих кривых.

В (14.2) мы уже получили соотношение между суммой масс обеих звезд, величиной большой полуоси орбиты одной звезды относительно другой и периодом обращения.

Выражая расстояния в астрономических единицах (а. е), получим указанное выражение в виде

$$M_1 + M_2 = a^3/T^2. \quad (14.18)$$

Подставляя значение  $M_2$  из (14.16), можно переписать (14.18) в виде

$$M_1 = \frac{a^3}{T^2 \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)}. \quad (14.19)$$

При сведении двух орбит относительно центра масс к одной орбите, отнесенной к главной звезде, мы имеем равенство  $a = a_1 + a_2$  или, умножая обе стороны на  $\sin i$ ,

$$a \sin i = a_1 \sin i + a_2 \sin i.$$

Теперь, как мы видим, анализ кривых лучевых скоростей позволяет нам найти  $a_1 \sin i$  и  $a_2 \sin i$ , а отсюда и  $a \sin i$ . Выражая правую часть (14.19) через величины, которые можно вывести из наблюдений, имеем

$$M_1 \sin^3 i = \frac{(a \sin i)^3}{T^2 \left(1 + \frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i}\right)}. \quad (14.20)$$

Отсюда можно вывести значение  $M_1 \sin^3 i$ ; сходным образом можно получить и значение  $M_2 \sin^3 i$ .

Если нам доступна только одна кривая скоростей, тогда можно найти величину, называемую *функцией масс*. Предположим, что именно главная звезда определяет измеряемый спектр; поэтому из измерений мы можем получить  $a_1 \sin i$ , но не  $a_2 \sin i$ . Добавляя величину  $M_2 a_1$  к обеим частям (14.16), имеем

$$M_1 a_1 + M_2 a_1 = M_2 a_1 + M_2 a_2,$$

откуда

$$\frac{a_1}{M_2} = \frac{a_1 + a_2}{M_1 + M_2}.$$

Поскольку  $a_1 + a_2 = a$ , последнее выражение можно переписать в таком виде:

$$\frac{a_1}{M_2} = \frac{a}{M_1 + M_2}.$$

Исключая  $a$  из последнего выражения при помощи (14.18), получаем

$$\frac{a_1^3}{T^2} = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2}.$$

Умножая обе части этого выражения на  $\sin^3 i$ , мы приобретаем возможность выразить левую часть через измеряемые и выводимые из данных измерений величины; имеем

$$\frac{(a_1 \sin i)^3}{T^2} = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (14.21)$$

Правая часть (14.21) называется *функцией масс* спектрально-двойной звезды.

### 14.7. Обзор результатов

Сводка данных о физической природе двойных звезд, которые могут быть выведены из наблюдений, приведены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Визуально-двойные	Затменные двойные	Спектрально-двойные
Угловой размер большой оси Эксцентриситет эллипса Модуль угла наклона плоскости орбиты При известном параллаксе: линейный размер большой оси сумма масс При известном центре масс: отношение масс и, следовательно, масса каждой звезды	Отношение светимостей Отношение радиусов к радиусу относительной орбиты, принимаемой за круговую Наклонение плоскости орбиты Фигуры звезд Эксцентриситет орбиты Потемнение к лимбу	Произведение значения большой оси на синус наклона плоскости орбиты Эксцентриситет эллипса При знании обеих кривых скоростей — произведение массы каждого компонента на куб синуса наклона орбиты
Если звезда является и затменной двойной, и спектрально-двойной, можно определить массы компонентов и абсолютные значения их радиусов		

### 14.8. Элементы орбиты двойной звезды

В оставшейся части главы мы рассмотрим некоторые особенности двойных систем, которые наглядно покажут, как сложны могут быть подобные системы и насколько большая часть двойных систем может отклоняться от простой модели двух тел. Предварительно мы определим, что следует понимать под элементами орбиты двойной системы. Они в общем соответствуют элементам орбиты планеты или спутника; однако характер задачи требует введения определенных модификаций.

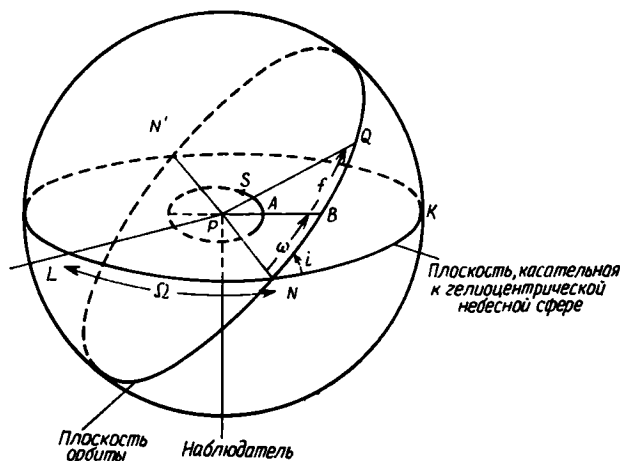


Рис. 14.12.

На рис. 14.12 изображена плоскость, проходящая через двойную звезду и касательная к небесной сфере. Опишем еще одну сферу вокруг  $P$  — главного компонента двойной, причем упомянутая выше касательная плоскость фиксируется в качестве координатной плоскости для измерений на только что построенной сфере. В этой плоскости вводится направление  $PL$  от двойной звезды к северному полюсу мира  $L$ . Это направление используется в качестве координатного в построенной касательной плоскости.

Теперь можно определить элементы орбиты звезды-спутника  $S$  относительно главной звезды  $P$ . Пусть плоскость орбиты пересекает касательную плоскости по линии узлов  $NN'$ . Тогда:  $\Omega = \angle LNP$  — позиционный угол (измеряемый к востоку) восходящего узла;  $i = \angle BNK$  — наклонение плоскости орбиты к касательной плоскости;  $\omega = \angle APN$  — аргумент (или долгота) периастра (точки наибольшего сближения спутника с главной звездой);  $a$  — большая полуось орбиты;  $e$  — эксцентриситет (поскольку мы имеем дело с замкнутой орбитой, то  $0 \leq e < 1$ );  $\tau$  —

момент прохождения периастра;  $T$  — период обращения (изменяется в годах для визуальных двойных или в сутках для затменных двойных и спектрально-двойных).

Здесь уместно сделать несколько замечаний. Хотя и  $a$ , и  $T$  мы назвали элементами, которые связаны ньютоновской формой III закона Кеплера

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = G(m_1 + m_2),$$

массы  $m_1$  и  $m_2$  сами по себе являются неизвестными величинами, которые надлежит определить. Чтобы сделать это, требуется найти значения  $T$  и  $a$ . Поэтому двойная система характеризуется семью элементами:

$$\Omega, i, \omega, a, e, \tau, T.$$

Мы видим, что до тех пор, пока не выполнены измерения лучевых скоростей компонентов визуально-двойной, остается неопределенность в  $180^\circ$  в определении восходящего и нисходящего узлов. Без этих измерений принято полагать  $0 \leq i \leq 90^\circ$ , если видимое движение прямое, и считать, что узел, для которого  $\Omega \leq 180^\circ$ , является восходящим узлом. Спектрально-двойные и затменные двойные требуют свойственных им определений орбит и их улучшений. Существует обширная литература по этому предмету, постоянно пополняемая.

Теперь рассмотрим более подробно два из семи элементов, а именно период обращения  $T$  и аргумент (или долготу) периастра  $\omega$ .

## 14.9. Период двойной звезды

Период двойной — один из наиболее важных элементов, подлежащих определению. Обычно его можно определить с большей точностью, чем любой другой элемент. В принципе любое периодическое и поддающееся изучению явление можно охарактеризовать периодом, измеряемым со все большей точностью, если измерения многочисленны, однозначны и охватывают интервал времени, многократно превышающий продолжительность периода. Идеальный пример — это затменная двойная с хорошо определяемыми главными и вторичными минимумами блеска и периодом, который не близок к целому числу звездных суток. В этом случае достижима относительная точность до  $10^{-8}$ . Для визуально-двойных звезд, большинство которых имеют периоды, превышающие 10 лет, точность составляет порядка  $10^{-4}$  или меньше (следует напомнить, что подходящие наблюдения для большинства визуально-двойных звезд охватывают промежуток времени в столетие или даже меньше). Точность периодов спектрально-двойных

звезд заключена между указанными выше пределами для затменных двойных и визуально-двойных звезд.

Если период измерен с достаточной точностью (для определенности — у затменной двойной), то можно предсказать моменты начал и окончаний затмений. Эти эфемериды можно затем сравнить с наблюдениями и выявить любое изменение периода. Подобные изменения периода наблюдаются у многих двойных. Они могут быть случайными или периодическими и связаны с самыми разнообразными причинами. Мы рассмотрим также изменения в последнем разделе. Здесь же следует напомнить, что в измеренный период необходимо вводить поправки за лучевую скорость центра масс двойной относительно Солнца, а также за орбитальную скорость Земли вокруг Солнца. Эти поправки аналогичны вводимым при сравнении наблюдений прохождений по диску, затмений и покрытий галилеевых спутников Юпитера с теоретическими расчетами; первые систематически оказываются то раньше, то позже предвычисленных, что связано с конечным значением скорости света и вариацией расстояния между спутниками Юпитера и Землей (именно изучение причин подобного «плохого» хранения времени спутниками Юпитера привело Рёмера к измерению скорости света в 1675 г.).

#### 14.10. Движение апсид

Рассмотрим снова простой случай затмений двойной звезды, плоскость орбиты которой содержит линию зрения наблюдателя. Пусть орбита двойной звезды имеет умеренный эксцентриситет, а большая ось расположена под прямым углом к линии зрения (см. рис. 14.7, а).

В силу II закона Кеплера спутник главной звезды будет быстрее всего двигаться в периастре, так что вторичный минимум окажется ближе к предшествующему главному минимуму, чем к последующему. Однако если большая ось орбиты расположена вдоль линии зрения, как на рис. 14.7, б, то вспомогательный минимум окажется равноудаленным по времени от предшествующего и последующего главных минимумов. На рис. 14.7, б большая полуось орбиты снова направлена под прямым углом к лучу зрения, но долгота периастра теперь на  $180^\circ$  превышает долготу периастра на рис. 14.7, а. Мы видим, что вспомогательный минимум теперь оказывается ближе к последующему главному минимуму, чем к предыдущему. Предположим теперь, что орбита звезды вращается в своей собственной плоскости (т. е. существует вековое движение периастра); тогда становится ясным, что даже при умеренном эксцентриситете с течением времени будут наблюдаться колебания моментов вспомогательных минимумов относительно среднего момента между главными минимумами блеска.



Период этих колебаний соответствует периоду вращения линии апсид.

Примерами затменных двойных звезд, у которых измерено движение линии апсид, являются  $\gamma$  Лебеда (апсидальный период 54 года), CO Ящерицы (апсидальный период 43 года), GL Кормы (апсидальный период 27 лет), AG Персея (апсидальный период 83 года). Орбитальные периоды этих звезд составляют 3,00; 1,54; 2,42 и 2,03 суток соответственно; таким образом, период вращения линии апсид в тысячи раз превышает период обращения двойной.

### 14.11. Силы, действующие в двойной системе

Если компоненты двойной звезды представляют собой материальные точки и никакие силы, помимо тяготения, на них не действуют, то тогда двойная звезда оказывается примером задачи двух тел и эллиптическое решение будет полностью описывать орбитальное движение одного компонента относительно другого. Поэтому элементы орбиты будут постоянными. В разд. 6.5 мы видели, что к этому сводится также случай, когда компоненты являются не материальными точками, но сферическими телами конечных размеров с распределением плотности внутри, зависящим только от радиуса. Однако редко когда подобная простая картина соответствует реальному случаю. Существуют многочисленные факторы, которые влияют на основную картину и искажают ее. Наиболее важные из них следующие:

1. Существование еще одной звезды (или большего числа звезд), гравитационно связанной с двойной.

2. Неточность ньютоновского закона гравитации.

3. Отклонение компонентов двойной от материальных точек.

4. Обмен веществом между компонентами или потеря массы системой.

Эти факторы будут вызывать изменения движения в системе, проявляющиеся в элементах орбиты. В особенности интересно изменение периода обращения  $T$  и аргумента долготы периастра  $\omega$ . Поэтому при сборе данных о строении двойной системы и ее компонентов оказывается важным учесть вклады перечисленных выше факторов, могущих привести к измеримым изменениям указанных элементов орбиты. Рассмотрим их поочередно.

### 14.12. Тройные системы

В гл. 1 мы уже отметили, что от  $1/4$  до  $1/3$  всех двойных при более тщательном и длительном исследовании оказываются тройными системами. При этом обнаруживается, что на практике большая часть тройных систем состоит из тесной двойной с третьей

звездой на расстоянии, во много раз (в подавляющем большинстве случаев во много сотен раз) превышающем удаление друг от друга компонентов тесной двойной. Правда, существуют и системы (их число незначительно), в которых взаимные расстояния одного и того же порядка.

В гл. 5 мы видели, что численное исследование общей задачи трех тел позволило классифицировать типы орбитального движения; эти движения сведены в табл. 5.1. В числе этих типов

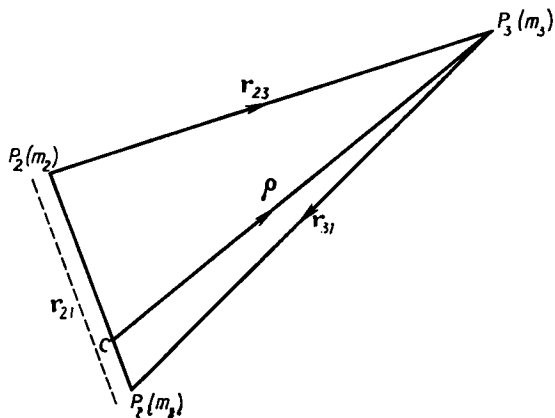


Рис. 14.13.

*взаимосвязь* оказывается переходным явлением, ведущим либо к *освобождению*, либо к *выбросу*, в то время как квазиустойчивой модой для системы трех тел оказывается *обращение*, когда образуется тесная двойная, а третье тело обращается вокруг этой двойной системы на среднем расстоянии, гораздо большем, чем расстояние между компонентами двойной. Теперь мы увидим совершенно ясно причину подобной квазиустойчивости, если приведем задачу трех тел в координатах Якоби, как мы сделали в разд. 5.11.1.

Пусть  $C$  — центр масс  $P_1$  и  $P_2$ ;  $\mathbf{r}$  — вектор, направленный от  $P_1$  к  $P_2$ ;  $\boldsymbol{\rho}$  — вектор, направленный от  $C$  к  $P_3$ . Тогда с учетом (5.90) и (5.91) находим

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \mathbf{f}(\mathbf{r}) = (M - \mu) | \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{vr}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}^* \mathbf{r}) | \quad (14.22)$$

и

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -M | \mathbf{v}^* \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{vr}) + \mathbf{v} \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}^* \mathbf{r}) |, \quad (14.23)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \quad \mu = m_1 + m_2,$$

$$v = m_1/\mu, \quad v^* = m_2/\mu,$$

а

$$f(x) = Gx/x^3.$$

Тройные системы, почти всегда встречающиеся на практике, соответствуют случаю, при котором  $r/\rho = \epsilon$ , причем  $\epsilon \ll 1$ ; кроме того,  $v < 1$  и  $v^* < 1$ . Поэтому мы можем разложить  $|\rho - v\mathbf{r}|^{-3}$  и  $|\rho + v^*\mathbf{r}|^{-3}$  по обычной формуле бинома. После небольших сокращений и с учетом того, что  $v + v^* = 1$ , получаем, что с точностью до  $\epsilon^2$  уравнение (14.22) принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_3 \left\{ \frac{3\rho}{\rho^3} \left[ \epsilon u - \frac{1}{2} \epsilon^2 (v - v^*) (1 - 5u^2) \right] - \frac{r}{\rho^3} \left[ 1 + 3\epsilon u (v - v^*) - \frac{3}{2} \epsilon^2 (v^2 - vv^* + vv^{*2}) (1 - 5u^2) \right] \right\}, \quad (14.24)$$

где

$$u = \rho \cdot \mathbf{r} / \rho r \leq 1.$$

Аналогично (14.23), также с точностью до  $\epsilon^2$ , принимает вид

$$\ddot{\rho} + GM \frac{\rho}{\rho^3} = 3GM \left\{ \frac{\rho}{\rho^3} \left[ \frac{vv^*\epsilon^2}{2} (1 - 5u^2) \right] + r \frac{vv^*}{\rho^3} \left[ \epsilon u - \frac{1}{2} (v - v^*) (1 - 5u^2) \right] \right\}. \quad (14.25)$$

Отсюда видно, что отношение наибольшего члена в правой части (14.24) к основному члену задачи двух тел в левой части равно  $m_3\epsilon^3/\mu$ . Массы звезд не сильно рознятся друг от друга, так что  $\mu \approx m_3$ . Следовательно, возмущающее ускорение третьей массы на двойную систему порядка  $\epsilon^3$ . У большинства тройных систем  $\epsilon < 10^{-2}$ , так что  $\epsilon^3 < 10^{-6}$ . Поэтому возмущения оказываются малыми — гораздо меньшими, например, чем действие Юпитера на Сатурн.

В (14.25) отношение наибольшего члена в правой части к члену задачи двух тел в левой части порядка  $vv^*\epsilon^2$ . Но  $vv^* \leq 1/4$  и  $\epsilon^2 < 10^{-4}$ , так что возмущения снова оказываются малыми. Итак, в обоих случаях, а именно для взаимного орбитального движения компонентов двойной системы и для орбитального движения третьей массы относительно центра масс двойной системы, возмущения лишь слегка изменяют эллиптические движения. Однако для достаточно длительного (в астрономическом смысле) промежутка времени численные эксперименты на ЭВМ для задачи трех тел свидетельствуют, что подавляющее большинство тройных систем заканчивают свою жизнь распадом, причем остаются двойная система и отдельная звезда поля, так что представляется не-

удивительным, что доля тройных систем относительно двойных столь невелика — от  $1/3$  до  $1/4$ .

Из приведенных выше аргументов становится очевидным, что наиболее частая форма четверных систем, в которых две тесных пары звезд гравитационно связаны друг с другом, причем расстояние между парами гораздо больше расстояния между компонентами в каждой паре, также является квазиустойчивой. Действительно, звезда Кастор ( $\alpha$  Близнецов) иллюстрирует этот случай в особенно яркой форме. Она состоит из шести компонентов, составляющих три спектрально-двойных, которые мы обозначим  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Их периоды обращения составляют соответственно 9, 2 и 0,8 суток. Двойная звезда  $B$  обращается вокруг двойной  $A$  с периодом в несколько сотен лет; двойная звезда  $C$  обращается вокруг системы  $A$  и  $B$  с периодом в несколько тысяч лет.

Возвращаясь опять к случаю тесной двойной, сопровождаемой удаленной третьей звездой, нетрудно видеть, что элементы орбиты спутника относительно главной звезды будут изменяться. Поскольку возмущающая функция задачи оказывается малой, можно использовать уравнения Лагранжа для построения общей теории возмущений, дающей изменения (коротко-, длиннопериодные и вековые) элементов орбиты. Преимущественно используются разложения, применяемые в теории Луны, что становится понятным, если напомнить, насколько полезными оказываются координаты Якоби как в теории Луны, так и в задаче трех тел.

Будет меняться и долгота периастра  $\omega$ . В частном случае компланарной тройной звезды, когда орбита третьей звезды — круговая с периодом  $T'$ , апсидальный период  $U'$  выражается через период тесной двойной  $T$  и массы компонентов как

$$T'/U' = \frac{0,75m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \frac{T}{T'} \right) + \text{члены высокого порядка.}$$

На практике обычно  $m_1/(m_1 + m_2 + m_3) \approx 1/3$  и  $T/T' < 10^{-2}$ , так что

$$T/U' = TT'/T'U' < 10^{-4},$$

что не пренебрежимо мало по сравнению с измеренными значениями  $T/U$ .

Литтлтон [6], Броун [3] и Копал [5] были в числе тех, кто занимался изучением гораздо более трудного случая задачи трех тел, когда орбита третьего тела эллиптическая и наклонена к плоскости орбиты тесной двойной, причем обе плоскости также наклонены к плоскости, касательной к небесной сфере наблюдателя. Мы ограничимся упоминанием, что орбитальный период тесной двойной также изменяется при наличии третьего тела.

### 14.13. Неточность ньютоновского закона тяготения

Можно показать, что в соответствии с законом гравитации Эйнштейна должно иметь место медленное вращение орбиты одной материальной точки относительно другой. Это истолкование необъяснимой до того невязки векового апсидального движения орбиты Меркурия стало одной из успешных проверок теории относительности Эйнштейна. В тесных двойных системах, даже если составляющие звезды являются в гравитационном смысле материальными точками, должно иметь место аналогичное релятивистское движение периастра. Согласно Копалу, отношение периода релятивистского движения апсид  $U''$  к орбитальному периоду  $T$  дается выражением

$$U''/T = 1,57 \times 10^5 A (1 - e^2)/(m_1 + m_2),$$

где массы  $m_1$  и  $m_2$  выражены в единицах массы Солнца,  $A$  — большая полуось орбиты двойной в единицах солнечного радиуса. Отсюда для тесной двойной с массивными компонентами  $T/U'' \approx \approx 10^{-5}$ ; таким образом, релятивистское движение апсид по порядку величины такое же, как и вызванное присутствием третьего тела.

### 14.14. Фигуры звезд в двойных системах

Если мы снова прибегнем к «мысленному эксперименту», рассмотрев широкую двойную систему с двумя невращающимися звездами, движущимися по эллипсам относительно их центра масс, то они будут сферической формы и взаимодействовать как материальные точки. Если уменьшить расстояние между компонентами, то период, разумеется, тоже уменьшится в соответствии с III законом Кеплера; наконец, наступит время, когда гравитационное взаимодействие между компонентами приведет к возникновению на них ощутимых приливов и каждая звезда окажется вытянутой вдоль прямой, соединяющей их центры. Если звезды еще и вращаются, то их фигуры будут сплющиваться, подобно фигуре Земли вследствие ее вращения. Копал предположил, что звезды в тесной двойной будут вращаться со скоростями, определяемыми максимальной угловой скоростью движения по орбите. Кривая блеска подобной затменной двойной звезды не содержала бы никаких прямолинейных участков (см. рис. 14.8).

Точно так же, как гравитационный потенциал Земли описывается разложением в ряды, гармонические постоянные которых можно оценить из наблюдений изменений орбит искусственных спутников Земли, внешний гравитационный потенциал вращающейся и искаженной приливными воздействиями звезды можно выразить посредством подходящего разложения по гармоникам.

Таким же образом можно найти ряды, описывающие полный гравитационный потенциал, созданный обеими звездами. Эти ряды после вычитания потенциала системы, определяемого потенциалом двух материальных точек, описывают возмущающую функцию, которую следует использовать в уравнениях Лагранжа для планет, определяющих возмущения элементов орбиты. В частности, линия апсид смещается с вековой скоростью, видоизмененной периодическими колебаниями малой амплитуды.

При определенных упрощающих предположениях вековая скорость движения линии апсид за один оборот  $\Delta\omega$  определяется как

$$\Delta\omega = 2\pi \left\{ k_{12} r_1^5 \left[ \frac{m_2}{m_1} h_2(e) + g_2(e) \right] + k_{22} r_2^5 \left[ \frac{m_1}{m_2} h_2(e) + g_2(e) \right] \right\}, \quad (14.26)$$

где

$$\begin{aligned} h_2(e) &= 15f_2(e) + g_2(e), \\ f_2(e) &= (1 - e^2)^{-5} (1 + 3e^2/2 + e^4/8), \\ g_2(e) &= (1 - e^2)^{-2}, \\ k_{i2} &= [3 - y_2(r_i)] / [4 + 2y_2(r_i)], \\ & i = 1, 2, \end{aligned}$$

а  $y_2(r_i)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$r \frac{dy_2}{dr} + y_2^2 - y_2 - 6 - 6 \frac{\rho}{\bar{\rho}} (y_2 + 1) = 0.$$

Плотность звезды  $\rho$  является функцией  $r$ , в то время как  $\bar{\rho}$  — это средняя плотность звезды. Величина  $r$  меняется от 0 до  $r_i$  (относительный радиус звезды);  $y = 0$  при  $r = 0$ .

Следовательно, параметры  $k_{12}$ ,  $k_{22}$  — это величины, зависящие от внутреннего строения звезды; они равны нулю, если звезды — материальные точки, и равны 0,75, когда звезды — однородные шары. Члены  $f_2(e)$  и  $g_2(e)$  появляются вследствие приливных и вращательных искажений фигур звезд соответственно.

Определим  $\bar{k}_2$  как

$$\bar{k}_2 = \frac{c_1 k_{12} + c_2 k_{22}}{c_1 + c_2},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты при  $k_{12}$  и  $k_{22}$  в (14.26);  $\bar{k}_2$  — это величина, которая фактически определяется на практике из наблюдений скорости движения линии апсид. Это дает нам информацию о внутреннем строении компонентов двойных; путем сравнения со значениями, рассмотренными на основе различных моделей звезд, мы получаем данные об эволюции звезд в двойных системах.

Если период вращения линии апсид, вызванный фигурами звезд, равен  $U''$ , тогда  $T/U'' = \Delta\omega/2\pi$ , так что

$$\bar{k}_2 = \frac{T/U''}{c_1 + c_2}.$$

Типичное значение  $\bar{k}_2$  из астрофизических теорий составляет  $10^{-2}$ , в то время как  $(c_1 + c_2)$  обычно лежит между  $10^{-2}$  и  $10^{-3}$ . Отсюда следует, что значение  $T/U''$  заключено между  $10^{-4}$ — $10^{-5}$ . Мы видим, что присутствие третьего тела, релятивистский гравитационный эффект и отклонение компонентов двойной от формы, определяемой потенциалом материальных точек, дают достаточно заметные вклады в движение линии апсид.

### 14.15. Пределы Роша

Рассмотрим теперь тесную двойную систему в свете ограниченной задачи трех тел. Возвращаясь к разд. 5.9.3, напомним, что поверхность нулевой скорости определяется значением постоянной Якоби, которая в свою очередь зависит от начальных положения и скорости частицы пренебрежимо малой массы. При различных значениях  $C$  поверхность состоит из двух полостей, каждая из которых окружает тело конечной массы, причем большие по размеру полости окружают большую массу. Для определенного значения  $C$  полости соединяются в лагранжевой точке либрации  $L_2$ , находящейся между конечными массами. Если в качестве двух массивных тел взять два компонента двойной системы, то эта характерная поверхность нулевой скорости, окружающая оба компонента, часто называется *пределом Роша* и позволяет сделать целый ряд выводов. Следуя Копалу [5] мы видим, что эта поверхность определяет верхний предел размеров компонента. Если частицы во внешних слоях компонента двойной имеют энергии, превышающие это предельное значение  $C$  и пересекают поверхность нулевой скорости, то они могут войти в полость, окружающую другую звезду, или стать частью облака вещества, окружающего обе звезды, или даже покинуть систему вообще.

Если звезда внутри полости простирается до ее границ, то частицам самых наружных ее слоев потребуется очень незначительная кинетическая энергия, чтобы покинуть звезду совсем. Поэтому Копал подразделил все двойные на три класса:

- 1) системы, в которых ни одна звезда не заполняет своей полости;
- 2) системы, в которых один компонент целиком заполняет свою полость;
- 3) системы, в которых оба компонента заполняют свои полости.

Хотя в наружных слоях звезды действуют магнитогидродинамические силы и хотя, строго говоря, интеграл Якоби справедлив лишь в круговой ограниченной задаче, в которой обе конечные массы действуют как материальные точки, описанная модель, по-видимому, неплохо согласуется с реальностью. Например, известно, что в двойных системах типа Альголя спутники заполняют полости Роша; согласно Бэттену [2], ни в одной из хорошо известных систем не обнаружено, что какой-либо компонент по размерам превышает соответствующую полость.

Внешние слои атмосферы звезды будут иметь тенденцию вытягиваться, если составляющие их частицы близки к поверхности нулевой скорости, или если поверхности расширяются и сокращаются вследствие эксцентриситета орбиты двойной, или если время от времени происходят взрывные выбросы, как скорее всего действительно имеет место у некоторых звезд. Таким образом, в двойной системе с эксцентричной орбитой больший по размерам спутник может находиться внутри своей полости Роша в апоастре орбиты, но переполнять свою поверхность нулевой скорости в периастре, так что вещество его атмосферы будет истекать через горловину поверхности, открывающуюся в лагранжевой точке  $L_2$ .

В соответствии со стандартной теорией внутреннего строения звезд и их эволюции, звезды будут увеличиваться в размерах, по мере того как они будут растрчивать свои запасы водорода в ядрах; их радиусы будут возрастать от 10 до  $10^3$  раз. Звезда в двойной системе, проходящая эту стадию своей эволюции, может заполнить и даже переполнить свой предел Роша, а на ее компаньона затем выпадет большая часть избытка вещества. Такой процесс показывает, что тесные двойные из-за своей близости не могут рассматриваться как изолированные тела — ни с точки зрения астрофизики, ни теории тяготения. Они не только искажают фигуры друг другу и обмениваются газом, но и влияют на эволюцию друг друга.

#### 14.16. Вещество, окружающее звезды

В свете сказанного выше ясно, что с обоими членами тесной двойной системы может быть связано вещество, окружающее эту двойную. Это вещество было действительно обнаружено при изучении многих двойных. Оно может иметь форму газовых потоков, дисков, оболочек или облаков, окружающих оба компонента. Присутствие подобных образований обнаруживается по дополнительным линиям излучения или поглощения в спектрах этих двойных, по возмущениям измеренных лучевых скоростей, определяющих кривые скоростей компонентов и по видоизменению кривых блеска.



Бэттен [1] предложил общую модель, которая может описать любую систему, содержащую околозвездное вещество; правда, индивидуальные детали будут играть для отдельных систем более или менее важную роль. Он предложил определить *характерный объем* для двойной системы — цилиндр, радиус которого вдвое превышает большую полуось орбиты, с центром в центре масс системы и простирающийся вверх и вниз на расстояние, равное радиусу меньшего компонента. Цилиндрическая форма была выбрана потому, что во многих системах, например у двойных

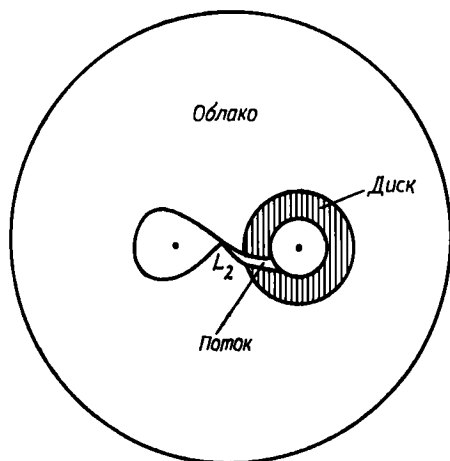


Рис. 14.14.

типа Алголя, околозвездное вещество скорее всего концентрируется в плоскости орбиты или вблизи нее. Разумеется, последнее необязательно, и в других системах, по-видимому, масса может быть распределена более изотропно, так что форму окружающую звезду облака лучше представит сфероид. Помимо самих звезд, внутри характерного объема можно выделить три особенности. Могут существовать *потоки*, текущие от одной звезды к другой. Поток газа может выбрасываться из компонента через лагранжеву точку  $L_2$ ; частицы газа движутся по траекториям, определяемым энергиями частиц и притяжением звезд. Эти потоки заканчиваются на другой звезде или вливаются в *диски*. Диск может окружать одну или обе звезды. Диск лежит в плоскости орбиты и гравитационно связан со звездой, которую он окружает; он перемещается вместе со звездой, по мере того как она движется по своей орбите относительно центра массы системы.

Третьей особенностью является *облако* газа, окружающее оба компонента и распределенное, грубо говоря, внутри характерного объема системы. Более разреженное, чем средний поток

или диск, оно может иметь собственное вращение, причем частицы газа, из которого оно состоит, будут двигаться по собственным сложным орбитам под действием притяжения обеих звезд. Сами компоненты двойной также будут двигаться сквозь это облако.

Околос звездное вещество во всех его формах — потоках, дисках или облаке — должно влиять на элементы орбиты двойной звезды. Мы видели в гл. 10, что атмосферное торможение действует на орбиту искусственного спутника Земли, уменьшая вековым образом ее эксцентриситет и большую полуось, а следовательно, и период обращения. Воздействие первого порядка на долготу перигея невелико и носит периодический характер. Путем анализа аналогичные эффекты были обнаружены и в соответствующих элементах орбит двойных звезд, что вызвано сопротивлением газового облака, окружающего компоненты двойной звезды.

Перенос массы между компонентами или потеря массы из звездной системы также вызывает изменения элементов орбиты. Это гораздо более сложная динамическая задача, чем задача учета сопротивления окружающего звезду газа. Период обращения может вековым образом увеличиваться или уменьшаться в зависимости от характеристик потока массы. Самым простым оказывается случай изотропной потери массы из системы.

Согласно закону Кеплера,

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = G(m_1 + m_2) = GM.$$

Это дает (при постоянной большой полуоси  $a$ ) следующую зависимость между изменением периода  $\Delta T$  и потерей массы  $\Delta M$ :

$$\Delta T/T = -\Delta M/2M.$$

Вуд [7] предположил, что резкое изменение периода могло бы иметь место в том случае, когда один из компонентов теряет массу в результате взрывного выброса вещества с высокой скоростью. Для изменения периода на 1 с требуется потеря  $\sim 10^{-7}$  солнечной массы. Даже если масса просто переносится от одного компонента к другому, все равно период может измениться. Поскольку нет сомнений, что во многих тесных двойных перенос массы каждый год достигает  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  солнечной массы, некоторые резкие изменения периода могут действительно быть связаны с эруптивным поведением. Если же имеет место непрерывное истечение вещества в виде потока, то можно показать, что при сохранении общей массы и общего момента количества движения справедливо соотношение

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{3(2\mu - 1)}{\mu(1 - \mu)} \frac{\Delta M}{M},$$

где  $\mu = m_2/M$ , а  $m_2$  — масса растущего компонента. Поскольку предполагается  $\Delta M > 0$ , то период увеличивается или уменьшается в соответствии с тем, переносится ли масса от менее массивного к более массивному компоненту, или наоборот.

## 14.17. Образование двойных систем

До сих пор не вполне ясно, как формируются двойные системы. Это никак не может устроить нас, когда мы вспомним, что свыше половины звезд являются членами двойных систем. По меньшей мере в трех теориях двойным системам уделяется много внимания, и вполне вероятно, что не все двойные имеют один и тот же характер образования.

Одна теория, опирающаяся на многочисленные исследования с помощью ЭМВ моделей звездных скоплений, состоящих из небольшого числа звезд, позволяет предположить, что звезды формируются из межзвездной среды в виде небольших групп. В следующей главе мы увидим, что подобные группы обычно проявляют тенденцию к неустойчивости. Некоторые звезды ускользают из групп, и возникают одна или больше двойных систем. Тройные и более высокого порядка подсистемы могут возникать подобным же путем. Кроме того, было высказано предположение, что, когда исходная группа звезд конденсируется из межзвездного облака, некоторые пары оказываются настолько тесными, что они почти сразу оказываются связанными гравитационно. Теория правдоподобна, но не объясняет существование такого большого количества очень тесных двойных.

Вторая теория — это теория деления; она также явилась темой многих исследований. Согласно этому сценарию, быстро вращающаяся звезда становится неустойчивой и распадается, образуя тесную двойную систему. Здесь было бы неуместно приводить многочисленные доводы в пользу этой теории и против нее. Однако несомненно одно: не все двойные системы могли образоваться путем деления, даже если предположить существование какого-либо механизма, обеспечивающего взаимное удаление первоначально весьма близких друг к другу компонентов, возникающих в результате деления.

Третья теория представляется наиболее предпочтительной из всех. Согласно ей, в общем поле звезд две звезды могут оказаться на орбитах друг относительно друга при тесном сближении. Мы уже видели, что космический корабль, приближающейся к планете по гиперболической траектории, затем удаляется от нее (при наличии положительной энергии) по другой ветви гиперболы. Для того чтобы быть захваченным планетой, корабль должен потерять избыток кинетической энергии. Для этой цели на корабле используется ракетный двигатель; в случае

пары звезд избыток энергии должен быть удален с помощью третьего тела. Шмидт показал, что эту роль может выполнить центральное вздутие Галактики; в других работах эту роль выполняет третья звезда или местная межзвездная среда. Вероятность такого процесса, однако, весьма невелика. Теория заведомо не объясняет большое число существующих двойных звезд или разделение их компонентов и эксцентриситеты орбит; она оказывается еще менее правдоподобной, если применить ее методы для оценки числа тройных и более высокого порядка систем.

## Задачи

14.1. Наблюдаемая в телескоп звезда представляется в виде тесной двойной с блеском компонентов в  $8,3^m$  и  $7,6^m$ . Каков будет блеск звезды, если она окажется неразрешенной?

14.2. Затменная двойная имеет постоянный видимый блеск  $4,35^m$  между минимумами и видимый блеск  $6,82^m$  в главном минимуме. Предполагая, что затмение в главном минимуме полное, вычислите блеск и относительные светимости компонентов.

14.3. Следующие данные характеризуют двойную систему Геркулеса: орбитальный период 34,4 года, параллакс  $0,10''$ , угловой размер большой полуоси относительной орбиты  $1,35''$ , угловой размер большой полуоси орбиты главной звезды относительно центра масс  $0,57''$ . Вычислите массы обоих компонентов в единицах массы Солнца.

14.4. Двойная звезда Капелла имеет общий блеск  $0,21^m$ ; два компонента различаются по блеску на  $0,5^m$ . Параллакс Капеллы  $0,063''$ . Вычислите звездные величины обоих компонентов.

14.5. Два компонента двойной звезды имеют примерно равные светимости. Их максимальное разделение  $1,3''$ , период 50,2 года. Составной спектр показывает двойные линии с максимальным разделением  $0,18 \text{ \AA}$  при  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Предполагая, что плоскость орбиты содержит линию зрения, рассчитайте 1) полную массу системы в солнечных массах, 2) параллакс системы.

14.6. Истинный период затменной двойной системы равен 3,12 суток; ее скорость по лучу зрения (направленная от Солнца) равна 30 км/с. Покажите, что видимый период больше истинного на 27 с.

14.7. Центр масс спектрально-двойной звезды не имеет лучевой скорости относительно Солнца. Покажите, что гелиоцентрическая лучевая скорость  $R$  одного компонента двойной выражается как

$$R = \frac{na \sin i}{(1 - e^2)^{1/2}} [\cos(\omega + f) + e \cos \omega],$$

где  $n$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $i$  и  $\omega$  — среднее движение, большая полуось, эксцентриситет, наклонение и аргумент периастра,  $f$  — истинная аномалия; элементы орбиты определены для барицентрической орбиты (т. е. относительно центра масс).

14.8. Рассчитайте динамический параллакс визуальной двойной звезды, зная, что период обращения компонентов 67,4 года, угловой размер большой полуоси орбиты  $3,14''$ , видимый блеск компонентов  $4,15^m$  и  $6,35^m$ .

## Литература

1. *Batten A. H.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **82**, 574, 1970.
2. *Batten A. H.* Binary and Multiple Systems of Stars. Oxford, Pergamon, 1973. [Имеется перевод: *Бэттен А.* Двойные и кратные звезды. — М.: Мир, 1976.]
3. *Brown E. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **97**, 56, 62, 1936.
4. *Brown E. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **97**, 116, 388, 1937.
5. *Kopal Z.* Ann. Astrophys., **18**, 379, 1955.
6. *Lytleton R. A.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **95**, 42, 1934.
7. *Wood F. B.* Astrophys. J., **112**, 196, 1950.

## Рекомендуемая литература

- Aitken R. G.* The Binary Stars. New York, McGraw-Hill, 1935.
- Cowling T. G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **98**, 734, 1938.
- Gyldenkerne K., West R. M. (eds.)*. Mass Loss and Evolution in Close Binaries. IAU Colloquium, No. 6, Copenhagen University Observatory, 1970.
- Kopal Z.* The Computation of Elements of Eclipsing Binary Systems. Harvard Observatory Monograph, Cambridge, Mass., No. 8, 1950.
- Kopal Z.* Close Binary Systems. London, Chapman and Hall, 1959.
- Russel H. N., Moore C. E.* The Masses of The Stars, Princeton University Press, 1939.
- Smart W. M.* Textbook on Spherical Astronomy. London, Cambridge University Press, 1956.
- Sterne T. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **99**, 451, 1939.

## Звездные системы многих тел

### 15.1. Введение

В этой главе мы переходим от динамических моделей с малым числом  $n$  притягивающихся тел к моделям с большим  $n$  ( $10^2$ — $10^3$  для рассеянных или движущихся скоплений,  $10^4$ — $10^6$  для шаровых скоплений, от  $10^7$  до  $10^{11}$  для галактики).

Помимо случая небольших рассеянных скоплений, мы сосредоточим внимание на задачах, в которых оказываются применимыми статистические методы, поскольку число рассматриваемых частиц достаточно велико. Ввиду этого здесь могут быть применены методы статистической механики; кроме того, оказывается возможным показать, что система тяготеющих тел должна подчиняться условиям, аналогичным условиям поведения непрерывной среды, так что возможен и гидродинамический подход.

Именно с этих позиций мы рассмотрим аналогию звездной системы с газом. Классический подход трактует газ как ансамбль молекул, свойства которых описываются кинетической теорией газов, причем молекулярные движения подчиняются максвелловскому распределению скоростей. При втором подходе мы пренебрегаем тем, что газ состоит из многих дискретных частиц, движущихся друг относительно друга и сталкивающихся между собой, и рассматриваем его (т. е. звездную систему) как непрерывную среду с присущими ей плотностью, давлением и вязкостью, причем свойства этой среды описываются гидродинамической теорией.

Впрочем, возможен и подход, при котором используется небесная механика и рассматриваются орбиты отдельных звезд в исследуемой звездной системе. Этот подход также проливает свет на строение, эволюцию и устойчивость подобных звездных систем. В нашем изложении ввиду недостатка места мы не можем с достаточной полнотой обсудить звездную кинематику и динамику. Все, что мы можем сделать, — это рассмотреть некоторые общие особенности и теоремы динамики многих тел и упомянуть важнейшие результаты.

## 15.2. Сфера действия

При исследовании межпланетных полетов мы уже видели, сколь полезным оказалось понятие сферы действия, т. е. объема пространства, окружающего планету, в пределах которого космический корабль по существу движется по планетоцентрической орбите, возмущаемой Солнцем, но вне которой корабль движется по межпланетной гелиоцентрической орбите. Мы можем применить эту концепцию и к случаю звезды в звездной системе. Если последняя имеет примерно сферическую форму, то ее суммарное гравитационное поле приближенно эквивалентно полю материальной точки, расположенной в центре скопления, причем масса этой точки равна сумме масс всех звезд скопления. Пусть последняя равна  $M$ ; масса звезды на окраине звездной системы на расстоянии  $R$  от центра скопления равна  $m$ ; тогда в силу соотношения (5.70) радиус сферы действия определяется как

$$r = R (m/M)^{2/5}.$$

Рассмотрим два примера:

1) Для шарового скопления  $m/M \approx 10^{-6}$ .  $R \approx 10$  пс. Отсюда  $r \approx 0,04$  пс  $\approx 8000$  астрономических единиц (а. е.).

2) Для центрального ядра Галактики и Солнца  $m/M \approx 10^{-11}$  и  $R \approx 10^4$  пс; отсюда  $r \approx 0,04$  пс  $\approx 80\,000$  а. е.

Как на окраинах шарового скопления, так и в окрестностях Солнца среднее удаление  $d$  звезд друг от друга (исключая двойные звезды) порядка 4 пс. Следовательно, мы видим, что силовое поле скопления, с одной стороны, и галактического ядра — с другой, всегда доминирует, если только две звезды не сближаются тесно друг с другом. Другими словами, если исключить тесные сближения, то орбита звезды в галактике или в скоплении не возмущается сколько-нибудь значительно притяжением отдельных звезд. Нетрудно видеть, что этот аргумент сохраняет справедливость и для звезд внутри скопления или галактического ядра.

Насколько же часто происходят тесные сближения звезд? Обозначая через  $q = (4/3)\pi r^3$  объем сферы тесного сближения, через  $d$  — среднее расстояние между звездами и через  $\nu (= d^{-3})$  — звездную плотность, мы получаем, что вероятность  $p_k$   $k$ -кратного тесного сближения определяется по формуле Пуассона как

$$p_k = \frac{1}{k!} (\nu q)^k e^{-\nu q}.$$

Теперь

$$\nu q = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{r}{d} \right)^3 \approx 4 \cdot 10^{-6}.$$

Мы видим, что, за исключением парных тесных сближений, маловероятных самих по себе, кратные тесные сближения в звездной системе практически не имеют места, и ими можно пренебречь.

Малые возмущения будут иметь место непрерывно и случайным образом, по мере того как звезда движется по своей орбите. Эти возмущения вызываются далекими сближениями с другими звездами, и возмущение будет тем меньше, чем более далеким оказывается сближение. Будучи малыми, эти возмущения производят очень незначительные воздействия, но существует определенная статистическая вероятность того, что скорость звезды может заметно измениться из-за многократных, повторяющихся далеких сближений. В следующем разделе мы рассмотрим эффекты подобных сближений.

### 15.3. Парные сближения

Предположим, что две звезды  $S_1$  и  $S_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  проходят настолько близко друг к другу, что их орбиты подвергаются взаимным возмущениям. В соответствии с результатами

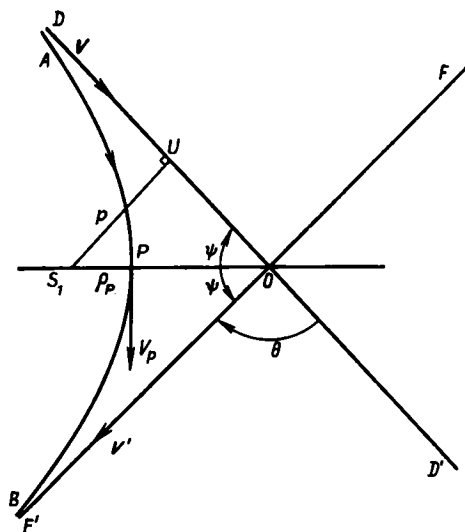


Рис. 15.1.

гл. 4 можно рассматривать данный случай как сближение  $S_2$  с  $S_1$  по гиперболической орбите. Звезда  $S_2$  приближается из бесконечности с первоначально невозмущенной скоростью  $V$  по гиперболе  $APB$  (рис. 15.1), достигает перигея  $P$  на расстоянии  $\rho_p$  от  $S_1$  и удаляется по ветви гиперболы  $PB$ .



Проведем на рис. 15.1 асимптоты гиперболы  $DOD'$  и  $FOF'$ ; тогда видно, что эффект звездного сближения сводится к преобразованию вектора относительной скорости  $V$ , направленного вдоль  $DOD'$ , в вектор скорости  $V'$ , направленный вдоль  $FOF'$ , причем  $|V| = |V'|$  и первоначальное направление  $DOD'$  поворачивается на угол  $D'OF'$ , который мы будем обозначать через  $\theta$ .

Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) = \operatorname{ctg} \psi = a/b = (e^2 - 1)^{-1/2}; \quad (15.1)$$

здесь мы использовали результаты, полученные в разд. 4.8. Далее, если  $\rho_p$  и  $V_p$  соответственно расстояние перигентра и скорость, то

$$\rho_p = a(e - 1), \quad V_p^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{e + 1}{e - 1} \right),$$

где  $\mu = G(m_1 + m_2)$ , что дает

$$V_p^2 = \mu(e + 1)/\rho_p. \quad (15.2)$$

Используем интеграл энергии

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu}{\rho_p} = C, \quad (15.3)$$

где  $C$  — постоянная энергия; тогда, подставляя в (15.3) значение  $V_p^2$  из (15.2), получаем

$$e - 1 = V^2 \rho_p / \mu. \quad (15.4)$$

Но в силу сохранения момента количества движения

$$\rho_p V_p = pV.$$

Здесь  $p = S_1 U$  — самое тесное прохождение звезд друг относительно друга (при условии, что они не касаются друг друга). Отсюда из (15.2) имеем

$$\rho_p = p^2 V^2 / [\mu(1 + e)],$$

и подстановка в (15.4) выражения

$$e^2 - 1 = V^4 p^2 / \mu^2$$

дает с учетом (15.1)

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \mu / V^2 p. \quad (15.5)$$

Эта формула, полученная в 1928 г. Джинсом [3] совместно с формулой, определяющей абсолютную величину  $\Delta V$  изменения вектора скорости, содержит всю необходимую информацию. Сам

вектор изменения скорости  $\Delta V$  получается путем следующего рассмотрения. В треугольнике  $ABC$  (рис. 15.2)  $AB$  и  $AC$  изображают начальный и конечный векторы скорости  $V$  и  $V'$ , угол между которыми равен  $\theta$ . Тогда вектор  $\Delta V$  изображается отрезком  $BC$ , и легко показать, что по абсолютной величине

$$\Delta V/V = 2 \sin (\theta/2). \quad (15.6)$$

Рассмотрим теперь величину скорости таких сближений. Пусть звезда  $S$  движется со скоростью  $V$  через объем, занятый другими звездами (в предположении, что они покоятся);  $\nu$  — звездная плотность. Тогда вектор скорости  $V$  и все расстояния  $\rho$ , перпендикулярные к вектору скорости, определяют цилиндрический объем, все звезды в пределах которого испытывают сближение с  $S$  при невозмущенном расстоянии сближения, меньшем чем  $\rho$ . Следовательно, за единицу времени число подобных сближений равно

$$\pi \rho^2 \nu V, \quad (15.7)$$

а обратное значение этой величины дает нам  $\tau$  — средний интервал времени между сближениями. Отсюда

$$\tau = 1/\pi \rho^2 \nu V. \quad (15.8)$$

Величина  $l = \tau V = 1/\pi \rho^2 \nu$  определяется как *средний свободный пробег* звезды для данного значения  $\rho$ ; она представляет собой среднее расстояние, которое пройдет звезда между последовательными сближениями.

Теперь используем некоторые численные значения. Следуя Джинсу, назовем сближение очень тесным, если угол отклонения превышает  $90^\circ$ . Полагая в качестве типичных значений  $V = 20$  км/с и  $\nu = 10^{-1}$  звезд в 1 куб. парсеке (принимая, что каждая звезда имеет, грубо говоря, солнечную массу), мы подставляем  $\theta = 90^\circ$  в (15.5) и (15.6). Из которого соотношения имеем

$$\rho = \mu/V^2;$$

из второго

$$\Delta V = (2V^2)^{1/2}.$$

Тогда для очень тесного сближения находим  $\rho = 4,5$  а. е.,  $l = 6,7 \cdot 10^9$  пс и  $\tau = 2,9 \cdot 10^{14}$  лет. Поскольку диаметр Галактики и ее возраст порядка  $3 \cdot 10^4$  пс и  $10^{10}$  лет соответственно, то видно, что очень тесные сближения по существу никогда не имеют места. В табл. 15.1 собраны только что полученные и другие результаты.

Радиус солнечной системы 40 а. е. Звезда, которая сблизится с Солнцем на такое расстояние, вызвала бы сильные возмущения

Таблица 15.1

	Очень тесные	Тесные	Умеренно близкие	Нормальные
$\rho$ , а. е.	4,4	40,0	508,1	7000
$\theta$	$90^\circ$	$12,7^\circ$	$1^\circ$	$0,036^\circ$
$\tau$ , годы	$3,37 \cdot 10^{14}$	$4,14 \cdot 10^{12}$	$2,56 \cdot 10^{10}$	$1,35 \cdot 10^8$
$l$ , пс	$6,88 \cdot 10^9$	$8,46 \cdot 10^7$	$5,24 \cdot 10^5$	$2,77 \cdot 10^3$
$\Delta V/V$	1,41	0,22	0,017	0,0013

орбит планет. Тем не менее мы видим, что вероятность такого события исключительно мала. Даже «нормальные» сближения, приводящие две звезды на расстояние друг от друга, составляющее 7000 а. е., происходят не чаще чем дважды для одной звезды за один период вращения Галактики. Возмущения от подобного сближения весьма невелики.

Напомним, что мы могли бы рассмотреть импульсное включение ракетного двигателя (т. е. такое, что при этом происходит изменение скорости, но местоположение за время работы двигателя не изменяется), если время работы двигателя мало по сравнению с периодом обращения по орбите. Совершенно аналогично эффект звездного сближения может также трактоваться как импульсный процесс, приводящий к изменению скорости, но не влияющий на координаты звезды. Это становится очевидным, если заметить, что продолжительность сближения приблизительно определяется временем, которое необходимо телу, имеющему скорость  $20 \text{ км/с} = 4,22 \text{ а. е./год}$ , чтобы пройти расстояние порядка 7000 а. е. Это число (1659 лет) весьма мало по сравнению с периодом вращения Галактики, который составляет  $\sim 250 \cdot 10^6$  лет.

#### 15.4. Накапливающийся эффект малых сближений

Рассмотрим теперь накапливающийся эффект многих таких слабых (далеких) сближений на пути, который проходит звезда. Поскольку сближение далекое,  $\theta$  мало, и мы можем положить  $\sin(\theta/2) \approx \text{tg}(\theta/2)$ . Тогда из (15.5) и (15.6) мы имеем

$$\Delta V/V = 2\mu/V^2\rho. \quad (15.9)$$

где, как и раньше,  $\mu = G(m_1 + m_2)$ .

Отсюда следует интересный результат: если звезда проходит через звездное скопление, то эффект от звезд скопления может оказаться аддитивным. Следовательно, если  $V$  и  $\rho$  — средняя относительная скорость и расстояние сближения звезды относительно звезд скопления соответственно, то совокупный эффект

сближения с облаком оказывается  $N$ -кратным эффектом от единичной звезды скопления, имеющей среднюю массу; здесь  $N$  — число звезд в скоплении. Облака межзвездной пыли, масса которых может достигать  $10^5$  масс Солнца, также могут действовать как возмущающие объекты.

Если же рассматривать накапливающийся эффект от звезд, не входящих в скопления, то его влияние на звезду можно найти с помощью следующей аргументации, развитой Джинсом. За единицу времени число сближений, приводящих к отклонениям, превышающим  $\theta$ , согласно (15.7) определяется как

$$\pi r^2 v V. \quad (15.10)$$

Но в силу (15.5)

$$\text{ctg}(\theta/2) = V^2 \rho / \mu, \quad (15.11)$$

так что число сближений за единицу времени с учетом (15.10) и (15.11) будет

$$\frac{\pi v \mu^2}{V^3} \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Если продифференцировать это выражение, что получится число сближений за единицу времени, приводящих к отклонениям, заключенным между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ ; оно равно

$$\frac{\pi v \mu^2}{V^3} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta.$$

И снова, раз  $\theta$  мало, можно положить  $\cos(\theta/2) = 1$  и  $\sin(\theta/2) = \theta/2$ ; это дает  $(8\pi v \mu^2 / V^3) d\theta$ . Согласно теории ошибок, поскольку малые отклонения  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  являются случайными величинами, они должны складываться в соответствии с законом ошибок. Следовательно, полное вероятное отклонение  $\Theta$  определяется как

$$\Theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots$$

Пусть  $\theta_1, \theta_2, \dots$  — отклонения, за время  $t$  заключенные между двумя пределами  $\alpha$  и  $\beta$ . Интегрируя, мы получаем

$$\Theta^2 = \frac{8\pi v \mu^2 t}{V^3} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\theta}$$

или

$$\Theta^2 = \frac{8\pi v \mu^2 t}{V^3} \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (15.12)$$

Верхний предел  $\beta$  можно взять равным  $\pi/2$ . Значение нижнего предела  $\alpha$  определяется путем учета того обстоятельства, что выражение (15.12) точно лишь в том случае, если отклонения  $\theta_1, \theta_2, \dots$  являются независимыми величинами. Но если минималь-

ное значение  $\theta$  очень мало, то соответствующее расстояние теснейшего сближения должно быть большим. Если же это действительно так, то вполне вероятно, что в пределах этого расстояния окажутся несколько звезд; вызываемые ими небольшие отклонения будут стремиться уничтожить друг друга.

Поэтому следует выбрать нижний предел таким, чтобы он соответствовал расстоянию, сравнимому со средним расстоянием между соседними звездами. Вот почему за это расстояние можно выбрать величину  $v^{-1.3}$ .

Поскольку  $\theta$  очень мало, уравнение (15.5) принимает вид

$$\theta = 2\mu/V^2\rho.$$

Отсюда можем написать

$$\alpha = 2\mu v^{1/3} V^2.$$

Подставляя сюда разумные значения  $V = 20$  км/с,  $v = 10^{-1}$  звезд на 1 куб. парсек и принимая, что звезды в среднем имеют солнечную массу, находим

$$\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5} \approx 4''$$

и

$$\Theta^2 \approx 3,14 \cdot 10^{-14} t \ln(\beta/\alpha). \quad (15.13)$$

Если эти малые отклонения в конце концов вызывают результирующее отклонение за время  $T$ , равное  $\pi/2$ , то значение  $T$  можно получить из (15.13), полагая  $\Theta = \pi/2$ , что дает

$$T = \frac{10^{14}\pi}{4 \ln(\beta/\alpha)} \text{ лет.}$$

Подставляя значения  $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5}$  и  $\beta = \pi/2$ , получаем минимальное значение для  $T$ ; отсюда  $T > 7 \cdot 10^{12}$  лет.

Таким образом, эффекты звездных сближений пренебрежимо малы для подавляющего большинства звезд, движущихся по орбитам, существенно не возмущенным ближайшими соседними звездами.

## 15.5. Некоторые фундаментальные принципы

Теперь мы рассмотрим некоторые фундаментальные концепции в свете проведенного выше рассмотрения.

Мы хотим знать, как эволюционирует звездная система. Предположим, что подавляющее большинство звездных систем, наблюдаемых во Вселенной (звездные скопления и галактики), обладают указанной выше особенностью. Следовательно, в любой момент состояние звездной системы оказывается почти равновесным. Подобное состояние системы именуется *квазистационарным*.

Итак, аналогично астрофизике, где эволюция звезды изучается путем рассмотрения упорядоченной последовательности звездных моделей, каждая из которых пребывает в равновесном состоянии, можно рассматривать модели звездных систем, каждая из которых находится в квазистационарном состоянии (т. е. в равновесии, которое изменяется лишь очень медленно).

В любой точке звездной системы звезды, расположенные поблизости, имеют скорости, которые распределены статистически относительно средней скорости (которая может быть равна нулю). Разность между скоростью звезды и средней скоростью именуется ее *остаточной скоростью*. Точка отсчета в пределах элемента объема, содержащего некоторое количество звезд и движущегося со средней скоростью звезд, называется *центроидом*.

Таким образом, несколько тысяч звезд в окрестностях Солнца (в том числе и само Солнце) образуют местную группу звезд; ее центроид движется со скоростью  $\sim 250$  км/с, орбитальной скоростью движения объектов на расстоянии почти  $10^4$  пс от галактического центра. Однако члены группы обладают собственными остаточными скоростями внутри группы (порядка 20 км/с) относительно центроида. Так называемое *движение Солнца* определяется по отношению к этому центроиду; следовательно, это и есть остаточная скорость Солнца.

Возвращаясь к аналогии с газом, напомним, что каждая точка потока газа характеризуется систематической (массовой) скоростью; в то же время индивидуальные молекулы в окрестностях этой точки имеют остаточные скорости, подчиняющиеся максвелловскому распределению в соответствии с кинетической теорией газов. В звездной кинематике обычным законом распределения является шварцшильдовский эллипсоидальный закон, частным случаем которого является максвелловское распределение.

Теперь введем еще дополнительно несколько важных терминов. Если пренебречь различием масс звезд (на практике это не вносит существенных изменений) и считать звезды материальными частицами, то состояние любой звезды определится ее координатами  $x, y, z$  и компонентами скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  относительно фиксированной системы прямоугольных координат. Фактически мы можем ввести вектор состояния  $s$  в 6-мерном фазовом пространстве с компонентами  $x, y, z, u, v, w$ . Этот вектор определяет точку в фазовом пространстве, описывающую состояние звезды в данный момент. Если известно распределение подобных точек в фазовом пространстве, то тогда известно и состояние звездной системы. Функция, описывающая такое распределение, называется *функцией фазовой плотности*. Когда эта функция определена, тогда из нее можно вывести другие величины, описывающие звездную систему.

Рассмотрим 6-мерный элемент объема  $dQ$  со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$ , который определяется следующим образом.

Все точки, определяемые теми векторами состояния, компоненты которых заключены в интервале между  $x$  и  $x + dx$ ,  $y$  и  $y + dy$ , ...,  $w$  и  $w + dw$ , будут находиться внутри объема  $dQ$  и определяют его. Пусть их число составляет  $dN$ . Тогда число точек (т. е. звезд) в единице объема в этой малой области равно  $dN/dQ$ . Эта фазовая плотность  $f$  будет изменяться от точки к точке в фазовом пространстве; поэтому она является функцией  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Если звездная система эволюционирует, то эта плотность будет также зависеть от времени. Отсюда

$$dN/dQ = f(x, y, z; u, v, w; t)$$

или

$$dN = f(x, y, z; u, v, w, t) dQ. \quad (15.14)$$

Можно определить еще две другие функции, связанные с фазовой плотностью, а именно функцию звездной плотности и функцию распределения скоростей. *Функция звездной плотности*  $\nu$  — это число звезд на единицу объема в рассматриваемой точке (т. е. в точке с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Поэтому она определяется выражением

$$dn = \nu(x, y, z; t) dx dy dz$$

или

$$dn = \nu(x, y, z; t) dq, \quad (15.15)$$

где  $dq = dx dy dz$ . Ясно, что между функцией звездной плотности и функцией фазовой плотности имеет место соотношение

$$\nu = \iiint f du dv dw; \quad (15.16)$$

интегрирование выполняется по всему пространству скоростей.

*Функция распределения скоростей* определяет распределение скоростей в элементе объема с центром в данной точке  $(x, y, z)$ , причем величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$  рассматриваются как параметры; можно сказать, что для данного положения эти «параметры» имеют постоянные значения. Если  $dp$  — элемент пространства скоростей, определяемый как  $dp = du dv dw$ , тогда  $dn/dp$  — это плотность точек в положении  $(x, y, z)$  в пределах элемента пространства скоростей, причем

$$dn/dp = f(x, y, z; u, v, w; t). \quad (15.17)$$

В дальнейшем мы вернемся к рассмотрению функции распределения скоростей.

## 15.6. Основные теоремы звездной динамики

Пусть  $U$  — гравитационный потенциал в точке звездного скопления, имеющей радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Тогда сила на единицу массы в этой точке имеет компоненты, определяемые уравнением  $\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U$ , или, переходя к прямоугольным осям,

$$\ddot{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (15.18)$$

Эти уравнения можно также записать в форме

$$\dot{u} = X, \quad \dot{v} = Y, \quad \dot{z} = Z, \quad (15.19)$$

где  $(x, y, z)$  и  $(u, v, w)$  могут рассматриваться как координаты и компоненты скорости звезды.

Через малый интервал времени  $dt$  координаты звезды и компоненты скорости примут значения  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(u_1, v_1, w_1)$  соответственно; тогда для координаты и соответствующей компоненты скорости мы можем написать

$$x_1 = x + u dt, \quad u_1 = u + \dot{u} dt = u + X dt. \quad (15.20)$$

Аналогичные соотношения записываются для координат  $y$  и  $z$  и соответствующих компонентов скорости.

Пусть звезды (числом  $dN$ ), которые занимали элемент объема фазового пространства  $dQ$ , теперь заполняют элемент объема  $dQ_1$ , причем

$$dQ = dx dy dz du dv dw$$

и

$$dQ_1 = dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1.$$

Теперь

$$dQ_1 = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)}{\partial(x, y, z, u, v, w)} dQ = J dQ.$$

Используя (15.20), можно выписать якобиан  $J$  в таком виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ \frac{\partial X}{\partial x} dt & \frac{\partial X}{\partial y} dt & \frac{\partial X}{\partial z} dt & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} dt & \frac{\partial Y}{\partial y} dt & \frac{\partial Y}{\partial z} dt & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x} dt & \frac{\partial Z}{\partial y} dt & \frac{\partial Z}{\partial z} dt & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$



В первом порядке по  $dt$  это выражение сводится к 1. Отсюда

$$dQ_1 = dQ. \quad (15.21)$$

Теперь с учетом (15.14) мы имеем

$$dN = f(x, y, z; u, v, w; t) dQ. \quad (15.22)$$

Полагая  $t_1 = t + dt$ , получаем

$$dN = f(x_1, y_1, z_1; u_1, v_1, w_1; t) dQ_1. \quad (15.23)$$

Разлагая (15.23), согласно теореме Тейлора, с точностью до членов первого порядка и сравнивая (15.22) и (15.23), находим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial u} + Y \frac{\partial f}{\partial v} + Z \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (15.24)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} = 0; \end{aligned} \quad (15.25)$$

как (15.24), так и (15.25) принимают форму уравнения Больцмана. При выводе формул мы молчаливо предполагали, что эффект сближения пренебрежимо мал по сравнению с эффектом от потенциала  $U$ , создаваемым системой как целым. Это эквивалентно пренебрежению столкновениями молекул в кинетической теории газов.

Введем теперь оператор  $D/Dt$ , определяемый соотношением

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{d_i x}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i};$$

здесь  $x_i$  поочередно обозначает  $x, y, z, u, v, w$ , а  $D/Dt$  — производная Стокса (т. е. полная производная по времени) функции в 6-мерном фазовом пространстве. Из уравнений (15.19) и (15.24) мы видим, что

$$Df/Dt = 0. \quad (15.26)$$

Теперь, поскольку число точек  $dN$  не меняется со временем, мы имеем

$$\frac{D}{Dt} (dN) = 0. \quad (15.27)$$

Но  $dN = f dQ$ , так что из уравнений (15.26) и (15.27) следует  $(D/Dt) dQ = 0$ ; это представляет собой повторение соотношения (15.21)

$$dQ_1 = dQ.$$

Это — формулировка теоремы Лиувилля, с которой мы уже встречались в гл. 5. Теорема утверждает, что при движении динамической системы любой объем фазового пространства остается неизменным.

### 15.6.1. Теорема Джинса

Уравнение (15.24) — дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в переменных  $x, y, z, u, v, w, t$ . Уравнения движения (15.18) можно переписать в форме

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{X} = \frac{dv}{Y} = \frac{dw}{Z} = dt. \quad (15.28)$$

Стандартным методом уравнения (15.24) является метод Лагранжа. Уравнения (15.28) образуют 6 независимых уравнений, так что число интегралов (15.28) равно шести. В общем случае они имеют форму

$$I_k(x, y, z; u, v, w; t) = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, 6), \quad (15.29)$$

где  $C_k$  — постоянные. Тогда общее решение дифференциального уравнения в частных производных (15.24) представляет собой произвольную функцию этих шести интегралов, т. е.

$$f = F(I_1, I_2, \dots, I_6), \quad (15.30)$$

где  $F$  — произвольная функция  $I_1, I_2, \dots, I_6$ .

Отсюда видно, что фазовая плотность  $f$  оказывается постоянной вдоль траектории звезды в фазовом пространстве; она является также функцией шести величин, которые остаются постоянными вдоль траектории звезды в фазовом пространстве. В этом и состоит теорема Джинса. С учетом уравнения (15.30) также видно, что координаты и компоненты скорости входят в выражение для фазовой плотности только в комбинациях, которыми являются интегралы движения.

Существует дальнейшее ограничение на фазовую плотность  $f$ . В гравитирующей системе с потенциалом  $U$ , определяемым самой системой, во всех точках системы должно удовлетворяться уравнение Пуассона. Если  $\rho$  — масса на единицу объема в точке  $(x, y, z)$ , то уравнение Пуассона можно записать в виде

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Предполагая снова, что все звезды имеют одинаковые массы  $m$ , мы с помощью (15.16) приходим к результату, что число звезд на единицу объема пространства оказывается функцией звездной плотности  $\nu$ , определяемой выражением

$$\nu = \iiint f du dv dw.$$

Тогда  $\rho = mv$ , что дает

$$\nabla^2 U = -4\pi m \iiint f \, du \, dv \, dw. \quad (15.31)$$

### 15.7. Некоторые частные случаи для звездной системы в стационарном состоянии

Если звездная система находится в стационарном состоянии, то ни фазовая плотность  $f$ , ни потенциал  $U$  не зависят явно от времени. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Из уравнения (15.16) также следует, что при  $\partial f / \partial t = 0$  мы получаем  $\partial v / \partial t = 0$  (т. е. функция звездной плотности  $v$  в любой точке не зависит от времени). После этого уравнения (15.24) и (15.28) сводятся соответственно к следующим:

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial u} + Y \frac{\partial f}{\partial v} + Z \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad (15.32)$$

и

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{X} = \frac{dv}{Y} = \frac{dw}{Z}.$$

Теперь существует только пять независимых интегралов, так что

$$f = F(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5),$$

причем

$$I_k(x, y, z, u, v, w) = C_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5).$$

Когда постоянным  $C_k$  придаются числовые значения, указанные интегралы определяют фазовую траекторию звезды.

Из уравнения (15.33) можно вывести интеграл энергии. Мы имеем

$$u \, du = X \, dx = \frac{\partial U}{\partial x} \, dx,$$

$$v \, dv = Y \, dy = \frac{\partial U}{\partial y} \, dy,$$

$$w \, dw = Z \, dz = \frac{\partial U}{\partial z} \, dz.$$

Складывая и интегрируя, получаем

$$I_1 \equiv u^2 + v^2 + w^2 - 2U = C_1 \quad (15.34)$$

или

$$I_1 \equiv V^2 - 2U = C_1, \quad (15.35)$$

где  $V$  — скорость.

Подавляющее большинство галактик имеют вращательную симметрию. Для таких звездных систем  $U$  оказывается функцией  $z$  и  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ;  $z$ -ось направлена вдоль оси вращения, а  $\rho$  — радиус в цилиндрических координатах. Следовательно,  $U = U(\rho, z)$ , откуда

$$x \frac{\partial U}{\partial y} = y \frac{\partial U}{\partial x}$$

или

$$xY = yX.$$

С учетом (15.23) имеем

$$Y du = X dv,$$

так что

$$y du = x dv,$$

что дает после интегрирования

$$I_2 \equiv yu - xv = C_2.$$

Итак, в случае звездной системы с вращательной симметрией, находящейся в стационарном состоянии, справедливо соотношение  $f = F(I_1, I_2)$ ; два интеграла в скобках — это интеграл энергии и интеграл момента количества движения.

Один из наиболее важных классов звездных систем включает все те системы, у которых распределение масс сферически-симметрично (например, шаровые скопления или эллиптические галактики типа E0 по классификации Хаббла, которые не имеют никакой видимой эллиптичности). В таком случае потенциал  $U$  оказывается функцией только расстояния  $r$  от центра системы, так что

$$U = U(r) = U[(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}].$$

В дополнение к интегралу энергии мы имеем теперь три интеграла момента количества движения:

$$I_2 \equiv y\omega - zv = C_3,$$

$$I_3 \equiv zu - x\omega = C_4, \quad (15.36)$$

$$I_4 \equiv xv - yu = C_5,$$

которые являются следствием возможности подстановки выражений

$$X = \frac{x}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad Y = \frac{y}{z} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad Z = \frac{z}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

в уравнение (15.33). Отсюда

$$f = F(I_1, I_2, I_3, I_4). \quad (15.37)$$

## 15.8. Вращение галактик

Форма Галактики (уплощенный диск с центральным вздутием и сферическое гало из звезд и шаровых скоплений) позволяет предположить, что Галактика — вращающаяся система. Наблюдения соседней галактики М31 в Андромеде указали на наличие у нее вращения, и в настоящее время нет сомнений в том, что подавляющее большинство звездных систем вращаются.

Посмотрим теперь, что понимать под вращением системы, состоящей из отдельных звезд, пыли и облаков газа. Даже если система в целом не обладает никакой угловой скоростью, звезды будут двигаться по своим индивидуальным орбитам. Например, в принципе возможно существование двух концентрических (с общим центром) систем, каждая из которых является точным зеркальным отражением другой, причем, хотя каждая система состоит из одинакового числа звезд, обращающихся вокруг общего центра в одном направлении, это направление движения звезд оказывается прямым для одной системы и обратным для другой. В любой точке общей системы мы поэтому обнаружим, что в элементе объема с центром в выбранной точке одна половина звезд будет двигаться в одну сторону, а вторая половина — в противоположную. Средняя скорость (или скорость центроида) была бы равна нулю, и мы бы сказали, что система в целом не показывает никаких следов вращения, поскольку скорости центроидов везде в системе оказываются равными нулю.

Поэтому при рассмотрении вращения звездной системы мы должны сосредоточить внимание на угловых скоростях центроидов. В частности, нам необходимо рассмотреть распределение угловых скоростей центроидов в системе. Если все они одинаковы, то система вращается как твердое тело; если же нет, то мы постараемся узнать, как меняется угловая скорость с расстоянием от центра системы.

### 15.8.1. Постоянные Оорта

Один из особенно плодотворных путей исследования галактического вращения был использован голландским астрономом Оортом [5–7]. Следуя его работам, мы рассмотрим только теорию первого порядка. Пусть  $S$  и  $X$  — положение в Галактике Солнца и звезды, соответственно,  $C$  — галактический центр (рис. 15.3). Пусть  $S$ , и  $X$  лежат в плоскости экватора Галактики на расстояниях  $R$  и  $R_1$  от Солнца и звезды соответственно. (Отметим, однако, что, строго говоря,  $S$  и  $X$  соответствуют центроидам групп звезд в окрестностях точек  $S$  и  $X$ ). Далее, пусть скорости  $V$  и  $V_1$  точек  $S$  и  $X$  будут скоростями центроидов, причем векторы обеих скоростей лежат в галактической плоскости.

Тогда

$$V = \omega R, \quad V_1 = \omega_1 R_1,$$

где  $\omega$  и  $\omega_1$  — угловые скорости  $S$  и  $X$  относительно галактического центра.

Примем, что расстояние  $r$  между  $S$  и  $X$  невелико, так что  $r/R \ll 1$ . Отсюда следует, что наблюдаемая лучевая скорость  $X$  относительно  $S$ , вызванная галактическим вращением, будет равна

$$\rho = V_1 \cos \phi - V \sin l, \quad (15.38)$$

где  $\phi$  — угол между прямой  $SX$  и вектором скорости  $V_1$ . Аналогично скорость  $u$  звезды  $X$ , нормальная к направлению на звезду с  $S$ , определяется как

$$u = V_1 \sin \phi - V \cos l. \quad (15.39)$$

Из треугольника  $SXC$  имеем

$$90^\circ - \phi = l + \theta. \quad (15.40)$$

Далее,

$$\sin \theta / r = \sin l / R_1 \quad (15.41)$$

Рис. 15.3

и

$$R_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos l,$$

так что

$$R_1 = R \left[ 1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 2 \frac{r}{R} \cos l \right]^{1/2}$$

или, с точностью до членов первого порядка по  $r/R$ ,

$$\Delta R = R_1 - R = -r \cos l. \quad (15.42)$$

Подставляя в (15.38) и (15.39) вместо  $\phi$  выражение  $90^\circ - l - \theta$  и разлагая в ряд, получаем

$$\rho = V_1 (\sin l \cos \theta + \cos l \sin \theta) - V \sin l, \quad (15.43)$$

$$u = V_1 (\cos l \cos \theta - \sin l \sin \theta) - V \cos l. \quad (15.44)$$

Теперь можно написать с точностью до членов первого порядка

$$V_1 = V + \frac{dV}{dR} \Delta R.$$

Отсюда, используя (15.42), получаем

$$V_1 = V - r \frac{dV}{dR} \cos l.$$

Далее, угол  $\theta$  мал, так, что  $\cos \theta \approx 1$ . Кроме того, в (15.41) можно заменить  $R_1$  на  $R$ . После этого (15.43) и (15.44), при исполь-

зовании уточненной формы (15.14) и пренебрежении членами второго порядка, умноженными на  $(r/R)$  ( $dV/dR$ ), дают

$$\rho = rA \sin 2l \quad (15.45)$$

и

$$u = rA \cos 2l + rB, \quad (15.46)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{V}{R} - \frac{dV}{dR} \right), \quad B = -\frac{1}{2} \left( \frac{V}{R} + \frac{dV}{dR} \right) \quad (15.47)$$

или

$$B = A - \frac{V}{R} = A - \omega, \quad (15.48)$$

поскольку  $V = \omega R$ .

Дифференцируя, мы получаем

$$\frac{dV}{dR} = \omega + R \frac{d\omega}{dR}.$$

Следовательно,  $A$  и  $B$  можно выразить в другой форме:

$$A = -\frac{1}{2}R \left( \frac{d\omega}{dR} \right), \quad B = -\omega - \frac{1}{2}R \left( \frac{d\omega}{dR} \right). \quad (15.49)$$

Если предположить, что звезда  $X$  расположена вне экваториальной плоскости Галактики на галактической широте  $b$  (при измерении с  $S$ ), то с точностью до членов первого порядка получаются следующие выражения для лучевой скорости  $\rho$ , собственного движения по долготе  $\mu_l$  и собственного движения по широте  $\mu_b$ , вызванных вращением Галактики:

$$\begin{aligned} \rho &= r A \sin 2l \cos^2 b, \\ \kappa \mu_l &= (A \cos 2l + B) \cos b, \\ \kappa \mu_b &= -\frac{1}{2}A \sin 2l \sin 2b, \end{aligned} \quad (15.50)$$

причем  $\kappa = 4,74$ , а  $\mu_l$  и  $\mu_b$  выражаются в секундах дуги за год.

Уравнения (15.50) — это уравнения первого порядка, определяющие вызванные галактическим вращением лучевую скорость  $\rho$  и компоненты собственного движения  $\mu_l$  и  $\mu_b$  по галактическим долготе и широте соответственно, для центроида, расположенного на расстоянии  $r$  от Солнца. Постоянные  $A$  и  $B$  называются *постоянными Оорта*.

Значения  $A$  и  $B$  можно найти из измерений  $\rho$ ,  $\mu_l$  и  $\mu_b$  для групп звезд, расположенных во многих направлениях от Солнца. Для каждой группы звезд определяются средние значения  $\rho$ ,  $\mu_l$  и  $\mu_b$ ; можно надеяться, что путем этого метода случайные или остаточные движения членов группы в основном исключаются и остается только эффект групповой скорости центроида. Разумеется, для каждой группы известны средние значения  $l$  и  $b$ .

Достаточно точное значение расстояния  $r$  можно найти, если исследуемые звезды выбраны в достаточно узких пределах звездных величин и притом примерно одного спектрального типа. Поскольку  $r$  входит только в выражение для лучевой скорости  $\rho$  (последняя пропорциональна  $r$ ), то выбираются наиболее далекие звезды. На практике используются самые яркие звезды типов O и B. Современные значения  $A$  и  $B$  таковы:

$$\begin{aligned} A &= +0,020 \text{ км/с/пс,} \\ B &= -0,013 \text{ км/с/пс.} \end{aligned} \quad (15.51)$$

Поскольку при выводе выражений (15.50) предполагалось, что  $R \approx 10^4$  пс и  $r \ll R$ , то значение  $r$  следует выбирать меньше  $10^3$  пс. Получены также выражения с учетом членов второго порядка, что позволяет брать бóльшие значения  $r$ .

### 15.8.2. Период вращения и угловая скорость Галактики

Подставляя приведенные выше значения  $A$  и  $B$  из (15.51) в выражение (15.48), мы получаем значение  $\omega = 0,033$  км/с/пс. Выражая значение  $\omega$  в секундах дуги в год, имеем

$$\omega = A - B = \frac{0,033 \cdot 31,56 \cdot 10^6 \cdot 206\,265}{206\,265 \cdot 149,6 \cdot 10^6},$$

поскольку  $1 \text{ пс} = 206\,265 \text{ а. е.}$ ,  $1 \text{ а. е.} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ км}$ , число секунд в году равно  $31,56 \cdot 10^6$  и  $1 \text{ радиан} = 206\,265''$ . Отсюда  $\omega = 0,0070''$  в год. Стоит отметить, что вращение происходит в направлении уменьшения галактических долгот.

Указанное значение  $\omega$  соответствует периоду вращения  $1,86 \cdot 10^8$  лет. Поскольку  $\omega = V/R$ , а  $\omega$  теперь известно, знание  $V$  или  $R$  обеспечит нам значение  $R$  или  $V$ . Скорость центроида  $V$  определяется по отношению к системе шаровых скоплений; последняя имеет очень малые скорости относительно галактического центра. Расстояние центроида  $R$  определяется путем исследования звезд типа RR Лиры вблизи галактического центра. Принимая во внимание все имеющиеся в нашем распоряжении данные, получаем  $R = 8500$  пс и  $V = 250$  км/с.

### 15.8.3. Масса Галактики

Обозначим через  $F$  силу на единицу массы, порождаемую гравитационным полем Галактики, действующим на расстоянии  $R$ , соответствующем расстоянию Солнца от центра Галактики. Если,



как и раньше,  $V$  — круговая скорость, то приравнивание значений центростремительной и центробежных сил дает  $V^2 = RF$ . Тогда

$$2V \frac{dV}{dR} = F + R \frac{dF}{dR}.$$

Используя (15.47), получаем

$$A = \frac{1}{4} \frac{V}{R} \left[ 1 - \frac{R}{F} \left( \frac{dF}{dR} \right) \right] \quad (15.52)$$

и

$$B = -\frac{1}{4} \frac{V}{R} \left[ 3 + \frac{R}{F} \left( \frac{dF}{dR} \right) \right]. \quad (15.53)$$

Чтобы продвинуться дальше, нам придется принять какую-либо гипотезу о распределении масс внутри Галактики.

Оорт предположил, что гравитационное поле в основном определяется сферической центральной массой  $M_1$  и сфероидальным однородным распределением массы  $M_2$ , имеющими общий центр. Солнце должно лежать вне пределов центральной сферической массы, но внутри тяготеющего сфероида. Указанная модель, хотя она и является грубой, должна иметь некоторое сходство с реальной Галактикой, так что полученные на основе этой модели результаты должны по крайней мере давать правильные порядки величины.

Теперь силу  $F$ , действующую на единицу массы, можно представить в виде

$$F = F_1 + F_2,$$

где  $F_1$  и  $F_2$  определяются действием центральной массы и сфероида соответственно. Далее, притяжение центральной массы обратно пропорционально квадрату расстояния от ее центра, т. е.

$$F_1 = CR^{-2}, \quad (15.54)$$

где  $C$  — постоянная. В точке внутри сфероида, как мы видели в гл. 6, сила притяжения меняется прямо пропорционально расстоянию от центра, так что

$$F_2 = ER, \quad (15.55)$$

где  $E$  — постоянная. Следовательно,

$$F = CR^{-2} + ER. \quad (15.56)$$

Заметим, что это выражение справедливо лишь в ограниченной области значений  $R$ . В самом деле, оно ведет к явно абсурдным значениям  $F$  при  $R \rightarrow 0$  или при  $R \rightarrow \infty$ . Но мы уже приняли,

что Солнце находится вне пределов центральной массы, но внутри сферондального распределения массы, что ограничивает возможные значения  $R$ .

Дифференцируя (15.56) по  $R$ , получаем

$$\frac{R}{F} \frac{dF}{dR} = \frac{F_2 - 2F_1}{F}.$$

Подстановка этого выражения в (15.52) и (15.53) дает

$$A = \frac{3}{4} \left( \frac{VF_1}{RF} \right)$$

и

$$B = -\frac{V(F_1 + 4F_2)}{4RF}.$$

Исключение из этих выражений  $V/R$  дает нам

$$\frac{F_1}{F} = \frac{4A}{3(A - B)}.$$

Используя значения  $A$  и  $B$  из (15.51), мы находим, что  $(F_1/F) = 0,8$  и  $(F_2/F) = 0,2$ ; следовательно, мы видим, что притяжение центральной массы преобладает.

Чтобы получить фактические значения масс  $M_1$  и  $M_2$ , заметим сначала, что сила притяжения на единицу массы, вызванная центральной массой  $M_1$ , равна

$$F_1 = GM_1/R^2.$$

Сила  $F_2$  действует на точку внутри однородного сфероида, удаленную на расстояние  $R$  от его центра. Пусть масса сфероида равна  $M_2$ , его однородная плотность  $\rho$ , а полуоси  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно.

При наличии вращательной симметрии  $a = b$ . Пусть  $a > c$ . Тогда компоненты  $(X, Y, Z)$  силы на единицу массы в точке с координатами  $x, y, z$  внутри сфероида определяются следующим образом:

$$X = -\alpha \rho x, \quad Y = -\alpha \rho y, \quad Z = -\gamma \rho z,$$

где

$$\frac{\alpha}{2\pi a^2 c} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)^2 (c^2 + u)^{1/2}} \quad (15.57)$$

и

$$\frac{\gamma}{2\pi a^2 c} = \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u) (c^2 + u)^{3/2}}. \quad (15.58)$$

Положим, что ось  $x$  проходит через Солнце. Тогда  $x = R$  и  $y = z = 0$ . Следовательно,

$$F_2 = -X = G\alpha R.$$

Далее,

$$2\alpha + \gamma = 4\pi, \quad (15.59)$$

а также

$$2\alpha a^2 + \gamma c^2 = \frac{4\pi a^2 c}{(a^2 - c^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{(a^2 - c^2)^{1/2}}{c} \right].$$

В нашей Галактике  $c/a \approx 0,1$ ; поэтому, пренебрегая членами  $(c/a)^2$  и более высокого порядка, мы можем написать

$$2\alpha a^2 + \gamma c^2 = 2\pi^2 ac. \quad (15.60)$$

Из (15.59) и (15.60) получаем

$$\alpha = \frac{\pi c (\pi a - 2c)}{a^2 - c^2} \approx \frac{\pi^2 c}{a}.$$

Масса  $M_2$  определяется выражением

$$M_2 = \frac{4\pi a^2 c \rho}{3},$$

так что

$$\alpha \rho = \frac{3\pi M_2}{4a^3},$$

откуда

$$F_2 = \frac{3\pi G M_2 R}{4a^3}. \quad (15.61)$$

Здесь  $a$  — экваториальный радиус Галактики (порядка  $1,5 \times 10^4$  пс). Следовательно,  $R = 8500$  пс, так что  $R/a \approx 0,57$ .

Вспоминая, что  $F = F_1 + F_2$ , имеем

$$F = \frac{GM_1}{R^2} + \frac{3\pi G M_2 R}{4a^3}, \quad (15.62)$$

откуда

$$\frac{dF}{dR} = \frac{F}{R} - \frac{3GM_1}{R^3}. \quad (15.63)$$

С учетом (15.52) получаем

$$A = \frac{V}{4R} \left( 1 - \frac{R}{F} \frac{dF}{dR} \right). \quad (15.64)$$

Принимая во внимание (15.62) и подставляя в (15.64), имеем

$$A = \frac{3GM_1}{4\omega R^3},$$

что дает

$$M_1 = \frac{4A\omega R^3}{3G}. \quad (15.65)$$

Подставляя теперь значение  $M_1$  из (15.65) в (15.62) и заменяя  $F$  на  $\omega^2 R$ , находим

$$M_2 = \frac{4a^3\omega}{3\pi G} \left( \omega - \frac{4}{3} A \right), \quad (15.66)$$

откуда

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{a}{R} \right)^3 \left( \frac{\omega}{A} - \frac{4}{3} \right). \quad (15.67)$$

Все значения величин в правых частях (15.65), (15.66) и (15.67) известны:  $A = +0,020$  км/с/пс,  $\omega = 0,033$  км/с/пс,  $R = 8500$  пс,  $a = 1,5 \cdot 10^4$  пс и  $G = 6,667 \cdot 10^{-8}$  в единицах СГС. Отсюда находим  $M_1 = 1,2 \cdot 10^{11}$  солнечных масс,  $M_2 = 0,67 \cdot 10^{11}$  солнечных масс, что дает  $M_1 + M_2 = 1,9 \cdot 10^{11}$  масс Солнца. Недавние исследования с учетом более сложных моделей Галактики не изменили по порядку величины приведенные выше значения.

#### 15.8.4. Общий характер вращения Галактики

Один из интересных аспектов динамики звездных систем, подобных Галактике, — это характер ее вращения. Вращается ли эта система как твердое тело или, подобно системе колец Сатурна, обращение любого тела в Галактике подчиняется законам Кеплера, так что угловая скорость уменьшается с возрастанием расстояния от центра? Данные наблюдений дают на этот вопрос неполный ответ.

Рассмотрим только звезды в плоскости экватора Галактики (т. е.  $b = 0$ ); тогда из (15.50) следует

$$\rho = rA \sin 2l, \\ \kappa\mu_l = A \cos 2l \pm B = A (\cos 2l \pm 1) - \omega,$$

здесь  $\kappa$  — постоянная,  $A$  и  $B$  — постоянные Оорта, а  $r$  и  $l$  — радиус-вектор и долгота звезды, измеряемые из положения, занимаемого Солнцем. Угловую скорость Солнца примем равной  $\omega$ . Тогда из выражения (15.47) мы видим, что ни  $A$ , ни  $B$  не зависят от координат звезды.

Поведение  $\rho$  и  $\chi\mu_l$  при изменении  $l$  (для заданного значения  $r$ ) носит систематический характер, показанный на графиках рис. 15.4.

Если Галактика вращается в окрестностях Солнца как твердое тело, тогда какие-либо лучевые скорости должны полностью отсутствовать. На самом же деле обнаруживается, что лучевые скорости существуют и описываются графиком на рис. 15.4, а. Разумеется, этот график совсем не обязательно целиком связан с галактическим вращением. Например, если звезды вблизи Солнца движутся прямолинейно, но их скорости линейно уменьшаются с расстоянием до центра Галактики (как на рис. 15.5, а), тогда мы получим поле относительных скоростей звезд, показанное на рис. 15.5, б; это поле скоростей получено путем вычитания скорости Солнца из скоростей всех звезд. Полученное относительное поле в свою очередь привело бы к систематическому распределению лучевых скоростей по долготе, схематически показанному на рис. 15.5, в. Указанное распределение согласуется с графиком на рис. 15.4, а.

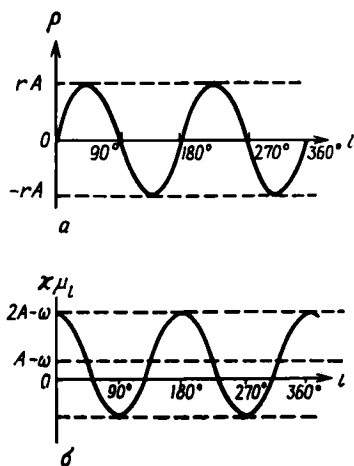


Рис. 15.4.

Распределение компонентов наблюдаемых собственных движений, показанное на рис. 15.5, г, не согласуется со схематическим графиком на рис. 15.4, б. Собственное движение на всех долготах должно было бы быть положительным или равным нулю; наблюдения же показывают, что движения положительны, равны нулю или отрицательны в зависимости от долготы.

Однако если звезды движутся по орбитам вокруг галактического центра и мы учитываем кривизну орбит, когда строим векторы скоростей, то приходим к ситуации, изображенной на рис. 15.6, причем для простоты на рис. 15.6, а скорости приняты постоянными. Теперь видно, что, в то время как картина лучевых скоростей по существу не изменилась, картина собственных движений приобретает противоположный характер. Принимая во внимание как кривизну орбит, так и уменьшение скорости с увеличением расстояния от галактического центра, мы приходим к картине собственных движений, согласующейся с одной из кривых рис. 15.4, построенной по наблюдениям.

В последние годы дополнительные данные наблюдений, полученные радиоастрономическими методами, улучшили наше понимание галактического вращения и позволили построить карты

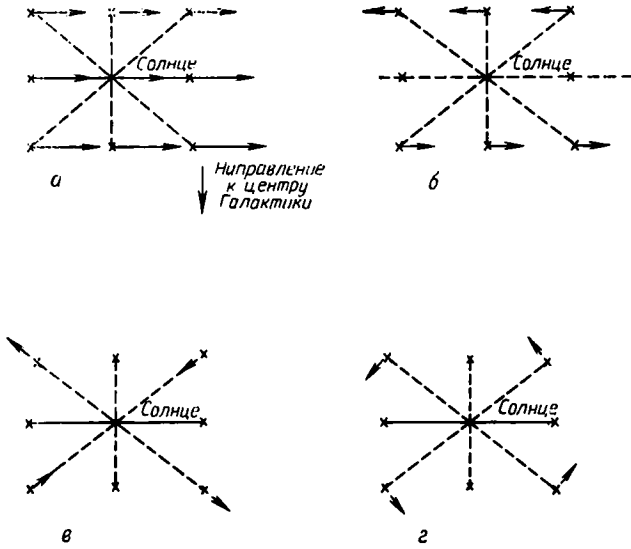


Рис. 15.5.

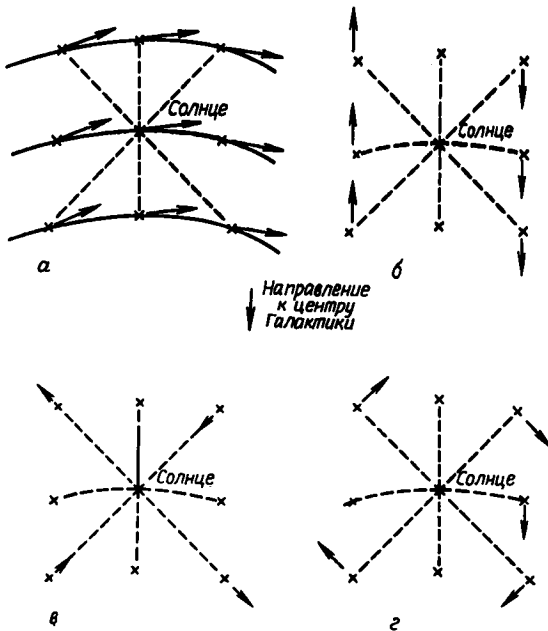


Рис. 15.6.

распределения межзвездного вещества. Нейтральный водород испускает излучение на длине волны 21 см, которое может быть обнаружено с помощью радиотелескопов. Каждое облако нейтрального водорода движется по орбите вокруг галактического центра, а следовательно, обладает лучевой скоростью относительно Солнца. Поэтому длина волны излучения, испускаемого облаком, изменяется вследствие эффекта Доплера. Разность  $\Delta\lambda$  между теоретическим значением длины волны  $\lambda$  и измеренным значением дает нам лучевую скорость  $v$  при помощи формулы Доплера  $\Delta\lambda/\lambda = v/c$ , где  $c$  — скорость света. Возможно наличие

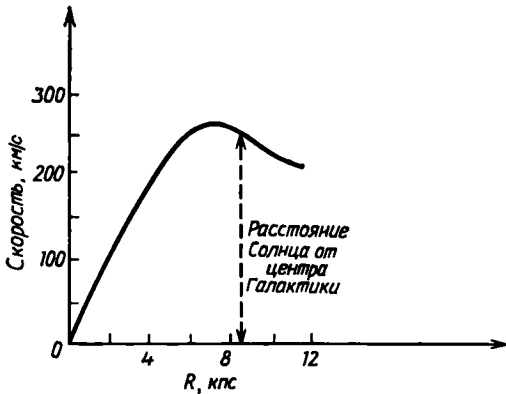


Рис. 15.7.

многих облаков, пересекаемых произвольной прямой, проведенной через Солнце и центр Галактики и соответствующей постоянной галактической долготы. Эти облака лежат на разных расстояниях, имеют различные плотности, так что наблюдаемый профиль интенсивности на длинах волн вблизи  $\lambda = 21$  см окажется достаточно сложным для любой галактической долготы. Однако тщательное сопоставление всех данных позволяет сделать детальные выводы о вращении Галактики и ее спиральной структуре.

На рис. 15.7 приведена круговая скорость  $V$  на различных расстояниях  $R$  от галактического центра; зависимость построена на оптических данных об  $O$ - и  $B$ -звездах и радионаблюдениях на волне 21 см.

Вплоть до расстояния  $\sim 7,5$  кпс Галактика вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью (иными словами,  $\omega = V/R = \text{const}$ ). За пределами этого расстояния скорость вращения достигает максимума, после чего круговая скорость начинает убывать с возрастанием расстояния. Как с эмпирической точки зрения, так и на основе теоретических исследований вращающихся симметричных звездных систем в стационарном

состоянии с эллипсоидальным распределением скоростей закон изменения скорости с расстоянием должен иметь вид

$$V = k_1 R / (1 + k_2 R^2), \quad (15.68)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные. Максимальное значение  $V$  достигается тогда, когда  $R = 1/\sqrt{k_2} = R_0$ . Солнце находится в области, расположенной сразу за предельным расстоянием  $R_0$ , где круговая скорость начинает уменьшаться с ростом расстояния от галактического центра.

Значения  $k_1$  и  $k_2$  можно вывести следующим образом. Из (15.68) путем дифференцирования получаем

$$\frac{dV}{dR} = \frac{k_1 (1 - k_2 R^2)}{(1 + k_2 R^2)^2}. \quad (15.69)$$

Но уравнение (15.47) дает

$$A + B = -\frac{dV}{dR}, \quad A - B = \frac{V}{R}. \quad (15.70)$$

Отсюда путем исключения  $dV/dR$  и  $V$  из соотношений (15.68), (15.69) и (15.70) находим

$$k_1 = -\frac{(A - B)^2}{B}, \quad k_2 = -\frac{A}{BR^2}. \quad (15.71)$$

Заметим, что в этих выражениях  $R$  — это расстояние Солнца от центра Галактики, поскольку  $A$  и  $B$  представляют собой постоянные Оорта, значения которых выведены для положения Солнца в Галактике.

Закон скоростей (15.68) легко выразить в полуколичественной форме. Звезды, расположенные далеко от почти сферического галактического ядра, находятся в области, где прослеживаются квазикеплеровские орбиты, поскольку массивное галактическое ядро действует приблизительно как материальная точка. В такой области момент количества движения постоянен (т. е.  $R^2\omega = h$ ); следовательно,  $RV = h$ . Для звезд, близких к галактическому ядру или расположенных внутри него, сила пропорциональна массе, заключенной в сфере радиуса  $R$ . Но

$$M = (4/3) \pi \nu R^3,$$

где  $\nu$  — концентрация звезд в ядре, а  $m$  — средняя масса звезды. Отсюда приравнивание центростремительной силы силе притяжения единицы массы дает нам

$$V^2 = GM/R.$$

Следовательно,

$$V^2 = \frac{4}{3} \pi m G \nu R^2.$$



Иными словами, в рассматриваемой внутренней области

$$(V/R) = \omega = \text{const.}$$

В пределах этой области все звезды обращаются по круговым орбитам с одним и тем же периодом порядка  $10^8$  лет.

Другие галактики, например М31 в Андромеде и М33 в Треугольнике, показывают те же самые особенности вращения: их внутренние области вращаются как твердые тела, а в их внешних областях скорость убывает по мере увеличения расстояния от центра.

### 15.8.5. Галактические орбиты звезд

Мы видели, что для Местной группы звезд можно определить центроид, а также скорость этого центроида. Звезды, в том числе Солнце, обладают скоростями, отличными от скорости центроида, т. е. их скорости имеют дисперсию относительно последней, иными словами, звезды имеют остаточные скорости (разности между скоростями движения звезд в Галактике и скоростью центроида в Галактике). Эти остаточные скорости порядка 20 км/с. Обнаружено, что функция распределения скоростей  $\phi$  определяется выражением вида

$$\phi(u, v, w) = C \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma_x^2} - \frac{v^2}{2\sigma_y^2} - \frac{w^2}{2\sigma_z^2} \right\},$$

где  $\phi$  — число звезд в группе с остаточными скоростями, заключенными в пределах от  $u$  до  $u + du$ , от  $v$  до  $v + dv$ , и от  $w$  до  $w + dw$ , измеренными относительно осей  $x, y, z$  соответственно.  $C$  — постоянная, а  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — стандартные отклонения, также определенные относительно указанных выше осей. Ось  $x$  направлена к центру Галактики, ось  $y$  по касательной к вращательному движению Галактики, а ось  $z$  перпендикулярна плоскости Галактики. Значения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  составляют примерно  $\pm 28; \pm 20; \pm 15$  км/с соответственно. В противоположность этому скорость центроида Местной группы звезд  $\sim 250$  км/с.

Указанное трехосное эллипсоидальное распределение скоростей Шварцшильда может быть объяснено как следствие того факта, что звезды в Местной группе, находясь временно в одном и том же элементе объема, имеют слегка различные галактические орбиты. Некоторые орбиты являются круговыми; большинство орбит эллиптические с малыми, но различными по величине эксцентриситетами и разными наклонениями к экваториальной плоскости Галактики. Линдبلاد [4] показал, что фактически наблюдаемые движения звезд на таких орбитах привели бы к эллипсоидальному распределению, включающему звезды, удаляющиеся от центра Галактики или движущиеся прямо к этому центру,

если наблюдать звезды из точки, соответствующей положению Солнца в Галактике.

Легко показать, что такие почти круговые орбиты с малыми наклонениями возможны для звезд, расположенных внутри звездных систем, подобных Галактике. Для большинства звезд остаточные скорости на порядок величины меньше, чем скорости вращения центроидов, так что орбиты мало отличаются от круговых компланарных орбит. Следуя Линдбладу, обозначим через  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$

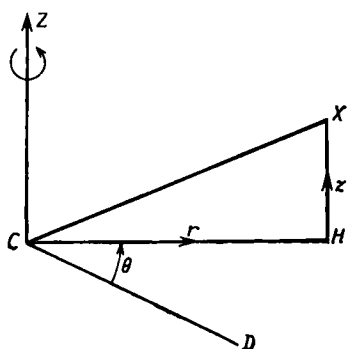


Рис. 15.8.

цилиндрические координаты звезды  $X$  в звездной системе с вращательной симметрией, причем ось  $z$  направлена вдоль оси симметрии (рис. 15.8). Предположим также, что звездная система имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси симметрии; направление  $CD$ , от которого отсчитываются углы, лежит в указанной плоскости, так что  $\theta$  — это азимутальный угол, отсчитываемый от  $CD$  до проекции  $CH$  радиуса-вектора звезды  $CX$ ; очевидно также, что  $r = CH$ .

Уравнения движения звезды  $X$  тогда принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{\partial U}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15.72)$$

Здесь  $U$  — гравитационный потенциал, действующий на  $X$  и вызванный звездной системой. Далее, в силу симметрии

$$U = U(r, z) = U(r, -z), \quad (15.73)$$

так что условие  $(\partial U / \partial \theta) = 0$  с учетом второго уравнения (15.72) приводит к соотношению

$$r^2 \dot{\theta} = h. \quad (15.74)$$

Пусть звезда движется в плоскости симметрии звездной системы, причем компоненты скорости в  $z$ -направлении полностью отсутствуют. Следовательно,  $z = \dot{z} = 0$ , и в силу симметрии  $(\partial U / \partial z)_{z=0} = 0$ ; кроме того,  $(\partial^2 U / \partial r \partial z)_0 = 0$ . Поэтому система (15.72) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{\partial U}{\partial r}, \\ r^2 \dot{\theta} &= h. \end{aligned} \quad (15.75)$$

Поищем теперь решение при  $r = r_0 = \text{const}$  и  $\omega = (d\theta/dt) = \omega_0 = \text{const}$ . Тогда из второго уравнения (15.72) мы имеем

$$r_0^2 \omega_0 = h.$$

Первое уравнение (15.75) дает

$$\ddot{r} - r_0 \omega_0^2 = \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0.$$

При  $\ddot{r} = 0$  мы имеем

$$r_0 \omega_0^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 = 0 \quad (15.76)$$

и при подстановке  $V_0 = \omega_0 r_0$  получаем

$$\frac{V_0^2}{r_0} + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 = 0.$$

Но полученное выражение представляет собой уравнение частицы, движущейся в гравитационном поле, вызванном потенциалом  $U$ . Следовательно, возможна круговая орбита, причем звезда описывает такую орбиту с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ , определяемой соотношением  $r_0^2 \omega_0 = h$ .

Теперь слегка возмутим круговое движение этой звезды, так что ее координаты станут равными:

$$r = r_0 + \rho,$$

$$\theta = \theta_0 + \phi,$$

$$z = z_0 + \zeta = \zeta \quad (\text{ибо } z_0 = 0),$$

где  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\zeta$  — малые переменные величины. Отметим, что  $\theta_0 \neq \text{const}$ , в то время как  $r_0 = \text{const}$ . Подставим эти новые переменные в систему (15.72) и линеаризуем получившиеся уравнения с целью получить дифференциальные уравнения для  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\zeta$ ; во многом эта процедура напоминает выполненную в гл. 5, где мы рассмотрели устойчивость лагранжевых решений для ограниченной круговой задачи трех тел.

Сначала разложим  $U(r, z)$  до членов второго порядка по малым величинам  $\rho = r - r_0$  и  $\zeta = z - z_0 = z$ . Вспомня, что

$$\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \right)_0 = 0,$$

получаем

$$U = U_0 + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 (r - r_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_0 (r - r_0)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 z^2.$$

Вычисляя частные производные этого выражения по  $r$  и  $z$ , находим

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_0 \rho, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \zeta. \quad (15.77)$$

Теперь подставим величины  $r = r_0 + \rho$  и  $\theta = \theta_0 + \phi$  в соотношение  $r^2 \dot{\theta} = h$ ; сохраняя только члены первого порядка мы получаем

$$\dot{\phi} = -2 \left(\frac{\omega_0}{r_0}\right) \rho. \quad (15.78)$$

Третье уравнение (15.72) дает

$$\ddot{\zeta} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_0 \zeta. \quad (15.79)$$

Используя теперь первые уравнения из (15.77) и (15.76), а также первое уравнение (15.72), получаем после незначительных сокращений

$$\ddot{\rho} = \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_0 + \frac{3}{r_0} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 \right\} \rho. \quad (15.80)$$

Уравнения (15.78)—(15.80) образуют необходимую нам систему дифференциальных уравнений. В этих уравнениях коэффициенты при  $\rho$  и  $\zeta$  — постоянные величины. Поведение  $\rho$ ,  $\zeta$  и  $\phi$  зависит от знаков при этих коэффициентах.

Когда звезда пересекает экваториальную плоскость, она движется в направлении возрастания  $z$ . Составляющая силы по оси  $z$  отрицательна, так что

$$\partial U / \partial z < 0 \text{ для } z > 0,$$

в то время как

$$\partial U / \partial z > 0 \text{ для } z < 0.$$

Следовательно, при  $z = 0$   $\partial U / \partial z$  — убывающая функция  $z$ , откуда

$$\partial^2 U / \partial z^2 < 0.$$

Отсюда следует, что (15.79) представляет собой уравнение простого гармонического движения, так что его решением будет

$$\zeta = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1),$$

где

$$n_1 = [-(\partial^2 U / \partial z^2)_0]^{1/2},$$

а  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — постоянные интегрирования.

В уравнении (15.80) коэффициент при  $\rho$  можно записать в таком виде:

$$\left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right]_0.$$

Далее, величина силы притяжения на расстоянии  $r$  равна

$$F(r) = -(\partial U / \partial r).$$

Даже если вся масса сконцентрирована в галактическом центре, сила  $F$  будет уменьшаться с увеличением расстояния  $r$  не быстрее чем  $r^{-2}$ . Следовательно, выражение

$$-r^3 (\partial U / \partial r) = r^3 F(r)$$

будет возрастающей функцией  $r$ ; отсюда ясно, что выражение

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

должно быть отрицательным. Поэтому (15.80) также оказывается уравнением простого гармонического движения, имеющего решение

$$\rho = \alpha_2 \sin(n_2 t + \beta_2),$$

где

$$n_2 = \left\{ - \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right]_0 \right\}^{1/2};$$

$\alpha_2$  и  $\beta_2$  — постоянные интегрирования. Наконец, подставляя это решение в уравнение (15.78), мы получаем решение для  $\phi$ :

$$\phi = \alpha_3 + \alpha_3' \cos(n_2 t + \beta_3),$$

где

$$\alpha_3' = 2\omega_0 \alpha_2 / n_2 r_0.$$

Интерпретация этих результатов сводится к тому, что звезда выполняет эллиптическое движение с периодом  $T_1 = 2\pi/n_1$  относительно точки отсчета на круговой орбите и в то же время колеблется туда и обратно относительно галактической плоскости с периодом  $T_2 = 2\pi/n_2$ . Расчеты показывают, что для звезды в окрестностях Солнца значения  $T_1$  и  $T_2$  составляют приблизительно  $150 \cdot 10^6$  и  $80 \cdot 10^6$  лет соответственно. Для сравнения напомним, что период обращения вокруг галактического центра для расстояния Солнца от последнего равен  $\sim 186 \cdot 10^6$  лет.

### 15.8.6. Звезды с высокими скоростями

Мы уже видели, что остаточные скорости большинства членов Местной группы звезд порядка 20 км/с, причем эти скорости ориентированы в соответствии с трехосным эллипсоидальным распределением Шварцшильда. Если же, однако, мы отберем только те

звезды, у которых остаточные скорости превышают 100 км/с, мы обнаружим заметную асимметрию в их распределении. Ни одна из этих высокоскоростных звезд не движется в направлении, в котором Солнце обращается вокруг центра Галактики; у большинства звезд векторы скорости лежат в пределах полукруга, направленного в противоположную сторону.

Эта асимметрия объясняется, если вспомнить, что вращательная скорость центроида звезд Местной группы порядка 250 км/с, которая по существу представляет собой круговую скорость для расстояния Солнца от галактического центра. Скорость освобождения (если мы примем в качестве грубого приближения, что вещество внутри солнечной галактической орбиты действует как материальная точка) равна  $\sqrt{2}V_c \approx 350$  км/с. Таким образом, любые звезды, имеющие скорости свыше 100 км/с и движущиеся в ту же сторону, что и Солнце, превышали бы скорости убегания и потому постоянно ускользали бы из Галактики. Поэтому многие звезды, которые показывают высокие скорости относительно Солнца, на самом деле движутся со скоростями гораздо меньшими круговой скорости на расстоянии Солнца от галактического центра. Они еще обращаются вокруг центра в том же направлении, что и Солнце, но их орбиты должны быть заметно эллиптическими. Можно рассчитать, что многие из этих звезд в окрестностях Солнца должны находиться вблизи апоцентров своих орбит и что перигелии должны лежать глубоко в галактическом ядре. У скоростей таких звезд также обнаруживаются высокие z-компоненты; это указывает на наличие значительных наклонов их орбит к галактической плоскости.

Одной из подобных групп звезд являются переменные типа RR Лиры. Они входят в состав звездного населения II, имеющего гораздо больший возраст, чем звезды населения I в галактическом диске. С этой точки зрения шаровые скопления также оказываются высокоскоростными «звездами», точнее, объектами, движущимися даже еще медленнее по отношению к Местной группе, чем звезды типа RR Лиры, и образующие почти сферическое распределение вокруг галактического центра. Эти скопления также состоят из старых звезд населения II. Отсюда следует вывод, что Галактика состоит из набора подсистем, причем чем старше подсистема, тем более сферической она оказывается. В указанную схему укладывается даже галактическое ядро: оно представляет собой сплюснутый сфероид, состоящий из звезд населения II.

## 15.9. Сферические звездные системы

Рассмотрим теперь кратко динамику сферических звездных систем, например рассеянных скоплений и шаровых скоплений, которые, как свидетельствуют наблюдения, существуют в нашей

Галактике. Предварительно мы применим критерий «сферы действия»

$$r = R (m/M)^{2/5}$$

к сферам действия 1) рассеянного скопления; 2) шарового скопления по отношению к тяготению галактического вздутия.

Случай 1. Характерные значения для рассеянного скопления в окрестностях Солнца:  $m = 10^2$ ,  $M = 10^{11}$ ,  $R = 10^4$  (массы в единицах массы Солнца,  $R$  в парсеках). Отсюда получаем  $r \approx \approx 2,5$  пс.

Случай 2. Для шарового скопления можно принять  $m = 5 \cdot 10^5$ ,  $M = 10^{11}$ ,  $R = 10^4$ ; отсюда  $r \approx 76$  пс.

Далее, измеренные радиусы рассеянных скоплений заключены между 1 и 10 пс; большинство имеют радиусы меньше 3 пс. Для шаровых скоплений найденные радиусы лежат между 10 и 75 пс, в среднем  $\sim 25$  пс. Согласие в обоих случаях оказывается хорошим; это позволяет предположить, что, хотя приливное воздействие на облака вследствие притяжения галактического вздутия не пренебрежимо мало, размеры облаков оказываются достаточными для предохранения от разрушающих воздействий приливных сил. Более того, существуют данные наблюдений, свидетельствующие, что размеры шаровых скоплений пропорциональны их расстояниям от центра Галактики; имеются также данные, что их внешние области вытянуты вдоль осей, проходящих через галактический центр.

Существует и другой разрушающий механизм. Например, любое массивное межзвездное облако, через которое проходит скопление, будет порождать тенденцию к «растягиванию» облака, увеличивая скорость звезд скопления. Кумулятивные эффекты подобных сближений будут со временем приводить к убеганию звезд, в конце концов приводящему к распаду рассеянного скопления. Для небольшого рассеянного скопления характерное время распада составляет порядка  $10^8$  лет; для более плотных рассеянных скоплений это время может достигать  $5 \cdot 10^8$  лет.

Для небольшого по размерам плотного рассеянного скопления, насчитывающего лишь малое количество членов, индивидуальные сближения с другими членами скопления могут привести к возрастанию скорости звезды вплоть до скорости освобождения из скопления. Поэтому звезда покидает скопление и уходит прочь, унося с собой некоторую долю общей кинетической энергии скопления. Вследствие этого произойдет некоторое сжатие скопления. После повторных убеганий звезд скопление распадется до двойной или, быть может, тройной системы.

В шаровом скоплении скорость освобождения его членов высока. Мощное общее поле тяготения скопления удерживает их на замкнутых орбитах настолько прочно, что вероятность для них

набрать требуемую для убегания из скопления скорость путем последовательных случайных сближений весьма невелика. Поэтому шаровое скопление устойчиво и способно существовать по крайней мере  $10^9$ — $10^{10}$  лет.

### 15.9.1. Применение теоремы вириала к сферической системе

Чтобы сделать немного более точными приведенные выше рассуждения, применим к рассматриваемому случаю теорему вириала. В разд. 5 гл. 5 мы нашли, что для системы  $n$  гравитирующих частиц с массами  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) мы имеем соотношение  $T - U = C$ , а также соотношение

$$\ddot{I} = 4T - 2U = 2U + 4C = 2T + 2C,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i^2$$

— момент инерции системы относительно центра масс;

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i$$

— кинетическая энергия системы;

$$U = \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j)$$

— потенциальная энергия системы;  $C$  — полная энергия системы = const;  $\mathbf{R}_i$ ,  $\dot{\mathbf{R}}_i$  — радиус-вектор и вектор скорости  $i$ -й частицы;  $r_{ij} = |\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|$ , причем начало системы координат является центроидом системы.

Тогда, поскольку как  $U$ , так и  $T$  положительны, то при положительном  $C$  величина  $\ddot{I}$  также будет положительной и  $I$  будет возрастать бесконечно, что приведет к убеганию из системы по крайней мере одной из масс.

Далее, если звездное скопление находится в стационарном состоянии, то  $I$  не является функцией времени, так что

$$T = \frac{1}{2} U = -C, \quad (15.81)$$

т. е. сумма потенциальной энергии и удвоенной кинетической энергии равна нулю. Если  $\bar{V}^2 = \overline{\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}}$  — средняя квадратичная скорость и  $M$  — полная масса системы, мы можем написать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{2} M \bar{V}^2. \quad (15.82)$$



Кроме того, если система представляет собой однородную сферу с радиусом  $R$ , ее потенциальная энергия, очевидно, приближенно определяется как

$$U = -GM^2/R, \quad (15.83)$$

поскольку среднее удаление звезд друг от друга — это радиус сферы, среднее значение произведения  $m_i m_j$  равно  $m^2$ , где  $m$  — средняя масса звезды, определяемая равенством  $m = M/n$ ; при этом следует помнить, что при двойном суммировании каждый член учитывается дважды. Таким образом, из уравнений (15.81), (15.82) и (15.83) имеем

$$\bar{V}^2 \approx GM/R.$$

Для звезды на краю скопления скорость освобождения  $V_e$  определяется как

$$V_e = (2GM/R)^{1/2}.$$

Мы видим, что, если существует максвелловское распределение скоростей, некоторые звезды окажутся способны приобрести скорости, превышающие скорость освобождения; ввиду этого такие звезды будут покидать скопления.

В развитие изложенных идей было выполнено большое число работ, приведших к выработке концепции о времени релаксации звездной системы. Если одна звезда или большее число звезд покидают скопление, то необходимо некоторое время, чтобы в скоплении установилось новое равновесное распределение скоростей; это время и называется временем релаксации. Последнее тесно связано со временем распада системы. Значение времени релаксации можно определить из формулы

$$T = 1/16 \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\left( \frac{nR^3}{Gm} \right)^{1/2}}{\ln(n/2^{3/2})},$$

где  $n$  — число звезд в системе,  $R$  — радиус системы,  $m$  — средняя массы звезды. Если использовать в качестве единицы массы Солнце, а  $R$  — выразить в парсеках, то формула сводится к следующей:

$$T = 8 \cdot 10^5 \frac{(nR^3/m)^{1/2}}{\lg(n-0,5)} \text{ лет.}$$

Время полураспада системы, т. е. время, за которое ее покидает половина звезд, составляет  $133T$ . Для рассеянного скопления Плеяды  $T \approx 5 \cdot 10^7$  лет, так что  $133T \approx 6 \cdot 10^9$  лет. Для большинства шаровых скоплений  $T \approx 10^{10}$  лет.

### 15.9.2. Орбиты звезд в сферической системе

Можно сделать определенные выводы относительно орбит звезд в звездной системе, обладающей сферической симметрией. В разд. 15.7 мы видели, что, когда гравитационный потенциал  $U$  является функцией только расстояния  $r$  от центра системы, мы имеем четыре интеграла  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Первый — это интеграл энергии:

$$I_1 \equiv V^2 - 2U = C_1;$$

остальные являются интегралами момента количества движения, которые можно суммировать в векторной форме в виде

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  — радиус-вектор и вектор скорости звезды в системе. Таким образом, плоскость орбиты звезды не изменяет свою ориентацию в сферически-симметричной системе (исключая тот редкий случай, когда в системе происходит тесное сближение интересующей нас звезды и другой звезды системы). Тогда мы можем записать уравнение движения звезды в плоскости, используя полярные координаты:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{dU}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (15.84)$$

$$r^2\dot{\theta} = h, \quad (15.85)$$

где  $h$  — постоянная момента количества движения и

$$U(r) = G \int_r^{\infty} \frac{M(r)}{r^2} dr. \quad (15.86)$$

Так как звезда находится в сферически-симметричной системе на расстоянии  $r$  от центра, то сила, действующая на звезду, определяется притяжением массы  $M(r)$ , заключенной внутри сферы радиуса  $r$ .

Исключая  $\dot{\theta}$  из (15.84) и (15.85), мы получаем

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{dU}{dr}.$$

Умножая на  $\dot{r}$  и интегрируя получившееся выражение, имеем

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} = U + C', \quad (15.87)$$

где  $C'$  — постоянная. Это соотношение энергии. Пусть  $V_R$  и  $V_T$  — лучевой и нормальный к нему компоненты скорости; тогда

$$V_R = \dot{r}, \quad V_T = r\dot{\theta}.$$

После этого, используя (15.85) и (15.87), мы находим

$$rV_T = h \quad (15.88)$$

и

$$V_R^2 + V_T^2 - 2U = C \quad (15.89)$$

или

$$V^2 - 2U = C, \quad (15.90)$$

где  $C$  тоже постоянная. Соотношения (15.88) и (15.89) дают нам все, что необходимо для определения характеристик орбиты.

Возможны круговые орбиты. Если это так, то  $V_R = 0$ ,  $V_T = \text{const}$ ,  $h \neq 0$  и  $r = r_0 = \text{const}$ . Следовательно,  $\dot{U} = U(r_0) = \text{const}$ . Все эти соотношения удовлетворяют уравнениям (15.87)–(15.89). Прямолинейные орбиты, проходящие через центр системы, также возможны. В этом случае  $V_T = 0$ ,  $h = 0$ ,  $V_R = \dot{r}$  и оказывается переменной, как и потенциал  $U$ ; связь между ними определяется уравнениями (15.87) и (15.89). Мы видим также, что, если орбита не является ни круговой, ни прямолинейной, она должна располагаться между двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны расстояниям апоцентра и перигентра.

Из уравнения (15.87) мы имеем

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - 2U = C. \quad (15.91)$$

Когда звезда достигает перигентра или апоцентра,  $\dot{r}$  становится равным нулю; отсюда следует, что

$$\frac{h^2}{r^2} - 2U = C. \quad (15.92)$$

Таким образом, корни этого уравнения дают нам расстояния перигентра и апоцентра. Подобные орбиты будут овалами, которые могут вращаться в орбитальной плоскости. В частности, если орбита расположена в сферической системе достаточно далеко от центра, тогда движение и орбита будут приблизительно кеплеровскими, поскольку основная масса звездной системы будет действовать как материальная точка в центре. С другой стороны, на звезду, орбита которой лежит глубоко в области ядра системы, будет действовать сила притяжения, пропорциональная расстоянию от центра системы. Следовательно, потенциал  $U$  будет иметь форму  $U = -cr^2$ , где  $c$  — положительная постоянная. Тогда из (15.92) мы получим

$$h^2 + 2cr^4 = Cr^2.$$

Это — биквадратное уравнение, корни которого определяют большую и малую оси приближенно эллиптической орбиты, которую описывает звезда под действием силы, описываемой указанным выше законом. В противоположность кеплеровской орбите центр этого эллипса является центром системы, а угловая скорость равна  $\sqrt{c}$  и оказывается той же самой для любой орбиты в этой центральной области системы.

### 15.9.3. Распределение орбит внутри сферической системы

Если звезды никогда не покидают сферическую систему, то последняя стремится со временем прийти в равновесное состояние. В системе может существовать максвелловское распределение скоростей; тогда звездная плотность начинает описываться изотермической политропой. Звездная система с таким поведением действует как сферическая масса газа, в которой звезды играют роль молекул или атомов. Политропным газовым шарам посвящена огромная литература; в ней подробно описываются решения уравнения Эмдена, дающего связь между давлением, плотностью и кинетической температурой частиц. Плюммер, Цейпель и Эдингтон были в числе тех, кто применил теорию политропных газовых шаров к сферическим системам, подобным шаровым скоплениям. На самом деле это применение способно дать лишь приближенные результаты, поскольку непрерывный уход звезд из системы в конце концов приведет систему к полному распаду.

Здесь возможны различные подходы. В предыдущем разделе мы видели, что в сферически-симметричной звездной системе уравнения (15.88) и (15.89) определяют характеристики звездных орбит, причем в общем случае у орбит существуют расстояния перигентра и апоцентра. Обозначим через  $r_a$  расстояние апоцентра. Тогда в апоцентре звезда будет иметь скорость  $V_r = 0$ . Следовательно,  $r_a$  и  $V_{Ta}$  (последнее обозначение относится к нормальному компоненту скорости в апоцентре) будут определять орбиту. Можно вывести также функцию распределения  $\phi$  для этих элементов орбиты. Например, выражение

$$dv = \phi(r_a, V_{Ta}) dr_a dV_{Ta}$$

будет определять число звезд с расстояниями апоцентров, заключенными в пределах от  $r_a$  до  $r_a + dr_a$ , и нормальными скоростями в апоцентре, заключенными в пределах от  $V_{Ta}$  до  $V_{Ta} + dV_{Ta}$ .

В предположение шварцшильдовского закона распределения скоростей в системе можно показать, что

$$v = \frac{\pi^{3/2} A \exp(2p^2 U)}{p^3 (1 + kr^2)}, \quad (15.93)$$

где шварцшильдовская функция определяется выражением

$$f = A \exp [\rho^2 (2U - V_R^2 - V_T^2 - kr^2 V_T^2)].$$

В этом выражении  $A$ ,  $\rho$  и  $k$  — постоянные параметры,  $U$  — гравитационный потенциал,  $V_R$  — лучевая скорость  $\dot{r}$ ,  $V_T$  — нормальная к лучевой линейная скорость  $r\theta$ . Выполнивший это исследование Эддингтон пришел к уравнению (15.93) для плотности  $\nu$ ; это частный случай общего решения, выводимого из теоремы Джинса (см. [1, 21]).

Путем подобных исследований оказалось возможным показать, что доля круговых и прямолинейных орбит мала и что лишь немногие звезды остаются вблизи центра системы или подходят близко к нему.

## 15.10. Эксперименты на ЭВМ

В последние годы основные результаты динамики звездных систем, полученные путем более или менее строгих аналитических процедур, были подтверждены модельными расчетами на ЭВМ. Рост ошибки округления и величина доступного машинного времени ограничивают размеры систем, которые могут быть исследованы. Для обхода этих ограничений могут применяться различные стратегии: регуляризация, сглаживание потенциала, использование методов механики непрерывных сред и т. п. Из исследований подобного рода стало ясным, что большая часть выводов из выполненных ранее аналитических работ оказались справедливыми и правильно описывают звездные системы. В частности, для скоплений справедлива теорема вириала; формула для времени релаксации дает результаты, хорошо согласующиеся с численными расчетами времен релаксации на ЭВМ. Звезды уходят из скопления, и скопление релаксирует к максвелловскому распределению за время, по порядку величины равное времени релаксации. Образуются тесные двойные системы, и постепенно подобные скопления распадаются. Справедливо также, что, как правило, у членов скопления орбиты определяются общим полем тяготения; по-видимому, верно также, что сумма малых возмущений от далеких звезд оказывается более значительной, чем многие большие по размеру возмущения, вызванные тесными сближениями.

### Задачи

15.1. Дано, что Солнце удалено от центра Галактики на 8,5 кпс и имеет период обращения вокруг центра  $\sim 200$  млн. лет. Рассчитать приближенную массу Галактики внутри галактической орбиты Солнца (в солнечных массах). Предположить, что орбита круговая и выполняется сферическое распределение вещества внутри орбиты; пренебречь веществом, лежащим за пределами солнечной орбиты.

15.2. Наблюдения линии нейтрального водорода на волне 21 см показывают, что после внесения поправки за местное движение Солнца и скорость движения Земли вокруг Солнца максимальная лучевая скорость приходится на направление, образующее угол  $30^\circ$  с направлением на центр Галактики; она составляет 210 км/с. Рассчитать массу Галактики (в солнечных массах) в предположении, что ее масса сконцентрирована в галактическом центре и что Солнце находится на расстоянии 8,5 кпс от центра.

15.3. Для углового расстояния  $\theta$  от галактического центра наблюдаемое максимальное доплеровское смещение линии 21 см для вещества в галактической плоскости равно  $l$  см. Предполагая, что те области Галактики, которые находятся на угловых расстояниях не меньше чем  $\theta$  от галактического центра, вращаются так, как если бы вся масса Галактики была сосредоточена в ее центре, доказать, что скорость вращения  $V_0$  для расстояния Солнца от центра определяется выражением

$$V_0 = \frac{cl}{2l \cdot \{(\operatorname{cosec} \theta)^{1/2} - \sin \theta\}} \text{ км/с.}$$

где  $c$  — скорость света (в км/с).

15.4. Звезда на расстоянии 10 пс имеет видимый блеск  $0.0^m$ , в то время как шаровое скопление 47 Тукана (расстояние 4,6 кпс) имеет видимый блеск  $4.0^m$ . В предположении, что выбранная нами звезда является типичным представителем звезд шарового скопления, оценить число звезд в скоплении.

15.5. Две звезды, лежащие в галактической плоскости, имеют долготы  $l$  и  $90^\circ - l$ ; их собственные движения по галактической долготе равны  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Предполагая, что орбиты круговые, а Галактика действует как материальная точка, показать, что

$$l = \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \right) \right].$$

15.6. В предположении, что гравитационное притяжение на расстоянии Солнца от галактического центра вызвано на  $2/3$  тяготением центральной массы (материальной точки), а на  $1/3$  — массой, равномерно распределенной внутри сфероида (Солнце находится внутри этого сфероида), доказать, что  $A + B = 0$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные Оорта.

15.7. Показать для случая сферически-симметричной звездной системы в стационарном состоянии, что решением уравнения Больцмана оказывается функция

$$f = f(V_R^2 + V_T^2 - 2U, rV_T),$$

где  $V_R$  и  $V_T$  — лучевая и нормальная к ней скорости соответственно ( $V_R = \dot{r}$ ,  $V_R^2 + V_T^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ), а  $U$  — гравитационный потенциал.

15.8. Наблюдатель на планете, обращающейся вокруг звезды, которая в свою очередь движется по круговой орбите радиуса  $r$  вокруг центра шарового звездного скопления с однородной плотностью  $\rho$  и радиусом  $R$ . Этот наблюдатель обнаруживает, что асимметрия звездных движений для быстро движущихся звезд определяется скоростью  $v$  относительно звезды наблюдателя. Доказать, что скорость движения  $v_c$  звезды наблюдателя по своей орбите определяется выражением

$$v_c = v \{[(3R^2/r^2) - 1]^{1/2} - 1\}.$$

## Литература

1. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 74, 5, 1913.
2. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 75, 366, 1915.
3. *Jeans J. H.* Astronomy and Cosmogony. Cambridge, CUP, 1928.
4. *Lindblad B.* Handbuch der Astrophysik, vol. 2. Springer-Verlag, 1933, p. 1033.
5. *Oort J. H.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, 3, 275, 1927.
6. *Oort J. H.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, 4, 79, 1927.
7. *Oort J. H.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, 4, 269, 1928.

## Рекомендуемая литература

- Becker W., Contopoulos G. (ed.)* IAU Symposium No. 38. Dordrecht, Reidel, 1970.
- Blaauw A., Schmidt M. (ed.)* Galactic Structure. University of Chicago Press, 1965.
- Chandrasekhar S.* Principles of Stellar Dynamics, New York, Dover, 1960.
- Contopoulos G. (ed.)* IAU Symposium No. 25. New York, Academic, 1966.
- Eddington A. S.* Stellar Movements and The Structure of The Universe. London, Macmillan, 1914.
- Hayli A. (ed.)* IAU Symposium No. 69. Dordrecht, Reidel, 1975.
- Kozai T. (ed.)* IAU Symposium No. 62. Dordrecht, Reidel, 1974.
- Lecar M. (ed.)* IAU Colloquium No. 10. Dordrecht, Reidel, 1970.
- Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. — М.: Физматгиз, 1959.
- Smart W. M.* Stellar Dynamics. London, Cambridge University Press, 1938.
- Tapley B. D., Szebehely V. (ed.)*. Recent Advances in Dynamical Astronomy. Dordrecht, Reidel, 1973.
- Trumpler R. J., Weaver H. F.* Statistical Astronomy. Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1953.

# Ответы к задачам

## Глава 2

2.1. 1) 638 морск. миль; 2) 1444 морск. миль.

2.2. 3 ч 3,4 мин.

2.3.  $56^{\circ} 00'$ ; 36,7 мин после отлета из Прествика. (Указание: на наибольшей северной широте курс самолета составляет  $270^{\circ}$  E при отсчете от точки севера.)

2.4.  $0^h, 0^{\circ} 00'$ ;  $6^h, 23^{\circ} 27' N$ ;  $12^h, 0^{\circ} 00'$ ;  $18^h, 23^{\circ} 27' S$ . (Указание: видимый путь Солнца по небосводу на фоне звезд — это эклиптика. Одно обращение по эклиптике совершается Солнцем за год; Солнце находится в точке весны  $\Upsilon$  около 21 марта.)

2.5. 1) Прямое восхождение  $2^h$ , склонение  $60^{\circ} N$ ; 2) долгота  $\sim 50^{\circ}$ , широта  $\sim 30^{\circ} N$ .

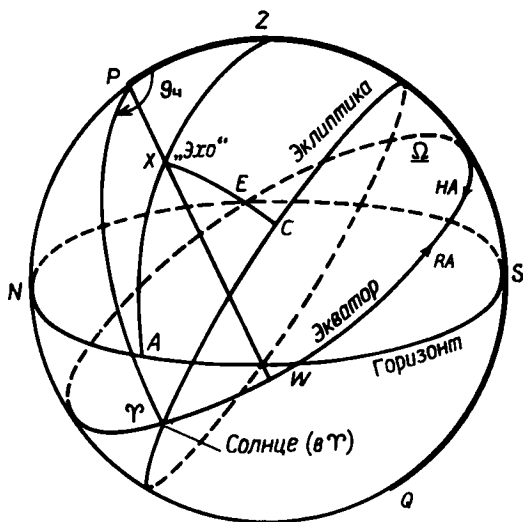


Рис. А.1.

2.6. Прямое восхождение  $2^h 24^m$ , склонение  $59^{\circ} 35' N$ .

2.7. 8 ч пополудни (20 ч).

2.8.  $6^{\circ} 33'$ .

2.10. 23 ч 05 мин 54 с.

2.11. Местное стандартное время равно часовому углу Солнца минус местное время. Следовательно, на диаграмме можно отметить положение точки  $\Upsilon$  и Солнца и тем самым определить эклиптику.

2.12. 1) Пункт В имеет координаты  $44^{\circ} 30' S, 14^{\circ} 08' W$ ; 2) 11.00 ч 8 января. (Указание: в задачах подобного рода, особенно когда имеет место пересечение международной линии дат, принято использовать гринвичское среднее



время (GMT) совместно с соответствующей датой; последняя называется *гринвичской датой* и используется в качестве промежуточной.)

2.13.  $09^{\text{h}} 23^{\text{m}} 41,6^{\text{s}}$ .

2.14. Поправка часов (местное время минус показания часов) равна  $-13,4$  с и  $-12,3$  с. Ход часов равен  $+1,1$  с за 24 ч.

2.15. 17 ч 07 мин 29 с. (*Указание:* получить гринвичское среднее время GMT наблюдения, затем интервал среднего солнечного времени между этим гринвичским временем и 0 ч GMT 13 декабря. Преобразовать этот интервал в звездное время, чтобы получить гринвичское звездное время наблюдения. После этого использовать значение долготы.)

2.16.  $22^{\text{h}} 21^{\text{m}} 31^{\text{s}}$ .

2.17. 13 ч 44 мин  $^{\circ}2$  с звездного времени; 02 ч 40 мин 22 с местного времени;  $285^{\circ} 40'$  к востоку от точки севера.

### Глава 3

3.1. 6,67 раз.

3.2.  $M = 1,26$  для Сириуса,  $M = 2,95$  для Прочюна.

3.3. От 158,5 до 1.

3.4. 5,1 км/с (удаление).

3.5.  $28^{\circ} 00' 31''$ .

3.6.  $\phi = 66^{\circ} 46' 39'' \text{ N}$ ,  $\delta = 56^{\circ} 29' 34'' \text{ N}$ .

3.7. 1) прямое восхождение  $0^{\text{h}}$ , склонение  $0^{\circ}$ ; 2) прямое восхождение  $6^{\text{h}}$ , склонение  $+23^{\circ} 27'$ . (*Указание:* никакие расчеты не нужны. Начертите график и нанесите на него положения равноденствий и экваторов.)

3.8.  $da/dt = 4,4274^{\text{s}}$ ,  $db/dt = 4,0069^{\text{s}}$  (используйте 5-значные таблицы логарифмов).

3.10. Топоцентрическое прямое восхождение  $2^{\text{h}} 11^{\text{m}} 40^{\text{s}} = 32^{\circ} 55'$ . Топоцентрическое склонение  $32^{\circ} 56' \text{ N}$ . Геоцентрическое прямое восхождение  $5^{\text{h}} 44^{\text{m}} 48^{\text{s}} = 86^{\circ} 12'$ . Геоцентрическое склонение  $54^{\circ} 35' \text{ N}$ . (*Указание:* точно вычерченный график часто бывает полезен для проверки выводов о квадрантах, в которых находятся искомые углы.)

### Глава 4

4.2. Отношение (скорость в перигелии)/(скорость в афелии) равно 60,16. Соответствующее отношение для угловых скоростей равно 3619.

4.4. Половина расстояния Земли от Солнца. [*Указание:* используйте уравнение (4.82) и соотношение

$$t = (p/2) [1 + \lg^2 (f/2)].$$

Продифференцируйте  $(t - \tau)$  для нахождения максимума после подстановки  $r = 1$ .]

4.7.  $E = 116 31'$ .

4.8. Направление по вертикали; 145 800 км; 54,40 ч. [*Указание:* значение угла показывает, что ни один участок орбиты не лежит внутри Земли. Вторая орбита характеризуется тем же значением скорости относительно «вертикального» запуска (прямолинейный эллипс).]

4.9. Отношение массы Солнца к массе Земли равно 331 700.

4.10. Орбита является эллипсом со следующими элементами:  $a = 0,7227$  большой полуоси земной орбиты;  $e = 0,5762$ ;  $i = 11^{\circ} 57'$ ;  $\Omega = 300^{\circ} 19'$ ;  $\omega = -315^{\circ} 53'$ ;  $\tau = (1962 \text{ ноябрь } 20,72)$ .

### Глава 5

5.1. Исследование уравнения (5.2) показывает, что если  $R_i$ ,  $g_i$  образует решение задачи  $n$  тел, то тогда  $DR_i$ ,  $Dg_i$  также образует решение, если все интервалы времени умножены на  $D^{3/2}$ .

5.2. Сферы с центром в «неподвижном» теле, как показывает уравнение (4.16). Прямолинейный эллипс.

5.3. Приведенная задача  $n$  тел полностью разрешима и сводится к простым гармоническим движениям. В таком случае для любого радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{ij}$  мы имеем

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} \cos Nt + \mathbf{b}_{ij} \sin Nt,$$

где  $\mathbf{a}_{ij}$  и  $\mathbf{b}_{ij}$  — постоянные,  $N = (k \sum_i m_i)^{1/2}$  ( $k$  — постоянная тяготения). Отсюда радиус-вектор  $\mathbf{R}_i$  (от центра масс до массы  $m_i$ ) определяется выражением

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{A}_i \cos Nt + \mathbf{B}_i \sin Nt,$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — постоянные.

5.4.  $T = 2\pi/N$ ; центр масс движется с постоянной скоростью.

## Глава 6

6.1. Указание:  $d^2x/dt^2 = g$  дает нам  $x = \frac{1}{2}gt^2 + at + b$ . Варьируя  $a$  и  $b$  и используя условие, выраженное соотношением (6.26), получаем,  $\dot{a}t + b = 0$ . Отсюда имеем  $\dot{a} = \epsilon gx$ .

6.2. Искомый эксцентриситет выражается как

$$e = e_0 + \frac{Gm_1 \sqrt{1 - e_0^2}}{na_0^2 \epsilon_0} \left\{ \left( \sum kP \sin Q \right) t - \sum \frac{P' \cos Q}{hn + h_1 n_1} [k + h(1 - \sqrt{1 - e_0^2})] \right\}.$$

6.3. В рассматриваемой задаче возмущающая функция имеет вид  $\mu \lambda r^2 / 3r^3$ . Используйте уравнение для  $\dot{\omega}$  из системы (6.30).

6.4. Если  $M_0$  — масса при  $t \rightarrow 0$ , то  $M = M_0 - \alpha t$ , где  $\alpha$  — малая положительная постоянная. Тогда возмущающая функция  $R$  для малых  $e$  определяется как

$$R = -\frac{G\alpha t}{r} \approx -\frac{G\alpha t}{a} [1 + e \cos(nt + \epsilon - \bar{\omega})].$$

Исследуя относящиеся к данной задаче уравнения из системы (6.30), мы видим, что  $\dot{\Omega} = di/dt = 0$ . Остальные четыре уравнения можно сразу проинтегрировать после подстановки в них выражений для  $\partial R / \partial e$  и т. д. для полученных возмущений первого порядка.

6.5. Указание:  $D = -T'$ ; требуемое выражение получается путем использования уравнения (6.42), первого уравнения системы (6.41) и соответствующих уравнений задачи двух тел из гл. 4.

Глава 10

10.5.  $46^{\circ} 23'$ ;  $106^{\circ} 51'$ .

10.6.  $\dot{\omega} = 5,28^{\circ}$  за сутки;  $\dot{\Omega} = -3,51^{\circ}$  за сутки.

Глава 11

11.1. 1) Приращение скорости удвоится, 2) новое приращение равно прежнему плюс  $0,6932 v_e$ .

11.2.  $2,6153$  км/с;  $54,99$  км.

11.3. (Указание: выражение для  $R$  в качестве неизвестного может быть получено методом последовательных приближений.)  $R = 6,705$ ;  $M_0 = 5,141 \times 10^8$  г.

11.4. 1)  $\Delta v_1 = \Delta v_A + \Delta v_B = (0,5376 + 0,2186) \pi = 0,7562\pi$  а.е./год. (рис. А.2).

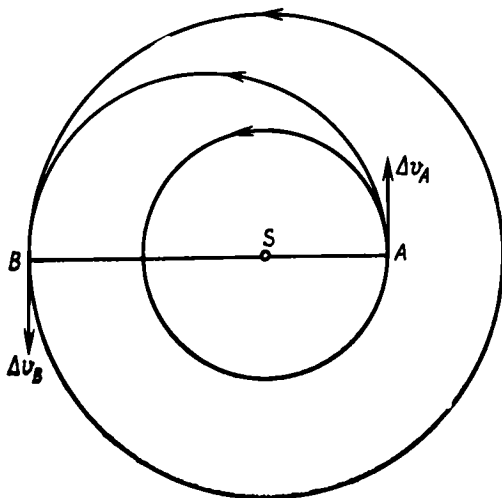


Рис. А.2.

2)  $\Delta v_2 = \Delta v'_A + \Delta v'_C + \Delta v'_B = (0,5532 + 0,1654 + 0,0302) \pi = 0,7488 \pi$  а. е./год. (рис. А.3).

11.5. Отношение времени биэллиптического перехода ко времени единичного перехода равно  $5,468$ .

11.6. Экономия времени перехода составляет  $(1,4142 - 0,6012) = 0,8130$  года.

11.7. 1)  $0,3382 \pi$  а. е./год в направлении касательной; 2)  $1,139 \pi$  а. е./год в направлении, составляющем угол  $12^{\circ} 31'$  с радиусом-вектором.

11.8. В восходящем и нисходящем узлах плоскости внутренней орбиты относительно плоскости внешней орбиты. Изменение наклона может быть произведено во внешней части перехода. Экономия приращения скорости составляет  $(0,8273 - 0,7980) \pi = 0,0293 \pi$  а. е./год.

11.9.  $\Delta e = \Delta a = 0$ ;  $\Delta \omega = 2,036'$ ;  $\Delta \tau = -0,374$  с.

11.10. 1986 январь 26,8; 1,930 года.

11.11. Примерно  $1'$ .

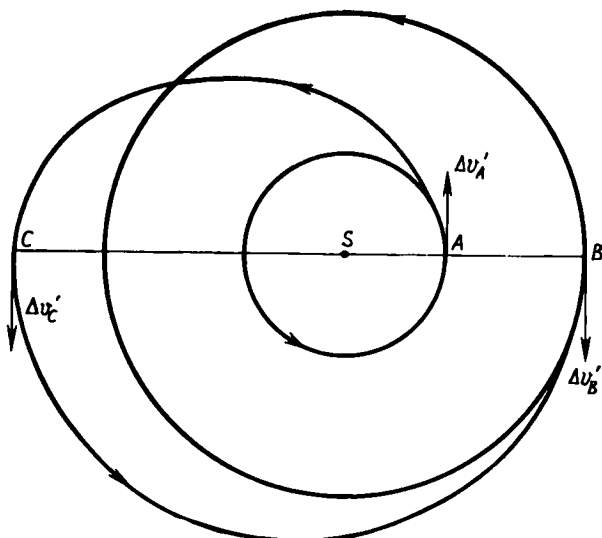


Рис. А.3.

## Глава 12

12.1.  $0,216^\circ$  за 1 с.

12.2. 88 260 км. (Указание: угловая скорость вращения Луны равна  $0,00958$  рад/ч, что представляет собой угловую скорость обращения спутника.) Это расстояние больше, чем радиус гравитационной сферы влияния Луны (66 190 км).

12.3.  $d_1 = 0,9002$ ;  $d_2 = 1,125$ .

12.4. 0,14.

12.5.  $AL_1 = 0,9929$ ,  $AL_2 = 0,8490$ ,  $AL_3 = 1,1678$ . (Указание: угловая скорость  $n$  прямой  $AB$  относительно центра масс системы дает нам значение  $G(m_E + m_M)$  из выражения  $n^2 a^3 = G(m_E + m_M)$ , поскольку  $a = 1$ . Приравнивание центробежной силы, действующей на космический зонд, общей силе притяжения дает нам уравнение 5-й степени для неизвестного расстояния; это уравнение можно решить методом последовательных приближений.)

12.6. 21 193 000 км для Юпитера, 9450 км для Марса.

12.7. 1) 2,30 км/с, 3,51 км/с.

12.8. Период перелета к астероиду, когда тот находится в афелии, равен точно 1 году; отсюда следует, что при возвращении корабля вдоль второй половины орбиты перехода на орбиту Земли корабль снова встретит Землю. Требуемый гиперболический избыток скорости составляет  $0,3408$  а. е. год $^{-1}$  = 5,078 км/с.

12.9. Используя уравнения (4.91), (4.88) для  $f = 0$ , уравнения (4.92), (4.97), (4.100) и (4.101) и соответствующие числовые данные из приложений, получаем, что время полета равно 143 ч, стартовая скорость 11,9 км/с.

12.10. Пусть периоды для Земли и зонда равны  $T_E$  и  $T$  соответственно. Тогда  $T = T_E - 1$ . Точно так же  $r = r_E - 1$  а. е. Отсюда  $\bar{V} = V_E$ ; кроме того,  $\gamma = 90 - \theta/2$ . Если  $\angle SPB \neq 90^\circ$ , то орбита зонда не будет круговой. Из рис. А.4  $FD = DP \sin \angle DPF = V \sin (\angle SPD - 90^\circ) = V \sin (90^\circ - \gamma)$ ,

откуда

$$FD = V \sin (\theta/2).$$

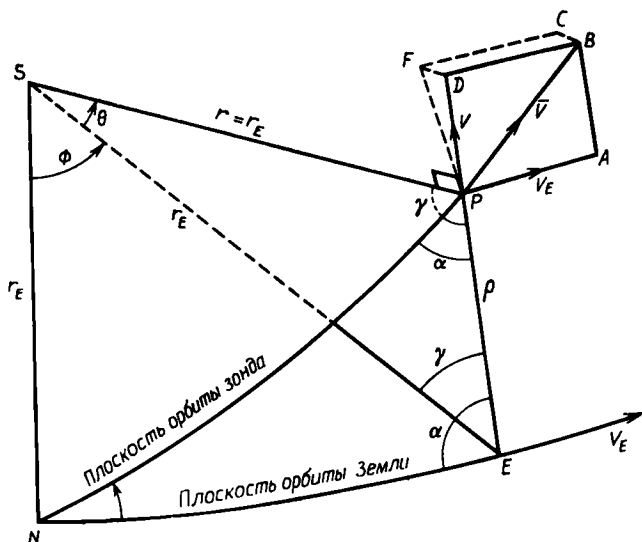


Рис. А.4.

Далее,

$$\angle SPB = 90^\circ + \angle CPB = 90^\circ + (V/\bar{V}) \sin(\theta/2).$$

Следовательно, эксцентриситет  $e$  орбиты зонда определяется выражением

$$e^2 = 1 - \frac{r}{a} \left( 2 - \frac{r}{a} \right) \sin^2 \angle SPB \approx \sin^2 \left( \frac{V}{\bar{V}} \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Но  $\theta \ll 1^\circ$  и  $(V/\bar{V}) \approx 0,168$ . Отсюда  $e \ll 0,0015$ .

Если орбиты зонда и Земли пересекаются в точке  $N$  и  $\angle NEP = \alpha$ , тогда  $\angle APE = \angle PAB = \alpha$ . Кроме того,

$$\sin(\theta/2) = \rho/2r_E$$

и, поскольку  $\bar{V} = V_E$ ,

$$V = 2V_E \cos \alpha.$$

Теперь, полагая  $\angle NSE = \phi$ , из сферического треугольника  $NPE$  имеем

$$\sin(i/2) = \sin(\theta/2) \operatorname{cosec} \phi,$$

что даст

$$\sin(i/2) = (\rho/2r_E) \operatorname{cosec} \phi.$$

Однако

$$\cos \alpha = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \operatorname{ctg} \phi = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{ctg} \phi$$

и

$$\cos \alpha = (V/2V_E) = 0,08389,$$

что дает  $\alpha = 85^\circ 11'$ . Следовательно,  $\theta$  должно быть  $1^\circ 1,1'$  и  $\phi = 6^\circ 03'$ . Подставляя полученные значения в выражения для  $\rho$  и  $r_E$  находим, что  $i = 9^\circ 40'$ . Ракета запускается с Земли (независимо от либрации), так что максимальное геоцентрическое расстояние достигается примерно через 3 месяца после вывода на орбиту, когда

$$\rho_E = 2r_E \sin(i/r) = 25,24 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

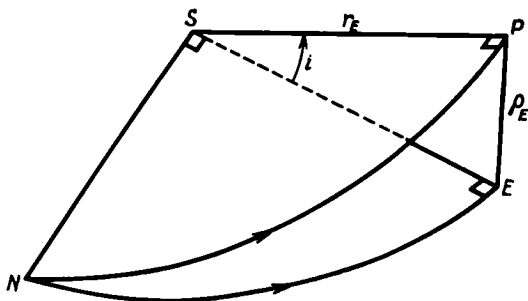


Рис. А.5.

Зонд возвращается в пределы гравитационной сферы Земли примерно через 6 месяцев после запуска.

## Глава 14

14.1. Звездные величины нельзя просто складывать, а значения блеска можно. Если  $B$ ,  $B_1$  и  $B_2$  — общий блеск двойной звезды и ее компонентов, тогда

$$B = B_1 + B_2.$$

Это дает нам (см. разд. 3.2) соотношение

$$10^{-0,4m} = 10^{-0,4 \times 8,3} + 10^{-0,4 \times 7,6},$$

из которого мы получаем  $m = 7,14$ .

14.2.  $m_1 = 6,82$ ,  $m_2 = 4,47$ ,  $B_2/B_1 = 8,71$ .

14.3. Массы компонентов равны 0,878 и 1,201.

14.4.  $0,0238m$  и  $-0,4762m$ .

14.5. Используйте формулу Доплера для вывода значения орбитальной скорости и отсюда — большой полуоси (в км). Применение (14.2) дает нам сумму масс (2,388 солнечных масс). Теперь из (14.6) получаем параллакс, равный  $0,0715''$ .

14.6. Каждый «сигнал» о затмении передается с расстояния, на  $30 \times 3,12 \times 24 \times 3600$  км больше предыдущего. Указанную разность расстояний свет проходит за 27 с.

14.7. На рис. А.6 показана небесная сфера для спектрально-двойной звезды. Компонент С обращается вокруг центра масс двойной системы (точка G). Требуется найти компонент скорости вдоль луча зрения GZ (т. е. лучевую скорость). Следовательно,  $R = \dot{z}$ , где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты компонента С. Далее,  $z = r \sin BD$ . Из треугольника NBD при помощи формулы синусов находим

$$z = r \sin BD = r \sin(\omega + f) \sin i.$$

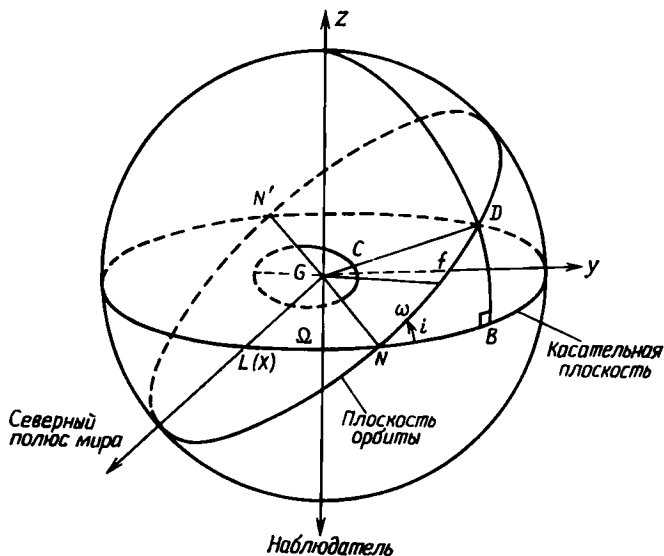


Рис. А.6.

Задача двух тел дает нам формулы

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad r^2 \frac{df}{dt} = h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad n^2 a^3 = \mu.$$

Дифференцируя полученное выражение для  $z$  и используя приведенные выше формулы, мы получаем требуемое соотношение.

14.8.  $P_0 = 0,151$ , с применением соотношения  $M_1 + M_2 = 2$  в формуле (14.6). Первое приближение для абсолютных звездных величин (при использовании видимых звездных величин) дает  $5,04^m$  и  $7,24^m$ . Из зависимости масса—светимость (см. рис. 14.4) мы получаем второе приближение для значений масс:  $0,851$  и  $0,550$ ;  $M_1 + M_2 = 1,401$ , что дает  $P_1 = 0,169$ . Новый шаг вычисления не меняет значения  $P$  даже в последней значащей цифре.

## Глава 15

15.1.  $1,347 \cdot 10^{11}$ . (Используйте метод Ньютона для вычисления массы планеты в долях солнечной массы.)

15.2.  $1,044 \cdot 10^{11}$ .

15.4. 5315. Используйте формулы

$$M = m + 5 - 5 \lg d$$

и

$$B_1/B_2 = 10^{-0,4(m_1 - m_2)}$$

15.5. Указание: возьмите второе уравнение из (15.50) при  $b = 0$ .

15.8. Указание: асимметрия устанавливается, когда сумма  $v_c + v$  равна скорости освобождения  $v_{осв}$ . Далее,

$$v_c^2 = \frac{GM(r)}{r} = \frac{4}{3} \pi G \rho r^2.$$

Для условий убегания мы имеем

$$\frac{1}{2} (v_{\text{осв}})^2 - U(r) = 0.$$

Но

$$-\frac{dU}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2},$$

что дает

$$U(r) = A - \frac{3}{2} \pi G \rho r^2.$$

Для  $r = R$  мы получаем

$$U(R) = \frac{GM}{R} = A - \frac{2}{3} \pi G \rho R^2,$$

и

$$A = 2\pi G \rho R^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} (v_{\text{осв}})^2 = 2\pi G \rho \left( R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right).$$

Подстановка в сумму

$$v_c + v = v_{\text{осв}}$$

приводит к результату

$$v_c = v \left\{ \left[ (3R^2/r^2) - 1 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{-1}.$$



# Приложения

## Приложение I

### Астрономические и физические постоянные [1]

#### 1. Солнце

Радиус 696 000 км = 432 000 миль

Масса =  $1,99 \cdot 10^{33}$  г

Средняя плотность = 1,41 г/см<sup>3</sup>

Ускорение силы тяжести на поверхности =  $2,74 \cdot 10^4$  см/с<sup>2</sup> = 27,9g

#### 2. Земля

1 астрономическая единица (а. е.) = 149 596 000 км = 92 955 000 миль  
(радиолокационные измерения)

Экваториальный радиус  $a$  = 6378,12 км = 3963,2 миль

Сплюснутость  $f$  = 1/298,2 = 0,003 352

Полярный радиус  $b$  = 6356,74 км = 3949,9 миль

Эксцентриситет  $e$  = 1/12,22 = 0,08183

Масса =  $5,98 \cdot 10^{27}$  г

Средняя плотность = 5,52 г/см<sup>3</sup>

Нормальное ускорение силы тяжести  $g = (980,64 - 2,59 \cos 2\phi)$  см/с<sup>2</sup>, где  $\phi$  — геодезическая широта

$$b = a(1 - f), \quad b^2 = a^2(1 - e^2), \quad e^2 = 2f - f^2$$

#### 3. Луна

Средний радиус = 1738 км = 1080 миль

Масса =  $7,35 \cdot 10^{25}$  г

Скорость освобождения с поверхности = 2,37 км/с

Ускорение силы тяжести на поверхности = 162 см/с<sup>2</sup> = 0,16g

#### 4. Физические постоянные

Скорость света = 299 791 км/с

Постоянная тяготения =  $6,668 \cdot 10^{-8}$  дин · см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>

Наклонение эклиптики = 23° 27' 08,26" = 46,84"  $T$  (здесь и далее  $T$  измеряется в юлианских столетиях от эпохи 1900,0)

Постоянная общей прецессии = 50,2564" + 0,0222"  $T$

Постоянная аберрации = 20,49"

Постоянная нутации = 9,207"

**5. Время****Продолжительность секунды**

1 эфемеридная секунда =  $1/31\,556\,925,975$  продолжительности тропического года в эпоху 1900,0

1 средняя солнечная секунда (сглаженная) = 1 эфемеридной секунде (с точностью  $1 \cdot 10^{-8}$ )

1 средняя солнечная секунда = 1,0027379093 средней звездной секунды

**Продолжительность суток**

1 средние солнечные сутки = 1,0027379093 звездных суток = 24 ч 03 мин 56,5554 с среднего звездного времени = 86 636,5554 средних звездных секунд

1 звездные сутки = 0,997 269 5664 средних солнечных суток = 23 ч 56 мин 04,0905 с среднего солнечного времени = 86 164,0905 средних солнечных секунд

**Продолжительность месяца**

Синодический	29,53059 сут или 29 сут 12 ч 44 мин 03 с
Сидерический	27,32166 или 27 07 43 12
Аномалистический	27,55455 или 27 13 18 33
Драконический	27,21222 или 27 05 05 36
Тропический	27,32158 или 27 07 43 05

**Продолжительность года**

Тропический (прохождение через $\Upsilon$ )	365,24220 сут или 365 сут 05 ч 48 мин 46 с
Аномалистический (прохождение через перигей)	365,25964 или 365 06 13 53
Юлианский	365,25 или 365 06 00 00
Сидерический (звездный)	365 25636 или 365 06 09 10

**6. Математические постоянные и коэффициенты перехода**

1 радиан =  $57,29578^\circ = 3437,747' = 206264,8''$

$e = 2,71828183$

$\pi = 3,14159265$

$\lg x = 0,43429448 \ln x$

$\ln x = 2,30258509 \lg x$

1 км/с = 2236,9 миль/ч

1 км = 0,62137 мили = 3280,8 фт

1 миля = 1,6093 км

1 фт/с = 0,30480 м/с

1 а. е./год = 2,9456 миль/с = 4,7404 км/с

1 г =  $2,204622 \cdot 10^{-3}$  фунта =  $0,984206 \cdot 10^{-6}$  тонны (большой)

## 7. Галактика

Диаметр = 30 000 парсек (пс)

Средняя толщина = 2000 пс

Полная масса =  $1,4 \cdot 10^{11}$  масс Солнца

Расстояние Солнца от центра Галактики = 8500 пс

Линейная скорость вращения Галактики в окрестностях Солнца =  
= 250 км/с

Постоянные Оорта галактического вращения:  $A = +0,020$  км/(с  $\times$   
 $\times$  пс);  $B = -0,013$  км/(с  $\cdot$  пс)

## Приложение II

### Гравитационное поле Земли

Гравитационный потенциал  $U$  Земли для внешней точки на расстоянии  $r$  от центра масс определяется выражением

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right],$$

где  $\phi$  — геоцентрическая широта точки,  $P_n$  — полином Лежандра порядка  $n$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли,  $R$  — экваториальный радиус Земли,  $J_n$  — постоянные.

Ниже приведены недавно выведенные значения постоянных  $J_n$ , а также  $GM$  и  $R$  [3—6].

$$\begin{array}{ll} 10^6 J_2 = 1082,63 \pm 0,01 & 10^6 J_3 = -2,51 \pm 0,01 \\ 10^6 J_4 = -1,60 \pm 0,01 & 10^6 J_5 = -0,13 \pm 0,01 \\ 10^6 J_6 = 0,50 \pm 0,01 & 10^6 J_7 = -0,36 \pm 0,01 \\ 10^6 J_8 = -0,12 \pm 0,02 & 10^6 J_9 = -0,10 \pm 0,02 \\ 10^6 J_{10} = -0,35 \pm 0,02 & 10^6 J_{11} = 0,20 \pm 0,04 \\ 10^6 J_{12} = -0,04 \pm 0,03 & 10^6 J_{13} = -0,12 \pm 0,05 \end{array}$$

$$GM = 398603,2 \text{ км}^3/\text{с}^2$$

$$R = 6378,165 \text{ км}$$

### Полиномы Лежандра

Если  $P_n(x)$  — полином Лежандра порядка  $n$  от  $x$ , то

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

откуда

$$\begin{array}{l} P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ P_6(x) = \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{array}$$

и т. д.

Следует отметить, что в приведенное выше выражение для  $U$  не включены тессеральные и секториальные гармоники.

### Приложение III

Средние элементы орбит планет (эпоха 1960 январь 1,5, эфемеридное время) [1]

Планета	Среднее расстояние от Солнца		Сидерический период обращения, троп. годы	Синодический период обращения, сут	Среднее суточное движение $n$	Скорость на орбите, км/с
	а. е.	10 <sup>6</sup> км				
Меркурий	0,387099	57,9	0,24085	115,88	4,092339 <sup>o</sup>	47,8
Венера	0,723332	108,1	0,61521	583,92	1,602131	35,0
Земля	1,000000	149,5	1,00004	—	0,985609	29,8
Марс	1,523691	227,8	1,88089	779,94	0,524033	24,2
Юпитер	5,202803	778	11,86223	398,88	0,083091	13,1
Сатурн	9,538843	1426	29,45772	378,09	0,033460	9,7
Уран	19,181951	2868	84,01331	369,66	0,011732	6,8
Нептун	30,057779	4494	164,79345	367,48	0,005981	5,4
Плутон *	39,43871	5896	247,686	366,72	0,003979	4,7

Планета	Наклонение	Эксцентриситет	Средняя долгота		
			узла	перигелия	в эпоху
Меркурий	7,00399 <sup>o</sup>	0,205627	47,85714 <sup>o</sup>	76,83309 <sup>o</sup>	222,62165 <sup>o</sup>
Венера	3,39423	0,006793	76,31972	131,00831	174,29431
Земля	0,0	0,016726	0,0	102,25253	100,15815
Марс	1,84991	0,093368	49,24903	335,32269	258,76729
Юпитер	1,30536	0,048435	100,04444	13,67823	259,83112
Сатурн	2,48991	0,055682	113,30747	92,26447	280,67135
Уран	0,77306	0,047209	73,79630	170,01083	141,30496
Нептун	1,77375	0,008575	131,33980	44,27395	216,94090
Плутон *	17,1699	0,250236	109,88562	224,16024	181,64632

\* В качестве элементов орбиты Плутона приведены оскулирующие значения для эпохи 1960 сентябрь 23,0, эфемеридное время.

Приближенные элементы орбит четырех крупнейших астероидов (эпоха 1957 июнь 11, эфемеридное время; элементы отнесены к средним равноденствию и эклиптике 1950,0) [1]

Астероид	Среднее расстояние от Солнца, а. е.	Среднее суточное движение	Наклонение	Эксцентриситет
Церера	2,7675	0,21408 <sup>o</sup>	10,607 <sup>o</sup>	0,07590
Паллада	2,7718	0,21358	34,798	0,23402
Юнона	2,6683	0,22612	12,993	0,25848
Веста	2,3617	0,27157	7,132	0,08888

Продолжение таблицы «Приближенные элементы орбит ...»

Астероид	$\Omega$	$\omega$	Средняя аномалия в эпоху	Диаметр астероида, км
Церера	80,514°	152,367°	279,880°	770
Паллада	172,975	122,734	271,815	490
Юнона	170,438	56,571	329,336	190
Веста	104,102	253,236	79,667	390

**Приложение IV**

Физические характеристики планет [1]

Планета	Экваториальный радиус, км	Обратное значение сжатия	Масса (в массах Земли)	Средняя плотность, г/см <sup>3</sup>
Меркурий	2 420	$\infty$	0,056	5,13
Венера	6 200	$\infty$	0,817	4,97
Земля	6 378	297	1,000	5,52
Марс	3 400	192	0,108	3,94
Юпитер	71 370	16,1	318,0	1,33
Сатурн	60 400	10,4	95,2	0,69
Уран	23 530	16	14,6	1,56
Нептун	22 300	50	17,3	2,27
Плутон	7 020?	?	0,9?	4?

Планета	Сила тяжести на поверхности *	Скорость осевого вободнения, км/с	Период вращения	Наклонение экватора к плоскости орбиты
Меркурий	0,36	4,2	58 сут 16 ч	47°
Венера	0,87	10,3	243 сут (обр.)	~179°
Земля	1,00	11,2	23 ч 56 мин 04 с	23° 27'
Марс	0,38	5,0	24 ч 37 мин 23 с	23° 59'
Юпитер	2,64	61	9 ч 50 мин 30 с **	3° 04'
Сатурн	1,13	37	10 ч 14 мин **	26° 44'
Уран	1,07	22	10 ч 49 мин	97° 53'
Нептун	1,41	25	14 ч	28° 48'
Плутон	?	10?	6,39 сут	?

\* За единицу принята сила тяжести на поверхности Земли.

\*\* У этих планет период вращения зависит от широты, увеличиваясь к полюсам. В случае Плутона приведенное значение весьма неопределенно.

**Кольца Сатурна \***

Кольцо	Край кольца	Диаметр, 10 <sup>3</sup> км
А Внешнее	Внешний	272,1
	Внутренний	239,5
В Внутреннее	Внешний	234,0
	Внутренний	180,9
С Креповое	Внутренний	149,2

\* Толщина колец меньше 20 км.

Элементы орбит и размеры спутников [1]

Планета и спутник	Среднее расстояние от планеты, $10^3$ км	Сидерический период, сут	Наклонение орбиты к плоскости экватора (орбиты) планеты	Эксцентриситет средней орбиты	Радиус спутника, км [2]	Обратное значение массы [2] (масса планеты / масса спутника)
<i>Земля</i>						
Луна	384,4	27,32166	5° 08'	0,05490	1738	81,3
<i>Марс</i>						
Фобос	9,4	0,31891	0° 57'	0,0210	11	?
Деймос	23,5	1,26244	1° 18'	0,0028	6	?
<i>Юпитер</i>						
V	181	0,49818	0° 24'	0,003	100	?
I	422	1,76914	0	0	1826	21 300
II	671	3,55118	0	0	1450	39 000
III	1 071	7,15455	0	0	2500	12 700
IV	1 884	16,68902	0	0	2250	17 800
VI	11 480	250,57	(27° 38')	0,15798	50	?
VII	11 740	259,65	(24° 46')	0,20719	15	?
	11 860	263,55	(29° 01')	0,13029	10	?
X	12 300	252	?	?	?	?
XIII	21 200	631,1	(147°)	0,16870	10	?
XII	22 600	692,5	(164°)	0,20678	10	?
XI	23 500	738,9	(145°)	0,378	10	?
VIII	23 700	758	(153°)	0,275	10	?
IX						

Продолжение таблицы «Элементы орбит и размеры...»

Планета и спутник	Среднее расстояние от планеты, $10^3$ км	Сидерический период, сут	Наклонение орбиты к плоскости экватора (орбиты) планеты	Эксцентриситет средней орбиты	Радиус спутника, км [2]	Обратное значение массы [2] (масса планеты / масса спутника)
<i>Сатурн</i>						
I Минмас	186	0,94242	1° 31'	0,0201	250	$15 \cdot 10^6$
II Энцилад	238	1,37022	0° 01'	0,00444	300	$7 \cdot 10^6$
III Тетия	295	1,88780	1° 06'	0	520	$0,91 \cdot 10^6$
IV Диона	378	2,73692	0° 01'	0,00221	410	$0,49 \cdot 10^6$
V Рея	527	4,51750	0° 21'	0,00098	790	$0,25 \cdot 10^6$
VI Титан	1 222	15,94545	0° 20'	0,0289	2910	4150
VII Гиперион	1 481	21,27666	0° 26'	0,104	250	$5 \cdot 10^6$
VIII Япет	3 562	79,33082	14° 43'	0,02828	800	$0,30 \cdot 10^6$
IX Феба	12 960	550,45	(150 )	0,16326	100	?
X Янус	160	0,74931	?	?	150	?
<i>Уран</i>						
V Миранда	124	1,414	0	<0,01	150?	$10^6$
I Ариэль	192	2,52038	0	0,0028	400	67 000
II Умбриэль	267	4,14418	0	0,0035	300	170 000
III Титания	438	8,70588	0	0,0024	600	20 000
IV Оберон	587	13,46326	0	0,0007	500	34 000
<i>Нептун</i>						
I Тритон	354	5,87683	159° 57'	0	1850	750
II Нереида	5 570	359,4	(27 27')	0,76	150	?

## Литература

1. Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac. Reprinted by permission of Her Majesty's Stationery Office, Atlantic House, Holborn Viaduct, London E. C. 1.
2. Handbook of the British Astronomical Association for 1977.
3. *King-Hele D. G., Cook G. E., Scott D. W.* Planet. and Space Sci., **15**, 741, 1967.
4. *King-Hele D. G., Cook G. E., Scott D. W.* Planet. and Space Sci., **17**, 629, 1969.
5. *Kozai Y.* Publ. Astron. Soc. Japan, **16**, 263, 1964.
6. *Kozai Y.* Smithsonian Institution Astrophysical Observatory, Special Report No. 295, 1959.

## Рекомендуемая литература

*Allen C. W.* Astrophysical Quantities, 3rd ed. London, Athlone, 1973. [Имеется перевод: *Аллен К. У.* Астрофизические величины. — М.: Мир, 1977.]



# Предметный указатель

- Аберрация** 71, 73, 75, 77, 84, 529  
**Азимут** 33, 34, 45, 64, 75, 83  
**Альbedo** 63  
**Альдебаран** 20  
**Альтазимутальная система** 35  
**Аномалия истинная** 40, 105, 109, 353, 371  
— средняя 99, 100, 101, 318  
— эксцентриская 99, 100, 110, 241, 353  
**Антиапекс** 21  
**Апекс** 21  
**Ариэль** 535  
**Арктур** 20  
**Астероиды** 14, 16, 144, 264, 372, 532  
— пояс 11, 263  
**Астрономическая единица (а. е.)** 187, 303, 529  
**Афелий** 13, 39, 94  
**Ахондриты** 277
- Баркера уравнение** 107, 241, 428  
**Бесселя интерполяционные коэффициенты** 254  
**Бодэ закон** 13, 20  
— — обобщенный 14  
**Болид** 19  
**Большая полуось** 40, 97, 287, 318
- Вариация** 283  
**Венера** 10, 374, 396, 532, 533  
**Вертикал** 33  
**Веста** 532, 533  
**Время всемирное** 58  
— звездное 55  
— — гринвичское 55  
— — местное 55, 79, 84  
— международное атомное 61  
— поясное 58, 59  
— релаксации звездной системы 513, 517  
— среднее солнечное 57  
— эфемеридное 30, 60, 61, 530  
**Вселенная** 9, 485  
**Выброс** 173, 466  
**Высота** 34, 45, 64, 75, 83
- Галактика** 22, 27, 444, 496, 500, 531  
— диск 22, 26  
— центральное вздутие 476, 493, 511  
— ядро 22, 26, 479, 504, 510  
**Галилеевы спутники** 12, 15, 270  
**Гамильтона канонические уравнения** 215, 216  
**Гамильтона—Якоби уравнение** 217, 327  
**Гамильтониан** 216, 327  
**Ганимед** 15, 16, 263, 270, 534  
**Гаусса метод** 424, 426  
**Гекубы промежуток** 264, 266  
**Геонд** 306  
**Герцишпрунга—Рессела диаграмма** 27  
**Гиады** 27  
**Гиперболический захват** 371  
— избыток 369, 377, 401, 404  
— уход 367, 370  
**Гиперболическо-параболическое движение** 174  
**Гиперболическо-эллиптическое движение** 173  
**Гиперион** 268, 270, 535  
**Главные точки** 33  
**Год високосный** 59  
— календарный 59  
— средний гражданский 59  
— тропический 59, 530  
**Годичная вариация** 71  
**Годичное уравнение** 283  
**Гравитационная постоянная** 88, 146  
— — Гауссова 303  
**Гравитационные потери** 341, 343  
**Группа Гильды** 264, 266, 267  
**Гудермана функция** 112, 242
- Двойные системы** 23, 174, 444, 462, 475  
— — визуальные 23, 444, 446  
— — затменные 23, 445, 452, 454  
— — спектральные 23, 446, 454, 457  
**Деймос** 534  
**Джинса теорема** 490, 517  
**Диона** 269, 270, 535  
**Долгота** 30, 44  
— галактическая 52, 53, 496  
— геодезическая 32  
— геоцентрическая 32  
— истинная 199  
— небесная 38, 46  
— селенографическая 290  
— средняя 199, 210  
— средняя в эпоху 198  
— эклиптическая 37, 214, 243  
**Доплера эффект** 26, 66, 446, 503
- Европа** 15, 16, 534
- Задача двух тел** 29, 86, 88, 366, 371  
**Задача трех тел** 139, 172  
— — — ограниченная круговая 128, 146, 149, 168, 264, 383, 507  
— — — в форме Хилла 161  
— — — плоская 146, 160  
— — — пространственная 161  
— — — эллиптическая 155  
**Задача  $n$  тел** 13, 25, 128, 138, 271  
**Звезда** 20, 23, 73, 444  
— блеск 64, 445, 453  
— абсолютный 26  
— видимое место 73  
— истинное положение 72  
— лучевая скорость 21  
— собственное движение 21, 71, 77, 449  
— среднее положение 71  
— средний свободный пробег 482  
**Звездная величина** 64, 78, 496  
— — абсолютная 65, 451  
— — болометрическая 450

- Звездная плотность 26, 516  
 — функция 187, 490  
 Звездное скопление 7, 27, 271, 485  
 — галактическое (рассеянное) 27, 510  
 — шаровое 22, 25, 27, 492, 510  
 Земля 11, 302, 374, 398, 529, 532, 533  
 — гравитационный потенциал 180, 192, 329  
 — грузоподъемность 180, 192  
 — динамическое сжатие 309  
 — магнитосфера 314  
 — несферичность 183  
 — сжатие 230, 309  
 — фигура 286, 291, 305  
 — форма 305  
 — экваториальное вздутие 37  
 Зенит 32  
 Зенитное расстояние 34  
 Зеркальная конфигурация 137, 138, 162, 165, 269  
 Зональные гармоники 336
- Интеграл** кинетического момента (площадей) 90, 105, 132, 492, 514  
 — энергии 91, 116, 481, 491, 514  
 — Якоби 146, 149, 150, 164, 383, 472  
 Ио 15, 16, 263, 534  
 Искусственный спутник 7, 9, 19, 302, 308, 327  
 — Земли 37, 183, 304, 316, 396  
 — Луны 83, 288, 389, 396
- Календарь** 59  
 — григорианский 59  
 — юлианский 59  
 — модифицированный 60  
 Каллисто 16, 263, 270, 534  
 Камера баллистическая 64  
 — Бэйкера—Нанна 64, 438  
 — Хевитта 64  
 Кассини законы 288, 289, 291  
 — щель 17, 263, 268  
 Квадратура 397  
 Кеплера законы 13, 91, 100, 303, 309, 458  
 — уравнение 101, 111, 114, 123, 241  
 Кинотсодолит 64  
 Киркауда промежутки 16, 18, 263, 264, 268  
 Комета 10, 18, 108, 113, 150  
 — Брука 18  
 — Галлея 18  
 Комстока уравнение 68  
 Координаты обобщенные 212  
 — циклические 214  
 — Якоби 174, 292, 293, 468  
 Копенгагенская задача 165, 167  
 Коуэлла метод 226, 228, 231, 271, 375  
 Кривая блеска 452, 472  
 Круговая скорость 98, 106
- Лагранжи** планетные уравнения 198, 202, 224, 230  
 — точки 144, 153, 155, 168, 385, 471  
 — уравнения 212, 213, 468  
 Лагранжевы решения 16, 139, 144, 384, 507  
 — коллинеарные 145, 384  
 — треугольные 145, 165, 266, 384  
 Лагранжиан 213  
 Лапласа метод 422, 426  
 — неизменяемая плоскость 132  
 Лежандра полиномы 190, 193, 294, 319, 531  
 — присоединенные функции 336  
 Либрация геометрическая 289, 290  
 — паралактическая 290  
 — физическая 288, 290  
 Линия апсид 39, 268, 282  
 — соединении спутников 268  
 — узлов 39, 353  
 Ливуилля теорема 169  
 Луна 281, 284, 374, 529, 534  
 — фигура 286, 291, 388, 393
- Мак-Калуфа** формула 191, 392  
 Марс 10, 14, 374, 396, 398, 532  
 Международная линия перемены даты 58  
 Межпланетная навигация 419, 437  
 Межпланетная среда 10  
 Меридиан 30, 35, 36  
 — гринвичский 30, 56  
 Меркурий 10, 14, 396, 398, 532  
 Местная группа 28, 505, 509  
 Месяц 281, 530  
 — аномалистический 281, 530  
 — драконический 281, 530  
 — сидерический 281, 530  
 — синодический 381, 530  
 — тропический 281, 530  
 Метеор 10, 18, 19, 108  
 Метеорит 19  
 Метеорные рои 19  
 Минимас 18, 263, 268, 270, 535  
 Миранда 535  
 Млечный Путь 22  
 Морская миля 44
- Надир** 32  
 Наклонение 10, 17, 39, 318, 332, 532  
 Небесная сфера 33, 36, 80, 318, 449  
 — гелиоцентрическая 37  
 — геоцентрическая 21, 37, 45  
 — селеноцентрическая 288  
 — топоцентрическая 36  
 Нептун 10, 14, 270, 271, 398, 532  
 Неренда 12, 535  
 Нутация 69, 70, 71, 77, 192, 529  
 Ньютона закон всемирного тяготения 88, 469  
 — законы 87
- Оберон** 535  
 Облако газа 473  
 Обобщенный импульс 214  
 Обратное вращение спутника 12  
 Обращение 173, 466  
 Общие возмущения 129, 179, 275, 363  
 Овендена принцип 276  
 Ожидания время 365, 366, 402, 407  
 — орбита 384, 386, 403, 407  
 Ольберса метод 427  
 Оорта постоянные 495, 504, 531  
 Опорная орбита 130, 227, 246  
 Оппозиции 397  
 Определение и улучшение орбит 64, 418, 419, 434  
 Орбита барицентрическая 155, 116  
 — гиперболическая 108, 480  
 — круговая 118, 127  
 — оскулирующая 227, 228, 239, 246, 318  
 — параболическая 105  
 — прямолинейная 113, 239, 243  
 — эллиптическая 40, 92  
 Освобождение 466

- Остаточная скорость 486, 505, 510  
*Остервинтера* и *Козни* метод 262
- Паллада** 532, 533.  
 Параболическая скорость 106, 367, 378, 388, 404, 510  
 Параллакс 77, 299, 419  
 — геоцентрический 79, 80, 84  
 — динамический 451  
 — звездный 71  
 — — годичный 73, 77  
 — солнечный 304  
 Параллактический эллипс 77  
 Параллактическое неравнство 283, 288  
 Парсек 26, 78  
 Перехода время 350, 355, 363, 387  
 — орбита 339, 346, 354  
 — — биэллиптическая 350, 402  
 — — гиперболическая 349, 350, 358  
 — — параболическая 349, 350, 358  
 — — эллиптическая 347  
 Перигей 40  
 — аргумент 40  
 — долгота 282  
 — момент прохождения 282  
 Перигелий 13, 39, 41, 94, 99  
 — долгота 39  
 — момент прохождения 40  
 Перигей 41, 361, 373  
 Планеты 10, 14, 276, 532, 533  
 — внутренние, внешние 396  
 Планетная система 20  
 Пляды 27  
 Плутон 11, 14, 270, 374, 398, 532  
 Поверхности нулевой скорости 151, 384, 471  
 Поверхности сечения 168, 170  
 Полюс 30, 42  
 — галактический 52  
 — мира 32, 33  
 — эклиптики 37, 397  
 Потоки 473  
 Прессессия 69, 77, 192  
 — лунно-солнечная 69, 305  
 — общая 70, 529  
 — планетная 70  
 Приливное трение 60, 279, 286, 300  
 Приливные силы 28, 269, 511  
 Прямое восхождение 36, 55, 77, 84, 318, 418  
*Пуанкаре* характеристические показатели 168, 171
- Радиус** столкновения 376, 377  
 Разлет 173  
 Расход топлива 355, 414  
 Регрессия узлов 41, 282, 284  
 Регуляризация 247, 517  
 — аналитическая 247  
 — Кустанхаймо—Штифеля 247  
 Редуцированные данные 61, 84  
 Референц-эллипсоид 32, 306  
 Рефракция 67, 74, 84  
 Рея 535  
*Роши* предел 471
- Сарос** 284  
 Сатурн 10, 14, 261, 268, 277, 398, 532,  
 — кольца 12, 17, 261, 263, 268, 533  
 Светимость 450  
 Секторальная скорость 94  
 Секторальные гармоники 336  
 Силовая функция 134, 135  
 Сириус 20
- Система координат барцентрическая 41  
 — — галактическая 52  
 — — горизонтальная 32  
 — — прямоугольная 41  
 — — селенографическая 290  
 — — экваториальная 35, 46  
 — — эклиптическая 37, 46, 440  
 Склонение 36, 45, 46, 80, 83, 84, 243, 418  
 Скопления галактик 9, 28  
*Снеллиуса* закон преломления 67  
 Собственная плоскость 41  
 Соединение 397  
 Соизмерности в средних движениях 15, 261, 263  
 Солнечная система 10, 84, 130, 261, 276, 378, 398  
 — — устойчивость 205, 261  
 — — эволюция 261  
 Солнце 10, 16, 36, 53, 144, 282, 381, 418, 479, 529  
 — среднее экваториальное 57  
 — — эклиптическое 57  
 Соотношение масса — светимость 450, 451  
 Специальные возмущения 129, 179, 210, 223, 275, 367, 383  
 Сплюснутость 308, 529  
 Спрявление орбиты 227, 236, 242  
 Спутники 534, 535  
 — Марса 534  
 — Нептуна 535  
 — Сатурна 535  
 — Урана 535  
 — Юпитера 16, 17, 534  
 Среднее движение 15, 99, 199, 264, 270, 276, 532  
 Стабилизированная платформа 438, 439, 442  
 Сутки 53, 530  
 — гражданские 58  
 — звездные (сидерические) 36, 51, 55, 57, 530  
 — истинные солнечные 53, 57  
 — средние солнечные 57, 530  
 — эфемеридные 303  
 Суточная параллель 36  
 Сфера влияния (действия) 184, 373, 377, 382, 386, 390, 398, 479, 511
- Теорема** вирнала 136, 172, 512, 517  
 — зеркальности 137, 286  
 Тесное сближение 128, 227  
 Тессеральные гармоники 336  
 Тезия 18, 263, 268, 270, 535  
*Тиссерана* критерий 150  
 Титан 12, 268, 270, 535  
 Титания 535  
 Точка весеннего равноденствия 26, 37, 41, 79, 94, 118, 440  
 Точки либрации (Лагранжа) 145, 155, 266, 385  
 Тритон 535  
 Тройные системы 24, 174, 444, 465, 475  
 Тройницы 16, 144, 159, 264
- Удельный импульс** 340  
 Узел восходящий 39, 52, 288, 332  
 — долгота 39, 232, 282  
 — нисходящий 39, 52  
 Уклонение отнесной линии 32  
 Умбриэль 535  
 Универсальные переменные 125  
 Унифицированные переменные 126  
 Уравнение времени 57  
 — орбиты 94  
 — центра 103, 123, 283

Уран 10, 11, 14, 277, 398, 532  
Уход 173, 375

Фазовая траектория 160  
Фазовое пространство 160, 169, 170, 171  
Феба 535  
Фобос 534  
Фокальный полупараметр 93, 105, 109  
Фокус 92, 93, 113  
Функция распределения скоростей 487, 505  
— фазовой плотности 486, 490

Характеристики 169  
Характерный объем 473  
Хилла поверхности 152

Центронд 486, 493, 505  
Церера 11, 375, 532, 533  
Цефиды 26

Часовой пояс 58, 59  
— угол 36, 45, 55, 83, 84  
— — гринвичский 56  
Часовые звезды 55

Широта 30, 45  
— астрономическая 31, 79  
— галактическая 52, 53, 495  
— геодезическая (географическая) 32, 309  
— геоцентрическая 31, 79  
— небесная 38, 46  
— селенографическая 290  
— эклиптическая 37, 214, 243

Эвекция 283  
Эверетта коэффициенты 254  
Эволюция орбит в семействе 165, 166  
Экватор 30, 36, 37, 41  
— галактический 52  
— небесный 35  
Эклиптика 37, 41, 47, 440  
— наклонение 37, 46  
— плоскость 118, 370  
— полус 118, 440  
Эксцентриситет 10, 17, 40, 93, 318, 532  
Элементы орбиты 38, 47, 104, 120, 150, 354  
— — оскулирующие 180, 204, 224, 242, 382  
Эллипс 40, 92, 117  
— оскулирующий 180  
— прямолинейный 113, 387  
Эллипсоид Кларка 306  
— международный 306  
— Хейфорда 32, 306  
Элонгация планеты 397  
Энке метод 227, 229, 236, 242, 375  
Энцелад 18, 268, 270, 535  
Эрос 304  
Эфемериды 262, 297, 464  
Юлианский год 300  
— день 59  
— столетие 60

Юнона 532, 533  
Юпитер 10, 14, 102, 150, 277, 372, 398, 532  
— семейство 18

Янус 535  
Япет 535

# Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Неспokoйная Вселенная . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Введение . . . . .	9
1.2. Солнечная система . . . . .	10
1.3. Движение звезд . . . . .	20
1.4. Скопления галактик . . . . .	28
1.5. Выводы . . . . .	28
Рекомендуемая литература . . . . .	29
<b>Глава 2. Системы координат и измерение времени . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1. Введение . . . . .	30
2.2. Положение на поверхности Земли . . . . .	30
2.3. Горизонтальная система . . . . .	32
2.4. Экваториальная система . . . . .	35
2.5. Эклиптическая система . . . . .	37
2.6. Элементы орбиты в пространстве . . . . .	38
2.7. Прямоугольные системы координат . . . . .	41
2.8. Системы координат, связанные с плоскостью орбиты . . . . .	41
2.9. Преобразование систем координат . . . . .	42
2.10. Галактическая система координат . . . . .	52
2.11. Измерение времени . . . . .	53
Задачи . . . . .	61
Литература . . . . .	62
<b>Глава 3. Обработка данных наблюдений . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1. Введение . . . . .	63
3.2. Методы наблюдений . . . . .	64
3.3. Рефракция . . . . .	67
3.4. Прецессия и нутация . . . . .	69
3.5. Абберация . . . . .	75
3.6. Собственное движение . . . . .	77
3.7. Годичный параллакс . . . . .	77
3.8. Геоцентрический параллакс . . . . .	79
3.9. Обзор процедур . . . . .	83
Задачи . . . . .	85
Литература . . . . .	85
<b>Глава 4. Задача двух тел . . . . .</b>	<b>86</b>
4.1. Введение . . . . .	86
4.2. Законы Ньютона . . . . .	87
4.3. Закон всемирного тяготения Ньютона . . . . .	88
4.4. Решение задачи двух тел . . . . .	88
4.5. Эллиптическая орбита . . . . .	92
4.6. Параболическая орбита . . . . .	105
4.7. Гиперболическая орбита . . . . .	108
4.8. Прямолинейная орбита . . . . .	113
4.9. Барцентрические орбиты . . . . .	115

4.10. Классификация орбит по величине константы энергии . . . . .	116
4.11. Орбита в пространстве . . . . .	118
4.12. Ряды для $f$ и $g$ . . . . .	122
4.13. Использование рекуррентных соотношений . . . . .	124
4.14. Универсальные переменные . . . . .	125
Задачи . . . . .	126
Литература . . . . .	127
<b>Глава 5. Задача <math>n</math> тел . . . . .</b>	<b>128</b>
5.1. Введение . . . . .	128
5.2. Уравнения движения задачи $n$ тел . . . . .	130
5.3. Десять известных интегралов и их смысл . . . . .	131
5.4. Силовая функция . . . . .	134
5.5. Теорема вириала . . . . .	136
5.6. Теорема зеркальности . . . . .	137
5.7. Снова о задаче $n$ тел . . . . .	138
5.8. Лагранжевы решения задачи трех тел . . . . .	139
5.9. Общие замечания о лагранжевых решениях . . . . .	144
5.10. Ограниченная круговая задача трех тел . . . . .	146
5.11. Общая задача трех тел . . . . .	172
Задачи . . . . .	177
Литература . . . . .	177
<b>Глава 6. Общие возмущения . . . . .</b>	<b>179</b>
6.1. Введение . . . . .	179
6.2. Уравнения относительного движения . . . . .	180
6.3. Возмущающая функция . . . . .	183
6.4. Гравитационная сфера влияния . . . . .	184
6.5. Потенциал тела произвольной формы . . . . .	187
6.6. Потенциал шара во внутренней точке . . . . .	193
6.7. Метод вариации параметров . . . . .	195
6.8. Уравнения Лагранжа . . . . .	212
6.9. Канонические уравнения Гамильтона . . . . .	215
Задачи . . . . .	221
Рекомендуемая литература . . . . .	222
<b>Глава 7. Специальные возмущения . . . . .</b>	<b>223</b>
7.1. Введение . . . . .	223
7.2. Основные факторы теории специальных возмущений . . . . .	224
7.3. Метод Коуэлла . . . . .	226
7.4. Метод Энке . . . . .	227
7.5. Использование возмущенных уравнений . . . . .	230
7.6. Методы регуляризации . . . . .	246
7.7. Методы численного интегрирования . . . . .	248
Задачи . . . . .	259
Литература . . . . .	260
<b>Глава 8. Устойчивость и эволюция Солнечной системы . . . . .</b>	<b>261</b>
8.1. Введение . . . . .	261
8.2. Эфемериды планет . . . . .	262
8.3. Соизмеримости в средних движениях . . . . .	263
8.4. Астерониды . . . . .	264
8.5. Кольца Сатурна . . . . .	268
8.6. Почти-соизмеримые орбиты спутников . . . . .	268
8.7. Численное интегрирование на больших промежутках времени . . . . .	271
8.8. Принцип Оувендена . . . . .	276

8.9. Выводы	278
Литература	279
<b>Глава 9. Теория движения Луны</b>	<b>281</b>
9.1. Введение	281
9.2. Система Земля—Луна	281
9.3. Сарос	284
9.4. Измерение большой полуоси орбиты, массы и диаметра Луны	287
9.5. Вращение Луны	288
9.6. Селенографические координаты	290
9.7. Фигура Луны	291
9.8. Основная проблема в теории движения Луны	291
9.9. Орбита Солнца в основной проблеме теории движения Луны	294
9.10. Орбита Луны	295
9.11. Теория Луны	296
9.12. Вековое ускорение Луны	300
Литература	301
<b>Глава 10. Искусственные спутники</b>	<b>302</b>
10.1. Введение	302
10.2. Земля как планета	302
10.3. Силы, действующие на искусственные спутники Земли	316
10.4. Орбита спутника вокруг сплюснутой планеты	317
10.5. Использование теории Гамильтона—Якоби в задаче движения искусственного спутника	327
10.6. Действие атмосферного торможения на искусственный спутник	330
10.7. Тессеральные и секторальные гармоники поля тяготения Земли	336
Задачи	337
Литература	338
<b>Глава 11. Динамика ракет и орбиты переходов</b>	<b>339</b>
11.1. Введение	339
11.2. Движение ракеты	339
11.3. Переходы между орбитами в силовом поле одного притягивающего центра	346
11.4. Орбиты перехода в силовых полях двух или более притягивающих центров	366
Задачи	379
Литература	380
<b>Глава 12. Траектории полетов к планетам и Луне</b>	<b>381</b>
12.1. Введение	381
12.2. Траектории полетов между Землей и Луной	381
12.3. Возможности и точность методов исследования	383
12.4. Использование интеграла Якоби	383
12.5. Использование решений Лагранжа	384
12.6. Использование решений задачи двух тел	385
12.7. Искусственные спутники Луны	389
12.8. Траектории межпланетных полетов	396
12.9. Солнечная система как поле центральной силы	398
12.10. Орбиты межпланетных перелетов с минимальными затратами энергии	401
12.11. Использование орбит ожидания при межпланетных полетах	407
12.12. Влияние ошибок на межпланетные орбиты	414
Задачи	416
Литература	417

<b>Глава 13. Определение орбит и межпланетная навигация</b> . . . . .	<b>418</b>
13.1. Введение . . . . .	418
13.2. Теория определения орбит . . . . .	419
13.3. Метод Лапласа . . . . .	422
13.4. Метод Гаусса . . . . .	424
13.5. Метод Ольберса для параболических орбит . . . . .	427
13.6. Определение орбит при наличии дополнительных данных на- блюдений . . . . .	429
13.7. Улучшение орбит . . . . .	434
13.8. Межпланетная навигация . . . . .	437
Литература . . . . .	443
<b>Глава 14. Двойные системы и системы нескольких тел</b> . . . . .	<b>444</b>
14.1. Введение . . . . .	444
14.2. Визуально-двойные звезды . . . . .	446
14.3. Соотношение масса—светимость . . . . .	450
14.4. Динамические параллаксы . . . . .	451
14.5. Затменные двойные . . . . .	452
14.6. Спектрально-двойные звезды . . . . .	457
14.7. Обзор результатов . . . . .	461
14.8. Элементы орбиты двойной звезды . . . . .	462
14.9. Период двойной звезды . . . . .	463
14.10. Движение апсид . . . . .	464
14.11. Силы, действующие в двойной системе . . . . .	465
14.12. Тройные системы . . . . .	465
14.13. Неточность ньютоновского закона тяготения . . . . .	469
14.14. Фигуры звезд в двойных системах . . . . .	469
14.15. Пределы Роша . . . . .	471
14.16. Вещество, окружающее звезды . . . . .	472
14.17. Образование двойных систем . . . . .	475
Задачи . . . . .	476
Литература . . . . .	477
<b>Глава 15. Звездные системы многих тел</b> . . . . .	<b>478</b>
15.1. Введение . . . . .	478
15.2. Сфера действия . . . . .	479
15.3. Парные сближения . . . . .	480
15.4. Накапливающийся эффект малых сближений . . . . .	483
15.5. Некоторые фундаментальные принципы . . . . .	485
15.6. Основные теоремы звездной динамики . . . . .	488
15.7. Некоторые частные случаи для звездной системы в стац- онарном состоянии . . . . .	491
15.8. Вращение галактик . . . . .	493
15.9. Сферические звездные системы . . . . .	510
15.10. Эксперименты на ЭВМ . . . . .	517
Задачи . . . . .	517
Литература . . . . .	519
<b>Ответы к задачам</b> . . . . .	<b>520</b>
<b>Приложения</b> . . . . .	<b>529</b>
Приложение I. Астрономические и физические постоянные . . . . .	529
Приложение II. Гравитационное поле Земли . . . . .	531
Приложение III . . . . .	532
Приложение IV . . . . .	533
Литература . . . . .	536
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>537</b>
<b>Оглавление</b> . . . . .	<b>541</b>