

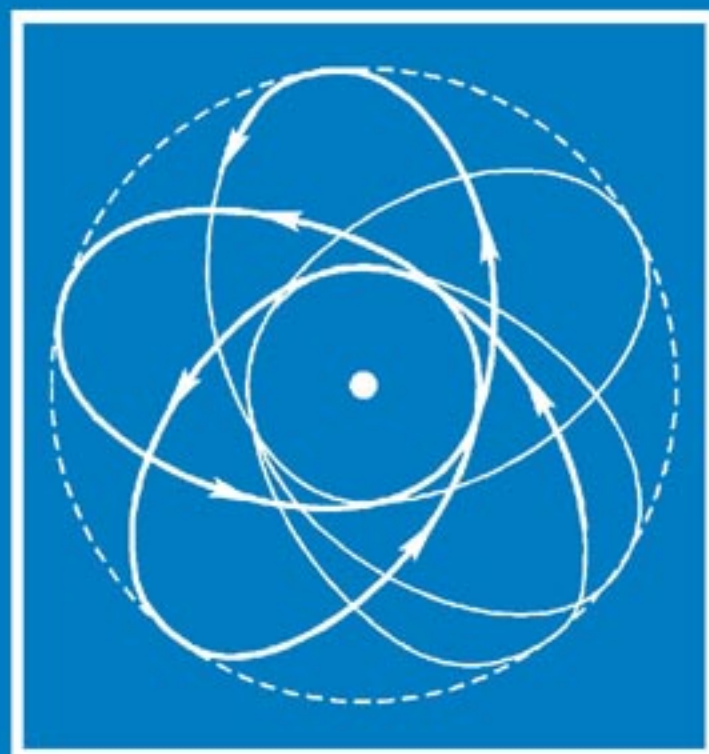
БИБЛИОТЕКА

**R&C**  
*Dynamics*

РЕГУЛЯРНАЯ И  
ХАОТИЧЕСКАЯ  
ДИНАМИКА

В. М. Алексеев

# ЛЕКЦИИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ



**10**  
ТОМ

СЕРИЯ

## РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

ВЫШЛИ В СВЕТ:

1. *Э. Картан*. Интегральные инварианты (с добавлением В.В.Козлова).
2. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*. Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях.
3. *А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов и др.* Инвариантные множества динамических систем в WINDOWS.
4. *В. В. Козлов*. Общая теория вихрей.
5. *М. Оден*. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем.
6. *В. В. Голубев*. Талант без почвы.
7. *А. В. Борисов, И. С. Мамаев*. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.
8. *Д. Биркгоф*. Динамические системы.
9. *Э. Уиттекер*. Аналитическая динамика.
10. *В. М. Алексеев*. Лекции по небесной механике.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

- В. И. Арнольд, А. Авец*. Эргодические проблемы классической механики.
- Ю. Мозер*. Интегрируемые системы.
- А. Пуанкаре*. Фигуры равновесия вращающихся масс жидкости.
- В. В. Козлов*. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.
- Дж. Марсден, Т. Ратью*. Введение в механику и симметрию.

E-mail: [borisov@uni.udm.ru](mailto:borisov@uni.udm.ru)  
<http://www.rcd.com.ru>

**В. М. Алексеев**

**ЛЕКЦИИ  
ПО НЕБЕСНОЙ  
МЕХАНИКЕ**

Редакция журнала  
“Регулярная и хаотическая динамика”

1999

УДК 530.18

Библиотека «*R & C Dynamics*»  
Том 10

*Серия организована издательством «УРСС» и редакцией  
журнала «Регулярная и хаотическая динамика» в 1998 г.*

**Алексеев В. М.**

Лекции по небесной механике. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 160 с.

ISBN 5-89806-015-4

В российской литературе уже несколько десятилетий не издавалась литература по современной небесной механике. В этой небольшой книге выдающегося российского математика В. М. Алексеева публикуются труды, посвященные качественным методам небесной механики и символической динамике; она состоит из лекций В. М. Алексеева в летней математической школе 1971 г. и нескольких статей, посвященных финальным движениям в задаче трех тел. Книга будет интересна математикам и физикам, студентам и аспирантам, а также научным работникам.

ISBN 5-89806-015-4



Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала  
«Регулярная и хаотическая динамика»  
<http://www.rcd.com.ru>

© Редакция журнала «Регулярная  
и хаотическая динамика», 1999



---

## Содержание

<i>В. М. Тихомиров.</i> О Владимире Михайловиче Алексееве	7
<i>В. М. Алексеев.</i> Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики	16
Введение	16
<b>Часть 1. О некоторых математических проблемах в небесной механике</b>	18
§ 1. Основная задача небесной механики	18
§ 2. Геометрическая интерпретация задачи Кеплера	22
§ 3. Задача трех тел. Аналитические свойства решений	33
§ 4. Финальные движения в задаче трех тел	39
§ 5. Эволюция системы. Проблема захвата	44
<b>Часть 2. Символическая динамика</b>	54
<b>Часть 3. Квазислучайные колебания некоторых нелинейных систем</b>	73
§ 1. Пульсирующая одномерная потенциальная яма	73
§ 2. Свойства отображения $S$	82
§ 3. Об одном частном случае задачи трех тел	99
<b>Литература</b>	104

## Приложения

<i>О. Ю. Шмидт.</i> О возможности захвата в небесной механике	109
<i>Г. Ф. Хильми.</i> О возможности захвата в задаче трех тел	115
<i>В. М. Алексеев.</i> Обмен и захват в задаче трех тел	121
<i>К. А. Ситников.</i> Существование осциллирующих движений в задаче трех тел	127

<b>В. М. Алексеев. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика . . . . .</b>	<b>133</b>
1. Введение. . . . .	133
2. Классификация финальных движений по Шази. . . . .	135
3. Эволюция системы; область $h > 0$ . . . . .	137
4. Эволюция системы; случай $h < 0$ . . . . .	138
5. «Эффект пограничного слоя» и разрывные решения идеальной кеплеровой задачи . . . . .	141
6. Квазислучайные динамические системы. . . . .	146
7. Топологические марковские цепи («символическая динамика»). . . . .	147
8. Об одном частном случае задачи трех тел. . . . .	151

## О Владимире Михайловиче Алексееве

Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика» предлагает вниманию читателя работы выдающегося российского математика — Владимира Михайловича Алексеева, посвященные небесной механике<sup>1</sup>. Нет никакого сомнения в том, что люди, интересующиеся наукой и ее высшими достижениями в XX веке, с большим интересом (и глубокой благодарностью к издателям) ознакомятся с содержанием этой книги. Помещенные здесь труды В. М. Алексеева нисколько не утратили своей актуальности: они являются ярчайшим свидетельством того переломного момента в истории науки, когда была осознана типичность хаотического поведения регулярных динамических систем.



Судьба была во многом немилостива к Владимиру Михайловичу Алексееву. Это издание — справедливое воздаяние памяти так рано ушедшему от нас замечательному ученому и человеку.

Владимир Михайлович Алексеев был неповторимой и многогранной личностью, в которой гармонично сочетались и глубокий интеллект, и чистая совесть, и отзывчивая душа.

Он родился 17 июня 1932 года. По отцу он принадлежал к известному купеческому роду Алексеевых, прославленному К. С. Станиславским. Однако к моменту рождения Владимира Михайловича все родственные связи были уже очень ослаблены. Прямые предки В. М. Алексеева не продолжили главное дело рода Алексеевых. Его дед не был причислен к купеческому сословию и по документам значился как «купеческий

---

<sup>1</sup>Кроме работ В. М. Алексеева в эту публикацию включены три статьи — О. Ю. Шмидта, Г. Ф. Хильми и К. А. Ситникова, посвященные финальным движениям в задаче трех тел. Все они сыграли большую роль в окончательном разрешении В. М. Алексеевым общей проблемы о финальных движениях.

сын». Отец В. М. Алексеева был человеком ищущим, но так и не нашедшим свое место в жизни. Он умер в начале Великой Отечественной войны, когда сыну было 9 лет. Никто из предков В. М. Алексеева никогда не занимался научной работой, тем более математикой. Все известные Владимиру Михайловичу предки были русскими по национальности, а ему самому было присуще глубоко осознанное чувство Родины. И вместе с тем он был человеком глубоко проникнутым идеями человеческого братства и единства мировой культуры.

Детство Владимира Михайловича пришлось на трудную пору. Провел он его в поселке Быково (близ Москвы) в доме бабушки. Там же поступил в школу. Потом несколько лет жил в поселке Костино под Москвой, но затем снова вернулся в Быково и закончил быковскую школу. Как многие и многие из тех, чье детство пересеклось с войной, Володя Алексеев был во многом «бабушкиным сыном». Свою бабушку Владимир Михайлович очень любил вспоминать. Материальные условия в детстве были нелегкими: существенной долей семейного бюджета была бабушкина пенсия — что-то около 250 рублей (в то время как ставка профессора была порядка 5000 рублей).

О школьных годах Владимир Михайлович сохранил хорошие воспоминания. Учился он с увлечением, всем интересовался, много читал.

Неподалеку от костинской школы находилась трудовая коммуна, в создании которой принимал некоторое участие А. М. Горький. В дар коммуне Горький передал библиотеку. Володя перечитал ее почти всю. Он не раз потом рассказывал о большой роли, которую сыграла в его жизни костинская библиотека. Володя поражал всех безграничностью знаний. Жена Владимира Михайловича — Татьяна Алексеевна Алексеева — вспоминала, что, готовясь как-то к экзамену по химии в текстильном институте, где она училась, в спешке, не успевая найти какую-то химическую формулу в книжке (скажем, формулу иприта), в отчаянии спросила своего мужа. Он тут же ответил. Это поразило ее. «Ну откуда ты это знаешь?» Ответ был еще более поразительным: «Но мы же это проходили в школе . . . »

Осенью 1948 года в быковской школе появилась (неведомо каким путем) афиша о начале работы кружков на механико-математическом факультете Московского университета. Володе захотелось узнать, что это такое, и он поехал в университет. Так он впервые попал на мехмат. И остался в нем на всю жизнь. Первая прослушанная им (восьмиклассником) лекция была прочитана П. С. Александровым («О лемме

Шпернера»). Потом руководители рекламировали свои кружки. Володя выбрал кружок О. В. Локуциевского и Е. А. Морозовой.

Быть может, здесь уместно упомянуть о той несравненной роли, которую довелось сыграть мехмату в истории нашей науки. Всем памяты имена великих ученых и организаторов науки поколения наших учителей (Келдыш, Колмогоров, Лаврентьев, Петровский ...), судьбы которых так или иначе связаны с мехматом. И очень легко пополнить этот список именами представителей последующих поколений. Убежден, что большинство из них с благодарностью назовет В. М. Алексеева в числе своих друзей или учителей. Мехмат одарил В. М. Алексеева счастьем творчества, любовью к своей профессии, радостью труда и человеческого общения.

Особые чувства восхищения и уважения Владимир Михайлович питал к своему учителю Андрею Николаевичу Колмогорову. Он находился в близких, дружеских отношениях со многими математиками старшего поколения. Иван Георгиевич Петровский очень дорожил мнением В. М. Алексеева. Владимир Михайлович отвечал ему чувством глубокой и почтительной любви. Дружеские узы связывали Владимира Михайловича с профессорами мехмата и коллегами по кафедре математического анализа — Львом Абрамовичем Тумаркиным и Михаилом Александровичем Крейнсом. Владимир Михайлович пользовался очень большой любовью математиков своего и более поздних поколений. Впоследствии он был всегда окружен прекрасной молодежью.

В 1950 году Володя Алексеев стал победителем XV московской математической олимпиады, и ему было доверено выступить от имени победителей. В том же году он становится студентом мехмата. Сразу же включился в студенческий конкурс по решению задач (к сожалению, такие конкурсы сейчас не проводятся) и занял там второе место. Он сам становится руководителем школьных кружков, один из которых вел с О. Б. Лупановым. Со второго курса начинается научная работа В. М. Алексеева, которой он стал заниматься на семинарах А. Н. Колмогорова.

В архиве В. М. Алексеева сохранилась его курсовая работа за третий курс. Она была посвящена обзору по так называемой проблеме «финальных движений в задаче трех тел». Основные принципиальные вопросы, относящиеся к этой проблеме, были тогда — в 1954 году — не решены, они были открытыми. К решению их и стал склонять своих учеников и последователей Андрей Николаевич Колмогоров.

Напомню: проблема финальных движений в задаче трех материальных точек состоит в описании поведения этих точек, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения Ньютона, при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

Простейшие случаи (когда все расстояния между телами остаются ограниченными, или, наоборот, все расстояния стремятся к бесконечности и в ту, и в другую сторону), были известны еще Ньютону. Первые примеры «простых невозможностей» были обнаружены еще во времена Лапласа. Сама задача в явной форме была поставлена Якоби.

К тому моменту, когда А. Н. Колмогоров предложил своему студенту-третьекурснику курсовую работу на тему «Финальные движения в задаче трех тел», оставались логически допустимыми следующие возможности (все они реализуются во взаимоотношениях между людьми): *обмен* (звезда прилетает и отрывает от другой звезды ее спутника); *частичный захват* (три звезды приближаются друг к другу из бесконечности, две образуют двойную звезду, а третья улетает); *полный захват* (двойная звезда захватывает третью, прилетевшую из бесконечности); *захват в осцилляцию* (тело прилетает к двойной звезде и начинает затем осциллировать); *двойная осцилляция* (т. е. осцилляция в прошлом и в будущем) и, наконец, *переход из ограниченного движения в осцилляцию*.

Классификацию всех этих комбинаций дал знаменитый французский астроном академик Ж. Шази, который занимался этой проблемой в течение нескольких десятилетий. Читатель должен получить большое удовольствие от исторического комментария, посвященного задаче трех тел, содержащегося в публикуемых здесь лекциях на стр. 39. Укажу лишь, что одно из принципиальных утверждений Шази оказалось неверным<sup>1</sup>.

Каждая из перечисленных выше проблем (обмена, захвата и т. п.) представляла собой задачу большой трудности. В них затрагивались проблемы, как писал Владимир Михайлович, «возникающие в областях, где математика и механика граничат с философией: происхождение и судьба Солнечной системы, эволюция звездных скоплений и т. п.» В настоящее время проблема финальных движений полностью решена. В 1953 году Кирилл Александрович Ситников доказал возможность

<sup>1</sup>Выводы Шази были поставлены под сомнение О. Ю. Шмидтом, который построил численный пример частичного захвата. Исследование Шмидта было дополнено Г. Ф. Хильми. Их статьи помещены в настоящем издании.

частичного захвата, в 1959 году он же построил пример двусторонней осцилляции (статья Ситникова 1959 г. публикуется в этой книге). Возможность остальных финальных движений была доказана Владимиром Михайловичем Алексеевым. На решение и развитие этой проблемы ушла вся его творческая жизнь, и это в высшей степени характеризует два беспримерных свойства его характера — стойкость и верность.

В 1955 году в дипломной работе В. М. Алексеев решил проблему обмена для систем как с положительной, так и с отрицательной полной энергией. (Отметим, что первые численные эксперименты, свидетельствовавшие о возможности обмена, были проделаны еще в двадцатые годы.) Далее, в аспирантские годы, В. М. Алексеев показал, что обмен реализуется устойчивым образом, т. е. построил открытое множество начальных условий, приводящих к обмену. Эти факты, дополненные рядом частичных результатов, составили содержание его кандидатской диссертации, защищенной в 1959 году.

Наибольший взлет его творческих сил относится к периоду 1966–69 гг.

Статья «Квазислучайные динамические системы», опубликованная в трех номерах Математического сборника, занимает 180 страниц. Тогда же была исчерпана проблематика финальных движений. В 1968 году В. М. Алексеевым была защищена докторская диссертация, в которой были подведены итоги огромной работы.

Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия не только для всей математики, но и для естествознания в целом, состоит в том, что во многих динамических системах, несмотря на их полную детерминированность, могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Истоки этой идеологии просматриваются еще в начале века, завершение же процесса, осмысления этого явления относятся к шестидесятым годам. К числу людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать В. М. Алексеева. От имени всех математиков, которых интересует животрепещущая тематика «порядок-хаос», мне хочется выразить благодарность В. В. Козлову и А. В. Борисову, осуществившим издание основополагающих и классических работ Владимира Михайловича Алексеева.

Работы В. М. Алексеева очень быстро были высоко оценены специа-

листами, и он был приглашен получасовым докладчиком на Международный математический конгресс в Ницце (1970). Владимир Михайлович с улыбкой рассказывал мне, что незадолго до открытия Конгресса ему позвонил Ж. Лере — один из крупнейших математиков нашего века. Лере очень высоко отозвался о достижениях В. М. Алексеева, и при этом обратился к нему с личной просьбой: «Пожалуйста, будьте снисходительны и милосердны к Шази — он был таким прекрасным человеком!». С подобной просьбой к В. М. Алексееву можно было и не обращаться: деликатность и милосердие были ему присущи с самых младых лет<sup>1</sup>.

... К великому сожалению, В. М. Алексееву не было позволено пересечь железный занавес.

После окончания аспирантуры В. М. Алексеев остается на кафедре анализа мехмата. Последние десять лет он работал на кафедре общих проблем управления. В. М. Алексеев скончался 1 декабря 1980 г.

Владимир Михайлович Алексеев служил математике и делу математического просвещения на всех доступных ему поприщах. Выше рассказывалось о его научной работе. Она получила мировое признание. Многие крупнейшие математики выражали восхищение его трудами и научными достижениями.

Перу В. М. Алексеева принадлежит свыше сорока научных статей и две монографии — «Символическая динамика» (в сб. «11-я летняя математическая школа», Киев, 1976) (перепечатка этой публикации составляет первую часть данного издания) и «Оптимальное управление» (совм. с В. М. Тихомировым и С. В. Фоминым, М.: Наука, 1979). В них виден отпечаток его необычайно широкого научного кругозора и педагогического мастерства.

Владимир Михайлович был превосходным лектором. Многие хранят в памяти его блистательные лекции по математическому анализу, оптимальному управлению, геометрии и вариационному исчислению, динамическим системам, выпуклым экстремальным задачам. Ему всегда удавалось совместить наглядность изложения и педантичную строгость.

В. М. Алексеев был одним из соруководителей многих семинаров самого широкого профиля. Около двадцати лет он совместно с Я. Г. Синаем руководил научным семинаром по теории динамических систем. Этот

---

<sup>1</sup> На стр. 134 читатель сможет увидеть, с какой щедростью воздал В. М. Алексеев «дань уважения выдающемуся французскому метематику и астроному».



семинар сыграл выдающуюся роль в развитии этого раздела математики. С В. А. Егоровым В. М. Алексеев руководил семинаром по небесной механике, с М. И. Зеликиным и В. М. Тихомировым вел семинар по теории экстремальных задач.

В. М. Алексеев любил преподавать на факультете повышения квалификации (где долгие годы вел семинар с М. А. Крейнсом), любил участвовать в просеминарах для первокурсников (в последние годы — с О. В. Локуциевским).

На протяжении многих и многих лет В. М. Алексеев вел работу со школьниками, был руководителем кружков и олимпиад, стоял у истоков преподавания в Колмогоровском интернате (он читал там в 1963–67 годах курс математического анализа и опубликовал замечательные записки лекций). В. М. Алексеев очень любил читать популярные лекции для школьников по математике.

Владимир Михайлович был одним из самых талантливых редакторов своего времени.

Свыше пятидесяти раз В. М. Алексеев выступал в качестве официального оппонента, 16 раз был оппонентом ВАК. В его архиве хранится несколько папок текущего рецензирования статей, книг, рукописей.

Владимир Михайлович вел очень большую работу в Московском математическом обществе. Долгие годы он был секретарем общества, затем возглавлял работу по разделу «Сообщения Московского математического общества».

Среди людей известных большинство составляют личности яркие, нестандартные. Рассказывая о них, говорят обычно об их духовной молодости и вспоминают всевозможные чудачества и примеры экстравагантности. Владимир Михайлович Алексеев был крупной личностью иного склада. Его человеческую необычайность трудно было разглядеть сразу или издалека, ибо суть ее была не в яркости, а в глубине. Конечно, и он был молод душой, всегда говорил о радости познания и сам очень свежо и по-детски радостно смотрел на мир. Но вместе с тем для него с самых ранних лет были характерны духовная зрелость и серьезность. Даже в отношениях со своими старшими товарищами и коллегами Владимир Михайлович едва ли не с аспирантских времен выполнял роль защитника и покровителя.

Владимир Михайлович был человеком необычайно широких культурных интересов и запросов. Трудно представить себе область куль-

туры, в которую он не пытался бы глубоко и фундаментально проникнуть.

Он обладал необыкновенной стойкостью и непреклонностью духа. Это проявлялось всегда, особенно в вопросах чести, правды и справедливости. Об этом замечательно сказал Владимир Игоревич Арнольд: «Невозможно представить себе Владимира Михайловича участвующим в чем-либо несправедливом. Он умел мужественно отстаивать свое мнение и не останавливался перед неприятностями, которые на него навлекло его гражданское мужество. Жизнь Владимира Михайловича была образцом тщательного и неуклонного выполнения своего долга, пока хватало сил». Все это давало ему силу высокого морального авторитета. Джозеф Форд — математик, много и активно работавший в одной области с Владимиром Михайловичем, сказал после его смерти: «Мир стал заметно темнее после того, как погас огонь его жизни». Эти слова разделяют все, кто знал Владимира Михайловича.

Спросим себя: как же зажигается в душе этот огонь неугасимый? Так легко представить себе судьбу с теми же начальными данными, в которой не было ни напряжения творческих сил, ни решения великих проблем, ни одухотворенного труда. Тяжкие моменты случались во все поры жизни В. М. Алексеева — таков наш век, воистину «жестокий век». Но было много и такого, что принято относить к области счастливого везения: его юность пришлось на золотую пору деятельности его учителя, пору бурного развития науки и рождения первоклассных научных коллективов. Но и в этом своем поколении В. М. Алексеев занял особое место как выдающаяся творческая и моральная личность. Так что суть надо искать не вовне, а внутри.

Огонь зажигается вместе с началом нашей жизни, и дальше от каждого из нас зависит — дать ли ему угаснуть или разгореться. Разгореться, чтобы озарить все окружающее своим творчеством и духовным богатством. И тогда огонь не угасает вместе со смертью, он продолжает освещать дорогу оставшимся, одаривает их Надеждой и дает силы жить.

Таким огнем освещает наш путь жизнь В. М. Алексеева.

Это издание состоит из лекций по небесной механике, читавшихся В. М. Алексеевым на 11 летней математической школе в поселке Кауивели (близ Симеиза в Крыму) в 1971 г. и приложений. Лекции были изданы в сборнике «Символическая динамика», Киев, 1976 г. В приложении помимо упомянутых выше статей О. Ю. Шмидта, Г. Ф. Хильми и

К. А. Ситникова содержится статья В. М. Алексеева «Обмен и захват в задаче трех тел» (ДАН СССР, 1956, т. 108, № 4), где содержатся основные результаты его кандидатской диссертации, а также статья «Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика», опубликованная в журнале «Успехи математических наук» (т. 36, 1981) уже после смерти автора. В ней содержится расширенное изложение докладов В. М. Алексеева в Московском математическом обществе и на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г.

*В. М. Тихомиров*

---

# Квазислучайные колебания и качественные вопросы небесной механики<sup>1</sup>

## Введение

Среди различных областей науки, где математика находит себе применение и является почетной гостьей, небесная механика занимает совершенно исключительное положение. С давних пор, уже почти 300 лет, ее задачи, и особенно «задача трех тел», служат полигоном, на котором поколение за поколением математиков испытывает мощь как старых, так и вновь изобретенных методов исследования. Естественность и простота постановок задач сочетаются с необычайным богатством и разнообразием их содержания. Попытки решить задачу трех тел или хотя бы получить какие-то частные результаты о свойствах ее решений явились отправной точкой для развития многих разделов науки. Многие результаты и поныне не утратили своего значения, другие представляют лишь исторический интерес; число опубликованных работ измеряется сотнями, если не тысячами.

На рубеже двух веков А. Пуанкаре подвел в своих «Новых методах небесной механики» итоги исследований XIX века и дал обильную пищу ученым XX века. Поражаешься богатству идей и понятий, содержащихся в этой книге: метод малого параметра, асимптотические ряды, исследование периодических решений, гомоклинические кривые, интегральные инварианты и т. д. Словом, значительная часть того, что теперь называется «качественной теорией дифференциальных уравнений», восходит к «Новым методам» Пуанкаре и, следовательно, к небесной механике.

Проникновение качественных методов в теорию нелинейных колебаний и в другие задачи нелинейной механики произошло позже, но так уж случилось, что именно с этими задачами стали преимущественно связывать качественную теорию дифференциальных уравнений.

---

<sup>1</sup>Девятая летняя математическая школа. «Наукова думка», Киев, 1976, с. 212–341. Перевод: Three papers on dynamical system, ser. 2, AMS, translations, Volume 116.

Многие из этих задач приводят к исследованию потоков на двумерных многообразиях, где ситуация значительно проще (см., например, лекции А. Г. Кушниренко), но зато и успехи существеннее, и методы плодотворнее.

Двумерная качественная теория дифференциальных уравнений получила значительное развитие, но сейчас она стала явно недостаточной, и современные конференции и симпозиумы это постоянно демонстрируют. Сейчас качественная теория развивается довольно бурно, и, по моему мнению, каждое ее возвращение к первоисточнику, а таковым я считаю небесную механику, придает ей новые силы и свежесть.

Одно такое возвращение состоялось, когда А. Н. Колмогоров, а затем В. И. Арнольд и Ю. Мозер получили свои замечательные результаты, касающиеся инвариантных торов и условно периодических движений в гамильтоновых системах. Вряд ли нужно напоминать, сколь значительным оказалось это продвижение в том, что Пуанкаре назвал «основной задачей динамики», и сколь стимулирующим было его воздействие на качественную теорию.

Сейчас, как мне кажется, назревает почва еще для одного возвращения, да и, пожалуй, оно уже началось. Будем надеяться, что и это возвращение окажется достаточно плодотворным.

Кроме материалов летней украинской математической школы в Кацивели (июль 1971 года), далее широко использован русский вариант доклада [35], а также результаты, с которыми я ознакомился сравнительно недавно. Часть 1 содержит обзор некоторых направлений качественных исследований в задачах небесной механики. Часть 2 является наглядным введением в «символическую динамику»; я старался, чтобы технические детали возможно меньше заслоняли здесь существо дела. В части 3 я хотел показать, каким образом методы символической динамики могут оказаться полезными уже в простейших задачах теории нелинейных колебаний и что они позволяют сделать применительно к задачам, рассмотренных в части 1. Я приношу искреннюю благодарность организаторам школы, пригласившим меня прочитать эти лекции и проявившим незаурядное терпение, дожидаясь, пока они окажутся написанными.

---

## ЧАСТЬ 1

# О некоторых математических проблемах в небесной механике

### § 1. Основная задача небесной механики

Хорошо известно, что классическая небесная механика занимается главным образом различными аспектами так называемой «задачи  $n$  тел». Эта задача состоит в изучении движения  $n$  материальных точек  $p_i$ , притягивающих друг друга в соответствии с законом Ньютона<sup>1</sup>. Обозначив через  $m_i$  массу точки  $p_i$ , через  $r_i$  ее радиус-вектор и через  $\gamma$  постоянную тяготения, имеем следующую систему уравнений движения:

$$\ddot{r}_i = \sum \frac{\gamma m_j r_{ji}}{|r_{ji}|^3}; \quad (1)$$

для краткости здесь обозначено  $r_{ji} = r_j - r_i$ . Эти уравнения определяют динамическую систему (фазовый поток) в  $6n$ -мерном фазовом пространстве, которое получается из  $\mathbb{R}^{6n}$  выкидыванием  $\frac{n(n-1)}{2}$  плоскостей  $r_{ji} = 0$  коразмерности 3.

Центр масс рассматриваемой системы движется прямолинейно и равномерно, так что, поместив в него начало отсчета инерциальной системы координат, будем иметь тождественно

$$\sum_i m_i r_i \equiv 0. \quad (2)$$

Эти соотношения позволяют уменьшить размерность фазового пространства до  $6n - 6$  за счет исключения, например, координат и скоростей одной из точек  $p_i$ . Кроме того, система (1) имеет еще 4 алгебраических интеграла:

---

<sup>1</sup>Так называемой «обобщенной задачи  $n$  тел», в которой закон взаимодействия отличен от ньютоновского (обратных квадратов), мы касаться не будем. В частности, совершенно не будет затронут цикл работ скончавшегося недавно киевского математика Ю. Д. Соколова, много сделавшего в этом направлении.

интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{r}_i|^2 - \sum_{i < j} \frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}} \equiv h; \quad (3)$$

три интеграла площадей (компоненты вектора момента количества движения)

$$\sum_i m_i r_i \times \dot{r}_i \equiv C. \quad (4)$$

Наряду с «общей задачей», в которой все массы предполагаются положительными, рассматриваются и предельные случаи, когда в уравнениях (1) некоторые из  $m_i$  полагаются равными нулю. На физическом языке это означает, что мы пренебрегаем влиянием соответствующих тел на движение остальных. В этой ситуации говорят обычно об «ограниченной задаче». Особенно известной является задача о движении тела нулевой массы («планетоида» или «астероида») в поле тяготения, создаваемом двумя телами, обращающимися по круговым орбитам вокруг общего центра масс, причем все три тела все время находятся в одной и той же плоскости. Собственно говоря, Пуанкаре именно этот случай назвал «ограниченной задачей трех тел», но теперь он часто именуется более пространно — «ограниченной плоской круговой задачей», в отличие от «ограниченной эллиптической задачи» и прочих. Если приравнять нулю все массы, кроме одной, то мы получим «идеальную планетную систему», в которой тела нулевой массы («планеты») обращаются около одного тела («Солнца») по чисто кеплеровским орбитам, не оказывая друг на друга никакого влияния. В классической небесномеханической теории возмущений этот случай выступает в качестве нулевого приближения.

Другой предельный случай получается, когда фиксируется положение нескольких тел; здесь обычно говорят о «неподвижных центрах притяжения». В частности, можно рассматривать простейший случай — задачу о движении одной материальной точки в поле единственного притягивающего центра. В дальнейшем мы будем называть этот случай «задачей Кеплера»; вряд ли нужно напоминать, что она была проинтегрирована еще Ньютоном и что качественный и количественный анализ ее решений лежит в основе всей небесной механики. Тем не менее, я надеюсь показать в § 2, что и здесь можно если не получить новые результаты, то по крайней мере увидеть старые с новой, неожиданной точки зрения.

Задача о движении материальной точки в поле двух неподвижных центров притяжения также принадлежит к числу интегрируемых в квадратурах [14]. Совсем недавно интерес к этой задаче весьма оживился, так как оказалось, что она является хорошим приближением для задачи о движении спутника в поле тяготения не строго сферической планеты. Если планета вытянута наподобие огурца, то это и неудивительно, но как быть, если она, как и реальная Земля, является сплюснутым сфероидом? Оказывается, в этом случае надо поместить неподвижные центры в комплексно сопряженные точки пространства, хотя задача и рассматривается в чисто вещественной области (изложение этих интересных и красивых результатов Е. Аксенова, Е. Гребенникова и В. Демина можно найти в [3]).

Задача двух тел легко сводится к задаче Кеплера, и в соответствии с этим уравнения (1) при  $n = 2$  могут быть полностью проинтегрированы. Напротив, при  $n \geq 3$  они в явном виде (в квадратурах) не интегрируются<sup>1</sup>. В то же время практические нужды астрономии давно побудили разработку численных методов их решения. Сам характер движений небесных тел — приближенно периодический или достаточно точно аппроксимируемый наложением нескольких периодических — делает естественным построение решения в виде кратного ряда Фурье

$$r(t) = \sum A_m \frac{\sin}{\cos} ((m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n)t). \quad (5)$$

Многочисленные «теории движения» (Луны, планет, астероидов, спутников планет и т. д.) сводятся в конце концов к построению частичных сумм рядов, аналогичных (5), дающих приближение, пригодное для сравнения с данными наблюдений. Многочисленные исследования XIX века посвящены разработке различных процедур, позволяющих избежать появления в чисто тригонометрических разложениях (5) «вековых» членов вида  $t^m$  или  $t \sin t$ . Пуанкаре подробно проанализировал в [8] эти процедуры; он же показал, что полученные ряды, вообще говоря, расходятся, хотя их частичные суммы и дают приближение к истинному решению на конечных интервалах времени. Вместе с тем, из работ Пуанкаре стало ясно, что может оказаться не безнадежной попытка решить задачу в рамках общей теории аналитических функций.

Действительно, в 1912 году К. Ф. Сундман опубликовал свою знаме-

<sup>1</sup>Осторожнее, может быть, было бы сказать «пока не проинтегрированы»?



нитую теорему, которая была воспринята как окончательное решение задачи трех тел.

Мы еще вернемся к теореме Сундмана в § 3, а пока лишь констатируем, что, имея неоспоримый теоретический интерес, она мало что дает для нужд практики. Более того, эта теорема по существу относится только к индивидуальному решению задачи трех тел и не проясняет глобальную структуру фазового потока. Поэтому, с точки зрения современной математики, задача трех тел является столь же интересным объектом исследования, как и сто лет назад.

Бурное развитие вычислительной техники и появление новых небесномеханических задач, связанных с космической навигацией и движением искусственных спутников, заставили пересмотреть классические приближенные методы (за эволюцией орбит необходимо следить на протяжении тысяч оборотов, приходится учитывать вызванное асимметрией Земли отклонение поля тяготения от чисто ньютоновского и т. п.). Во многих случаях оказываются удобными прямые методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Впрочем, ЭВМ успешно сотрудничают и с традиционной техникой: в последнее время получили распространение методы построения рядов вида (5), в которых программируются операции прямо с буквенными, а не с числовыми коэффициентами, тем самым машина строит «аналитическую теорию».

С другой стороны, в духе XX века — интерес к качественным проблемам, чему в основном посвящены и эти лекции. Сразу должен признаться, что в настоящее время мы не располагаем особо богатым запасом сведений, относящихся к качественным свойствам решений общей задачи  $n$  тел при  $n \geq 4$ ; большую их часть можно почерпнуть в [11], [13] и [14]. Из работ последних лет упомянем [48] и [49]; замечательная статья В. И. Арнольда [18] и появившаяся недавно статья С. Смейла [31] должны быть отмечены особо: их значение отнюдь не ограничивается рамками небесной механики, и результаты, относящиеся к задаче  $n$  тел, являются лишь одним из многих возможных применений общей теории. Далее мы рассмотрим некоторые из качественных результатов, как довольно старых, так и полученных сравнительно недавно, и относящихся главным образом к случаям  $n = 2$  и 3.

## § 2. Геометрическая интерпретация задачи Кеплера

Если  $n = 2$  и центр масс тел  $p_1$  и  $p_2$  покоится в соответствии с (2) в начале координат, то систему (1) можно упростить. А именно, исключив  $r_2$  с помощью (2), мы получим для  $r_1$  такое же уравнение, как если бы тело  $p_i$  двигалось в ньютоновском поле тяготения, создаваемом неподвижной массой  $\mu = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ , расположенной в начале («задача Кеплера»). При надлежащем выборе системы единиц  $m_1 = 1$  и  $\gamma_\mu = 1$ , а тогда для  $r = r_1$  имеем уравнение

$$\ddot{r} = -\frac{r}{|r|^3}. \quad (6)$$

Дальнейшие рассуждения практически не зависят от числа координат, так что в (6)  $r$  можно было бы считать вектором из  $\mathbb{R}^m$ . Для простоты мы ограничимся, однако, случаем  $m = 2$ .

Фазовое пространство задачи Кеплера имеет (при  $m = 2$ ) размерность 4. Фиксируя значения интегралов энергии  $h$  и момента  $C$ , мы получаем двумерное интегральное многообразие. При  $h < 0$  и  $C \neq 0$  оно будет компактным. Если заменить (6) уравнением движения в поле произвольной центральной силы

$$\ddot{r} = -f(|r|)r, \quad (7)$$

то в типичном случае такое многообразие оказывается двумерным тором, а каждая из лежащих на нем траекторий образует всюду плотную обмотку. Проектируя траекторию из фазового пространства в координатное, мы находим, что не уходящая в бесконечность типичная орбита материальной точки, управляемой уравнением (7), заполняет всюду плотно некоторое кольцо (рис. 1). В исключительных резонансных случаях инвариантные торы распадаются в семейства периодических траекторий.

Если же сила притяжения к неподвижному центру убывает как  $\frac{1}{r^2}$ , то исключительный случай становится правилом, происходит вырождение. Не уходящая в бесконечность орбита всегда является эллипсом (рис. 2), а в фазовом пространстве все двумерные торы распадаются в семейства периодических траекторий.

Естественно ожидать, что такое вырождение обязано своим происхождением наличию еще одного первого интеграла [4, § 50]. Известно,

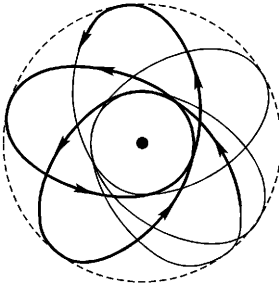


Рис. 1

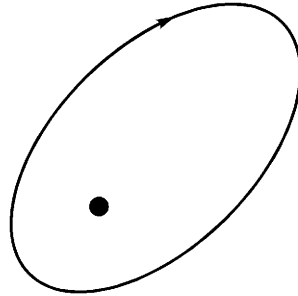


Рис. 2

что классические интегралы (3) и (4) связаны (по теореме Э.Нетер) с инвариантностью уравнений (1) относительно сдвигов по времени (интеграл энергии) и относительно вращений (интеграл момента). Это заставляет думать, что и новый интеграл должен быть следствием некоторой «скрытой симметрии» кеплеровой задачи.

Геометрическая интерпретация случая  $h < 0$ , данная Ю. Мозером в [44], позволяет указать явно эту симметрию; впрочем, Мозер отмечает, что еще в 1935 году В. А. Фок [41] использовал ключевое для этих рассуждений преобразование с целью объяснить вырождение уровней энергии в квантовой модели атома водорода (подобный эффект физики обычно также связывают со «скрытой симметрией»).

Ю. С. Осипов [25] распространил рассуждения Мозера на случай произвольного  $h$ , дав несколько иное доказательство, которое с незначительными изменениями будет воспроизведено, далее.

Напомним сначала определение геодезического потока на римановом многообразии  $M^n$  (см., например, [17]). Этим термином обозначается динамическая система  $T_s$ , действующая в многообразии  $W^{2n-1}$  единичных касательных векторов многообразия  $M^n$ .

Пусть  $\tau$  — единичный касательный вектор в точке  $p \in M^n$ . Проведем через  $p$  (ориентированную) геодезическую в направлении вектора  $\tau$  и, отложив на ней дугу длины  $S$ , получим точку  $p'$  и единичный вектор  $\tau'$ , касающийся в ней той же (ориентированной) геодезической. По определению, преобразование  $T_s$  переводит  $\tau \in W^{2n-1}$  в  $\tau' = T_s\tau$  (рис. 3).

**Теорема.** *Фазовый поток плоской кеплеровой задачи (6) на многообра-*

зи постоянной энергии  $h$  с точностью до замены времени эквивалентен геодезическому потоку на поверхности постоянной гауссовой кривизны  $-2h$ . После пополнения одной точкой эта поверхность изометрична сфере при  $h < 0$ , евклидовой плоскости при  $h = 0$  и плоскости Лобачевского при  $h > 0$ .

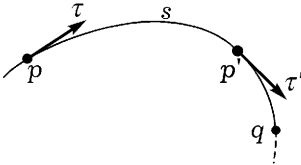


Рис. 3

Как уже было сказано, аналогичное утверждение имеет место при любой размерности  $m$ . Читателям предоставляется произвести соответствующие изменения в формулировке<sup>1</sup>.

*Доказательство.*

Произведем замену времени, введя новое независимое переменное  $s$ , соотношением

$$t = \int |r| ds. \quad (8)$$

В канонических переменных  $p = (p_1, p_2) = \frac{dr}{dt}$  и  $r = (r_1, r_2)$  уравнения кеплеровой задачи имеют гамильтонов вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad (9)$$

где

$$H(p, r) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{|r|}.$$

На экиэнергетическом интегральном многообразии  $H(p, r) \equiv h$  можно преобразовать уравнения (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= |r| \frac{dr}{dt} = |r| \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} [|r|(H-h)], \\ \frac{dp}{ds} &= |r| \frac{dp}{dt} = -|r| \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} [|r|(H-h)] + \frac{\partial |r|}{\partial r} (H-h) = -\frac{\partial}{\partial r} [|r|(H-h)], \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Ю. Мозер доказал в [44] это утверждение для  $h < 0$ . Когда я упомянул об этом результате в одной из лекций школы в Кацивели, А. Д. Мышкис высказал предположение о справедливости аналогичного результата и при всех  $h$ , что и было впоследствии сделано в [25].

так как  $H - h$  на этом многообразии тождественно равно 0. На том же многообразии

$$0 = |r|(H - h) = |r| \left( \frac{p^2}{2} - \frac{1}{|r|} - h \right) = \frac{|r|(p^2 - 2h)}{2} - 1,$$

что дает возможность преобразовать уравнения далее:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\partial}{\partial p} ||r|(H - h)| = \frac{|r|(p^2 - 2h)}{2} \frac{\partial}{\partial p} ||r|(H - h)| = \\ &= \frac{|r|(p^2 - 2h)}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{|r|(p^2 - 2h)}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left| \frac{(p^2 - 2h)^2 r^2}{8} \right| \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{(p^2 - 2h)^2 r^2}{8} \right|.$$

Таким образом, замена времени (8) превращает гамильтоновы уравнения (9) на эквиэнергетической поверхности  $H = h$  в гамильтоновы уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \quad F(p, r) = \frac{(p^2 - 2h)^2 r^2}{8} \quad (10)$$

на поверхности  $F \equiv 1/2$ . Заметим, что при  $h > 0$  поверхность  $F = 1/2$  состоит из двух «пол»; по смыслу проделанных преобразований надо взять из них ту, на которой  $p^2 > 2h$ .

Исключим теперь  $r$  из уравнений (10):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{(p^2 - 2h)^2 r}{4}; \quad r = -\frac{4}{(p^2 - 2h)^2} \frac{dp}{ds}; \\ -\frac{d}{ds} \left[ \frac{4}{(p^2 - 2h)^2} \frac{dp}{ds} \right] &= \frac{dr}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{(p^2 - 2h)r^2 p}{2} = \frac{8p}{(p^2 - 2h)^3} \left( \frac{dp}{ds} \right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 p}{ds^2} = \frac{2}{p^2 - 2h} \left[ 2 \left( p, \frac{dp}{ds} \right) \frac{dp}{ds} - p \left( \frac{dp}{ds} \right)^2 \right], \quad (12)$$

причем

$$\left| \frac{dp}{ds} \right| = \frac{(p^2 - 2h)^2 |r|}{4} = \frac{p^2 - 2h}{2}.$$

Многообразие  $F = 1/2$  проектируется на все пространство  $(P_1, P_2)$  в случае  $h < 0$ , на область  $p \neq 0$  в случае  $h = 0$  и (с учетом выбора полы) на область  $p^2 > 2h$  в случае  $h > 0$ . Эти открытые подмножества в  $\mathbb{R}^2$  будем для краткости обозначать  $M_h$ . Введем в  $M_h$  новую риманову метрику так, чтобы в ней вектор скорости  $\frac{dp}{ds}$  стал единичным:

$$d\sigma^2 = \frac{4 dp^2}{(p^2 - 2h)^2}. \quad (13)$$

Нетрудно усмотреть, что (12) являются уравнениями геодезических линий новой метрики, причем, по самому ее построению, параметр  $s$  имеет смысл длины дуги.

Согласно (13), компоненты ко- и контравариантных метрических тензоров [10] равны соответственно

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(p^2 - 2h)^2}; \quad g^{ij} = \frac{(p^2 - 2h)^2}{4} \delta_{ij};$$

откуда находим символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{km}^l = \frac{1}{2} \sum_s g^{sl} \left[ \frac{\partial g_{sm}}{\partial p_k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial p_m} - \frac{\partial g_{km}}{\partial p_s} \right] = -\frac{2}{p^2 - 2h} [\delta_{lm} p_k + \delta_{lk} p_m - \delta_{km} p_l].$$

Следовательно, уравнения геодезических имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_l}{ds^2} &= - \sum_{k,m} \Gamma_{km}^l \frac{dp_k}{ds} \frac{dp_m}{ds} = \frac{2}{p^2 - 2h} \sum_{k,m} (\delta_{lm} p_k + \delta_{lk} p_m - \delta_{km} p_l) \frac{dp_k}{ds} \frac{dp_m}{ds} = \\ &= \frac{2}{p^2 - 2h} \left[ 2 \left( p, \frac{dp}{ds} \right) \frac{dp_l}{ds} - p_l \left( \frac{dp}{ds} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

что совпадает с (12).

Рассмотрим отображение  $\varphi$  многообразия  $F = 1/2$  в касательное расслоение  $TM_h$ , определяемое равенством  $\varphi(p, r) = (p, \tau)$ , где

$$\tau = \frac{dp}{ds} = -\frac{r}{|r|^2} = -\frac{(p^2 - 2h)^2}{4} r.$$

Легко видеть, что это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между многообразием  $F = 1/2$  (или его полый, если  $h > 0$ ) и многообразием  $W$  единичных касательных векторов. Остается проверить, что фазовый поток, определяемый системой (10), переходит при отображении  $\varphi$  в геодезический поток  $T_s$ .

В самом деле, траектория  $(p(s), r(s))$  потока (10) переходит в  $\varphi(p(s), r(s)) = (p(s), \tau(s))$ , где, по доказанному,  $p(s)$  — геодезическая, а  $\tau(s) = \frac{dp}{ds}$  — единичный (в метрике (13)) касательный к ней вектор. Геодезическая, проходящая через точку  $p = p(0)$  в направлении вектора  $\tau = \tau(0)$ , совпадает с  $p(s)$ , а так как вектор  $\frac{dp}{ds}$  — единичный, то  $s$  — длина дуги на этой геодезической. Поэтому отображение  $T_s$  геодезического потока переводит  $(p(0), \tau(0))$  в  $(p(s), \tau(s)) = \varphi(p(s), r(s))$ , что и утверждалось.

Метрика (13) хорошо известна.

При  $h < 0$  стереографическая проекция

$$p_i = \frac{x_i \cdot 2|h|}{2 - x_0 \sqrt{2|h|}} \quad (14)$$

переводит  $M_h$  в проколотую сферу  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{2x_0}{\sqrt{2|h|}}$  радиуса  $R = \frac{1}{\sqrt{2 - |h|}}$ , причем метрика (13) переходит в обычную евклидову.

Таким образом, риманово многообразие  $M_h$  оказывается поверхностью положительной постоянной (гауссовой) кривизны  $2|h|$ .

При  $h = 0$  инверсия

$$p_i = \frac{2x_i}{x_1^2 + x_2^2} \quad (15)$$

переводит  $M_0$  снова в себя, а метрика (13) становится евклидовой

$$\frac{4(dp_1^2 + dp_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2)} = dx_1^2 + dx_2^2.$$

При  $h > 0$  инверсия

$$p_i = \frac{\sqrt{2h} x_i}{x_1^2 + x_2^2} \quad (16)$$

отображает  $M_h$  на внутренность единичного круга с выколотым центром, а метрика (13) переходит (с точностью до постоянного множителя) в обычную метрику модели Пуанкаре плоскости Лобачевского

$$\frac{4(dp_1^2 + dp_2^2)}{(p_1^2 + p_2^2 - 2h)^2} = \frac{1}{2h} \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Этим доказательство теоремы завершается.

Доказанная эквивалентность (с точностью до замены времени (8)) между фазовым потоком задачи (6) на эквиэнергетическом многообразии  $H = h$  и геодезическим потоком на многообразии  $M_h$  с метрикой (13) позволяет, прежде всего, произвести «регуляризацию» задачи Кеплера.

Уравнение (6) имеет особенность при  $r = 0$ . Если постоянная площадей (интеграл момента)  $c \neq 0$ , то, как нетрудно проверить,  $|r|$  отделен от 0 положительной константой, так что решение не имеет особенностей и является аналитической функцией  $t$  на всей оси  $-\infty < t < +\infty$ . Напротив, если  $c = 0$ , то движение происходит по прямой, проходящей через начало, и обязательно  $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = 0$  при некотором  $t_0$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $t_0 > 0$ . В случае реальной механической задачи в момент  $t_0$  происходит столкновение движущейся точки с неподвижным центром притяжения (в задаче двух тел это означает столкновение движущихся точек в их центре масс), и бессмысленно говорить о том, что будет при  $t > t_0$ , так как при тесном сближении, и подавно при столкновении, становится непригодным идеализированное представление физического объекта в виде материальной точки. Однако, с математической точки зрения, естественно попытаться продолжить  $r(t)$  на  $t > t_0$  так, чтобы полученная вектор-функция была бы в некотором смысле «регулярной». Говоря здесь и в следующем параграфе о «продолжении решения за момент столкновения», мы будем всегда иметь в виду лишь эту, чисто математическую, постановку вопроса.

Регуляризацию решения  $r(t)$  можно попытаться произвести при помощи предельного перехода, подобрав семейство решений  $r(t, \alpha)$  задачи (6) так, чтобы при  $\alpha \neq 0$  они не содержали особенностей (т. е. не входили бы в области  $c \neq 0$ ) и чтобы

$$r(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} r(t, \alpha) \quad (17)$$

при  $0 \leq t < t_0$ . Если при этом правая часть (17) существует и при  $t > t_0$ ,



то этот предел можно считать продолжением  $r(t)$  за момент столкновения. Другую возможность подсказывает аналитический характер задачи. В самом деле, в комплексной области можно обойти особую точку  $t = t_0$  и получить значения  $r(t)$ ,  $t > t_0$ , при помощи аналитического продолжения. Разумеется, вопрос о физическом смысле «комплексного времени» будет бессодержательным: это такая же математическая абстракция, как и сама идея продолжения движения за момент столкновения.

Поскольку в особой точке  $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = 0$ , из интеграла энергии находим, что

$$|\dot{p}(t)| = \sqrt{2h + 2|r(t)|^{-1}} \rightarrow \infty.$$

Поэтому решению с особенностью отвечает геодезическая метрики (13), уходящая в бесконечно удаленную (в смысле координат  $(p_1, p_2)$ , но не в смысле длины дуги) точку  $p_\infty$ .

Многообразие  $M_h$  с метрикой (13) не является полным метрическим пространством, но становится таковым после пополнения точкой  $p_\infty$ . Согласно (14) – (16), пополненное пространство  $\tilde{M}_h = M_h \cup \{p_\infty\}$  изометрично сфере при  $h < 0$ , евклидовой плоскости при  $h = 0$  и плоскости Лобачевского при  $h > 0$ . Точке  $p_\infty$  при этом соответствует «Се-

верный полюс»  $\left( \sqrt{\frac{2}{|h|}}, 0, 0 \right)$  сферы при  $h < 0$  и точка  $x_1 = x_2 = 0$  в остальных случаях. На всех трех поверхностях дуга геодезической, оканчивающаяся в некоторой точке  $q$ , однозначно продолжается до полной геодезической, проходящей через  $q$  (рис. 3). Поэтому и геодезическая метрики (13), отвечающая решению кеплеровой задачи с особенностью, имеет однозначное продолжение за точку  $p_\infty$ . Легко видеть, что это продолжение является регуляризацией в смысле (17).

Рассмотрим теперь ситуацию с точки зрения теории аналитических функций. Уравнения геодезических на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского не имеют вещественных особенностей. Поэтому вдоль геодезической координаты  $x_i$ , связанные с  $p = (p_1, p_2)$  формулами (14) – (16), являются аналитическими (и даже элементарными) функциями длины дуги  $s$ , не имеющими на вещественной оси  $-\infty < s < +\infty$  особых точек. «Прокол» поверхности в точке-образе  $p_\infty$  порождает у функций  $x_i(s)$  «устраняемую особую точку» (по стандартной терминологии курсов ТФКП). Ясно, что ее обход по пути, близкому к вещественной оси, приводит к тому же результату, что и про-

должение геодезической в полном многообразии  $\widetilde{M}_h$ . Что же касается переменных  $r(t)$  и  $p = \frac{dr}{dt}$ , то в их зависимости от «физического времени»  $t$ , связанного с  $s$  соотношением (8), аналитичность нарушается.

В самом деле, пусть при  $s = 0$  геодезическая проходит на  $\widetilde{M}_h$  через «прокол». Учитывая, что  $s$  — длина дуги и обозначая через  $\tau$  единичный вектор, касающийся геодезической в точке прокола, имеем

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau s + \dots & \text{при } h \leq 0, \\ \tau s \sqrt{\frac{h}{2}} + \dots & \text{при } h > 0 \end{cases}$$

и (только для  $h < 0$ ) из уравнения сферы

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{2x_0}{\sqrt{2|h|}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{|h|}} - S^2 \sqrt{\frac{|h|}{2}} + \dots$$

Отсюда в силу (14)–(16) и (11) получаем

$$\begin{aligned} r &= \frac{s^2}{2} \tau + \dots, \\ p &= \frac{2}{s} \tau + \dots \end{aligned}$$

Далее, согласно (8),

$$\frac{dt}{ds} = |r| = \frac{s^2}{2} + \dots$$

и потому

$$t - t_0 = \frac{s^3}{6} + \dots \quad (18)$$

Таким образом,  $r$ ,  $p$  и  $t$  являются аналитическими функциями «униформизирующей переменной»  $s$ , причем скорость  $p = \frac{dr}{dt}$  имеет относительно этой переменной простой полюс в точке столкновения, а  $r$  и  $t$  остаются голоморфными. Как функции  $t$  координаты и скорости имеют алгебраическую особенность (точку ветвления):

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \tau (t - t_0)^{2/3} + \dots, \quad p = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \tau (t - t_0)^{-1/3} + \dots \quad (19)$$

За момент столкновения эти функции могут быть продолжены (с сохранением вещественности) единственным образом.

Теперь рассмотрим, каким образом соответствие между фазовым потоком задачи Кеплера и геодезическим потоком на  $\widetilde{M}_h$  связано с наличием дополнительных первых интегралов, отсутствующих в случае произвольной центральной силы (7). Поверхности  $\widetilde{M}_h$  в высшей степени однородны: на каждой из них действует трехпараметрическая группа движений, т. е. преобразований, не меняющих метрику, а, следовательно, и сохраняющих геодезический поток. Согласно теореме Нетер, каждой однопараметрической подгруппе из этой группы, а точнее говоря, ее инфинитезимальной образующей, т. е. элементу алгебры Ли, отвечает первый интеграл. Известно, что геодезические, параметризованные длиной дуги, являются экстремалами интеграла действия ([7], § 12)

$$\int_{s_0}^{s_1} \sum_{i,j} g_{ij}(p) \dot{p}_i \dot{p}_j ds$$

(точкой обозначено дифференцирование по  $s$ ).

Преобразования, не меняющие метрику, оставляют инвариантным и этот интеграл. Если  $X = \{X_i(p)\}$  — векторное поле, порождающее однопараметрическую группу движений (т. е. являющееся ее инфинитезимальной образующей), то соответствующий первый интеграл выглядит так ([2], § 16):

$$\sum_i g_{ij}(p) \dot{p}_i X_j(p) \equiv \text{const.}$$

Подставляя сюда значения коэффициентов метрики (13) и используя (11), преобразуем это выражение к виду

$$(-r_1)X_1 + (-r_2)X_2 = \text{const} \quad (20)$$

(разумеется, минусы можно было бы опустить без всякого ущерба, они оставлены лишь для согласования с классическими формулами).

Алгебра Ли группы движений поверхности  $\widetilde{M}_h$  трехмерна. Векторные поля, отвечающие трем однопараметрическим подгруппам, легко вычислить. Это будут:

$$\text{а) } X_1 = -p_2, \quad X_2 = p_1$$

(вращение плоскости  $(p_1, p_2)$  около начала);

$$\text{б) } X_1 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} - h, \quad X_2 = p_1 p_2$$

(движения, оставляющие на месте геодезическую  $p_2 = 0$ );

$$\text{в) } X_1 = p_1 p_2, \quad X_2 = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} - h$$

(движения, оставляющие на месте геодезическую  $p_1 = 0$ ).

В координатах  $x_i$  а) также соответствует вращению плоскости около начала (около оси  $Ox_0$  для  $h < 0$ ). Что же касается б) и в), то они отвечают при  $h < 0$  вращению сферы около двух взаимно перпендикулярных горизонтальных осей, проходящих через ее центр, с угловой скоростью  $\sqrt{2|h|}$ . При  $h = 0$  поля б) и в) порождают параллельные переносы плоскости  $(x_1, x_2)$  (это согласуется и с предельным переходом  $h \rightarrow 0$ , при котором радиус сферы  $\frac{1}{\sqrt{2|h|}} \rightarrow \infty$ , но линейная скорость ее «южного полюса», где  $x_1 = x_2 = x_0 = 0$ , остается постоянной). При  $h > 0$  поля б) и в) порождают подгруппы неевклидовых параллельных переносов вдоль координатных осей  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 0$ .

Подставляя выражения для  $X_i$  в (20), находим следующие первые интегралы:

$$\text{а) } r_1 p_2 - r_2 p_1 = c$$

(это классический интеграл момента, см. (4)),

$$\text{б) } h r_1 - r_1 \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} - r_2 p_1 p_2 = l_1,$$

$$\text{в) } h r_2 - r_1 p_1 p_2 + r_2 \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = l_2.$$

Последние два выражения можно преобразовать, используя уже найденный интеграл момента и интеграл энергии

$$2h = p_1^2 + p_2^2 - \frac{2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}};$$

$$l_1 = c p_2 - \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \quad l_2 = -c p_1 - \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}},$$

откуда видно, что  $l_1$  и  $l_2$  суть не что иное, как компоненты так называемого «инвариантного вектора Лапласа». В  $\mathbb{R}^3$  этот вектор записывается так:

$$\mathbf{l} = \mathbf{p} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

а применительно к плоскому случаю, где

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (0, 0, c),$$

мы получаем для компонент вектора  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, 0)$  найденные выше выражения.

Инвариантный вектор  $\mathbf{l}$  и является тем дополнительным первым интегралом, который является специфическим для ньютоновского закона взаимодействия ([4], § 15).

Найденные интегралы связаны соотношением

$$l_1^2 + l_2^2 = 2hc^2 + 1,$$

что и естественно, поскольку фазовое пространство плоской кеплеровой задачи четырехмерно. И потому не более трех первых интегралов могут быть независимыми.

Геометрическая интерпретация задачи Кеплера позволяет дать прозрачное истолкование употребляемых в небесной механике элементов: средней, истинной и эксцентрической аномалиям и т. п. ([44]). Заметим еще, что  $\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$  равно эксцентриситету орбиты.

### § 3. Задача трех тел. Аналитические свойства решений

Задача о движении трех материальных точек под действием ньютоновских сил взаимного притяжения — «задача трех тел» — получила в математике, механике и астрономии широкую известность. Достаточно просмотреть посвященные этой задаче главы в книгах Уиттекера [12], Биркгофа [1], Зигеля [5], [6] и уже упоминавшиеся статьи Арнольда [18] и Смейла [31], чтобы убедиться в богатстве и плодотворности круга идей, так или иначе обязанных ей своим возникновением.

Задача трех тел описывается системой дифференциальных уравнений (1) из § 1; ей соответствует фазовый поток в 18-мерном фазовом пространстве. Выбирая инерциальную систему с началом в центре

масс, мы получаем соотношение (2), что позволяет редуцировать задачу к 6 степеням свободы и 12-мерному фазовому пространству  $M^{12}$ . После этого задача все еще имеет 4 алгебраических интеграла (3) и (4), множества уровней которых расщепляют  $M^{12}$  на восьмимерные многообразия, топология которых изучена в [31]. Согласно теореме Брунса [12], в  $M^{12}$  не существует алгебраических первых интегралов, отличных от 4 классических, а Пуанкаре доказал [8], что не существует даже и однозначных аналитических первых интегралов, аналитически зависящих также от масс тел. Уже это обстоятельство наводит на мысль о запутанном поведении траекторий в фазовом пространстве.

Вполне естественно — раз уж не удается найти общее решение — пытаться получить частные решения задачи трех тел, для которых интегрирование оказывается возможным, например за счет соображений симметрии. Легко убедиться в том, что система из гравитирующих материальных точек не может иметь состояния статического равновесия. Лагранжу и Эйлеру удалось, однако, показать, что возможно равновесие динамическое: три тела находятся в точках с неизменными координатами, но в неинерциальной, равномерно вращающейся системе координат. Другими словами, каждое из тел совершает равномерное круговое движение вокруг общего центра масс, с одной и той же угловой скоростью.

Для решения Лагранжа три тела  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  находятся при этом в вершинах равностороннего треугольника. В Солнечной системе такую конфигурацию образуют довольно точно Солнце, Юпитер и каждый из астероидов так называемой Троянской группы.

Для решения Эйлера треугольник  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  вырождается, и все три тела находятся на одной прямой. Если массы тел различны, то существуют три класса таких решений в соответствии с тем, какое из трех тел находится между двумя другими.

Существуют и другие частные решения, в которых конфигурация трех тел остается все время подобной самой себе [11]. В одних, которые можно назвать «лагранжевыми» [67], треугольник  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  равносторонний, в других — «эйлеровых» [68] — все три тела лежат на одной прямой; каждое из тел  $p_i$  движется вокруг общего центра масс по некоторому коническому сечению, возможно вырождающемуся в часть прямой. Далее мы увидим, что эти решения встречаются неожиданным образом в двух разных аспектах качественного анализа задачи трех тел.

Правые части системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\gamma m_j r_{ji}}{|r_{ji}|^3}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

являются вещественно аналитическими функциями координат, и по теореме Коши заданием начальных условий решение однозначно определяется и является аналитической функцией времени  $t$ , по крайней мере локально. Эту функцию можно аналитически продолжить на всю ось времени, если только по пути мы не встретим особых точек.

Мы видели выше, что уже в случае  $n = 2$  такая возможность действительно реализуется на всех решениях с нулевым моментом количества движения, так как в каждом из них происходит по крайней мере одно соударение тел, т.е. существует такой момент  $t_0$  (или моменты, если  $h < 0$ ), что при  $t \rightarrow t_0$  расстояние  $r_{12} \rightarrow 0$ . Эта особенность называется алгебраической (см. (18) и (19)), и после перехода к новому независимому переменному

$$s = A(t - t_0)^{1/3} + \dots \quad (21)$$

координаты тел становятся аналитическими функциями  $s$  в некоторой окрестности значения  $s = 0$ , а их скорости имеют полюс первого порядка. Решение имеет единственное аналитическое вещественное продолжение через точку  $t = t_0$  отвечающее вещественной ветви кубического корня в (21). Никаких других особенностей на вещественной оси решения задачи двух тел не имеют.

В случае  $n = 3$ , кроме парного соударения, появляется также возможность тройного соударения. Этим все и исчерпывается, так как имеет место

**Теорема Пенлеве** ([45], [3], [5]). *Если решение задачи трех тел является аналитической функцией  $t$  в интервале  $(0, t_0)$ , но перестает быть таковым при  $t = t_0 \neq \infty$ , то при  $t \rightarrow t_0 - 0$  либо все расстояния  $r_{ij} \rightarrow 0$ , либо стремится к 0 лишь одно из них, а остальные два стремятся к конечному положительному пределу.*

Если имеет место первая возможность, то в силу соглашения (2) о центре масс все  $r_i \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_0 - 0$ . Важно заметить, что в случае парного соударения (вторая возможность) радиусы-векторы всех трех тел также стремятся к конечным пределам:  $r_i(t) \rightarrow r_i(t_0)$ , и если, например,  $r_{12} \rightarrow 0$ , то  $r_1(t_0) = r_2(t_0)$ .

К сожалению, при  $n > 3$  аналогичную теорему доказать пока не удастся. Из рассуждений Пенлеве вытекает лишь, что при  $t \rightarrow t_0 - 0$  наименьшее из  $r_{ij} \rightarrow 0$ . В 1908 г. фон Цейпель сформулировал условное утверждение: если при  $t \rightarrow t_0 - 0$  все расстояния  $r_{ij}$  остаются ограниченными, то тела  $p_1, \dots, p_n$  можно разбить на некоторое число групп так, что при  $t \rightarrow t_0 - 0$  происходит столкновение тел, входящих в одну группу, причем в определенной точке пространства. Доказательство этого утверждения было подвергнуто критике Уинтнером [11] и реабилитировано в [49]. Альтернативная к утверждению фон Цейпеля возможность: при  $t \rightarrow t_0 \neq \infty$  некоторые из расстояний  $r_{ij}$  не ограничены — представляется, особенно с физической точки зрения, маловероятной, но остается пока не опровергнутой.

Вернемся к случаю задачи трех тел. Тройное соударение является в некотором смысле событием весьма исключительным, и, что особенно важно, можно привести простое достаточное условие для его отсутствия. А именно:

**Теорема.** *Если в задаче  $n$  тел при  $t \rightarrow t_0$  все  $r_{ij} \rightarrow 0$ , то момент количества движения системы равен нулю.*

Эта теорема приведена в статье Ф. А. Слудского [30], ее знал, по-видимому, Вейерштрасс и независимо доказал К. Сундман в своей знаменитой работе, посвященной регуляризации решений задачи трех тел [51], [3], [5].

Сопоставляя теоремы Пенлеве и Слудского, мы заключаем, что решения задачи трех тел с ненулевым моментом количества движения могут иметь лишь особенности типа парных соударений. Для регуляризации этих особенностей Сундман вводит новое независимое переменное  $s$  при помощи формулы

$$t = \int \prod_{i < j} \left( 1 - e^{-\frac{r_{ij}}{l}} \right) ds, \quad (22)$$

где  $l$  — подходящая константа, зависящая только от масс и начальных значений координат и скоростей тел. Отличие переменных  $t$  и  $s$  становится существенным лишь тогда, когда одно из расстояний  $r_{ij}$  обращается в нуль, и очевидно, что при этом они связаны между собой примерно так же, как в формуле (8) из § 2. Таким образом, замена (22) является универсальной и позволяет регуляризовать все парные столкновения, независимо от того, какая из пар тел сталкивается.



**Теорема Сундмана.** *Если у решения задачи трех тел момент количества движения отличен от нуля, то существуют такие  $l$  и  $\delta$ , что в полосе  $|\operatorname{Im} s| < \delta$  координаты всех трех тел, попарные расстояния между ними и время  $t$  являются аналитическими функциями переменной  $s$ , связанной с временем  $t$  соотношением (22). В той же полосе скорости тел могут иметь на вещественной оси  $s$  лишь полюсы первого порядка.*

При доказательстве этой теоремы Сундману пришлось преодолеть две основные трудности. Первая из них связана с регуляризацией отдельных парных столкновений. Если при  $t = t_0$  происходит, скажем, столкновение тел  $p_1$  и  $p_2$ , то около этого момента силы взаимодействия этих тел будут много больше, чем силы их взаимодействия с  $p_3$ . Поэтому преобразования, приводящие к регуляризации, будут здесь в сущности теми же самыми, что и примененные в § 2 для случая, когда, кроме сталкивающихся, других тел не существует. Особенность снова оказывается алгебраической: как и в (19), координаты имеют точку ветвления третьего порядка, и существует единственное вещественное аналитическое продолжение за момент столкновения. (Недавно Г. Шперлинг [49] распространил этот результат и на задачу многих тел, при условии, что заранее известно, что особенность имеет характер парных соударений, возможно и нескольких пар тел).

Вторая трудность состоит в доказательстве равномерной оценки для радиусов сходимости рядов, представляющих решение, т. е. аналитичности решения в полосе равномерной ширины, окружающей действительную ось. Вывод необходимых для этого оценок периметра треугольника, образованного тремя телами, и величины скорости тела, не участвующего в столкновении, требует тонких и кропотливых рассуждений и занимает в работе Сундмана значительное место.

Регуляризация тройного столкновения, подобная проделанной Сундманом для случая парных столкновений, оказывается невозможной. Аналитические свойства решений задачи трех тел вблизи точки тройного соударения исследовались рядом авторов [50], [37], [32]. Наиболее полно этот вопрос был, по-видимому, изучен К. Зигелем, изложение результатов которого приведено в новом издании его известных «Лекций по небесной механике», дополненных Ю. Мозером [6]. Не останавливаясь на подробном изложении, упомянем лишь о двух интересных фактах.

Во-первых, и в этом суть утверждения о невозможности регуляризации, решение задачи трех тел, аналитическое на некотором интерва-

ле  $(0, t_0)$  и имеющее при  $t = t_0$  особенность типа тройного соударения, не имеет, вообще говоря, вещественного аналитического продолжения на  $t > t_0$  (выражения для координат содержат  $(t - t_0)^2$ , и показатель  $\lambda$  может оказаться иррациональным).

Во-вторых, при приближении к моменту  $t_0$  тройного соударения в начале координат существует предельная конфигурация трех тел, а именно: существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r_i(t)}{(t - t_0)^{2/3}} = R_i.$$

При этом оказывается, что точки  $R_i$ , либо располагаются в вершинах равностороннего треугольника, либо лежат на одной прямой. Таким образом, в окрестности тройного соударения движение трех тел асимптотически близко либо к лагранжевым, либо к эйлеровым частным решениям, чем подтверждается важная роль этих решений для качественного анализа всей задачи в целом.

Согласно [37], совокупность всех траекторий в фазовом пространстве  $M^{12}$ , на которых происходит тройное столкновение, образует четыре подмногообразия: одно семимерное, отвечающее движениям с лагранжевой асимптотикой, и три пятимерные, отвечающие движениям с эйлеровой асимптотикой (напомним, что эйлеровых движений существует три класса, в соответствии с тем, какое из трех тел находится между двумя другими). Все эти многообразия лежат в девятимерном алгебраическом подмногообразии в  $M^{12}$ , на котором интеграл момента (4) из § 1 равен нулю.

Что же касается траекторий с парными столкновениями, то их многообразие, как легко видеть, десятимерно. Неизвестно, сколь плохим может быть его расположение в  $M^{12}$ , например, не является ли это многообразие всюду плотным в некотором открытом подмножестве  $M^{12}$ .

В заключение этого параграфа упомянем, что отобразив полосу  $|\operatorname{Im} s| < \delta$  конформно на единичный круг, мы получим решение, аналитичное по теореме Сундмана в этом круге и, стало быть, разложимое в сходящийся степенной ряд. С теоретической точки зрения этот ряд будет пригоден для вычисления координат тел на всей оси времени. Французский астроном Белорицкий произвел оценку числа членов ряда, которое обеспечивает вычисления со степенью точности, необходимой для нужд практической астрономии. Оказалось, что для этого придется взять  $10^{8000000}$  членов!

## § 4. Финальные движения в задаче трех тел

Исследование качественных свойств решений задачи трех тел продвинулись сравнительно далеко в направлении изучения финальных движений, т. е. поведения решений при  $t \rightarrow \infty$ . Давний и стойкий интерес, который проявляют к этим вопросам как специалисты, так и не специалисты, вполне объясним. Здесь затрагиваются проблемы, возникающие в области, где математика и механика граничат с философией: происхождение и судьба Солнечной системы, эволюция звездных скоплений и т. д.

Один из первых результатов в этой области был получен Лапласом и Лагранжем, которые доказали, что в первом приближении (т. е. если пренебречь членами, содержащими квадраты отношений масс планет к массе Солнца) движение планет может быть описано чисто тригонометрическими рядами [9]. Этот результат был истолкован как доказательство устойчивости Солнечной системы; с ним же связано происхождение понятия «устойчивости в смысле Лагранжа» в общей теории динамических систем. К сожалению, надежды на справедливость аналогичного утверждения в следующих приближениях теории возмущений не оправдались, и в настоящее время вопрос об устойчивости как реальной Солнечной системы, так и вообще планетарных систем гравитирующих точек остается открытым; мы еще вернемся к этому вопросу далее.

Простейшей и в то же время наиболее наглядной характеристикой движения является асимптотика попарных расстояний между телами при  $t \rightarrow \infty$ .

Ньютоновский характер сил взаимодействия порождает две типичные асимптотики для ухода в бесконечность: гиперболическую  $O(t)$  и параболическую  $O(t^{2/3})$ . В одномерной кеплеровой задаче это очевидно: из интеграла энергии

$$\frac{\dot{\rho}^2}{2} - \frac{1}{\rho} = h$$

находим, что

$$\rho = \sqrt{2h} \cdot t + O(\ln t) \quad \text{при } h > 0;$$

$$\rho = \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3} \quad \text{при } h = 0;$$

$$\rho \leq \frac{1}{|h|} \quad \text{при } h < 0.$$

Те же три случая мы имеем и в задаче двух тел. В зависимости от знака константы полной энергии  $h$  (энергии относительного движения этих двух тел, если центр масс не предполагается покоящимся) движения разделяются на

*H.* гиперболические:  $\rho_{12} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\rho_{12}}{t} \rightarrow C > 0$ ;

*P.* параболические:  $\rho_{12} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\rho_{12}}{t^{2/3}} \rightarrow C > 0$ ;

*B.* ограниченные (или эллиптические):  $\rho_{12} < C < \infty$ .

(Здесь и далее  $\rho_{ij} = |r_{ij}|$  — расстояние между телами  $p_i$  и  $p_j$ ;  $C$  — некоторая постоянная, не обязанная быть одной и той же во всех формулах.)

В случае произвольного числа тел положение оказывается гораздо более сложным. Все же Саари удалось доказать [48] некоторое условное утверждение, согласно которому три упомянутых выше типа поведения попарных расстояний при  $t \rightarrow \infty$  являются основными. Согласно Саари, все  $n$  тел разбиваются на скопления, внутри которых попарные расстояния ограничены; скопления группируются в подсистемы так, что внутри одной подсистемы расстояния между скоплениями имеют порядок  $t^{2/3}$ ; наконец, расстояния центров масс подсистем от общего центра масс всей системы имеют порядок  $t$ . Этот красивый результат получен, однако, в предположении, что выполняется ряд не проверяемых эффективно условий, важнейшим из которых является отсутствие осциллирующих троек  $(ijk)$ , где  $\rho_{ij} \rightarrow \infty$ , а отношение  $\frac{\rho_{ij}}{\rho_{ik}}$ , хотя и не ограничено, не стремится к бесконечности.

Вернемся к задаче трех тел. Здесь мы имеем всего три попарных расстояния, которые мы для краткости обозначим

$$\rho_1 = \rho_{23}, \quad \rho_2 = \rho_{13}, \quad \rho_3 = \rho_{12}.$$

Величины  $\rho_i$  связаны между собой неравенствами треугольника, что уменьшает число логически возможных комбинаций их асимптотик. Еще в 1922 г. французский астроном и математик Ж. Шази описал все возможные в задаче трех тел типы финальных движений [38]. Согласно Шази, все фазовое пространство разбивается на следующие подмножества:

- 1) *H.* Гиперболические движения:  $\rho_i \rightarrow \infty$ ;  $\frac{\rho_i}{t} \rightarrow C_i > 0$ .

2)  $HP_k$ . Гиперболо-параболические движения:

$$\rho_i \rightarrow \infty; \frac{\rho_k}{t^{2/3}} \rightarrow C > 0; \frac{\rho_i}{t} \rightarrow C_i > 0, i \neq k.$$

3)  $P$ . Параболические движения:

$$\rho_i \rightarrow \infty; \frac{\rho_i}{t^{2/3}} \rightarrow C_i > 0.$$

Во всех трех случаях происходит распад системы трех тел (тройной звезды) на отдельные составляющие компоненты; различие лишь в скорости удаления компонент друг от друга. Например, для движений из  $HP_1$  система распадается на две подсистемы: одна состоит из одного тела  $p_1$ , другая — из тел  $p_2$  и  $p_3$ , которые удаляются друг от друга параболически ( $\sim t^{2/3}$ ), в то время как подсистемы расходятся гиперболически ( $\sim t$ ).

4)  $HE_k$ . Гиперболо-эллиптические движения:

$$\rho_k < C; \rho_i \rightarrow \infty; \frac{\rho_i}{t} \rightarrow C_i > 0, i \neq k.$$

5)  $PE_k$ . Параболо-эллиптические движения:

$$\rho_k < C; \rho_i \rightarrow \infty; \frac{\rho_i}{t^{2/3}} \rightarrow C_i > 0, i \neq k.$$

В этих двух случаях система распадается на двойную звезду и одно тело, расстояние между которыми стремится к бесконечности гиперболически или параболически; каждый случай разбивается на три подслучая в соответствии с тем, какое из трех тел удаляется от пары остальных; например, для движений  $PE_2$  расстояние между телами  $p_1$  и  $p_3$  ограничено, в то время как  $p_2$  неограниченно от них удаляется параболически.

6)  $B$ . Ограниченные движения: все  $\rho_i < C < \infty$ .

7)  $OS$ . Осциллирующие движения: по крайней мере одно из  $\rho_i$  не ограничено, но не стремится к бесконечности.

Существование движений типов  $H$ ,  $P$  и  $B$  было Шази уже известно; примеры доставляют, скажем, лагранжевы решения, в которых треугольник  $p_1p_2p_3$  — равносторонний (меняющихся размеров). В существовании движений гиперболо-эллиптического типа он не сомневался (хотя более или менее строгое доказательство было дано, по-видимому,

только Биркгофом в [1]), поскольку они легко конструируются на основе комбинации двух кеплеровых движений. Случаи  $HP_k$  и  $PE_k$  являются предельными.

Что же касается класса осциллирующих движений, то он был введен Шази из чисто логических соображений, и долгое время существование таких движений ставилось под сомнение. Только в 1959 г. К. А. Ситников [29] доказал, что  $OS \neq \emptyset$ .

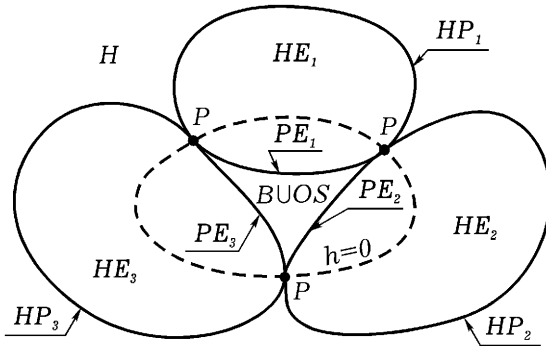


Рис. 4

Взаимное расположение подмножеств 1)–7) так, как его представлял себе Шази, представлено на рис. 4. Из определений и формулы (3) § 1 вытекает, что  $H$  и  $HP_k$  лежат в области, где константа энергии  $h > 0$ ,  $P$  — на гиперповерхности  $h = 0$ ,  $PE_k$  — в области, где  $h < 0$ ; Шази доказал, что  $B$  и  $OS$  также лежат в области, где  $h < 0$ ; гипербола-эллиптические движения  $HE_k$  возможны при любом знаке  $h$ .

Для движений, принадлежащих множеству

$$A_k = H \cup HP_k \cup HE_k \cup P \cup PE_k,$$

удобно использовать координаты Якоби. Для  $A_1$  они вводятся, как на рис. 5:  $r = r_{23} = r_2 - r_3$ ,  $R$  — вектор с началом в центре масс тел  $p_2$  и  $p_3$  и концом в  $p_1$  (для  $A_2$  и  $A_3$  индексы соответственно меняются). В координатах Якоби уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\frac{\mu_1 r}{|r|^3} + \Phi_1(r, R), \\ \ddot{R} &= -\frac{\mu_2 R}{|R|^3} + \Phi_2(r, R), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mu_i$  — некоторые константы, зависящие только от масс  $m_k$ , а функции  $\Phi_i = O\left(\frac{|r|}{|R|^3}\right)$ . Для движений из множества  $A_1$  при  $t \rightarrow \infty$  отношение  $|r|/|R|^3 \rightarrow 0$  достаточно быстро, так что система (23) асимптотически распадается на две кеплеровы подсистемы. Шази доказал, что элементы, определяющие мгновенные кеплеровы орбиты в этих двух подсистемах, стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к определенным пределам. В частности, существуют предельные относительные энергии

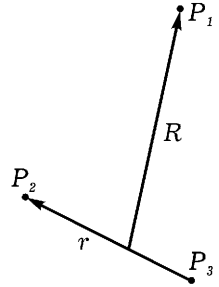


Рис. 5

$$h_r = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mu_1}{|r|} \right), \quad h_R = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\dot{R}^2}{2} - \frac{\mu_2}{|R|} \right), \quad (24)$$

и принадлежность движений к различным финальным типам можно описать в терминах этих величин так:

$$H = \{h_r > 0, h_R > 0\}, \quad HP_1 = \{h_r = 0, h_R > 0\},$$

$$HE_1 = \{h_r < 0, h_R > 0\}, \quad P = \{h_r = 0, h_R = 0\},$$

$$PE_1 = \{h_r < 0, h_R = 0\}.$$

Обе кеплеровы подсистемы, на которые распадается асимптотически система (23), могут быть проинтегрированы до конца, поэтому представляется весьма правдоподобной

**Гипотеза. В области**

$$A = \text{Int}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = H \cup \cup_k [HE_k \cup HP_k] \quad (25)$$

*задача трех тел имеет полный набор однозначных аналитических пер- вых интегралов.*

Шази считал это утверждение верным, нужные интегралы он предлагал строить из предельных значений элементов мгновенных кеплеровых орбит в подсистемах, однако его аргументы, приведенные в [38] и [40], не кажутся мне исчерпывающими. Если, тем не менее, оно верно, то было бы интересно изучить поведение интегралов около грани- цы (25), которая весьма сложна.

## § 5. Эволюция системы. Проблема захвата

Как уже было сказано, в задаче Кеплера или в приводящейся к ней задаче двух тел финальный тип движения определяется знаком константы энергии и остается одним и тем же как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ . В своих мемуарах [39] и [40] Ж. Шази сформулировал аналогичное утверждение и для задачи трех тел, и довольно долго математический, и особенно астрономический, мир был убежден, что такая замечательная симметрия действительно имеет место. В ее пользу говорило также и то, что во всех случаях, когда удавалось получить точные результаты (не использующие численного интегрирования), поведение решений при  $t \rightarrow \pm\infty$  оказывалось одним и тем же. Кроме частных решений (Эйлера, Лагранжа, периодических решений Пуанкаре и т. д.) можно упомянуть здесь еще о теоремах Биркгофа [1], гл. 9, из которых следовало, что множества<sup>1</sup>  $H^+ \cap H^-$  и  $HE_k^+ \cap HE_k^-$  содержат внутренние точки.

В этих теоремах, по-видимому, впервые появляется то, что впоследствии стали называть критериями финального типа движения. Эти критерии выглядят так. Системой неравенств определяется некоторое подмножество (обычно область) в фазовом пространстве и доказывается теорема: если начальные условия принадлежат выделенной области, то финальный тип движения такой-то.

Некоторый диссонанс в симметричную картину Шази вносили лишь примеры Л. Беккера [36], полученные при помощи численного интегрирования. Начальные условия и интервалы интегрирования в этих примерах были подобраны так, что оказывалась очевидной принадлежность движения классу  $HE_1^- \cap HE_2^+$ , если, впрочем, поверить, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  оно действительно гиперболо-эллиплично. Изменение класса движения противоречило результатам [39], [40], однако Шази приписал это ошибкам численного интегрирования и невозможности проследить за поведением решения на бесконечном интервале времени и даже заметил по этому поводу, что точный математический анализ демонстрирует здесь свое преимущество перед приближенными численными методами исследования.

Интерес к качественным свойствам решений задачи многих тел значительно возрос в 40-х годах в связи с космогонической теорией

<sup>1</sup>Индексами  $\pm$  здесь и далее обозначаются финальные типы движения при  $t \rightarrow \pm\infty$  соответственно.



О. Ю. Шмидта. Согласно этой теории, планеты Солнечной системы возникли из окружавшего Солнце метеорно-пылевого облака, само же это облако было захвачено Солнцем при прохождении через пылевую туманность. Если ограничиться лишь чисто гравитационными взаимодействиями, то подобный захват означает изменение финального типа движения при переходе от  $t = -\infty$  к  $t = +\infty$ . Хотя выводы Шази относились лишь к задаче трех тел и использовать их для аргументации против возможности захвата в задаче многих тел было нельзя, все же это вызывало по отношению к теории Шмидта оправданный скептицизм. Чтобы подкрепить свою гипотезу, Шмидт построил [34] численным интегрированием контрпример к основному утверждению мемуара [40]. В этом примере из трех независимых в прошлом звезд (движение типа  $H^-$ ) образуется устойчивая подсистема (двойная звезда), в то время как третья звезда снова уходит в бесконечность (движение типа  $HE_3^+$ ). Происходящее при этом явление можно назвать частичным захватом.

Основанный на численном интегрировании пример Шмидта был уязвим для критики с тех же позиций, что и примеры из [36]. Одно из выдвигавшихся возражений было преодолено сотрудником Шмидта — Г. Ф. Хильми [33], [13], который построил критерии гиперболического и гиперголо-эллиптического движений, в том смысле, как было сказано выше. Возникшая ситуация схематически изображена на рис. 6.

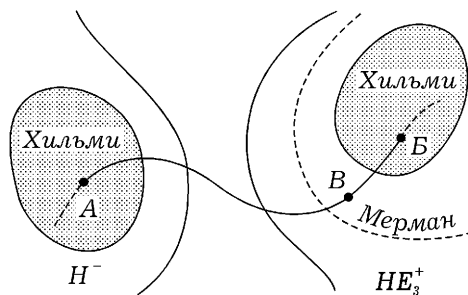


Рис. 6

Дуга  $AB$  изображает траекторию в фазовом пространстве, найденную при помощи численного интегрирования. В точках  $A$  и  $B$  выполняются неравенства критериев Хильми, так что после точки  $B$  траектория остается вечно в области  $HE_3^+$  (т. е. движение гиперголо-эллиптически),

равно как при движении от точки  $A$  в сторону убывания времени мы остаемся в области  $H^-$  (движение гиперболично).

Однако оставалось еще возражение, связанное с ошибками численного интегрирования, учесть которые весьма трудно. Тщательная перепроверка показала, что в первоначальных расчетах допущена ошибка, причем в точке, где критерий Хильми еще не удовлетворяется (на рис. 6 схематично в точке  $B$ ) [26]. К счастью, Г. А. Мерман предложил [21] критерии более общие, чем критерии Хильми; в точке  $B$  выполнялся критерий Мермана, и это пример Шмидта спасало ([24]). Все это, впрочем, к этому времени несколько потеряло остроту, поскольку в 1953 г. К. А. Ситников построил [28] пример частичного захвата ( $H^- \cap HE^+$ ) чисто качественным путем, без использования численного интегрирования. С идейной стороны пример Ситникова похож на пример Шмидта, только вместо вычисления дуги траектории  $AB$  доказывается существование такой дуги, идущей из области применимости одного критерия в область применимости другого.

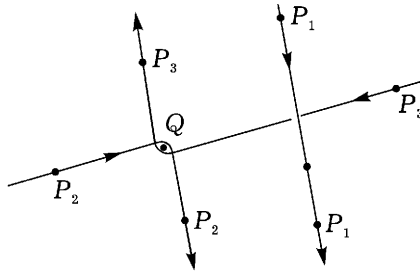


Рис. 7

Это можно сделать следующим образом. Пусть тела  $p_2$  и  $p_3$  движутся с очень большими скоростями и около  $t = 0$  проходят близко друг от друга в районе точки  $Q$  (рис. 7). Их относительное движение при этом гиперболическое, и при подходящим образом подобранных скоростях и «прицельном расстоянии» угол между асимптотами гиперболы можно сделать достаточно большим и фиксированным. После сближения движение тех же тел останется почти прямолинейным, но направление его изменится (только вблизи точки  $Q$  гиперболы «по-настоящему кривы», вдали от этой точки они почти совпадают со своими асимптотами). Теперь предположим, что начальная скорость тела  $p_1$  задана так, что она почти равна скорости  $p_2$  после сближения. Тогда при  $t < 0$  ско-

Таблица 1

$h > 0$		$t \rightarrow +\infty$	
		$H^+$	$HE_i^+$
$t \rightarrow -\infty$	$H^-$	Ж. Лагранж, 1772 (отдельные примеры); Ж. Шази, 1922 Мера $> 0$	ЧАСТИЧНЫЙ ЗАХВАТ Мера $> 0$ О. Ю. Шмидт (численный пример), 1947 К. А. Ситников (качеств. методы), 1953
	$HE_j^-$	ПОЛНЫЙ РАСПАД Мера $> 0$	$i = j$ Мера $> 0$ Дж. Биркгоф, 1927
	$i \neq j$ ОБМЕН, Мера $> 0$ Л. Беккер (численные примеры), 1920 В. М. Алексеев (качеств. методы), 1956		

рости всех трех тел различны по направлению и, если они достаточно велики, выполняется критерий гиперболического движения. При положительных же  $t$  тело  $p_3$  быстро удалится от пары  $p_1, p_2$ , которая, в свою очередь, еще не успеет распасться, и в подходящий момент оказывается выполненным критерий гиперболо-эллиптического движения. Это построение (с незначительной разницей в деталях) лежит в основе как примера К. А. Ситникова, так и примера О. Ю. Шмидта.

Дискуссия вокруг проблемы захвата вызвала к жизни длинный ряд исследований, посвященных как критическому разбору работ Шази, так и всей проблематике, связанной с финальными типами движений (кроме упомянутых выше, см. [22, 23, 27, 16] и др.). Некоторые из относящихся сюда результатов отражены в таблицах 1 и 2. Каждая клетка отвечает одной из логически возможных комбинаций основных типов финальных движений —  $H, HE_k, B, OS$  — в прошлом и будущем и описывает тем самым некоторый тип эволюции системы. Приведены авторы и указаны даты, в которые были найдены соответствующие типы; впрочем, эти сведения иногда несколько условны. Указана также и лебегова мера соответствующего множества в многообразии  $M^{12}$ . Следует иметь в виду, что из-за симметрии времени каждое исследование, относящееся к одной из клеток, в равной мере относится и к симметричной ей относительно главной диагонали. Так, существование примеров частичного захвата  $H^- \cap HE_k^+$  означает в то же время и существование примеров полного распада  $HE_k^- \cap H^+$ .

Таблица 2

$h < 0$		$t \rightarrow +\infty$		
		$HE_i^+$	$B^+$	$OS^+$
$t \rightarrow -\infty$	$HE_j^-$	$i = j$ Мера $> 0$ Дж. Биркгоф, 1927	ПОЛНЫЙ ЗАХВАТ  Мера $> 0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954; Дж. Литтлвуд, 1952; В. М. Алексеев, 1968, $\neq \emptyset$	Мера $> 0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954; В. М. Алексеев, 1968. $\neq \emptyset$
		ОБМЕН $i \neq j$ Мера $> 0$ Л. Беккер, 1920 (численные примеры) В. М. Алексеев, 1956 (качеств. методы)		
	$B^-$	ЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД $\neq 0$ Мера=0	Л. Эйлер, 1772 Ж. Лагранж, 1772 А. Пуанкаре, 1892 (отдельные примеры); Мера $> 0$ В. М. Арнольд, 1963	Дж. Литтлвуд, 1952. Мера=0; В. М. Алексеев, 1968, $\neq \emptyset$
	$OS^-$	Мера=0, $\neq \emptyset$	Мера=0, $\neq \emptyset$	К. А. Ситников, 1959 $\neq \emptyset$ Мера=?

В случае  $h > 0$  (таблица 1), вопреки мемуару [40], оказались осуществимыми все логически возможные типы эволюции.

Поскольку множества  $H^\pm$  и  $H_k^\pm$  открыты, это автоматически обеспечивает положительную вероятность (мера  $> 0$ ) каждого типа. Например, из существования частного решения Лагранжа, в котором все три тела движутся по гиперболам около общего центра тяжести, образуя все время правильный треугольник, вытекает, что множество  $H^- \cap H^+$  не пусто, а, следовательно, имеет положительную меру. В таблице 1 на соответствующей клетке стоит «Лагранж, 1772» и «Шази, 1922» хотя с не меньшим основанием здесь можно было написать «Биркгоф, 1927», что я и сделал в [35] (открытость множеств  $H^+$  и  $H^-$  была Шази известна, пример Лагранжа он знал; однако в работе [38] Шази изучал только лишь одностороннее поведение решений).

В области  $h < 0$  ситуация значительно сложнее, чем для  $h > 0$ . Прежде всего множества  $PE_k^\pm$  если и являются подмножествами коразмерности 1, заведомо плохо вложены в  $M^{12}$ , так что картина

оказывается не столь простой, как на рис. 4. Не ясно, являются ли эти многообразия аналитическими. Следующая гипотеза, восходящая к А. Н. Колмогорову, кажется весьма правдоподобной.

**Гипотеза.** Почти каждая точка  $p \in PE_k^+$  достижима из  $HE_k^+$  и обладает в  $M^{12}$  окрестностью  $U$ , диффеоморфной  $I \times D^{11}$ , так что

$$U \cap HE_j^+ \simeq A_j \times D^{11}, \quad U \cap PE_j^+ \simeq B_j \times D^{11}, \quad U \cap (B^+ \cup OS^+) \simeq C \times D^{11},$$

где  $D^{11}$  — одиннадцатимерный диск;  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ;  $A_j, B_j, C \subset I$ , причем каждое из  $A_j, j = 1, 2, 3$  состоит из счетного числа интервалов,  $B_j$  счетно и образовано концами интервалов, соответствующих  $A_j$ , а  $C$  нульмерно и гомеоморфно канторову множеству.

Не ясно, какой гладкостью мог бы обладать диффеоморфизм  $U \simeq I \times D^{11}$ , его аналитичность *a priori* также не исключается. В одной из последующих частей будет показано, что эта гипотеза справедлива в несколько упрощенной ситуации, где соображения симметрии позволяют снизить размерность фазового пространства.

Множества  $HE_k^\pm$  открыты и связны, однако каждое из них очень «разветвлено» в  $M^{12}$  и отдельные ветви переплетаются друг с другом весьма запутанно. Биркгоф [1] представлял себе  $\bigcup_k HE_k^-$  в виде трех потоков, притекающих из бесконечности. Продолжая эту аналогию, следует вообразить, что каждый из этих потоков разбивается на счетное число «ручейков», которые, подобно системе кровеносных капилляров, пронизывают фазовое пространство и собираются в три выходящих потока  $HE_i^+$ .

Анализ рассуждений Шази из [39] показал [22], что, хотя для доказательства равенства  $HE_k^+ = HE_k^-$  они недостаточны, все же можно утверждать, что множества  $HE^+ = \bigcup_k HE_k^+$  и  $HE^- = \bigcup_k HE_k^-$  совпадают в области  $h > 0$  с точностью до множества нулевой лебеговой меры в  $M^{12}$  («почти вся вода, приносимая потоками  $HE_k^-$ , за исключением отдельных струек общей нулевой меры, уносится потоками  $HE_k^+$ »). В связи с этим возникают вопросы: существуют ли в области  $h < 0$  движения типа: а)  $HE_i^- \cap HE_j^+, i \neq j$  («обмен»); б)  $HE_k^- \cap B^+$  («полный захват») или  $HE_k^- \cap OS^+$ .

Эти вопросы далеко не равноценны. Построение примера обмена можно было пытаться произвести по той же принципиальной схеме, что и примеры Шмидта и Ситникова. Примеры из [36] подсказывали

удобный выбор начальных условий, обладающих некоторой симметрией. Правда, примеры Шмидта и Ситникова существенно использовали большие скорости (при этом движения тел на значительных участках оказывались почти прямолинейными, что и давало возможность провести соответствующие оценки), а, следовательно, необходимо оказывались в области  $h > 0$ . Тем не менее почти половина численных примеров из [36] относилась к области  $h < 0$ , что давало надежду на построение подобных примеров и чисто качественными средствами.

Это действительно удалось. Общая схема примененной в [15] конструкции остается той же, что на рис. 6, надо заменить только  $H^-$  на  $HE_2^-$  и использовать в обоих случаях подходящие критерии гиперβολо-эллиптического движения. Построение дуги  $AB$  основано опять-таки на близком прохождении двух из трех тел; вместо больших скоростей используется в качестве малого параметра масса тел сближающейся пары.

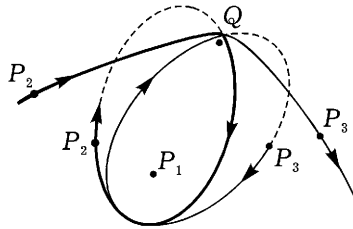


Рис. 8

Пусть масса тела  $p_1$  («Солнца») велика по сравнению с массами тел  $p_2$  и  $p_3$  («планет»), и пусть при  $t \rightarrow -\infty$  («в далеком прошлом») движение гиперβολо-эллиплично, класса  $HE_2^-$ . При этом  $p_2$  и  $p_3$ , движутся по орбитам, близким соответственно к гиперболе и эллипсу с фокусом в Солнце. Можно подобрать эти орбиты так, чтобы планеты сблизились около точки  $Q$  (рис. 8) столь сильно, чтобы сила их взаимодействия была много больше силы притяжения к Солнцу (если принять, например, что  $p_2$  и  $p_3$  имеют массу реальной Земли, а расстояние  $Qp_1$  равно расстоянию от Земли до Солнца, то они должны пройти друг от друга на расстоянии порядка 500 км.). После такого сближения скорости планет сильно изменятся, и можно сделать так, что они обменяются ролями и при  $t \rightarrow +\infty$   $p$  уйдет в бесконечность асимптотически по гиперболе, а  $p_2$  будет обращаться около  $p_1$  асимптотически по эллипсу. Дальней-

шие детали конструкции находятся в стороне от общей тематики наших лекций, и мы не будем на них задерживаться (см. [16] и [35]).

Гораздо более трудным оказался второй из поставленных выше вопросов. Множество  $B \cup OS$  не образует области в  $M^{12}$ , и потому описать принадлежность к нему критериями, подобно тому, как это было сделано для  $H$  и  $HE_k$ , нельзя. Следовательно, нужно было искать какие-то новые методы, позволяющие проследить за поведением решения сразу на бесконечном интервале времени.

С целью обойти трудности, связанные с большой размерностью фазового пространства, А. Н. Колмогоров предложил в 1954 г. изучить один частный случай задачи трех тел, в котором соображения симметрии позволяют свести задачу к системе с двумя степенями свободы. Подробнее мы рассмотрим эту систему в одной из следующих частей, а сейчас ограничимся лишь упоминанием о результатах, которые удалось на этом пути получить. Во-первых, К. А. Ситников [29] в 1959 г. доказал для этого примера (а, следовательно, и для общей задачи трех тел) существование осциллирующих движений ( $OS$ ), которые были введены Шази как чисто логическая возможность, которую приходится терпеть, коль скоро не удастся ее отвергнуть. Строго говоря, рассуждения К. А. Ситникова относятся лишь к одностороннему поведению решений, но соображения симметрии позволяют показать существование решений типа  $OS^- \cap OS^+$ , что и отражено в табл. 2. А. Н. Колмогоров показал, что в основе рассуждений Ситникова лежит весьма простая геометрическая конструкция и высказал в связи с этим гипотезу о строении границы областей  $HE_k$ , упомянутую выше. Затем автору удалось показать, что в рассматриваемом примере применимы методы «символической динамики»; это позволило доказать непустоту классов  $HE_k^- \cap B^+$ ,  $HE_k^- \cap OS^+$ ,  $B^- \cap OS^+$ ,  $OS^- \cap B^+$ . К сожалению, в  $M^{12}$  все построенные примеры лежат на подмногообразии высокой коразмерности, что не позволяет судить о мере соответствующих подмножеств. Все же каждое из них содержит континуум (в смысле мощности) траекторий.

Особенно интересно, что оказался возможным полный захват ( $HE^- \cap B^+$ ). В отличие от примеров Шмидта и Ситникова, при этом образуется тройная звезда: к двойной звезде за счет чисто гравитационного взаимодействия присоединяется третье тело, прилетевшее из бесконечности. Аналогичную природу имеет захват кометы системой Солнце–Юпитер. Напомним, что в фазовом пространстве лебегова мера

множества, заполненного траекториями движений с полным захватом, равна нулю (не зная, по-видимому, о работе Шази, Дж. Литтлвуд независимо доказал аналогичное утверждение в [42], см. также [20]). Тем не менее, изучение этого «тощего» множества интересно по крайней мере по двум причинам. Во-первых, оно довольно сложно и весьма прихотливо располагается между «ручейками» гиперболо-эллиптических движений. Понять строение открытого множества  $HE^- \cap HE^+$  вряд ли возможно, не разобравшись в устройстве его границы, значительную часть которой составляет множество  $HE^- \cap B^+$ , равно как и  $B^- \cap HE^+$  («частичный распад»), а также осциллирующие движения  $HE^- \cap OS^+$  и  $OS^- \cap HE^+$ . Если справедлива гипотеза, сформулированная в начале § 4, то в окрестности типичной точки множество  $HE^- \cap B^+$  должно быть в  $M^{12}$  произведением нульмерного множества (не замкнутого, но, вероятно,  $F_\sigma$ ) на 11-мерный диск. Во-вторых, вблизи траекторий с полным захватом лежат ([16]) траектории, на которых происходят «временные захваты» и которые могут представлять практический интерес.

Пусть, например, планета  $p_1$  обращается вокруг звезды  $p_2$  по эллиптической орбите. Из бесконечности по орбите, близкой к гиперболической, прилетает космический корабль  $p_3$  (движение класса  $HE_3^-$ ). Если движение всех трех тел достаточно близко к движению класса  $HE_3^- \cap B^+$ , то космический корабль будет оставаться в системе  $p_2 p_3$  сколь угодно долго, после чего покинет ее и уйдет обратно в бесконечность. Пуанкаре в [8] предсказывал возможность таких движений; аккуратное доказательство их существования, скажем, с заданным числом сближений космического корабля с планетой, было бы очень интересным.

Строение множества в  $B^- \cap B^+$  изучено плохо, хотя значительная доля публикаций по задаче трех тел относится именно к нему. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера позволила доказать существование условно-периодических движений во многих неинтегрируемых задачах механики. В частности, в 1963 году В.И. Арнольд [18] показал, что  $B^- \cap B^+$  (при достаточно малой массе двух из трех тел) содержит подмножество положительной меры, состоящее из пятимерных торов, заполненных условно-периодическими движениями (см. также [6], [19], [43]). Согласно [42], множества  $B^+|B^-$  и  $B^-|B^+$  имеют лебегову меру 0.

Аналогичные результаты справедливы и для общей задачи о дви-



жении системы  $n$  тел типа планетной. Пусть одно из тел, назовем его «Солнцем», имеет массу много большую, чем остальные тела («планеты»), которые обращаются вокруг Солнца по орбитам, близким к круговым и лежащим почти в одной плоскости. Если массы планет достаточно малы, а эксцентриситеты и наклоны их орбит близки к нулю, то, согласно [18], основная масса будет состоять из условно-периодических движений. Хотя проверить «достаточную малость» применительно к реальной Солнечной системе пока нельзя, и потому теорема Арнольда здесь не применима, все же эта теорема существенно дополняет упоминавшиеся выше результаты Лагранжа и Лапласа и делает устойчивость Солнечной системы если и не доказанной, то по крайней мере весьма вероятной.

Условно-периодические движения образуют «регулярную» часть множества  $B^- \cap B^+$ , но отнюдь его не исчерпывают. Во множестве  $(B^- \cup OS^-) \cap (B^+ \cup OS^+)$  существует также и «квазислучайная» часть; мы вернемся к ней далее.

Напомним, что остается открытой

**ПРОБЛЕМА.** Образует ли  $OS$  множество положительной лебеговой меры в  $M^{12}$ ? То же самое относится и к  $OS^\pm \cap HE_k^\pm$ ,  $OS^+ \cap HE_k^-$ .

---

## Часть 2

# Символическая динамика

В последние годы в качественной теории дифференциальных уравнений значительное внимание уделяется «неправильно устроенным» объектам, для описания которых классические аналитические средства: асимптотические формулы, ряды теории возмущений и т. п., оказались непригодными. Примером может служить инвариантное множество, связанное с «подковой Смейла», которое было рассмотрено в лекциях А. Б. Катка.

Здесь мы имели дело с диффеоморфизмом двумерной сферы  $f: S^2 \rightarrow S^2$ , который, при желании, мог бы быть задан явными формулами и мог бы быть класса  $C^\infty$ . Максимальное множество  $\Lambda$ , инвариантное относительно этого диффеоморфизма и содержащееся в квадрате  $Q$ , — объект вполне естественно определенный — является произведением двух канторовых множеств (и, стало быть, само гомеоморфно канторову множеству), а действие  $f$  на  $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}Q$  топологически сопряжено «преобразованию пекаря». Как мы видели, это действие довольно сложно: в  $\Lambda$  содержится всюду плотное подмножество  $P$ , состоящее из периодических точек диффеоморфизма  $f$ ; для любых  $p_1$  и  $p_2$  из  $\Lambda$  найдется счетное подмножество таких точек  $q$ , что траектория  $\{f^n q\}$  асимптотична при  $n \rightarrow +\infty$  к траектории  $\{f^n p_1\}$ , а при  $n \rightarrow -\infty$  — к траектории  $\{f^n p_2\}$  и т. д. Кроме того, множество  $\Lambda$  не разложимо, поскольку существуют точки  $\alpha \in \Lambda$ , траектории которых всюду плотны в  $\Lambda$ :  $f^n(\alpha) = \Lambda$ .

Трудно представить себе, каким образом эту сложную ситуацию можно было бы адекватно описать аналитическими формулами в классическом духе. В то же время действие ограничения  $f_\Lambda = f|_\Lambda$  на множестве  $\Lambda$  полностью определяется тем, что  $f_\Lambda$  топологически сопряжено гомеоморфизму сдвига  $T: \Omega^2 \rightarrow \Omega^2$  в пространстве  $\Omega^2$  бесконечных в обе стороны двоичных последовательностей. Существование гомеомор-

физма  $\varphi: \Omega^2 \rightarrow \Lambda$  с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2 & \xrightarrow{T} & \Omega^2 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array} \quad (1)$$

позволяет установить как уже упомянутые свойства диффеоморфизма  $f$ , так и некоторые другие. Таким образом, последовательность  $\omega = [\omega_n]$  двоичных символов является как бы кодом траектории  $\{f^n p\}$  точки  $p = \varphi(\omega)$ ; изучая коды и сдвиг, мы изучаем с топологической точки зрения действие  $f$  на  $\Lambda$ .

Кодировка траекторий гладких динамических систем последовательностями натуральных чисел или последовательностями символов некоторого конечного алфавита впервые, по-видимому, была применена для описания глобального поведения геодезических на поверхностях отрицательной кривизны (Ж. Адамар, М. Морс и другие; см., например, [1] гл. 8, § 11). Это послужило толчком для изучения различных свойств гомеоморфизма сдвига в различных подпространствах пространства  $\Omega^p$   $p$ -ичных последовательностей. Весь круг связанных с этим идей и понятий получил название «символической динамики» ([52]). Однако некоторое время после этого отображение  $T: \Omega^p \rightarrow \Omega^p$  изучалось главным образом с точки зрения эргодической теории, тем более что оно тесно связано с эргодическими динамическими системами вероятностного происхождения — марковскими цепями и, в частности, со схемой Бернулли. Мы еще вернемся далее к этой связи.

С другой стороны, при изучении колебаний, описываемых уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t), \quad (2)$$

где  $f$  и  $g$  — подходящие нелинейности, а возмущающая сила  $p$  периодична, Н. Левинсон [53], М. Картрайт и Дж. Литлвуд [54] обнаружили ситуацию, в которой также появлялось естественным образом пространство  $\Omega^2$ . А именно: в рассматривавшихся ими примерах диссипативных систем, описываемых уравнением (2), множество «предельных режимов» содержит подмножество, находящееся во взаимно однозначном соответствии с точками из  $\Omega^2$  (изложение работы Левинсона можно найти также в [55], § 15).

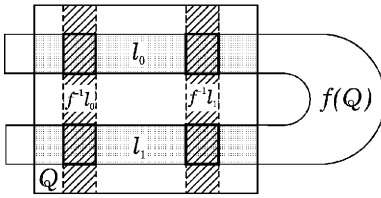


Рис. 9

Наконец, в 1961 году на Киевском симпозиуме по теории нелинейных колебаний С.Смейл [58] привел пример, существенной частью которого была знаменитая «подкова».

Напомним, что в «подкове Смейла» пересечение квадрата \$Q\$ с его образом \$f(Q)\$ состоит из двух компонент \$l\_0\$, и \$l\_1\$ (рис. 9): \$Q \cap f(Q) = l\_0 \cup l\_1\$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}(Q) = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}[Q \cap f(Q)] = \\ &= \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}(l_0 \cup l_1) = \bigcup_{[\omega_n]} \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n}, \end{aligned}$$

где \$[\omega\_n]\$ — всевозможные последовательности из 0 и 1. Существенно, что для каждой последовательности \$\omega = [\omega\_n] \in \Omega^2\$ пересечение \$\bigcap\_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l\_{\omega\_n}\$ состоит ровно из одной точки и что отображение \$\omega \mapsto \varphi(\omega) = p = \bigcap\_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l\_{\omega\_n}\$ оказывается гомеоморфизмом \$\Omega^2\$ на \$\Lambda\$, эквивариантным в том смысле, что \$\varphi \circ T = f \circ \varphi\$, т. е. что диаграмма (1) коммутативна.

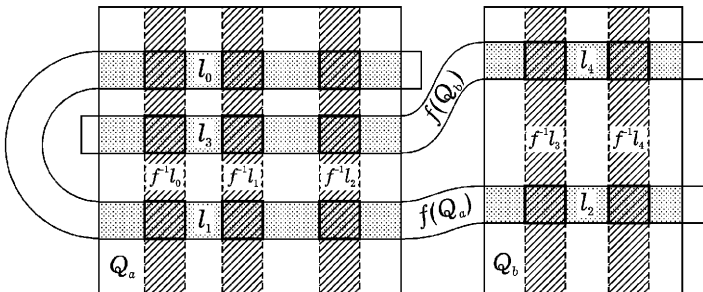


Рис. 10

Разумеется, эту конструкцию можно варьировать разными способами. Рассмотрим, например, ситуацию, изображенную на рис. 10.

Множество  $Q$  состоит теперь из двух прямоугольников  $Q_a$  и  $Q_b$ , а пересечение  $Q \cap f(Q)$  — из пяти компонент

$$Q \cap f(Q) = \bigcup_{i=0}^4 l_i.$$

Как и в случае «подковы», предполагается, что  $Q_a$ ,  $Q_b$ ,  $l_i$  и  $f^{-1}l_i$  — прямоугольники, которые надо в дальнейшем представлять себе лежащими в плоскости и со сторонами параллельными оси координат. Прилагательные «горизонтальный» и «вертикальный» относятся именно к такому представлению. Отображения  $f: f^{-1}l_i \rightarrow l_i$  предполагаются линейными (гиперболическими поворотами), сжимающими в вертикальном и растягивающими в горизонтальном направлениях. Пусть снова  $\Lambda$  — максимальное инвариантное множество, содержащееся в  $Q$ . Тогда, как и выше,

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}(Q) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n},$$

но теперь символы  $\omega_n$  принадлежат алфавиту из пяти букв 0,1,2,3,4. Каждой точке  $p \in \Lambda$  можно поставить в соответствие ровно одну последовательность  $\omega = [\omega_n]$  так, что  $p \in \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n}$ . Однако теперь уже

не для всякой последовательности  $\omega \in \Omega^5$  пересечение  $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n} \neq \emptyset$ .

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пересечение

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q) &= f^{-1}(Q \cap f(Q)) \cap Q \cap f(Q) = \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^4 l_i\right) \cap \bigcup_{j=0}^4 l_j = \bigcup_{i,j} f^{-1}l_i \cap l_j. \end{aligned}$$

Множества  $f^{-1}l_0$ ,  $f^{-1}l_1$ ,  $f^{-1}l_2$  содержатся в  $Q_a$  и поэтому не пересекаются с  $l_2$  и  $l_4$ , которые лежат в  $Q_b$ . Напротив,  $f^{-1}l_3$  и  $f^{-1}l_4$  лежат в  $Q_b$  и пересекаются с  $l_2$  и  $l_4$ , но не с  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_3$ .

Поэтому в выражении  $\bigcup_{i,j} f^{-1}l_i \cap l_j$  пересечения  $f^{-1}l_i \cap l_j$  будут

непусты не для всех пар  $(i, j)$ , а лишь для тех, для которых в матрице

$$\Pi = (\pi_{ij}, 0 \leq i, j \leq 4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

соответствующие элементы  $\pi_{ij}$  равны 1. Точно так же доказывается, что если  $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n} \neq \emptyset$ , то и для всех  $n$   $\pi_{\omega_n \omega_{n+1}} = -1$ .

Обозначим через  $\Omega^\Pi$  подмножество в пространстве  $\Omega^5$ , состоящее из тех последовательностей  $\omega = [\omega_n]$ , для которых  $\pi_{\omega_n \omega_{n+1}} = 1$  при всех  $n$ . Пространство  $\Omega^5$  может быть наделено тихоновской топологией; в этой топологии окрестность последовательности  $\omega^{(0)}$  состоит из всех последовательностей  $\omega$ , совпадающих с  $\omega^{(0)}$  на некотором (фиксированном для данной окрестности) отрезке номеров  $n_1 \leq n \leq n_2$ . Легко видеть, что

$$\omega^{(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^{(k)},$$

где  $\omega^{(0)} = [\omega_n^0]$  и  $\omega^{(k)} = [\omega_n^k]$  только тогда, когда для каждого  $n$  начиная с некоторого места (своего для разных  $n$ )  $\omega_n^k = \omega_n^0$ . В этой топологии пространство  $\Omega^5$  компактно, а подмножество  $\Omega^\Pi$  замкнуто, а потому также компактно;  $T: \Omega^5 \rightarrow \Omega^5$  — гомеоморфизм, относительно которого подмножество  $\Omega^\Pi$  инвариантно.

По аналогии с теорией вероятностей гомеоморфизм  $T: \Omega^\Pi \rightarrow \Omega^\Pi$  называется топологической марковской цепью (ТМЦ), а матрица  $\Pi = (\pi_{ij})$  — матрицей допустимых переходов этой цепи.

Рассуждая так же, как и в случае «подковы», мы установим, что отображение  $\omega = [\omega_n] \mapsto \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} l_{\omega_n} = p = \varphi(\omega)$  является гомеоморфизмом между  $\Omega^n$  и  $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}Q$ . При этом

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(\omega) &= f \left( \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n} \right) = \\ &= \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-(n-1)}l_{\omega_n} = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_{n+1}} = \varphi([\omega_{n+1}]) = (\varphi \circ T)(\omega), \end{aligned}$$

так что гомеоморфизм  $\varphi$  эквивариантен и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\Pi} & \xrightarrow{T} & \Omega^{\Pi} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

коммутативна.

Односторонним последовательностям

$$\omega^+ = [\omega_n; n \geq 0], \quad \omega^- = [\omega_n; n \leq -1]$$

можно сопоставить пересечения

$$W_{loc}^s(p) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n} l_{\omega_n}, \quad W_{loc}^u(p) = \bigcap_{n \leq -1} f^{-n} l_{\omega_n}.$$

Первое из них является вертикальным, второе — горизонтальным отрезками, проходящими в  $Q$  через точку

$$p = \varphi(\omega) = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n} l_{\omega_n},$$

отвечающую полной последовательности  $\omega = \omega^- \times \omega^+$ , составленной из  $\omega^-$  и  $\omega^+$ . Из определения видно, что  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  удовлетворяют соотношениям

$$f[W_{loc}^s(p)] \subseteq W_{loc}^s[f(p)], \quad f(W_{loc}^u(p)) \supseteq W_{loc}^u(f(p)). \quad (4)$$

Касательные  $TW_{loc}^s(p)$  и  $TW_{loc}^u(p)$ , проведенные в каждой точке  $p \in \Lambda$ , определяют на  $\Lambda$  (так же, как и в случае «подковы») структуру гиперболического множества (см. лекции А. Б. Катка). Сами  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  являются локальными кусками листов инвариантных слоений, связанных с гиперболическим множеством  $\Lambda$ .

Локальный диффеоморфизм  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  легко продолжить до глобального диффеоморфизма двумерной сферы. Первый этап соответствующего построения — отображение диска в себя — представлен на рис. 11. Далее можно действовать, как в случае «подковы», и продолжить  $f$  так, чтобы вне диска он имел единственную отталкивающую точку  $q$ .

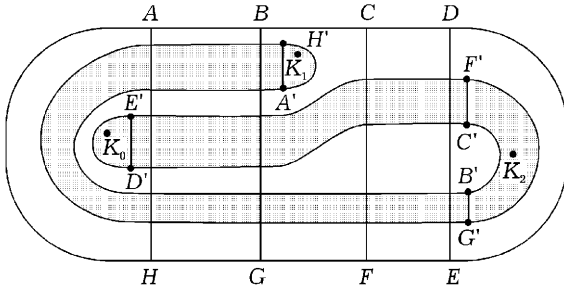


Рис. 11

Легко видеть, что множество неблуждающих точек построенного этим способом диффеоморфизма  $f: S^2 \rightarrow S^2$  состоит из отталкивающей точки  $q$ , гиперболического множества  $\Lambda$  и притягивающей траектории периода 3 (точки  $k_0, k_1$  и  $k_2$  на рис. 11).

Этот диффеоморфизм можно считать бесконечно гладким, и для него выполняются условия теоремы Роббина (см. лекции А. Б. Катка). Поэтому  $f$  является  $C^2$ -грубым, т. е. целая его окрестность в  $C^2$ -топологии состоит из диффеоморфизмов, топологически сопряженных  $f$ .

Для того чтобы представить себе более наглядно, какие последовательности  $\omega = [\omega_n] \in \Omega^5$  «допустимы», т. е. принадлежат  $\Omega^\Pi$ , удобно воспользоваться «маршрутной схемой» (рис. 12). В этом графе вершины  $a$  и  $b$  символизируют квадраты  $Q_a$  и  $Q_b$  рис. 10, а ребра, занумерованные от 0 до 4, — пересечения  $l_i$ , имеющие соответствующий номер. Нетрудно убедиться, что пересечение  $f^{-1}l_i \cap l_j$  непусто ( $\pi_{ij} = 1$ ) тогда и только тогда, когда в графе рис. 12 конец ребра с номером  $i$  является началом ребра с номером  $j$ . Отсюда следует, что  $p = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}l_{\omega_n} \in \Lambda$  тогда и только тогда,

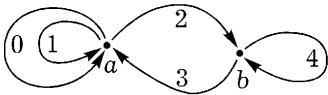


Рис. 12

когда последовательность  $[\omega_n]$  есть последовательность номеров ребер некоторого бесконечного в обе стороны пути в графе рис. 12. Точно также  $W_{loc}^s(p)$  отвечает пути бесконечному вперед, с начальным ребром  $\omega_0$ , а  $W_{loc}^u(p)$  — пути, бесконечному назад, с последним ребром  $\omega_{-1}$ .

Покажем теперь, что гомеоморфизм  $T: \Omega^\Pi \rightarrow \Omega^\Pi$  топологически транзитивен и что его периодические точки плотны в  $\Omega^\Pi$ . Поскольку



ограничение  $f$  на  $\Lambda$  топологически сопряжено  $T|\Omega^{\Pi}$ ,  $f$  обладает на  $\Lambda$  теми же свойствами.

Пусть  $\omega^{(0)} = [\omega_n^0]$  — произвольная последовательность в  $\Omega^{\Pi}$  и  $U$  — некоторая ее окрестность, состоящая из всевозможных последовательностей  $\omega = [\omega_n] \in \Omega^n$ , совпадающих с  $\omega^{(0)}$  на отрезке номеров  $n_1 \leq n \leq n_2$ . Пусть этот отрезок в  $\omega^{(0)}$  начинается символом  $x$  и оканчивается символом  $y$

Рассмотрим граф рис. 12. Очевидно, что для любой пары  $l'$  и  $l''$  его ребер в этом графе существует путь, в котором  $l'$  — начальное ребро, а  $l''$  — конечное. В частности, существует путь  $\gamma$ , скажем, состоящий из  $k$  ребер, начальное ребро которого имеет номер  $y$ , а конечное — номер  $x$ . Построим теперь периодическую последовательность  $\omega^{(1)} = [\omega_n^{(1)}] \in U \cap \Omega^n$  следующим образом. На отрезке  $n_1 \leq n \leq n_2$   $\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(0)}$  (иначе  $\omega^{(1)}$  не попадет в  $U$ ). Символы же  $\omega_{n_2}^{(1)} = y$ ,  $\omega_{n_2+1}^{(1)}, \dots, \omega_{n_2+k-1}^{(1)} = x$  возьмем равными номерам ребер, входящих в путь  $\gamma$ . Построенному блоку из  $n_2 - n_1 + k$  символов отвечает замкнутый путь в графе. Вся последовательность  $\omega^{(1)}$  получается теперь периодическим повторением этого блока.

Таким образом, любая окрестность любой точки  $\omega^{(0)} \in \Omega^n$  содержит периодическую последовательность из  $\Omega^n$  и этим доказано, что периодические точки гомеоморфизма  $T$  плотны в  $\Omega^n$ . Применяя близкие рассуждения, можно построить последовательность  $\hat{\omega} = [\hat{\omega}_n]$ , траектория которой и даже только полутраектория  $\{T^n \hat{\omega}, n \geq 0\}$  всюду плотна в  $\Omega^n$ .

Занумеруем в произвольном порядке всевозможные конечные блоки  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ , в которых символы от 0 до 4 встречаются в допустимом порядке (т. е. для соседних символов  $i$  и  $j$   $\pi_{ij} = 1$  или соответствующая блоку последовательность ребер в графе рис. 12 образует путь). Пусть блок  $A_k$  начинается символом  $a_k$  и оканчивается символом  $b_k$ . Как уже отмечалось, существует допустимый блок символов  $B_k$  с началом  $b_k$  и концом  $a_{k+1}$ . Возьмем теперь последовательность

$$\hat{w}_n = \dots \underbrace{a_1 \dots b_1}_{B_1} \dots \underbrace{a_2 \dots b_2}_{B_2} \dots a_3 \dots,$$

в которой элементы  $\hat{\omega}_n$ ,  $n < 0$  произвольны,  $\omega_0 = a_1$ , а далее стоят

поочередно блоки  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$  так, что конец одного блока является началом следующего.

Пусть теперь  $U$  — окрестность произвольной точки  $\omega^{(0)} \in \Omega^{\text{II}}$ , состоящая из последовательностей, совпадающих с  $\omega^{(0)}$  на отрезке номеров  $n_1 \leq n \leq n_2$ . Пусть блок  $\omega_{n_1}^{(0)}, \omega_{n_1+1}^{(0)}, \dots, \omega_{n_2}^{(0)}$  занумерован нами как  $A_k$  и его начало  $a_k$  стоит в  $\hat{\omega}$  на месте с номером  $N$ . Тогда  $T^N \hat{\omega} \in U$ . Поэтому положительная полутраектория  $\{T^n \hat{\omega}, n \geq 0\}$  точки  $\hat{\omega}$  рано или поздно попадает в любую окрестность любой точки  $\omega^{(0)}$ , т.е. всюду плотна. Следовательно,  $T|\Omega^{\text{II}}$  топологически транзитивно, что и утверждалось.

Рассмотренный только что диффеоморфизм  $f: S^2 \rightarrow S^2$  может показаться слишком искусственным. Однако символическая динамика является и в более естественных примерах.

Возьмем уже встречавшийся в лекциях А.Г.Кушниренко и А.Б.Катка автоморфизм тора  $f: T^2 \rightarrow T^2$ , задаваемый формулами

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ &\pmod{1}. \\ y' &= x + y \end{aligned} \quad (5)$$

Как линейное отображение плоскости (5) является гиперболическим поворотом с неподвижной точкой  $A(0, 0)$  и инвариантными прямыми:

$$\begin{aligned} \text{растягивающаяся сепаратриса} & \quad y = kx & (6) \\ \text{сжимающаяся сепаратриса} & \quad y = -\frac{1}{k}x & (7) \end{aligned}$$

(здесь  $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots$  — золотое сечение).

Рассмотрим на плоскости  $XOY$  прямоугольники:  $Q_a = ABCD$ , стороны которого  $AB$  и  $AD$  — отрезки сепаратрис (6) и (7),  $BC$  и  $CD$  — отрезки прямых, параллельных тем же сепаратрисам, но проходящих через точки  $(1,0)$  и  $(1,1)$  (заметим, что все вершины единичного квадрата изображают одну и ту же точку на торе, а поэтому  $AD$  и  $BC$  — отрезки одной и той же сепаратрисы; то же относится и к  $AB$  и  $CD$ ), и  $Q_b = DEFG$ , сторона  $DG$  которого лежит на  $AD$ ,  $EF$  и  $ED$  — отрезки прямых, параллельных сепаратрисам (6) и (7) и проходящих через  $(1,1)$ , а  $FG$  лежит на прямой, параллельной сепаратрисе (7) и проходящей через  $(0,1)$  (снова все это разные отрезки одной и той же пары сепаратрис на торе).

Легко видеть (рис. 13), что объединение  $Q_a \cup Q_b$  покрывает весь тор (для наглядности куски плоскости, являющиеся одним и тем же подмножеством тора, отмечены одинаковыми римскими цифрами), причем  $Q_a$  и  $Q_b$  общих внутренних точек не имеют.

Рассмотрим теперь, что делает с  $Q_a$  и  $Q_b$  автоморфизм (5). На плоскости он сжимает их в направлении сепаратрисы (7) и растягивает в направлении сепаратрисы (6) в  $\lambda = k + 2 = 2,618\dots$  (см. рис. 14). Образы точек  $B, C$  и т. д. обозначены штрихами ( $A' = A$  и  $C' = D$ ). Образы  $f(Q_a), f(Q_b)$  снова покрывают весь тор, а пересечения  $Q_a$  и  $Q_b$  с их образами можно разбить на пять прямоугольников  $l_i, 0 \leq i \leq 4$ .

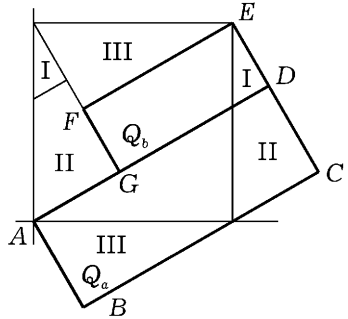


Рис. 13

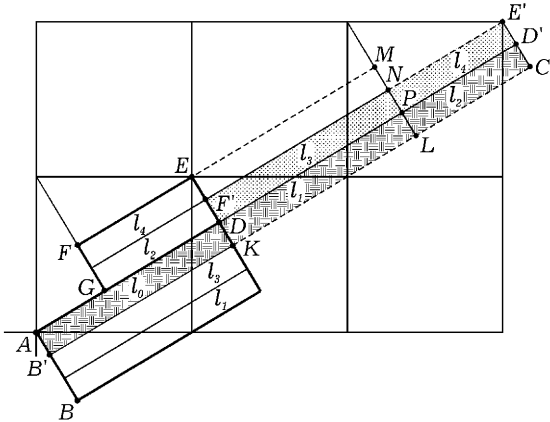


Рис. 14

В самом деле,  $f(Q_a)$  изображается на плоскости прямоугольником  $AB'C'D' = l_0 \cup l_1 \cup l_2$ , где  $l_0 = AB'KD \subset f(Q_a) \cap Q_a$ ,  $l_1 = KDPL$  на плоскости получается как пересечение  $f(Q_a)$  с прямоугольником  $EKLM$ , а на торе снова есть часть  $f(Q_a) \cap Q_a$  (ибо  $EKLM$  получается из  $ABCD$  параллельным целочисленным переносом, а на торе это одно и то же множество),  $l_2 = LPD'C' \subset f(Q_a) \cap Q_a$ .

Точно так же  $f(Q_b) = F'DD'E' = l_3 \cup l_4$ , где  $l_3 \subset f(Q_b) \cap Q_a$ ,  $l_4 = f(Q_b) \cap Q_b$ . Мы видим теперь, что пересечения  $f(Q_a)$  и  $f(Q_b)$  с  $Q_a$  и  $Q_b$  устроены точно так же, как на рис. 10, однако теперь  $f(Q_a \cup Q_b) = Q_a \cup Q_b = T^2$ , так что не остается «лишних» точек, но зато некоторые точки тора покрыты дважды (на рис. 10 различные  $l_i$  попарно не пересекаются, а теперь они могут пересекаться, хотя только по границе). Отображения  $f: f^{-1}l_i \rightarrow l_i$  являются гиперболическими поворотами, и мы можем провести те же построения, которые были применены для исследования «подковы Смейла» и диффеоморфизма рис. 10 и 11. Снова появляются пространство  $\Omega^\Pi$ , где  $\Pi$  — матрица (3), и ТМЦ  $T: \Omega^\Pi \rightarrow \Omega^\Pi$ .

**Теорема ([57]).** *Существует отображение  $\varphi: \Omega^\Pi \rightarrow T^2$ , непрерывное и гомеоморфное на дополнении множества первой категории в смысле Бэра в  $\Omega^\Pi$ , такое, что  $f \circ \varphi = \varphi \circ T$  и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\Pi & \xrightarrow{T} & \Omega^\Pi \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ T^2 & \xrightarrow{f} & T^2 \end{array} \quad (8)$$

*коммутативна.*

Упомянутое здесь множество первой категории получается как прообраз сторон прямоугольников  $Q_a$  и  $Q_b$  и всех их сдвигов под действием автоморфизма  $f$ . Прообраз каждой стороны оказывается в  $\Omega^\Pi$  нигде не плотным, поэтому множество, где  $\varphi$  не является гомеоморфизмом, представляет собой счетное объединение нигде не плотных множеств, что, собственно говоря, и является определением «множества первой категории».

Какие следствия мы можем извлечь из этой теоремы? Прежде всего мы уже видели, что периодические точки сдвига  $T$  плотны в  $\Omega^\Pi$ . Если  $T^n \omega = \omega$ , то из диаграммы (8) видно, что  $f^n[\varphi(\omega)] = \varphi(T^n \omega) = \varphi(\omega)$ , а потому  $p = \varphi(\omega)$  — периодическая точка автоморфизма  $f$ . Пусть  $q$  — произвольная точка тора и  $\omega^{(0)} \in \varphi^{-1}(q)$ . По доказанному выше, существует последовательность периодических точек  $\omega^{(k)} \rightarrow \omega^{(0)}$ , но тогда  $\varphi(\omega^{(k)})$  — последовательность периодических точек автоморфизма  $f$ , сходящаяся к  $\varphi(\omega^{(0)}) = q$ . Следовательно, периодические точки автоморфизма  $f$  плотны в  $T^2$ .

Точно так же доказывается, что в  $T^2$  существует всюду плотная (полу)траектория, в силу чего  $f$  оказывается топологически транзитивным.

Проанализировав, какие точки в  $\Omega^{\Pi}$  отождествляются при отображении  $\varphi$ , мы можем любой топологический вопрос, относящийся к свойствам автоморфизма  $f$ , выразить в терминах «топологической динамики». Во многих случаях этот подход оказывается весьма удобным.

Далее, рассмотрим в пространстве  $\Omega^{\Pi}$  всевозможные «цилиндры»

$$C_{a_m a_{m+1} \dots a_{m+k}} = \{\omega = [\omega_n]; \omega_m = a_m, \dots, \omega_{m+k} = a_k\}. \quad (9)$$

При отображении  $\varphi$  такой цилиндр переходит в пересечение

$$f^{-m}I_{a_m} \cap f^{-(m+1)}I_{a_{m+1}} \cap \dots \cap f^{-(m+k)}I_{a_{m+k}}.$$

Пусть  $\mu$  обозначает обычную лебегову меру (площадь), перенесенную на тор с плоскости. Припишем каждому цилиндру (9) меру, которую обозначим  $\nu$

$$\nu(C_{a_m \dots a_{m+k}}) = \mu\left(\bigcap_{n=m}^{m+k} f^{-n}I_{a_n}\right). \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что так определенная на всех цилиндрах мера удовлетворяет условиям известной теоремы А. Н. Колмогорова, и тем самым  $\nu$  может быть продолжена на все борелевские множества в  $\Omega^{\Pi}$ . Автоморфизм (5) сохраняет площадь:  $\mu(fA) = \mu A$ , так как определитель его матрицы  $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ ; тем же свойством обладает и отображение  $T$ . Чтобы доказать это, возьмем сначала произвольный цилиндр  $C_{a_m a_{m+1} \dots a_{m+k}}$ , образом которого будет цилиндр  $T(C_{a_m \dots a_{m+k}}) = C_{a'_m \dots a'_{m+k+1}}$ , где  $a'_i = a_{i-1}$ . Из формулы (10) следует, что

$$\begin{aligned} \nu(TC_{a_m \dots a_{m+k}}) &= \mu\left(\bigcap_{n=m+1}^{m+k+1} f^{-n}I_{a_{n-1}}\right) = \\ &= \mu\left(f \bigcap_{n=m}^{m+k} f^{-n}I_{a_n}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=m}^{m+k} f^{-n}I_{a_n}\right). \end{aligned}$$

Определим в  $\Omega^{\Pi}$  новую меру  $\tilde{\nu}$  равенством  $\tilde{\nu}(A) = \nu(TA)$ . Тогда на всех цилиндрах выполняется равенство

$$\tilde{\nu}(C_{a_m \dots a_{m+k}}) = \nu(TC_{a_m \dots a_{m+k}}) = \nu(C_{a_m \dots a_{m+k}}).$$

Из теоремы А. Н. Колмогорова следует, что в этом случае  $\tilde{\nu} = \nu$ , т. е.  $\nu(TA) = \nu(A)$ , что и означает инвариантность меры  $\nu$ .

Из равенства (10) можно вывести, что для любого борелевского подмножества тора выполняется равенство  $\nu(\varphi^{-1}(B)) = \mu B$ . Множества в  $\Omega^{\Pi}$  и  $T^2$ , на которых  $\varphi$  не взаимно однозначно, имеют меры 0. Поскольку в метрической теории динамических систем («Эргодической теории») принято пренебрегать множествами меры 0, с этой точки зрения  $\varphi$  оказывается изоморфизмом отображений пространств с мерой  $(\Omega^{\Pi}, T, \nu)$  и  $(T^2, f, \mu)$ . При этом мера  $\nu$  в пространстве  $\Omega^{\Pi}$  есть не что иное, как распределение вероятностей некоторой марковской цепи. Это означает, что найдутся такие  $q_i, p_{ij}, 0 \leq i, j \leq 4$ , что для любого цилиндра

$$\nu(C_{a_0 \dots a_n}) = q_{a_0} p_{a_0 a_1} p_{a_1 a_2} \dots p_{a_{n-1} a_n}.$$

Матрица  $p_{ij}$  называется в теории вероятностей матрицей вероятностей перехода, а  $q_i$  — стационарными вероятностями состояний данной цепи.

Аналогичными рассуждениями Р. Адлер и Б. Вейс установили ([57]), что любой эргодический автоморфизм двумерного тора, задаваемый целочисленной унимодулярной матрицей, изоморфен, с точки зрения эргодической теории, некоторой стационарной марковской цепи. Этот изоморфизм позволил им провести классификацию всех таких автоморфизмов. Единственным инвариантом при этом оказалась энтропия автоморфизма в смысле А. Н. Колмогорова, равная логарифму модуля того из собственных чисел матрицы автоморфизма, у которого этот модуль больше 1 (для эргодического автоморфизма тора одно из собственных чисел обязательно таково).

Еще одна ситуация, в которой применимы методы символической динамики, связана с так называемыми гомоклиническими точками. Пусть  $p$  — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма  $f: M \rightarrow M$  произвольного многообразия, и пусть  $W^s(p)$  и  $W^u(p)$  — ее инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия (см. лекции А. Г. Кушниренко). Точка  $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$  называется гомоклинической точкой точки  $p$ . Ее траектория  $\{f^n q\}$  двояко-асимптотична в том смысле, что  $f^n(q) \rightarrow p$  как при  $n \rightarrow +\infty$ , так и при  $n \rightarrow -\infty$ . Если в точке  $q$  многообразия  $W^s(p)$  и  $W^u(p)$  пересекаются трансверсально (т. е. касательные плоскости  $T_q W^s(p)$  и  $T_q W^u(p)$  порождают все касательное пространство  $T_q M$  точки  $q$ ), то точка  $q$  называется *трансверсальной гомоклинической точкой*. В лекциях А. Г. Кушниренко уже отмечалось, что гомоклинические точки связаны с чрезвычайно запутанной картиной типа, изображенной на рис. 15. Символическая динамика

позволяет представить поведение диффеоморфизма  $f$  около траектории трансверсальной гомоклинической точки в довольно обозримом виде.

Рассмотрим компактное множество  $\Gamma$ , состоящее из траектории точки  $q$  и точки  $p$ , и покроем его конечным числом достаточно малых окрестностей следующим образом (рис. 16). Сначала точка  $p$  покрывается некоторой окрестностью  $U_0$ . Кроме  $p$ , эта окрестность накроет все точки траектории  $\{f^n(q)\}$ , за исключением некоторого конечного числа. Эти оставшиеся точки покроем по одной попарно непересекающимися окрестностями  $U_1, U_2, \dots, U_{N-1}$ . Из этого построения сразу следует, что пересечения

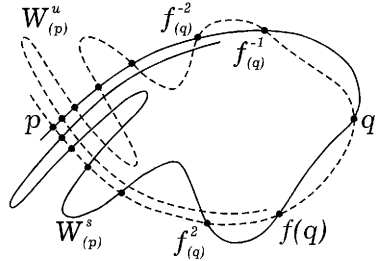


Рис. 15

$$f(U_0) \cap U_0, f(U_0) \cap U_1, \dots, f(U_{N-2}) \cap U_{N-1}, f(U_{N-1}) \cap U_0 \quad (11)$$

непусты (первое содержит точку  $p$ , а остальные — по крайней мере по одной точке траектории  $\{f^n(q)\}$ ). Изобразим эту ситуацию в виде графа (рис. 17), ребра  $\overline{ij}$  которого соответствуют пересечениям  $f(U_i) \cap U_j$ , а также с помощью матрицы

$$\Pi(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Как и раньше, этой матрице отвечает подмножество  $\Omega(N)$  в пространстве последовательностей  $\Omega^N$  из символов  $0, 1, \dots, N-1$ ; в  $\Omega(N)$  входят те последовательности  $[\omega_n]$ , у которых на соседних местах стоят только такие пары символов  $\omega_n \omega_{n+1}$ , которым отвечает ребро в графе рис. 17 или единица в матрице (12). (Обратите внимание на то, что граф рис. 17 используется несколько по-другому, чем граф рис. 12.) Подмножество  $\Omega(N)$  — инвариантно относительно гомеоморфизма сдвига  $T$ ; это дает нам новую ТМЦ  $T: \Omega(N) \rightarrow \Omega(N)$ .

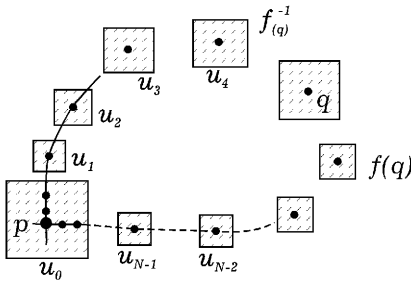


Рис. 16

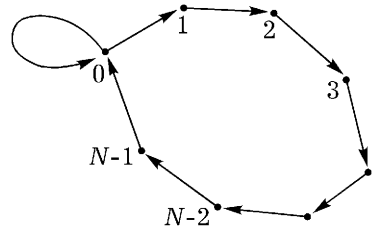


Рис. 17

**Теорема ([58]).** Для всякого открытого множества  $V$ , содержащего множество  $\Gamma$ , можно выбрать окрестности  $U_0, U_1, \dots, U_{N-1}$  таким образом, чтобы:

1)  $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{N-1} \subset V$ ;

2) максимальное инвариантное множество  $\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}U$ , содержащееся в  $U$ , является гиперболическим множеством для  $f$ ;

3) ограничение  $f|_{\Lambda}$  топологически сопряжено ТМЦ  $T: \Omega(N) \rightarrow \Omega(N)$ , т. е. существует гомеоморфизм  $\varphi: \Omega(N) \rightarrow \Lambda$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega(N) & \xrightarrow{T} & \Omega(N) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda
 \end{array} \tag{13}$$

коммутативна.

Число  $N$  зависит от выбора окрестности  $V$  и растет с ее уменьшением.

Граф рис. 17 и матрица (12) схематически изображают пересечения (11). Вообще говоря, непустыми могут быть и другие пересечения  $f(U_i) \cap U_j$ , и можно было бы поставить вопрос о возможности расширения пространства допустимых последовательностей  $\Omega(N)$  за счет добавления к графу рис. 17 новых ребер (соответственно за счет замены в матрице (12) некоторых нулей единицами).

Такое расширение однако не всегда продуктивно. Основной этап построения гомеоморфизма  $\varphi: \Omega(N) \rightarrow \Lambda$  связан с доказательством того, что пересечение

$$\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n}U_{\omega_n}$$



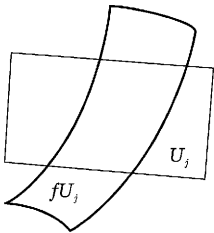


Рис. 18. «Хорошее» пересечение

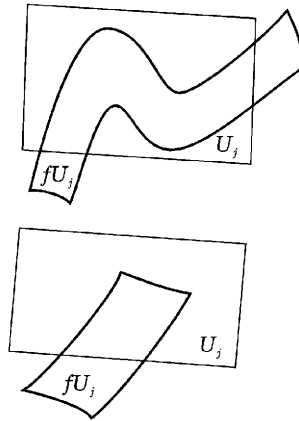


Рис. 19. «Плохие» пересечения

непусто, когда допустимы все попарные пересечения  $fU_{\omega_n} \cap U_{\omega_{n+1}}$  («марковское свойство»). Для «подковы Смейла» и диффеоморфизма рис. 10 это утверждение легко следовало из линейности отображений  $f: f^{-1}l_i \rightarrow l_i$  и простых геометрических соображений. В общей ситуации, с которой мы сталкиваемся в окрестности траектории гомоклинической точки, доказательство подобного «марковского свойства» становится нетривиальным. Для его справедливости нужно, чтобы пересечения  $f(U_i) \cap U_j$  были не только непусты, но еще и достаточно «хороши». Не вдаваясь в подробности, поясню сказанное рисунками 18 и 19; более подробно о том, что значит «хорошее» пересечение, см. в [59].

С другой стороны, сформулированная выше теорема утверждает, что множество  $\Lambda$  является максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности, поэтому его расширение возможно лишь за счет добавления траекторий, достаточно далеко уходящих от  $\Lambda$ . Дело обстоит совсем не так в случае исходного множества  $\Gamma$ . Оно так же инвариантно, и из условия трансверсальности пересечения  $W^s(p) \cap W^u(p)$  в гомоклинической точке можно вывести, что  $\Gamma$  — гиперболическое множество. Однако оно не является «локально максимальным», поскольку теорема как раз и утверждает, что любая окрестность  $V$ , содержащая  $\Gamma$ , содержит большее инвариантное множество  $\Lambda \supset \Gamma$ .

Перейдем к обсуждению следствий, которые можно извлечь из

сформулированной выше теоремы. Как и в предыдущих случаях и те ми же самыми рассуждениями, доказывается, что  $f$  действует на  $\Lambda$  топологически транзитивно и что периодические точки плотны в  $\Lambda$ . Каждая траектория  $f^n x$ ,  $x \in \Lambda$  взаимно однозначно кодируется последовательностью  $\omega = [\omega_n] \in \Omega(N)$ . С помощью рис. 17 легко сообразить, что эта последовательность устроена следующим образом. В ней всегда есть нули; после каждого нуля может стоять либо нуль, либо единица, причем последняя всегда является началом блока  $\sigma = 12 \dots (N-1)0$ . Таким образом,  $\omega$  состоит из нулей, в которые вкраплены блоки  $\sigma$  (не исключено, что несколько или даже бесконечно много блоков  $\sigma$  могут при этом идти подряд):

$$\omega = \dots \overset{\omega_0}{\downarrow} \frac{\sigma}{000 \ 12 \dots (N-1)0} \frac{\sigma}{12 \dots (N-1)0} \frac{\sigma}{000 \ 12 \dots (N-1)0} \dots \quad (14)$$

Число блоков  $\sigma$  может быть конечным или бесконечным; они могут встречаться в последовательности  $\omega$  неограниченно далеко вправо или влево, или в обе стороны.

При отображении  $\varphi$  последовательность  $\omega$  перейдет в точку  $\varphi(\omega) \in U_{\omega_0}$ . Для примера рассмотрим  $\omega$ , как в (14). Ей отвечает точка  $x \in U_0$ . В силу (13)

$$f(x) = f(\varphi(\omega)) = \varphi(T\omega) \in U_{(T\omega)_0} = U_{\omega_1} = U_0.$$

Аналогично,  $f^2(x) \in U_1$  и дальнейшие итерации  $f^n(x)$  дважды пройдут последовательно все окрестности  $U_2, \dots, U_{N-1}, U_0, U_1, \dots$ , затем  $f^n(x)$  три раза попадет в  $U_0$  и т. д.

Пусть  $s \geq 2$  и  $k = N + s - 2$ . Рассмотрим подмножество  $\Omega^{(s)} \subseteq \Omega^{(N)}$ , инвариантное относительно  $T^k$  и состоящее из последовательностей, у которых  $\omega_0 = 0$ . В силу инвариантности тогда и на всех местах, номер которых делится на  $k$ , должны стоять нули:  $\omega_{mk} = 0$  и, чтобы описать  $\omega \in \Omega^{(s)}$ , достаточно выяснить, какие блоки из  $k-1$  символа могут встретиться между двумя нулями. Снова обратившись к рис. 17, мы найдем, что таковыми могут быть только следующие  $s$  блоков:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \overbrace{0 \dots 0}^{s-1} 0 \\ A_1 &= 0 \overbrace{12 \dots (N-1) 00 \dots 0}^{s-2} 0 \\ A_2 &= 0 \overbrace{012 \dots (N-1) 00 \dots 0}^{s-3} 0 \\ \vdots & \\ A_{s-1} &= 0 \overbrace{00 \dots 0}^{s-2} 12 \dots (N-1) 0. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая последовательность  $\omega \in \Omega^{(s)}$  имеет вид

$$\dots 0 A_{i_{-1}} 0 A_{i_0} 0 A_{i_1} 0 A_{i_2} 0 \dots, \quad (15)$$

где индексы  $i_n$  могут принимать независимо любое значение  $0, 1, \dots, s-1$ . Ясно, что  $\Omega^{(s)}$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством  $\Omega^{(s)}$  всех последовательностей из  $s$  символов. Преобразование  $T^k$  сдвигает (15) на  $s$  символов влево, что приводит к появлению на месте блока  $A_{i_n}$  блока  $A_{i_{n+1}}$ . Это в точности то же самое, что делает сдвиг  $T$  на  $\Omega^{(s)}$ . Это доказывает, что гомеоморфизм  $T^k: \Omega^{(s)} \rightarrow \Omega^{(s)}$  сопряжен с гомеоморфизмом  $T: \Omega^{(s)} \rightarrow \Omega^{(s)}$ . Отображение  $\varphi: \Omega^{(s)} \rightarrow \Lambda$  переносит эту сопряженность на многообразие. Так как у всех последовательностей из  $\Omega^{(s)}$   $\omega_0 = 0$ , то  $\varphi(\Omega^{(s)}) \subset U_0$ . И мы получаем

**Следствие.** *Если  $p$  — гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма  $f: M \rightarrow M$ , обладающая трансверсальной гомоклинической точкой, то для любой окрестности  $U(p)$  и любого натурального  $s$  найдутся такие  $k$  и подмножество  $\Lambda^s \subset U(p)$ , инвариантное относительно  $f^k$ , что ограничение  $f^k|_{\Lambda^s}$  топологически сопряжено гомеоморфизму сдвига в пространстве  $s$ -ичных последовательностей. (Для  $s = 1$  это утверждение тривиально).*

Именно так был сформулирован первоначальный результат С. Смейла [60], показавший возможность использования методов «символической динамики» в общей гомоклинической ситуации. При этом Смейл предполагал еще, что диффеоморфизм  $f$  приводим к линейному в некоторой окрестности точки  $p$  за счет подходящего выбора системы локальных координат — предположение, хотя и несущественное с точки зрения «общего положения» (ибо сколь угодно малым изменением  $f$  можно добиться его выполнения), но все же излишнее.

Вернемся к пространству  $\Omega(N)$ . Каждая последовательность, ему принадлежащая, однозначно с точностью до сдвига восстанавливается, если будут указаны длины серий из нулей, разделяемых блоками  $\sigma^j = 1, 2, \dots, (N-1)$ . Таким образом, элементы из  $\Omega(N)$  могут быть закодированы последовательностями натуральных чисел, а именно

$$\dots, n_{-1}, n_0, n_1, n_2, \dots \quad (16)$$

соответствует элементу

$$w = \dots \sigma' \underbrace{00\dots 0}_{n_{-1}} \sigma' \underbrace{00\dots 0}_{n_0} \sigma' \underbrace{00\dots 0}_{n_1} \sigma' \underbrace{00\dots 0}_{n_2} \sigma' \dots$$

Если в  $w = [\omega_n]$  все символы  $\omega_n = 0$  при  $n > n^*$ , то последовательность (16) будет ограничена справа (можно завершить ее символом  $\infty$ ), точно так же она может быть ограничена слева или даже состоять из конечного числа символов (если  $w$  содержит лишь конечное число блоков  $\sigma'$ ). Заметим, что если  $\omega_n = 0$  при  $n > n^*$ , то  $T^n w$  стремится при  $n \rightarrow \infty$  к последовательности, состоящей из одних нулей. Последовательность из одних нулей — неподвижная точка отображения сдвига и переходит при отображении  $\varphi$  в неподвижную точку  $p$  диффеоморфизма  $f$ . Отсюда следует, что последовательностям (16), ограниченным справа, отвечают точки, траектории которых  $\omega$  — асимптотичны к  $p$ . Аналогично, последовательностям (16), ограниченным слева (с двух сторон), отвечают точки, траектории которых  $\alpha$ -асимптотичны (двоякоасимптотичны) к  $p$ . Подобное описание (в терминах последовательностей (16)) траекторий, остающихся в окрестности замыкания траектории гомоклинической точки, предложено Л. П. Шильниковым [61] (правда не для диффеоморфизма, а для потока, но это не очень существенно<sup>1</sup>). Приведенное выше описание в терминах ТМЦ представляется мне более отвечающим сути явления, тем более что оно без труда переносится на более сложные ситуации.

<sup>1</sup>А именно, для любого открытого множества  $V$ , содержащего замыкание  $\Gamma$  трансверсальной гомоклинической кривой, найдутся такие окрестности  $U \supset \Gamma$  и число  $N^*$ , что множество траекторий, целиком лежащих в  $U$ , находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей (16), у которых все  $n_i \geq N^*$ .

В статье Ю. И. Неймарка «О движениях близких к двоякоасимптотическому движению», ДАН СССР, 172, № 5, 1021–1024 (1967) (см. также: «Пятая летняя математическая школа», Киев, 1968, стр. 400–435) приведено более слабое утверждение: для любой окрестности  $U \supset \Gamma$  существует такое  $N^*$ , что каждой последовательности (16) с  $n_i \geq N^*$  соответствует траектория, лежащая в  $U$ .

Легко показать также, что каждой траектории, лежащей в некоторой окрестности  $U_0 \supset \Gamma$ , отвечает некоторая последовательность (16), однако возможность выбрать  $U_0$  так, чтобы при этом получались все последовательности с ограничениями  $n_i \geq N^*$  и, главное, *только они*, из рассуждений Неймарка не вытекает. Кроме того, предложенное им доказательство содержит, по моему мнению, пробелы.

---

## ЧАСТЬ 3

# Квазислучайные колебания некоторых нелинейных систем

### § 1. Пульсирующая одномерная потенциальная яма

Рассмотрим простейшую неинтегрируемую динамическую систему, а именно: одномерный осциллятор в периодически меняющемся потенциальном поле. Эта система описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \quad (1)$$

где  $Q(x, t) = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$  периодически зависит от  $t$ . Выбор предположений, касающихся зависимости  $Q$  от  $x$ , определился несколькими соображениями. С одной стороны, эти предположения должны быть настолько общими, чтобы отчетливо проявилась суть изучаемого явления. С другой стороны, хотелось, чтобы рассматриваемый класс включал уравнение, описывающее движение в одном частном случае задачи трех тел. Наконец, в-третьих, некоторые предположения, в частности выбор профиля потенциала в виде симметричной «ямы», просто облегчают вычисления, которые, впрочем, остаются достаточно громоздкими. Подробно эти вычисления проведены в [59] и [63] (см. также [62]).

Нашей конечной целью является построение семейства решений уравнения (1), исследование которого можно проводить методами символической динамики. Поскольку, однако, в предыдущей части речь шла лишь об отображениях, первым нашим шагом должно быть построение секущей поверхности в смысле Пуанкаре и соответствующего отображения (функции последования)  $S$ . При этом используются лишь самые общие свойства функции  $Q$ , сформулированные ниже как «основные предположения». При выполнении еще и дополнительных предположений для отображения  $S$  удается построить инвариантное множество достаточно сложной структуры, на котором действие  $S$  изоморфно «топологической марковской цепи». Переходя обратно от отображения  $S$

к фазовому потоку, мы получаем искомое «квазислучайное» семейство траекторий. Стандартные приемы символической динамики позволяют теперь построить решения уравнения (1) с весьма разнообразным поведением.

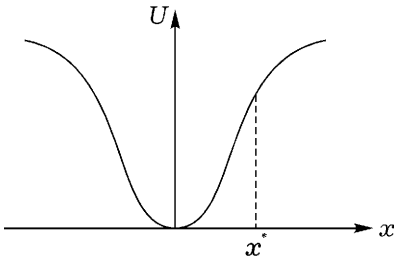


Рис. 20

Итак, рассмотрим движение материальной точки (частицы) в поле с периодически меняющимся потенциалом  $U(x, t)$ , график которого имеет вид симметричной потенциальной ямы (рис. 20). Предположим, что сила, действующая на частицу, всегда направлена к точке  $x = 0$  и вдали от этой точки убывает с расстоянием. Последнее означает, что при больших  $x$  график  $U$  как функции

от  $x$  вогнут вниз. Профиль потенциальной ямы, как уже было сказано, периодически пульсирует, но качественный его характер остается одним и тем же. Предполагается также, что пульсации затухают при  $x \rightarrow \infty$ , причем значительно быстрее, чем убывает величина силы. Точные формулировки соответствующих предположений будут выражены для удобства в терминах функции  $Q(x, t)$  (силы), а не  $U(x, t)$  (потенциала).

### Основные предположения

- А.  $Q(x, t)$  нечетна по  $x$  и  $2\pi$ -периодична по  $t$ .
- Б.  $Q > 0$  при  $x > 0$ .
- В.  $Q'_x \leq 0$  при  $x > x^*$ .

В силу А и Б график решения  $x(t)$  уравнения (1) как функции от  $t$  вогнут вниз при  $x > 0$  и вверх при  $x < 0$  (рис. 21). Поэтому каждое решение уравнения (1) имеет хотя бы один нуль, а следовательно, каждая траектория фазового потока рассматриваемой задачи пересекает хотя бы один раз поверхность  $x = 0$ . Ее мы и возьмем в качестве секущей.

Для построения функций последования нужно, чтобы траектории пересекали секущую поверхность не менее двух раз (рис. 22). Без дополнительных предположений относительно  $Q$  этим свойством обладают, вообще говоря, не все траектории, а потому функция последования определена не на всей секущей поверхности и является лишь локальным

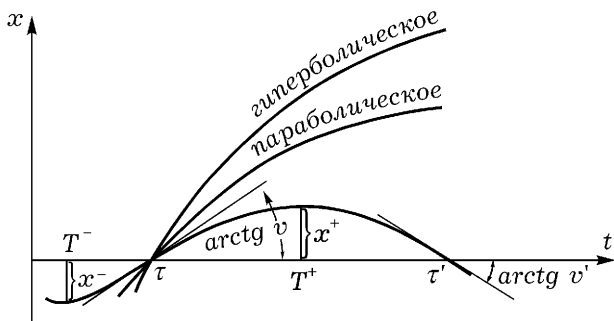


Рис. 21

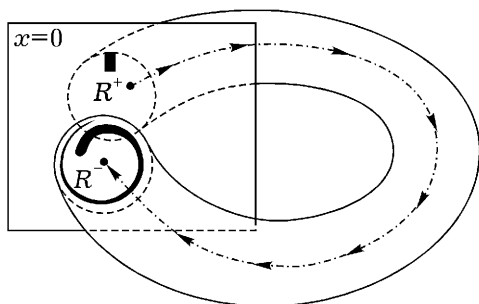


Рис. 22

диффеоморфизмом. Его область определения обозначим  $R^+$ , множество значений —  $R^-$ ;  $R^+$  состоит из тех точек секущей поверхности, через которые проходят траектории, возвращающиеся на поверхность при движении вперед (в сторону возрастания времени); через точки из  $R^-$  проходят траектории, возвращающиеся на поверхность при движении назад.

Рассмотрим, что все это означает в терминах решения уравнения (1). В момент  $\tau$ , когда решение проходит через нуль, состояние системы определяется парой  $v, \tau$ , где  $v = \dot{x}(\tau)$  (рис. 21). Поскольку зависимость от времени предполагается периодической,  $\tau$  можно считать циклической координатой, и, в силу симметрии относительно изменения знака  $x$ , можно ограничиться рассмотрением лишь значений  $v \geq 0$ . Наконец, при  $v = 0$  значение  $\tau$  не играет роли, поскольку, в силу теоремы единственности,  $\dot{x}(\tau) = 0$  может быть лишь у тривиального реше-

ния  $x(t) \equiv 0$  (напомним, что в силу нечетности  $Q(0, t) \equiv 0$ ). Это позволяет считать  $(v, \tau)$  полярными координатами на некоторой плоскости  $\Phi$ . (Более аккуратно следовало бы описать  $\Phi$  как фактор-пространство, получаемое из секущей поверхности  $x = 0$  при помощи некоторых отождествлений, учитывающих указанные симметрии уравнения; подробнее мы на этом не останавливаемся.)

Заданием  $v, t$  решение  $x(t)$  определяется однозначно (рис. 21). Посмотрим, что может произойти с нетривиальным решением при  $t > \tau$ . В силу вогнутости в области  $x > 0$ , скорость  $\dot{x}(t)$  монотонно убывает. Поэтому возможны два случая. Если  $\dot{x}(t) > 0$  при всех  $t > \tau$ , то существует предел

$$v_{\infty}^{+} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t). \quad (2)$$

Можно доказать (используя только А и Б), что в этом случае  $x(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , даже если  $v_{\infty}^{+} = 0$ . Если  $v_{\infty}^{+} > 0$ , то решение называется гиперболическим, если  $v_{\infty}^{+} \equiv 0$  — параболическим. Аналогия с небесной механикой (см. часть 1) очевидна.

Если же наступит момент, когда  $\dot{x}$  обратится в нуль (ближайший к  $\tau$  такой момент на  $(\tau, +\infty)$  мы обозначим далее символом  $T^{+}(v, \tau)$ ), то возрастание решения  $x(t)$  сменяется убыванием и оно возвращается к значению  $x = 0$  в некоторый момент  $\tau'$  (снова так мы обозначаем ближайший к  $\tau$  момент на  $(\tau, +\infty)$ , когда  $x(\tau') = 0$ ) (рис. 21). В фазовом пространстве соответствующая траектория возвращается на секущую поверхность (рис. 22), и, следовательно, можно определить функцию последования  $S$  равенством  $S(v, \tau) = (v', \tau')$ , где  $v' = \dot{x}(\tau')$  (знак минус появился в силу соглашения: рассматривать лишь значения  $v \geq 0$ ).

При  $t > \tau'$  все рассуждения повторяются: решение может опять оказаться гиперболическим или параболическим или же вернуться к нулю в некоторый момент  $\tau''$ . В последнем случае на паре  $(v, \tau)$  определено отображение  $S^2: (v, \tau) \rightarrow (v'', \tau'')$ , где  $v'' = \dot{x}(\tau'')$ , и т. д. При подходящих начальных условиях  $(v, \tau)$  решение  $x(t)$  может иметь бесконечное число нулей, и стало быть, определены все степени отображения  $S$ . Стандартным в теории дифференциальных уравнений рассуждением, основанным на теореме единственности, можно убедиться в том, что нули решения не могут иметь точки накопления.

Таким образом, при выполнении условий А и Б решения уравнения (1) следующим образом классифицируются по их поведению при  $t \rightarrow \infty$ .



1) 0. Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ .

2) Колеблющиеся решения, имеющие при  $t > \tau$  бесконечно много нулей. В свою очередь они подразделяются на:

$B^1$ . Ограниченные колеблющиеся,

$OS^+$ . Неограниченные колеблющиеся (осциллирующие).

3) П. Параболические решения.

4) H. Гиперболические решения. Если фиксирован момент  $\tau$  обращения решения в нуль, то гиперболические и параболические решения можно еще подразделить по числу их нулей при  $t > \tau$ . Соответствующие классы обозначаются далее  $\Pi_n^+$  и  $H_n^+$  ( $n \geq 0$  — число нулей).

Аналогичную классификацию можно провести и при  $t \rightarrow -\infty$ . Соответствующие классы обозначаются теми же буквами, только с добавлением индекса минус:  $B^-$ ,  $H_n^-$  и т. п.

В стационарном случае, когда сила  $Q$  и потенциал  $U(x) = \int_0^x Q dx$  не зависят от времени, уравнение (1) интегрируется в квадратурах. При этом имеет место закон сохранения энергии

$$\frac{x^2}{2} + U(x) \equiv h = \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (3)$$

и поведение решений определяется величиной константы  $h$ . Если  $h < U(\infty) = \int_0^\infty Q(x) dx$ , то решение будет периодическим и, следовательно, принадлежит классам  $B^+$  и  $B^-$ . Если же  $h \geq U(\infty)$ , то решение монотонно, имеет ровно один нуль и стремится к бесконечности при  $t \rightarrow \pm\infty$ . При  $h > U(\infty)$  решение гиперболично и принадлежит  $H_0^+ \cap H_0^-$ , при  $h = U(\infty)$  — параболично и принадлежит  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$ . Поэтому приходится рассматривать отдельно два существенно различных случая в соответствии с тем, конечна или бесконечна величина  $U(\infty)$ . Обратим особое внимание на то, что поведение решений при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  одно и то же.

Естественно предположить, что свойства решений нестационарного уравнения (1) будут в какой-то степени аналогичны свойствам решений усредненного уравнения

$$\ddot{x} = -Q_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dt. \quad (4)$$

В соответствии со сказанным выше мы будем различать два случая.

а) Потенциальная яма бесконечной глубины

$$J = \int_0^{\infty} Q_a(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} Q(x, t) dx dt = \infty.$$

В этом случае все нетривиальные решения усредненного уравнения (4) периодичны.

б) Потенциальная яма конечной глубины. В этом случае уравнение (4) имеет также гиперболические и параболические решения.

Если отвлечься от идей символической динамики, то наши результаты, касающиеся уравнения (1), относятся, с одной стороны, к поведению его решений при  $t \rightarrow \pm\infty$ , а с другой — к тому, в каких комбинациях могут сочетаться типы поведения при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , т. е. к аналогу проблем эволюции в небесной механике. Эти результаты получены при условии, что функция  $Q$ , кроме основных предположений А–В, удовлетворяет еще ряду дополнительных предположений. Говоря коротко, одностороннее поведение решений уравнения (1) оказывается аналогичным поведению решений усредненного уравнения (4), а двустороннее — нет; в то время как у уравнения (4) тип решения при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$  один и тот же, у уравнения (1) эти типы могут сочетаться произвольно.

### Технические предположения

Г.  $Q$ ,  $Q'_x$ ,  $Q'_t$  и  $Q''_{tt}$  (последняя только в случае  $J = \infty$ ) непрерывны для всех  $x$  и  $t$ .

Д. Существует интегрируемая на  $[0, \infty)$  функция  $\psi(x)$ , такая, что для всех  $x > 0$  и всех  $t$

$$|Q'_t(x, t)| \leq \psi(x), \quad \text{если } J < \infty;$$

$$|Q''_{tt}(x, t)| \leq \psi(x), \quad \text{если } J = \infty.$$

Е. Отношение

$$\frac{\psi(x)}{Q^2(x, t)} \quad \begin{array}{ll} \text{равномерно ограничено} & \text{при } x > x^*, \quad \text{если } J < \infty; \\ \text{равномерно } \rightarrow 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad \text{если } J = \infty. \end{array}$$

Для стационарного уравнения, а следовательно, и для усредненного уравнения (4) справедлив закон сохранения энергии (3). В нестационарном случае энергия не сохраняется, но все же удается сконструировать «энергopodobную» величину  $h^+(v, \tau)$ , которая позволяет классифицировать решения так же, как это делается с помощью константы энергии в стационарном случае. Энергия частицы складывается из кинетической и потенциальной; это обстоятельство послужит нам наводящим соображением. А именно: у решения, возвращающегося к нулю (т. е. такого, что  $(v, \tau) \in R^+$ , скорость обращается в нуль в момент  $t = T^+(v, \tau)$  (рис. 21) и энергия в этот момент сводится лишь к потенциальному члену  $U(X^+) = \int_0^{X^+} Q dx$ , где  $X^+(v, \tau)$  — максимальное значение, достигнутое решением в точке поворота. Если же решение гиперболично или параболично (т. е.  $(v, \tau) \notin R^+$ ), то потенциальный член стремится к константе  $J = U(\infty) = \int_0^\infty Q dx$  и энергия равна  $\frac{(v_\infty^+)^2}{2} + J$ . Основываясь на этом, определим функцию

$$h^+(v, \tau) = \begin{cases} U_{CP}(X^+) = \int_0^{X^+(v, \tau)} Q_0(y) dy = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{X^+(v, \tau)} Q(y, s) dy ds, & \text{если } (v, \tau) \in R^+; \\ \frac{(v_\infty^+)^2}{2} + J = \frac{(v_\infty^+)^2}{2} + \int_0^\infty Q_0(y) dy, & \text{если } (v, \tau) \in H_0^+ \cup \Pi_0^+; \\ 0, & \text{если } v = 0. \end{cases}$$

**Лемма.** Функция  $h^+(v, \tau)$  конечна и непрерывна во всей плоскости  $\Phi$ , непрерывно дифференцируема в  $\Phi \setminus \{0\}$ , имеет единственный минимум в точке 0, а ее линии уровня  $h^+(v, \tau) = C > 0$  диффеоморфны окружностям.

Аналогично определяется функция  $h^-(v, \tau)$ , связанная с поведением решения при  $t \rightarrow -\infty$ . В стационарном случае, очевидно, имеет место равенство  $h^+(v, \tau) = h^-(v, \tau) = h = \frac{v^2}{2}$ , но для произвольного

уравнения (1) функции  $h^+$  и  $h^-$  не обязаны совпадать, что является чрезвычайно важным обстоятельством.

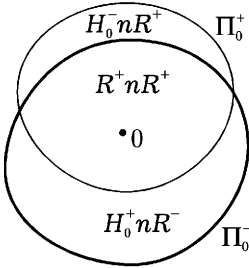


Рис. 23

**Следствие.** Если  $J = \infty$ , то все нетривиальные решения уравнения (1) колеблющиеся. Если  $J < \infty$ , то множества  $H_0^\pm$  и  $R^\pm \cup \{0\}$  открыты и являются соответственно внешней и внутренней областями, ограниченными гладкими жордановыми кривыми  $\Pi_0^\pm$ .

Все это сразу следует из леммы и определения функций  $h^\pm$ . В частности,  $H_0^+ = \{(v, \tau); h^\pm(v, \tau) > J\}$  и  $\Pi_0^\pm = \{(v, \tau); h^\pm(v, \tau) = J\}$ . В следующем параграфе будет доказано, что области  $R^\pm \cup \{0\}$  имеют одинаковую площадь. А

так как обе они содержат точку  $0$ , то ограничивающие их кривые не могут лежать одна в другой и, значит, пересекаются (рис. 23).

**Определение.** При выполнении предположений А–Е уравнение (1) называется типичным:

в случае  $J < \infty$ , когда хотя бы в одной своей общей точке кривые  $\Pi_0^+$  и  $\Pi_0^-$  имеют различные касательные;

в случае  $J = \infty$ , когда уравнение  $\psi(\tau) = \int_0^\infty x Q_t'(x, \tau) dx = 0$  имеет хотя бы один простой корень.

(Существование корней у этого уравнения очевидно, ибо функция  $\psi$  — периодическая с нулевым средним.)

**Теорема 1.** Если выполняются предположения А–Е и уравнение (1) типично, то:

1) Существует такое  $N$ , что для каждого  $n > N$  уравнение (1) имеет решение периода  $4\pi n$  (антипериода  $2\pi n$ ).

2) Если  $Q_0(x) \int_0^x Q_0(y) dy \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  (в частности, всегда при  $J < \infty$ ), то реализуются все логически возможные комбинации типов поведения нетривиальных решений при  $t \rightarrow \pm\infty$ , причем для каждой комбинации, кроме  $\Pi^+ \cap \Pi^-$  для  $J < \infty$  соответствующее множество начальных условий имеет мощность континуума (в частности, существуют колеблющиеся решения, не ограниченные при  $t > 0$  или при  $t < 0$  или в обоих случаях). Все множества  $\Pi_n^+ \cap \Pi_m^- \neq \emptyset$ , так что  $\Pi^+ \cap \Pi^-$  по крайней мере счетно (это относится к  $J < \infty$ ).

3) В случае  $J < \infty$  решения, стремящиеся в обе стороны к бесконечности, могут иметь любое количество нулей. Множество начальных условий, отвечающих гиперболическим в обе стороны решениям, открыто. Множество начальных условий, отвечающих решениям, колеблющимся в одну сторону и стремящимся к бесконечности в другую, хотя и не пусто, но имеет лебегову меру нуль.

Заметим, что если  $Q$  достаточно гладко, а  $Q'_t$  мало, то, согласно теории Колмогорова–Арнольда–Мозера, множество ограниченных колеблющихся решений будет не только не пусто, но и содержит внутренние точки.

Как уже отмечалось, предположения А–Е выбирались так, чтобы развиваемая теория была применима к одному частному случаю задачи трех тел, который будет рассмотрен в §3. Однако можно поставить целый ряд вопросов, остающихся пока открытыми, но несомненно представляющих интерес и с точки зрения общей теории нелинейных колебаний.

1) Можно ли ослабить предположения А–Е так, чтобы утверждение приведенного выше следствия все еще было справедливым? Тот же вопрос можно сформулировать отдельно для случаев  $J = \infty$  и  $J < \infty$ . Какую роль во всем этом играет предположение В?

2) При каком минимальном условии на  $Q$  уравнение (1) все еще имеет счетное число субгармоник? Можно ли при этом отбросить или ослабить предположение В? То же относительно предположений Г–Е?

3) Можно ли в формулировке теоремы ослабить или отбросить условие  $Q_0(x) \int_0^x Q_0(y) dy \rightarrow 0$ ?

4) Являются ли области  $R^\pm$  звездными относительно точки 0? Будет ли  $\frac{\partial h^\pm}{\partial v} > 0$  при  $v > 0$ ? Ясно, что из положительного ответа на второй вопрос следует и положительный ответ на первый. Отрицательный ответ на первый вопрос был бы физически парадоксален, т. к. при этом с увеличением начальной скорости гиперболическое движение сменялось бы возвращающимся к нулю.

5) Если  $Q$  имеет большую гладкость, чем это предусмотрено в  $D$ , то будут ли более гладкими кривые  $\Pi_0^\pm$ ? То же в случае аналитичности  $Q$ ?

6) Образуют ли типичные уравнения открытое всюду плотное (в подходящей топологии) множество среди всех уравнений (1)?

7) Что можно сказать о мере множества неограниченных колеблющихся решений? То же о мере множества колеблющихся ограниченных решений для произвольного  $Q$  (а не только близкого к стационарному)?

## § 2. Свойства отображения $S$

В предыдущем параграфе мы построили отображение  $S: R^+ \rightarrow R^-$ , область определения  $R^+$  которого совпадает с  $\Phi \setminus \{0\}$  при  $J = \infty$  и лежит внутри гладкой кривой  $\Pi_0^+$  при  $J < \infty$ . На области  $R^+$  определены также две функции  $T^+(v, \tau)$  и  $X^+(v, \tau)$ ; напомним, что  $T^+(v, \tau)$  — ближайший следующий за  $\tau$  момент, когда  $\dot{x} = 0$ , а  $X^+(v, \tau)$  — значение  $x(t)$  в этот момент (рис. 21). Аналогично, на области  $R^-$  определены функции:  $T^-(v, \tau)$  — ближайший предшествующий  $\tau$  момент, когда  $\dot{x} = 0$ , и  $X^-(v, \tau) = |x(T^{-1}(v, \tau))|$ . Отображение  $S: (v, \tau) \mapsto (v', \tau')$  отвечает переходу от одного нуля решения  $x(t)$  к следующему (рис. 21);  $T^+(v, \tau)$  лежит между  $\tau$  и  $\tau'$  и для пары начальных условий  $(v', \tau')$  играет роль момента  $T^-$ , т. е.

$$T^+(v, \tau) = T^-(v', \tau'). \quad (5)$$

Отсюда

$$X^+(v, \tau) = X^-(v', \tau'), \quad (6)$$

и вспоминая, что на  $R^\pm$  по определению  $h^\pm(v, \tau) = \int_0^{X^\pm(v, \tau)} Q_0(y) dy$ , заключаем, что  $h^+(v, \tau) \equiv h^-(v', \tau')$  или  $h^+ = h^- \circ S$ .

Рассмотрим отображения  $P^\pm: R^\pm \rightarrow \Phi \setminus \{0\}$ , определяемые в полярных координатах равенствами  $P^\pm(v, \tau) = (X^\pm(v, \tau), T^\pm(v, \tau))$ . Из стандартных теорем теории дифференциальных уравнений сразу следует, что  $P^\pm$  являются диффеоморфизмами, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R^+ & \xrightarrow{S} & R^- \\ p^+ \searrow & & \swarrow p^- \\ & \Phi \setminus \{0\} & \end{array} \quad (7)$$

согласно (5) и (6), коммутативна. Отображения  $S$ ,  $P^+$  и  $P^-$  можно продолжить и на точку  $0$ , которая оказывается неподвижной, но тогда они будут лишь гомеоморфизмами, так как, вообще говоря, в точке  $0$  гладкость теряется.

Уравнение (1) эквивалентно канонической системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -Q(x, t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (8)$$

с гамильтонианом

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + \int_0^x Q(y, t) dy. \quad (9)$$

Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана  $\omega = p dx - H dt$  на плоскости  $x = 0$  принимает вид  $\omega = -\frac{p^2}{2} dt$ , и на  $\Phi$ , где  $p = v$  и  $t = \tau$  — полярные координаты,  $\oint_{\gamma} \omega$  равен с обратным знаком площади, ограниченной контуром  $\gamma$ . Так как  $\oint \omega$  сохраняется при сдвиге по траекториям фазового потока, а отображение  $S$  именно так и получается, то  $S$  сохраняет площадь на  $\Phi$ .

В стационарном случае, когда  $Q$  не зависит от времени, и, в частности, для усредненного уравнения (4) отображение  $S$  выглядит достаточно просто. Из интеграла энергии (3) находим:

$$v' = v, \quad \tau' = \tau + 2 \int_0^{v^2/2} \frac{du}{Q(x(u))\sqrt{v^2 - 2u}}, \quad (10)$$

где  $x(u)$  — функция, обратная к  $U(x) = \int_0^x Q(y) dy$ . Таким образом, окружности  $v = \text{const}$  при этом отображении инвариантны и каждая из них поворачивается на свой угол. Если теперь предположить, что функция  $Q(x, t)$  достаточно гладкая и мало отличается от стационарной, то мы окажемся в сфере применимости теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Согласно этой теории, отображение  $S$  и в нестационарном случае будет обладать инвариантными кривыми, близкими к окружностям. Пусть  $\Gamma$  — одна из таких кривых. Если начальные условия  $(v, \tau)$  взять внутри  $\Gamma$ , то и вся траектория  $\{S^n(v, \tau)\}$  будет лежать внутри  $\Gamma$ , а соответствующее решение  $x(t)$  оказывается колеблющимся и ограниченным. Поэтому вся область, внутренняя к  $\Gamma$ , принадлежит  $B^+ \cap B^-$ ,

чем и объясняется замечание, сделанное в предыдущем параграфе после формулировки теоремы 1. Учитывая, что  $S$  сохраняет площадь, заключаем, что почти все точки, лежащие внутри  $\Gamma$ , равно как и порожденные ими решения уравнения (1), устойчивы по Пуассону (теорема Пуанкаре о возвращении).

Если  $J < \infty$ , то из сохранения площади выводится также, что почти все решения уравнения (1), гиперболические или параболические при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), будут таковыми и при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Это утверждение является следствием известной теоремы Э. Хопфа ([65] или [66, гл. 6]), но все же поучительно привести его доказательство, поскольку оно несложно и наглядно).

Будем обозначать множества начальных условий  $(v, \tau)$  на плоскости  $\Phi$ , порождающих решения данного финального типа, теми же символами, что и сами типы, так что, например  $H_n^-$  или  $\Pi_n^-$  — множества точек  $(v, \tau) \in \Phi$ , порождающих соответственно гиперболические или параболические решения уравнения (1), имеющие ровно  $n$  нулей при  $t < \tau$ . Множество

$$A_n = (H_n^- \cup \Pi_n^-) \cap (B^+ \cup OS^+)$$

лежит в  $R^+$  и переводится отображением  $S$  в  $A_{n+1}$  (почему?). Из определения следует, что все  $A_n$  попарно не пересекаются, а так как все они имеют одинаковую меру Лебега (свойство отображения  $S$ ) и лежат в ограниченной области  $R^+$ , то мера каждого из них, а следовательно, и всех вместе равна нулю. Остается заметить, что

$$(H^- \cup \Pi^-) \cap (B^+ \cup OS^+) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Аналогично равна нулю и мера множества  $(H^+ \cup \Pi^+) \cap (B^- \cup OS^-)$ , что и утверждалось в теореме 1.

Если точка  $(v_0, \tau_0)$  переводится отображением  $S$  в себя, т.е. если  $v'_0 = v_0$  и  $\tau'_0 = \tau_0 + 2\pi n$ , то в силу нечетности  $Q$  по  $x$  соответствующее этой точке решение  $x(t)$  уравнения (1) удовлетворяет тождеству

$$x(t + \tau_0) \equiv -x(t + \tau'_0).$$

Отсюда заключаем, что  $2\pi n = \tau'_0 - \tau_0$  является для  $x(t)$  антипериподом ( $x(t + 2\pi n) \equiv -x(t)$ ), а  $4\pi n$  — периодом. Несложная выкладка показывает, что

$$T^+(v_0, \tau_0) - T^-(v_0, \tau_0) = 2\pi n. \quad (11)$$



Основываясь на идее, восходящей еще к Пуанкаре, можно попытаться доказать существование таких периодических решений при помощи следующего рассуждения. Рассмотрим область  $G$ , состоящую из точки  $0$  и тех точек  $R^- \cap R^+$ , в которых

$$T^+(v, \tau) - T^-(v, \tau) < 2\pi n. \quad (12)$$

При достаточно большом  $n$  обе области  $G$  и  $SG$  непусты, содержат точку  $0$  и имеют одинаковые площади, а потому их границы  $\Gamma$  и  $S\Gamma$  имеют общие точки. Следовательно, имеют общую точку  $(X, T)$  и кривые  $\gamma = P^-\Gamma$  и  $\gamma' = P^-S\Gamma = P^+\Gamma$ .

Положим,  $(v_0, \tau_0) = (P^-)^{-1}(X, T)$ . Тогда  $(X, T) = (X^-(v_0, \tau_0), T^-(v_0, \tau_0))$ , и поскольку  $(v_0, \tau_0) \in (P^-)^{-1}\gamma = \Gamma = \partial G$ , а на границе  $G$  должно выполняться (11),  $T^+(v_0, \tau_0) = T^-(v_0, \tau_0) + 2\pi n = T + 2\pi n$ . Следовательно, точка

$$P^+(P^-)^{-1}(X, T) = P^+(v_0, \tau_0)_0 = (X^+(v_0, \tau_0), T^+(v_0, \tau_0))$$

лежит на том же луче  $T = \text{const}$ , что и точка  $(X, T)$ .

Предположим теперь, что кривая  $\gamma'$  звездна относительно точки  $0$ , т. е. что каждый луч  $T = \text{const}$  пересекает  $\gamma'$  ровно в одной точке. Тогда обе точки  $(X, T) \in \gamma \cap \gamma'$  и  $P^+(P^-)^{-1}(X, T) \in P^+\Gamma = \gamma'$  должны совпасть:  $P^+(P^-)^{-1}(X, T) = (X, T)$ , откуда в силу (7)

$$S(v_0, \tau_0) = S(P^-)^{-1}(X, T) = (P^-)^{-1}P^+(P^-)^{-1}(X, T) = (P^-)^{-1}(X, T).$$

Таким образом, искомая неподвижная точка найдена.

К сожалению, мне не удалось доказать выделенное выше предположение о звездности  $\gamma'$  при общих предположениях А–Е относительно функции  $Q$ . Для каждого фиксированного  $n$  его можно получить, потребовав, чтобы функция  $Q$  мало отличалась от стационарной, поскольку в стационарном случае кривые (11) и их образы при отображении  $P^+$  суть окружности. Можно ли то же самое проделать для бесконечно многих  $n$  одновременно — неясно. Поэтому для доказательства существования бесконечного числа субгармоник периода  $4\pi n$ , как это сформулировано в теореме 1, приведенное выше рассуждение пришлось несколько изменить.

Возьмем вместо кривой  $\Gamma$ , определяемой уравнением (11) (неясно, кстати, не может ли  $\Gamma$  состоять из нескольких компонент; этот вопрос

так же, как и вопрос о звездности  $\gamma'$ , родственен проблеме 4, сформулированной в конце § 1), семейство кривых  $\Gamma_c = \{(v, \tau); h^+(v, \tau) = c\}$ . Согласно лемме из § 1, эти кривые диффеоморфны окружностям и

$$S\Gamma_c = \{(v, \tau); h^-(v, \tau) = c\}.$$

Вспоминая определение функции  $h^-$ , убеждаемся, что на кривой  $S\Gamma_c$  выполняется равенство  $X^-(v, \tau) = c_1$ , где  $c_1$  определяется из соотношения  $\int_0^{c_1} Q_0(y) dy = c$ , а потому  $\gamma'_c = P^-S\Gamma_c = P^+\Gamma_c$  является окружностью с центром в  $0$ , т. е. условие звездности тривиально выполнено.

Если теперь найдется такое  $c$ , что для некоторой точки из пересечения  $\Gamma_c \cap S\Gamma_c$  (оно не пусто, так как  $S$  сохраняет площадь) выполняется (11), то все приведенные выше рассуждения остаются в силе и эта точка будет неподвижной для отображения  $S$ .

Точки пересечения  $\Gamma_c \cap S\Gamma_c$  определяются уравнением

$$h^+(v, \tau) = h^-(v, \tau) = c, \quad (13)$$

и, если уравнение (1) типично в смысле § 1, существует дуга  $\alpha: [c_0, J) \rightarrow R^- \cap R^+$  такая, что  $(v(c), \tau(c)) = \alpha(c) \in \Gamma_c \cap S\Gamma_c$ . В случае  $J < \infty$  это сразу следует из теоремы о неявной функции, примененной в окрестности трансверсальной точки пересечения кривых  $\Pi_0^+ = \{(v, \tau); h^+(v, \tau) = J\}$  и  $\Pi_0^- = \{(v, \tau); h^-(v, \tau) = J\}$ . В случае  $J = \infty$  используется асимптотика функций  $h^\pm(v, \tau)$  при  $v \rightarrow \infty$ , в которой существенную роль играет функция  $\psi(\tau) = \int_0^\infty xQ'_i(x, \tau) dx$ .

Из предположений А–Е можно вывести, что вдоль дуги  $\alpha$  разность  $T^+ - T^- \rightarrow \infty$  при  $c \rightarrow J$ . Поэтому для всех больших  $n$  на ней найдутся точки, где выполнено (11), что и заканчивает доказательство.

Займемся теперь несколько подробнее свойствами отображения  $S$  в случае потенциальной ямы конечной глубины ( $J < \infty$ ). Как уже было сказано,  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^- \neq \emptyset$ , и в простейшем «типичном» случае эти кривые пересекаются в двух точках (рис. 23), разделяя  $\Phi$  на 4 области. Поведение решений  $x(t)$  с начальными условиями  $(v, \tau)$ , взятыми в этих областях, представлено на рис. 24, а)–г). Точкам  $(v, \tau)$ , лежащим вне обеих кривых, соответствует решение, имеющее единственный нуль  $t = \tau$  и гиперболическое в обе стороны (рис. 24, а). Точки «языка»  $R^+ \cap H_0^-$ , лежащие внутри  $\Pi_0^+$ , но вне  $\Pi_0^-$ , отвечают решениям, гиперболическим при  $t < \tau$ , но имеющим при  $t > \tau$  по крайней мере еще один

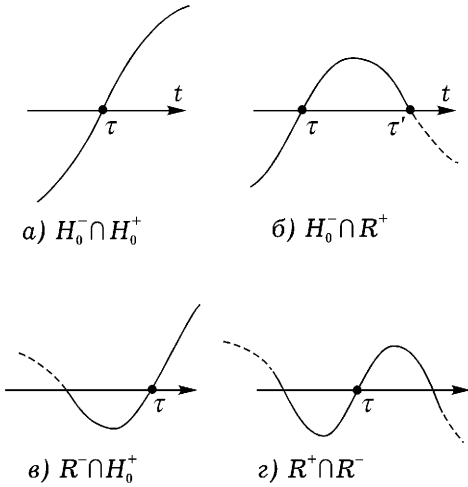


Рис. 24

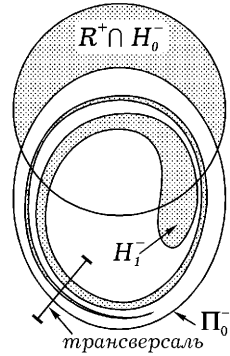


Рис. 25

нуль  $\tau'$  (рис. 24, б). Отображение  $S$  переводит  $R^+$  в  $R^-$ , причем по мере приближения к  $\Pi_0^+ = \partial R^+$  время возвращения  $\tau' - \tau$ , т. е. расстояние между нулями на рис. 24, б), стремится к бесконечности. В пределах «языка»  $R^+ \cap H_0^-$  можно считать  $\tau$  ограниченным, если фиксировать одну из ветвей полярного угла на плоскости  $\Phi$ . Тогда  $\tau' \rightarrow \infty$  при приближении к  $\Pi_0^+$ , и потому образом «языка» при отображении  $S$  будет спиралевидная «змея», наматывающаяся бесконечно своим «хвостом» на кривую  $\Pi_0^+$  (рис. 25).

Нетрудно сообразить, что начальные условия  $(v, \tau)$ , принадлежащие «змею», порождают решения типа  $H_1^-$ , т. е. имеющие при  $t < \tau$  ровно 1 нуль и гиперболические при  $t \rightarrow -\infty$  (рис. 26, а). Различие между этим рисунком и рис. 24, б) вызвано, с одной стороны, нашим соглашением: рассматривать только  $v \geq 0$  (что привело к зеркальному отражению  $OX$ , а с другой — тем, что  $\tau$  стоит теперь там, где раньше стояло  $\tau'$ , что соответствует выполнению отображения  $S: H_0^- \cap R^+ \rightarrow H_1^-$ .

Часть «змеи» (рис. 25), оказавшаяся вне  $\Pi_0^+$ , отвечает решениям  $H_1^- \cap H_0^+$  (рис. 26, б), а та часть, которая находится внутри  $\Pi_0^+$ , отвечает решениям, имеющим по крайней мере три нуля (рис. 26, в). (Для простоты мы здесь и далее не упоминаем предельные случаи решений, параболических в ту или другую сторону.) Пересечение  $H_1^- \cap R^+$

содержит счетное число компонент, которые накапливаются к дуге кривой  $\Pi_0^-$ , лежащей внутри  $\Pi_0^+$ . Отображение  $S$  переводит  $H_1^- \cap R^+$  в  $H_2^-$ , которое также состоит из счетного числа компонент. За исключением, быть может, конечного числа, каждая из компонент представляет собой двойную спираль, между ветвями которой лежит «змея»  $H_1^-$ . Обе ветви вместе с «хвостом» наматываются на  $\Pi_0^+$  (рис. 27). Последовательность этих двойных спиралей накапливается к границе «змеи»  $H_1^-$ , т. е. к кривой  $\Pi_1^-$ .

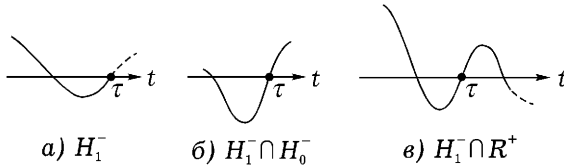


Рис. 26

Это построение повторяется неограниченно. В конце концов, мы получаем следующее представление о строении множества

$$H^- = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n^-.$$

Каждой из множеств  $H_n^-$ ,  $n \geq 2$ , лежит внутри  $\Pi_0^-$ , состоит из счетного числа компонент, из которых конечное число может быть устроено неправильно, а остальные являются двойными спиралями, охватывающими «змею»  $H_1^-$ , как на (рис. 27), и наматывающимися на  $\Pi_0^-$  изнутри. Каждая такая компонента ограничена двумя

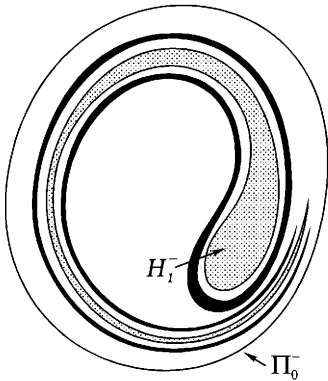


Рис. 27

кривыми, являющимися компонентами множества  $\Pi_n^-$ ; эти кривые диффеоморфны прямой и наматываются обоими концами на  $\Pi_0^-$ .

Наконец, каждая из этих кривых является пределом счетной последовательности компонент множества  $H_{n+1}^-$ .

Ясно, что и дополнение  $\Phi \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} (H_n^- \cup \Pi_n^-) = B^- \cup OS^- \cup \{0\}$  устроено довольно сложно. Его структуру можно отчасти понять, рассматривая пересечение с трансверсалью к кривой  $\Pi_0^-$  (рис. 25). Функ-

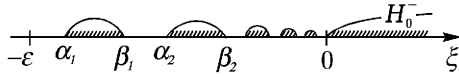


Рис. 28

ция  $\xi = h^-(v, \tau) - J$  является на трансверсали координатой, по крайней мере в окрестности точки пересечения с  $\Pi_0^-$ , причем самой этой точке отвечает значение  $\xi = 0$ . Точки, в которых  $\xi > 0$ , принадлежат  $H_0^-$ , а интервал  $(-\varepsilon, 0)$  лежит в  $R^-$  (рис. 28). При достаточно малом  $\varepsilon$  след множества  $B^- \cup OS^- \cup \Pi^-$  на отрезке  $[-\varepsilon, 0]$  трансверсали получается при помощи конструкции, аналогичной хорошо известной конструкции канторова множества. На первом этапе из отрезка выбрасывается счетное семейство интервалов  $(\alpha_{n_1}, \beta_{n_1})$ , сходящихся к 0. Затем из каждого отрезка  $[\beta_{n_1}, \alpha_{n_1+1}]$  выбрасывается счетное число интервалов  $(\alpha_{n_1 n_2}, \beta_{n_1 n_2})$ , сходящихся к  $\beta_{n_1}$  при  $n_2 \rightarrow -\infty$  и к  $\alpha_{n_1+1}$  при  $n_2 \rightarrow +\infty$ . Далее, из каждого оставшегося отрезка выбрасывается счетное семейство интервалов  $((\alpha_{n_1 n_2 n_3}, \beta_{n_1 n_2 n_3}))$  и т. д. Каждый из выкидываемых интервалов принадлежит одной из компонент множества  $H_m^-$ , а его концы принадлежат  $\Pi_m^-$ . После выкидывания всех интервалов остается нульмерное множество, которое и образует след  $OS^- \cup B^- \cup \Pi^-$  на отрезке трансверсали. Соответственно все множество  $OS^- \cup B^- \cup \Pi^-$  имеет вблизи  $\Pi_0^-$  локальную структуру произведения нульмерного компакта (т. е. в конечном счете канторова множества) на одномерный отрезок. Вся картина около  $\Pi_0^-$  напоминает до некоторой степени слоеный пирог, в котором слоями варенья располагаются гиперболические области, окаймленные параболическими кривыми, между которыми запрятан континуум листов осциллирующих и ограниченных движений.

Совершенно аналогичную структуру имеют множества

$$H^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n^+, \quad \Pi^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n^+, \quad OS^+ \cup B^+,$$

только спирали наматываются в этом случае на кривую  $\Pi_0^+$ .

Для того чтобы выяснить, как могут сочетаться между собой типы поведения решений при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , нужно наложить оба спиральных слоеных пирога друг на друга. В типичном случае, когда  $\Pi_0^-$  и  $\Pi_0^+$  пересекаются трансверсально, это наложение в некоторой окрестности  $U$  точек пересечения происходит правильно в том смыс-

ле, что каждый из листов одной структуры пересекается с каждым листом другой структуры, попавшим в ту же окрестность  $U$ . Отсюда без труда получаются все оставшиеся еще не доказанными утверждения теоремы 1. Можно, однако, пойти далее. А именно: в окрестности точек трансверсального пересечения  $\Pi_0^-$  и  $\Pi_0^+$  удастся выделить инвариантное множество, на котором действие  $S$  описывается в терминах «символической динамики».

Пусть  $P = (v_P, \tau_P)$  — одна из таких точек. В достаточно малой ее окрестности в качестве координат можно взять

$$\begin{aligned}\xi &= h^-(v, \tau) - J, \\ \eta &= h^+(v, \tau) - J.\end{aligned}\tag{14}$$

Значения  $\xi = \eta = 0$  отвечают самой точке  $P$ ; соответствующее ей решение уравнения (1) имеет единственный нуль  $t = \tau_P$  и параболично при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Обозначим это решение  $x_P(t)$ , в дальнейшем оно нам еще понадобится. Окрестность  $U$  будем считать заданной неравенствами

$$|\xi| \leq \varepsilon, \quad |\eta| \leq \varepsilon.$$

Нижняя половина  $U$  в силу неравенства  $h^+(v, \tau) < J$  принадлежит  $R^+$  (см. § 1), и потому в ней определено отображение  $S$ . На множестве  $U \cap S^{-1}U$  это отображение можно записать в координатах (14); учитывая равенство  $h^+ = h^- \circ S$ , имеем

$$\begin{aligned}\xi' &= \eta, \\ \eta' &= f(\xi, \eta).\end{aligned}\tag{15}$$

Производную  $f'_\xi$  можно найти и оценить из условия сохранения площади, а именно:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\partial(v', \tau')}{\partial(v, \tau)} = \frac{\partial(v', \tau')}{\partial(\xi', \eta')} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_\xi & f'_\eta \end{vmatrix} = -f'_\xi \cdot \frac{Z(v, \tau)}{Z(v', \tau')},$$

где  $Z(v, \tau) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(v, \tau)} = \frac{\partial(h^-, h^+)}{\partial(v, \tau)}$ . При достаточно малой окрестности  $U$  отношения  $\frac{v'}{v}$ ,  $\frac{Z(v', \tau')}{Z(v, \tau)}$  в  $U \cap S^{-1}(U)$  близки к 1 и, значит,  $f'_\xi \approx -1$ . В дальнейшем будем считать, что  $U$  выбрана так, что  $|f'_\xi| \leq 2$ .

При выполнении неравенства  $|f'_\eta| > 1 + |f'_\xi|$  дифференциал отображения (15) будет гиперболическим линейным отображением, т. е. имеет действительные собственные числа, одно из которых по модулю меньше, а другое больше 1. При сделанном выше соглашении о выборе окрестности  $U$  это означает, что  $|f'_\eta|$  должно быть больше 3. Однако для того, чтобы иметь возможность проводить некоторые мажорантные оценки, мы потребуем, чтобы  $f'_\eta$  было велико «с запасом», а именно: чтобы в  $U \cap S^{-1}U$  для некоторого  $a \in (0, \varepsilon)$  выполнялось неравенство

$$\frac{1 + \max |f'_\xi|}{\min |f'_\eta|} < \frac{\varepsilon - a}{\varepsilon + a}. \quad (16)$$

Пересечение  $U \cap S^{-1}U$  заведомо не пусто. В самом деле, на дуге кривой  $h^-(v, \tau) = h^+(v, \tau)$ , которая в координатах (14) есть часть биссектрисы  $\xi = \eta$  (рис. 29), лежит последовательность неподвижных точек отображения  $S$ , сходящаяся к  $P = (0, 0)$ , Начиная с некоторой, все они лежат в  $U$ , а следовательно, и в  $U \cap S^{-1}U$ .

Пусть  $p_0 = (\xi_0, \xi_0)$  — одна из этих неподвижных точек, у которой  $|\xi_0| < a$ . Обозначим через  $l$  компоненту множества  $U \cap S^{-1}U$ , содержащую эту точку. Наша ближайшая цель — показать, что  $l$  и  $S l$  располагаются в  $U$  «правильно» (см. рис. 18 в предыдущей части).

Проведем через  $p_0$  отрезок  $\lambda$  вертикальной прямой до пересечения с границей  $l$ ; образ  $S \lambda$  обозначим  $\Lambda$  (рис. 29). Поскольку  $\lambda$  и  $\Lambda$  лежат в  $U$ , время возвращения  $\tau' - \tau$  для решений уравнения (1) с начальными условиями, принадлежащими  $\Lambda$ , остается ограничен-

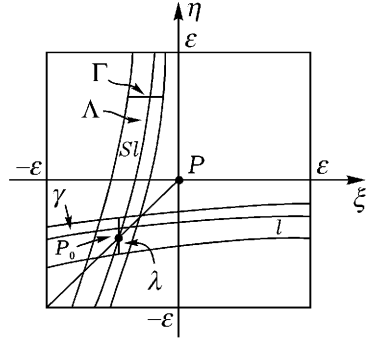


Рис. 29

ным (для периодического решения, определяемого точкой  $p_0$ , — это время равно  $2\pi n$ , а для остальных — не может отличаться от  $2\pi n$  более чем на удвоенное колебание полярного угла в окрестности  $U$ ). Поэтому верхняя граничная точка отрезка  $\lambda$  не может лежать на линии  $\eta = 0$ , т. е. на  $\Pi_0^+$ , поскольку при приближении к  $\Pi_0^+$ , как уже говорилось в § 1, время возвращения стремится к бесконечности. В силу равенства  $\xi' = \eta$  (см. (15)) отсюда следует, что и  $\Lambda$  отделено от прямой  $\xi = 0$  и лежит

строго слева от нее. Из соотношения

$$\eta' = \xi_0 = f(\xi_0, \eta) - f(\xi_0, \xi_0) = f'_\eta(\xi_0, c)(\eta - \xi_0), \quad (17)$$

предположения  $|\xi_0| < \varepsilon$  и неравенства (7) находим, что на отрезке  $\lambda$  выполняется неравенство

$$\eta = \xi_0 + \frac{\eta' - \xi_0}{f'_\eta} > \xi_0 - \frac{\varepsilon + a}{|f'_\eta|} > \xi_0 - (\varepsilon - a) > -\varepsilon, \quad (18)$$

и потому весь отрезок вместе с концами лежит внутри  $U \cap R^+$ . Для  $\Lambda$  это означает невозможность выхода на вертикальные стороны прямоугольника  $-\varepsilon \leq \xi \leq 0$ ,  $|\eta| \leq \varepsilon$ , а потому концы  $\Lambda$  должны лежать на прямых  $\eta = \pm\varepsilon$ . Поэтому  $\Lambda$  пересекает каждую горизонтальную прямую, а из (17) следует, что ровно в одной точке, ибо в противном случае, вопреки (16),  $f'_\eta$  обращается в нуль. Проведем через точку  $(\xi, \eta) \in \Lambda$  отрезок  $\Gamma$  горизонтальной прямой до пересечения с границей  $S(l)$  и обозначим через  $\gamma$  его прообраз,  $\gamma \subset l$ . Теми же рассуждениями, что и выше, мы установим, что  $\gamma$  пересекает каждую вертикальную прямую в  $U$  ровно один раз и что концы  $\Gamma$  лежат на прямых  $\xi = \pm\varepsilon$ ; существенно лишь проверить, что  $\gamma$  не может пересечь прямую  $\eta = -\varepsilon$ . Вдоль  $\gamma$ , согласно (15),  $f(\xi, \eta) = \text{const}$ , поэтому, взяв точку  $(\xi_0, \eta_1)$  пересечения  $\lambda \cap \gamma$ , мы находим, что

$$0 = f(\xi, \eta) - f(\xi_0, \eta_1) = \tilde{f}'_\xi(\xi - \xi_0) + \tilde{f}'_\eta(\eta - \eta_1),$$

$$\eta > \eta_1 - \frac{|\tilde{f}'_\xi|}{|\tilde{f}'_\eta|} |\xi - \xi_0| > \eta_1 - \frac{|\tilde{f}'_\xi|}{|\tilde{f}'_\eta|} (a + \varepsilon) >$$

$$> \xi_0 - \frac{\varepsilon + a}{|\tilde{f}'_\eta|} - \frac{|\tilde{f}'_\xi|}{|\tilde{f}'_\eta|} (\varepsilon + a) > -a - \frac{1 + \max |\tilde{f}'_\xi|}{\min |\tilde{f}'_\eta|} (\varepsilon + a) > -\varepsilon,$$

согласно (16) и (18).

Теперь уже без труда проверяется, что компонента  $l$  является криволинейным четырехугольником, ограниченным отрезками прямых  $\xi = \pm\varepsilon$  и двумя кривыми  $\gamma$ , построенные для  $\eta_1 = \pm\varepsilon$ . Аналогично,  $Sl$  ограничено отрезками прямых  $\eta = \pm\varepsilon$  и двумя дугами — образами вертикальных сторон  $l$ , которые каждую горизонталь  $\eta = \eta_1$ ,  $|\eta| \leq \varepsilon$  пересекают ровно в одной точке.



Как уже было отмечено, для решений с начальными условиями из  $l$  время возвращения  $\tau' - \tau$  отличается от  $2\pi n$  (т.е. от времени возвращения периодического решения, соответствующего неподвижной точке  $p_0$ ) не более чем на удвоенное колебание полярного угла в  $U$ . Поэтому, если окрестность  $U$  достаточно мала, то  $l$  не может содержать двух неподвижных точек с различным временем возвращения (для неподвижных точек оно всегда кратно  $2\pi$ ). А так как каждому  $n \geq N$  отвечает неподвижная точка со временем возвращения  $2\pi n$  и при достаточно большом  $N$  все они удовлетворяют условию  $|\xi_0| < a$ , то  $U \cap S^{-1}U$  содержит счетное число компонент  $l_n$  описанного выше типа (мы будем далее называть их правильными); на рис. 30 показаны две из них.

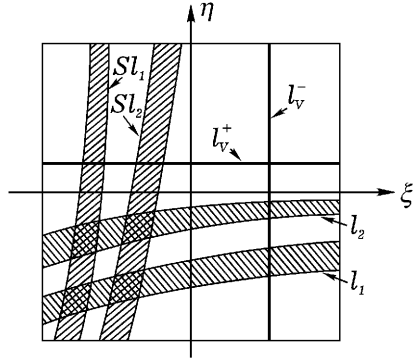


Рис. 30

Теперь уже можно начинать проводить рассуждения, сходные с теми, которые употребляются в связи с «подковой Смейла» и ее обобщениями, рассматривавшимися в предыдущей части. Правда, отображение  $S: l \rightarrow Sl$  теперь нелинейно, но ключевым свойством, а именно: сильным растяжением по одним направлениям (близким к вертикали) и сильным сжатием по другим (близким к горизонтали), оно все же обладает. Подробное обоснование дальнейших рассуждений можно найти в [59, 1].

Образ  $Sl_n$  каждой правильной компоненты пересекается с каждой правильной компонентой  $l_m$ . Отсюда, как и для «подковы», выводится, что для любой последовательности  $\omega = [m_n; -\infty < n < +\infty, m_n \geq N]$  пересечения

$$\varphi(\omega^+) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^{-n}l_{m_n}, \quad \varphi(\omega^-) = \bigcap_{n=-\infty}^{-1} S^{-n}l_{m_n}, \quad \varphi(\omega) = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} S^{-n}l_{m_n} \quad (19)$$

не пусты. Первое из них вытянуто вдоль  $l_{m_0}$  и является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $\eta = f(\xi)$ ; второе вытянуто вдоль  $Sl_{m_{-1}}$  и является графиком функции  $\xi = g(\eta)$  (тоже класса  $C^1$ ); наконец,  $\varphi(\omega)$  — точка.

Обозначив через  $\Omega_N^\infty$  пространство всех последовательностей  $\omega$ , наделенное естественной топологией прямого произведения, мы получаем отображение  $\varphi: \Omega_N^\infty \rightarrow R^+ \cap R^-$ , которое является гомеоморфизмом. В пространстве  $\Omega_N^\infty$  действует, как всегда, гомеоморфизм  $T$  сдвига влево на один символ, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega_N^\infty & \xrightarrow{T} & \Omega_N^\infty \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ R^+ & \xrightarrow{S} & R^- \end{array} \quad (20)$$

коммутативна. В частности, на  $\varphi(\Omega_N^\infty)$  определены все степени отображения  $S$ .

Вспомним теперь, что точкам  $(v, \tau) = (\xi, \eta)$ , лежащим в области  $\eta \geq 0$ , соответствуют решения, не обращающиеся в нуль при  $t > \tau$  и стремящиеся к бесконечности при  $t \rightarrow +\infty$ . Из определения функции  $h^+(v, \tau)$  и (14) находим скорость на бесконечности:

$$v_\infty^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \sqrt{2h^+(v, \tau)} = \sqrt{2\eta}. \quad (21)$$

Положим  $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$  и для  $0 \leq v \leq \delta$  обозначим символом  $l_v^+$  отрезок горизонтальной прямой  $\eta = \frac{v^2}{2}$ ,  $|\xi| \leq \varepsilon$ . Согласно (21), для всех решений с начальными условиями из  $l_v^+$  скорость на бесконечности равна как раз  $v$ . Аналогично, символом  $l_v^-$  обозначим отрезок вертикальной прямой  $\xi = \frac{v^2}{2}$ ,  $|\eta| \leq \varepsilon$ . Решения с начальными условиями  $(v, \tau) \in l_v^-$  не обращаются в нуль при  $t < \tau$ , и для них  $v_\infty^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} |\dot{x}(t)| = v$ .

Образ  $Sl_m$  каждой правильной компоненты пересекается с каждым отрезком  $l_v^+$ , и каждая правильная компонента  $l_m$  пересекается с каждым отрезком  $l_v^-$  (рис. 30). Поэтому  $l_v^+$  включается в «подковные» рассуждения наравне с  $l_m$ , а  $l_v^-$  — наравне с  $Sl_m$ . Например, пересечение

$$\alpha = l_{m_0} \cap S^{-1}l_{m_1} \cap \dots \cap S^{-(n-1)}l_{m_{n-1}} \cap S^{-n}l_v^+ \quad (22)$$

не пусто, вытянуто вдоль  $l_{m_0}$  и является графиком функции  $\eta = f(\xi)$ . На  $\alpha$  определены  $S, S^2, \dots, S^n$ . Но  $S^n\alpha \subset l_v^+$  лежит уже вне  $R^+$ , и потому  $S^{n+1}$  не определено. Поэтому решение с начальными условиями  $(v, \tau) \in \alpha$  имеет при  $t > \tau$  ровно  $n$  нулей (напомним, что отображение  $S$  определено сдвигом вдоль решения от некоторого нуля к

следующему) и затем уходит в бесконечность со скоростью  $v$ . (Читателю рекомендуется, пользуясь рис. 30, разобрать все этапы построения пересечения (22), например, при  $n = 3$ .)

Расширим пространство  $\Omega_N^\infty$  допустив к рассмотрению всевозможные последовательности  $\omega = [\omega_n; n_1 \leq n \leq n_2]$ , где  $-\infty \leq n_1 < 0 \leq n_2 \leq +\infty$ , а символы  $\omega_n$  являются натуральными числами  $\geq N$  при  $n_1 < n < n_2$  и действительными числами из отрезка  $[0, \delta]$  при  $n = n_1 n_2$ . Полученное пространство (пока только еще множество) обозначим  $\Omega(N, \delta)$ . Кроме  $\Omega_N^\infty$ , оно содержит последовательности, ограниченные слева, справа или с обеих сторон;

$$\begin{aligned} & v^- m_{n_1+1} m_{n_1+2} \dots m_{-1} m_0 \dots m_n \dots, \\ & \dots m_n \dots m_{-1} m_0 \dots m_{n_2-1} v^+, \\ & v^- m_{n_1+1} \dots m_{-1} m_0 \dots m_{n_2-1} v^+. \end{aligned} \tag{23}$$

Наделим множество допустимых символов  $L = [0, \delta] \cup \{m; m \geq N\}$  топологией так, чтобы на  $[0, \delta]$  она совпадала с обычной, а натуральные числа  $m$  были бы изолированными точками, последовательность которых сходилась бы при  $m \rightarrow \infty$  к 0 (таким образом,  $L$  гомеоморфно подмножеству прямой  $[0, \delta] \cup \left\{-\frac{1}{m}; m \geq N\right\}$ ). Окрестность  $U(w^0)$  элемента  $w^0 = [\omega_n^0; n_1^0 \leq n \leq n_2^0]$  задается конечным подмножеством  $\nu \subseteq [n_1^0, n_2^0]$ , не содержащим  $\pm\infty$ , и окрестностями  $V(\omega_n^0) \subseteq L$  символов  $\omega_n^0, n \in \nu$ . По определению

$$U(w^0) = \{w = [\omega_n; n_1 \leq n \leq n_2]; \nu \subseteq [n_2, n_2], \omega_n \in V(\omega_n^0) \text{ для } n \in \nu\}.$$

Легко видеть, что в этой топологии сходимост

$$w^{(k)} = [\omega_n^k; n_1^k \leq n \leq n_2^k] \rightarrow w^0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

- а)  $\overline{\lim} n_1^k \leq n_1^0, \quad n_2^0 \leq \underline{\lim} n_2^k,$
- б) для каждого  $n \in [n_1^0, n_2^0]$ , отличного от  $\pm\infty$ ,

$$\lim \omega_n^k = \omega_n^0$$

(последнее означает, в частности, что при  $\omega_n^0 = m$  все  $\omega_n^k$ , начиная с некоторого, равны  $m$  и что  $\omega_n^k = m_k \rightarrow \infty$  при  $\omega_n^0 = 0$ ). Пространство  $\Omega(N, \delta)$  компактно.

Соглашение  $n_1 \leq 0 \leq n_2$ , принятое в определении допустимых последовательностей символов, не безобидно, а именно: гомеоморфизм  $T$  сдвига влево определен теперь не на всех последовательностях  $w = [\omega_n; n_1 \leq n \leq n_2]$ , а лишь на тех, у которых  $n_2 > 0$  (и, следовательно,  $\omega_0$  — натуральное число  $\geq N$ ); область определения  $T$  обозначим  $\Delta^+$ . Соответственно,  $\Delta^- = T\Delta^+$  состоит из тех  $w$ , у которых  $n_1 < -1$ .

Область определения  $R^+$  рассматриваемого нами отображения  $S: R^+ \rightarrow R^-$  также не совпадает со всей плоскостью  $\Phi$ , а потому понятия «траектория» и «инвариантное множество» нуждаются в уточнении. Траекторию  $\{S_p^n\}$  точки  $p$  мы будем считать максимально продолженной в обе стороны (до тех пор, пока итерации  $S_p^n$  вообще определены); множества  $M$  условимся называть инвариантным, если  $S(M \cap R^+) = M \cap R^-$ . Пусть окрестность  $V$  произвольна. Совокупность всех точек  $p$ , траектории которых целиком лежат в  $V$ , является максимальным инвариантным множеством, содержащимся в  $V$ ; мы будем обозначать его  $M_V$ .

Распространим теперь определения (19) на все  $\omega = [\omega_n; n_1 \leq n \leq n_2] \in \Omega(N, \delta)$ :

$$\varphi(\omega^+) = \bigcap_{n=0}^{n_2} S^{-n}l_{\omega_n}, \quad \varphi(\omega^-) = \bigcap_{n=n_1}^{-1} S^{-n}l_{\omega_n}, \quad \varphi(\omega) = \bigcap_{n=n_1}^{n_2} S^{-n}l_{\omega_n}. \quad (24)$$

Для бесконечных  $n_1$  и  $n_2$  эти формулы совпадают с (19). Если  $n_2 < +\infty$ , то  $\omega$  оканчивается (ср. (23)) числом  $v^+ \in [0, \delta]$  и  $l_{\omega_{n_2}}$  означает в (24)

вертикальный отрезок  $l_{v^+}^+ \subset \left\{ \eta = \frac{(v^+)^2}{2} \right\}$  (рис. 30). Если же  $n_1 > -\infty$

и  $\omega$  начинается числом  $v^-$ , то (24) надо понимать несколько нестандартно:  $S^{|n_1|}l_{\omega_{n_1}}$  заменяется на  $S^{|n_1|-1}l_{v^-}^-$ , где  $l_{v^-}^- \subset \left\{ \xi = \frac{(v^-)^2}{2} \right\}$  —

вертикальный отрезок (напомним, что  $l_{v^-}^-$  располагается в окрестности  $U$  аналогично множествам  $Sl_m$ , чем и объясняется неправильность в формулах).

**Теорема 2 ([59, III]).** *Если выполнены условия А–Е из §1,  $J < \infty$  и уравнение (1) типично, т. е.  $\Pi_0^-$  и  $\Pi_0^+$  трансверсально пересекаются в некоторой точке  $p$ , то существуют  $N, \delta$  и окрестность  $U$  точки  $p$  такие, что:*

1) Отображение  $\omega \rightarrow \varphi(\omega)$  является гомеоморфизмом между  $\Omega(N, \delta)$  и максимальным инвариантным в окрестности  $V$  множеством  $M_V$ ,  $\varphi(\Delta^\pm) = R^\pm \cap M_V$ , и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta^+ & \xrightarrow{T} & \Delta^- \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M_V \cap R^+ & \xrightarrow{S} & M_V \cap R^- \end{array} \quad (25)$$

коммутативна.

2) Множества  $\varphi(\omega^+)$  и  $\varphi(\omega^-)$  являются в координатах (14) соответственно графиками функций  $\eta = f(\xi)$  и  $\xi = g(\eta)$  класса  $C^1$ ; касательные к ним определяют на  $M_V$  структуру гиперболического множества;  $\varphi(\omega^+)$  является для точки  $p = \varphi(\omega)$  локальным устойчивым, а  $\varphi(\omega^-)$  — локальным неустойчивым многообразием.

В лекциях А. Г. Кушниренко и А. Б. Катка рассматривались только всюду определенные отображения, однако не представляет труда распространить определение гиперболического инвариантного множества и на случай локальных отображений, оставляя в определениях только те итерации отображения  $S$  и его дифференциала, которые имеют смысл. Осторожности требуют лишь неустойчивые и устойчивые многообразия. Только для  $n_2 = +\infty$  можно определить  $W^S(p)$  как множество точек  $q$ , траектории которых асимптотически близки к траектории  $p$ :

$$W^S(p) = \{q; \rho(S^n p, S^n q) \rightarrow 0 \text{ при } n = +\infty\},$$

и  $W^u(p)$  аналогично определяется этим способом лишь при  $n_1 = -\infty$ .

Теорема 2 дает возможность строить точки, траектории которых попадают в  $l_m^+$ ,  $l_v^-$  и  $l_v^+$  заранее предписанным образом. Вспоминая определение отображения  $S$ , мы получаем богатый набор решений уравнений (1). Задав бесконечную последовательность  $\omega = [m_n]$  или одну из последовательностей (23), мы при помощи отображения  $\varphi$  находим начальные условия  $(v, \tau) = \varphi(\omega)$ , определяющие решение  $x(t)$ , у которого расстояния между соседними нулями близки к  $2\pi m_n$ , а если последовательность ограничена, то в соответствующую сторону решение стремится к бесконечности и крайний символ  $v^-$  или  $v^+$  дает его предельную скорость. Периодической последовательности отвечают периодические решения уравнения (1); ясно, что таким образом мы находим счетное их число. Периодические решения, о которых шла речь

в теореме 1, отвечают простейшим последовательностям, где все  $m_n$  равны между собой.

Теорему 2 можно обобщить на случай, когда кривые  $\Pi_0^+$  и  $\Pi_0^-$  имеют несколько точек трансверсального пересечения. Формулировку соответствующего утверждения можно найти в [59, III] и [62]. В следующем параграфе будет рассмотрено конкретное уравнение, для которого  $\Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$  состоит из двух точек. В [62] приведено также аксиоматическое описание отображений  $S$ , к которым применимы все построения, описанные выше.

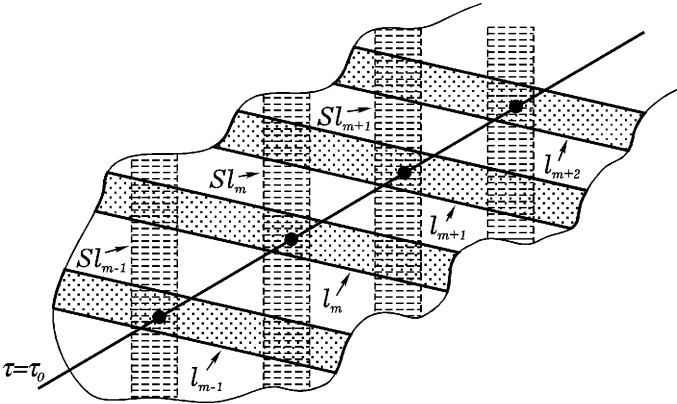


Рис. 31

Остановимся еще вкратце на случае ямы бесконечной глубины  $J = \infty$ . Для типичного уравнения можно построить специальную окрестность  $U$ , вытянутую вдоль луча  $\tau = \tau_0$ , где  $\tau_0$  — простой корень уравнения  $\Psi(\tau) - \int_0^\infty x Q'_t(x, \tau) dx = 0$ . Пересечение  $U \cap S^{-1}U$  снова содержит счетное число «правильных» компонент  $l_m$ , но теперь уже  $Sl_m$  пересекается не с любыми  $l_{m'}$ , как это было в случае  $J < \infty$  (рис. 30), а лишь с теми, номера которых  $m'$  близки  $m$  (рис. 31). Введя пространство символов

$$\Omega(\alpha(m)) = \{\omega = [m_n]; |m_{n+1} - m_n| < \varphi(m_n)\}, \tag{26}$$

можно доказать аналог теоремы 2 ([59, III]). Условие  $Q_0(x) \times \int_0^x Q_0(y) dy \rightarrow 0$ , которое присутствовало уже в формулировке теоре-

мы 1, обеспечивает при этом нетривиальность результата. Оно означает, что расстояние между неподвижными точками отображения  $S$ , лежащими вблизи луча  $\tau = \tau_0$ , уменьшается при  $v \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $Sl_m$  пересекается со все большим и большим числом компонент  $l_{m'}$ , если  $m$  возрастает, и что в (26) функция  $\alpha(m) \uparrow \infty$ .

Дифференциальные свойства отображения  $S$  в том числе и условие типичности, тесно связаны с уравнением в вариациях, построенным для уравнения (1):

$$\delta \ddot{x} = -Q'_x(x_p(t), t)\delta x. \quad (27)$$

Пусть  $J < \infty$  и  $x_p(t)$  — решение, порожденное начальными условиями  $P = (v, \tau) \in \Pi_0^+ \cap \Pi_0^-$  (см. выше), параболическое в обе стороны. Из условия В, которому должно было удовлетворять уравнение (1), вытекает, что при больших  $|t|$  коэффициент в правой части (27) положительтен. Это дает возможность доказать существование двух решений уравнения (27) (обозначим их  $\delta_1 x$  и  $\delta_2 x$ ) таким, что

$$\delta_1 x(t) \downarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

$$\delta_2 x(t) \downarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Уравнение (1) является типичным, если решения  $\delta_1 x$  и  $\delta_2 x$  линейно независимы (значения  $\delta_1 \dot{x}(\tau)$  и  $\delta_2 \dot{x}(\tau)$  определяют направление касательных к  $\Pi_0^\pm$ ).

Заметим, что в примере из следующего параграфа  $\delta_i x$  имеют на бесконечности степенной (а не экспоненциальный) порядок убывания.

### § 3. Об одном частном случае задачи трех тел

Рассмотрим снова, как и в лекции 1, движение трех тел (материальных точек)  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  взаимодействующих друг с другом по закону Ньютона;  $\mu_i$  — масса тела  $p_i$ .

Предположим, что  $\mu_1 = \mu_2$  и что в начальный момент тела  $p_1, p_2$  и их скорости симметричны относительно  $QZ$ , а тело  $p_3$  лежит на этой оси и его скорость направлена вдоль нее (рис. 32). По соображениям симметрии подобное расположение тел  $p_1, p_2$  и  $p_3$  будет сохраняться для всех  $t$ , что позволяет свести исследование к системе с двумя степенями свободы.

Этот частный случай задачи трех тел придумай давно (я знаю ссылку на работу 1895 года), но счастливая идея: исследовать на нем

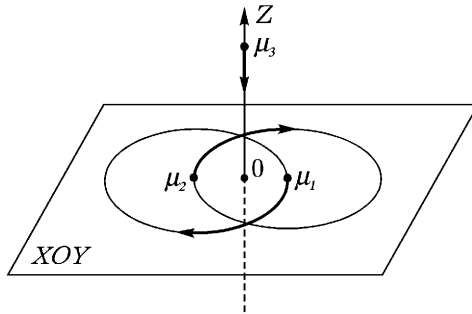


Рис. 32

расположение в фазовом пространстве траекторий различных финальных типов, принадлежит А. Н. Колмогорову. Именно для этого примера К. А. Ситникову удалось доказать [29] существование осциллирующих движений (см. часть 1), а автору — возможность применения методов «символической динамики».

Пусть  $\mu_3 = 0$  (предположение  $0 < \mu_2 \ll 1$  не вносит ничего принципиально нового). Если выполнено обычное соглашение о центре тяжести системы (формула (2) в части 1), то  $p_1$  и  $p_2$  описывают в плоскости  $XOY$  кеплеровы орбиты, симметричные относительно 0; в случае  $h < 0$  и  $c \neq 0$  они будут эллипсами, что мы и предположим далее. При подходящем выборе единиц можно считать, что период обращения тел  $p_1$  и  $p_2$  по этим эллипсам равен  $2\pi$ , а гравитационная постоянная и суммарная масса тел  $p_1$  и  $p_2$  — единице. Обозначим через  $r(t)$  половину расстояния  $r_{12}$  (т.е. расстояние от каждого из тел  $p_1, p_2$  до точки 0). Тогда уравнение движения тела  $p_3$ , положение которого определяется лишь одной координатой  $z$ , имеет вид

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}}. \quad (28)$$

Это уравнение принадлежит классу, рассмотренному в § 1; легко проверяется, что его правая часть удовлетворяет предположениям А–Е, причем  $J < \infty$ .

Полярные координаты  $(v, \tau)$ , игравшие столь важную роль в §§ 1–2, интерпретируются теперь так. В момент, когда  $p_3$  проходит через 0 и все три тела располагаются на одной прямой («прямолинейная конфигурация»), состояние системы определяется двумя величинами: скоростью



тью тела  $p_3$  и фазой  $\tau$  эллиптического движения тел  $p_1$  и  $p_2$  (в качестве  $\tau$  можно взять среднюю или истинную аномалию). По соображениям симметрии можно ограничиться лишь модулем  $v$  скорости  $p_3$ . Тогда заданием полярных координат  $(v, \tau)$  точки на плоскости  $\Phi$  движение полностью определяется с точностью до направления скорости.

Если орбиты тел  $p_1$  и  $p_2$  круговые, то (в силу соглашения о выборе единиц)  $r(t) = 1/2$  и уравнение (28) интегрируется. Начальные условия  $(v, \tau)$ , принадлежащие окружности  $v = 2$ , порождают параболические движения, при  $v > 2$  — гиперболические, при  $v < 2$  — ограниченные (движение тела  $p_3$  при этом будет периодическим так же, как и движение пары  $p_1, p_2$ , но периоды этих двух движений на множестве полной меры несоизмеримы).

В том же случае, когда тела  $p_1$  и  $p_2$  обращаются около 0 по эллипсам, кривые параболических начальных данных  $\Pi_0^+$  и  $\Pi_0^-$  друг с другом не совпадают. Если эллипсы мало отличаются от окружностей, то удастся доказать «типичность» уравнения. Используя разложения по эксцентриситету эллипсов как по малому параметру, можно убедиться в том, что кривые  $\Pi_0^+$  и  $\Pi_0^-$ , асимптотические близкие к окружности  $v = 2$ , имеют ровно две трансверсальные точки пересечения (как на рис. 3). Одной точке пересечения, близкой к  $(0, 2)$ , соответствуют моменты наибольшего сближения тел  $p_1$  и  $p_2$ . Другой, близкой к  $(2, \pi)$ , — моменты наибольшего удаления. Следуя рассуждениям предыдущего параграфа, можно определить окрестности точек пересечения, «хорошие» с точки зрения возможности использования символической динамики. В фазовом пространстве этим окрестностям отвечает некоторое открытое подмножество  $V$  многообразия прямолинейных конфигурации. Оно зависит от двух параметров  $N$  и  $\delta$ ; формулируемая ниже теорема справедлива, если  $\delta$  достаточно мало, а  $N$  достаточно велико.

**Теорема 3.** *Множество  $M_V$  решений рассматриваемого частного случая задачи трех тел, когда моменты прямолинейных конфигураций их состояния принадлежат  $V$ , находится во взаимно однозначном соответствии со множеством  $\Omega$  всех символических последовательностей вида*

$$v^- i_{n_1} | \dots m_{n-1} i_{n-1} m_n i_n m_{n+1} i_{n+1} \dots | v^+, \quad (29)$$

где  $m_{n_1}, n_1 < n < n_2$  — натуральные числа  $\geq N$ ,  $i_n = 0$  или  $1$ ,  $v^\pm \in [0, \delta]$ ,  $n_1 < 0 \leq n_2$ ; части, отделенные в (29) пунктиром, могут и отсутствовать ( $n_1 = -\infty$  или  $n_2 = +\infty$ ), и тогда последовательность в соответствующую сторону бесконечна.

Число прямолинейных конфигураций на решении определяется символами  $i_n$  в (29): если  $i_n = 0$ , то  $n$ -е прохождение  $p_3$  через 0 происходит вблизи момента наибольшего сближения тел  $p_1$  и  $p_2$ , если  $i_n = 1$  — вблизи момента наибольшего удаления. Символ  $m_n$  стоящий между  $i_{n-1}$  и  $i_n$ , показывает число полных оборотов тел  $p_1$  и  $p_2$  вокруг 0, протекающих между  $(n-1)$ -м и  $n$ -м возвращением  $p_3$  к 0. Символы  $V^-$  или  $V^+$ , если они присутствуют, показывают, что тело  $p_3$  уходит в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$  или при  $t \rightarrow +\infty$  соответственно со скоростью  $v^-$  или  $v^+$ .

Термин «решение» в этой теореме означает траекторию в фазовом пространстве, на которой в качестве нулевой точки выделено одно из состояний с прямолинейной конфигурацией (из § 1 следует, что на каждой траектории такие состояния найдутся). Этому состоянию присвоен номер 0, и ему отвечает в последовательности (29) символ  $i_0$ ; остальные состояния с прямолинейной конфигурацией нумеруются от нулевого в обе стороны. Выбор другой прямолинейной конфигурации в качестве нулевой приводит к изменению нумерации символов в последовательности (29), но сама последовательность остается той же самой. Принадлежность движения к тому или иному (финальному типу по Шази определяется последовательностью (29) так же, как и в § 2, только классы  $H^\pm$  и  $R^\pm$  в смысле § 1 превращаются здесь в  $HE_3^\pm$  и  $PE_3^\pm$ .

Если масса  $\mu_3$  тела  $p_3$  отлична от нуля, то задача становится более сложной, и результаты, основанные на изучении уравнения (1), к ней непосредственно не применимы. Все же и в этом случае удастся, по крайней мере при  $\mu_3 \ll \mu_1 = \mu_2$ , (см. [63]), построить отображение  $S$  с теми же свойствами, что и в § 2. Это делает справедливым

**Следствие.** *Существует такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $\varepsilon t_1 = \varepsilon t_2 > t_3 \geq 0$  и при  $h < 0$  в рассматриваемом частном случае задачи трех тел реализуются все 16 логически возможных комбинаций финальных типов движения по Шази.*

Например, любая последовательность

$$v i_0 m_1 i_1 m_2 i_2 m_3 i_3 \dots,$$

в которой  $v > 0$  и  $\sup_{n>0} m_n < \infty$ , порождает решение, для которого происходит полный захват (часть 1, § 5). Стандартными приемами символической динамики можно построить и другие примеры движения

с предписанным заранее разнообразным поведением. Так, последовательности

$$v^- 0N_1 1N_1 0 \dots 1N_1 0N_2 0 \dots N_2 0N_1 1N_1 0N_1 1v^+$$

$\swarrow \quad \searrow$   $2k_1$  раз       $\swarrow \quad \searrow$   $2k_2$  раз

отвечает движение тела, которое можно интерпретировать следующим образом. Космический корабль, прилетевший в систему двойной звезды из бесконечности со скоростью  $v^-$ , вышел сначала на орбиту, близкую к периодической (маятниковой) с периодом  $4\pi N_1$ . На этой орбите он проделал  $k_1$  полных колебаний, причем в течение каждого дважды возвращался в точку относительно равновесия (в центр масс двойной звезды), поочередно в моменты наибольшего сближения и наибольшего удаления компонент двойной звезды. Затем корабль перешел на орбиту, близкую к периодической с периодом  $4\pi N_2$ , проделал на ней  $k_2$  полных колебаний, причем каждое из  $2k_2$  его возвращений к точке равновесия происходило около моментов сближения компонент двойной звезды. Наконец, вернувшись на первоначальную орбиту, корабль проделал около нее полтора колебания и ушел в бесконечность со скоростью  $v^+$  в ту же сторону, откуда пришел. Замечательно, что все эти эволюции оказываются возможными только за счет сил гравитации и не требуют расхода топлива. Правда, точность задания начальных условий должна быть необычайно высока.

Теорема<sup>1</sup> 3 и ее следствие позволили получить ответ на ряд теоретических вопросов небесной механики, из которых вопрос о полном захвате, вероятно, наиболее интересен. Тем не менее, целый ряд проблем, как уже было отмечено в части 1, остается не решенным. Применительно к рассматриваемому здесь примеру это, в первую очередь, вопрос о мере множеств осциллирующих движений  $OS^\pm$ . Кроме того, было бы чрезвычайно интересно распространить эти результаты на случай «полномерного» фазового пространства задачи трех тел, не говоря уж об общей задаче  $n$  тел.

<sup>1</sup>В главах III и V новой книги J. Moser, *Stable and Random Motions in dynamical Systems*, Princeton, New Jersey, 1973, приведено доказательство теоремы 3, более простое по сравнению с [59]. Там же можно найти результаты, дополняющие материал, изложенный в части 2.

---

## Литература

- [1] Дж. Биркгоф. *Динамические системы*. М.–Л.: ГТТИ, 1940 /Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 9, 1927.
- [2] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. *Вариационное исчисление*. М.: ФМ, 1961.
- [3] Г. Н. Дубошин. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*, М.: Наука, 1964.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика*. М.: ФМ, 1958.
- [5] К. Л. Зигель. *Лекции по небесной механике*. М.: ИЛ, 1939.
- [6] С. L. Siegel, J. K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer Verlag, 1971<sup>1</sup>.
- [7] Д. Милнор. *Теория Морса*. М.: Мир, 1965.
- [8] А. Пуанкаре. *Избранные труды*. М.: Наука, т. 1, 1971; т. 2, 1972.
- [9] А. Пуанкаре. *Лекции по небесной механике*. М.: Наука, 1965.
- [10] П. К. Рашевский. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967.
- [11] А. Уинтнер. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967.
- [12] Э. Уиттекер. *Аналитическая динамика*. М.–Л.: ГТТИ, 1937.
- [13] Г. Ф. Хильми. *Проблема n тел в небесной механике и космогонии*. Изд. АН СССР, 1951.
- [14] К. Шарлье. *Небесная механика*. М.: Наука, 1966.

---

<sup>1</sup>Новые по сравнению с [5] параграфы частично переведены в русском издании [43] (см. стр. 106).

- [15] В. М. Алексеев. *Обмен и захват в задаче трех тел*. ДАН СССР, 108, № 4 (1956). 599–602.
- [16] В. М. Алексеев. *Финальные движения в задаче трех тел*. Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». Изд. АН СССР, 1963.
- [17] Д. В. Аносов, Я. Г. Синай. *Некоторые гладкие динамические системы*. Успехи матем. наук, 22, вып. 5 (1967). С. 107–172.
- [18] В. И. Арнольд. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*. Успехи матем. наук, 18, вып. 6 (1963). С. 91–192.
- [19] Г. А. Красинский. *Квазипериодические решения первого сорта в плоской задаче  $n$  тел*. Труды ин-та теор. астр. АН СССР, 13 (1969). С. 105–168.
- [20] Дж. Литтлвуд. *Математическая смесь*. М.: ФМ, 1962.
- [21] Г. А. Мерман. *Новые критерии гиперболического и гиперболо-эллиптического движений в задаче трех тел*. Астр. журн. 30, № 3 (1953). С. 332–339.
- [22] Г. А. Мерман. *К вопросу об исследованиях Шазы в задаче трех тел*. Бюллетень ин-та теор. астр, АН СССР, 5, № 9 (1954). С. 594–605.
- [23] Г. А. Мерман. *Качественные исследования в задаче трех тел*, Бюллетень ин-та теор. астр. АН СССР, 6, № 10 (1965). С. 687–712.
- [24] Г. А. Мерман, Н. Г. Кочина. *Применение метода оценок к примеру О. Ю. Шмидта*. Бюллетень ин-та теор. астр. 6, № 2. С. 85–111.
- [25] Ю. С. Осипов. *Геометрическая интерпретация задачи Кеплера*. Успехи матем. наук, 27, вып. 2. (1972). 101 с.
- [26] В. Ф. Проскурин. *К вопросу захвата в примере О. Ю. Шмидта*. Бюллетень ин-та теор. астр. АН СССР, 5, № 7 (1953). С. 429–434.
- [27] Р. А. Саакян. *О вероятности захвата в задаче трех тел*. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1961.
- [28] К. А. Ситников. *О возможности захвата в задаче трех тел*. Матем. сб. 32 (1953). С. 693–705.

- [29] К. А. Ситников. *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел.* ДАН СССР. 133, № 2 (1960). С. 303–306.
- [30] Ф. А. Слудский. *К задаче о многих телах.* Матем. сб. 9 (1978).
- [31] С. Смейл. *Топология и механика.* Успехи матем. наук, 27, вып. 2 (1972). С. 77–133.
- [32] Ю. Д. Соколов. *Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягаються за законом Ньютона.* Укр. Акад. наук, Труды Фізично-математичного відділу, вип. 1 (1928).
- [33] Г. Ф. Хильми. *О возможности захвата в проблеме трех тел.* ДАН СССР. 62, № 1 (1948). 39 с.
- [34] О. Ю. Шмидт. *О возможности захвата в небесной механике.* ДАН СССР. 58, № 2 (1947). С. 213–216.
- [35] V. M. Alexeyev. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.* Actes du Congrès international des mathématiciens (Nice, 1970), Paris, Gauthier–Villars, 1971, t. 2, P. 893–907.
- [36] L. Becker. *On capture orbits.* Monthly Notices Royal Astr. Soc., 80, № 6 (1920). P. 590–597.
- [37] J. Chazy. *Sur certaines trajectoires du problème des  $n$  corps.* Bull. Astr., 35 (1918). P. 321–389.
- [38] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment.* Annales de l'Ecole Norm. Sup., 3 ser., 39 (1922). P. 29–130.
- [39] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.* Journ. Math. pures et appl., 8 (1929). P. 353–380.
- [40] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps.* Bull. Astronom., 8 (1932). P. 403–436.
- [41] V. A. Fock. *Zur theorie des Wasserstoffatoms,* Zeitschrift für Physik, 98, № 3–4 (1935). S. 145–154.
- [42] J. E. Littlewood. *On the problem of  $n$  bodies.* Meddel. Lunds Univ. mat. Sem., Suppl. M. Riesz (1952). P. 143–151.

- [43] J. Moser. *Lectures on Hamiltonian systems*. Mem. Amer. Math. Soc., 81 (1968). P. 1–60<sup>1</sup>.
- [44] J. Moser. *Regularisation of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*. Comm. on pure appl. math., 23 (1970). P. 609–636.
- [45] P. Painlevé. *Lecons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Professees à Stockholm (1895), Paris, 1897.
- [46] H. Pollard, D. Saari. *Singularities of the  $n$ -body problem*. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 30, № 4 (1968). P. 263–269.
- [47] D. Saari. *On ascellatory motion in the problem of three bodies*. Celest. mech., 1, № 3–4 (1970). P. 343–346.
- [48] D. Saari. *Expanding gravitational systems*. Trans. Amer. Math. Soc., 156, May (1971). P. 219–240.
- [49] H. Sperling. *On the real singularities of the  $n$ -body problem*. Journ. reine und angew, Math., 245 (1970). P. 15–40.
- [50] K. F. Sundman. *Recherdes sur le problème des trois corps*. Act. Soc. Sci. Fennical, 34, № 6 (1907).
- [51] K. F. Sundman. *Mémoire sur le problème des trois corps*. Act. Math., 36 (1912).
- [52] M. Morse, G. A. Hedlund. *Symbolic dynamics*. I, II, Amer. Journ. Math., 60 (1938). P. 815–866; 62 (1940). P. 1–42.
- [53] N. Levinson. *A second order differential equation with singular solutions*. Ann. of Math., 50, № 1 (1949). P. 126–153.
- [54] J. E. Littlewood. *On non-linear differential equations of the second order*. III, IV, Acta Mathem., 97, № 3–4 (1957). P. 267–308; 98, № 1–2 (1957). P. 1–110.
- [55] В. А. Плисс. *Нелокальные проблемы теории колебаний*. М.: Наука, 1964.

---

<sup>1</sup>Появился русский перевод: Ю. Мозер, *Лекции о гамильтоновых системах*. М.: Мир, 1973.

- [56] С. Смейл. *Структурно-устойчивый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек*. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. II, К. Изд. АН УССР, 1963. С. 365–366.
- [57] R. L. Adler, B. Weiss. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*. Proceed. of Nat. Acad. of Sci. USA, 57, № 6 (1967). P. 1573–1576.
- [58] В. М. Алексеев. *Перроновские множества и топологические цепи Маркова*. Успехи матем. наук, 24, вып. 5 (1969). С. 227–228.
- [59] В. М. Алексеев. *Квазислучайные динамические системы*. I, II, III, Матем. сб., 76, № 1 (1968), с. 72–134; 77, № 4 (1968), с. 545–601; 78, № 1 (1969), с. 3–50.
- [60] S. Smale. *Diffeomorphisms with many periodic points* (1965). Русский перевод: «Математика», 11, № 4 (1967). С. 88–106.
- [61] Л. П. Шильников. *Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа*. Матем. сб., 74, № 3 (1967). С. 378–397.
- [62] В. М. Алексеев. *Квазислучайные колебания*. Труды V международной конф. по нелинейным колебаниям. Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1970, т. 2. С. 33–38.
- [63] В. М. Алексеев. *Квазислучайные динамические системы*. Диссертация. МГУ, 1968.
- [64] В. И. Арнольд. *Лекции по классической механике*. Изд. МГУ. 1968.
- [65] Э. Хопф. *Эргодическая теория*. Успехи матем. наук. 4, вып. 1 (29), (1949). С. 113–182.
- [66] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. М.–Л., Гостехиздат, 1949.
- [67] J. Lagrange. *Essais sur le problème des trois corps*. Paris, 1772.
- [68] L. Euler. *Théorie de la Lune*. Paris, 1772.



---

# О возможности захвата в небесной механике<sup>1</sup>

О. Ю. Шмидт

1. Возможность захвата одного небесного тела другим (или взаимного захвата двух тел) неоднократно выдвигалась как механизм для объяснения тех или других явлений космогонии, но встречала резкие возражения. Эти возражения указывали либо на *невозможность* захвата, либо на крайнюю его невероятность. Оставляя вопрос об оценке вероятности захвата до другой статьи, займемся сейчас выяснением самой *возможности* его.

2. Под «захватом» обычно понимается следующее явление: два небесных тела, первоначально двигавшиеся независимо друг от друга, под влиянием взаимного притяжения и тех или иных сопутствующих причин сходят со своих первоначальных орбит и в дальнейшем обращаются около общего центра тяжести по эллиптической (или возмущенной эллиптической) орбите. Возможно и такое определение: мы будем говорить, что произошел захват, если два тела до момента  $t_0$  были всегда друг от друга на расстояниях, больших некоторой величины  $\rho$ , а после момента  $t_0 + \tau$  навсегда остаются на расстояниях меньших, чем  $\rho$ . Это — определение захвата, так сказать, навечно. Его можно было бы ослабить для «временного» захвата.

В случае ньютоновского притяжения захват невозможен при двух взаимно притягивающихся телах, необходимо по крайней мере три. Таким образом, вопрос о захвате упирается в знаменитую задачу трех тел. В этой связи наиболее детальное исследование принадлежит Чазу [1], который задался целью изучить движение в задаче трех тел, когда время возрастает бесконечно (*allure finale*). Чазу устанавливает следующие классы этих «финальных» состояний системы: 1) движения *ограниченные*, когда все три тела остаются в замкнутой области

---

<sup>1</sup> Доклады Академии наук СССР, 1947. Том LVIII, № 2, стр. 213–216.

около общего центра тяжести, и *колебательные*, когда тела попеременно то сближаются, то расходятся, не имея верхней границы расстояний, но и не уходят в бесконечность; 2) движения *гиперболически-эллиптические*, когда при бесконечном возрастании времени одно из тел уходит все дальше, а два других остаются на конечном расстоянии друг от друга, так что их относительное движение в пределе становится эллиптическим; 3) движения *гиперболические*, когда все три тела с течением времени безгранично расходятся.

В исследованиях Chazy существенную роль играет знак постоянной  $h$  в интеграле энергии, когда движение отнесено к центру тяжести системы. При  $h < 0$  возможны первые два класса упомянутых выше движений, при  $h > 0$  — второй и третий. Для случая  $h < 0$  Chazy в 1929 г. [1] доказал важную теорему: если в предельном *прошлом* (при  $t \rightarrow -\infty$ ) движение принадлежало к одному из указанных классов, то и в предельном *будущем* (при  $t \rightarrow +\infty$ ) оно будет принадлежать к тому же самому классу. Этот результат получил широкую известность. Его иногда считают доказательством невозможности захвата, забывая, что теорема Chazy 1929 г. относится только к случаю  $h < 0$ , а сближение трех небесных тел, проходящих по независимым путям из бесконечности, предполагает как раз  $h > 0$ . Правда, в 1932 г. Chazy [2] рассмотрел и этот последний случай и пришел к тому же выводу, но в отличие от первого мемуара не дал строгого доказательства, ограничиваясь суждениями по аналогии. Ниже будет приведен пример, опровергающий утверждение Chazy для  $h > 0$ , а именно пример, когда движение было «гиперболическим» в прошлом и становится «гиперболически-эллиптическим» в будущем.

**3.** Явление захвата лежит в основе предложенной мною теории происхождения планетных систем и двойных звезд [7, 8]. Поэтому передо мной стояла настоятельная задача: доказать прежде всего принципиальную возможность захвата. Для этого достаточно найти хотя бы один пример в задаче трех тел, приводящий к захвату. В литературе таких примеров нет. Только Besker [3] вычислил несколько орбит своеобразного «обмена», когда проходящая мимо двойной звезды третья звезда вырывает одну из звезд парной системы и сама становится на ее место. Этот случай не решает нашего вопроса.

По скоростям и положениям (в некоторый момент) трех пришедших из бесконечности тел очень трудно догадаться, как будет протекать их встреча и не произойдет ли захвата. Подобрать такие условия

практически невозможно. Но задача сильно упрощается, если одновременно с захватом рассматривать параллельно разрывы пары тел под воздействием третьего тела. Разрывом двойной звезды занимались неоднократно: Öpik [4], Lyttleton [5], Chandrasekhar [6], но эти авторы прошли мимо того важного обстоятельства, что *каждому случаю разрыва взаимно-однозначно соответствует случай захвата*. В самом деле, как известно, уравнения небесной механики допускают изменение знака времени. Если в начальном положении система имеет координаты  $x_{i1}$  и скорости  $v_{i1}$ , а через время  $\tau$  пришла в положение с координатами  $x_{i2}$  и скоростями  $v_{i2}$ , то другая система, начав движение с тех же координат  $x_{i2}$ , но с противоположными скоростями  $-v_{i2}$ , придет через время  $\tau$  в то же положение  $x_{i1}$ , в котором вначале была первая система, и со скоростями, равными точно  $-v_{i1}$ . Например, если первоначально две звезды обращались по эллипсам друг около друга, а затем проходящая третья звезда разорвала связь, так что через некоторое время все три звезды уже расходились в разные стороны с гиперболическими относительными скоростями, то фиксируя положение звезд в один из таких последующих моментов и придав им обратно направленные скорости (той же величины, как в первом случае), мы получим ту же картину движения в обратном порядке (как в пущенной наоборот киноплёнке) и, начав с взаимно-гиперболических движений трех звезд, кончим эллиптическим движением двух из них, т. е. образованием двойной звезды путем захвата.

Подобрать условия для разрыва пары уже гораздо легче. И действительно, первый же предложенный мной численный пример дал отчетливую картину разрыва двойной звезды, а рассматриваемый в обратном направлении дал, следовательно, пример образования двойной звезды путем захвата. Вычисления были проведены О. П. Крамер и В. И. Ковригиной, под общим руководством Н. Н. Парийского<sup>1</sup>. Начато вычисление ряда дальнейших примеров.

4. Рассматривается движение трех тел с одинаковыми массами, равными массе Солнца, которая берется за единицу. Единицей расстояния служит астрономическая единица, а единицей времени год, деленный на  $2\pi$ . При этих условиях постоянная тяготения равна 1, что упрощает вычисление. Мы будем иметь дело с относительным движением по отношению к одному из трех тел, с которым мы неизменно

<sup>1</sup>Выражаю свою глубокую благодарность Н. Н. Парийскому и всем участникам вычислений.

связаем начало координат системы (точка  $O$ ). Уравнения относительного движения тел с координатами  $x_1y_1$  и  $x_2y_2$  имеют вид:

$$x_1'' = -\frac{2x_1}{r_{10}^3} - \frac{x_1}{r_{12}^3} + \frac{x_2}{r_{12}^3} - \frac{x_2}{r_{20}^3},$$

$$y_1'' = -\frac{2y_1}{r_{10}^3} - \frac{y_1}{r_{12}^3} + \frac{y_2}{r_{12}^3} - \frac{y_2}{r_{20}^3},$$

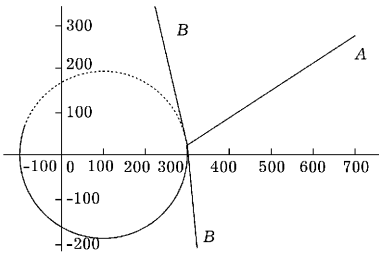


Рис. 1

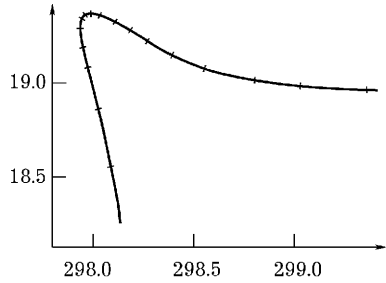


Рис. 2

и аналогичная пара уравнений для  $x_2''$  и  $y_2''$ . Обозначения расстояний между телами понятны. Для простоты исследуется пример движения в одной плоскости. Начальные данные в момент  $t = 0$  таковы, что невозмущенной орбитой тела  $A$  под притяжением тела  $O$  был бы эллипс с большой полуосью, равной 200 астр. ед. (что соответствует периоду 2000 лет) и эксцентриситетом  $1/2$ , а невозмущенной орбитой тела  $B$  — гипербола (начальные данные см. в табл. 1).

Таблица 1

$t$	$x_1$	$x_1'$	$y_1$	$y_1'$	$x_2$	$x_2'$	$y_2$	$y_2'$
-5824	-84.69	-0.072	67.38	-0.148	187.77	-0.045	-6529.700	0.861
0	291.500	0.0195	-49.958	0.0561	320.000	0.000	-1200.000	0.9549
1252	297.963	0.0041	19.315	0.0096	309.232	-0.0363	2.374	1.0110
1254	297.974	0.0071	19.331	0.0053	309.156	-0.0394	4.400	1.0153
1256	297.992	0.0110	19.337	0.0004	309.073	-0.0434	6.435	1.0202
129764	7004	0.128	10975	0.084	-28636.	-0.226	116430	0.905

Исходя из этого положения, были вычислены обычными методами положения и скорости относительного движения как вперед ( $t > 0$ ), так

и назад ( $t < 0$ ). На рис. 1 воспроизведены траектории движения, а на рис. 2 — в большем масштабе тот участок траектории тела  $A$ , на котором произошел разрыв пары. При этом отмечены точки, соответствующие тем моментам времени, для которых вычислялись положения и скорости. В табл. 1 даны начальные данные ( $t = 0$ ) и для иллюстрации приведены некоторые строчки из результатов вычисления.

Мы видим, что с возрастанием  $t$  действительно произошел разрыв пары. В том, что движение в дальнейшем останется гиперболическим по отношению к телу  $O$ , убеждает не только рисунок, но и следующее простое рассуждение. Из наших уравнений видно, что как только  $r_{12}$  и  $r_{20}$  станут больше  $r_{10}$ , в дальнейшем ускорение тела  $A$  будет всегда меньше, чем  $5/r_{10}^2$ , т. е. меньше того ускорения, которое соответствует притяжению одним телом, помещенным в точке  $O$ , с четверной массой. Из табл. 1 видно, что скорость тела  $A$  в последних строках значительно больше, чем была бы параболическая скорость в указанном для сравнения случае. Таким образом, и в дальнейшем  $A$  останется на гиперболе. Движение, обратно направленное, дает захват с образованием двойной звезды и эллиптической орбитой.

Рассмотренный пример не является исключительным. Ясно, что небольшие изменения в начальных данных, в том числе и в третьем измерении, дадут небольшие изменения и в области разрыва (захвата). Множество начальных данных, приводящих к захвату, имеет положительную меру, а не меру нуль.

5. Итак, захват в задаче трех тел возможен, как и разрыв двойной звезды, притом этот захват (разрыв) будет не временным, а постоянным. Движение системы трех тел, гиперболически-эллиптическое в прошлом, может стать гиперболическим в будущем, и наоборот.

Вероятность захвата хотя и мала, но положительна (не нуль). Поэтому при наличии в Галактике около  $10^{11}$  звезд и времени никак не меньше миллиардов лет, можно быть уверенным, что в Галактике есть случаи, когда эта возможность была реализована, т. е. хотя бы некоторая часть визуально-двойных звезд образовалась путем захвата. Это теперь уже не гипотеза, а факт. Отсюда еще нельзя непосредственно сделать вывод, что все визуально-двойные звезды образовались таким путем. Но можно построить теорию для тех двойных звезд, которые произошли путем захвата, т. е. вывести закономерности и формулы, которым должны подчиняться эксцентриситеты, длины осей и наклоны орбит, и затем сравнить эти формулы с данными наблюдений. Это

сделано в моих работах [7], причем совпадение теоретических и эмпирических закономерностей оказалось очень хорошим.

Таким образом, не малая часть, а *все или, по крайней мере, подавляющая часть визуально-двойных звезд произошла путем захвата.*

### Литература

- [1] J. Chazy. *de Math.*, 8 (1929).
- [2] J. Chazy. *Bull. Astr.*, 8 (1932).
- [3] L. Becker. *Monthly Notices*, 80, No. 6 (1920).
- [4] E. Öpik. *Proc. Am. Acad. of Arts and Sci.*, 67, No. 6 (1932).
- [5] R. A. Littleton. *Monthly Notices*, 96, No. 6 (1936).
- [6] S. Chandrasekhar. *Aph. J.*, 99, No. 1 (1944).
- [7] О. Ю. Шмидт. ДАН, 44, № 1 (1944).
- [8] О. Ю. Шмидт. ДАН, 45, 245 (1944); 46, № 9 (1945); 49, 413 (1945); 52, 581 (1946); 52, 673 (1946); 52, 673 (1946); 54, 15 (1946).

---

# О возможности захвата в задаче трех тел<sup>1</sup>

Г. Ф. Хильми

1. Мы будем рассматривать задачу, известную в науке под именем проблемы трех тел, т. е. задачу о движении трех тел, которые мы будем считать материальными точками, притягивающимися по закону Ньютона. Эти точки мы обозначим через  $P_0, P_1, P_2$  их массы соответственно через  $m_0, m_1, m_2$ , а через  $r_0, r_1, r_2$  обозначим расстояния между точками  $P_1$  и  $P_2, P_0$  и  $P_2, P_0$  и  $P_1$ . Кроме того, через  $\rho$  мы обозначим расстояние точки  $P_2$  от центра тяжести точек  $P_0$  и  $P_1$ . Движения точек мы будем описывать в координатах Якоби; пусть  $x, y, z$  — координаты точки  $P_1$  относительно осей с началом в точке  $P_0$  и  $\xi, \eta, \zeta$  — координаты точки  $P_2$  относительно осей с началом в центре тяжести точек  $P_0$  и  $P_1$ . Координатные оси обеих систем предполагаются параллельными. Интеграл энергии в координатах Якоби имеет вид:

$$\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2}\mu(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = U + H,$$

где

$$m = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

$$U = \frac{m_0 m_1}{r_2} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_0}$$

и  $H$  — постоянная интеграция.

2. К числу фундаментальных задач, возникающих в проблеме трех тел, принадлежит задача о возможности и мере (вероятности) захвата. Обычное в астрономии представление о явлении захвата может быть точно выражено следующим определением.

**Определение 1.** Мы будем говорить, что имеет место явление захвата между телами  $P_0$  и  $P_1$ , если

$$r_2 \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow -\infty$$

---

<sup>1</sup> Доклады Академии наук СССР, 1948. Том LXII, № 1, стр. 39–42.

и если можно указать такой момент времени  $T^*$  и такое положительное число  $P$ , что

$$0 < r_2 < R \text{ при всех } t > T^*.$$

В результате недостаточно строгих исследований Ж. Шази в науке широко распространилось убеждение, что захват практически невозможен. Это означает следующее: если захват и возможен, то мера того множества точек, которое в фазовом пространстве системы трех тел изображает начальные состояния, приводящие к захвату, равна нулю. Несмотря на такое состояние вопроса, акад. О. Ю. Шмидт, на основании индуктивных небесно-механических и космогонических соображений, пришел к выводу, что в случаях, когда  $H > 0$ , захват возможен и имеет положительную вероятность. Не имея в своем распоряжении математического доказательства этого факта, О. Ю. Шмидт в основу своих разнообразных космогонических исследований положил смелую «рабочую гипотезу» о возможности захвата, осуществляющегося с положительной вероятностью. В 1947 г. появилась работа О. Ю. Шмидта, специально посвященная вопросу о возможности захвата, в которой пересматривается и существенно продвигается эта проблема. В этой работе доказано существование и положительная вероятность ослабленной формы захвата, однако именно той, которая имеет значение в космогонии и в статистической небесной механике. Определение захвата, рассмотренного О. Ю. Шмидтом, может быть сформулировано следующим образом.

**Определение 2.** Пусть  $R_1$  и  $R_2 < R_1$  два положительных числа, которые мы назовем параметрами захвата. Мы будем говорить, что на временном отрезке  $[t_1, t_2]$  осуществилось явление ослабленного захвата между телами  $P_0$  и  $P_1$ , если в момент времени  $t = t_1$

$$r_0 > R_1, \quad r_1 > R_1, \quad r_2 > R_1$$

и все три относительные скорости гиперболические, а в момент  $t_2$

$$r_2 < R_1, \quad \rho < R_1,$$

скорость  $P_1$  относительно  $P_0$  эллиптическая, скорость  $P_2$  относительно точки с массой, равной  $m_0 + m_1$ , помещенной в центре тяжести  $P_0$  и  $P_1$ , будет гиперболической.

Параметры захвата имеют определенный астрономический смысл:  $R_1$  — это среднее расстояние между звездами в данной достаточно



большой (в статистическом смысле) части Галактики, а  $R_2$  — это то расстояние между звездами, при котором при данном значении  $R_1$  их надлежит рассматривать как двойную систему, если их относительная скорость эллиптическая.

Возможность ослабленного захвата О. Ю. Шмидт доказал, непосредственно подобрав начальные условия, при которых он осуществляется.

О. Ю. Шмидт рассматривал движение трех тел в одной плоскости, с одинаковыми массами, равными массе Солнца, принятой за единицу. Единицей расстояния служила астрономическая единица длины, а единицей времени год, деленный на  $2\pi$ . Точка  $P_0$  бралась неподвижной, координаты  $x_1, y_1$  точки  $P_1$  и  $x_2, y_2$  точки  $P_2$  задавались относительно осей с центром в  $P_0$ . Начальные данные в момент  $t = 0$  таковы, что невозмущенной орбитой точки  $P_1$  под притяжением  $P_0$  был бы эллипс с большой полуосью, равной 200 астр. ед. и эксцентриситетом  $\frac{1}{2}$ , а невозмущенной орбитой точки  $P_2$  гипербола. В этом случае движение трех тел было изучено от момента времени  $t = -129764$  до  $t = +8000$  численным интегрированием проблемы трех тел. Предварительные вычисления были сделаны лично О. Ю. Шмидтом, а затем точные и подробные вычисления были выполнены в Геофизическом институте Академии наук СССР под руководством Н. Н. Парийского. Начальные положения и скорости тел  $P_0$  и  $P_1$ , а также их положения и скорости для крайних моментов времени сведены в табл. 1.

Таблица 1

$t$	$x_1$	$x'_1$	$y_1$	$y'_1$	$x_2$	$x'_2$	$y_2$	$y'_2$
8000	141.10	+0.08593	169.81	-0.01627	321.50	+0.05388	-8490.59	-0.9327
0	291.50	-0.01950	-49.958	-0.05608	320.00	0.000	-1200.000	-0.9549
-129764	17004	-0.1283	10975	-0.0843	-28636	0.2261	116430	-0.9053

Пользуясь данными табл. 1, легко установить, что в рассматриваемом случае осуществляется ослабленный захват. Из существования хотя бы одного примера осуществления ослабленного захвата и из общих свойств решений дифференциальных уравнений следует, как это было указано в работе О. Ю. Шмидта, что множество начальных данных, приводящих к подобному захвату, имеет положительную меру, а не меру нуль.

**3.** Решение проблемы захвата в постановке, рассмотренной О. Ю. Шмидтом, совершенно достаточно для астрономических приложе-

ний. Однако, опираясь на указанный О. Ю. Шмидтом пример движения трех тел, проблему захвата можно решить и как проблему математической небесной механики, понимая захват в обычном, более общем смысле, и таким образом построить математическую теорию захвата.

Мы будем исходить из следующих, принадлежащих автору, теорем, громоздкие и длинные доказательства которых отложим до полной публикации.

**Теорема 1.** Пусть

$$r = \min\{r_0, r_1, r_2\}, \quad r' = \min\left\{\frac{dr_0}{dt}, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}\right\},$$

$$M_1^* = \min\{m_0m_1 + m_1m_2, m_1m_2 + m_0m_2, m_0m_1 + m_0m_2\},$$

$$M_2^* = \max\left\{\frac{m_0m_1}{m_0 + m_1}, \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_0m_2}{m_0 + m_2}\right\},$$

$$M^* = \frac{M_1^*}{M_2^*}.$$

Если в некоторый момент времени  $t_1$

$$r(t_1) > 0, \quad r'(t_1) < -\sqrt{8M^*/r(t_1)},$$

то все три расстояния,  $r_0, r_1, r_2$ , неограниченно возрастают при  $r \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Если постоянная, энергия  $H > 0$ , можно указать два положительных числа  $R$  и  $\varepsilon < R$  и такой момент времени  $t_2$ , что

$$r_2(t_2) < R, \quad \rho(t_2) > 2R, \quad \rho'(t_2) > 0,$$

$$\rho'(t_2) - \frac{16M}{\rho(t_2)} > \frac{2}{\mu}H + \frac{2m(m_0 + m_1)}{\mu(R - \varepsilon)},$$

где  $M = m_0 + m_1 + m_2$ , то при всех  $t > t_0$  точка  $P_2$  монотонно удаляется в бесконечность от центра тяжести точек  $P_0$  и  $P_1$ , а взаимное расстояние точек  $P_0$  и  $P_1$  остается не превышающим  $R$ .

**Определение 3.** Мы будем говорить, что на временном отрезке  $[t_1, t_2]$  между телами  $P_0$  и  $P_1$  осуществился захват специального типа, если в момент  $t_1$  выполняются условия теоремы 1, а в момент  $t_2$  — условия теоремы 2.

Легко убедиться, что захват специального типа есть частный случай захвата в обычном смысле, т. е. в смысле определения 2.

**Теорема 3.** *При движении трех тел под влиянием взаимных притяжений захват возможен.*

Справедливость теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 2 и примера, указанного О. Ю. Шмидтом. Пользуясь приведенными выше результатами вычислений, легко убедиться, что при  $t = -129764$  выполняются условия теоремы 1, а при  $t = +8000$  — условия теоремы 2. Таким образом, при начальных условиях, предложенных О. Ю. Шмидтом, осуществляется не только ослабленный захват, но и захват специального типа, а следовательно, и обычный захват в смысле определения 2. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Мера множества  $\Omega$  тех точек в фазовом пространстве системы трех тел, которые изображают начальные состояния системы, приводящие к захвату, не может быть равной нулю.*

Мы не будем здесь излагать подробного доказательства. Основные же черты этого доказательства следующие. Рассмотрим 12-мерное евклидово пространство  $E^{12}$  с координатами  $x, y, z, x', y', z', \xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$  и будем величины  $r_2, r, r', \rho, \rho'$  рассматривать как функции этих координат. Пусть  $E$  — множество всех точек фазового пространства  $E^{12}$ , в которых  $r > 0, r' < -\sqrt{8M^*/r}$ , и  $\mathcal{E}$  — множество всех точек, в которых

$$r_2 < R, \quad \rho > 2R, \quad \rho' > 0, \\ \rho'^2 - \frac{16M}{\rho} > \frac{2}{\mu}H - \frac{2m(m_0 + m_1)}{\mu(R - \varepsilon)}.$$

Так как  $r_2, r, r', \rho, \rho'$  непрерывные функции от координат фазового пространства, то множества  $E$  и  $\mathcal{E}$  суть множества открытые.

Обозначим через  $G$  множество тех точек из  $E$ , которые, описывая свои фазовые орбиты, через некоторый промежуток времени переходят в множество  $\mathcal{E}$ . Очевидно, что каждая точка множества и соответствует начальным условиям, приводящим к захвату специального типа. В силу теоремы 3 множество  $G$  — не пустое множество. Из того, что множества  $E$  и  $\mathcal{E}$  открытые, и из общих теорем о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных параметров следует, что и множество  $G$  есть множество открытое. Но тогда

$$\text{mes } G > 0,$$

а так как  $G \subset \Omega$ , то множество  $\Omega$  не может быть множеством меры нуль.

Я пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую признательность московским ученым и моим учителям акад. О. Ю. Шмидту, чл.-корр. АН СССР В. В. Степанову, чл.-корр. АН СССР П. С. Александрову, чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботину и проф. А. А. Маркову. Своим интересом к работе и ценными советами они мне оказали неоценимую услугу.

### Литература

- [1] J. Chazy. de Math., 8 (1929).
- [2] J. Chazy. Bull. Astr., 8 (1932).
- [3] О. Ю. Шмидт. ДАН, 58, № 2 (1947).

---

# Обмен и захват в задаче трех тел<sup>1</sup>

В. М. Алексеев

1. Пусть  $P_0, P_1, P_2$  — система трех гравитирующих тел;  $m_i$  — масса тела  $P_i$ ;  $\mathbf{r}_i$  — его радиус-вектор;  $\mathbf{v}_i$  — скорость;  $\mathbf{r}_{ik} = |\mathbf{r}_{ik}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$ ;  $\mathbf{v}_{ik} = |\mathbf{v}_{ik}| = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k|$

В системе имеет место *захват*, если при  $t \rightarrow -\infty$  все  $\mathbf{r}_{ik} \rightarrow \infty$ , а при  $t \rightarrow +\infty$   $\mathbf{r}_{01} < c$ ,  $\mathbf{r}_{12}$ ,  $\mathbf{r}_{02} \rightarrow \infty$ .

В системе имеет место *обмен*, если при  $t \rightarrow +\infty$   $\mathbf{r}_{02} < c$ ,  $\mathbf{r}_{12}$ ,  $\mathbf{r}_{02} \rightarrow \infty$ , а при  $t \rightarrow -\infty$   $\mathbf{r}_{01} < c$ ,  $\mathbf{r}_{12}$ ,  $\mathbf{r}_{02} \rightarrow \infty$ .

В заметке строятся примеры обмена и захвата в случае  $m_0 \gg m_1$ ,  $m_0 \gg m_2$ . Для простоты считается  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = m$ . Результаты верны при  $a < m_1/m_2 < A$ . Доказывается, что в фазовом пространстве множества начальных данных, приводящих к захвату или обмену (как при положительной, так и при отрицательной константе энергии), имеют положительную меру. Тем самым окончательно опровергается утверждение Шази [4] о невозможности захвата и обмена. Методы, применяемые в заметке, не используют численного интегрирования, как это делал Беккер [1] для обмена и О. Ю. Шмидт [5], [3] для захвата. Использование малости  $m$  позволяет обойтись без больших скоростей, что было существенно в работе К. А. Ситникова [2]. В частности, именно это открывает возможность построения обмена при отрицательной константе энергии.

2. В дальнейшем движение рассматривается в 18-мерном фазовом пространстве  $\Phi$ . Точка  $x$  этого пространства — совокупность радиусов-векторов и скоростей

$$x = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}. \quad (1)$$

Обозначим  $S_m^t x$  точку в  $\Phi$ , в которую перейдет точка  $x$  через время  $t$  в системе, где масса малых тел равна  $m$ . При  $m \rightarrow 0$   $S_m^t$  переходит в  $S_0^t$  — идеальное движение, в котором  $P_1$  и  $P_2$  обращаются около  $P_0$

---

<sup>1</sup> Доклады Академии наук СССР, 1956. Том 108, № 4, стр. 599–602.

по законам Кеплера.  $S_0^t x$  регулярно на  $(t_1; t_2)$ , если для всех  $(t \in (t_1; t_2))$  на траектории  $S_0^t x$  все  $r_{ik} \neq 0$ . Из непрерывной зависимости решений от правых частей и начальных данных следует лемма:

**Лемма 1.** Если на интервале  $t_1 < 0 < t_2$ , конечном или бесконечном,  $S_0^t x^0$  регулярно, то  $S_0^t x^0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ m \rightarrow 0}} S_m^t x$  для всех  $(t \in (t_1; t_2))$ .

Везде в дальнейшем мы считаем центр тяжести системы неподвижным, так что в идеальной системе тело  $P_0$ , совпадающее с ним, неподвижно. Интеграл энергии системы имеет вид (гравитационная постоянная равна 1)

$$h = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{m}{r_{01}} - \frac{m}{r_{02}} - \frac{m^2}{r_{12}}. \quad (2)$$

Легко убедиться, что, если  $v_1$  и  $v_2$  ограничены, то  $v_0$  есть  $O(m)$ , а поэтому при  $m \rightarrow 0$

$$\frac{h}{m} \rightarrow \left( \frac{v_1^2}{2} - \frac{1}{r_{01}} \right) + \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{1}{r_{02}} \right) = h_1^0 + h_2^0 = h^0. \quad (3)$$

Величины  $h_i^0 = \frac{1}{2}v_i^2 - \frac{1}{r_{0i}}$ ,  $i = 1, 2$  естественно назвать относительными энергиями тел  $P_i$ . Тело  $P_i$  движется в идеальной системе относительно  $P_0$  по эллипсу, гиперболе или параболе, если  $h_i^0 < 0, > 0, = 0$ , соответственно.

Когда  $m > 0$ ,  $h_i^0$  уже не будут интегралами движения, но, тем не менее, иногда они и в этом случае определяют поведение  $r_{ik}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $S_0^t x^0$  регулярно для  $t > 0$ . Если

а)  $h_1^0(x^0) > 0, h_2^0(x^0) > 0$

или

б)  $h_1^0(x^0) > 0, h_2^0(x^0) < 0$ ,

то существуют такие  $m_0$  и  $\delta_0$ , что при  $m < m_0$  и  $|x - x_0| < \delta_0$  движение  $S_m^t x$  при  $t \rightarrow \infty$  будет гиперболическим (все  $r_{ik} \rightarrow \infty$ ) в случае а) и эллиптически-гиперболическим ( $r_{02} < c, r_{12}, r_{01} \rightarrow \infty$ ) в случае б).

Доказательство основывается на том, что в силу леммы 1 и условий а) или б) для  $m < m_0$ ,  $|x - x_0| < \delta_0$  и достаточно больших  $t$  в точке  $S_m^t x$  удовлетворяются условия леммы Г. Ф. Хильми [3] в случае а) или леммы К. А. Ситникова ([2], теорема 2) в случае б). Приводим их формулировки.

Пусть  $\sigma(t) = \min \left\{ \frac{dr_{ik}}{dt} \right\}$ ,  $\rho(t) = \min r_{ik}$ ;  $\mathbf{r}(t)$  — расстояние от  $P_2$  до центра тяжести  $P_1$  и  $P_0$ ,  $s_0 = \mathbf{r}(0)$ ;  $v_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0}$ ,  
 $M^{**} = \frac{(\sum m_i m_j)}{\min \left\{ \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right\}}$ ;  $k$  — константа тяготения.

**Лемма 2 (Хильми).** Если  $\sigma(0) > 0$ ,  $\rho(0) > \frac{M^{**}}{\sigma(0)^2}$ , то при  $t \rightarrow \infty$  все  $r_{ik} \rightarrow \infty$ .

**Лемма 3 (Ситников).** Если  $s_0 v_0^2 > 24k[m_0 + m_1 + m_2]$  и

$$\frac{16\sqrt{2}m_0 m_1 m_2 k^{3/2}}{(m_0 + m_1)^{1/2} v_0 s_0^{3/2}} + \frac{k m_0 m_1}{s_0} < \frac{k m_0 m_1}{r_{01}(0)} - \frac{m m_1 v_{01}^2(0)}{2(m_0 + m_1)},$$

то для  $t > 0$ ,  $r_{12} < s_0$ ,  $\rho > s_0 + \frac{1}{2} v_0 t^1$ .

**Следствие.** Если  $S_0^t x^0$  регулярно для всех  $t$ , то характер  $f_m^t x^0$  при достаточно малых  $t$  будет одинаков при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Поэтому захват или обмен нужно искать в окрестности траектории  $S_0^t x^0$  с точками нерегулярности.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Вопрос о возможности установить аналог теоремы 1 для случая  
 в)  $h_1^0 < 0$ ,  $h_2^0 < 0$   
 очень интересен, но значительно сложнее.

**3. Разрывным решением** идеальной системы назовем траекторию  $\hat{S}_0^t x_0$ , удовлетворяющую условиям:

- 1)  $\hat{S}_0^t x_0$  — регулярное решение идеальной системы, кроме изолированных точек  $\{t_k\}$  нерегулярности;
- 2) в точках  $t_k$

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbf{r}_0(t_k + 0) &= \mathbf{r}_0(t_k - 0); & \mathbf{v}_0(t_k + 0) &= \mathbf{v}_0(t_k - 0); \\ \text{б) } \mathbf{r}_1(t_k + 0) &= \mathbf{r}_1(t_k - 0) = \mathbf{r}_2(t_k + 0) = \mathbf{r}_2(t_k - 0); \\ \text{в) } \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|_{t_k+0} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|_{t_k-0}; \\ \text{г) } |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_{t_k+0} &= |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_{t_k-0}; \end{aligned} \tag{4}$$

<sup>1</sup>В работе Ситникова дано доказательство для  $m_0 = m_1 = m_2 = 1$ , но выкладки почти не изменяются и в общем случае.

Условие (4) — это условие непрерывности радиусов-векторов, сохранения энергии и сохранения общего импульса тел  $P_1$  и  $P_2$ .

Следующая теорема является основной в нашем методе построения примеров захвата и обмена.

**Теорема 2.** Пусть  $\hat{S}_0^t x_0$  — разрывное решение идеальной системы на интервале  $t_2 < 0 < t$ , причем  $t = 0$  — единственная точка нерегулярности и в ней не происходит тройного столкновения. Тогда существуют точки  $\{x_m\}$  такие, что

$$\lim_{m \rightarrow 0} S_m^t x_m = \hat{S}_0^t x_0 \text{ для всех } t \neq 0 \text{ из } (t_1; t_2).$$

*Доказательство.*

Положим

$$x_m = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{r} + m\rho, \mathbf{r} - m\rho, \mathbf{v}_0, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}\}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — координаты и скорость  $P_0$  при  $t = 0$ ;  $\mathbf{r}$  — точка соударения  $P_1$  и  $P_2$ ;  $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$  при  $t = 0$  в  $\hat{S}_0^t m$ ;  $\rho$  и  $\mathbf{w}$  определим позднее. Обозначим  $x_{T,m} = S_m^{Tm} x_m$ .

**Лемма 4.** Если  $|\mathbf{w}|^2 - 16\rho^{-1} > 0$ , то существуют пределы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow 0} x_{T,m} \right] &= (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{u}_\infty^+, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\infty^+) = x_+^0; \\ \text{б) } \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{12}(x_{T,m})}{|\mathbf{r}_{12}(x_{T,m})|} \right] &= \mathbf{r}_+^0; \\ \text{в) } \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow 0} \mathbf{v}_{12}(x_{T,m}) \right] &= \mathbf{u}_\infty^+ = \mathbf{u} \mathbf{r}_+^0; \\ \text{г) } \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_{12}(x_{T,m})}{m} \right] &= \infty \end{aligned} \quad (6)$$

(причем внутренний предел конечен).

Аналогичные пределы ( $x_-^0$ ,  $\mathbf{r}_-^0$ ,  $\mathbf{u}_-^0$ ) существуют при  $T \rightarrow -\infty$ .

Доказательство леммы осуществляется заменой переменных  $x = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  и  $t$  переменными  $\xi = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \rho, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  и  $\tau$ , согласно формулам  $t = m\tau$ ,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + m\rho$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - m\rho$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ . При такой замене  $S_m^t$  переходит в  $\hat{S}_m^\tau$  а точки  $x_m$  — в одну и ту же точку  $\xi$ .



Можно показать, что при  $t \rightarrow 0$ ,  $\tilde{S}_m^\tau \rightarrow \tilde{S}_0^\tau$ , где  $\tilde{S}_0^\tau$  оставляет  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}$  неизменными, а  $\rho$  и  $\mathbf{w}$  преобразует в соответствии с законами Кеплера при движении двух тел  $Q_1$  и  $Q_2$  массы  $M = 8$ , расположенных в точках  $\rho$  и  $-\rho$  и имеющих скорости  $\mathbf{w}$  и  $-\mathbf{w}$ . Так как  $\omega^2 - 16\rho^{-1} > 0$ , то движение тел  $Q_1$  и  $Q_2$  гиперболическое. При этом асимптоты гипербол имеют направления  $\mathbf{r}_+^0$  и  $\mathbf{r}_-^0$ , скорости же тел  $Q_1$  и  $Q_2$  на бесконечности равны  $\mathbf{u}_\infty^+$ ,  $-\mathbf{u}_\infty^+$  для  $\tau \rightarrow +\infty$  и  $\mathbf{u}_\infty^-$ ,  $-\mathbf{u}_\infty^-$  для  $\tau \rightarrow -\infty$ .

Выберем теперь  $\rho$  и  $\mathbf{w}$  в (5) так, чтобы  $\mathbf{u}_\infty^+ = \mathbf{v}_{12} + 0$ ,  $\mathbf{u}_\infty^- = \mathbf{v}_{12} - 0$ , т. е. чтобы  $x_+^0 = \lim_{t \rightarrow +0} \hat{S}_0^t x_0$ ,  $x_-^0 = \lim_{t \rightarrow -0} \hat{S}_0^t x_0$ . В силу теории задачи двух тел это всегда возможно.

**Лемма 5.** Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $T_0$  и  $\tau$ , что для всех  $T > T_0$  и  $t < t_0(T)$  для  $t \in [Tm; \tau]$   $|S_m^t x_m - S_0^t x_0^+| < \varepsilon$ .

Для доказательства этой леммы сначала устанавливается при помощи леммы 4, что для  $T > T_1$  и  $t < t_1(Tm)$  и  $T < t < \tau$   $\frac{dr_{12}(S_m^t x_m)}{dt} > V > 0$ . После этого применением оценок зависимости решения от правых частей и начальных данных доказывается утверждение леммы. Теорема 2 легко следует из лемм 1 и 5.

**Следствие.** Пусть мы построили разрывное решение  $\hat{S}_0^t x$  с обменом или захватом, удовлетворяющее условиям теоремы 2. По доказанному  $S_m^t x_m \rightarrow \hat{S}_0^t x$ . В силу теоремы 1 при достаточно малом  $t$  и на траектории  $S_m^t x_m$  мы получим обмен или захват. Но если на  $S_m^t x_m$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$  выполняются условия лемм 2 или 3, то, оставляя  $t$  фиксированным и мало изменяя начальные данные, мы не нарушим этих условий. Значит, обмен и захват будут иметь место на множестве положительной меры — целой окрестности точки  $x_m$ . Таким образом, нам остается построить  $\hat{S}_0^t x$  с обменом или захватом.

**4.** Построение  $\hat{S}_0^t x$ . Зададим произвольно  $\mathbf{r}_0$  — положение  $P_0$  и  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  — точку соударения  $P_1$  и  $P_2$ ;  $P_0$  будем считать неподвижным:  $\mathbf{v}_0 = 0$ . Обозначим  $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)|_{t=0}$ ,  $\mathbf{u}_i^+ = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}|_{t=+0}$ ,  $\mathbf{u}_i^- = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}|_{t=-0}$ . По условию (4)  $|\mathbf{u}_i^\pm| = u = |\mathbf{v}_{12}|$ . Пусть  $c_0 = 2^{1/2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1/2}$  — параболическая скорость в точке  $\mathbf{r}$  относительно  $\mathbf{r}_0$ . Так как  $h_i = \frac{1}{2}[u_i^2 - 2/r_{i0}] = \frac{1}{2}[v_i^2 - c_0^2]$ , то мы будем иметь дело с захватом, если

$$|v_1^+| > c_0, \quad |v_2^+| < c_0, \quad |v_1^-| > c_0, \quad |v_2^-| > c_0, \quad (7)$$

и с обменом, если

$$|v_1^-| < c_0, \quad |v_2^-| > c_0, \quad |v_1^+| > c_0, \quad |v_2^+| < c_0. \quad (8)$$

Построим диаграмму скоростей. Опишем сферы радиуса  $c_0$  с центром в начале координат и радиуса  $u$  с центром в конце вектора  $v$ . Поскольку  $u_1^+ + u_2^+ = 0 = u_1^- + u_2^-$  и  $v_i^\pm = u_i^\pm + v$ , то концы векторов  $v_i^+$  — это концы любого диаметра сферы радиуса  $u$ , а концы векторов  $v_i^-$  — концы любого другого ее диаметра.

Чтобы можно было выбрать  $v_i^+$  в соответствии с (7) или (8), нужно лишь, чтобы для обмена эти две сферы пересекались и чтобы для захвата у сферы радиуса  $u$  был диаметр, концы которого лежат вне сферы радиуса  $c_0$ . Легко также сосчитать, что  $h^0 = h_1^0 + h_2^0 = u^2 + v^2 - c_0^2$ . Поэтому для обмена необходимо  $h^0 > -1/4 c_0^2$ , а для захвата  $h^0 > 0$ . Легко проверить, что для построения диаграмм с захватом или обменом эти условия и достаточны.

Для возможности применения теоремы 2 нужно еще, чтобы  $t = 0$  была единственной точкой нерегулярности. Сколь угодно малым изменением диаграмм и точек  $r_0$  и  $r$  этого всегда можно добиться. Таким образом, искомое  $\hat{S}_0^t x$  построить можно, что и завершает построение примеров захвата и обмена.

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить А. Н. Колмогорова, под руководством которого написана эта работа.

## Литература

- [1] L. Becker. *Monthly Notices*, 80, No. 6, 590 (1920).
- [2] К. А. Ситников. *Математический сборник*. 32 (74): 3, 693 (1953).
- [3] Г. Ф. Хильми. *Проблема  $n$  тел в небесной механике*. Изд. АН СССР, 1951. С. 75.
- [4] М. J. Chazy. *J. Math. pure et appl.*, 8 (1929); *Bull. Astr.*, 8, 403 (1932).
- [5] О. Ю. Шмидт. ДАН, 58, № 2, 213 (1947).

---

# Существование осциллирующих движений в задаче трех тел<sup>1</sup>

К. Ситников

В этой работе строится система трех тел, движущихся под действием сил взаимного ньютоновского тяготения, в которой имеет место явление *осцилляции*, т. е. при  $t \rightarrow \infty$  расстояние между телами (1) и (2) ограничено, а расстояния между каждым из них и телом (3) не ограничено и не стремятся к бесконечности. Этот вопрос был поставлен теоремами Лагранжа и Пуассона об инвариантности больших осей в надлежащих приближениях [1, 2]. Вначале мы построим такую систему в ограниченной задаче трех тел, когда тело (3) имеет бесконечно малую массу, а затем перейдем к конечной произвольно малой массе тела (3).

Пусть имеется в пространстве инерциальная прямоугольная система координат  $OXYZ$ . Возьмем систему двух тел (1) и (2) одинаковой произвольной массы  $M$ , центр тяжести которых все время находится в начале координат  $O$  и которые движутся под действием сил взаимного тяготения по эллипсам, лежащим в плоскости  $OXY$ , большие оси и эксцентриситеты которых равны произвольным  $R$  и  $e \neq 0$ . Состояние этой системы определяется углом  $\varphi$ , образуемым радиусом-вектором  $r$  тела (1) с осью  $X$ . Определим теперь систему трех тел (1), (2) и (3), зависящую от двух параметров  $\varphi(0)$  и  $v(0)$ , следующим образом: зададим при  $t = 0$  угол  $\varphi(0)$  и координаты тела (3) бесконечно малой массы равными  $0, 0, 0$ , а компоненты его скорости равными  $0, 0, v(0)^2$ . Мы докажем, что для каждого значения  $\varphi(0)$  и любой последовательности чисел  $\{S_k\}$  (в частности, для любой последовательности, стремящейся к бесконечности) существует такое значение  $v(0)$ , что в системе  $\varphi(0), v(0)$  при  $t > 0$  тело (3) бесконечное число раз проходит через

---

<sup>1</sup> Доклады Академии наук СССР, 1960. Том 133, № 2, стр. 303–306.

<sup>2</sup> Системы с такого рода симметрией относительно оси  $Z$  рассматривались А. Н. Колмогоровым.

точку  $O$ , удаляясь от нее после  $k$ -го прохождения на расстояние, большее  $S_k$ .

Легко видеть, что тело (3) при всех  $t$  находится на оси  $Z$ . Далее, для любого  $\varphi(0)$  существует минимальное  $v_\varphi(0)$ , при котором координата  $z(t)$  тела (3) при  $t > 0$  монотонно возрастает до плюс бесконечности.

**Лемма 1.** *Для любых  $\varphi(0)$  и  $t > 0$  существует такое положительное  $v(0) < v_\varphi(0)$ , при котором тело (3) первый раз возвратится в точку  $O$  в момент времени  $t$ .*

Вначале мы докажем, что если  $v(0) < v_\varphi(0)$  достаточно близко к  $v_\varphi(0)$ , то время первого возвращения будет сколь угодно большим. Действительно, если  $v(0) < v_\varphi(0)$  достаточно близко к  $v_\varphi(0)$ , то, на основании непрерывной зависимости решения уравнения движения тела (3) от начальных условий, максимальное удаление  $\sigma$  тела (3) от точки  $O$  будет сколь угодно большим. При движении «вверх» во всех точках отрезка  $[0, \sigma]$ , величина скорости тела (3) меньше  $v(0)$ , и поэтому время первого возвращения стремится к бесконечности вместе с  $\sigma$ .

Возьмем теперь такое  $v_1(0)$ , при котором время первого возвращения  $t' > t$ . При изменении начальной скорости тела (3) от 0 до  $v_1(0)$  время его первого возвращения в точку  $O$  будет непрерывно изменяться от 0 до  $t'$ , и утверждение леммы следует из того, что непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения.

**Лемма 2.** *Существует такое число  $S$  (зависящее от  $R$  и  $e \neq 0$ ), что: если в системе  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$  в момент времени  $t_1 < 0$  тела (1) и (2) находятся на минимальном расстоянии, а в момент  $t_2 > 0$  — на максимальном; если  $t_2$  — ближайший к  $t_1$  из больших моментов, обладающих этим свойством; если отрезок  $z(t_1)$ ,  $z(t_2)$  делится точкой  $O$  пополам и если при убывании времени от 0 координата  $z(t)$  монотонно возрастает больше, чем до  $S$ , то при возрастании времени от 0 координата  $z(t)$  монотонно убывает до минус бесконечности.*

Вначале мы докажем, что если условия леммы выполнены с достаточно большим  $S$ , то  $z(t_1) = |z(t_2)| > R\sqrt{3/2}$ . Действительно, ускорение, испытываемое телом (3) в точке  $z$  в момент времени  $t$ , равно  $\frac{2Mz}{[z^2 + r^2(t)]^{3/2}}$ , больше по абсолютной величине, чем  $\frac{2M}{z^2\sqrt{6}}$  при  $z > R\sqrt{3/2} > r(t)\sqrt{3/2}$ . Поэтому величина скорости тела (3) в точке  $z = R\sqrt{3/2}$  при достаточно большом  $S$  больше  $\sqrt{4M/3R}$ . Так как во всех точках отрезка  $-R\sqrt{3/2}$ ,  $R\sqrt{3/2}$  скорость тела (3) больше, чем в его

конце  $R\sqrt{3/2}$  то время его прохождения меньше  $R\sqrt{\frac{R}{M}}\frac{3}{\sqrt{2}}$ . Это время меньше полупериода  $T/2 = t_2 - t_1$  обращения тел (1) и (2) по эллипсам, равного, как известно,  $\frac{\pi R}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R}{M}}$ , и поэтому  $z(t_1) = z(t_2) > R\sqrt{3/2}$ .

В каждой точке  $z$  отрезка  $0, z(t_1)$  ускорение тела (3) будет по абсолютной величине больше его ускорения в точке  $-z$ , так как в первом случае тела (1) и (2) находятся на меньшем расстоянии, чем во втором. Отсюда следует, что  $|v(t_2)| - |v(t_1)| > \alpha$ . Будем сравнивать при каждом  $t_1 - t, t > 0$ , ускорение  $a(t)$  тела (3), находящегося в точке  $z(t_1 - t)$ , с ускорением  $a^*(t)$ , создаваемым телами (1) и (2) в момент времени  $t_2 + t$  в симметричной относительно плоскости  $OXY$  точке  $-z(t_1 - t)$ . Докажем, что

$$W(t) = \int_0^t |a(t')| dt' > \int_0^t a^*(t') dt' = W^*(t),$$

$$\int_0^t |W(t')| dt' > \int_0^t W^*(t') dt'$$
(1)

при  $t$ , до которого  $z(t_2 - t)$  монотонно возрастает, а первое неравенство, кроме того, при  $t = nT$ , где  $n$  — целое число. Разность  $\varphi(t) = |a(t)| - a^*(t)$ , равная

$$\frac{2Mz(t_1 - t)}{z^2(t_1 - t) + r^2(t_1 - t)^{3/2}} - \frac{2Mz(t_1 - t)}{z^2(t_1 - t) + r^2(t_2 + t)^{3/2}},$$

будет при  $0 < t < T/4$  положительна, так как при этих  $t$   $r(t_1 - t) < r(t_2 + t)$ , при  $T/4 < t < T/2$  отрицательна, при  $T/2 < t < 3T/4$  отрицательна и при  $3T/4 < t < T$  положительна. Для каждого  $\tau_1, 0 < \tau_1 < T/4$  соответствующая ему пара радиусов-векторов  $r_1(t_1 - \tau_1)$  и  $r_2(t_2 + \tau_1)$  встречается по одному разу в каждой из других частей в моменты времени  $\tau_2 = T/2 = \tau_1, \tau_3 = T/2 + \tau_1, \tau_4 = T - \tau_1$ , при этом  $\tau_2 - \tau_1 = \tau_4 - \tau_3$ . Координаты тела (3) в эти моменты равны  $z_1, z_2, z_3, z_4$ .

Рассмотрим значения  $|\varphi(\tau_k)| = f(z_k), k = 1, 2, 3, 4$ , где  $f(z) = \frac{2Mz}{[z^2 + r_1^2]^{3/2}} - \frac{2Mz}{[z^2 + r_2^2]^{3/2}}$ . Так как  $R\sqrt{3/2} < z_1 < z_2 < z_3 < z_4, z_2 - z_1 > z_4 - z_3$  и при  $z > R\sqrt{3/2}$   $f'(z) < 0, f''(z) > 0$ , то  $\varphi(\tau_1) > |\varphi(\tau_2)| > |\varphi(\tau_3)| > \varphi(\tau_4)$  и  $\varphi(\tau_1) - |\varphi(\tau_2)| > |\varphi(\tau_3)| - \varphi(\tau_4)$ .

Из этих свойств  $\varphi(t)$ , имеющих место и для следующих периодов, вытекают неравенства (1). Из этих неравенств следует, что  $z(t_1 - t) < |z(t_2 + t)|$  при  $t$ , до которых  $z(t_1 - t)$  монотонно возрастает. Допустим противное, и пусть  $\tau$  — первое значение  $t > 0$ , для которого  $z(t_1 - \tau) = |z(t_2 + \tau)|$ . Для каждого  $t < \tau$  ускорение тела (3) при  $t_2 + t$  меньше  $a^*(t)$ , так как  $z(t_2 + t) < -z(t_1 - t)$  и функция  $\frac{2Mz}{[z^2 + r^2(t_2 + t)]^{3/2}}$

убывает при  $z > R\sqrt{3/2} > r(t)\sqrt{3/2}$ . Но даже если бы тело (3) имело большее ускорение, равное  $a^*(t)$ , то, в силу неравенств (1) и в силу того, что  $|v(t_2)| - |v(t_1)| > \alpha$ , равенство  $z(t_1 - \tau) = |z(t_2 + \tau)|$  не могло бы иметь места.

Из неравенств (1) следует, что при возрастании времени тело (3) во всех достаточно далеких точках будет иметь скорость, меньшую  $-\alpha$ , а потому, если  $S$  больше также  $4/\alpha^2$ , то  $z(t)$  монотонно убывает до минус бесконечности. Лемма 2 доказана.

*Существование осцилляции.* Итак, для заданных  $\varphi(0)$  и  $\{S_k\}$  требуется найти  $v(0)$ . Возьмем  $v_\varphi(0) > 0$  и интервал  $O_1$ , имеющий своим правым концом значение  $v_\varphi$ , настолько малый, чтобы при каждом  $v(0)$ , принадлежащем  $O_1$ , тело (3) монотонно удалялось от точки  $O$  на расстояние, большее  $S$  (см. лемму 2).

Возьмем моменты времени  $t_n$  и  $t_n + T/2$ , при которых тела (1) и (2) находятся на минимальном и максимальном расстояниях, настолько большими, чтобы найденные для них по лемме 1 значения  $v_n(0)$  и  $v'_n(0)$  принадлежали  $O_1$ . В системе  $\varphi(0)$ ,  $v_n(0)$  отрезок, пройденный телом (3) за время от  $t_n$  до  $t_n + T/2$ , лежит ниже точки  $O$ , а в системе  $\varphi(0)$ ,  $v'_n(0)$  выше, а так как его положение и длина изменяются непрерывно при изменении  $v(0)$ , то найдется такое  $v''(0)$ , лежащее между  $v_n(0)$  и  $v'_n(0)$ , что в системе  $\varphi(0)$ ,  $v''(0)$  этот отрезок будет делиться точкой  $O$  пополам. Следовательно, по лемме 2, в системе  $\varphi(0)$ ,  $v''(0)$  тело (3) после первого возвращения в точку  $O$  монотонно уходит в минус бесконечность. В системе  $\varphi(0)$ ,  $v_n(0)$  положения тела (3) в моменты времени  $t_n + t$  и  $t_n - t$  будут симметричны относительно плоскости  $OXY$ , и поэтому после первого возвращения в точку  $O$  тело (3) будет «опускаться» лишь до конечной высоты, равной высоте первого «подъема».

Изменяя  $v(0)$  от  $v_n(0)$  до  $v''(0)$ , возьмем первое ее значение  $v_2(0)$ , при котором тело (3) после первого возвращения в точку  $O$  монотонно уходит в минус бесконечность, и возьмем настолько малый интервал  $O_2$ , имеющий своим концом  $v_2(0)$ , чтобы при каждом  $v_2(0)$ , принад-

лежащем  $O_2$ , тело (3) после первого возвращения в точку  $O$  удалялось от нее лишь на конечное расстояние, но большее  $S$  и  $S_1$  из  $\{S_k\}$ .

Аналогичным образом в  $O_2$  находим такое  $v_3(0)$ , что при значении  $v(0)$ , равном  $v_3(0)$ , тело (3) после второго возвращения в точку  $O$  монотонно уходит в плюс бесконечность, и такой интервал  $O_3$ , имеющий своим концом  $v_3(0)$ , что при значениях  $v(0)$ , принадлежащих  $O_3$ , тело (3) после второго возвращения в точку  $O$  удаляется от нее на конечное расстояние, большее  $S_2$  и  $S$ . При этом  $\overline{O_3} \subset O_2$ , т. е.  $O_3$  вместе со своими концами содержится в  $O_2$ .

Продолжая этот процесс дальше, мы получим убывающую последовательность интервалов  $O_k$ ,  $\overline{O_{k+1}} \subset O_k$ , причем  $O_{k+1}$  обладает тем свойством, что при значениях  $v(0)$ , принадлежащих  $O_{k+1}$  тело (3)  $k$  раз возвращается в точку  $O$ , после чего удаляется от нее лишь на конечное расстояние, но большее  $S_k$ , а при значении  $v(0)$ , равном одному из концов  $O_k$ , тело (3) после  $k$ -го возвращения уходит в бесконечность. Отсюда следует, что существует  $v(0)$ , принадлежащее всем  $O_k$ , которое и будет искомым, т. е. в системе  $v(0)$ ,  $\varphi(0)$  тело (3) будет совершать осцилляции, если  $S_k \rightarrow \infty$ .

*Случай конечной массы тела (3).* Зададим при  $t = 0$  положения и скорости тел (1), (2), (3) в инерциальной системе координат  $OXYZ$  такими же, как и в системе  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$ ; массы тел (1) и (2) по-прежнему равны  $M$ , а масса тела (3) равна  $m$ . Получаем систему, зависящую от трех параметров  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$  и  $m$ . Мы докажем, что существует такое  $\alpha$ , что для любых  $\varphi(0)$ ,  $m < \alpha$  и  $\{S_k\}$  существует такое  $v(0)$ , что в системе  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$ ,  $m$  при  $t > 0$  тело (3) бесконечное число раз проходит через центр тяжести  $O'$  тел (1) и (2), удаляясь от него после  $k$ -го прохождения на расстояние, большее  $S_k$ , а расстояние тел (1) и (2) всегда меньше  $2R$ .

**Лемма 3.** *Для любых  $\delta > 0$  и  $T' > 0$  существует такое  $\alpha' > 0$ , что в любой системе  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$ ,  $m$  при  $m < \alpha'$  для любого значения времени  $\tau_0$  движение тел (1) и (2) при  $\tau_0 < t < \tau_0 + T'$  отличается меньше чем на  $\delta$  от движения тел (1) и (2) по некоторым эллипсам с параметрами  $R$  и  $e$  (равными параметрам «основных» эллипсов) только под действием сил взаимного тяготения (без влияния тела (3)).*

Все время  $t > 0$  разбиваем на интервалы произвольной длины  $T^*$  и на каждом из них аппроксимируем движения тел (1) и (2) в системе  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$ ,  $m$  эллиптическими движениями. Выбираем моменты времени  $t_n$ , при которых расстояния тел (1) и (2) минимальны и мак-

симальны в этих аппроксимациях. При этом если  $m$  достаточно мало, то при любых  $\varphi(0)$  и  $v(0)$  имеем в силу леммы 3:  $t_n = t_0 + nT/2 + \theta\varepsilon$ , где  $n$  пробегает все целые числа,  $|\theta| < 1$  и  $\varepsilon$  сколь угодно мало.

Схема построения примера осцилляции остается такой же, как в ограниченной задаче. В системе  $\varphi(0)$ ,  $0$ ,  $m$  выбираем достаточно большие  $t_n$  и  $t'_n = t_n + T/2 + \varepsilon$ . При возрастании  $v(0)$  от 0 время возвращения тела (3) в точку  $O'$  будет расти до бесконечности, а времена  $t_n$  и  $t'_n$  этих выбранных минимума и максимума изменяются в ограниченных пределах разрывным образом, но величины их скачков сколь угодно малы, если  $m$  достаточно мало. Поэтому существуют такие  $v_n(0)$  и  $v'_n(0)$ , при которых времена возвращений будут сколь угодно мало отличаться от соответствующих  $t_n$  и  $t'_n$ . Построение продолжается дальше, причем лемма 2 для системы  $\varphi(0)$ ,  $v(0)$ ,  $m$ , от в предположении, что  $m$  достаточно мало, сохраняет свою силу.

## Литература

- [1] J. Chazy. *Math. pure et appl.*, 8, 354 (1929).
- [2] H. Poincaré. *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. 3, Paris, 1899. P. 141.



---

# Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика<sup>1</sup>

В. М. Алексеев

**1. Введение.** «Задача трех тел» — одна из наиболее известных в математике, механике и астрономии. Годом ее рождения следует считать 1687 — дату выхода в свет ньютоновских «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*». С тех пор уже почти 300 лет эта задача служит пробным камнем, на котором поколения математиков испытывают новые методы исследования. Оценивая роль, которую эта задача сыграла в истории математики, следует помнить, что именно она вместе с другими задачами небесной механики явилась отправной точкой в развитии многих идей как теории дифференциальных уравнений, так и смежных областей.

Среди работ, затерянных в безбрежном океане статей и монографий, посвященных задаче трех тел, многие результаты и поныне не утратили своего значения. XVIII в. оставил нам частные решения Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, теорию возмущений и метод «вариации постоянных». XIX столетию принадлежит великое открытие «на кончике пера», сделанное У. Леверрье и Дж. Адамсом. Идея представления решений в виде степенных и тригонометрических рядов также в духе того столетия; для вычисления орбит небесных тел астрономы до сих пор нередко используют методы, восходящие к исследованиям того времени. Итог исследования XIX в. подвели «Новые методы небесной механики» Л. Пуанкаре и знаменитая теорема К. Зундмана об аналитической регуляризации любого решения задачи трех тел с ненулевым значением момента количества движения.

В XX в. характерен интерес к качественным проблемам. Постановки большинства тех из них, которые относятся к небесной механике и качественной теории дифференциальных уравнений, можно найти

---

<sup>1</sup>Успехи математических наук. 1981, июль–август. Том 36, вып. 4, стр. 161–175. Расширенное изложение обзорных докладов в Московском математическом обществе 8 апреля 1968 г. и на Международном конгрессе математиков в Ницце (1970 г.)

уже у Пуанкаре [1]<sup>1</sup>. Задачей трех тел стимулированы многие разделы знаменитой книги Дж. Биркгофа [3]; лекции К. Л. Зигеля [4], [5] почти целиком посвящены математическим проблемам, по преимуществу качественным, возникающим в небесной механике.

А. Уинтнер заметил однажды [6], что каждое поколение по-своему формулирует «основные проблемы в задаче трех тел» и по-своему их решает. Следуя Дж. Биркгофу [3], я считаю, что с чисто математической точки зрения сейчас такой основной проблемой является *топологическое описание разбиения фазового пространства на траектории*. Это описание должно включать *классификацию различных типов движения, классификацию и изучение инвариантных интегральных многообразий, исследование эволюции системы* и т. п.

Важные прикладные задачи, которые возникают в космической навигации, обычно не укладываются в рамки классической задачи трех тел и рассматриваться далее не будут.

Сформулированная выше проблема, по-видимому, еще далека от исчерпывающего разрешения, и потому мы ограничимся лишь ее более частным и грубым аспектом, а именно *финальными движениями*, т. е. поведением решений при  $t \rightarrow \infty$ .

Начало исследований в этом направлении было положено мемуарами Ж. Шази [7]–[9]<sup>2</sup>. В [7] описаны все возможные односторонние (т. е. относящиеся только к  $t \rightarrow +\infty$  или только к  $t \rightarrow -\infty$ ) типы финальных движений. Как с математической, так и с космогонической точки зрения весьма интересно описать возможные типы *эволюции* системы, т. е. дать ответ на вопрос, в каких комбинациях могут сочетаться типы поведения при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Обзору достигнутых в этом направлении результатов посвящена первая половина этой статьи. Во второй половине я остановлюсь на методах, при помощи которых эти результаты были достигнуты.

Я хотел бы отметить, что А. Н. Колмогоров в 1954 г. привлек впервые мое внимание к обсуждаемым проблемам. С тех пор его дружеское внимание и ценные советы неоднократно помогали мне в моих исследованиях.

<sup>1</sup> Пользуюсь случаем отметить с удовлетворением появление русского перевода [2] этого неувядаемого труда великого французского математика.

<sup>2</sup> Желая отдать дань уважения выдающемуся французскому математику и астроному, работы которого стимулировали многое из того, что будет изложено, а также с целью подчеркнуть преемственность поколений математиков, я дал своему докладу [10] названия двух его мемуаров.

## Результаты

**2. Классификация финальных движений по Шази.** Как хорошо известно, задача трех тел состоит в изучении движения тел (материальных точек  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )) под действием ньютоновских сил взаимного притяжения. Через  $m_i$ , обозначается далее масса тела  $p_i$ ,  $r_1$  обозначает расстояние между  $p_2$  и  $p_3$ ,  $r_2$  и  $r_3$  определяются аналогично.

В этой задаче  $3 \times 3 = 9$  степеней свободы, и потому фазовое пространство 18-мерно. Выбором инерциальной системы можно добиться того, чтобы общий центр масс покоился в начале координат, что позволяет редуцировать задачу к 6 степеням свободы и 12-мерному фазовому пространству  $M^{12}$ . После этого задача все еще имеет 4 алгебраических первых интеграла, что позволяет уменьшить размерность до 8 (см., например, [11]). Нам будет, однако, удобнее остановиться на рассмотрении  $M^{12}$ , расслоенного на изоэнергетические гиперповерхности  $\mathcal{H} = h = \text{const}$ . Более мелкое расслоение, связанное с интегралами площадей, изучается в [12] и [13].

Согласно Шази [7],  $M^{12}$  разбивается на следующие подмножества:

- 1) *H*. Гиперболические движения.
- 2) *HP<sub>i</sub>*. Гиперболо-параболические движения.
- 3) *P*. Параболические движения.

Здесь при  $t \rightarrow \infty$   $r_j \rightarrow \infty$  и  $\frac{1}{t}r_j \rightarrow C_j$ . Все  $C_j > 0$  для *H* и  $C_j = 0$  для *P*.

В случае *HP<sub>i</sub>*  $C_i = 0$  и  $C_j > 0$  при  $j \neq i$ .

- 4) *HE<sub>i</sub>*. Гиперболо-эллиптические движения.
- 5) *PE<sub>i</sub>*. Параболо-эллиптические движения.

Здесь  $\sup_{t>0} \{r_i\} < \infty$  и  $r_j \rightarrow \infty, \frac{1}{t}r_j \rightarrow C_j$  для  $j \neq i$ ;  $C_j > 0$  для *HE<sub>i</sub>*,  $C_j = 0$  для *PE<sub>i</sub>*.

- 6) *B*. Ограниченные движения<sup>1</sup>.

$$\sup_{i;t>0} \{r_i\} < \infty.$$

<sup>1</sup>Отклонившись от терминологии Шази, я не вполне удачно назвал эти движения в [10] «устойчивыми по Лагранжу». В фазовом пространстве соответствующие решения могут оказаться неограниченными, при регуляризации парного столкновения по Зундману скорости продолжают черед бесконечность.

7) *OS. Осциллирующие движения.*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_i \{r_i\} = \infty, \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_i \{r_i\} < \infty.$$

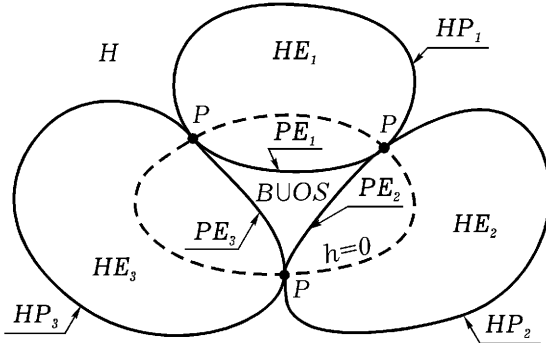


Рис. 1

Взаимное расположение этих подмножеств изображено на рис. 1.  $H$  и  $HP_i$  лежат в области, где константа энергии  $h > 0$ ,  $P$  — на гиперповерхности  $h = 0$ ,  $B$ ,  $PE_i$  и  $OS$  — в области  $h < 0$ ; движения  $HE_i$  возможны при любом знаке  $h$ . Каждое из множеств  $H$  и  $HE_i$  открыто в  $M^{12}$ ,  $HP_i$  образуют аналитические подмногообразия коразмерности 1;  $P$  состоит из трех подмногообразий коразмерности 2 (изображенных точками на рис. 1) и одного коразмерности 3 (которое на рис. 1 не показано); топологическая структура остальных классов изучена плохо.

Класс  $OS$  был введен Шази из чисто логических соображений, и долгое время было неизвестно, существуют ли такие движения. Наконец в 1959 г. К. А. Ситников [14] доказал, что  $OS \neq \emptyset$ . Существование движений остальных типов было Шази уже известно. В дальнейшем мы ограничимся лишь основными типами  $H$ ,  $HE_i$ ,  $B$ ,  $OS$ , поскольку остальные заведомо имеют положительную коразмерность. Чтобы различать типы, относящиеся к  $t \rightarrow \pm\infty$ , будем использовать соответствующие индексы:  $H^+$ ,  $B^-$  и т. д.

Хорошо известно [11], что в  $M^{12}$  не существует алгебраических первых интегралов, отличных от 4 классических (Брунс) или даже однозначных аналитических, аналитически зависящих от  $m_i$  (Пуанкаре).

**Гипотеза.** В области  $H \cup \cup_i HP_i \cup HE_i$  существует полный набор однозначных аналитических первых интегралов.

Таблица 1

$h > 0$		$t \rightarrow +\infty$	
		$H^+$	$HE_i^+$
$t \rightarrow -\infty$	$H^-$	Ж. Лагранж. 1772 (отдельные примеры); Ж. Шази, 1922 Мера $> 0$	<b>ЧАСТИЧНЫЙ ЗАХВАТ</b> Мера $> 0$ О. Ю. Шмидт (численный пример), 1947 К. А. Ситников (качеств. методы), 1953
	$HE_j^-$	<b>ПОЛНЫЙ РАСПАД</b> Мера $> 0$	$i = j$ Мера $> 0$ Дж. Биркгоф, 1927  $i \neq j$ <b>ОБМЕН</b> , Мера $> 0$ Л. Беккер (численные примеры), 1920 В. М. Алексеев (качеств. методы), 1956

Аргументы в пользу этой гипотезы содержатся в [7] и [9].

Область  $H \cup \cup_i HE_i \cup \cup_i HP_i$  оказывается весьма «разветвленной». Это связано с расположением в  $M^{12}$  множества  $\tilde{\Sigma}$  тех траекторий, на которых встречаются точки парных столкновений. Остается нерешенной **ПРОБЛЕМА** ([4]). Не является ли  $\tilde{\Sigma}$  всюду плотным на некотором открытом в  $M^{12}$  подмножестве?

Недавно Ю. Мозер предложил красивую интерпретацию зундмановской регуляризации парного столкновения в терминах геодезического потока на сфере ([15], [16]).

**3. Эволюция системы; область  $h > 0$**  (табл. 1). В мемуарах [8], [9] сформулировано утверждение о совпадении финальных типов одного и того же движения при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ , и довольно долго математический и особенно астрономический мир был убежден, что такая замечательная симметрия действительно имеет место. Некоторый диссонанс вносили лишь примеры Беккера [17], которые явно принадлежали  $HE_1^- \cap HE_2^+$ . Однако Шази приписал это ошибкам численного интегрирования и невозможности проверить поведение решений на всей бесконечной оси времени.

В 1947 г. выводы Шази были поставлены под сомнение О. Ю. Шмидтом. Его космогоническая гипотеза, основанная на чисто гравитационном захвате, противоречила (по крайней мере, для задачи трех тел) симметричной картине Шази. Чтобы подкрепить свою гипотезу, Шмидт построил [18] численным интегрированием пример *частичного*

*захвата* ( $H^- \cap HE^+$ ). В этом примере из трех независимых в прошлом звезд образуется устойчивая подсистема (двойная звезда), в то время как третья звезда снова уходит в бесконечность. Основанный на численном интегрировании пример Шмидта был уязвим для критики с тех же позиций, что и примеры [17]. Одно из выдвигавшихся возражений было преодолено Г. Ф. Хильми [19]. Ему удалось описать системами неравенств открытые подмножества в  $H$  и  $HE_i$  («критерии гиперболического и гиперболо-эллиптического движения»). Проверять эти неравенства на концах промежутка интегрирования, можно сделать выводы о поведении решения на всей оси времени.

Однако ошибки численного интегрирования оценить точно чрезвычайно трудно. Лишь построенный в 1953 г. К. А. Ситниковым [20] чисто качественными методами пример явился первым аккуратным доказательством возможности *частичного захвата*  $H^- \cap HE^+$ , а по симметрии и *полного распада*  $HE^- \cap H^+$ .

Пример Шмидта вызвал к жизни длинный ряд исследований, посвященных как критическому разбору работ Шази, так и всей проблеме финальных движений. Современное состояние этой проблемы вкратце отражено в таблицах 1 и 2. Каждая клетка отвечает одной из логически возможных комбинаций финальных движений в прошлом и будущем и описывает тем самым некоторый тип эволюции системы. Приведены авторы и даты работ, в которых были найдены соответствующие типы. Указана также и лебегова мера соответствующего множества в  $M^{12}$ . Следует иметь в виду, что из-за симметрии времени каждое исследование, относящееся к одной из клеток, в равной мере относится и к симметричной относительно главной диагонали клетке.

В случае  $h > 0$  (табл. 1) оказались осуществимыми все 5 логически возможных типов эволюции. Поскольку множества  $H$  и  $HE_i$  открыты, это автоматически обеспечивает положительную вероятность (мера  $> 0$ ) каждого типа.

**4. Эволюция системы; случай  $h < 0$**  (табл. 2). В области  $h < 0$  ситуация значительно сложнее, чем для  $h > 0$ . Прежде всего множества  $PE_i^\pm$  если и являются подмногообразиями коразмерности 1, то заведомо плохо вложенными в  $M^{12}$ . Неясно, являются ли они аналитическими. Автор придерживается следующей гипотезы, восходящей к А. Н. Колмогорову.

Таблица 2

$h < 0$		$t \rightarrow +\infty$		
		$HE_i^+$	$B^+$	$OS^+$
$t \rightarrow -\infty$	$HE_j^-$	$i = j$ Мера $> 0$ Дж. Биркгоф, 1927	ПОЛНЫЙ ЗАХВАТ  Мера $> 0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954; Дж. Литтлвуд, 1952; В. М. Алексеев, 1968, $\neq \emptyset$	Мера $> 0$ Ж. Шази, 1929 и Г. А. Мерман, 1954 В. М. Алексеев, 1968, $\neq \emptyset$
		ОБМЕН $i \neq j$ Мера $> 0$ Л. Беккер, 1920 (численные примеры) В. М. Алексеев, 1956 (качеств. методы)		
	$B^-$	ЧАСТИЧНЫЙ РАСПАД $\neq \emptyset$ Мера=0	Л. Эйлер, 1772 Ж. Лагранж, 1772 А. Пуанкаре, 1892 (отдельные примеры); Мера $> 0$ В. И. Арнольд, 1963	Дж. Литтлвуд, 1952. Мера=0; В. М. Алексеев, 1968, $\neq \emptyset$
	$OS^-$	Мера=0, $\neq \emptyset$	Мера=0, $\neq \emptyset$	К. А. Ситников, 1959 $\neq \emptyset$ Мера=?

**Гипотеза.** Почти каждая точка  $p \in PE_i^+$  достижима из  $HE_i^+$  и обладает в  $M^{12}$  окрестностью  $U$ , диффеоморфной  $I \times D^{11}$ , так что

$$U \cap HE_j^+ \simeq A_j \times D^{11}, \quad U \cap PE_j^+ \simeq B_j \times D^{11},$$

$$U \cap (B^+ \cup OS) \simeq C \times D^{11},$$

где  $D^{11}$  — 11-мерный диск,  $I = (0, \varepsilon)$ ,  $A_j, B_j, C \subset I$ , причем каждое из  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) состоит из счетного числа интервалов.  $B_j$  счетно и образовано концами интервалов соответствующего  $A_j$ , а  $C$  нульмерно.

Неясно, какой гладкостью мог бы обладать диффеоморфизм  $U \simeq I \times D^{11}$ ; его аналитичность априори также не исключается.

Множества  $HE_i^\pm$  открыты и связны, однако каждое из них очень «разветвлено» в  $M^{12}$  и отдельные ветви переплетаются друг с другом весьма запутанно. Биркгоф [3] представлял себе  $HE_j^-$  в виде трех потоков, притекающих из бесконечности. Продолжая эту аналогию, следует вообразить, что каждый из этих потоков разбивается на счетное

число «ручейков», которые, подобно системе кровеносных капилляров, пронизывают фазовое пространство и собираются в три выходящих потока  $HE_j^+$ .

Анализ рассуждений Шази показал [21], что для доказательства равенства  $HE_i^+ = HE_i^-$  они недостаточны, но все же можно утверждать, что  $HE^- = \cup_i HE_i^-$  и  $HE^+ = \cup_i HE_i^+$  совпадают в области  $h < 0$  с точностью до множества нулевой лебеговой меры в  $M^{12}$  («почти вся вода, приносимая потоками  $HE_i^-$ , за исключением отдельных струек общей нулевой меры, уносится потоками  $HE_i^+$ »).

Тем самым возникли два вопроса: существуют ли в области  $h < 0$  движения типа а)  $HE_i^- \cap HE_j^-, i \neq j$  («обмен»); б)  $HE_i^- \cap B^+$  («полный захват») и  $HE_i^- \cap OS^+$ .

На оба эти вопроса автору удалось получить положительный ответ [22]–[24]. Особенно интересно, что оказался возможным полный захват. В отличие от примеров Шмидта и Ситникова, при полном захвате образуется тройная звезда: к двойной звезде за счет чисто гравитационного взаимодействия присоединяется третье тело, прилетевшее из бесконечности. Ту же природу имеет захват кометы системой Солнце–Юпитер.

Строение множества  $B^- \cap B^+$  изучено плохо, хотя значительная доля публикаций по задаче трех тел относится именно к нему. Теория Колмогорова–Арнольда–Мозера позволила доказать существование условно-периодических движений во многих неинтегрируемых задачах механики. В частности, в 1963 г. В. И. Арнольд [25] показал, что  $B^- \cap B^+$  (при достаточно малой массе двух из трех тел) содержит подмножество положительной меры, состоящее из пятимерных торов, заполненных условно-периодическими движениями. См. также [5], [26], [27], [28].

Условно-периодические движения образуют «регулярную» часть  $B^- \cap B^+$ , но отнюдь его не исчерпывают. Во множестве  $(B^- \cup OS^-) \cap (B^+ \cup OS^+)$  существует также и «квазислучайная» часть. Некоторое представление о ее строении можно получить, рассматривая один частный случай задачи трех тел (см. далее § 8).

Остается открытой

**ПРОБЛЕМА.** Образует ли  $OS$  множество положительной или нулевой меры в  $M^{12}$ ?



## Методы

**5. «Эффект пограничного слоя» и разрывные решения идеальной кеплеровой задачи ([22], [23], [29]).** Пусть  $M$  — риманово многообразие,  $\Sigma$  — его замкнутое подмногообразие,  $W$  — нормальное расслоение над  $\Sigma$ ,  $U$  — трубчатая окрестность  $\Sigma$  в  $M$ , диффеоморфная  $r$ -окрестности нулевого сечения  $W$  (так что  $(x, y)$ ,  $|x| < r$ ,  $y \in \Sigma$ ,  $x \perp T_y \Sigma$  можно считать координатами в  $U$ ). Все векторные поля, о которых далее пойдет речь, принадлежат классу  $C^1$  на своей области определения и зависят от параметра  $\alpha \geq 0$  непрерывно в точке  $\alpha = 0$  относительно топологии равномерной сходимости на компактах.

Рассмотрим следующие системы дифференциальных уравнений: основную (определенную в  $M \setminus \Sigma$ )

$$\dot{z} = Z_\alpha(z), \tag{1}$$

которая в координатах  $(x, y) \in U$  имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = X_\alpha = X_\alpha^1\left(\frac{x}{\mu}, y\right) + X_\alpha^2(x, y), \\ \dot{y} = Y_\alpha = \frac{1}{\mu} Y_\alpha^1\left(\frac{x}{\mu}, y\right) + Y_\alpha^2(x, y), \end{cases} \tag{2}$$

где  $\mu = \mu(\alpha) \searrow 0$  при  $\alpha \searrow 0$ ;

*вспомогательную* (определенную в  $U$ )

$$\begin{cases} \dot{x} = X_\alpha^2(x, y), \\ \dot{y} = Y_\alpha^2(x, y); \end{cases} \tag{3}$$

*предельные*

$$\dot{z} = Z_0(z), \text{ или } \begin{cases} \dot{x} = X_0^2(x, y), \\ \dot{y} = Y_0^2(x, y); \end{cases} \tag{4}$$

и «систему пограничного слоя»

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_0^1(\xi, \eta) + X_0^2(0, \eta), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = Y_0^1(\xi, \eta). \tag{5}$$

Здесь поля  $X_\alpha^2$  и  $Y_\alpha^2$  удовлетворяют сформулированным выше условиям на всей  $U$ , их частные производные равномерно (по  $\alpha$ ) ограничены на

каждом компакте в  $U$ ;  $X_\alpha^1$  и  $Y_\alpha^1$  определены на  $W \setminus \Sigma$  (т. е. при  $\xi \neq 0$ ) и удовлетворяют дополнительно условию

$$(A) |X_\alpha^1(\xi, \eta)| \leq \varphi(|\xi|), \quad |Y_\alpha^1(\xi, \eta)| \leq \psi(|\xi|),$$

где  $\varphi(s), \psi(s) \searrow 0$  при  $s \nearrow +\infty$  и  $\int^\infty \psi(s) ds < \infty$ .

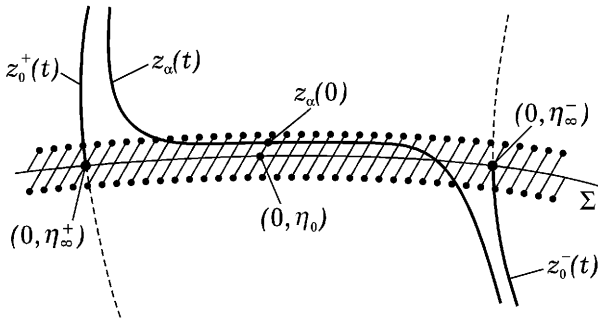


Рис. 2

На любом компакте  $K \subset U \setminus \Sigma$  в силу (A) правые части систем (2) и (3) равномерно близки и обе предельные системы (4) совпадают в  $U \setminus \Sigma$ . Вторая из них регулярна на всей  $U$ , и потому первая (предельная к (1) при  $\alpha \rightarrow 0$ ) допускает регулярное продолжение на все  $M$ .

Таким образом, предельная система не имеет особенностей на  $\Sigma$  (ее решения «не замечают  $\Sigma$ »). В то же время из (2) видно, что при  $\alpha \neq 0$  в  $\mu$ -окрестности  $\Sigma$  возмущающие члены  $X_\alpha^1$  и  $\frac{1}{\mu} Y_\alpha^1$  велики. Поэтому в «пограничном слое» около  $\Sigma$  возможен быстрый дрейф вдоль  $\Sigma$  и в пределе при  $\alpha \rightarrow 0$  решение  $z_\alpha(t)$  системы (1) может сходиться к разным решениям  $z_0^\pm(t)$  системы (4) (рис. 2).

В пограничном слое естественно сделать замену  $x = \mu\xi, y = \eta, t = \mu\tau$ , после которой (2) переходит в

$$\frac{d\xi}{d\tau} = X_\alpha^1(\xi, \eta) + X_\alpha^2(\mu\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = Y_\alpha^1(\xi, \eta) + \mu Y_\alpha^2(\mu\xi, \eta). \quad (6)$$

В пределе система (6) вырождается в «систему пограничного слоя» (5).

Предположим, что выполняется условие

(Б) Решение  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  системы (5), начинающееся в  $(\xi_0, \eta_0)$ ,

определено и лежит в  $W \setminus \Sigma$  для  $\tau \geq 0$  и, кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} |\xi(\tau)| = \infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} |\eta(\tau)| = \eta_{\infty}^+. \quad (7)$$

**Теорема.** Если  $z_{\alpha}(t)$  — решение системы (1) такое, что

- 1)  $z_{\alpha}(0) = (x_{\alpha}(0), y_{\alpha}(0)) \in U$ ,  $\frac{x_{\alpha}(0)}{\mu} \rightarrow \xi_0$ ,  $y_{\alpha}(0) \rightarrow \eta_0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ;
- 2) выполняются (А) и (Б);
- 3)  $X_0^2(0, \eta_{\infty}^+) \neq 0$ ;
- 4) решение  $z_0^+(t)$  системы (4) с начальными условиями  $z_0^+(0) = (0, \eta_{\infty}^+) \in \Sigma$  определено на  $[0, T^+]$  и лежит в  $M \setminus \Sigma$  при  $0 < t < T^+$ , то для всех  $t \in (0, T^+)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_{\alpha}(t) = z_0^+(t). \quad (8)$$

Заметим, что  $z_{\alpha}(0) \rightarrow (0, \eta_0)$ , что, вообще говоря, не равно  $(0, \eta_{\infty}^+)$ .

Если же (Б) выполняется в усиленной форме, а именно:  $(\xi(\tau), \eta(\tau))$  определено для всех  $\tau$  и

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} |\xi(\tau)| = \infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \eta(\tau) = \eta_{\infty}^{\pm}, \quad (7a)$$

то (8) справедливо при  $t > 0$ , а при  $t \in (T^-, 0)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_{\alpha}(t) = z_0^-(t), \quad (8a)$$

где  $z_0^-(t)$  — решение (4) с начальным условием  $0, \eta_{\infty}^-$ , определенное на  $[T^-, 0]$  и лежащее в  $M \setminus \Sigma$  на  $(T^-, 0)$ .

При  $\eta_{\infty}^- \neq \eta_{\infty}^+$  налицо ситуация, изображенная на рис. 2.

Рассмотрим теперь задачу трех тел типа «планетной системы»:  $m_1 = 1 \gg m_2 = m_3 = m$ . Движением управляет в этом случае система вида (2), где  $\alpha = \mu = m$ , а роль  $\Sigma$  играет «многообразие столкновений» тел  $p_2$  и  $p_3$ , описываемое уравнением  $r_1 = 0$ . Члены  $X_{\alpha}^1, Y_{\alpha}^1$  в (2) относятся к взаимодействию тел  $p_2$  и  $p_3$ , в то время как во вспомогательной системе (3) мы этим взаимодействием пренебрегаем. Предельной системе (4) соответствует «идеальная кеплеровская задача», в которой  $p_1$  покоится в начале координат, а  $p_i, i = 2, 3$ , описывают около  $p_1$  кеплеровские орбиты. В зависимости от знака (приведенной к единице массы) энергии  $h_i$ , тела  $p_i$  в относительном движении около  $p_1$

его орбита будет эллипсом ( $h_i < 0$ ), параболой ( $h_i = 0$ ) или гиперболой ( $h_i > 0$ ). Таким образом, для предельной системы ( $m = 0$ ) типы финальных движений одинаковы при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Именно это привело Шази ([9]) к ошибочному заключению о совпадении финальных движений при  $t \rightarrow \pm\infty$  для любых масс. Его ошибка как раз связана с необходимостью учитывать при переходе от  $m = 0$  к  $m \ll 1$  «эффект пограничного слоя». Этот эффект проявляется при близких прохождениях  $p_2, p_3$  и система (5) описывает кеплеровское движение этих тел относительно равномерно движущегося общего центра тяжести; взаимодействием с  $p_1$  при этом пренебрегаем.

Теорема, сформулированная выше, дает возможность построить семейство решений реальной ( $m > 0$ ) задачи, сходящееся при  $m \rightarrow 0$  к разным идеальным кеплеровским движениям для  $t \gtrsim 0$ . Тем самым для правильного описания предельного перехода следует учитывать и «разрывные» решения идеальной кеплеровской задачи, у которых скорости тел  $p_2$  и  $p_3$  меняются скачком в момент столкновения. На этой идее и основаны примеры обмена ( $HE_i^- \cap HE_j^+$ ,  $i \neq j$ ) в области  $h < 0$ , указанные в табл. 2.

Рассмотрим траекторию  $\gamma_0$  в фазовом пространстве, отвечающую идеальному кеплеровскому движению, в котором  $p_2$  описывает гиперболу ( $h_2 > 0$ ), а  $p_3$  описывает эллипс ( $h_3 < 0$ ), так что  $\gamma_0 \subset HE_2$ . Пусть  $\gamma_0$  имеет единственную особую точку, а именно, в момент  $t = 0$  происходит столкновение тел  $p_2$  и  $p_3$ . Вблизи отрицательной полутраектории  $\gamma_0(t < 0)$  можно найти полутраекторию  $\gamma^-$  реальной ( $m \ll 1$ ) задачи, для которой также при  $t = 0$  тела  $p_2$  и  $p_3$  сталкиваются. При зундмановской регуляризации решение продолжается таким образом, что тела  $p_2$  и  $p_3$  (имеющие по предположению равные массы) обмениваются скоростями. Поэтому продолжение  $\gamma^+$  полутраектории  $\gamma^-$  оказывается не вблизи  $\gamma_0$ , а вблизи идеальной траектории, на которой  $p_2$  и  $p_3$  поменялись ролями и которая содержится в  $HE_3$ . Таким образом, траектория  $\gamma = \gamma^- \cup \gamma^+ \subset HE_2^- \cap HE_3^+$ . В движении, отвечающем траектории  $\gamma$ , при  $t < 0$   $p_2$  движется вблизи гиперболы,  $p_3$  — вблизи эллипса, а при  $t > 0$  — наоборот (рис. 3).

В фазовом пространстве  $M^{12}$  траекторию  $\gamma$  можно включить в 10-мерное многообразие «траекторий со столкновениями», т. е. достигающих  $\Sigma$ . Приведя к нему двумерную трансверсаль, мы получим на этой трансверсали нечто вроде изображенного на рис. 4. Вблизи  $\gamma$  лежат траектории с тем же финальным поведением, т. е. из  $HE_2^- \cap HE_3^+$ . До-

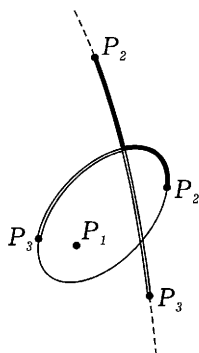


Рис. 3

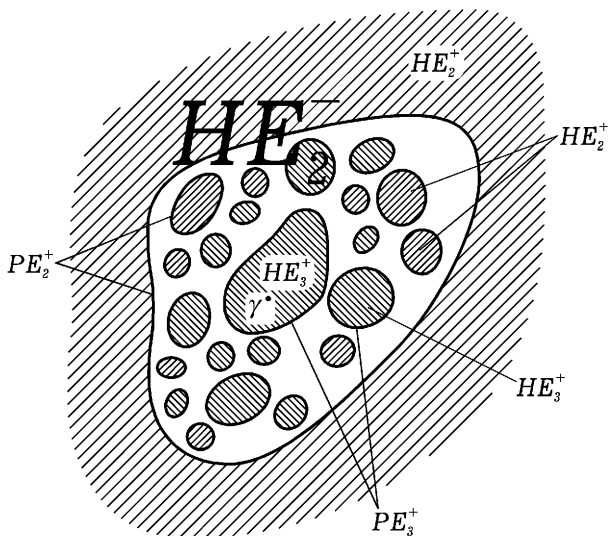


Рис. 4.  $h_2 + h_3 < 0$ .

статочно далеко от  $\gamma$  близкого прохождения тел  $p_2$  и  $p_3$  не происходит, и при  $m \rightarrow 0$  эти движения стремятся к  $\gamma_0$  и принадлежат  $HE_2^- \cap HE_2^+$ .

Если  $h_2 + h_3 > 0$ , то в промежуточной области находятся движения из  $HE_2^- \cap H^+$ , в которых после близкого прохождения оба тела  $p_2$  и  $p_3$  приобретают гиперболические скорости и происходит полный распад (табл. 1). Обращением времени отсюда можно получить пример частичного захвата. Заметим, что для реального движения полная энергия имеет при  $m \rightarrow 0$  следующий вид:

$$h = m(h_2 + h_3) + o(m).$$

Если же  $h_2 + h_3 < 0$ , то в промежуточной области происходит «временный захват»: после близкого прохождения  $p_2$  и  $p_3$  движутся почти к эллипсам, причем рано или поздно наступает новое их сближение. После одного или нескольких последовательных сближений для почти всех движений одно из тел  $p_2$  или  $p_3$  приобретает гиперболическую скорость и удаляется в бесконечность. Поэтому почти вся область временных захватов заполнена «островами» — различными компонентами пересечения с трансверсалью множества  $HE_2^+ \cup HE_3^+$ . Границы ост-

ровов принадлежат  $PE_2^+ \cup PE_3^+$ , а остальная часть области (лебеговой меры 0, но не пустая) заполнена ограниченными и осциллирующими движениями ( $B^+ \cup OS^+$ ).

Ввиду сложной топологической структуры аккуратное описание этой картины весьма затруднено. Можно надеяться, что недавняя работа Р. Истона [30] будет полезной в этом отношении.

**6. Квазислучайные динамические системы.** Теория классических динамических систем распадается на две большие ветви — топологическую «эргодическую теорию». Последняя имеет дело с отображениями, сохраняющими некоторую меру.

Ограничимся для простоты одним отображением  $S: M \rightarrow M$  и нормированными мерами ( $\mu(M) = 1$ ). Если  $S$  сохраняет меру  $\mu$ , то определен инвариант — метрическая энтропия  $h_\mu(S)$ . Одно и то же  $S$  имеет, вообще говоря, много инвариантных мер (описываемых, например, теорией Крылова–Боголюбова).

Предположим, что мы изучаем динамическую систему, регистрируя последовательные попадания траектории в множества  $\{A_i\}$ , образующие разбиение пространства  $M$ , т. е. с помощью функции  $x \mapsto \{i_n(x)\}$ , определяемой соотношениями  $S^n x \in A_{i_n(x)}$ . Например, каждое  $A_i$  отвечает некоторому показанию прибора, и тогда  $\{i_n(x)\}$  есть ряд последовательных показаний этого прибора, полученных при измерениях одного и того же движения с начальным состоянием  $x$ . Нормированная мера  $\mu$  задает распределение вероятностей на  $M$ . Случайному выбору начальной точки отвечает случайная последовательность  $\{i_n(x)\}$ . Теорема Я. Г. Синая [31] утверждает, что при  $h_\mu > 0$  можно выбрать  $\{A_i\}$  так, чтобы  $\{i_n(x)\}$  была «последовательностью Бернулли» в смысле теории вероятностей. Это делает естественным

**Определение ([32]).** Динамическая система  $S: M \rightarrow M$  называется *квазислучайной*, если существует  $S$ -инвариантная борелевская мера  $\mu$ , для которой  $h_\mu(S) > 0$ .

Аналогично метрической энтропии в [33] был определен топологический инвариант гомеоморфизма — *топологическая энтропия*  $h_{\text{top}}$ .

**Теорема (Динабург [34] для  $\dim M < \infty$ ; Гудмен [35]).** Для гомеоморфизма  $S$  компакта  $M$   $h_{\text{top}}(S) = \sup_{\mu} h_{\mu}(S)$ , где  $\sup$  берется по всем нормированным борелевским  $S$ -инвариантным мерам.

Заметим, что существует [36] гомеоморфизм нульмерного компакта, для которого  $\sup$  не достигается, т. е. всегда  $h_{\text{top}} > h_{\mu}$ .

**Следствие.** Динамическая система  $S: M \rightarrow M$  квазислучайна тогда и только тогда, когда  $h_{\text{top}} > 0$ .

**7. Топологические марковские цепи («символическая динамика»).** Почти во всех известных мне примерах квазислучайность динамической системы связана с существованием инвариантных марковских подмножеств.

Пусть  $\Omega^p$  — тихоновское произведение счетного числа  $p$ -точий, т. е. пространство бесконечных последовательностей  $\omega = [a_n; -\infty < n < +\infty]$ , где  $a_n = 0, 1, \dots, p - 1$ ;  $T$  — гомеоморфизм сдвига на один символ влево.

Каждая  $p \times p$ -матрица  $\Pi = (\pi_{ij})$  из нулей и единиц определяет замкнутое инвариантное подмножество  $\Omega^\Pi \subseteq \Omega^p$  условием  $[a_n] = \omega \in \Omega^\Pi \leftrightarrow \leftrightarrow \pi_{a_n a_{n+1}} = 1$  для всех  $n$ . Ограничение  $T|_{\Omega^\Pi}$  называется *топологической марковской цепью* (т. м. ц.) с  $p$  состояниями и матрицей переходов  $\Pi$ .

Ориентированный граф  $\Gamma$  с вершинами  $0, 1, \dots, p - 1$  и ребрами  $i\bar{j}$  для тех пар  $(i, j)$ , для которых  $\pi_{ij} = 1$ , однозначно определяет т. м. ц.  $(\Omega^\Pi, T)$ . Совершенно аналогично, матрицей или графом определяются т. м. ц. со счетным и даже любым множеством состояний [32], [36], [37].

Непрерывные отображения  $f: M_1 \rightarrow M_1$  и  $g: M_2 \rightarrow M_2$  называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм  $h: M_1 \rightarrow M_2$  такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \xrightarrow{g} & M_2 \end{array}$$

**Теорема (Вильямс [38]).** Для того чтобы две т. м. ц.  $(\Omega^\Pi, T)$  и  $(\Omega^\Xi, T)$  с конечным числом состояний были топологически сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие матрицы  $R$  и  $S$  с неотрицательными целыми элементами и такое целое  $m \geq 0$ , что

$$\Pi R = R \Xi, \quad \Xi S = S \Pi, \quad RS = \Pi^m, \quad SR = \Xi^m.$$

(Здесь  $\Pi, \Xi, R, S$  — матрицы порядков  $p \times p, q \times q, p \times q, q \times p$  соответственно.)

Нетрудно убедиться в том, что число  $N_n$  периодических точек периода  $n$  в т. м. ц.  $(\Omega^{\Pi}, T)$  равно  $\text{tr} \Pi^n = \sum_i \lambda_i^n$ , где  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы  $\Pi$ .

Так как у топологически сопряженных т. м. ц.  $(\Omega^{\Pi}, T)$ ,  $(\Omega^{\Xi}, T)$  числа  $N_n$  должны совпадать, то при всех  $n \geq 0$   $\text{tr} \Pi^n \equiv \text{tr} \Xi^n$ , откуда следует, что матрицы  $\Pi$  и  $\Xi$  имеют одинаковые отличные от 0 собственные числа (вместе с кратностью). Как показано в [38], это условие, однако, недостаточно.

Спектральные свойства матрицы  $\Pi$  определяют топологическую энтропию т. м. ц.  $A$  именно:

**Теорема (Перри [39]; [36]).**  $h_{\text{top}}(T|\Omega^{\Pi}) = \ln \lambda$ , где  $\lambda$  — наибольшее положительное собственное значение матрицы  $\Pi$  ( $p < \infty$ ). Существует единственная борелевская  $T$ -инвариантная мера  $\mu$  на  $\Omega^{\Pi}$ , для которой  $h_{\text{top}}(T) = h_{\mu}(T)$ .

Топологическую энтропию т. м. ц. со счетным числом состояний и связь ее с метрическими энтропиями инвариантных мер исследовал Б. М. Гуревич [36], [37]. В частности, он доказал, что в этом случае топологическая энтропия всей цепи есть верхняя грань топологических подцепей с конечным числом состояний.

Динамические системы, связанные с гомеоморфизмом сдвига в пространстве последовательностей символов некоторого алфавита, впервые, по-видимому, рассматривались в связи с изучением геодезических на поверхностях отрицательной кривизны (см., например, [3], гл. VIII, § 11), а затем и сами по себе ([40]). За кругом вопросов, относящихся к таким системам, закрепилось название «символическая динамика». Возрождение интереса к идеям и методам символической динамики связано с работами С. Смейла [41], [42] и Я. Г. Синая [43], [44]. Последовательное употребление термина, «топологическая марковская цепь» начинается, по-видимому, с работ автора [32], хотя само понятие принадлежит математическому фольклору и по существу имеется, например, в [39]. Синай [43] использует это понятие, никак его не называя, а Смейл в [42] пользуется неудачным термином «subshift of finite type».

Пусть  $S: M \rightarrow M$  — диффеоморфизм многообразия  $M$ . Назовем подмножество  $A \subseteq M$  инвариантным марковским подмножеством диффеоморфизма  $S$ , если существует т. м. ц.  $(\Omega^{\Pi}, T)$  и непрерывное отображение  $\varphi: \Omega^{\Pi} \rightarrow M$  такие, что  $A = \varphi(\Omega^{\Pi})$ ,  $\varphi \circ T = S \circ \varphi$ , так что  $SA = A$



и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\Pi} & \xrightarrow{T} & \Omega^{\Pi} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{S} & A \subseteq M \end{array}$$

коммутативна.

Тривиальные примеры инвариантных марковских подмножеств: неподвижная или периодическая точка, траектория  $\{S^n x\}$ , асимптотическая при  $n \rightarrow \pm\infty$  к периодическим или неподвижным точкам.

Если  $\varphi$  — гомеоморфизм, то ограничение  $S|A$  топологически эквивалентно т. м. ц.  $(\Omega^{\Pi}, T)$  и с помощью теорем Перри и Гуревича можно вычислить  $h_{\text{top}}(S|A)$ . К сожалению,  $\varphi$  может быть гомеоморфизмом лишь при  $\dim A = 0$ . Впрочем, в упоминаемых ниже важных примерах обратимость  $\varphi$  нарушается, но лишь на множестве 1-й категории в  $\Omega^{\Pi}$ , что дает возможность превратить  $\varphi$  в метрический изоморфизм и найти на  $A$  «меру максимальной энтропии».

**ПРИМЕР 1.** «Подкова Смейла» и ее модификации позволяют для любых  $p, \Pi$  и  $M$ ,  $\dim M > 2$  указать  $C^1$ -открытое  $U_{\Pi} \subset \text{Diff } M$  такое, что любой  $S \in U_{\Pi}$  обладает инвариантным марковским подмножеством  $A$ , на котором  $S|A$  топологически эквивалентен  $T|\Omega^{\Pi}$ . Смейл [41] доказал это утверждение для матрицы  $\Pi$ , состоящей из одних единиц («топологическая схема Бернулли»). В общем случае см. [32] и [45].

**ПРИМЕР 2.** Пусть  $q_i (1 \leq i \leq l)$  — гиперболические периодические точки диффеоморфизма  $S$ ;  $W_i^s$  и  $W_i^u$  — их устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия ([42]), причем предположим, что все  $W_i^s$  имеют одинаковую размерность (все  $W_i^u$  имеют дополнительную размерность). Пусть далее  $r_j (1 \leq j \leq s)$  — трансверсальные гомо- и гетероклинические точки, так что  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} S^n r_j = q_{i \pm(j)}$  и в точке  $r_j W_{i-(j)}^u$  и  $W_{i+(j)}^s$  пересекаются трансверсально. Построим граф  $\Gamma$ , структура которого до некоторой степени повторяет эту ситуацию. В него входят непересекающиеся циклы  $\gamma_i (1 \leq i \leq l)$ , причем число ребер в цикле  $\gamma_i$  равно периоду  $q_i$ , и пути  $\pi_j (1 \leq j \leq s)$  с числом ребер  $N_j$ , соединяющие вершины  $Q_j^- \in \gamma_{i-(j)}$  и  $Q_j^+ \in \gamma_{i+(j)}$  (эти вершины можно брать на соответствующих циклах произвольно) (рис. 5).

**Теорема ([45]).** Для любого открытого множества  $U$ , содержащего траектории точек  $q_i (1 \leq i \leq l)$  и  $r_j (1 \leq j \leq s)$ , существуют

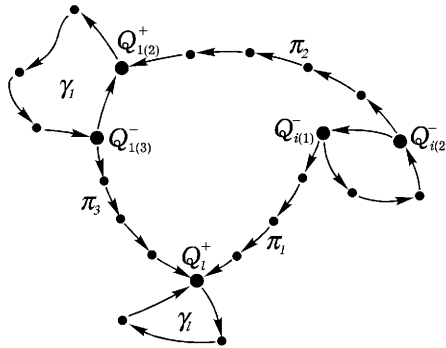


Рис. 5

$N_j (1 \leq j \leq s)$  и открытое множество  $V \subseteq U$  такие, что ограничение  $S|_A$  на максимальное  $S$ -инвариантное множество  $A$ , содержащееся в  $V$ , топологически эквивалентно т. м. ц., определяемой графом  $\Gamma$ , и  $q_i, r_i \in A$ .

Заметим, что при различном выборе точек  $Q_j^\pm$  получаются различные графы  $\Gamma$ . Соответственно меняются при этом  $V$  и  $A$ .

**ПРИМЕР 3.** Пусть  $S: M \rightarrow M$  —  $Y$ -диффеоморфизм в смысле Д. В. Аносова. Я. Г. Синай [43], [44] доказал, что  $M$  является марковским множеством. Построение т. м. ц.  $(\Omega^\Pi, T)$  и «почти»-гомеоморфизма  $\varphi: \Omega^\Pi \rightarrow M$  было осуществлено им при помощи так называемого *марковского разбиения* многообразия  $M$ . Отображение  $\varphi$  склеивает лишь точки в  $\Omega^\Pi$ , образующие множество первой категории, и удастся построить на  $M$  «меру максимальной энтропии» (подробнее см. [46], [47]).

Недавно Боуэн [48] распространил этот результат на произвольное базисное множество диффеоморфизма  $S$ , удовлетворяющего аксиоме  $A$  Смейла (см. [42]). Можно надеяться, что этот результат распространяется на произвольное инвариантное гиперболическое множество, обладающее дополнительным свойством «локальной максимальнойности» (важная роль этого свойства доказана Д. В. Аносовым [49]). Пока же автором получен более слабый результат [50] (отображение  $\varphi$  существенно неоднозначно).

**ПРОБЛЕМА.** Пусть  $h_{\text{top}}(S) > C > 0$ . Существует ли у  $S$  марковское подмножество  $A$ , на котором  $h_{\text{top}}(S|_A) = C$ ? А если  $C = h_{\text{top}}(S)$ ?

Заметим, что теорема Перри накладывает ограничения на возмож-

ные значения  $C$ , если желать, чтобы  $A$  было гомеоморфным образом т. м. ц. с конечным числом состояний: в этом случае  $C$  должно быть логарифмом алгебраического числа.

Если диффеоморфизм  $S$  обладает нетривиальным инвариантным марковским подмножеством, то это обычно позволяет построить траектории  $\{S^n x\}$  с достаточно сложным поведением.

Назовем т. м. ц.  $(\Omega^\Pi, T)$  *транзитивной*, если матрица  $\Pi$  неприводима в смысле Перрона–Фробениуса ([51], гл. XIII). Методами символической динамики ([40]) легко доказывается

**Теорема.** *Транзитивная т. м. ц.  $(\Omega^\Pi, T)$  топологически транзитивна (некоторые траектории и даже полутраектории плотны в  $\Omega^\Pi$ ), периодические точки плотны в  $\Omega^\Pi$  и для любых точек  $p$  и  $q$  существует точка  $r$  такая, что траектория  $\{S^n r\}$  асимптотически сближается с траекторией  $\{S^n p\}$  при  $n \rightarrow +\infty$  и с  $\{S^n q\}$  при  $n \rightarrow -\infty$ .*

Если матрица  $\Pi$  приводима, то воспользовавшись ее каноническим видом ([51]), можно выделить в  $\Omega^\Pi$  «базисные» топологически транзитивные множества, аналогично «спектральному разложению» в [42] (см. также [50]).

С помощью отображения  $\varphi: \Omega^\Pi \rightarrow M$  эти свойства переносятся с т. м. ц. на марковское множество диффеоморфизма, что дает возможность исследовать последний. Предложенный автором метод «маршрутных схем» [32] оказался полезным при отыскании марковских подмножеств у динамических систем, отвечающих конкретным задачам. И в частности, именно это дало возможность заполнить «белые пятна» в табл. 2.

**8. Об одном частном случае задачи трех тел.** Пусть  $m_1 = m_2$  и в начальный момент  $p_1$  и  $p_2$  и их скорости симметричны относительно  $OZ$ . Если выполнено обычное предположение о центре тяжести всей системы (п. 2), то  $p_3$  лежит на  $OZ$ , и его скорость вертикальна (рис. 6). По соображениям симметрии подобное расположение тел  $p_1, p_2, p_3$  будет сохраняться для всех  $t$ , что позволяет свести исследование к системе с двумя степенями свободы.

Этот частный случай задачи трех тел придуман давно (не позже 1895 г.), но счастливая идея исследовать на нем расположение в фазовом пространстве траекторий различных финальных типов принадлежит А. Н. Колмогорову. Именно для этого примера К. А. Ситникову [14] удалось доказать, что  $OS^+ \neq \emptyset$  (используя дополнительно симмет-

рию времени, можно вывести из результата Ситникова неравенство  $OS^+ \cap OS^- \neq \emptyset$ , что и отражено в табл. 2. В этом же примере автору удалось построить инвариантное марковское множество [24], [32].

Пусть  $m_3 = 0$  (предположение  $1 \gg m_2 > 0$  не вносит ничего принципиально нового). Тогда  $p_1$  и  $p_2$  описывают в  $XOY$  симметричные кеплеровские орбиты около  $O$ , которые в случае  $h < 0$  будут эллипсами. В момент, когда  $p_3$  проходит через  $O$ , состояние системы определяется скоростью этого тела и фазой  $\tau$  (истинной или средней аномалией) эллиптического движения тел  $p_1$  и  $p_2$ . Примем  $(v, \tau)$  за полярные координаты в некоторой плоскости  $\Phi$  (ввиду симметрии относительно  $XOY$  знаком  $v$  можно пренебречь). Сдвиг вдоль траектории в фазовом пространстве от одного попадания  $p_3$  в  $O$  к следующему определяет локальный диффеоморфизм  $S: R^+ \rightarrow R; R^+ \subset \Phi$ . Оказывается, что можно указать такое открытое множество  $\Gamma \subset \Phi$ , что максимальное инвариантное множество  $A$ , содержащееся в  $\Gamma$ , является марковским и допускает описание в терминах символической динамики.

Пусть  $\Omega$  состоит из всевозможных последовательностей  $[a_n; n_1 \leq n \leq n_2]$ , где  $-\infty \leq n_1 \leq 0 < n_2 \leq +\infty$ ;  $a_n = (m_n, i_n)$  при  $n_1 < n < n_2$ , где натуральное  $m_n \geq N$ ,  $i_n = 0$  или  $1$ ; при  $n_1 \neq -\infty$   $a_{n_1} = (v^-, i_{n_1})$ ,  $0 \leq v^- \leq \delta$ ,  $i_{n_1} = 0$  или  $1$ ; при  $n_2 \neq +\infty$   $a_{n_2} = v^+$ ,  $0 \leq v^+ \leq \delta$ .  $\Omega$  снабжается естественной топологией и на подмножестве  $\Delta^+$ , где  $n_2 \neq 1$ , определен локальный гомеоморфизм  $T$  сдвига на один символ влево:  $\Delta^- = T\Delta^+$ .

**Теорема ([32]).** *Существуют  $N, \delta$ , гомеоморфизм  $\varphi: \Omega \rightarrow \Phi$  и такое открытое множество  $V \subset \Phi$ , что  $\varphi(\Omega) = A$  является максимальным*

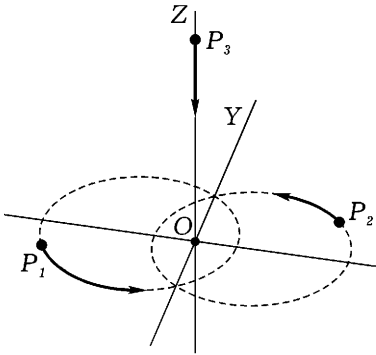


Рис. 6

инвариантным множеством в  $V$ ,  $\varphi(\Delta^\pm \subseteq R^\pm)$  и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta^+ & \xrightarrow{T} & \Delta^- \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ R^+ & \xrightarrow{S} & R^- \end{array}$$

коммутативна.

(Для случая  $m_3 > 0$  формулировка аналогичной теоремы приведена в [24]; в [52] приведены достаточные условия, при которых для отображения плоскости в плоскость можно доказать подобное же утверждение. Доказательства см. в [45].)

Выбор последовательности символов  $[a_n]$  следующим образом влияет на характер движения  $p_3$ . Взяв точку  $\varphi[a_n] \in \Phi$  в качестве начального условия, мы получим решение, для которого  $p_3$  возвращается в  $O$   $n_2 - 1$  раз при  $t > 0$  и  $|n_1|$  раз при  $t < 0$ . Между  $(n - 1)$ -м и  $n$ -м возвращениями происходит  $m_n$  целых оборотов тел  $p_1$  и  $p_2$  около  $O$ ; символ  $i_n = 0 (= 1)$  указывает, что  $n$ -е возвращение происходит около момента максимального сближения (удаления) тел  $p_1$  и  $p_2$ .

Если  $n_2 \neq +\infty$ , то после  $n_2$  возвращений  $p_3$  уходит в бесконечность с предельной скоростью  $v^+ = a_{n_2}$ . Аналогично, если  $n_1 \neq -\infty$ , то  $v^-$  определяет скорость ухода в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$ .

Увеличение  $m_n$  влечет за собой также и увеличение размаха колебаний тела  $p_3$ .

Стандартными приемами «символической динамики» можно построить разнообразные примеры движения с предписанным заранее поведением. В частности, движение принадлежит  $HE_3^+(PE_3^+)$  при  $n_2 < +\infty$  и  $v^+ > 0 (= 0)$ ;  $B^+$ , если  $n_2 = +\infty$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m_n < \infty$ ;  $OS^+$ , если  $n_2 = +\infty$ ;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m_n < \infty$ . Аналогично определяется и принадлежность к  $HE_3^-, PE_3^-, B^-$  и  $OS^-$ . Нетрудно убедиться, что при  $h < 0$   $HE_3^\pm, PE_3^\pm, B^\pm, OS^\pm$  образуют полный набор финальных движений. Выбирая подходящим образом последовательности символов, убеждаемся, что верна

**Теорема ([27], [45]).** *Существует такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $\varepsilon t_1 = \varepsilon t_2 > t_3 \geq 0$  и при  $h < 0$  в рассматриваемом частном случае задачи трех тел реализуются все 16 логически возможных комбинаций финальных движений по Шази.*

Например, последовательность  $[a_n, 0 \leq n < \infty]$ , в которой  $a_0 = (v^-, i_0)$ ,  $v^- > 0$  и  $a_n = (m_n, i_n)$ ,  $\sup_{n>0} \{m_n\} < \infty$ , порождает решение, для которого происходит полный захват ( $HE_3^- \cap B^+$ ).

Кроме того, имеет место

**Следствие.** *При тех же условиях всякий однозначный аналитический первый интеграл есть функция интегралов энергии и момента.*

Это следствие представляет некоторый интерес и не вытекает из упомянутой в § 2 теоремы Пуанкаре, поскольку речь идет о фиксированном значении масс.

## Литература

- [1] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Paris: Gauthier-Villars, 1892, t. 1, 1892, t. 2, 1899, t. 3.
- [2] А. Пуанкаре. *Избранные труды* (серия «Классики науки»). М.: Наука, 1971, т. 1, 1972, т. 2.
- [3] G. D. Birkhoff. *Dynamical systems*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1927, 9 (Русский перевод: Дж. Биркгоф. *Динамические системы*. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.)
- [4] C. L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1956. (Русский перевод: К. Л. Зигель. *Лекции по небесной механике*. М.: ИЛ, 1959.)
- [5] C. L. Siegel, J. K. Moser. *Lectures on celestial mechanics*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971. (Русский перевод отдельных глав имеется в книге: Ю. Мозер. *Лекции о гамильтоновых системах*. — М.: Мир 1973. С. 73–149.)
- [6] A. Wintner. *The analytical foundation of celestial mechanics*. Princeton-Oxford, 1941. (Русский перевод: А. Уинтер. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967.)
- [7] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment*. Ann. l'École Norm. Sur. 3 ser., 1922. P. 29–130.
- [8] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*. J. Math. Pures et Appl., 1929, 8. P. 353–380.

- [9] J. Chazy. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*. Bull. Astr., 1932, 8. P. 403–436.
- [10] V. M. Alexeyev. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*. В кн.: *Actes du Congrès International des mathématiciens* (Nice, Sept. 1970.) Paris: Gauthier–Villars, 1971, t. 2. P. 893–907.
- [11] E. Whittaker. *A treatise on the analytical dynamics*. Cambridge: Univ. Pres., 1927. (Русский перевод: Э. Уиттекер. *Аналитическая динамика*. М.; Л. Гостехиздат, 1937.)
- [12] S. Smale. *Topology and mechanics* I, II. *Inventiones Mathematicae*, 1970, 10. P. 305–331; 1970, 11:1. P. 45–64. (Русский перевод: С. Смейл. *Топология и механика*. УМН, 27:2. С. 77–133.)
- [13] R. Easton. *Some topology of the 3-body problem*. J. Diff. Equat., 1971 10:1. P. 371–377.
- [14] К. А. Ситников. *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел*. ДАН, 1960, 133:2. С. 303–306.
- [15] J. Moser. *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*. Comm. Pure and Appl. Math., 1970, 23:4. P. 609–636.
- [16] Ю. С. Осипов. *Геометрическая интерпретация задачи Кеплера*. УМН, 1972, 27:2. С. 161.
- [17] L. Bekker. *On capture orbits*. Monthly Notices Royal Astr. Soc., 1920, 809. P. 590–597.
- [18] О. Ю. Шмидт. *О возможности захвата в небесной механике*. ДАН, 1947, 582. С. 213–216.
- [19] Г. Ф. Хильми. *Проблема  $n$  тел в небесной механике и космогонии*. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
- [20] К. А. Ситников. *О возможности захвата в задаче трех тел*. Матем. сб., 1956, 32 (74):3. С. 693–705.
- [21] Г. А. Мерман. *К вопросу об исследованиях Шази в задаче трех тел*. Бюл. инст. теор. астр. АН СССР, 1954, 5:9 (72). С. 594–605.

- [22] В. М. Алексеев. *Обмен и захват в задаче трех тел*. ДАН, 1956, 108:4.
- [23] В. М. Алексеев. *Финальные движения в задаче трех тел*. В сб.: «Проблемы движения искусственных небесных тел». М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 50–64.
- [24] В. М. Алексеев. *О возможности захвата в задаче трех тел при отрицательном значении константы полной энергии*. УМН, 1969, 24:1. С. 185–186.
- [25] В. И. Арнольд. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*. УМН, 1963, 18:6. С. 91–191.
- [26] J. Moser. *Quasi-periodic solutions of the three-body problem*. Coll. probl. gravesides  $N$  corps. Paris, 1967. Bull. Astr. (3), 1967, 3:1–2. P. 53–59.
- [27] J. Moser. *Lectures on Hamiltonian systems*. Memories of Amer. Math. Soc., 1968, 81. P. 1–60. (Русский перевод: Ю. Мозер. *Лекции о гамильтоновых системах*. М.: Мир, 1973.)
- [28] Г. А. Красинский. *Квазипериодические решения первого сорта в плоской задаче  $n$  тел*. Труды инст. теор. астроном. АН СССР, 1969, 13. С. 105–168.
- [29] В. М. Алексеев. *Об одной задаче с малым параметром*. Вестн. МГУ, сер. матем., мех., 1962, 4. С. 17–27.
- [30] R. Easton. *Regularization of vector fields by surgery*. J. Diff. Equat., 1971, 10:1. P. 92–99.
- [31] Я. Г. Синай. *О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой*. Матем. сб., 1963, 63:1. С. 23–42.
- [32] В. М. Алексеев. *Квазислучайные динамические системы I, II, III*. Матем. сб., 1968, 76:1, с. 72–134; 1968, 77:4. С. 545–601; 1969, 78:1. С. 3–50.
- [33] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. Andrew. *Topological entropy*. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114:2. P. 309–319.



- [34] Е. И. Динабург. *Соотношение между топологической и метрической энтропией*. ДАН, 1970, 190:1. С. 19–22.
- [35] T. N. T. Goodman. *Relating topologic enthropy*. Bull. Lond. Math. Soc., 1971, 3:2. P. 176–180.
- [36] Б. М. Гуревич. *Топологическая энтропия счетных марковских цепей*. ДАН, 1969, 187:4. С. 715–718.
- [37] Б. М. Гуревич. *Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве путей счетного графа*. ДАН, 1970, 192:5. С. 963–965.
- [38] R. Williams. *The structure of attractors*. Actes du Congrès International des mathématiciens (Nice, Sept. 1970), Paris: Gauthier–Villars, 1971, t. 2. P. 947–951.
- [39] W. Parry. *Intrinsic Markov chains*. Trans. Amer. Math. Soc., 1964, 112:1.
- [40] K. Morse, G. A. Hedlund. *Symbolic dynamics*, I, II. Amer. Journ. Math., 1938, 60. P. 815–866; 1940, 62. P. 1–42.
- [41] S. Smale. *Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and combinatorial topology (A symposium in honaur of M. Morse)*. Princeton, 1965. P. 63–80. (Русский перевод: С. Смейл. *Диффеоморфизмы со многими периодическими точками*. М.: Мир, «Математика», 1967, 11:4. С. 88–106.)
- [42] S. Smale. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73. P. 747–817. (Русский перевод: Смейл С. *Гладкие динамические системы*. УМН, 1970, 25:1. С. 113–185.)
- [43] Я. Г. Синай. *Марковские разбиения и  $U$ -диффеоморфизмы*. Функц. анализ, 1968, 2:1. С. 64–89.
- [44] Я. Г. Синай. *Построение марковских разбиений*. Функц. анализ, 1968, 2:3. С. 70–80.
- [45] В. М. Алексеев. *Квазислучайные динамические системы. Диссертация*. Москва, 1968.

- [46] Ia. G. Sinai. *Méasures invariantes des  $Y$ -systèmes*. Actes du Congrès International des mathématiciens (Nice, Sept. 1970). Paris: Gauthier-Villars, 1971, t. 2.
- [47] Я. Г. Синай. *Гиббсовские меры в эргодической теории*. УМН, 1972, 27:4.
- [48] R. Bowen. *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*. Amer. Journ. Math., 1970, 42. P. 725–747.
- [49] Д. В. Аносов. *Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем*. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1969). Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970. С. 39–45.
- [50] В. М. Алексеев. *Перроновские множества и топологические цепи Маркова*. УМ 1969, 24:5. С. 227–228.
- [51] Ф. Р. Гантмахер. *Теория матриц*. М.: Наука, 1967.
- [52] В. М. Алексеев. *Квазислучайные колебания*. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1969). Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970. С. 33–38.

**Владимир Михайлович Алексеев**

**ЛЕКЦИИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ**

*Дизайнер М. В. Ботя  
Компьютерная подготовка И. В. Рылова  
Компьютерная графика: В. Г. Бахтиев  
Корректор Е. Ф. Осипова*

Лицензия ЛУ № 056 от 06.01.98, выданная  
Ижевской республиканской типографии.  
Подписано к печати 25.09.99. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. 9,77. Уч. изд. л. 9,23.  
Гарнитура Computer Modern Roman.  
Заказ № 1417. Тираж 1000 экз.

Типография Удмуртского госуниверситета,  
426034, ул. Университетская, 1, корп. 4.