

С-741

# СПРАВОЧНИК МАШИНОСТРОИТЕЛЯ

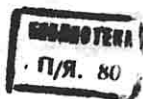
*В ШЕСТИ ТОМАХ*

Т о м 3

Главный редактор тома  
действ. член АН УССР С. В. СЕРЕНСЕН

*Издание второе,  
исправленное и дополненное*

44861



ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1956

### *АВТОРЫ ТОМА*

Л. Е. АНДРЕЕВА, канд. техн. наук, В. Л. БИДЕРМАН, канд. техн. наук, С. В. БОЯРШИНОВ, канд. техн. наук, А. С. ВОЛЬМИР, д-р техн. наук проф., Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ, канд. техн. наук, С. М. ЗАСЕДАТЕЛЕВ, инж., Р. С. КИНАСОШВИЛИ, д-р техн. наук, проф., А. Д. КОВАЛЕНКО, член-корр. АН УССР, В. М. МАКУШИН, канд. техн. наук, Н. Н. МАЛИНИН, канд. техн. наук, С. Д. ПОНОМАРЕВ, д-р техн. наук проф., Н. И. ПРИГОРОВСКИЙ, д-р техн. наук проф., С. В. СЕРЕНСЕН, действ. член АН УССР, И. М. ТЕТЕЛЬБАУМ, канд. техн. наук, И. И. ТРАПЕЗИН, канд. техн. наук, А. А. УМАНСКИЙ, д-р техн. наук проф., В. И. ФЕОДОСЬЕВ, д-р техн. наук проф.

*Редактор канд. техн. наук И. И. Трапезин*

Редактор графических работ инж. В. Г. Карганов

---

*Редакция справочной литературы  
Зав. редакцией инж. М. Е. Маркус*

*Адрес редакции: Москва, Третьяковский проезд, д. 1, Машгиз*

## СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения . . . . .	1	<i>Глава IV. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ</i> (д-р техн. наук проф. А. А. Уманский) . . . . .	169
<i>Глава I. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ</i> (д-р техн. наук проф. Н. И. Пригоровский и канд. техн. наук И. И. Трапезник) . . . . .	5	Качественная характеристика тонкостенных стержней . . . . .	169
Напряжения . . . . .	5	Напряжения и деформации при свободном кручении стержня с открытым профилем . . . . .	173
Деформации . . . . .	11	Напряжения и деформации при свободном кручении стержня с замкнутым профилем . . . . .	173
Зависимости между напряжениями и деформациями в пределах упругости . . . . .	13	Сложное сопротивление тонкостенных стержней . . . . .	174
Зависимости между напряжениями и деформациями при пластической деформации . . . . .	17	Короткий тонкостенный стержень, защемленный одним или двумя концами . . . . .	183
Поле напряжений . . . . .	19	Устойчивость центрально и внецентренно сжатых стержней с открытым тонкостенным профилем . . . . .	184
<i>Глава II. РАСЧЕТ БРУСА</i> . . . . .	21	Общая устойчивость балок при поперечном изгибе . . . . .	186
Расчет прямых брусков (д-р техн. наук проф. Н. И. Пригоровский) . . . . .	21	<i>Глава V. РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК</i> (д-р техн. наук проф. А. С. Вольмир) . . . . .	190
Центральное напряжение и сжатие . . . . .	21	Общие понятия . . . . .	190
Сдвиг (срез и скальвание) . . . . .	26	Расчет пластинок на изгиб . . . . .	191
Кручение . . . . .	27	Расчет толстых плит . . . . .	197
Геометрические характеристики сечения . . . . .	33	Расчет пластинок на устойчивость . . . . .	198
Поперечные силы и изгибающие моменты в однопролетных балках . . . . .	50	<i>Глава VI. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК</i> (д-р техн. наук проф. В. И. Феодосьев) . . . . .	203
Поперечные силы и изгибающие моменты в многопролетных балках на упругом основании при неподвижной нагрузке (канд. техн. наук Ф. М. Диментберг) . . . . .	66	Расчет симметричных тонких оболочек . . . . .	203
Поперечные силы и изгибающие моменты в балках при подвижной нагрузке (Ф. М. Диментберг) . . . . .	78	Расчет на жесткость оболочек большой гибкости (канд. техн. наук Л. Е. Андреева) . . . . .	210
Напряжения в балках и расчет их на прочность . . . . .	86	<i>Глава VII. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ</i> (канд. техн. наук С. В. Бояришинов) . . . . .	219
Энергия деформации изгиба . . . . .	95	Толстостенный цилиндр при действии внутреннего и наружного давления . . . . .	219
Перемещения в балках . . . . .	95	Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей . . . . .	220
Сложное сопротивление . . . . .	101	Графический способ определения напряжений в толстостенных цилиндрах . . . . .	221
Расчет кривых и витых брусков (д-р техн. наук проф. С. Д. Пономарев) . . . . .	112	Скрепленные и автоскрепленные цилиндры . . . . .	222
Напряжения и деформации плоских кривых брусков большой кривизны . . . . .	112	Температурное напряжение в толстостенном цилиндре . . . . .	224
Напряжения у винтовых брусков круглого поперечного сечения . . . . .	117	Толстостенные цилиндры при действии переменной по длине осесимметричной нагрузки . . . . .	225
Расчет на изгиб стержней большой гибкости (инж. С. М. Заседателев) . . . . .	119	Расчет прессовых посадок при различной длине сопрягаемых деталей . . . . .	227
Введение . . . . .	119	Толстостенный шар, подвергнутый действию давлений (д-р техн. наук проф. В. И. Феодосьев) . . . . .	227
Графическое решение . . . . .	120	<i>Глава VIII. РАСЧЕТ ДВИЖУЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ</i> (д-р техн. наук проф. С. Д. Пономарев и канд. техн. наук Н. Н. Малинин) . . . . .	229
Графоаналитическое решение . . . . .	124	Расчет движущихся стержней . . . . .	229
<i>Глава III. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ</i> (д-р техн. наук проф. А. А. Уманский и канд. техн. наук Ф. М. Диментберг) . . . . .	140	Расчет вращающихся винтовых цилиндрических пружин . . . . .	234
Расчет статически определимых ферм . . . . .	140		
Расчет статически определимых рам . . . . .	149		
Определение перемещений . . . . .	150		
Расчет статически неопределимых систем . . . . .	156		

Напряжения в сплошных и полых вращающихся валах . . . . .	236	Удар по буферу . . . . .	392
Расчет вращающихся дисков . . . . .	237	Ударное нагружение системы с двумя степенями свободы . . . . .	393
Расчет вращающихся оболочек . . . . .	265	Продольный удар по стержням с распределенной массой . . . . .	394
<b>Глава IX. РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ</b> (канд. техн. наук <i>Н. Н. Малинин</i> ) . . . . .	271	Волновой метод расчета усилий и деформаций при ударе по цилиндрическим винтовым пружинам . . . . .	398
Расчеты деталей с учетом пластических деформаций . . . . .	271	Упрощенные методы расчета на удар . . . . .	399
Расчеты с учетом ползучести . . . . .	289	Упрощенный расчет удара упругого тела о неподвижную преграду или соударения двух упругих тел . . . . .	401
<b>Глава X. РАСЧЕТЫ НА СТАТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ</b> (канд. техн. наук <i>В. М. Макушин</i> ) . . . . .	308	<b>Глава XIII. МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ</b> (д-р техн. наук проф. <i>Н. И. Пригорский</i> ) . . . . .	403
Устойчивость сжатых прямолинейных стержней . . . . .	308	Концентрация напряжений . . . . .	403
Устойчивость прямолинейных естественно завитых сжатых стержней . . . . .	323	Контактные напряжения . . . . .	418
Устойчивость сжато-скрученных стержней . . . . .	324	<b>Глава XIV. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ</b> (действ. член АН УССР С. В. Серенсен) . . . . .	428
Устойчивость круговых колец . . . . .	324	Основные понятия и характеристики . . . . .	428
Устойчивость плоской формы изгиба прямолинейных и криволинейных балок . . . . .	325	Прочность при статических напряжениях . . . . .	436
Устойчивость цилиндрических витых пружин сжатия . . . . .	330	Прочность при переменных напряжениях . . . . .	447
<b>ГЛАВА XI. КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ</b> (канд. техн. наук <i>И. М. Тетельбаум</i> ) . . . . .	333	Прочность при повторных перенапряжениях . . . . .	472
Основные понятия и зависимости . . . . .	333	Долговечность . . . . .	481
Расчет элементов конструкций на колебания . . . . .	353	Прочность при ударной нагрузке . . . . .	481
Экспериментальное исследование колебаний . . . . .	378	Прочность при контактных напряжениях . . . . .	481
<b>ГЛАВА XII. РАСЧЕТ НА УДАРНЫЕ НАГРУЗКИ</b> (канд. техн. наук <i>В. Л. Бидерман</i> ) . . . . .	390	Величины запасов прочности и допускаемых напряжений . . . . .	482
Введение . . . . .	390	<b>Глава XV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ, НАПРЯЖЕНИЙ И УСИЛИЙ</b> (д-р техн. наук проф. <i>Н. И. Пригорский</i> ) . . . . .	483
Соударение массивных тел . . . . .	390	Тензометрирование . . . . .	489
Удар жесткого груза по упругой системе с весьма малой собственной массой . . . . .	391	Измерения упругих перемещений . . . . .	511
		Поляризационно-оптический метод исследования распределения напряжений . . . . .	519
		<b>ПРЕДМЕТНЫЙ АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b> ( <i>С. Л. Хасьянский</i> ) . . . . .	535

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A, B$  и  $R$  — опорные реакции.  
 $A$  — амплитуда вынужденных колебаний.  
 $a$  — амплитуда свободных колебаний.  
 $a_n$  — ударная вязкость при надрезе образца, удельная ( $\kappaГМ/см^2$  или  $\kappaГсм/см^2$ ).
- $d$  и  $D$  — диаметр вала или отверстия ( $см, мм$ ).  
 $E$  — модуль продольной упругости ( $\kappaГ/см^2$ ).  
 $E_T$  — модуль упрочнения ( $\kappaГ/см^2$ ).  
 $F$  — площадь поперечного сечения ( $см^2$ ).  
 $F_{нт}$  — полезная площадь поперечного сечения (за вычетом ослабления).  
 $f$  — стрела прогиба ( $см, мм$ ); частота колебаний ( $сек^{-1}, гц$ ).  
 $G$  — модуль сдвига ( $\kappaГ/см^2$ ).
- $h, b$  — размеры прямоугольного сечения детали, соответственно высота и ширина.  
 $J$  — осевой момент инерции сечения ( $см^4$ ).  
 $J_1$  и  $J_2$  — главные осевые моменты инерции сечения по отношению к осям 1 и 2.  
 $J_p$  — полярный момент инерции ( $см^4$ ).  
 $i$  — радиус инерции сечения ( $см$ ).  
 $k_s$  — коэффициент, характеризующий влияние концентрации на прочность при статической нагрузке.
- $k_\sigma = \frac{\sigma-1}{\sigma-1\kappa}$  — эффективный коэффициент концентрации напряжений при переменных нормальных напряжениях.
- $k_\tau = \frac{\tau-1}{\tau-1\kappa}$  — то же для касательных напряжений.
- $(k_\sigma)_D$  — коэффициент, отображающий влияние концентрации нормальных напряжений и абсолютных размеров, а также влияние состояния поверхности и поверхностного слоя.
- $(k_\tau)_D$  — то же для касательных напряжений.
- $L$  — внешний момент ( $\kappaГсм, тм$ ).  
 $l, L$  — длина, пролет ( $см$ ).  
 $M$  — изгибающий момент ( $\kappaГсм, тм$ ).  
 $M_\kappa$  — крутящий момент ( $\kappaГсм, тм$ ).  
 $N$  — число циклов.

$N, S, P$  — продольное (осевое) усилие ( $\kappa\Gamma$ ).

$n$  — запас прочности.

$n_y$  — запас устойчивости.

$P$  — сосредоточенная сила, внешняя нагрузка ( $\kappa\Gamma, т$ ).

$P_{кр}$  — критическая сила, критическая нагрузка.

$p, q$  — нагрузка на единицу длины или поверхности, равнодействующая напряжения ( $\kappa\Gamma/см, т/м$  или  $\kappa\Gamma/см^2, т/м^2$ ).

$Q$  — нагрузка, вес, поперечная сила ( $\kappa\Gamma, т$ ).

$q$  — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

$r, R, \rho$  — плечо, радиус.

$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  — коэффициент асимметрии цикла.

$s$  — истинное нормальное напряжение, касательная нагрузка на единицу длины или поверхности.

$S$  — статический момент площади ( $см^3$ ).

$s_{\kappa}$  — истинное сопротивление разрушению.

$T$  — время (сек.); период (сек.); кинетическая энергия ( $\kappa\Gamma\text{см}$ ).

$t$  — истинное касательное напряжение при деформировании за пределом упругости ( $\kappa\Gamma/см^2, \kappa\Gamma/мм^2$ ), время (сек.), температура.

$t_{\kappa}$  — сопротивление срезу.

$t, \delta$  — толщина.

$U$  — потенциальная энергия деформации ( $\kappa\Gamma\text{см}, \kappa\Gamma\text{м}$ ).

$u, v, w$  — линейные перемещения соответственно по осям  $x, y, z$ .

$W$  — момент сопротивления сечения при изгибе ( $см^3$ ).

$W_p$  — полярный момент сопротивления.

$W_{\sigma p}$  — момент сопротивления сечения без учета ослабления.

$W_{нт}$  — момент сопротивления сечения с учетом его ослабления.

$x, y, z$  — координаты рассматриваемой точки; обозначения осей координат.

$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H}$  — коэффициент концентрации нормальных напряжений в пределах упругости.

$\alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_H}$  — то же для касательных напряжений.

$\beta$  — коэффициент, характеризующий влияние состояния поверхности и свойств поверхностного слоя на предел выносливости.

$\gamma$  — относительный сдвиг.

$\Delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$  — относительное изменение объема деформируемого элемента.

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — главные деформации в рассматриваемой точке.

$\epsilon$  — относительная продольная деформация.

$\epsilon_u$  — истинная продольная деформация.

$\epsilon_I$  — интенсивность деформации.

$\epsilon_e, \epsilon_p$  — соответственно упругая и пластическая продольная деформации.

$\epsilon_\sigma, \epsilon_\tau$  — коэффициенты, характеризующие влияние размеров сечения на сопротивление усталости соответственно при действии нормальных и касательных напряжений.

$\epsilon_T$  — коэффициенты, характеризующие изменение предела текучести материала в зависимости от размеров сечения детали.

$\epsilon_R$  — то же для предела прочности.

$\dot{\epsilon}$  — скорость деформации.

$\theta$  — угол поворота поперечного сечения при изгибе.

$\theta$  — момент инерции массы ( $\text{кг сек}^2 \text{ см}$ ).

$\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}$  — коэффициент разупрочнения;  $\lambda$  — гибкость стержня.

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

$\sigma$  — нормальное напряжение ( $\text{кг/см}^2, \text{кг/мм}^2$ ).

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения в рассматриваемой точке; при этом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

$\sigma_n$  — номинальное нормальное напряжение.

$\sigma_I$  — интенсивность напряжений.

$[\sigma]$  — допускаемое нормальное напряжение.

$[\sigma]_p$  — допускаемое напряжение при растяжении.

$[\sigma]_{сж}$  — то же при сжатии.

$[\sigma]_{из}$  — то же при изгибе.

$\sigma_{пр}$  — приведенное напряжение.

$\sigma_R$  — предел прочности (временное сопротивление).

$\sigma_{вр}$  — предел прочности при растяжении.

$\sigma_{всж}$  — предел прочности при сжатии.

$\sigma_{ви}$  — предел прочности при изгибе.

$\sigma_T$  — предел текучести ( $\text{кг/мм}^2, \text{кг/см}^2$ ).

$\sigma_{0,2}$  — предел текучести, соответствующий пластической деформации 0,2%.

$\sigma_{Tэ}$  — экстраполированный предел текучести.

$\sigma_{-1}$  — предел выносливости при изгибе с симметричным циклом ( $\text{кг/мм}^2; \text{кг/см}^2$ ).

$\sigma_{-1p}$  — предел выносливости при растяжении-сжатии с симметричным циклом.

$\sigma_0$  — предел выносливости при изгибе для пульсирующего цикла.

$\sigma_{сж}$  — предел выносливости при сжатии для пульсирующего цикла.

$\sigma_{-1к}$  — предел выносливости для изгиба с симметричным циклом при наличии концентрации напряжений.

$\sigma_{\max}, \tau_{\max}$  — наибольшее напряжение цикла.

$\sigma_{\min}, \tau_{\min}$  — наименьшее напряжение цикла.

$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  — среднее напряжение цикла.

$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$  — амплитуда напряжений цикла.

$\sigma_{п.л}$  — предел ползучести.

$\sigma_{п.ц}$  — предел пропорциональности.

$\sigma_{д.л}$  — предел длительной прочности.

$\sigma_y$  — предел упругости.

- $\tau$  — касательное напряжение ( $\text{кг/см}^2$ ,  $\text{кг/мм}^2$ ).  
 $\tau_n$  — номинальное касательное напряжение.  
 $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение.  
 $[\tau]_{ср}$  — допускаемое напряжение при срезе.  
 $[\tau]_к$  — то же при кручении.  
 $\tau_n$  — предел прочности при кручении.  
 $\tau_{ср}$  — предел прочности при срезе.  
 $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге.  
 $\tau_{-1}$  — предел выносливости при кручении с симметричным циклом.  
 $\tau_{-1к}$  — то же при концентрации напряжений.

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} \text{ — среднее касательное напряжение цикла.}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} \text{ — амплитуда касательных напряжений цикла.}$$

$\varphi$  — угол закручивания.

$\psi$  — относительное сужение площади поперечного сечения при разрыве.

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \text{ — коэффициент, характеризующий влияние асимметрии цикла на прочность при нормальном напряжении.}$$

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \text{ — то же, при касательном напряжении.}$$

$\omega$  — угловая скорость, угловая частота ( $\text{сек}^{-1}$ ).

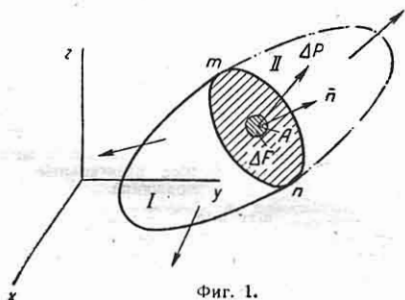


## ГЛАВА I

### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

#### НАПРЯЖЕНИЯ

Отношение внутренней силы, действующей на небольшую часть мысленно проведенного сечения  $m-n$  (фиг. 1) нагруженного тела, к величине площади  $\Delta F$  этой части сечения приближается к некоторому пределу, если эту площадь уменьшать до бесконечно малых размеров, стягивая контур, ограничивающий ее, к точке  $A$ . Предел этого отно-



Фиг. 1.

шения называется *напряжением* и определяет интенсивность внутренних сил, действующих на данную площадку в рассматриваемой точке  $A$  тела. Напряжения не только различны в различных точках рассматриваемого тела, но различны в одной и той же точке по различно наклоненным площадкам.

Полное напряжение в точке  $A$  с координатами  $(x, y, z)$  на площадке с нормалью  $\bar{n}$

$$p_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}, \quad (1)$$

где  $\Delta P$  — элементарная сила, передающаяся от отброшенной части II тела на рассматриваемую часть I.

Размерность напряжения —  $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$   
(кг/см<sup>2</sup>, кг/мм<sup>2</sup>).

Нормальное напряжение  $\sigma_n$  равно проекции  $p_n$  на нормаль  $n$ :

$$\sigma_n = p_n \cos(p_n, n). \quad (2)$$

Касательное напряжение  $\tau_n$  равно проекции  $p_n$  на плоскость площадки  $\Delta F$ :

$$\tau_n = p_n \sin(p_n, n). \quad (3)$$

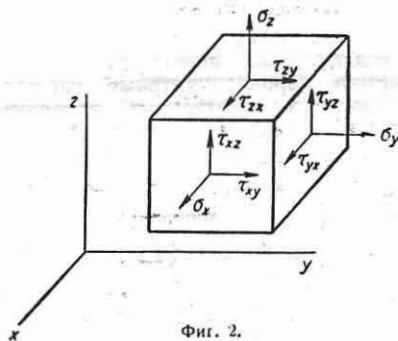
Компоненты напряжения. Напряжение на любой площадке в рассматриваемой точке может быть определено, если известны в данной точке напряжения на каких-либо трех взаимно перпендикулярных площадках. Проекции на координатные оси  $x, y$  и  $z$  напряжений  $p_x, p_y, p_z$ , действующих на площадки, перпендикулярные к этим осям, обозначаются (фиг. 2) так:

$$p_x: \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz};$$

$$p_y: \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz};$$

$$p_z: \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}.$$

Величины  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots, \tau_{zy}$  называются *компонентами напряжения* в точке  $A$ .



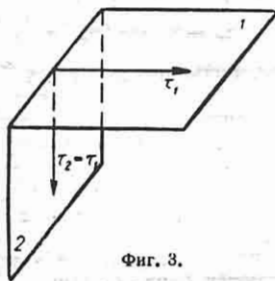
Фиг. 2.

Первый индекс показывает, какой оси перпендикулярна площадка действия напряжения, второй — какой оси парал-

тельно напряжение. Например, напряжение  $\tau_{zy}$  — касательное напряжение, параллельное оси  $y$  и действующее на площадку, перпендикулярную к оси  $z$ .

**Правило знаков для компонентов напряжений.** Если внешняя по отношению к рассматриваемой части тела нормаль к площадке направлена в сторону параллельной ей оси координат, то положительными направлениями компонентов напряжения считаются положительные направления координатных осей. Согласно этому правилу нормальное напряжение всегда положительно, если оно растягивающее. На фиг. 2 все компоненты напряжения положительны.

**Свойство парности касательных напряжений.** Если на площадку 1 (фиг. 3) действует касательное напря-



Фиг. 3.

жение  $\tau_1$ , то на площадку 2, перпендикулярную к  $\tau_1$ , действует напряжение

$$\tau_2 = \tau_1. \quad (4)$$

Согласно этому

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (5)$$

**Главные напряжения.** Через каждую площадку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называются *главными площадками* в рассматриваемой точке, а направления нормалей к ним — *главными направлениями*. Действующие на главных площадках нормальные напряжения называются *главными напряжениями* и обозначаются через  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ; при этом  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Нормальные напряжения в данной точке достигают на главных площадках экстремальных значений.

Положение главных площадок и величины главных напряжений определяются по формулам табл. 1.

Таблица 1

**Формулы для напряжений по наклонным площадкам для главных напряжений и для наибольших касательных напряжений**

Направления напряжений и углов поворота, обозначенные на чертежах в тексте таблицы, считаются положительными. Если при вычислениях по приведенным формулам какая-либо величина получается отрицательной, то ее направление — обратное предполагаемому на чертеже. Указанные напряжения действуют на заштрихованную часть тела.

1. *Линейное напряженное состояние*

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi; \quad (1)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi.$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sigma_x \quad (2)$$

(для всех площадок, имеющих нормаль под углом 45° и 135° к направлению  $\sigma_x$ ).

2. *Плоское напряженное состояние. Чистый сдвиг*

$$\sigma_n = \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad (3)$$

$$\tau_n = -\tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

Главные напряжения

$$\sigma_1 = \tau_{xy} \text{ и } \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

(при  $\varphi = 45^\circ$  и  $\varphi = 135^\circ$ ).  
Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm \tau_{xy} \quad (4)$$

(при  $\varphi = 45^\circ$  или  $\varphi = 135^\circ$ ). Эти значения касательных напряжений являются наибольшими и наименьшими для площадок, перпендикулярных к плоскости чертежа.

3. *Плоское напряженное состояние; заданы напряжения по главным площадкам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$*

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi; \quad (5)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi.$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6)$$

(при  $\varphi = 45^\circ$  или  $\varphi = 135^\circ$ ). Эти значения касательных напряжений являются наибольшими и наименьшими для площадок, перпендикулярных к плоскости чертежа. В случае, если  $\sigma_1 > 0$ , наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклонных под углом 45° к плоскости напряжений, и равны

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (6a)$$

Продолжение табл. 1

4. Плоское напряженное состояние; простое растяжение или сжатие с чистым сдвигом

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \sigma_x (1 + \cos 2\varphi) + \tau_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi. \quad (7)$$

Главные напряжения на площадках, перпендикулярных к плоскости чертежа,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8)$$

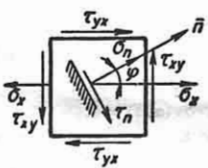
Углы  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ , определяющие положение главных площадок, находятся из формулы

$$\tan \varphi_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad (9)$$

где  $i = 1$  или  $2$ .  
Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (10)$$

действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.



5. Плоское напряженное состояние. Общий случай

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad (11)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

Главные напряжения на площадках, перпендикулярных к плоскости чертежа,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (12)$$

Углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  для главных площадок определяются по формулам

$$\tan \varphi_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}},$$

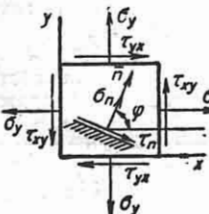
$$\tan \varphi_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (13)$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (14)$$

действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам. В случае, если  $\sigma_2 > 0$ , то наибольшее из всех касательных напряжений будет иметь место на площадках, наклонных под углом  $45^\circ$  к плоскости напряжений, и равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$



Продолжение табл. 1

6. Плоское напряженное состояние. Общий случай

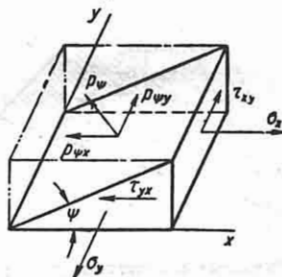
Напряжения на площадке, параллельной направлению  $\sigma_y$  и наклоненной под углом  $\psi$  к плоскости  $xy$ ,

$$\rho_{\psi x} = \sigma_x \sin \psi; \quad (15)$$

$$\rho_{\psi y} = -\tau_{xy} \sin \psi \quad (16)$$

расположены в плоскости, параллельной плоскости  $xy$ :

$$\rho_{\psi} = \sqrt{\rho_{\psi x}^2 + \rho_{\psi y}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} \sin \psi. \quad (17)$$



Нормальное напряжение

$$\sigma_{\psi} = \sigma_x \sin^2 \psi. \quad (18)$$

Касательное напряжение

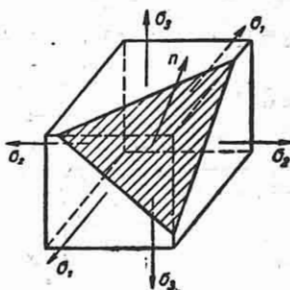
$$\tau_{\psi} = \sin \psi \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2} (1 + \cos 2\psi) + \tau_{xy}^2}. \quad (19)$$

7. Объемное напряженное состояние. Заданы главные напряжения

Нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $n$ :

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z); \quad (20)$$

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2(n, x) + \sigma_2^2 \cos^2(n, y) + \sigma_3^2 \cos^2(n, z) - [\sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z)]^2}. \quad (21)$$



Продолжение табл. 1

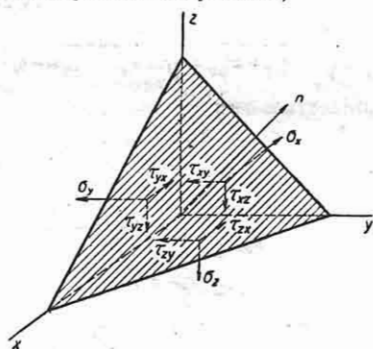
Продолжение табл. 1

На площадке, равнонаклоненной к трем главным напряжениям (октаэдрическая площадка), нормальное и касательное напряжения равны

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

(октаэдрические напряжения)



Экстремальные значения касательных напряжений

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Наибольшее касательное напряжение  $\tau_1$  действует на площадке, перпендикулярной ко второй главной площадке и делящей угол между первой и третьей главными площадками пополам.

8. Объемное напряженное состояние. Общий случай. Заданы компоненты напряжения в рассматриваемой точке.

Нормальное напряжение на площадке с нормалью  $\bar{n}$

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \sigma_x \cos^2(n, x) + \sigma_y \cos^2(n, y) + \\ & + \sigma_z \cos^2(n, z) + 2\tau_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) + \\ & + 2\tau_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + \\ & + 2\tau_{zx} \cos(n, z) \cos(n, x). \end{aligned} \quad (22)$$

Составляющие напряжения на площадке с нормалью  $\bar{n}$ , параллельные осям  $x, y, z$ ,

$$\begin{aligned} p_{nx} = & \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \\ & + \tau_{zx} \cos(n, z); \\ p_{ny} = & \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \\ & + \tau_{zy} \cos(n, z); \\ p_{nz} = & \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \\ & + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (23)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью  $\bar{n}$

$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2} \quad (24)$$

направлено к нормали  $\bar{n}$  под углом  $\nu$ , определяемым равенством

$$\cos \nu = \frac{\tau_n}{p_n},$$

где полное касательное напряжение

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \quad (25)$$

Главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  в рассматриваемой точке равны трем корням уравнения

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + \\ & + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma - \\ & - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \\ & - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Направляющие косинусы нормали каждой из главных площадок определяются из системы следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_l) \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \\ + \tau_{xz} \cos(n, z) = 0; \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + (\sigma_y - \sigma_l) \cos(n, y) + \\ + \tau_{yz} \cos(n, z) = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \\ + (\sigma_z - \sigma_l) \cos(n, z) = 0; \end{aligned}$$

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1. \quad (28)$$

Из первых трех уравнений только два являются независимыми.

**Основные типы напряженных состояний.** *Линейное (одноосное)* напряженное состояние — два главных напряжения равны нулю (например, в точках бруса при простом растяжении или при чистом изгибе). На любой площадке, параллельной отличному от нуля главному напряжению, нормальное и касательное напряжения равны нулю. *Плоское (двухосное)* напряженное состояние — одно из трех главных напряжений равно нулю (например, в точках пластинки, нагруженной силами, лежащими в ее срединной плоскости; в точках ненагруженной поверхности детали). Для плоского напряженного состояния главные напряжения обозначаются через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ). Полное напряжение на любой площадке параллельно плоскости, в которой действуют главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

*Объемное (трехосное)* — все три главных напряжения отличны от нуля.

Всякое напряженное состояние можно рассматривать как сумму двух напряженных состояний I и II. Компоненты напряженного состояния I

$$\sigma_x - \sigma; \quad \sigma_y - \sigma; \quad \sigma_z - \sigma; \quad \tau_{xy}; \quad \tau_{yz}; \quad \tau_{zx} \quad (6)$$

суть компоненты так называемого *девиатора напряжений*. Компоненты напряженного состояния II

$$\sigma; \quad \sigma; \quad \sigma; \quad 0; \quad 0; \quad 0 \quad (7)$$

суть компоненты *шарового тензора*

Здесь 
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (8)$$

( $\sigma$  — среднее нормальное напряжение). Зависимости между напряжениями в рассматриваемой точке. Напряжения на любых площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, вычисляются по формулам табл. 1.

Зависимости между компонентами напряжений в рассматриваемой точке, отнесенными к осям  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ , — инварианты напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} = \\ &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 &= \\ &= \sigma_{x'} \sigma_{y'} + \sigma_{y'} \sigma_{z'} + \sigma_{z'} \sigma_{x'} - \tau_{x'y'}^2 - \\ &- \tau_{y'z'}^2 - \tau_{z'x'}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 &+ \\ + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} &= \sigma_{x'} \sigma_{y'} \sigma_{z'} - \sigma_{x'} \tau_{y'z'}^2 - \\ - \sigma_{y'} \tau_{z'x'}^2 - \sigma_{z'} \tau_{x'y'}^2 &+ 2\tau_{x'y'} \tau_{y'z'} \tau_{z'x'} = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Интенсивностью напряжений в данной точке называется величина

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

**Круговая диаграмма напряжений (круг Мора).** Круги напряжений вычерчиваются по известным напряжениям на трех взаимно перпендикулярных площадках в рассматриваемой точке детали и позволяют графически находить величины напряжений на различных площадках в этой точке.

Способы построения кругов напряжений для основных случаев приведены в табл. 2.

Эллипсоид напряжений применяется для изображения напряженного состояния в рассматриваемой точке; уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Величины полных напряжений по наклонным площадкам представляются радиусами-векторами, концы которых лежат на поверхности эллипсоида; полуоси эллипсоида напряжений равны величинам  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Эллипсоид напряжений может быть в виде шара ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ; все площадки — главные), эллипсоида вращения (два главных напряжения равны между собой) и может переходить

Построение кругов напряжений для данной точки детали  
Масштаб по оси  $\sigma$  и  $\tau$ : 1 см чертежа —  $n$  кг/см<sup>2</sup>

Таблица 2

Заданы	Графически определяются	Построение. (см. пояснения)
<p>1. Плоское напряженное состояние. Главные напряжения <math>\sigma_1</math> и <math>\sigma_2</math> и главные площадки <math>\bar{A}</math> и <math>\bar{B}</math>, на которых они действуют</p>	<p>Напряжения на площадках, перпендикулярных к площадке, свободной от напряжений (на площадках, перпендикулярных к плоскости чертежа)</p>	
<p>2. Плоское напряженное состояние. Напряжения <math>\sigma_x, \sigma_y</math> и <math>\tau_{xy}</math> на двух взаимно перпендикулярных площадках, нормальных к площадкам, свободным от напряжений</p>	<p>Главные напряжения <math>\sigma_1</math> и <math>\sigma_2</math> и положение главных площадок</p>	

Заданы	Графически определяются	Построение (см. пояснения)
3. Объемное напряженное состояние. Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2,$ и $\sigma_3$ и главные площадки	Напряжения на наклонной площадке, нормаль к которой образует углы $\alpha, \beta$ и $\gamma$ с нормальми к главным площадкам первой, второй и третьей соответственно	

## Пояснения к табл. 2:

1. Проводятся взаимно перпендикулярные оси  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  и наносятся точки  $A$  и  $B$ , координаты которых равны напряжениям, действующим на главных площадках  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . На отрезке  $BA$ , как на диаметре, строится окружность с центром  $O$ . Любая точка  $D$  окружности имеет две координаты, равные нормальным и касательным напряжениям  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  на наклонной площадке  $\bar{D}$ , нормаль к которой образует с направлением  $\sigma_1$  угол  $\varphi$ . Угол  $\varphi$  получается между осью  $\sigma_n$  и прямой, соединяющей левую точку  $B$  круга с точкой  $D$ . Если элемент, в котором рассматриваются напряжения, вычерчен так, что большее (с учетом знака) главное напряжение  $\sigma_1$  параллельно оси  $\sigma_n$ , то прямая  $BD$  будет параллельна нормали  $\bar{n}$  к площадке, проведенной в элементе, на которой напряжения  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  равны координатам точки  $D$ . Отрезок  $OD$  дает величину полного напряжения на площадке с наклоном  $\varphi$ .

Если  $\sigma_1 = \sigma_2$ , то круг напряжений переходит в точку, лежащую на оси  $\sigma_n$ .

2. Направляем ось  $\sigma_n$  по большому из заданных нормальных напряжений. Наносим точки  $D_1(\sigma_y, \tau_{xy})$  и  $D_2(\sigma_x, \tau_{xy})$ . На отрезке  $D_1D_2$ , как на диаметре, строим окружность. Точки  $A$  и  $B$  пересечения окружности с осью  $\sigma_n$  имеют абсциссы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Угол нормали к главной площадке  $l$  с осью  $x$  равен  $\varphi_0$ .

Из чертежа видно, что

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

3. От начала координат  $O$  по оси  $\sigma_n$  откладываем отрезки, равные  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$  (получаем точки  $C, B$  и  $A$ ). На отрезках  $AC, AB, BC$ , как на диаметрах, строим окружности. Величины напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ , действующих на площадке, нормаль к которой составляет углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ , находим следующим построением. В точках  $C$  и  $A$  восстанавливаем перпендикуляры к оси  $\sigma_n$ . Откладываем от этих перпендикуляров углы  $\alpha$  и  $\gamma$  так, как это показано на чертеже. Через точки  $\bar{D}_1$  и  $D_2$  пересечения сторон углов  $\alpha$  и  $\gamma$  с большой окружностью проводим дуги радиусами  $O_1D_1$  и  $O_2D_2$ . Точка пересечения этих дуг  $M$  имеет координаты, равные  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ . Из чертежа видно, что экстремальные значения касательных напряжений равны

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (11)$$

в плоский эллипс (плоское напряженное состояние), отрезок прямой (линейное напряженное состояние).

**Сложение напряженных состояний в рассматриваемой точке.** Согласно принципу независимости действия сил (при упругих деформациях) результирующее суммарное напряженное состояние находится алгебраическим сложением компонентов напряженных состояний, отнесенных к одним и тем же координатным площадкам.

Пусть  $\sigma_1^I, \sigma_2^I$  и  $\sigma_1^{II}, \sigma_2^{II}$  — главные напряжения плоских напряженных состояний I и II, соответственно, и  $\chi$  — угол между направлениями  $\sigma_1^I$  и  $\sigma_1^{II}$ . Величины и углы наклона главных напряжений суммарного напряженного состояния к направлению  $\sigma_1^I$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^I + \sigma_2^I + \sigma_1^{II} + \sigma_2^{II} \pm (\sigma_1^I - \sigma_2^I) \cos 2\varphi_0 \pm (\sigma_1^{II} - \sigma_2^{II}) \cos 2(\chi - \varphi_0) \right]; \\ \operatorname{tg} 2\varphi_0 &= \frac{(\sigma_1^{II} - \sigma_2^{II}) \sin 2\chi}{\sigma_1^I - \sigma_2^I + (\sigma_1^{II} - \sigma_2^{II}) \cos 2\chi}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

## ДЕФОРМАЦИИ

Приведенные ниже зависимости применимы для малых смещений и деформаций (упругих и пластических). Зависимости при больших смещениях и деформациях (в гибких элементах, в сильно деформируемых материалах типа резины, при технологических операциях) — см. [7].

*Компоненты деформации в рассматриваемой точке*

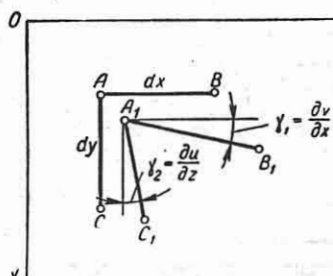
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (14)$$

Здесь  $u, v$  и  $w$  — смещения точек по осям  $x, y$  и  $z$ ; компоненты деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y$  и  $\epsilon_z$  — относительные удлинения (или укорочения) линейных элементов, параллельных до деформации осям  $x, y$  и  $z$ ;  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$  — относительные сдвиги (угловые деформации)

соответственно в плоскостях  $xy, yz, zx$ . Так, величина  $\gamma_{xy}$  представляет собой изменение прямого угла между линейными элементами  $dx$  и  $dy$ , параллель-



Фиг. 4.

ными до деформации осям  $x$  и  $y$ , происшедшее в результате деформации (фиг. 4); если  $\gamma_{xy} > 0$ , то это означает,

что угол между элементами  $dx$  и  $dy$  в результате деформации уменьшился; в противном случае он увеличился.

Относительные деформации  $\epsilon$  и  $\gamma$  выражаются отвлеченным числом или в процентах.

*Относительное изменение объема (объемное расширение) в рассматриваемой точке*

$$\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (15)$$

Относительные линейные деформации и относительные сдвиги в общем случае различны не только в различных точках, но имеют свою величину для каждого направления и для каждой пары взаимно перпендикулярных направлений в рассматриваемой точке.

*Главные направления деформации* в рассматриваемой точке — три взаимно перпендикулярных направления, для которых угловые деформации равны нулю. Линейные деформации по главным направлениям называются *главными деформациями* и обозначаются  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ ; при этом  $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ . Между главными деформациями и линейными деформациями

циями по любым трем взаимно перпендикулярным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  в рассматриваемой точке имеется зависимость

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \Delta, \quad (16)$$

где  $\Delta$  — относительное изменение объема.

**Основные типы деформаций.** По аналогии с линейным и плоским напряженным состоянием различают *линейное* и *плоское состояние деформации*, где две и соответственно одна главные деформации равны нулю.

Всякое состояние деформации можно рассматривать как сумму двух состояний деформации I и II.

Компоненты деформации состояния I:  $\epsilon_x - \epsilon$ ;  $\epsilon_y - \epsilon$ ;  $\epsilon_z - \epsilon$ ;  $\gamma_{xy}$ ;  $\gamma_{yz}$ ;  $\gamma_{zx}$  (*девиатор деформации; изменение формы*); компоненты деформации состояния II:  $\epsilon$ ;  $\epsilon$ ;  $0$ ;  $0$ ;  $0$  (*шаровой тензор; изменение объема*).

Здесь

$$\epsilon = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} = \frac{\Delta}{3}$$

есть линейная деформация в направлении, составляющем равные углы с главными деформациями;  $\Delta$  — относительное изменение объема.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

**Зависимости для деформаций по разным направлениям в рассматриваемой точке.** Зависимости для линейных деформаций по разным направлениям могут быть получены из соответствующих зависимостей, приведенных в табл. 1 для напряжений, если в последних, сохраняя те же индексы,  $\sigma$  заменить на  $\epsilon$  и  $\tau$  заменить на  $\frac{\gamma}{2}$  (аналогия между деформациями и напряжениями). Нормали к площадке, на которую действует напряжение, соответствует направлению, к которому относится деформация.

Угловые деформации для различных направлений в рассматриваемой точке можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \gamma_{r_1 r_2} &= 2\epsilon_x l_1 l_2 + 2\epsilon_y m_1 m_2 + 2\epsilon_z n_1 n_2 + \\ &+ (l_1 m_2 + m_1 l_2) \gamma_{xy} + (m_1 n_2 + n_1 m_2) \gamma_{yz} + \\ &+ (n_1 l_2 + l_1 n_2) \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\gamma_{r_1 r_2}$  — изменение прямого угла между взаимно перпендикулярными до деформации направлениями  $r_1$  и  $r_2$ ;  $l_1, m_1, n_1$  — конусы, определяющие направление  $r_1$ ;  $l_2, m_2, n_2$  — то же для  $r_2$ .

*Пример.* Заданы  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ . Выразить  $\epsilon_{r_1}$  в направлении  $r_1$ , расположенном в плоскости  $xy$ , составляющем угол  $\varphi$  с осью  $x$  и сдвиг  $\gamma_{r_1 r_2}$  между  $r_1$  и направлением  $r_2$ , перпендикулярным к направлению  $r_1$ , лежащим в плоскости  $xy$ , составляющим с осью  $x$  угол  $\varphi - 90^\circ$ .

Пользуясь первой из формул (11) табл. 1, п. 5 и заменяя в ней  $\sigma$  на  $\epsilon$  и  $\tau$  на  $\frac{\gamma}{2}$ , и формулой (17), получаем

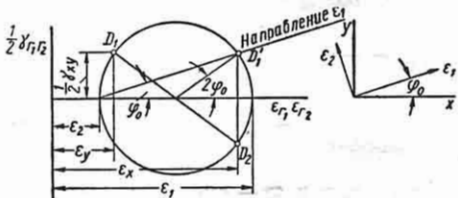
$$\begin{aligned} \epsilon_{r_1} &= \frac{1}{2} [(\epsilon_x + \epsilon_y) + (\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\varphi + \\ &+ \gamma_{xy} \sin 2\varphi]; \\ \gamma_{r_1 r_2} &= 2\epsilon_x \sin \varphi \cos \varphi - 2\epsilon_y \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ (-\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \gamma_{xy} \end{aligned}$$

или

$$\gamma_{r_1 r_2} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\varphi - \gamma_{xy} \cos 2\varphi.$$

Угловая деформация между линией, составляющей равные углы с направлениями главных деформаций, и линией действия октаэдрического касательного напряжения называется *октаэдрическим сдвигом* и равна

Круги деформаций позволяют графически находить зависимости между составляющими деформаций в рассматриваемой точке и могут быть построены по известным деформациям для трех взаимно перпендикулярных направлений в рассматриваемой точке.



Фиг. 5. Круг деформаций. Направление  $r_2$  расположено в плоскости  $(x, y)$  и перпендикулярно  $r_1$ .

Способ вычерчивания кругов деформаций тот же, что и кругов напряжений (см. табл. 2); при этом вместо  $\sigma$  и  $\tau$



откладываются соответственно  $\epsilon$  и  $\frac{\gamma}{2}$  с индексами, указывающими направления, для которых рассматривается деформация.

*Пример.* Для двух взаимно перпендикулярных направлений заданы относительные линейные деформации  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  и относительный сдвиг  $\gamma_{xy}$ . Определение главных деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  и их направлений выполняется аналогично построению в п. 2 табл. 2 (фиг. 5).

*Интенсивностью деформации* называется величина  $\epsilon_1$ , пропорциональная октаэдрическому сдвигу:

$$\epsilon_1 = \sqrt{2} \gamma. \quad (19)$$

Для чистого сдвига ( $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0; \gamma_{xy} \neq 0$ )

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{xy}. \quad (19a)$$

Для простого одноосного растяжения

$$\epsilon_x \neq 0; \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона,

$$\epsilon_1 = \frac{2}{3} (1 + \mu) \epsilon_x. \quad (19b)$$

Величина  $\epsilon_1$  используется при составлении условий пластичности (см. стр. 19).

*Однородной* называется деформация, при которой все точки тела деформируются одинаково. Перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются линейными функциями координат точек; компоненты деформации не зависят от координат точек. В общем случае деформация в пределах малого объема может рассматриваться как однородная.

## ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

*Упругостью* называется свойство материала восстанавливать после снятия нагрузки первоначальные размеры и форму детали, выполненной из данного материала. При нормальной температуре, ограниченных скорости и продолжительности деформации деталь с достаточной точностью можно считать упругой до тех пор, пока возникающие в ней напряжения не превзошли определенного

значения (*предела упругости*). При упругом состоянии имеется однозначная зависимость между нагрузкой и деформациями, формулируемая в виде закона Гука в общем виде так: деформация пропорциональна нагрузке.

Упругие характеристики устанавливаются путем механических испытаний образцов из рассматриваемого материала (см. т. 6, гл. 1) и определяются двумя из указанных в табл. 3 величинами.

Таблица 3

Зависимости между коэффициентами упругости для изотропного материала

Модуль продольной упругости $E$	$= 2(1 + \mu) G$
Модуль сдвига $G$	$= \frac{E}{2(1 + \mu)}$
Коэффициент Пуассона $\mu$	$= \frac{E}{2G} - 1$
Объемный модуль $K$	$= \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} G$

Зависимости между напряжениями и деформациями в пределах упругости для различных типов напряженных состояний даны в табл. 4.

Построение кругов напряжений по кругам деформаций — см. [12].

## Энергия упругих деформаций

Работа внешних сил при деформации переходит во внутреннюю потенциальную энергию. Величина потенциальной энергии при упругой деформации не зависит от порядка, в котором прилагались нагрузки, а зависит от их конечной величины.

Общая потенциальная энергия  $U$  деформированного тела находится суммированием потенциальной энергии по всем элементам объема тела:

$$U = \int U_0 dV. \quad (20)$$

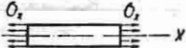
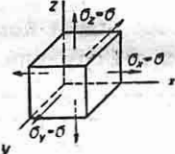
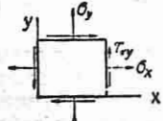
где  $U_0$  — потенциальная энергия элементарного объема, отнесенная к величине этого объема;  $dV$  — элемент объема.

Формулы для  $U_0$  приведены в табл. 5.

Зависимости между напряжениями и деформациями в пределах упругости  
(по закону Гука)

Среднее нормальное напряжение  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ ; средняя относительная линейная деформация  $\epsilon = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3}$ ; относительное изменение объема  $\Delta = 3\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ .  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона;  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  — объемный модуль.

Формулы для главных напряжений и главных деформаций в пп. 3—5 получаются заменой при  $\sigma$  и  $\epsilon$  индексов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на 1, 2, 3 и отбрасыванием членов, содержащих  $\tau$  и  $\gamma$ .

Тип напряженного состояния и обозначение действующих главных напряжений и главных деформаций	Выражение напряжений через деформации	Выражение деформаций через напряжения
<p>1. <i>Линейное напряженное состояние</i>: <math>\sigma_1</math> и <math>\epsilon_1</math></p> 	<p>Главное напряжение</p> $\sigma_1 = \sigma_x = E\epsilon_x = 3K\Delta.$ <p>Касательные напряжения по площадкам, не совпадающим с главными,</p> $\tau_n = G\gamma_n,$ <p>где <math>\gamma_n</math> — относительный сдвиг для этих площадок (см. табл. 1)</p>	<p>Относительная продольная главная деформация</p> $\epsilon_1 = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ <p>Относительная поперечная деформация (в направлении, перпендикулярном к главной деформации <math>\epsilon_1 = \epsilon_x</math>)</p> $\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$ <p>Относительное изменение объема</p> $\Delta = (1-2\mu)\frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{3K}\sigma_x;$ $\gamma_n = \frac{\tau_n}{G}$
<p>2. <i>Всестороннее равномерное растяжение или сжатие</i>:</p> $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma =$ $= \sigma_y = \sigma_z = \sigma;$ $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 =$ $= \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ 	<p>Главные напряжения, одинаковые по всем направлениям,</p> $\sigma = 3K\epsilon$	<p>Главные деформации, одинаковые по всем направлениям,</p> $\epsilon = \frac{\sigma}{3K}.$ <p>Относительное изменение объема</p> $\Delta = \frac{\sigma}{K}$
<p>3. <i>Плоское напряженное состояние</i> (в плоскости <math>xy</math>). Главные напряжения и деформации в плоскости:</p> $\sigma_1, \sigma_2 \text{ и } \epsilon_1, \epsilon_2$ $(\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ $\text{и } \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0)$ 	<p>Компоненты напряжений:</p> $\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_y);$ $\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu\epsilon_x);$ $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$	<p>Компоненты деформаций:</p> $\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y);$ $\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x);$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$ $\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y).$ <p>Относительное изменение объема</p> $\Delta = \frac{\sigma}{K}, \text{ где } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$

Продолжение табл. 4

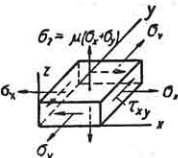
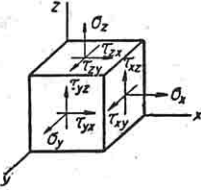
Тип напряженного состояния и обозначение действующих главных напряжений и главных деформаций	Выражение напряжений через деформации	Выражение деформаций через напряжения
<p>4. Плоская деформация (в плоскости <math>xu</math>). Главные напряжения и деформации в плоскости <math>xu</math>:</p> <p><math>\sigma_1, \sigma_2</math> и <math>\epsilon_1, \epsilon_2</math></p> <p><math>(\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0</math> и <math>\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)</math></p>  <p><math>\sigma_y = \mu(\sigma_x + \sigma_y)</math></p>	<p>Заданная компонентами <math>\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}</math> деформация рассматривается состоящей из двух: шарового тензора деформации (относительное изменение объема) и диватора деформации (чистый сдвиг). Компоненты напряжений:</p> <p><math>\sigma_x = 3K\epsilon + 2G(\epsilon_x - \epsilon);</math> <math>\sigma_y = 3K\epsilon + 2G(\epsilon_y - \epsilon);</math> <math>\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y); \tau_{xy} = G\gamma_{xy}</math></p> <p>Первое слагаемое в формулах для <math>\sigma_x</math> и <math>\sigma_y</math> соответствует объемной деформации, второе — чистому сдвигу</p>	<p>Компоненты деформаций:</p> <p><math>\epsilon_x = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_x - \mu\sigma_y];</math> <math>\epsilon_y = \frac{1+\mu}{E} [(1-\mu)\sigma_y - \mu\sigma_x];</math> <math>\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}</math></p> <p>Относительное изменение объема</p> <p><math>\Delta = \frac{\sigma}{K}</math></p>
<p>5. Объемное напряженное состояние (общий случай):</p> <p><math>\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3</math> и <math>\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3</math></p> 	<p>Заданная компонентами <math>\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}</math> деформация рассматривается состоящей из двух, как указано в п. 4. Компоненты напряжений:</p> <p><math>\sigma_x = 3K\epsilon + 2G(\epsilon_x - \epsilon);</math> <math>\sigma_y = 3K\epsilon + 2G(\epsilon_y - \epsilon);</math> <math>\sigma_z = 3K\epsilon + 2G(\epsilon_z - \epsilon);</math> <math>\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \tau_{zx} = G\gamma_{zx}</math></p> <p>Первое слагаемое в формулах для <math>\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z</math> соответствует объемной деформации, второе — чистому сдвигу. Зависимость между <math>\sigma</math> и <math>\Delta</math></p> <p><math>\sigma = K\Delta.</math></p> <p>Зависимость между интенсивностью напряжений <math>\sigma_i</math> и интенсивностью деформаций <math>\epsilon_i</math></p> <p><math>\sigma_i = 3G\epsilon_i,</math></p> <p>где</p> <p><math>\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.</math> <math>\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}</math></p>	<p>Компоненты деформаций:</p> <p><math>\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];</math> <math>\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];</math> <math>\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)];</math> <math>\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};</math> <math>\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};</math> <math>\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.</math></p> <p>Относительное изменение объема:</p> <p><math>\Delta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma}{K}.</math></p>

Таблица 5

Формулы для потенциальной энергии  $U_0$  единицы объема при упругой деформации элементарного объема  $dV$

$E$ ,  $G$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона;  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  — объемный модуль.

Формулы для  $U_0$  в пп. 2 и 3 записываются через главные напряжения или главные деформации заменой при  $\sigma$  и  $\varepsilon$  индексов  $x, y, z$  соответственно на 1, 2, 3 и отбрасыванием членов, содержащих  $\tau$  и  $\gamma$

Тип напряженного состояния и обозначение главных деформаций	Величина $U_0$ , выраженная через деформации	Величина $U_0$ , выраженная через напряжения
1. <i>Линейное напряженное состояние:</i> $\sigma_1$ и $\varepsilon_1$	$\frac{E\varepsilon_x^2}{2}$	$\frac{\sigma_x^2}{2E}$
2. <i>Чистый сдвиг в одной плоскости:</i> $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$ ; $\sigma_3 = 0$ ; $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \frac{\gamma}{2}$ ; $\varepsilon_3 = 0$	$\frac{G\gamma_{xy}^2}{2}$	$\frac{\tau_{xy}^2}{2G}$
3. <i>Плоское напряженное состояние в плоскости <math>xu</math>:</i> $\sigma_1, \sigma_2$ ; $\sigma_3 = 0$ и $\varepsilon_1$ ; $\varepsilon_2$ ; $\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$	$\left(\frac{K}{2} - \frac{G}{3}\right)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 +$ $+ G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + \frac{G}{2}\gamma_{xy}^2$	$\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E}\sigma_x\sigma_y +$ $+ \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2$
4. <i>Объемное напряженное состояние (общий случай):</i> $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	$G\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]$ $U$ может быть представлена как сумма относительной энергии изменения объема: $U_0(0) = \frac{K\Delta^2}{2}$ и относительной энергии изменения формы: $U_c(\Phi) = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = 3G\gamma^2$ ; $U_c = \frac{K\Delta^2}{2} + 3G\gamma^2$ Здесь $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ (относительное изменение объема)	$\frac{1}{4G}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$ $U_0$ может быть представлена как сумма относительной энергии изменения объема: $U_0(0) = \frac{\sigma^2}{2K}$ и относительной энергии изменения формы: $U_c(\Phi) = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i = \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{G}$ ; $U_c = \frac{\sigma^2}{2K} + \frac{3}{2}\frac{\tau^2}{2G}$ Здесь $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ (среднее нормальное напряжение)

$$\tau = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

(октаэдрическое касательное напряжение);

$$\gamma = \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

(октаэдрический сдвиг)

## ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

**Пластичностью** называется способность материала сохранять полностью или частично получившуюся под действием внешних сил деформацию по прекращении действия этих сил. В зависимости от соотношения величин остаточной и упругой деформаций, получаемых перед наступлением разрушения, материал считается пластичным или хрупким. Однако пластичность и хрупкость не могут быть отнесены только к материалу: один и тот же материал в зависимости от характера напряженного состояния, температуры и скорости деформирования может проявлять себя как пластичный или как хрупкий (см. гл. XI).

### Стадии пластических деформаций:

а) **начало текучести** — пластические деформации одного порядка с упругими;  
б) **пластическое состояние при малых деформациях** — пластические деформации велики по сравнению с упругими, но малы по сравнению с первоначальными размерами детали (при расчетах квадратами и произведениями деформаций можно пренебречь по сравнению с их величинами);

в) **пластическое состояние при больших деформациях** (технологические пластические деформации) — размеры детали меняются значительно.

Расчет на прочность и жесткость проводится с применением теории малых упруго-пластических деформаций.

**Активная и пассивная деформации.** Различают деформации и нагружения простые (при нагружении детали все нагрузки изменяются в равной пропорции) и сложные (в противоположном случае) [3]. Простая деформация в данный момент называется активной, если интенсивность деформации  $\epsilon_1$  имеет значение, превышающее все предшествующие ее значения, в противоположном случае — пассивной. При простом нагружении получается активная деформация, при разгрузке — пассивная.

В случае активной упруго-пластической деформации: 1) направления главных деформаций и главных напряжений совпадают; 2) объемная деформация пропорциональна среднему нормальному напряжению, т. е.  $\Delta = K\sigma$ ; 3) интенсив-

ность напряжений  $\sigma_1$  связана с интенсивностью деформаций  $\epsilon_1$  зависимостью  $\sigma_1 = \Phi(\epsilon_1)$ , устанавливаемой экспериментально из испытания на растяжение (см. стр. 18).

**Зависимости между компонентами напряжений и деформаций** (при малых упруго-пластических деформациях в случае активной деформации):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{2\sigma_1}{3\epsilon_1}(\epsilon_x - \epsilon); & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1}{3\epsilon_1} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{2\sigma_1}{3\epsilon_1}(\epsilon_y - \epsilon); & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_1}{3\epsilon_1} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{2\sigma_1}{3\epsilon_1}(\epsilon_z - \epsilon); & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_1}{3\epsilon_1} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} (21)$$

Если материал несжимаем ( $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$ ), то уравнения (21), соответственно, упрощаются.

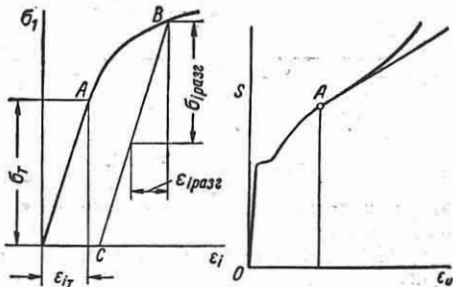
При разгрузке (фиг. 6) зависимость между  $\sigma_1$  и  $\epsilon_1$  та же, что и при нагрузке при  $\sigma_1 < \sigma_T$  (прямая разгрузки BC параллельна прямой нагрузки OA в упругой стадии), т. е.

$$\sigma_1 \text{ разг} \approx D \epsilon_1 \text{ разг}, \quad (22)$$

где

$$D = \frac{3E}{2(1 + \mu)} = 3G.$$

**Истинная диаграмма деформирования.** Она дает зависимость напряжения от деформации в условиях пла-



Фиг. 6.

Фиг. 7.

стичности и получается обычно из опытов на простое растяжение. В истинной диаграмме растяжения (фиг. 7) по ординатам откладываются напряжения  $\sigma$ , определяемые исходя из величины площади  $F_{II}$  в месте наибольшего сужения (по шейке) образца, получаемой при

каждом данном значении растягивающей силы  $P$ :

$$s = \frac{P}{F_u}$$

(истинное напряжение).

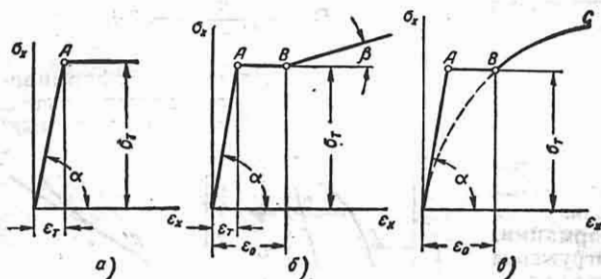
По оси абсцисс в истинной диаграмме растяжения откладывается одна из следующих величин: относительное сужение в шейке  $\psi = \frac{F - F_1}{F} 100\%$ ; пол-

ное относительное удлинение образца в шейке  $\delta = \frac{\psi}{1 - \psi}$ ; истинное относительное удлинение  $\epsilon_u = \ln \frac{l_1}{l_0}$ . Здесь

$F$  и  $F_1$  — первоначальная площадь поперечного сечения и площадь сечения шейки при каждом значении  $P$ ;  $l_0$  и  $l_1$  — начальная длина образца и длина его при каждом значении  $P$ .

Для материалов, находящихся в пластическом состоянии, при расчете обычно принимается, что истинные диаграммы растяжения и сжатия совпадают. Методы построения истинных диаграмм деформирования см. т. 6, гл. 1.

**Диаграммы деформирования.** В соответствии с формами кривых они сво-



Фиг. 8.

дятся к трем нижеприведенным упрощенным схемам.

*а) Упрочнение отсутствует* (фиг. 8, а):

$$\sigma_x = E\epsilon_x \text{ при } \epsilon_x \leq \frac{\sigma_T}{E} = \epsilon_T \quad (23)$$

(участок  $OA$ );

$$\sigma_x = \sigma_T \text{ при } \epsilon_x \geq \epsilon_T$$

(участок  $AB$ );  $\sigma_T$  — предел текучести материала;  $E$  — модуль продольной упругости при растяжении и сжатии, численно равный  $tg \alpha$ .

*б) Упрочнение по линейному закону* (фиг. 8, б):

$$\sigma_x = E\epsilon_x \text{ при } \epsilon_x \leq \frac{\sigma_T}{E} = \epsilon_T$$

(участок  $OA$ );

$$\sigma_x = \sigma_T \text{ при } \epsilon_0 \geq \epsilon_x \geq \epsilon_T \quad (24)$$

(участок  $AB$ );

$$\sigma_x = \sigma_T + E_T(\epsilon_x - \epsilon_0) \text{ при } \epsilon_x \geq \epsilon_0$$

(участок  $BC$ );  $E_T$  в  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$  — модуль упрочнения, численно равный  $tg \beta$ .

Величина  $\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}$  называется коэффициентом разупрочнения и характеризует понижение напряжения за пределом упругости по сравнению с его значением по закону Гука.

Если горизонтальный участок текучести диаграммы фиг. 8, б отсутствует, то

$$\sigma_x = E\epsilon_x \text{ при } \epsilon_x \leq \frac{\sigma_T}{E} = \epsilon_T;$$

$$\sigma_x = \sigma_T + E_T(\epsilon_x - \epsilon_T) \text{ при } \epsilon_x \geq \epsilon_T. \quad (24a)$$

*в) Упрочнение по степенному закону* (фиг. 8, в):

$$\sigma_x = E\epsilon_x$$

$$\text{при } \epsilon_x \leq \frac{\sigma_T}{E} = \epsilon_T$$

(участок  $OA$ );

$$\sigma_x = \sigma_T$$

$$\text{при } \epsilon_0 \geq \epsilon_x \geq \epsilon_T \quad (25)$$

(участок  $AB$ );

$$\sigma_x = \sigma_T \left( \frac{\epsilon_x}{\epsilon_0} \right)^m \text{ при } \epsilon_x \geq \epsilon_0$$

(участок  $BC$ ).

**Зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_l$  от интенсивности деформаций  $\epsilon_l$ .** Эта зависимость строится на основании формул

$$\sigma_l = \sigma_x; \quad (26a)$$

$$\epsilon_l = \frac{1}{3E} \left[ 2(1 + \mu) + 3 \frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} \right] \sigma_x, \quad (26b)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_p$  — соответственно напряжение, упругая и пластическая деформации при одноосном растяжении;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

При упрочнении по линейному закону (фиг. 8, б) аналитическая зависимость имеет вид

$$\sigma_i = D \varepsilon_i \text{ при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i,T} = \frac{2(1+\mu)}{3} \varepsilon_T,$$

где

$$D = \frac{3E}{2(1+\mu)} = 3G$$

( $G$  — модуль сдвига);

$$\sigma_i = \sigma_T \text{ при } \varepsilon_{i,T} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i,0} =$$

$$= \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma_T;$$

$$\sigma_i = \sigma_T + D(\varepsilon_i - \varepsilon_{i,0}) \text{ при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_{i,0} \quad (26\text{б})$$

где

$$D = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{3E}(1-2\mu)}.$$

Если материал несжимаем ( $\nu = 0$ ) при упругих и при пластических деформациях, то график зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформации совпадает с диаграммой растяжения материала.

Общую теорию малых упруго-пластических деформаций, а также ряд ее приложений см. [3].

**Диаграмма сдвига** (зависимость касательного напряжения  $\tau_{xy}$  от угловой деформации  $\gamma_{xy}$  при чистом сдвиге). Диаграмма сдвига строится по диаграмме растяжения по формулам

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}; \quad (27a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}E} \left[ 2(1+\mu) + 3\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} \right] \sigma_x \quad (27б)$$

Для диаграммы с линейным упрочнением

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \text{ при } \gamma_{xy} \leq \gamma_T = \frac{\tau_T}{G} \quad (28)$$

( $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге);

$$\tau_{xy} = \tau_T \text{ при } \gamma_T \leq \gamma_{xy} \leq \gamma_0 =$$

$$= \sqrt{3}\varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{E} \tau_T;$$

$$\tau_{xy} = \tau_T + G(\gamma_{xy} - \gamma_0) \text{ при } \gamma_{xy} \geq \gamma_0 \quad (29)$$

где

$$G_T = \frac{E_T}{3 \left[ 1 - \frac{E_T}{3E}(1-2\mu) \right]}.$$

**Условия пластичности.** Они дают возможность по величине  $\sigma_T$  определить момент перехода в пластическое состояние материала в данной точке при сложном напряженном состоянии. Применяются следующие условия пластичности:

а) По теории интенсивности напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_T. \quad (30)$$

Предел текучести при сдвиге  $\tau_T$  связан при этом с пределом текучести при растяжении зависимостью  $\tau_T = 0,58\sigma_T$ .

б) По гипотезе Мора

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{T,p} \quad (31)$$

где  $k = \frac{\sigma_{T,p}}{\sigma_{T,сж}}$  — отношение пределов

текучести при растяжении и сжатии; при этом

$$\tau_T = \frac{\sigma_{T,p}}{1+k}.$$

в) По гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \quad (32)$$

при этом

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}.$$

## ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Математическое решение задач распределения напряжений при плоском и объемном напряженных состояниях — см. [3], [4], [6], [7], [8], [10], [11], [12]. Экспериментальные методы определения напряжений — см. гл. XV. Концентрация напряжений — см. гл. XIII.

Поле напряжений в детали определяется напряженными состояниями во всех ее точках; напряженные состояния в различных точках детали в общем случае оказываются различными. При изображении напряженного состояния в детали применяются следующие системы линий и эпюр.

Траектории главных напряжений (изоостаты) состоят из двух систем взаимно ортогональных кривых, касательные к которым дают направления главных напряжений в точке

касания. Уравнение траектории в плоскости  $Oxy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}.$$

Ненагруженный контур плоской детали совпадает с крайней траекторией; напряжения вдоль этого контура увеличиваются пропорционально уменьшению расстояния между траекториями возле контура. Изостаты могут быть получены экспериментально с применением хрупких покрытий или геометрическим построением по изоклинам. Направления главных напряжений на поверхности детали могут быть получены тензометрированием.

Линии равных главных напряжений представляют собой си-

стему кривых, соединяющих точки с одинаковой величиной главных напряжений. Линии главных напряжений можно рассматривать как горизонтали поверхности главных напряжений.

Эпюры напряжений на контуре представляют собой график напряжений на контуре, откладываемых в некотором масштабе по нормали к контуру или на его развертке.

Эпюры напряжений в поперечном сечении дают величины составляющих напряжений, действующих в точках рассматриваемого сечения. Обычно строятся эпюры нормальных и касательных напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , действующих на площадках поперечного сечения.

Изоклины и изохроматические линии, определяемые экспериментально, — см. гл. XV.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н. И., Введение в теорию упругости и пластичности, Стройиздат, 1950.
2. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ОГИЗ, 1950.
3. Ильющин А. А., Пластичность, Гостехиздат, 1948.
4. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, ОГИЗ, 1947.
5. Лехницкий С. Г., Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, 1949.
6. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, АН СССР, 1949.
7. Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
8. Пономарев С. Д., Бидерман Б. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, Машгиз, 1950.
9. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, изд. МГУ, 1950.
10. Соколовский В. В., Теория пластичности, АН СССР, 1950.
11. Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, Гостехиздат, 1947.
12. Энциклопедический справочник "Машиностроение", т. 1, кн. 2-я, гл. IV, Машгиз, 1947.



## ГЛАВА II

### РАСЧЕТ БРУСА

#### РАСЧЕТ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

**Брус** — тело, у которого один размер (длина) велик по сравнению с двумя другими (в плоскости поперечного сечения); иногда при растяжении и сжатии брус называется также *стержнем* и при изгибе — *балкой*. Линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений бруса, называется его *осью*.

#### ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

##### Расчет на прочность и жесткость

**Продольная сила  $N$**  в поперечном сечении стержня равна сумме проекций на нормаль к рассматриваемому сечению нагрузок, действующих по одну сторону от этого сечения.

**Эюра продольных сил  $N$**  представляет собой график величин этих усилий для всех поперечных сечений стержня.

**Прямой стержень постоянного сечения** (фиг. 1),  $l$  — длина стержня;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $P$  — растягивающая или сжимающая сила, совпадающая с осью стержня и равномерно распределенная по торцу на одном конце, второй конец стержня закреплен (сила обратного направления).

Продольная сила во всех поперечных сечениях стержня постоянна:  $N = P = \text{const}$ , если влиянием собственного веса стержня можно пренебречь.

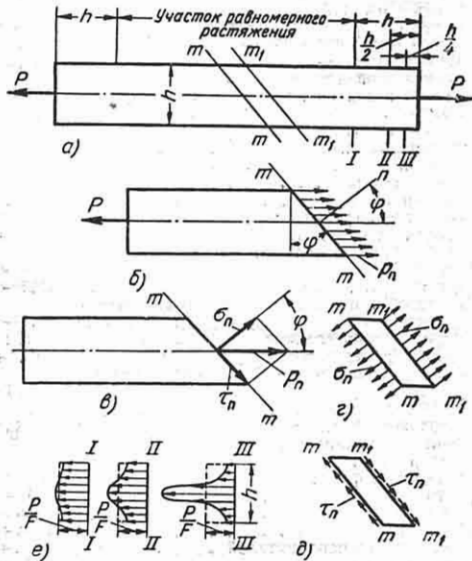
Напряжение в поперечном сечении стержня

$$\sigma = \frac{N}{F} \text{ кг/см}^2. \quad (1)$$

Если сила  $P$  сосредоточенная и приложена в центре тяжести торца, то в сечении на расстоянии от торца, равном размеру  $h$  сечения, отклонение от равномерного распределения напряжений не превосходит 30% (см. фиг. 1,  $e$ ).

Распределение напряжений в местах приложения сосредоточенной силы см. гл. XIII.

В любой точке стержня на участке равномерного распределения напряжений



Фиг. 1. Простое растяжение:  $a$  — растягиваемый стержень;  $b$  — равнодействующее напряжение  $\rho_\rho$  по площадке  $mt$ ;  $v$  — составляющие  $\sigma_\rho$  и  $\tau_\rho$  равнодействующего напряжения  $\rho_\rho$ ;  $z$  и  $\delta$  — нормальное и касательное напряжения  $\sigma_\rho$  и  $\tau_\rho$ , действующие на выделенный элемент стержня;  $e$  — распределение  $\sigma$  по поперечным сечениям I, II и III возле торца, к которому приложена сосредоточенная сила  $P$ .

имеет место линейное напряженное состояние.

Определение напряжений по косому сечению см. гл. I, стр. 6, табл. 1.

Если стержень имеет ослабление (отверстие, выточка), то в ослабленном сечении при центральном приложении силы величина среднего напряжения, называемая *номинальным напряжением*, находится по формуле (1), где вместо  $F$  берется полезная площадь

$$F_{нт} = F_{брутто} - F_{ослаб}$$

Определение действительных величин наибольших напряжений по ослабленному сечению и в других случаях концентрации напряжений см. гл. XIII.

Абсолютная продольная деформация  $\Delta l$  стержня длиной  $l$  при  $N = \text{const}$ , если материал подчиняется закону пропорциональности между  $\sigma$  и  $\epsilon$  (*закон Гука*),

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{Nl}{EF} \quad (2)$$

(удлинение — при растяжении и укорочение — при сжатии). При одном закрепленном конце величина  $\Delta l$  является перемещением другого конца, к которому приложена нагрузка.

Таблица 1

Значения  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  для некоторых материалов  
(при комнатной температуре)

Наименование материала	Модуль продольной упругости $E$ в $\text{кг/см}^2$	Модуль сдвига $G$ в $\text{кг/см}^2$	Коэффициент Пуассона $\mu$ (отвлеченное число)
Сталь малоуглеродистая и высоколегированная	(2,0—2,1)·10 <sup>6</sup>	(7,8—8,0)·10 <sup>6</sup>	0,28
Сталь с большим содержанием углерода	До 2,2·10 <sup>6</sup>	8,5·10 <sup>6</sup>	0,29
Чугун серый, белый, ковкий	(0,8+1,6)·10 <sup>6</sup>	4,5·10 <sup>6</sup>	0,23—0,27
Чугун модифицированный	(0,9+1,6)·10 <sup>6</sup>	—	—
Медь техническая	(1,1+1,3)·10 <sup>6</sup>	4,9·10 <sup>6</sup>	—
Бронза оловянистая	0,9·10 <sup>6</sup>	—	—
Бронза безоловянистая	1,1·10 <sup>6</sup>	—	—
Латунь	(0,9+1,4)·10 <sup>6</sup>	(3,5+3,7)·10 <sup>6</sup>	0,32—0,42
Алюминиевые сплавы	0,72·10 <sup>6</sup>	2,7·10 <sup>6</sup>	0,26—0,33
Магниевые сплавы	0,42·10 <sup>6</sup>	1,6·10 <sup>6</sup>	0,25—0,3
Никель	2,0·10 <sup>6</sup>	7,5·10 <sup>6</sup>	0,33
Цинк катаный	0,8·10 <sup>6</sup>	3,2·10 <sup>6</sup>	0,27
Свинец	0,2·10 <sup>6</sup>	0,7·10 <sup>6</sup>	0,42
Известняк, гранит	(0,42+0,49)·10 <sup>6</sup>	—	—
Кладка из кирпича	(0,025+0,030)·10 <sup>6</sup>	—	—
Бетон при пределе прочности 100—200 $\text{кг/см}^2$	(0,15+0,23)·10 <sup>6</sup>	—	0,16—0,18
Железобетон обычный, сжатые элементы	(0,18+0,43)·10 <sup>6</sup>	—	—
Железобетон обычный, изгибаемые элементы	(0,11+0,27)·10 <sup>6</sup>	—	—
Дерево вдоль волокон	(9+14)·10 <sup>4</sup>	(4,5+6,5)·10 <sup>6</sup>	—
Дерево поперек волокон	(0,4+1,0)·10 <sup>4</sup>	(4,5+6,5)·10 <sup>6</sup>	—
Фанера авиационная 1-го сорта, вдоль волокон рубашки	13·10 <sup>4</sup>	8·10 <sup>6</sup>	—
Фанера авиационная 1-го сорта, поперек волокон рубашки	6,5·10 <sup>4</sup>	—	—
Фанера авиационная 1-го сорта, под углом 45°	3,0·10 <sup>4</sup>	45·10 <sup>6</sup>	—
Текстолит, фибра	(6+10)·10 <sup>4</sup>	22·10 <sup>6</sup>	—
Гетинакс	(10+18)·10 <sup>4</sup>	25·10 <sup>6</sup>	—
Стекло	(50+60)·10 <sup>4</sup>	(21+23)·10 <sup>6</sup>	0,24—0,27
Оргстекло	(2+3)·10 <sup>4</sup>	—	0,35—0,38
Бакелит без наполнителей	(2+6)·10 <sup>4</sup>	(7+21)·10 <sup>6</sup>	0,35—0,38
Целлулоид	(1,5+2,5)·10 <sup>4</sup>	(7+10)·10 <sup>6</sup>	0,4
Каучук	0,008·10 <sup>4</sup>	—	0,47

Значения  $E$  для конструкционных сталей

Марка стали	Модуль продольной упругости $E$ в $\text{кг/см}^2$	Марка стали	Модуль продольной упругости $E$ в $\text{кг/см}^2$	Марка стали	Модуль продольной упругости $E$ в $\text{кг/см}^2$
10	1,98·10 <sup>6</sup>	50	2,20·10 <sup>6</sup>	20ХНЗА	2,03·10 <sup>6</sup>
25	2,02·10 <sup>6</sup>	30ХГСА	2,10·10 <sup>6</sup>	37ХНЗА	2,00·10 <sup>6</sup>
35	2,01·10 <sup>6</sup>	30ХМА	2,20·10 <sup>6</sup>	40ХС	2,23·10 <sup>6</sup>
40	2,13·10 <sup>6</sup>	45ХА	2,10·10 <sup>6</sup>	Я1Т	2,00·10 <sup>6</sup>
45	2,15·10 <sup>6</sup>	12ХНЗА	2,04·10 <sup>6</sup>		

Относительная продольная деформация  $\epsilon$  и относительная поперечная деформация  $\epsilon'$ :

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}; \quad \epsilon' = -\mu\epsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (3)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона (табл. 1).

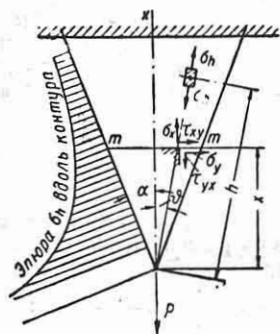
**Жесткость стержня** постоянного сечения длиной  $l$  (величина силы на единицу продольной деформации)

$$C = \frac{EF}{l}. \quad (4)$$

**Потенциальная энергия деформации** для стержня длиной  $l$

$$U = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{\sigma^2}{2E} Fl = \frac{E\epsilon^2}{2} Fl. \quad (5)$$

**Стержень с меняющимся сечением.** Для клина постоянной толщины  $b$  (фиг. 2)



Фиг. 2.

главные напряжения (без учета собственного веса клина)

$$\sigma_h = k \frac{P \cos \vartheta}{bh},$$

где

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}.$$

В поперечном и перпендикулярном к нему сечениях

$$\sigma_x = k \frac{P \cos^4 \vartheta}{bx}; \quad \sigma_y = k \frac{P \sin^2 2\vartheta}{4bx}.$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = k \frac{P \sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta}{2bx}.$$

В клине и коническом стержне с увеличением  $\alpha$  неравномерность распределения напряжений  $\sigma_x$  возрастает; при

$\alpha = 15^\circ$  разность между наибольшим и наименьшим значениями  $\sigma_x$  в сечении клина составляет 13,5% средней величины, получаемой делением силы  $P$  на площадь по  $m - m$ .

Резкое изменение сечения приводит к концентрации напряжений (см. гл. XIII).

**Расчет на прочность.** Проверка прочности:

$$\sigma_{\text{наиб}} = \frac{N}{F_{\text{нт}}} \leq [\sigma], \quad (6)$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma]_p$  или на сжатие  $[\sigma]_{сж}$  (в зависимости от знака  $N$ ).

**Определение размеров поперечного сечения:**

$$F_{\text{нт}} = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (7)$$

**Определение допускаемой продольной силы в сечении:**

$$N_{\text{доп}} = F_{\text{нт}} [\sigma]. \quad (8)$$

**Запас прочности по опасному сечению:**

$$n = \frac{N_{\text{пр}}}{N}, \quad (9)$$

где  $N_{\text{пр}}$  — предельная сила, выдерживаемая стержнем (см. гл. XIV);  $N$  — действующая сила. Запас прочности по напряжениям при статической нагрузке

$$n = \frac{\sigma_b}{\sigma} \text{ (хрупкий материал); } n = \frac{\sigma_T}{\sigma} \text{ (пла-$$

стический материал), где  $\sigma_b$  и  $\sigma_T$  — соответственно предел прочности и предел текучести при растяжении или сжатии;  $\sigma$  — наибольшее возникающее напряжение.

Если  $P$  — сжимающая сила, то необходима проверка на устойчивость (см. стр. X).

Определение допускаемых напряжений и необходимых запасов прочности, а также более полные данные по расчету на прочность см. гл. XIV.

**Учет собственного веса** производится при значительной длине стержня (канат, штанга).

Вертикальный стержень постоянного сечения.  $P$  — сила приложенная на конце;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $l$  — полная длина стержня;  $\gamma$  — удельный вес материала стержня;  $Q$  — собственный вес стержня;  $E$  — модуль продольной упругости,  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

Для стержня постоянного сечения наибольшее напряжение получается в месте заделки:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]; \quad (10)$$

абсолютная продольная деформация

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{\left(P + \frac{Q}{2}\right)l}{EF}. \quad (11)$$

Стержень равного сопротивления. Напряжения в каждом сечении постоянны и равны допускаемому; стержень имеет наименьший вес. Площадь поперечного сечения на расстоянии  $x$  от свободного конца

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma}{E} x}, \quad (12)$$

где  $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$ ;  $e$  — основание натуральных логарифмов;  $P$  — приложенная нагрузка.

В стержне ступенчатом, применяемом для простоты изготовления вместо стержня равного сопротивления, площадь первой и  $n$ -й ступеней

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}; \quad F_n = \frac{F_{n-1} [\sigma]}{[\sigma] - \gamma l_n}, \quad (13)$$

где  $l_1$  и  $l_n$  — длины ступеней.

### Основные случаи определения напряжений и деформаций в стержне от изменения температуры

Напряжения от изменения температуры возникают в том случае, если закрепления не позволяют стержню свободно принять форму и размеры, соответствующие данному изменению температуры при отсутствии этих закреплений.

Обозначения:  $\Delta t$  — изменение температуры в °C (плюс при нагреве и минус при охлаждении);  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала стержня;  $E$  — модуль продольной упругости;  $\sigma$  — нормальное напряжение в поперечном сечении (плюс при растяжении и минус при сжатии);  $\Delta l$  — изменение длины в рассматриваемом случае;  $l$  — первоначальная длина стержня постоянного поперечного сечения; 1 и 2 — индексы, указывающие номера стержней.

1. Прямолинейный однородный стержень, закрепленный с одного конца или свободно лежащий на опорах; постоянное  $\Delta t$  — по всему объему:

$$\sigma = 0; \quad \Delta l = \alpha l \Delta t.$$

2. Прямолинейный однородный стержень, жестко закрепленный по концам;  $\Delta t$  — по всему объему:

$$\sigma = -\alpha E \Delta t; \quad \Delta l = 0.$$

3. Стержень 1 вставлен в трубку 2 по оси; концы стержня и трубки жестко соединены между собой и не имеют опорных закреплений;  $\Delta t$  — по всему объему:

$$\sigma_1 = \frac{E_1 E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t;$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 \frac{F_1}{F_2};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \alpha_1 \Delta t l + \frac{\sigma_1}{E_1} l.$$

Индексы 1 и 2 относятся, соответственно к стержню и трубке.

4. Однородный стержень прямоугольного сечения высотой  $h$ , незакрепленный. Разность температур верхних и нижних волокон  $\Delta t$  и температура между ними распределяются по линейному закону:

$$\sigma = 0.$$

Ось стержня искривляется по дуге круга радиуса  $\rho = \frac{h}{\alpha \Delta t}$ .

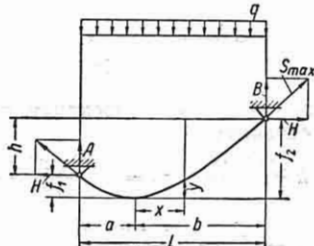
5. Случай п. 4, но при жестком закреплении концов стержня:

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \alpha E \Delta t; \quad \Delta l = 0;$$

растяжение (плюс) на стороне с меньшей температурой, сжатие (минус) — на противоположной стороне

### Гибкая нить (фиг. 3)

В каждом сечении нити возникает только растягивающая сила  $N$  кг по ка-



Фиг. 3.

сательной к нити;  $H$  кг — распор;  $f_1$  и  $f_2$  — высота точек подвеса над низшей

точкой провеса нити;  $F$  — расчетная площадь поперечного сечения нити;  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение при расчете по площади  $F$ ;  $L$  — полная длина нити;  $y$  — провес нити на расстоянии  $x$  от нижней точки.

Стрела  $f$  провеса мала по сравнению с пролетом  $l$  нити ( $f \ll \frac{1}{5} l$ );  $f_1 = f_2 = f$ . Погонная нагрузка  $q$  нити принимается постоянной на единицу длины пролета; нить располагается по квадратной параболе. Расчетные формулы даны в табл. 2.

Таблица 2

Расчет гибкой нити

При равных уровнях подвеса нити	Уровни точек подвеса нити отличаются на величину $h$
$y = \frac{qx^2}{2H}$	$y = \frac{qx^2}{2H}$
$H = \frac{ql^2}{8f}$	$H = \frac{qa^2}{2f_1} = \frac{qb^2}{2f_2}$
$f = \frac{ql^2}{8H}$	$f_1 = \frac{qa^2}{2H} = \frac{q}{2H} \left( \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql} \right)^2$ ; $f = \frac{qb^2}{2H} = \frac{q}{2H} \left( \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql} \right)^2$
$A = B = \frac{ql}{2}$	$A = \frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l}$ ; $B = \frac{ql}{2} + \frac{Hh}{l}$
$S_{\max} = \sqrt{A^2 + H^2} = \frac{ql}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}}$ (возле точек подвеса)	$S_{\max} = \sqrt{H^2 + B^2}$ (возле более высокой точки подвеса)
$\sigma_{\max} = \frac{ql}{2F} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}} \leq [\sigma]$	$\sigma_{\max} = \frac{S_{\max}}{F} \leq [\sigma]$
$L = l + \frac{8f^2}{3l}$	$L = l + \frac{2}{3} \left( \frac{f_1^2}{a} + \frac{f_2^2}{b} \right)$ При $h = \frac{ql^2}{2H}$ наиболее низкая точка нити совпадает с одной из точек подвеса

Изменение температуры нити с  $t_0$  на  $t$  изменяет ее длину из-за: 1) температурного расширения нити и 2) в связи с изменением натяжения нити. Если точка подвеса нити на одинаковом уровне и  $f_0$  — стрела провеса нити при  $t_0$ , то при температуре  $t$  стрела провеса  $f$  определяется из формулы

$$f^3 - \left[ f_0^2 + \frac{3\alpha l^2 (t - t_0)}{8} - \frac{3ql^4}{64f_0 EF} \right] f - \frac{3ql^4}{64EF} = 0 \quad (14)$$

( $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения).

Натяжение  $H$  при температуре  $t$  находится по  $f$  из формулы

$$H = \frac{ql^2}{8f} \quad (15)$$

Стрела  $f$  провеса велика по сравнению с пролетом  $l$  нити ( $f > \frac{1}{5} l$ );  $f_1 = f_2 = f$ . Нагрузка  $q$  рассматривается как постоянная на единицу длины нити; нить располагается по цепной линии

$$y = \frac{H}{q} \operatorname{ch} \frac{qx}{H} \quad (16)$$

где распор

$$H \approx \frac{ql^2}{8f} \quad (17)$$

Наибольшее натяжение

$$S_{\max} = H + qf.$$

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{S_{\max}}{F} \leq [\sigma] \quad (18)$$

Нить нагружена сосредоточенным грузом  $P$ , погонной нагрузкой нити можно пренебречь и точки подвеса находятся на одном уровне. Наибольшее натяжение в нити получается при положении груза  $P$  в середине пролета  $l$ :

$$S_{\max} = \frac{P}{2} \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{16}{3} \left( \frac{f}{l} \right)^2 \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{f}{l} \right)^2 \right]}} \quad (19)$$

Величины наибольшего натяжения  $S_{\max}$  для некоторых значений отношения  $\frac{l}{f}$  пролета нити к ее провесу даны в табл. 3.

Таблица 3

Величина  $S_{\max}$  для некоторых значений  $\frac{l}{f}$

$\frac{l}{f}$	Сосредоточенный груз $P$	Равномерно распределенный груз $P$
20	4,36P	2,55P
25	5,43P	3,16P
30	6,49P	3,78P

### СДВИГ (СРЕЗ И СКАЛЫВАНИЕ)

Сдвиг при поперечном изгибе см. стр. 87.

Обозначения:  $Q$  — поперечная сила (усилие среза);  $F$  — площадь сечения, воспринимающая эту силу;  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона (см. табл. 1).

В поперечном сечении бруса нормальные напряжения отсутствуют или ими можно пренебречь. Разрушение от сдвига называется *срезом* (металл) или *скалыванием* (дерево, бетон).

Касательные напряжения  $\tau$  по сечению болтов, заклепок, шпонок и т. п. принимаются равномерно распределенными:

$$\tau = \frac{Q}{F}. \quad (20)$$

В площадках, перпендикулярных к направлению  $\tau$ , возникают касательные напряжения  $\tau' = \tau$  (*закон парности касательных напряжений*). По другим площадкам, перпендикулярным к плоскости, в которой действуют напряжения  $\tau$  и  $\tau'$ , возникают и нормальные, и касательные напряжения (см. гл. I, табл. 1). В площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к площадкам чистого сдвига, действуют наибольшие и наименьшие нормальные напряжения (главные напряжения):

$$\sigma_{1,3} = \pm \tau = \pm \frac{Q}{F}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (21)$$

Концентрацию напряжений при сдвиге см. гл. XIII.

Деформация сдвига выражается в том, что под действием касательных напряжений прямые углы элемента  $ACDB$  (фиг. 4) искажаются; элемент принимает форму  $AC'D'B$ .

Относительным сдвигом  $\gamma$  называется величина перекоса прямого угла. Абсолютным сдвигом называется величина смещения  $s$  одного сечения (в его плоскости) по отношению к другому:

$$s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GF}. \quad (22)$$

Угол сдвига

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (22a)$$

(закон Гука при деформациях в пределах пропорциональности).

Продольные деформации в направлении диагоналей квадрата  $ACDB$  являются главными деформациями:

$$\epsilon_{1,3} = \pm \frac{\tau}{2G}. \quad (23)$$

Изменение объема при чистом сдвиге отсутствует.

Потенциальная энергия для элемента стержня длиной  $a$

$$U = \frac{1}{2} sQ = \frac{1}{2} \frac{aQ^2}{GF}. \quad (24)$$

**Расчет на прочность.** Проверка прочности:

$$\tau = \frac{Q}{F} \leq [\tau]_{ср}. \quad (25)$$

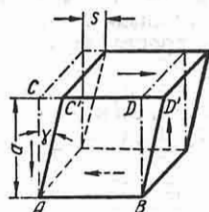
где  $[\tau]_{ср}$  — допускаемое напряжение при срезе; приближенно для стали  $[\tau]_{ср} = (0,5 + 0,8) [\sigma]_p$ , где  $[\sigma]_p$  — допускаемое напряжение при растяжении (см. гл. XIV).

**Определение необходимой площади среза (скалывания):**

$$F = \frac{Q}{[\tau]_{ср}}. \quad (26)$$

**Определение допускаемой перерезающей силы:**

$$Q_{доп} = F [\tau]_{ср}. \quad (27)$$



Фиг. 4.

Запас прочности по усилию в сечении

$$n = \frac{Q_{пр}}{Q}, \quad (28)$$

где  $Q_{пр}$  — предельное усилие по площади среза (скальвания);  $Q$  — действующее усилие среза.

Запас прочности по напряжениям при статической нагрузке:

$$n = \frac{\tau_{\sigma}}{\tau} \quad (\text{хрупкий материал});$$

$$n = \frac{\tau_T}{\tau} \quad (\text{пластический материал}),$$

где  $\tau_{\sigma}$  и  $\tau_T$  — соответственно предел прочности и предел текучести при сдвиге и  $\tau$  — наибольшее возникающее в детали касательное напряжение.

Определение допускаемых напряжений  $[\tau]$  и необходимых запасов прочности см. гл. XIV.

Приведенные выше расчеты на прочность являются условными, так как при сдвиге (в болтах, заклепках и других деталях) касательные напряжения в сечении распределяются неравномерно и, кроме того, возникают напряжения смятия и изгиба.

### КРУЧЕНИЕ

Кручение тонкостенных стержней — см. гл. IV.

Чистое кручение — к концам прямого стержня (вала) приложены в плоскости

гиба сечения. Центром изгиба является точка поперечного сечения, через которую проходит плоскость действия поперечной нагрузки, не вызывающей скручивания. Для сечения с двумя осями симметрии центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения, при одной оси симметрии — лежит на ней (см. табл. 22); определение центра изгиба для тонкостенных профилей — см. гл. IV.

Передаваемый от каждого шкива передачи момент в кгм

$$M = 716,20 \frac{N}{n} \quad \text{или} \quad M = 973,6 \frac{K}{n}, \quad (29)$$

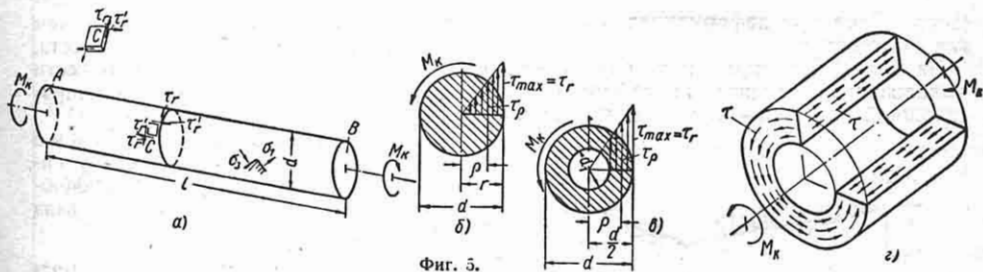
где  $N$  и  $K$  — мощность, передаваемая шкивом, соответственно в л. с. и квт;  $n$  — число оборотов шкива в минуту.

Эюра крутящих моментов — график, дающий моменты кручения для каждого сечения вала по его длине.

Вал круглого поперечного сечения. Поперечные сечения при скручивании стержня из изотропного материала остаются плоскими, а радиусы — прямыми. Поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого, и при малых деформациях расстояние между сечениями не меняется.

Касательные напряжения  $\tau_{\rho}$  на расстоянии  $\rho$  от центра сечения (фиг. 5, а)

$$\tau_{\rho} = \tau'_{\rho} = \frac{M_K}{J_p} \rho, \quad (30)$$



Фиг. 5.

поперечного сечения обратно направленными пары сил (моменты); через каждое сечение передается крутящий момент  $M_K$ , равный моменту пары, приложенной к одному концу стержня.

Крутящий момент  $M_K$  в общем случае нагрузки и формы оси стержня равен сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения по отношению к оси, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения и проходящей через центр из-

где  $J_p = \int \rho^2 dF$  (см<sup>4</sup>) — полярный момент инерции круглого сечения. Здесь  $\tau_{\rho}$  — касательное напряжение в поперечном сечении в направлении, перпендикулярном к радиусу  $\rho$ , и  $\tau'_{\rho}$  — в долевом диаметральной сечении вала в той же точке.

Наибольшие касательные напряжения при круглом поперечном сечении (фиг. 5, б и в) возникают в крайних

точках сечения (при  $\rho = r = d/2$ ):

$$\tau_{\max} = \tau'_{\max} = \frac{M_K}{J} \frac{d}{2} = \frac{M_K}{W_p}. \quad (31)$$

$W_p = \frac{J_p}{d/2}$  (см<sup>3</sup>) — полярный момент сопротивления. Значения  $J_p$  и  $W_p$  — см. табл. 4, 7—9.

Нормальные и касательные напряжения для любой наклонной площадки в рассматриваемой точке вала вычисляются по касательным напряжениям  $\tau$  и  $\tau'$  с помощью формул табл. 1, гл. I.

Главные напряжения в точках поверхности вала

$$\sigma_{1,3} = \pm \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \quad (32)$$

(на площадках, перпендикулярных к поверхности вала и дающих углы 45° с образующей поверхности);

$$\sigma_2 = 0 \quad (32a)$$

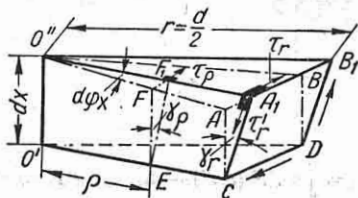
(на площадке, совпадающей с поверхностью вала).

Относительный сдвиг (фиг. 6)

$$\gamma_p = \frac{\tau_p}{G} \quad (33)$$

(закон Гука при деформациях в пределах упругости).

На фиг. 6 пунктиром показана форма выделенного элемента до деформации, сплошной линией — при деформации;



Фиг. 6.

деформация показана в увеличенном масштабе; прямая  $O'O''$  совпадает с осью вала.

Угол закручивания  $\varphi$  вала — угол поворота в плоскости, перпендикулярной к оси вала, одного сечения по отношению к другому. При постоян-

ных  $M_K$ ,  $G$  и  $J_p$  на длине  $l$  вала круглого сечения

$$\varphi = \frac{M_K l}{G J_p}, \quad (34)$$

где  $G J_p$  — жесткость на кручение.

Для ступенчатого вала или при меняющемся  $M_K$  по длине вала производится суммирование по участкам:

$$\varphi = \frac{1}{G} \sum \frac{M_K l}{J_p}. \quad (34a)$$

Жесткость участка вала длиной  $l$ , определяемая как величина момента кручения при угле закручивания, равном единице,

$$C = \frac{G J_p}{l}; \quad (35)$$

значения  $C$  для различных конструктивных элементов вала см. гл. XI.

Потенциальная энергия участка вала длиной  $l$  с постоянными  $M_K$ ,  $G$  и  $J_p$

$$U = \frac{1}{2} M_K \varphi = \frac{M_K^2 l}{2 G J_p} = \frac{G J_p \varphi^2}{2 l}. \quad (36)$$

Концентрацию напряжений в валах см. гл. XIII.

**Вал некругового поперечного сечения.** Поперечные сечения и радиусы искривляются, что приводит к более сложному закону распределения касательных напряжений в сечении, чем в случае вала круглого сечения. Места, наиболее удаленные от центра тяжести сечения, не являются наиболее напряженными; см. [1], [4].

Наибольшие касательные напряжения и угол закручивания выражаются формулами, подобными формулам (31) и (34) для вала круглого сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad (37)$$

$$\varphi = \frac{M_K l}{G J_K}. \quad (38)$$

Значения  $W_K$  (в см<sup>3</sup>) и  $J_K$  (в см<sup>4</sup>) для различных форм сечения даны в табл. 4. Только для круглого сечения величины  $W_K$  и  $J_K$  равны соответственно  $W_p$  и  $J_p$ . Наибольшее напряжение  $\tau_{\max}$  направлено по касательной к контуру и возникает в точках, указанных в табл. 4.



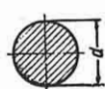
Таблица 4

Формулы для напряжений и угла закручивания при кручении [19]

Сечение бруса постоянное на длине  $l$  см. Крутящий момент  $M_K$  в кгГсм; наибольшее касательное напряжение в сечении  $\tau_{\max}$  в кгГсм<sup>2</sup>; полный угол закручивания бруса  $\varphi$  в радианах; модуль сдвига  $G$  в кгГсм<sup>2</sup>; величина  $W_K$  в см<sup>3</sup>; жесткость на кручение  $GJ_K$  в кгГсм<sup>2</sup>; размеры сечения в см.

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad \varphi = \frac{M_K l}{GJ_K}$$

1. Сплошное круговое сечение (см. табл. 7)



$$J_K = J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4;$$

$J_p$  - полярный момент инерции сечения;

$$W_K = W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M_K}{\pi d^3} \approx \frac{M_K}{0,2d^3}$$

(в точках возле контура сечения);  
 $W_p$  - полярный момент сопротивления

2. Полое круговое сечение ( $\frac{d}{D} = \alpha$ ) (см. табл. 8 и 9)



$$J_K = J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4);$$

$J_p$  - полярный момент инерции сечения;

$$W_K = W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4);$$

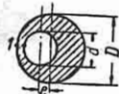
$$\tau_{\max} = \frac{16M_K}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \approx \frac{M_K}{0,2D^3 (1 - \alpha^4)}$$

(в точках возле наружного контура сечения);

$$\tau_{r=d/2} = \tau_{\max} \frac{d}{D}$$

(в точках возле внутреннего контура сечения);  
 $W_p$  - полярный момент сопротивления

3. Круговое сечение с эксцентричным отверстием



$$\left(\frac{a}{D} = \alpha; \frac{e}{d} = \lambda\right)$$

$$J_K = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \frac{1}{k'}$$

где  $k' = 1 + \frac{16\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 (1 - \alpha^4)} \lambda^2 + \frac{384\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2 (1 - \alpha^4)^2} \lambda^4;$

$$W_K = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \frac{1}{k'} \quad (\text{в точке } I),$$

где

$$k = 1 + \frac{4\alpha^2}{1 - \alpha^2} \lambda + \frac{32\alpha^2}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)} \lambda^2 + \frac{48\alpha^2 (1 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4 + 2\alpha^6)}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^8)} \lambda^3 + \frac{64\alpha^2 (2 + 12\alpha^2 + 19\alpha^4 + 28\alpha^6 + 18\alpha^8 + 14\alpha^{10} + 3\alpha^{12})}{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4)(1 - \alpha^8)(1 - \alpha^{16})} \lambda^4$$

4. Круговое незамкнутое кольцо постоянной толщины;  $\delta$  мало по сравнению с  $r$  (средний радиус);

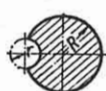


$$J_K = \frac{2}{3} \pi r \delta^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{6\pi r + 1,8\delta}{(2\pi r \delta)^2} M_K$$

(в точках внутреннего и наружного круговых контуров сечения)

5. Круговое сечение с круговым вырезом (по А. Н. Диннику);



$$J_K = k' R^4;$$

$k'$  - по таблице в зависимости от  $\frac{r}{R}$ ;

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{k R^3}$$

(по дну выреза);  $k$  - по таблице в зависимости от  $\frac{r}{R}$

$\frac{r}{R}$	0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,50
$k$	1,57	0,89	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,14
$k'$	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07

6. Сечение вала с лыской (по экспериментальным данным С. А. Енгальцева):

1)  $J_K = \left(2,6 \frac{H}{D} - 1\right) \frac{D^4}{16};$

$W_K = \frac{2,6 \frac{H}{D} - 1}{0,30 \frac{H}{D} + 0,7} \cdot \frac{D^3}{8};$

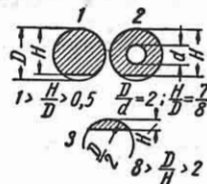
2)  $J_K = 0,074D^4;$

$W_K = \frac{D^3}{11,4}$

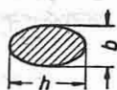
3)  $J_K = 0,0185D^4 \left(\frac{2H}{D}\right)^{3,35};$

$W_K = \frac{D}{22,9} \left(\frac{2H}{D}\right)^{2,82}$

(в середине плоского среза)



## 7. Сплошное эллиптическое сечение



$$\frac{h}{b} = n \geq 1;$$

$$J_K = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} b^4;$$

$$W_K = \frac{\pi}{16} b^3 n;$$

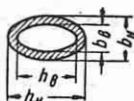
$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}$$

(в конце малой полуоси);

$$\tau_1 = \frac{\tau_{\max}}{n}$$

(в конце большой полуоси)

## 8. Полое эллиптическое сечение



$$\frac{h_n}{b_n} = \frac{h_g}{b_g} = n \geq 1;$$

$$\frac{h_g}{h_n} = \frac{b_g}{b_n} = \alpha < 1;$$

$$J_K = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1} b_n^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_K = \frac{\pi}{16} n b_n^3 (1 - \alpha^4)$$

(в конце малой полуоси)

## 9. Эллиптическое кольцо постоянной толщины. Длина средней линии, обозначенной пунктиром.



$$s \approx \pi (a + b - \delta) \times$$

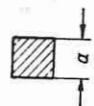
$$\times \left[ 1 + 0,27 \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \right];$$

$$J_K = \frac{4\pi\delta \left( a - \frac{\delta}{2} \right)^2 \left( b - \frac{\delta}{2} \right)^2}{s};$$

$$W_K = 2\pi\delta \left( a - \frac{\delta}{2} \right) \left( b - \frac{\delta}{2} \right)$$

(при малом  $\delta$  напряжения распределены равномерно)

## 10. Квадратное сечение



$$J_K = 0,1406a^4;$$

$$W_K = 0,208a^3$$

(в серединах сторон). В углах касательное напряжение равно нулю

## 11. Сплошное прямоугольное сечение



$$\frac{a}{b} = n \geq 1;$$

$$J_K \approx ab^3 \times$$

$$\times \left[ \frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$$

или

$$J_K = \frac{1}{3} \left( n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right) b^4.$$

$$J_K = k' ab^3 \text{ (более точно);}$$

$$W_K \approx \frac{a^2 b^2}{3a + 1,8b}$$

или

$$W_K = kab^2 \text{ (более точно);}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}$$

(в серединах длинных сторон);

$$\tau_1 = k_1 \tau_{\max}$$

(в серединах коротких сторон)  
В углах касательное напряжение равно нулю.

n	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00	2,50
k	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258
k <sub>1</sub>	1,00	0,93	0,86	0,82	0,79	0,77
k <sup>3</sup>	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249

n	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	10,00	∞
k	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
k <sub>1</sub>	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	—
k <sup>3</sup>	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333

## 12. Вытянутый прямоугольник



$$\frac{a}{b} = n > 4;$$

$$J_K = \frac{1}{3} (n - 0,63) b^4;$$

$$W_K = \frac{1}{3} (n - 0,63) b^3;$$

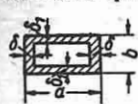
$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}$$

(в точках длинных сторон, исключая точки, близкие к углам);

$$\tau = 0,74 \tau_{\max}$$

(в середине коротких сторон)

13. Полый прямоугольник



$$J_K = \frac{2\delta b_1 (a - \delta)^2 (b - \delta_1)^2}{a\delta + b\delta_1 - \delta^2 - \delta_1^2};$$

$$\tau = \frac{M_K}{2\delta_1 (a - \delta) (b - \delta_1)}$$

(в средней части длинной стороны);

$$\tau_1 = \tau \frac{\delta}{\delta_1}$$

(в средней части короткой стороны).

При малом радиусе  $\rho$  закругления напряжения во внутренних углах могут быть больше; коэффициент концентрации

$$\alpha_\tau = 1,74 \sqrt[3]{\frac{\delta_{\max}}{\rho}}; \quad \sigma_{\max} = \alpha_\tau \tau$$

14. Равносторонний треугольник



$$J_K = \frac{\sqrt{3} a^4}{80};$$

$$\tau_{\max} = \frac{20 M_K}{a^3}$$

(в серединах сторон). В углах касательное напряжение равно нулю

15. Правильный шести- или восьмиугольник.



Площадь сечения  $F$   
 $J_K = k' a^2 F$ .

Для шестиугольника  $k' = 0,133$ ,  
для восьмиугольника  $k' = 0,130$ .

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{k \cdot a \cdot F}$$

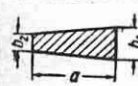
(в середине сторон). Для шестиугольника  $k = 0,217$ ; для восьмиугольника  $k = 0,223$ . Непосредственно в самих углах касательное напряжение равно нулю

16. Равнобедренная трапеция (или треугольник);  $C$  — центр тяжести трапеции.



В отношении жесткости при кручении трапециевидное (и треугольное) сечение может быть приведено к прямоугольному сечению (показанному тонкой линией) той же высоты, дающему ту же величину  $J_K$ : ширину ( $b$  или  $a$ ), входящую в формулу  $J_K$  для прямоугольного сечения (см. п. 11), находят построением, указанным на чертеже

17. Сечение в форме клина;  $a > 4b$ ,



$$J_K = \frac{a (b_1^3 - b_2^3)}{12 (b_1 - b_2)} - 0,105 \times (b_1 + b_2);$$

$$W_K = \frac{a (b_1^3 - b_2^3)}{12 b_1 (b_1 - b_2)} - 0,105 \frac{b_1^3 + b_2^3}{b_1}$$

(в точках длинных сторон ближе к широкому основанию)

18. Кольцо тонкостенное произвольной формы постоянной толщины;  $s$  — длина средней линии, обозначенной пунктиром;  $F$  — площадь внутри средней линии



$$J_K = \frac{4F^2 \delta}{s};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{2\delta F}$$

(при малом  $\delta$  напряжения распределены равномерно)

19. Кольцо произвольной формы переменной толщины  $\delta$ ;  $s$  и  $F$  — см. п. 18



$$J_K = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$$

Напряжение в точках на линии  $AB$

$$\tau = \frac{M_K}{2\delta F}$$

наибольшее  $\tau$  в том сечении  $AB$ , где  $\delta$  — наименьшее

20. Сечение прокатных балок. Рассматривается составленным из прямоугольников размерами  $b_i \times \delta_i$ , причем  $b_i > 4\delta_i$ .



$$J_K = \frac{1}{3} \alpha \sum_{i=1}^n (b_i \delta_i^3)$$

Значения  $\alpha$  в зависимости от формы сечения.

$$\Gamma \alpha = 1,30; \quad \sqsubset \alpha = 1,00;$$

$$\square \alpha > 1,30; \quad + \alpha = 1,17$$

Наибольшее напряжение в средней части прямого угла, имеющего наибольшую ширину  $\delta_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{\frac{1}{3} \alpha \sum (b_i \delta_i^3)} \delta_{\max};$$

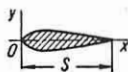
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

При малом радиусе  $\rho$  закругления напряжения во входящем угле могут быть наибольшее; коэффициент концентрации

$$\alpha_\tau = 1,74 \sqrt[3]{\frac{\delta_{\max}}{\rho}}$$

(см. п. 13 и гл. XIII)

21. Вытянутое сечение, имеющее ось симметрии.  $s$  — длина;  $J_x$  — момент инерции по отношению к оси симметрии;  $F$  — площадь сечения



$$J_K = \frac{4J_x}{1 + 16 \frac{J_x}{Fs^2}}$$

22. Вытянутое сечение любой формы;  $\delta$  — толщина по нормали к средней линии;  $ds$  — элементарная длина по средней линии;  $F$  — площадь сечения



$$J_K = \frac{C}{3 + 4 \frac{C}{Fs^2}}$$

$$C = \int \delta^3 ds$$

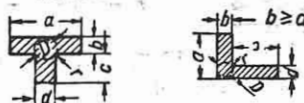
(интеграл берется по всей длине  $s$  средней линии от начала до конца вытянутого профиля)

23. Сплошное сечение компактной формы без входящих углов;  $J_p$  — полярный момент инерции сечения по отношению к центру тяжести;  $F$  — площадь сечения



$$J_K = \frac{F^2}{40J_p}$$

24. Угольник и одностав с полкой постоянной толщины. Величины  $r$ ,  $D$ ,  $\delta$  и  $\delta_1$  — см. п. 25



$$J_K = J'_K + J''_K + aD^4,$$

$$\text{где } J'_K = ab^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right];$$

$$J''_K = cd^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,105 \frac{d}{c} \left( 1 - \frac{d^4}{192c^4} \right) \right];$$

$$\alpha = \frac{b}{d} \left( 0,07 + 0,076 \frac{r}{b} \right)$$

(для угольника);

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta_1} \left( 0,15 + 0,10 \frac{r}{b} \right)$$

(для одностав)

25. Двутавр с полками постоянной толщины;  $r$  — радиус закругления;  $D$  — диаметр наибольшего вписываемого круга;  $c$  —



$$\begin{aligned} \delta &= b, \text{ если } b < d; \\ \delta &= d, \text{ если } d < b; \\ \delta_1 &= b, \text{ если } b > d; \\ \delta_1 &= d, \text{ если } d > b; \end{aligned}$$

$$J_K = J'_K + J''_K + 2aD^4,$$

$$\text{где } J'_K = ab^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right];$$

$$J''_K = \frac{1}{3} cd^3;$$

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta_1} \left( 0,15 + 0,10 \frac{r}{b} \right)$$

Для сплошных сечений неправильной формы, указанных в пп. 21—25,  $\tau_{\max}$  возле точек касания вписанного в контур сечения круга наибольшего диаметра  $D$  и возле входящих углов можно подсчитывать по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{J_K} c.$$

Если указанные точки на прямой или выпуклой части сечения, то

$$c = \frac{D}{1 + \frac{\pi^2 D^4}{16F^2}} \left[ 1 + 0,15 \left( \frac{\pi D^4}{16F^2} - \frac{D}{2r} \right) \right].$$

Если точка касания вписанного круга на входящей части контура, то

$$c = \frac{D}{1 + \frac{\pi^2 D^4}{16F^2}} \left\{ 1 + \left[ 0,118 \ln \left( 1 - \frac{D}{2r} \right) - 0,238 \frac{D}{2r} \right] \right\} \text{th} \frac{2\psi}{\pi};$$

$r$  — радиус закругления контура в точке касания;  $F$  — площадь сечения;  $\psi$  — угол в радианах, на который поворачивается касательная при обходе по входящей части контура

Формулы (32), (34а), (35) и (36) применимы для вала некруглого сечения при замене в них  $W_p$  и  $J_p$  на  $W_k$  и  $J_k$  из табл. 4.

Метод аналогии (мембранной, гидродинамической) используется для экспериментального и для расчетного определения напряжений  $\tau$  и величин  $J_k$  при сложной форме сечения [4].

С помощью мембранной аналогии распределение касательных напряжений определяется по форме, которую принимает при малых прогибах мыльная пленка, натянутая на плоском контуре, имеющем очертание рассматриваемого сечения, и подвергнутая с одной стороны равномерному давлению  $p$  (натяжение мембраны  $q$  постоянно) (фиг. 7, а); 1) горизонтали поверхности мембраны являются траекториями касательных напряжений, так что касательная  $t-t$  к горизонтали дает направление напряжений  $\tau$  в соответствующей точке сечения; 2) объем  $V$ , ограниченный мембраной и плоскостью контура, пропорционален скручивающему моменту:

$$M_k = 2cV; \quad (39a)$$

3) скат  $\text{tg } \alpha \approx \alpha$  поверхности мембраны пропорционален величине  $\tau$  в соответствующей точке сечения:

$$\tau = c \text{tg } \alpha; \quad (39б)$$

4) для определения  $J_k$  используется соотношение:

$$2 \frac{M_k}{J_k} = c \cdot \frac{p}{q}. \quad (39в)$$

Использование мембранной аналогии при расчете поясняется приводимым ниже примером.

*Пример.* Сечение — длинный прямоугольник размерами  $b \times h$ . Если влиянием короткой стороны  $b$  пренебречь, то давление на площадь  $b\Delta h$  уравновешивается вертикальными составляющими напряжения у края (фиг. 7, б):

$$p\Delta hb = 2\Delta hq\alpha_{\text{max}}$$

Отсюда  $\alpha_{\text{max}} = \frac{pb}{2q}$ , и на основании формул (39а) и (39б)

$$\tau_{\text{max}} = c\alpha_{\text{max}} = c \frac{pb}{2q} = b \frac{M_k}{J_k}.$$

Сечение пленки дает параболу с высотой  $f = \frac{b}{4} \alpha_{\text{max}}$ . Объем, учитывая уменьшение его по концам,

$$V = \frac{2}{3} \left( \frac{b}{4} \alpha_{\text{max}} \right) b (h - 0,63b) = \frac{2}{3} \cdot \frac{pb}{2q} \cdot \frac{b^2}{4} (h - 0,63b).$$

Отсюда

$$c \frac{pb}{2q} = \tau_{\text{max}} = 3 \frac{M_k}{b^2 (h - 0,63b)};$$

$$\frac{2q}{cp} M_k = J_k = \frac{1}{3} b^3 (h - 0,63b).$$

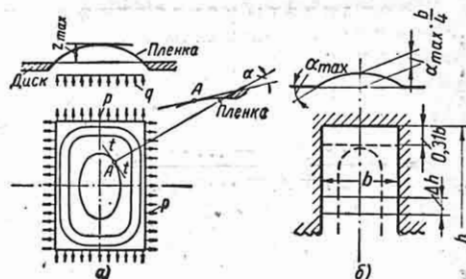
**Расчет на прочность. Проверка прочности:**

$$\tau_{\text{наиб}} = \frac{M_k}{W_k} \leq [\tau]_k. \quad (40)$$

**Определение размеров поперечного сечения:**

$$W_k = \frac{M_k}{[\tau]_k}; \quad (41)$$

по значению  $W_k$  находят размеры сечения на основании формул табл. 4



Фиг. 7.

или для круглых сечений по табл. 7—9. **Определение допускаемого крутящего момента в поперечном сечении:**

$$M_{k, \text{доп}} = W_k [\tau]_k. \quad (42)$$

**Запас прочности** по опасному сечению

$$n = \frac{M_{k, \text{пр}}}{M_k}, \quad (43)$$

где  $M_{k, \text{пр}}$  — предельный момент, выдерживаемый скручиваемой деталью (см. гл. IX и XIV);  $M_k$  — действующий скручивающий момент.

Определение допускаемых напряжений  $[\tau]_k$  и необходимых запасов прочности  $n$  см. гл. XIV.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

Формулы для геометрических характеристик простейших сечений даны в табл. 5; численные значения см. табл. 6—9. Данные для сортамента стали см. т. 6, гл. IV.

Положение центра тяжести, статические моменты, моменты инерции и

моменты сопротивления поперечного сечения не зависят от материала балки и определяются формой и размерами ее поперечного сечения.

В балках из разнородных материалов вычисляются приведенная площадь, положение ее центра тяжести, приведенные моменты инерции и моменты сопротивления сечения; величины составляющих поперечное сечение элементарных площадок берутся умноженными на отношения модулей упругости материала балки для каждого из этих мест к модулю упругости того материала, к которому приводится сечение.

### Вычисление моментов инерции

Координаты центра тяжести сечения по отношению к выбранным осям  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{\sum S_x}{F} = \\ &= \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \dots + f_n y_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}; \\ x_0 &= \frac{\sum S_y}{F} = \\ &= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}. \end{aligned} \right\} (44)$$

Здесь  $S_x$  и  $S_y$  — статические моменты площади сечения по отношению к осям  $x$  и  $y$ ;  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — площади отдельных площадок 1, 2, ...,  $n$ , на которые разбивается поперечное сечение;  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты (с их знаками) центров тяжести площадок по отношению к осям  $x$  и  $y$ . См. также т. 1, стр. 359—364.

Осевой (экваториальный) момент инерции площади сечения по отношению к оси  $x$  (фиг. 8), лежащей в ее плоскости,

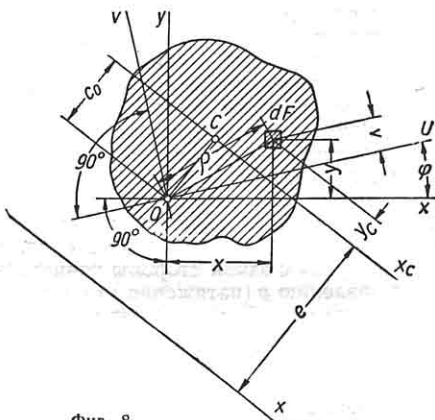
$$J_x = \int_F y^2 dF \text{ см}^4. \quad (45)$$

Интеграл берется по всей рассматриваемой площади сечения.

Центробежный момент инерции площади сечения по отношению к осям  $x$  и  $y$ , лежащим в ее плоскости,

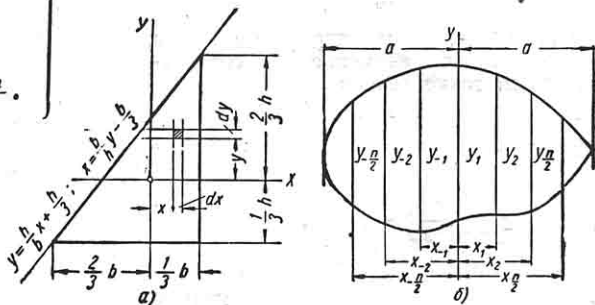
$$J_{xy} = \int_F xy dF \text{ см}^4. \quad (46)$$

Центробежный момент инерции по отношению к осям, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.



Фиг. 8.

Пример 1. Для прямоугольного треугольника высотой  $h$  и основанием  $b$  центробежный момент инерции по отношению к центральным осям  $x$  и  $y$ ,



Фиг. 9.

расположенным по отношению к треугольнику, как указано на фиг. 9, а, равен

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int xy dF = \\ &= \int_0^h dy \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{h}{3}} x \left( \frac{h}{b} x + \frac{h}{3} \right) dx = \frac{b^2 h^2}{72} + \\ &= -\frac{h}{3} \frac{b}{h} y - \frac{b}{3} \end{aligned}$$

Полярный момент инерции площади по отношению к точке (полюсу)  $O$ , лежащей в ее плоскости,

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \text{ см}^4, \quad (47)$$

где  $\rho$  — расстояние от точки  $O$  до элементарной площадки  $dF$ .

Зависимость между полярными и осевыми моментами инерции площади:

$$J_p = J_x + J_y, \quad (48a)$$

где  $x$  и  $y$  — взаимно перпендикулярные оси, проходящие через точку  $O$ , по отношению к которой получается полярный момент инерции  $J_p$ .

Зависимость между осевыми моментами инерции по отношению к параллельным осям:

$$J_x = \int (e + y_c)^2 dF = J_{x_c} + e^2 F, \quad (48б)$$

где  $J_{x_c}$  — момент инерции по отношению к оси  $x_c$ , проходящей через центр тяжести  $C$  сечения;  $J_x$  — момент инерции по отношению к оси  $x$ , параллельной оси  $x_c$ ;  $e$  — расстояние между осями  $x_c$  и  $x$ ;  $F$  — площадь поперечного сечения.

Зависимость между центробежными моментами инерции по отношению к параллельным осям:

$$J_{x_y} = J_{x_c y_c} + abF, \quad (48в)$$

где  $J_{x_c y_c}$  — центробежный момент инерции по отношению ко взаимно перпендикулярным осям  $x_c$  и  $y_c$ , проходящим через центр тяжести сечения;  $J_{x_y}$  — момент инерции по отношению к осям  $x$  и  $y$ , параллельным осям  $x_c$  и  $y_c$ ; величины  $a$  и  $b$  — координаты центра тяжести фигуры по отношению к осям  $x$  и  $y$  и берутся с их знаками;  $F$  — площадь поперечного сечения.

Зависимость между полярными моментами инерции по отношению к двум точкам  $O$  и  $C$ :

$$J_p = (J_p)_c + c_0^2 F, \quad (48г)$$

где  $(J_p)_c$  и  $J_p$  — полярные моменты инерции по отношению к центру тяжести  $C$  сечения и соответственно к точке  $O$ ;  $c_0$  — расстояние от  $O$  до  $C$ ;  $F$  — площадь поперечного сечения.

Момент инерции сечения сложной формы определяется как сумма моментов инерции отдельных составляющих площадок  $1, 2, \dots, n$ . Осевой момент инерции всего сечения по отношению к оси  $x$

$$J_x = (J_{x_c})_1 + (J_{x_c})_2 + \dots + (J_{x_c})_n + e_1^2 f_1 + e_2^2 f_2 + \dots + e_n^2 f_n, \quad (48д)$$

где  $(J_{x_c})_1, (J_{x_c})_2, \dots, (J_{x_c})_n$  — моменты инерции площадок  $1, 2, \dots, n$ , на которые разбивается сечение сложной формы по отношению к осям  $x_c$ , каждая из которых проходит параллельно оси  $x$  через центр тяжести  $C$  соответствующей площадки;  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — расстояния между осью  $x$  и параллельными ей осями  $x_c$ ;  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — величины площадок.

Центробежный момент инерции всего сечения по отношению к осям  $x$  и  $y$

$$J_{x_y} = (J_{x_c y_c})_1 + (J_{x_c y_c})_2 + \dots + (J_{x_c y_c})_n + a_1 b_1 f_1 + a_2 b_2 f_2 + \dots + a_n b_n f_n, \quad (48е)$$

где  $(J_{x_c y_c})_1, (J_{x_c y_c})_2, \dots, (J_{x_c y_c})_n$  — моменты инерции площадок  $1, 2, \dots, n$  по отношению к центральным осям  $x_c$  и  $y_c$  этих площадок;  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — координаты центров тяжести площадок по отношению к осям  $x$  и  $y$ . Если одна из осей  $x_c$  или  $y_c$  каждой составляющей площадки является осью симметрии, то

$$J_{x_y} = a_1 b_1 f_1 + a_2 b_2 f_2 + \dots + a_n b_n f_n = \sum_1^n a_i b_i f_i.$$

Вычисление статических моментов и моментов инерции для сечений со сложной формой плавно меняющегося контура производится следующим способом. Статический момент относительно оси  $u$  площади может быть [16] подсчитан по формуле

$$S_y = \frac{(2a)^2}{n} \left[ \left( y_1 + y_2 + \dots + y_{\frac{n}{2}} \right) - \left( y_{-1} + y_{-2} + \dots + y_{-\frac{n}{2}} \right) \right], \quad (48ж)$$

Здесь (см. фиг. 9, б)  $2a$  — полный наибольший размер рассматриваемой фигуры в направлении оси  $x$ ;  $y_1, y_2, \dots, y_{\frac{n}{2}}$  и  $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-\frac{n}{2}}$  —

размеры фигуры в направлении, параллельном оси  $y$  соответственно по одной и по другой стороне на равных расстояниях от оси  $u$ , проводимой в середине размера  $2a$ . Места фигуры, в которых

берутся размеры  $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{-1},$

$y_{-2}, \dots, y_{-\frac{n}{2}}$ , а так-

же знаки, с которыми они вводятся в приведенную выше формулу для  $S_y$ , определяются по приводимой ниже таблице в зависимости от общего числа  $n$  размеров, по которым производится подсчет  $S_y$ .

Координата центра тяжести находится по формуле (44); знак, полученный по формуле, определяет, в каком направлении от оси  $y$  находится центр тяжести фигуры.

Момент инерции сечения относительно оси  $y$ , проходящей через середину размера сечения,

$$J_y = C \left[ \left( y_1 + y_2 + \dots + y_{\frac{n}{2}} \right) + \left( x_{-1} + x_{-2} + \dots + x_{-\frac{n}{2}} \right) \right]. \quad (48з)$$

Здесь  $y_1, y_2, \dots, y_{\frac{n}{2}}, y_{-1}, y_{-2}, \dots,$

$y_{-\frac{n}{2}}$  — размеры фигуры, параллельные

оси  $y$ , которые берутся соответственно на равных расстояниях  $x_1, x_2, \dots, x_{\frac{n}{2}}$

от оси  $y$ , определяемых по приводимой ниже таблице в зависимости от  $n$ ;  $C$  — величина по таблице.

Число $n$ размеров фигуры при подсчете $J_y$	Значение $C$	Места замера размеров фигуры для подсчета $J_y$		
		$\frac{x_1}{a}$	$\frac{x_2}{a}$	$\frac{x_3}{a}$
2	$\frac{1^2}{3}$	0,7746	—	—
4	$\frac{1^2}{6}$	0,5815	0,9284	—
6	$\frac{1^2}{9}$	0,5030	0,8133	0,9410

Для подсчета по приведенным формулам  $S$  и  $J$  для профилей типа сечения турбинной лопатки вполне достаточно взять в формулах (48ж) и (48з) соответственно три и две пары ординат [16].

Аналогично производится подсчет статического момента и момента инерции

Число $n$ размеров фигуры, принимаемое при подсчете $S$	Места замера размеров фигуры (и их знаки), вводимые в формулу (48ж) для $S$				
	$\frac{x_1}{a}$	$\frac{x_2}{a}$	$\frac{x_3}{a}$	$\frac{x_4}{a}$	$\frac{x_5}{a}$
4	(-) 0,2701	(+) 0,6034	—	—	—
6	(+) 0,2980	(-) 0,5683	(+) 0,7703	—	—
8	(-) 0,0204	(+) 0,5821	(-) 0,7494	(+) 0,8544	—
10	(-) 0,0677	(+) 0,1293	(+) 0,7077	(-) 0,8330	(+) 0,8870

по отношению к оси  $x$ , проведенной через середину размера сечения. Центробежный момент инерции определяется по осевым моментам инерции, найденным для осей  $x, y$  и оси под углом  $45^\circ$  [см. формулу (48и)].

Моменты инерции  $J_u$  и  $J_{uv}$  по отношению к повернутым осям  $u$  и  $v$ :

$$J_u = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$J_{uv} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi, \quad (48и)$$

где  $J_x, J_y, J_{xy}$  — моменты инерции рассматриваемого сечения по отношению к осям  $x$  и  $y$ , с которыми взаимно перпендикулярные оси  $u$  и  $v$  пересекаются в одной точке; положительный угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$  до оси  $u$  против часовой стрелки.

Главные оси сечения — две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через данную точку, по отношению к которым центробежный момент инерции равен нулю; обозначаются цифрами 1 и 2. Моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  по отношению к главным осям называются *главными моментами инерции*; применяются при расчете напряжений при изгибе. Ось симметрии и перпендикулярная к ней ось являются главными осями. Главный момент инерции по отношению к одной оси является наибольшим ( $J_1 = J_{\max}$ ), по отношению к другой — наименьшим ( $J_2 = J_{\min}$ ) по сравнению с моментами инерции этого же сечения по отношению к другим осям, проходящим через данную точку. Главные оси, проходящие через центр тяже-



сти сечения, называются *главными центральными осями*.

Величины главных моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$  находятся или непосредственным подсчетом моментов инерции по отношению к главным осям 1 и 2 (если положение последних известно), или по моментам инерции  $J_x, J_y, J_{xy}$  по отношению к взаимно перпендикулярным осям  $x$  и  $y$ , проходящим через заданную точку. В последнем случае применяются формулы

$$J_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} \quad (49)$$

Знак плюс берется для  $J_1 = J_{\max}$  и знак минус — для  $J_2 = J_{\min}$ . Угол  $\varphi_0$  наклона главной оси по отношению к оси  $x$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}, \quad (49a)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}^{\min}} \quad (49б)$$

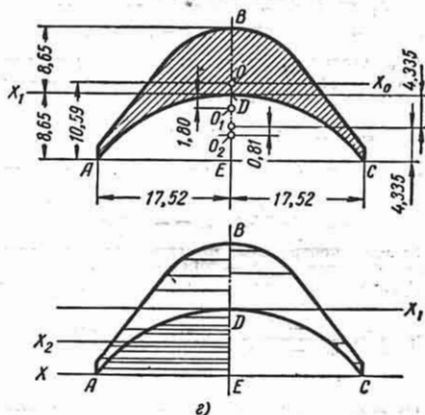
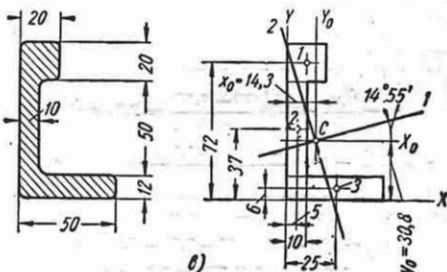
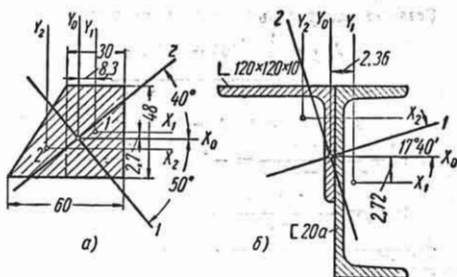
Формула (49a) или (49б) дает два угла, отсчитываемые против часовой стрелки:  $\varphi_0' \text{ и } \varphi_0'' = \varphi_0' + 90^\circ$ . При пользовании формулой (49a) для определения, какой из полученных двух осей соответствует  $J_{\max} = J_1$  и какой  $J_{\min} = J_2$ , величина  $\varphi_0'$  (или  $\varphi_0''$ ) подставляется в формулу (48и) и получается соответствующая введенному углу величина  $J_1$  или  $J_2$  (см. пример 3). При пользовании формулой (49б) для нахождения угла  $\varphi_0$  для оси наибольшего момента инерции в правую часть подставляется  $J_1 = J_{\max}$ , а для оси наименьшего момента, соответственно,  $J_2 = J_{\min}$ .

*Пример 2.* Сечение в виде трапеции (фиг. 10, а) может рассматриваться составленным из прямоугольника 1 и треугольника 2.

Площади  $F_1 = 1440 \text{ см}^2, F_2 = 720 \text{ см}^2$ , площадь всего сечения  $F = 2160 \text{ см}^2$ . Координаты центра тяжести трапеции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ , проходящих через центр тяжести прямоугольника 1,

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{-720 \cdot 8}{2160} = -2,7 \text{ см};$$

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{-720 \cdot 25}{2160} = -8,3 \text{ см}.$$



Фиг. 10.

Осевые и центробежные моменты инерции трапеции по отношению к ее центральным осям  $x_0$  и  $y_0$  [см. табл. 5, пример 1, формулы (48д), (48е), (49) и (49б)]

$$J_{x_0} = \frac{30 \cdot 48^3}{12} + 1440 \cdot 2,7^2 + \frac{30 \cdot 48^3}{36} + 720 \cdot 5,3^2 = 3994 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = \frac{48 \cdot 30^3}{12} + 1440 \cdot 8,3^2 + \frac{48 \cdot 30^3}{36} + 720 \cdot 16,7^2 = 4443 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_0 y_0} = 1440 \cdot 8,3 \cdot 2,7 + \frac{30^2 \cdot 48^2}{72} + 720 \cdot 5,3 \cdot 7,2 = 1249 \text{ см}^4.$$

Главные центральные моменты инерции:

$$J_{1,2} = \frac{1}{2} (3994 + 4443) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4443 - 3994)^2 + 4 \cdot 1248^2};$$

$$J_1 = 5490 \text{ см}^4; J_2 = 2950 \text{ см}^4;$$

$$\text{tg } \varphi_0' = \frac{1248}{4443 - 5490} = -1,193; \varphi_0' = -50^\circ;$$

$$\text{tg } \varphi_0'' = \frac{1248}{4443 - 2950} = 0,836; \varphi_0'' = 40^\circ.$$

Расположение главных центральных осей нанесено на фиг. 10, а.

Пример 3. Сечение состоит из двух стандартных профилей (фиг. 10, б). Положение центра тяжести и моменты инерции каждого профиля находятся из таблицы сортамента стали. Координаты центра тяжести сечения по отношению к осям, проходящим через центр швеллера,

$$y_0 = \frac{Sx_1}{F} = \frac{23,3(10 - 3,33)}{23,3 + 33,8} = 2,72 \text{ см};$$

$$x_0 = \frac{Sy_1}{F} = 23,3 \frac{-(3,33 + 1,97)}{57,1} = -2,36 \text{ см}.$$

Моменты инерции составного сечения относительно центральных осей  $x_0$  и  $y_0$ :

$$J_{x_0} = 316 + 23,3 (10 - 3,33 - 2,72)^2 + 1804 + 33,8 (2,72)^2 = 2734 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = 316 + 23,3 (3,33 + 1,97 - 2,36)^2 + 129,6 + 33,8 (2,36)^2 = 835 \text{ см}^4.$$

$J_{x_0 y_0}$  угольника относительно собственных центральных осей находится на основании первой формулы (48и) при  $\varphi = 45^\circ$ :

$$J_{x_0 y_0} = -\frac{1}{2} (316 + 316) + 130 = -186 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции всего сечения

$$J_{x_0 y_0} = -186 + 3,95 (-2,94) 23,3 + 2,36 (-2,72) 33,8 = -674 \text{ см}^4.$$

Главные центральные моменты инерции сечения по формуле (49)  $J_1 = 2954 \text{ см}^4$ ;  $J_2 = 614 \text{ см}^4$ .

Наклон главных центральных осей по формуле (49а)

$$\text{tg } 2\varphi_0 = \frac{2(-674)}{835 - 2734} = 0,71; \varphi_0' = 17^\circ 40';$$

$$\varphi_0'' = 107^\circ 40'.$$

Из очертания фигуры без применения формул видно, что наибольший момент инерции соответствует  $\varphi_0' = 17^\circ 40'$ .

Пример 4. Сечение по фиг. 10, в разбивается на три прямоугольника 1, 2 и 3.

Координаты центра тяжести С сечения по формулам (44)

$$x_0 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,5}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{21,5}{15,0} = 1,43 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 7,2 + 1 \cdot 5 \cdot 3,7 + 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0,6}{15,0} = 3,08 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения по отношению к центральным осям по формулам (48л) и (48е)

$$J_{x_0} = (J_{x_0})_1 + (J_{x_0})_2 + (J_{x_0})_3 = \frac{2 \cdot 2^3}{12} + 4(7,2 - 3,08)^2 + \frac{1 \cdot 5^3}{12} + 5(3,7 - 3,08)^2 + \frac{5 \cdot 1 \cdot 2^3}{12} + 6(3,08 - 0,6)^2 = 117,53 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_0} = \frac{2 \cdot 2^3}{12} + 4(1,43 - 1,0)^2 + \frac{5 \cdot 1^3}{12} + 5(1,43 - 0,5)^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5^3}{12} + 6(2,5 - 1,43)^2 = 26,17 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_0 y_0} = 4(7,2 - 3,08)(-1,43 + 1,0) + 5(3,7 - 3,08)(-1,43 + 0,5) + 6(-3,08 + 0,6)(2,5 - 1,43) = -26,04 \text{ см}^4.$$

Главные центральные моменты инерции и наклон главных центральных осей по формулам (49) и (49а):

$$J_1 = \frac{1}{2} (117,53 + 26,17) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{(26,17 - 117,53)^2 + 4(-26,04)^2} = 71,85 + 52,60 = 124,45 \text{ см}^4;$$

$$J_2 = 71,85 - 52,60 = 19,25 \text{ см}^4;$$

$$\text{tg } 2\varphi_0 = \frac{2J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} = \frac{2(-26,04)}{26,17 - 117,53} = +0,571;$$

$$\varphi_0' = 14^\circ 55'; \varphi_0'' = 104^\circ 55'.$$

Углу  $14^\circ 55'$  соответствует  $J_{\text{max}} = J_1$ .

Пример 5. Сечение турбинной лопатки имеет размеры, приведенные на фиг. 10, г. Для подсчета статического момента  $S_x$  рассматривается сечение 1 с контуром ABCDA за вычетом сечения 2 с контуром ABCEA. Полные размеры сечений 1 и 2:  $2a_1 = 2 \cdot 8,65 \text{ см}$  и  $2a_2 = 2 \cdot 4,335 \text{ см}$ .

Данные подсчета статических моментов сечений 1 и 2 относительно осей  $x_1$  и  $x_2$ , проходящих через середины наибольших размеров этих сечений, записываются в таблице (таблица здесь не приводится); размеры, принимаемые в расчете, обозначены отрезками в левой части фигуры.

$\frac{n}{2}$	Площадь ABCDA			Площадь ABCEA		
	1	2	3	1	2	3
$y \frac{n}{2}$	0,2980·8,65 = 2,58	0,5683·8,65 = 4,91	0,7703·8,65 = 6,66	0,2980·4,335 = 1,29	0,5663·4,335 = 2,46	0,7703·4,335 = 3,34
$x \frac{n}{2}$	27,56	-31,12	33,76	29,36	-31,80	33,40
$x - \frac{n}{2}$	-19,60	16,10	-12,40	-22,16	17,80	-13,00

Суммируя величины таблицы, получаем по формуле (48ж):

для сечения ABCDA

$$S_{x_1} = \frac{17,30^2}{6} \cdot 14,30 = 713,1 \text{ мм}^2;$$

для сечения ABCEA

$$S_{x_1} = \frac{8,67^2}{6} \cdot 13,60 = 170,3 \text{ мм}^2.$$

Соответственно координаты центра тяжести

$$y_0^{(1)} = \frac{713,1}{396,0} = 1,80 \text{ мм}$$

$$y_0^{(2)} = \frac{170,3}{209,6} = 0,81 \text{ мм}.$$

Центр тяжести сечения лопатки отстоит от оси  $x$  на расстоянии

$$y_0 = \frac{396,0(8,65 - 1,80) - 209,6(4,33 - 0,81)}{186,4} = 10,59 \text{ мм}$$

Данные подсчета момента инерции сечения лопатки при  $n = 4$  приведены в таблице; размеры, принимаемые в расчете, обозначены отрезками в правой части фигуры.

$\frac{n}{2}$	1	2
$y \frac{n}{2}$	$0,5815 \cdot 8,65 = 5,03$	$0,9284 \cdot 8,65 = 8,03$
$x \frac{n}{2}$	3,23	0,86
$x - \frac{n}{2}$	15,96	7,12

Суммируя данные таблицы по формуле (48з), получаем

$$J_{x_1} = \frac{8,65^3}{6} \cdot 27,16 = 2934 \text{ мм}^4.$$

Для центральной оси сечения лопатки

$$J_{x_0} = 2934 - 186,4 \cdot 1,94^2 = 2234 \text{ мм}^4.$$

Момент сопротивления сечения лопатки при изгибе в плоскости оси  $y$

$$W_x = \frac{2234}{10,59} = 211,0 \text{ мм}^3.$$

Эллипс инерции применяется для наглядного изображения моментов инерции сечения по отношению к различным осям, проходящим через данную точку (центр эллипса). Уравнение эллипса инерции

$$\frac{x^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} = 1, \quad (50)$$

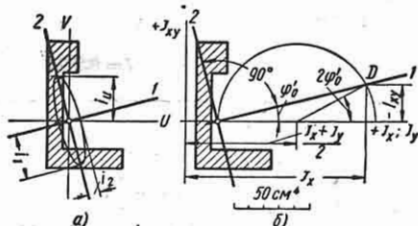
где  $x$  и  $y$  — координаты эллипса;  $i_1$  и  $i_2$  — главные радиусы инерции сечения.

Главные радиусы инерции  $i_1$  и  $i_2$  сечения подсчитываются по главным моментам инерции  $J_1$  и  $J_2$  сечения для осей, проходящих через данную точку:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}; \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} \text{ см}, \quad (51)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения.

При вычерчивании эллипса инерции величины  $i_1$  и  $i_2$  откладываются в масштабе сечения по перпендикулярам соответственно к осям 1 и 2 (фиг. 11, а). Графически, без подсчетов по формуле (4г и),



Фиг. 11.

находится  $J_u$  по отношению к любой оси  $u$ , проходящей через центр эллипса: проводится касательная к эллипсу, параллельная оси  $u$ , и замеряется расстояние  $i_u$ , по которому находится

$$J_u = i_u^2 F. \quad (51a)$$

Круг для моментов инерции дает зависимость между моментами инерции рассматриваемого сечения по отношению к различным осям, проходящим через данную точку, и вычерчивается по осевым и центробежному моментам инерции по отношению к двум взаимно перпендикулярным осям. Каждая точка окружности дает осевой (по горизонтальной оси координат) и центробежный (по вертикальной оси координат) моменты инерции сечения относительно оси, параллельной прямой, соединяющей эту точку окружности с левой точкой окружности, и перпендикулярной к ней оси сечения. Масштаб круга для моментов инерции сечения: 1 см чертежа —  $m \text{ см}^4$ . Круг для моментов инерции аналогичен кругу напряжений (см. стр. 9).

На фиг. 11, б круг для моментов инерции вычерчен по найденным в примере 4  $J_x = 117,5 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 26,2 \text{ см}^4$ ,  $J_{xy} = -26,0 \text{ см}^4$ .

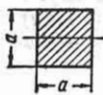
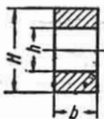
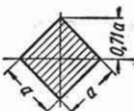
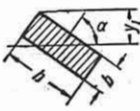
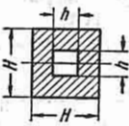
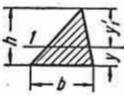
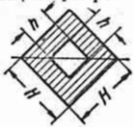
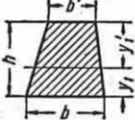
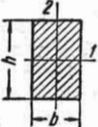
при величине  $\frac{J_x + J_y}{2} = 71,8 \text{ см}^4$ ;

Таблица 5

Площади  $F$ , положение центров тяжести, осевые моменты инерции  $J$ , моменты сопротивления  $W$  и радиусы инерции  $i$  для основных форм сечений [19]

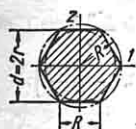
Моменты инерции  $J$  даны для главных центральных осей. Индекс при  $J$ ,  $W$  и  $i$  указывает ось, относительно которой дается рассматриваемая величина. Для сечений, имеющих по отношению ко всем центральным осям одинаковые моменты инерции, номера осей не обозначены, и указаны  $J = J_1 = J_2$ ;  $W = W_1 = W_2$ ;  $i = i_1 = i_2$ . Момент сопротивления  $W = \frac{J}{y}$ , где  $y$  — расстояние до соответствующих

крайних волокон. Радиус инерции  $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ .

<p>1. Квадрат</p>  $F = a^2;$ $J = \frac{a^4}{12};$ $W = \frac{a^3}{6};$ $i = 0,289a$	<p>6. Прямоугольник, сечение балки с отверстием</p>  $F = b(H - h);$ $J_1 = \frac{b}{12}(H^3 - h^3);$ $J_2 = \frac{H - h}{12}b^3;$ $W_1 = \frac{b}{6H}(H^2 - h^2);$ $W_2 = \frac{H - h}{6}b^2;$ $i_1 = 0,289\sqrt{H^2 + Hh + h^2};$ $i_2 = 0,289b$
<p>2. Квадрат, на ребро</p>  $F = a^2;$ $J = \frac{a^4}{12};$ $W_1 = W_2 = 0,118a^3*$	<p>7. Прямоугольник повернутый</p>  $F = bh;$ $y_1 = \frac{h \cos \alpha + b \sin \alpha}{2};$ $J_1 = \frac{bh}{12}(h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha);$ $i_1 = 0,289\sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$
<p>3. Квадрат с квадратным отверстием</p>  $F = H^2 - h^2;$ $J = \frac{H^4 - h^4}{12};$ $W = \frac{H^4 - h^4}{6H};$ $i = 0,289\sqrt{H^2 + h^2};$	<p>8. Треугольник</p>  $F = \frac{bh}{2};$ $y = \frac{h}{3}; \quad y'_1 = \frac{2h}{3};$ $J_1 = \frac{bh^3}{36};$ $W' = \frac{bh^2}{12}$ <p>(для нижних волокон);</p> $W'' = \frac{bh^2}{24}$ <p>(для верхних волокон);</p> $i_1 = 0,236h$
<p>4. Квадрат с квадратным отверстием, на ребро</p>  $F = H^2 - h^2;$ $J = \frac{H^4 - h^4}{12};$ $W = 0,118\frac{H^4 - h^4}{H};$ $i = 0,289\sqrt{H^2 + h^2};$	<p>9. Трапеция</p>  $F = \frac{b + b'}{2}h;$ $y_1 = \frac{b + 2b'}{3(b + b')}h;$ $J_1 = \frac{h^3(b^2 + 4bb' + b'^2)}{36(b + b')};$ $i_1 = \frac{h}{6(b + b')} \sqrt{2(b^2 + 4bb' + b'^2)}$
<p>5. Прямоугольник</p>  $F = bh;$ $J_1 = \frac{bh^3}{12}; \quad J_2 = \frac{hb^3}{12};$ $W_1 = \frac{bh^2}{6}; \quad W_2 = \frac{hb^2}{6};$ $i_1 = 0,289h; \quad i_2 = 0,289b$	

\* Срез верхнего и нижнего углов увеличивает  $W_1$ ; при срезке углов на  $\frac{1}{18}$  диагонали величина  $W_1$  достигает  $\max W_1 = 0,124h^3$  (1 — горизонтальная ось).

10. Правильный шестиугольник



$$F = 0,866a^2;$$

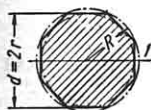
$$J_1 = J_2 = 0,541R^4 = 0,06a^4;$$

$$W_1 = 0,625R^3 = 0,12a^3;$$

$$W_2 = 0,541R^3;$$

$$i = 0,456R = 0,263d$$

11. Правильный восьмиугольник



$$F = 0,828a^2;$$

$$J_1 = 0,638R^4 = 0,0547a^4;$$

$$W_1 = 0,690R^3 = 0,1095a^3;$$

$$i = 0,257d$$

12. Правильный многоугольник с *n* сторонами

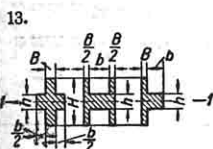


$$F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad y_2 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$J_1 = \frac{F(6y_1^2 - a^2)}{24};$$

$$J_2 = \frac{F(12y_2^2 + a^2)}{48}$$

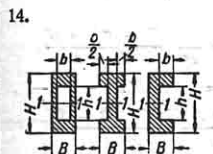


$$F = BH + bh;$$

$$J_1 = \frac{BH^3 + bh^3}{12};$$

$$W_1 = \frac{BH^2 + bh^2}{6H};$$

$$i = 0,289 \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{BH + bh}}$$

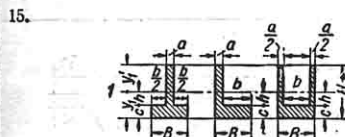


$$F = BH - bh;$$

$$J_1 = \frac{BH^3 - bh^3}{12};$$

$$W_1 = \frac{BH^2 - bh^2}{6H};$$

$$i = 0,289 \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{BH - bh}}$$

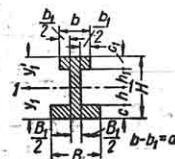


$$F = aH + bc;$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bc^2}{aH + bc}; \quad y_1' = H - y_1;$$

$$J_1 = \frac{1}{3} (By_1^3 - bh^3 + ay_1'^3)$$

16. Двутавр с различными полками



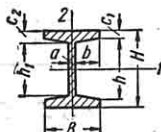
$$F = bc_1 + a(h + h_1) + Bc_2;$$

$$y_1 = \frac{aH^2 + Bc_1^2 + b_1c_1(2H - c_1)}{2(aH + Bc_1 + b_1c_1)};$$

$$y_1' = H - y_1;$$

$$J_1 = \frac{1}{3} (By_1^3 - B_1h^3 + by_1'^3 - b_1h_1^3)$$

17. Двутавр



$$F = aH + 2b(c_1 + c_2);$$

$$J_1 = \frac{1}{12} [BH^3 - \frac{1}{4a}(h^4 - h_1^4)];$$

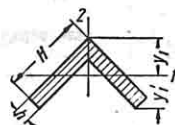
$$J_2 = \frac{1}{12} [B^3(H - h) + ha^3 + \frac{\alpha}{4}(B^4 - a^4)];$$

$$W_1 = \frac{1}{6H} [BH^2 - \frac{1}{4a}(h^4 - h_1^4)];$$

$$W_2 = \frac{1}{6B} [B^3(H - h) + ha^3 + \frac{\alpha}{4}(B^4 - a^4)].$$

Наклон скосов  $\alpha = \frac{n - h_1}{2b}$  (для стандартных двутавров  $\alpha \approx \frac{1}{6}$ )

18. Угольник



$$F = h(2H - h);$$

$$y_1 = \frac{H^2 + hH - h^2}{2(2H - h) \cos 45^\circ};$$

$$J_1 = \frac{1}{3} [2c^4 - 2(c - h)^4 + h(H - 2c + \frac{h}{2})^4]$$

где  $c = y_1 \cos 45^\circ$

## 19. Угольник с неравными стенками

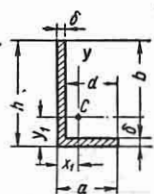
$$F = \delta(a+b);$$

$$x_1 = \frac{a^2 + b\delta}{2(a+b)}; \quad y_1 = \frac{h^2 + d\delta}{2(h+d)}$$

$$J_x = \frac{1}{3} [\delta(h-y_1)^3 + ay_1^3 - d(y_1-\delta)^3];$$

$$J_y = \frac{1}{3} [\delta(a-x_1)^3 + hx_1^3 - b(x_1-\delta)^3];$$

$$J_{xy} = -\frac{abd\delta}{4(a+b)}$$



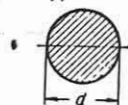
Оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести

## 20. Круг

$$F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4;$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad i = \frac{d}{4}$$

(см. также табл. 7)



## 21. Круг с эксцентричным круговым отверстием

$$F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2);$$

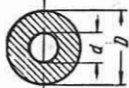
$$J = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4);$$

$$\alpha = \frac{d}{D}; \quad W = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4);$$

$$i = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2}.$$

При малом  $\frac{D-d}{D+d}$  см. п. 23

(см. также табл. 9)

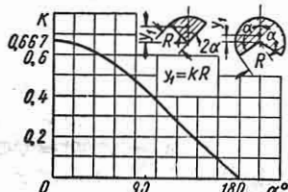
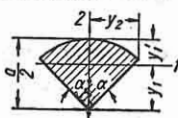


## 24. Круговой сектор

$$F = \alpha \frac{d^2}{4};$$

$$y_1 = d \frac{\sin \alpha}{3\alpha};$$

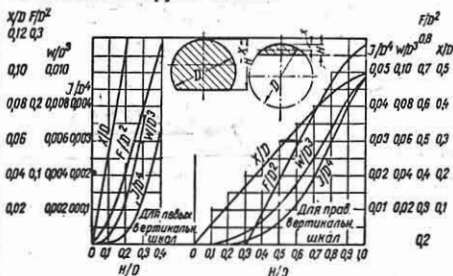
$$y_1' = d \left(0,5 - \frac{\sin \alpha}{3\alpha}\right);$$



$$J_1 = \frac{d^4}{64} \left[ \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right];$$

$$J_2 = \frac{d^4}{64} [\alpha - \sin \alpha \cos \alpha]$$

## 25. Неполный круг и сегмент

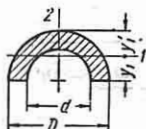


## 26. Половина плого круглого сечения

$$F = \frac{\pi}{8}(D^2 - d^2);$$

$$y_1 = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + dD + d^2}{D+d};$$

$$J_1 = 0,00686(D^4 - d^4) - \frac{0,0177d^2D^2(D-d)}{D+d}$$



При малой толщине стенки  $J_1 \approx 0,0385 \left(\frac{D+d}{2}\right)^4$

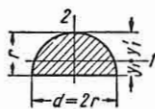
22. Полуокруг  $F = \frac{\pi d^2}{8}; y_1 = 0,2122d; y_1' = 0,2878d;$ 

$$J_1 = 0,00686d^4;$$

$$J_2 = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025d^4;$$

$$W_1 = 0,2587r^3 \text{ (для нижних волокон); } W_2 = 0,1908r^3 \text{ (для верхних волокон);}$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$$

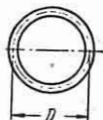


## 23. Тонкое кольцо

$$F = \pi D\delta; \quad J = \frac{\pi D^3}{8}\delta;$$

$$W = \frac{\pi D^2}{4}\delta; \quad i = 0,353D$$

(см. также табл. 8)



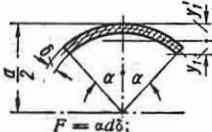
## 27. Часть тонкого кольца

$$y_1 = \frac{d-\delta}{2} \times$$

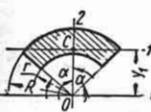
$$\times \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right) + \frac{\delta \cos \alpha}{2};$$

$$J_1 = \frac{\delta(d-\delta)^3}{8} \left[ \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right];$$

$$J_2 = \frac{\delta(d-\delta)^3}{8} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$



28. Сектор кольца



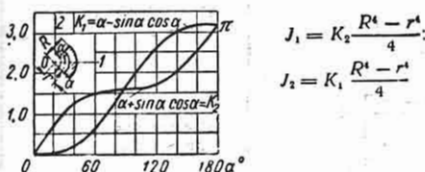
$$F = \alpha (R^2 - r^2);$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha};$$

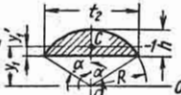
$$J_1 = \frac{R^4 - r^4}{4} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$J_2 = \frac{R^4 - r^4}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

Величины  $J_1$  и  $J_2$  могут находиться с помощью приводимого ниже графика.



29. Круговой сегмент




$$F = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha);$$

$$y_1 = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha};$$

$$J_1 = \frac{FR^2}{4} \left[ 1 + \frac{2 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right];$$

$$J_2 = \frac{FR^2}{4} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

30. Сплошной эллипс



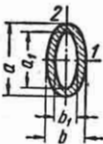
$$F = \frac{\pi}{4} ab;$$

$$J_1 = \frac{\pi a^3 b}{64}; \quad J_2 = \frac{\pi a b^3}{64};$$

$$W_1 = \frac{\pi a^2 b}{32}; \quad W_2 = \frac{\pi a b^2}{32};$$

$$i_1 = \frac{a}{4}; \quad i_2 = \frac{b}{4}$$

31. Полый эллипс



$$F = \frac{\pi}{4} (ab - a_1 b_1);$$

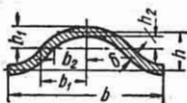
$$J_1 = \frac{\pi}{64} (a^3 b - a_1^3 b_1);$$

$$J_2 = \frac{\pi}{64} (a b^3 - a_1 b_1^3);$$

$$W_1 = \frac{\pi}{32 a} (a^2 b - a_1^2 b_1);$$

$$W_2 = \frac{\pi}{32 b} (a b^2 - a_1 b_1^2)$$

32. Сечение волнистого железа. Волны составлены из параболических дуг;  $F, J, W$  на 100 см ширины



$$F \approx \frac{1}{3} \delta (2b + 5, 2h);$$

$$J = \frac{64}{105} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3);$$

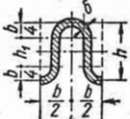
где  $b_1 = \frac{1}{4} (b + 2,6\delta);$

$$b_2 = \frac{1}{2} (b - 2,6\delta);$$

$$h_1 = \frac{1}{2} (h + \delta); \quad h_2 = \frac{1}{2} (h - \delta).$$

Приближенно  $W_1 \approx \frac{2J_1}{h + \delta}$

33. Сечение балочного волнистого железа. Волна имеет форму дуги круга;  $F, J, W$  на 100 см ширины



$$F = 2 \left( \frac{\pi b}{4} + h_1 \right) \delta;$$

$$J_1 = \frac{\delta}{4} \left( \frac{\pi b^3}{16} + b^2 h_1 + \frac{\pi b h_1^2}{2} + \frac{2}{3} h_1^3 \right);$$

где  $h_1 = h - 0,5b$ .

Приближенно  $W_1 \approx \frac{2J_1}{h + \delta}$

34. Сечение железнодорожного рельса с обычным отношением между размерами сечения. Высота рельса  $h$  в см.

Высота рельса  $h$  в см.  
 Приближенные формулы:  $F = 0,238h^2; \max J = 0,032h^4; \max W = 0,064h^3$

35. Сечение прокатных балок стандартных размеров. Высота сечения  $h$  в см. См. т. 6, гл. IV. Приближенные формулы: двутавр на ребро

$$W = \frac{(h+2)^2}{51} \text{ см}^3;$$

корытный профиль на ребро

$$W = \frac{(h+5)^2}{81} \text{ см}^3$$

36. Сечение любой формы. Следующие формулы могут быть использованы только для ориентировочной оценки величин  $J$  и  $W$  относительно центральной оси: для сплошного сечения

$$J = \frac{F^2 h}{12b};$$

для сплошного симметричного сечения

$$W = \frac{F^2}{6b};$$

для полого сечения

$$J = \frac{Fh}{6b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] \delta;$$

для полого симметричного сечения

$$W = \frac{F}{3b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] \delta.$$

С ошибкой до ~ 15%

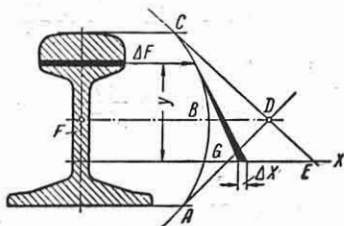
С ошибкой до ~ 25%

Здесь  $F$  — площадь внутри наружного контура сечения;  $h$  и  $b$  — высота и ширина сечения;  $s$  и  $\delta$  — длина периметра и толщина стенки (для полого сечения).

последняя определяет положение центра круга. Величина  $J_{xy}$ , взятая с обратным знаком, откладывается от конца отрезка  $J_x \geq J_y$ . Тогда наклон линии, соединяющей левую точку окружности с точкой  $D$ , дает направление для оси  $I$ , соответствующей  $J_1 \geq J_2$ ; точка  $D$  берется на окружности со стороны  $J_x > J_y$ .

### Графическое определение моментов инерции

Рассматриваемое поперечное сечение площадью  $F$  разбивается на полоски,



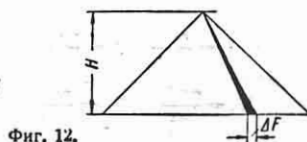
параллельные заданной оси. Площади  $\Delta F$  полосок принимаются за силы, и строятся,

как показано на фиг. 12, силовой и веревочной многоугольниками (см. т. I, стр. 364).

Если полюсное расстояние  $H$  взято равным  $\frac{1}{2} F$ , то площадь  $F_1$  (площадь  $ABCDEGA$ ), ограниченная веревочной кривой, крайними лучами и осью  $x$ , будет равняться квадрату радиуса инерции  $i_x$  заданной фигуры по отношению к оси  $x$ , т. е.

$$J_x = F_1 F = i_x^2 F. \quad (52)$$

Построение силового и веревочного многоугольников см. т. I, стр. 364.



Фиг. 12.

Определение моментов инерции может вестись с помощью интеграторов.

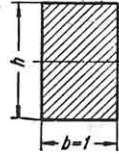


Прямоугольное сечение

Таблица 6

Момент инерции  $J = \frac{bh^3}{12}$

Момент сопротивления  $W = \frac{bh^2}{6}$



Радиус инерции сечения  $i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 0,289h$ . Значение  $F, W, J$  и  $i$  даны в таблице для  $b=1$  см.

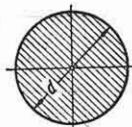
При ширине заданного сечения, отличной от  $b=1$  см, величина  $i$  остается той же, а имеющиеся в таблице величины  $F, W, J$  умножаются на заданное  $b$ .

Если высота  $h$  сечения в  $10^n$  ( $n=1, 2, 3 \dots$ ) раз больше (или меньше) указанной в таблице, то величины  $F, W, J$  и  $i$  умножаются (или делятся) соответственно на  $10^{2n}, 10^{2n}, 10^{3n}$  и  $10^n$ .

$h$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^3 W$ в см <sup>3</sup>	$10^3 J$ в см <sup>4</sup>	$10i$ в см	$h$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^3 W$ в см <sup>3</sup>	$10^3 J$ в см <sup>4</sup>	$10i$ в см
1	1	0,167	0,083	0,289	46	46	352,7	8 111	13,29
2	2	0,667	0,667	0,578	47	47	368,2	8 652	13,58
3	3	1,500	2,250	0,867	48	48	384,0	9 216	13,87
4	4	2,667	5,333	1,156	49	49	400,2	9 804	14,16
5	5	4,167	10,417	1,445	50	50	416,7	10 417	14,45
6	6	6,000	18,000	1,734					
7	7	8,167	28,583	2,023	51	51	433,5	11 054	14,74
8	8	10,667	42,667	2,312	52	52	450,7	11 717	15,03
9	9	13,500	60,750	2,601	53	53	468,2	12 406	15,32
10	10	16,67	83,33	2,89	54	54	486,0	13 122	15,61
					55	55	504,2	13 865	15,90
11	11	20,17	110,92	3,179	56	56	522,7	14 635	16,18
12	12	24,00	144,00	3,468	57	57	541,5	15 433	16,47
13	13	28,17	183,08	3,757	58	58	560,7	16 259	16,76
14	14	32,67	228,67	4,046	59	59	580,2	17 115	17,05
15	15	37,50	281,25	4,335	60	60	600,0	18 000	17,34
16	16	42,67	341,3	4,624					
17	17	48,17	409,4	4,913	61	61	620,2	18 915	17,63
18	18	54,00	482,0	5,202	62	62	640,7	19 853	17,92
19	19	60,17	571,6	5,491	63	63	661,5	20 833	18,21
20	20	66,67	666,7	5,780	64	64	682,7	21 845	18,50
					65	65	704,2	22 885	18,79
21	21	73,50	772	6,069	66	66	726,0	23 958	19,07
22	22	80,67	887	6,358	67	67	748,2	25 064	19,36
23	23	88,17	1014	6,647	68	68	770,7	26 203	19,65
24	24	96,00	1152	6,936	69	69	793,5	27 377	19,94
25	25	104,2	1302	7,225	70	70	816,7	28 583	20,23
26	26	112,7	1465	7,514					
27	27	121,5	1640	7,803	71	71	840,2	29 826	20,52
28	28	130,7	1829	8,092	72	72	864,0	31 104	20,81
29	29	140,2	2032	8,381	73	73	888,2	32 418	21,10
30	30	150,0	2250	8,670	74	74	912,7	33 769	21,39
					75	75	937,5	35 156	21,68
31	31	160,2	2483	8,959	76	76	962,7	36 581	21,96
32	32	170,7	2731	9,248	77	77	988,2	38 044	22,25
33	33	181,5	2995	9,537	78	78	1014	39 546	22,54
34	34	192,7	3275	9,826	79	79	1040	41 087	22,83
35	35	204,2	3573	10,115	80	80	1067	42 667	23,12
36	36	216,0	3888	10,40					
37	37	228,2	4221	10,69	81	81	1094	44 287	23,41
38	38	240,7	4573	10,98	82	82	1121	45 948	23,70
39	39	253,5	4943	11,27	83	83	1145	47 649	23,99
40	40	266,7	5333	11,56	84	84	1176	49 392	24,28
					85	85	1204	51 177	24,57
41	41	280,2	5743	11,85	86	86	1233	53 005	24,85
42	42	294,0	6174	12,14	87	87	1262	54 875	25,14
43	43	308,2	6626	12,43	88	88	1291	56 889	25,43
44	44	322,7	7099	12,72	89	89	1320	58 747	25,72
45	45	337,5	7594	13,01	90	90	1350	60 750	26,01

Продолжение табл. 6

$h$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^2 W$ в см <sup>3</sup>	$10^3 J$ в см <sup>4</sup>	$10 i$ в см	$h$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^2 W$ в см <sup>3</sup>	$10^3 J$ в см <sup>4</sup>	$10 i$ в см
91	91	1380	62 798	26,32	125	125	2604	162 760	36,13
92	92	1411	64 891	26,59	135	135	3038	205 031	39,02
93	93	1442	67 030	26,88	145	145	3504	254 052	41,91
94	94	1473	69 215	27,17	155	155	4004	310 323	44,80
95	95	1504	71 448	27,46	165	165	4537	374 344	47,69
96	96	1536	73 728	27,74	175	175	5104	446 580	50,58
97	97	1568	76 056	28,03					
98	98	1601	78 433	28,32	185	185	5704	527 635	53,47
99	99	1637	80 858	28,61	195	195	6338	617 906	56,36
100	100	1667	83 330	28,90	205	205	7004	717 930	59,24
105	105	1838	96 467	30,35	215	215	7704	828 147	62,13
115	115	2204	126 740	33,24	225	225	8437	949 218	65,02



## Круглое сечение

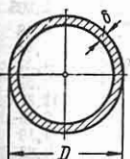
Таблица 7

$J = \frac{\pi d^4}{64}$  — осевой момент инерции;  $W = \frac{\pi d^3}{32}$  — осевой момент сопротивления;  $F = \frac{\pi d^2}{4}$  — площадь сечения;  $i = \frac{d}{4}$  — радиус инерции сечения.  
Полярный момент инерции  $J_p = 2J$ ; полярный момент сопротивления  $W_p = 2W$

$d$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^3 W$ в см <sup>3</sup>	$10^4 J$ в см <sup>4</sup>	$d$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^3 W$ в см <sup>3</sup>	$10^4 J$ в см <sup>4</sup>
1	0,785	0,0982	0,049	41	1 320	6 766	138 719
2	3,142	0,7854	0,785	42	1 385	7 274	152 745
3	7,069	2,651	3,976	43	1 452	7 806	167 820
4	12,566	6,283	12,57	44	1 520	8 363	183 984
5	19,635	12,27	30,68	45	1 590	8 946	201 289
6	28,27	21,21	63,62	46	1 661	9 556	219 787
7	38,48	33,67	117,9	47	1 734	10 193	239 531
8	50,27	50,27	201,1	48	1 809	10 857	260 576
9	63,62	71,57	322,1	49	1 885	11 550	282 979
10	78,54	98,17	490,0	50	1 963	12 272	306 796
11	95,03	130,7	718,1	51	2 043	13 023	332 086
12	113,10	169,6	1 018	52	2 123	13 804	358 903
13	132,73	215,7	1 402	53	2 206	14 616	387 323
14	153,94	269,4	1 886	54	2 290	15 450	417 393
15	176,7	331,3	2 485	55	2 376	16 334	449 180
16	201,1	402,1	3 217	56	2 463	17 241	482 750
17	227,0	482,3	4 100	57	2 552	18 181	518 166
18	254,5	572,6	5 153	58	2 642	19 155	555 497
19	283,5	673,4	6 397	59	2 734	20 163	594 810
20	314,2	785,4	7 854	60	2 827	21 206	636 172
21	346,4	909,2	9 547	61	2 922	22 284	679 651
22	380,1	1 045	11 499	62	3 019	23 398	725 332
23	415,5	1 194	13 737	63	3 117	24 548	773 272
24	452,4	1 357	16 286	64	3 217	25 736	823 550
25	490,9	1 534	19 175	65	3 318	26 961	876 240
26	530,9	1 726	22 432	66	3 421	28 225	931 420
27	572,6	1 932	26 087	67	3 526	29 527	989 166
28	615,8	2 155	30 172	68	3 632	30 869	1 049 556
29	660,5	2 394	34 719	69	3 739	32 251	1 112 660
30	706,9	2 651	39 761	70	3 848	33 674	1 178 588
31	754,8	2 925	45 333	71	3 959	35 138	1 247 393
32	804,2	3 217	51 472	72	4 072	36 644	1 319 167
33	855,3	3 528	58 214	73	4 185	38 192	1 393 995
34	907,9	3 859	65 597	74	4 301	39 783	1 471 963
35	962,1	4 209	73 662	75	4 418	41 417	1 553 156
36	1 017,9	4 580	82 448	76	4 536	43 096	1 637 662
37	1 074,2	4 973	91 998	77	4 657	44 820	1 725 571
38	1 134,1	5 387	102 354	78	4 778	46 589	1 816 972
39	1 194,6	5 824	113 561	79	4 902	48 404	1 911 967
40	1 256,6	6 283	125 664	80	5 027	50 265	2 010 619

Продолжение табл. 7

$d$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^8 W$ в см <sup>3</sup>	$10^4 J$ в см <sup>4</sup>	$d$ в мм	$10^2 F$ в см <sup>2</sup>	$10^8 W$ в см <sup>3</sup>	$10^4 J$ в см <sup>4</sup>
81	5 153	52 174	2 113 051	116	10 568	153 241	8 837 958
82	5 281	54 130	2 219 343	117	10 751	157 238	9 198 425
83	5 410	56 135	2 329 605	118	10 936	161 304	9 516 955
84	5 542	58 189	2 443 920	119	11 122	165 440	9 843 689
85	5 675	60 292	2 562 392	120	11 310	169 648	10 173 600
86	5 809	62 445	2 685 120				
87	5 945	64 648	2 812 205	121	11 499	173 923	10 522 320
88	6 032	66 903	2 943 748	122	11 690	178 271	10 874 501
89	6 221	69 210	3 079 853	123	11 882	182 690	11 235 450
90	6 362	71 569	3 220 623	124	12 076	187 182	11 605 811
				125	12 272	191 748	11 984 229
91	6 504	73 982	3 366 165	126	12 469	196 387	12 372 350
92	6 648	76 448	3 516 586	127	12 668	201 100	12 769 824
93	6 793	78 968	3 671 982	123	12 868	205 887	13 176 799
94	6 940	81 542	3 832 492	129	13 070	210 750	13 593 424
95	7 088	84 173	3 998 193	130	13 273	215 690	14 019 852
96	7 238	86 859	4 169 220				
97	7 390	89 601	4 345 671	131	13 478	220 706	14 456 235
98	7 543	92 401	4 527 664	132	13 685	225 799	14 902 727
99	7 698	95 259	4 715 315	133	13 893	230 970	15 359 483
100	7 854	98 175	4 908 738	134	14 103	236 216	15 826 658
				135	14 314	241 547	16 304 411
101	8 012	101 150	5 108 055	136	14 527	246 954	16 792 899
102	8 171	104 184	5 313 378	137	14 741	252 442	17 292 282
103	8 332	107 278	5 524 830	138	14 957	258 010	17 802 731
104	8 495	110 433	5 742 532	139	15 175	263 660	18 324 378
105	8 659	113 650	5 966 604	140	15 394	269 392	18 857 613
106	8 825	116 928	6 197 171				
107	8 992	120 268	6 434 357	141	15 615	275 205	19 401 999
108	9 161	123 672	6 678 287	142	15 837	281 103	19 959 294
109	9 331	127 139	6 929 087	143	16 061	287 083	20 526 466
110	9 503	130 671	7 183 886	144	16 286	293 148	21 106 684
				145	16 513	299 298	21 699 116
111	9 677	134 267	7 451 813	146	16 742	305 533	22 303 933
112	9 852	137 929	7 723 997	147	16 972	311 855	22 921 307
113	10 029	141 656	8 003 571	148	17 203	318 262	23 551 409
114	10 207	145 450	8 290 666	149	17 437	324 757	24 194 414
115	10 387	149 312	8 585 417	150	17 672	331 340	24 850 496



Сечения круглых труб

Таблица 8

$F$  — площадь поперечного сечения;  $J$  — осевой момент инерции;  $W$  — осевой момент сопротивления; полярный момент инерции  $J_p = 2J$ ; полярный момент сопротивления  $W_p = 2W$ .

Вес  $q$  в кг/м относится к гладким стальным трубам; вес 1 м<sup>3</sup> стали принят 7850 кг. Для дюрала значения  $q$ , взятые из таблицы, необходимо умножить на 0,363

$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м	$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м
3	0,5	0,0393	0,00032	0,0021	0,031	9	1,5	0,3535	0,02585	0,0572	0,277
5	1,5	0,1649	0,00299	0,0120	0,1295	9	1	0,2514	0,0204	0,0453	0,197
5	1	0,1254	0,00267	0,0108	0,0985	10	2	0,5027	0,0427	0,0854	0,395
5	0,5	0,0707	0,00181	0,0072	0,0555	10	1	0,2827	0,0290	0,0580	0,222
6	1,5	0,2120	0,0058	0,0193	0,1665	10	0,5	0,1492	0,01688	0,0338	0,117
						11	2	0,5655	0,0501	0,1093	0,444
6	1,0	0,1571	0,0051	0,0171	0,1235	11	1,5	0,4476	0,0518	0,0942	0,351
6	0,5	0,0864	0,00329	0,0109	0,0678						
7	1,5	0,2591	0,01053	0,0301	0,203	11	1	0,3141	0,0397	0,0722	0,247
7	1	0,1884	0,00872	0,0249	0,149	12	3	0,8482	0,0954	0,1590	0,666
8	2	0,3770	0,01885	0,0472	0,296	12	2	0,6283	0,0817	0,1361	0,493
8	1	0,2199	0,0137	0,0342	0,173	12	0,75	0,2650	0,0421	0,0702	0,204
8	0,5	0,1178	0,00832	0,0208	0,0924	12	0,3	0,1103	0,0189	0,0315	0,086
9	2	0,4398	0,02914	0,0648	0,0345	13	1,5	0,5419	0,0911	0,1401	0,425

Продолжение табл. 8

$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ кг/м	$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м
13	1	0,3770	0,0683	0,1052	0,296	40	3	3,487	6,006	3,003	2,735
14	3	1,037	0,1685	0,2407	0,814	40	2	2,388	4,327	2,164	1,874
14	2	0,7540	0,1395	0,1993	0,592	40	1	1,225	2,331	1,166	0,961
14	0,75	0,3121	0,0588	0,0983	0,245	45	2,5	3,338	7,563	3,360	2,620
14	0,3	0,1291	0,0303	0,0433	0,101	45	1,5	2,050	4,854	2,157	1,610
15	2,5	0,9818	0,1994	0,2659	0,771	45	1	1,382	3,347	1,488	1,034
15	1,5	0,6362	0,1467	0,1957	0,499	48	3	4,241	10,783	4,493	3,33
15	0,5	0,2278	0,0599	0,0799	0,179	48	2	2,890	7,659	3,191	2,27
16	3,0	1,2252	0,2726	0,3408	0,961	48	1	1,477	4,079	1,703	1,160
16	2,0	0,8796	0,2199	0,2749	0,690	50	4	5,781	15,405	6,162	4,62
16	1,0	0,4712	0,1331	0,1664	0,370	50	3	4,430	12,291	4,912	3,480
16	0,5	0,2434	0,0732	0,0915	0,191	50	2	3,016	8,701	3,480	2,366
18	3,0	1,4137	0,4135	0,4596	0,109	50	1	1,539	4,622	1,848	1,208
18	2	1,0053	0,3267	0,3630	0,789	55	4,5	7,139	22,939	8,341	5,60
18	1,0	0,5341	0,1936	0,2151	0,419	55	3,5	5,663	18,864	6,850	4,445
18	0,5	0,2749	0,1053	0,1170	0,216	55	2,5	4,123	14,240	5,185	2,612
20	3	1,6220	0,5968	0,5968	1,273	55	1,5	2,521	9,027	3,280	1,980
20	2,0	1,1310	0,4637	0,4637	0,886	55	1	1,697	6,186	2,250	1,332
20	1,0	0,5969	0,2701	0,2701	0,469	60	4	7,037	27,726	9,242	5,52
20	0,5	0,3063	0,1457	0,1457	0,240	60	3	5,372	21,88	7,30	4,22
22	3,0	1,7907	0,8282	0,7529	1,405	60	2	3,664	15,34	5,11	2,86
22	2	1,2570	0,6346	0,5765	0,986	60	1	1,854	8,068	2,69	1,453
22	1,0	0,6597	0,3645	0,3310	0,518	65	5,5	10,281	45,885	14,12	8,07
22	0,5	0,3377	0,1952	0,1774	0,265	65	4,5	8,553	39,349	12,11	6,715
24	3	1,979	1,1133	0,9275	1,553	65	3,5	6,762	32,07	9,870	5,31
24	2	1,382	0,8432	0,702	1,084	65	2,5	4,909	24,01	7,390	3,85
24	1	0,7226	0,4787	0,399	0,567	65	1,5	2,922	15,09	4,645	2,374
26	3,0	2,168	1,458	1,121	1,700	65	1	2,012	10,30	3,17	1,578
26	1	0,7854	0,6146	0,472	0,617	70	5	10,240	54,241	15,497	8,02
28	3,0	2,356	1,8673	1,334	1,850	70	4	8,294	45,326	12,950	6,51
28	2	1,6336	1,3886	0,992	1,282	70	3	6,315	35,50	10,130	4,96
28	1	0,8483	0,774	0,553	0,666	70	2	4,273	24,717	7,063	3,355
28	0,5	0,4320	0,4086	0,292	0,339	70	1,5	3,228	18,942	5,411	2,533
30	4	3,267	2,826	1,884	2,065	75	3,5	7,862	50,36	13,43	6,17
30	3	2,545	2,348	1,564	1,998	75	2,5	5,695	37,467	9,99	4,47
30	2,0	1,7593	1,733	1,156	1,390	75	1,5	3,464	23,399	6,24	2,92
30	1,0	0,9111	0,9589	0,639	0,715	80	5	11,781	83,203	20,80	9,25
30	0,5	0,4634	0,5042	0,336	0,364	80	4	9,551	69,145	17,28	7,50
32	5	4,241	3,997	2,498	3,33	80	3	7,257	53,87	13,17	5,70
32	3	2,733	2,904	1,815	2,145	80	2	4,901	37,296	9,32	3,85
32	2	1,885	2,130	1,330	1,480	80	1,5	3,699	28,508	7,12	2,905
32	1,0	0,9739	1,171	0,732	0,765	90	4	10,807	100,13	22,25	8,48
32	0,5	0,4948	0,614	0,384	0,388	90	3	8,200	77,67	17,26	6,44
34	2,0	2,011	2,534	1,519	1,578	90	2	5,529	53,55	11,90	4,34
34	1,0	1,037	1,412	0,831	0,814	90	1,5	4,171	40,34	9,08	3,27
38	3	3,299	5,088	2,680	2,590	100	5	14,922	163,81	33,80	11,71
38	2,0	2,262	3,676	1,934	1,775	100	4	12,064	139,22	27,84	9,46
38	1	1,162	1,990	1,047	0,911	100	3	9,142	127,63	21,53	7,18
40	4	4,524	7,419	3,710	3,55	100	2	6,158	73,95	14,79	4,83

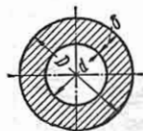
## Круглое кольцевое сечение

Таблица 9

$F$  — площадь поперечного сечения;  $J$  — осевой момент инерции;  $W$  — осевой момент сопротивления; полярный момент инерции  $J_p = 2J$ ; полярный момент сопротивления

$$W_p = 2W; \delta = \frac{D-d}{2}; d = D - 2\delta.$$

Вес  $q$  в кг/м относится к гладким чугунным трубам; вес 1 м<sup>3</sup> чугуна принят 7250 кг. Для стали значения  $q$ , взятые из таблицы, необходимо умножить на 1,083



$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м	$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м
80	10	22,0	137	34,2	16,0	90	14	33,4	250	55,6	24,2
	12	25,6	153	38,2	18,6		16	37,2	257	59,3	27,0
	14	29,0	165	41,2	21,0		10	28,3	291	58,2	20,5
90	10	25,1	204	45,3	18,2	100	12	33,2	327	65,4	24,1
	12	29,4	229	50,9	21,3		14	37,8	359	71,8	27,4

Продолжение табл. 9

$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/мм	$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/мм
100	16	42,2	385	77,0	30,6	210	16	97,5	4 619	440	70,7
	18	46,4	409	81,8	33,6		18	109	5 047	481	78,7
120	10	34,6	527	87,8	25,1	220	20	119	5 448	519	86,6
	12	40,7	601	100	29,5		22	130	5 819	554	94,2
	14	46,6	666	111	33,8		24	140	6 166	587	101,6
	16	52,3	724	121	37,9		26	150	6 488	618	109,0
	18	57,7	773	129	41,8		28	160	6 786	646	116,1
	20	62,8	817	136	45,5		30	170	7 062	673	123,0
130	10	37,7	683	105	27,3	230	16	103	5 342	486	74,3
	12	44,5	782	120	32,3		18	114	5 873	534	82,8
	14	51,0	871	134	37,0		20	126	6 346	577	91,1
	16	57,3	949	146	41,5		22	137	6 789	611	99,2
	18	62,3	1 019	157	45,9		24	148	7 203	655	107,2
	20	69,1	1 080	166	50,1		26	158	7 589	690	114,9
140	12	48,3	997	142	35,0	240	28	169	7 949	723	122,5
	14	55,4	1 114	159	40,2		30	179	8 282	753	129,8
	16	62,3	1 218	174	45,2		16	109	6 207	540	78,0
	18	68,9	1 311	187	50,0		18	120	6 780	587	86,9
	20	75,4	1 395	199	54,7		20	132	7 341	638	95,0
	22						22	144	7 862	684	104,3
150	12	52,0	1 248	166	37,7	250	24	155	8 351	726	112,6
	14	59,8	1 239	186	43,4		26	167	8 809	766	120,8
	16	67,4	1 534	205	48,9		28	178	9 238	803	128,8
	18	74,7	1 656	221	54,1		30	189	9 637	838	137,6
	20	81,7	1 766	235	59,2		18	126	7 785	649	91,0
	22	88,6	1 866	249	64,2		20	138	8 434	703	100,2
160	24	95,0	1 955	261	68,9	260	22	151	9 042	753	109,3
	14	64,2	1 727	216	46,5		24	163	9 616	801	118,1
	16	72,4	1 899	237	52,5		26	175	10 154	846	126,7
	18	80,3	2 056	257	58,2		28	186	10 659	888	135,2
	20	88,0	2 200	275	63,8		30	198	11 133	928	143,5
	22	95,4	2 329	291	69,2		18	131	8 880	710	95,1
170	24	102,5	2 445	306	74,3	270	22	158	10 334	827	114,3
	14	68,3	2 104	244	49,7		26	183	11 633	931	132,7
	16	77,7	2 320	273	56,1		30	207	12 778	1 022	150,8
	18	85,9	2 517	296	62,4		34	231	13 790	1 103	167,3
	20	94,3	2 699	318	68,3		18	137	10 073	775	99,2
	22	102	2 863	337	74,2		22	164	11 746	904	119,3
180	24	110	3 013	354	79,8	280	26	191	13 243	1 019	138,5
	14	73,0	2 534	282	52,9		30	217	14 577	1 121	157,2
	16	82,4	2 798	311	59,7		34	241	15 691	1 207	175,0
	18	91,6	3 042	338	66,4		18	143	11 369	842	103,3
	20	101	3 268	363	72,9		22	171	13 286	984	124,3
	22	109	3 475	386	79,2		26	199	15 000	1 111	144,5
190	24	118	3 663	407	85,3	290	30	226	16 539	1 225	164,0
	14	77,4	3 017	318	56,1		34	252	17 914	1 327	182,8
	16	87,5	3 338	351	63,4		18	148	12 774	912	107,4
	18	97,3	3 636	383	70,5		22	178	14 947	1 068	129,3
	20	107	3 914	413	77,4		26	207	16 909	1 208	150,4
	22	116	4 168	439	84,2		30	236	18 674	1 334	170,8
200	24	125	4 401	463	90,8	300	34	263	20 257	1 447	190,5
	16	92,5	3 944	394	67,1		18	154	14 289	986	111,5
	18	103	4 308	430	74,6		22	185	16 743	1 155	134,3
	20	113	4 638	464	82,0		26	216	18 970	1 308	156,3
	22	123	4 948	495	89,2		30	245	20 983	1 447	177,6
	24	133	5 231	523	96,4		34	273	22 798	1 573	198,2
210	26	142	5 499	550	103,0	290	20	176	17 330	1 155	127,5
	28	151	5 743	574	109,7		24	208	19 966	1 331	150,9
	30	160	5 968	597	116,1						

$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м	$D$ в мм	$\delta$ в мм	$F$ в см <sup>2</sup>	$J$ в см <sup>4</sup>	$W$ в см <sup>3</sup>	$q$ в кг/м
300	28	239	22 363	1491	173,5	380	36	383	58 379	3073	282,1
	32	269	24 535	1636	195,3		40	418	62 593	3294	309,8
	36	299	26 479	1765	216,5		44	463	66 671	3509	336,8
	40	327	28 262	1884	236,9						
320	20	188	21 302	1331	136,7	400	20	239	43 210	2160	173,1
	24	223	24 558	1535	161,8		24	284	50 304	2515	205,5
	28	257	27 580	1724	186,3		28	328	56 927	2846	237,2
	32	290	30 390	1900	209,9		32	370	63 103	3156	268,3
	36	321	32 905	2057	232,9		36	412	68 852	3443	298,5
	40	352	35 186	2199	255,1		40	452	74 194	3710	327,7
340	20	201	25 838	1520	145,8	44	492	79 154	3958	356,8	
	24	239	29 912	1759	172,8	48	531	83 744	4187	384,8	
	28	274	33 665	1980	198,9						
	32	310	37 115	2183	224,5						
	36	344	40 277	2369	249,3						
	40	377	43 165	2539	273,3						
360	20	214	30 977	1721	154,9						
	24	253	35 935	1996	183,6						
	28	292	40 526	2251	211,7						
	32	330	44 773	2487	239,0						
	36	366	48 680	2704	265,6						
	40	402	52 276	2904	291,5						
380	44	437	55 582	3088	316,4						
	20	226	37 765	1935	164,0						
	24	270	42 718	2248	194,6						
	28	308	48 262	2540	224,5						
	32	346	53 400	2811	253,6						

При внешнем и внутреннем диаметрах  $D$  и

$$d \text{ и } \alpha = \frac{d}{D} :$$

радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2} ;$$

размер ядра сечения

$$e = \frac{W}{F} = \frac{D(1 + \alpha^2)}{8}$$

## ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ

Устойчивость балок — см. гл. X.

*Поперечный изгиб* балки вызывается внешними моментами, действующими в плоскости оси балки, или внешними силами, перпендикулярными к оси. *Прямой (прямой) изгиб* получается, если изгибающий момент действует в плоскости, заключающей в себе главную ось поперечного сечения балки (*главная плоскость балки*). *Косой изгиб* получается, если изгибающий момент действует в плоскости, не содержащей главной оси сечения, и может рассматриваться как сочетание изгибов в двух главных плоскостях. *Чистым изгибом на участке балки* называется изгиб, при котором во всех сечениях участка балки изгибающий момент имеет постоянное значение (поперечная сила отсутствует).

Условия возникновения скручивающих моментов при действии поперечной нагрузки и изгиба при действии момента

кручения см. стр. 101 и гл. IV. Продольно-поперечный изгиб — см. стр. 106.

Нормальные напряжения  $\sigma$  и касательные  $\tau$  в поперечном сечении вызываются соответственно изгибающим моментом  $M$  и поперечной (перерезывающей) силой  $Q$ . Для определения  $\sigma$  и  $\tau$  по известным внешним нагрузкам сначала находят  $M$  и  $Q$ .

Ось балки направляется по оси  $x$ ; оси совмещаются с главными осями сечения  $y$  (вертикальная) и  $z$  (горизонтальная). Обозначения внешних нагрузок: сосредоточенные силы  $P$  в кг или  $m$ ; сосредоточенные моменты  $L$  в кгсм или  $mm$ ; интенсивность сплошной нагрузки  $p(x)$  в кг/м, где  $x$  — координата сечения балки. Проекция сил и нагрузок, направленных вниз, считаются положительными, и наоборот. Опорные реакции (силы и моменты) после их определения рассматриваются как внешняя нагрузка.

*Поперечная сила*  $Q(x)$  в поперечном сечении с координатой  $x$  равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения (слева или справа)

Она считается положительной, если равнодействующая левых (правых) сил направлена вверх (вниз), и наоборот.

**Изгибающий момент  $M(x)$**  в сечении с координатой  $x$  равен алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения (слева или справа) по отношению к его главной центральной оси. Считается положительным, если момент внешних левых (правых) сил направлен по (против) часовой стрелке, и наоборот; иначе, изгибающий момент положительный, если балка изгибается выпуклостью вниз, и наоборот.

Дифференциальные зависимости между  $p(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $M(x)$ :

$$p(x) = -\frac{dQ(x)}{dx}; \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}. \quad (53)$$

**Эпюрой поперечных сил и эпюрой изгибающих моментов** называется график значений  $Q(x)$  и соответственно  $M(x)$  для поперечных сечений по длине балки. Правильно знаков для эпюр: положительные  $Q(x)$  и  $M(x)$  откладываются вверх, и наоборот; таким образом, эпюра моментов строится на сжатых волокнах.

Эпюры  $Q$  и  $M$  для основных случаев балок — см. табл. 10.

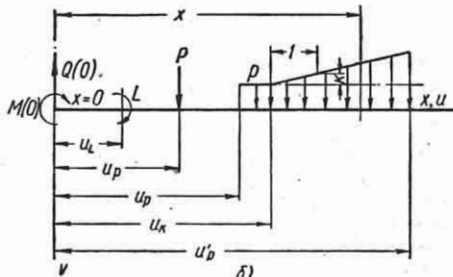
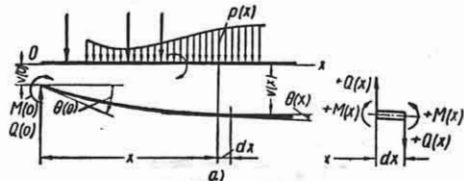
### Статически определимые балки

**Аналитический метод построения эпюр  $Q$  и  $M$ .** Общий случай. Уравнения  $Q(x)$  и  $M(x)$  составляются по известной внешней нагрузке:

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= Q(0) - \int_0^x p(u) du; \\ M(x) &= M(0) + \int_0^x Q(u) du. \end{aligned} \right\} (54)$$

Обозначения и правило знаков для  $p$ ,  $Q$  и  $M$  — см. фиг. 13, а. Уравнения для  $Q(x)$  и  $M(x)$  составляются отдельно для каждого участка балки последовательным интегрированием эпюр  $p(x)$  и  $Q(x)$  по формулам (54). За участок балки принимается каждая ее часть между соседними сосредоточенными силами и моментами, имеющая один закон сплошной нагрузки  $p(x)$ . Начальные параметры  $Q(0)$  и  $M(0)$  — значения  $Q$  и  $M$  в сечении  $x=0$  (или на границах участков); опорные реакции определяются с помощью уравнений статики (см. т. I, гл. XVIII, стр. 352).

При составлении уравнений изгибающих моментов в случае сложной нагрузки удобно начало координат для всех участков брать в крайней левой (правой) точке балки и применять в уравнениях вертикальную черту с индексом, дающим координату конца участка, для которого должны быть в уравнении взяты слагаемые, стоящие левее этой черты



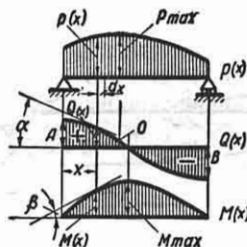
Фиг. 13.

(запись по проф. И. Г. Бубнову). При такой записи дифференцирование и интегрирование уравнения для  $M$  ведется обычным путем без раскрытия скобок двучленов, содержащих  $x$  (с тем чтобы постоянные интегрирования для всех участков были одинаковыми), и постоянные интегрирования записываются в начале (относятся ко всем участкам). Для сложной нагрузки (фиг. 13, б)

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= M(0) + Q(0)x + \int_0^x Q(u) du \\ &= M(0) + Q(0)x + \int_0^x \left[ Q(0) - \int_0^u p(u) du \right] du \\ &= M(0) + Q(0)x - \int_0^x \frac{p(x-u_p)^2}{2} du - \int_0^x \frac{k(x-u_k)^3}{6} du; \\ Q(x) &= \frac{dM}{dx} = Q(0) - \int_0^x p(x-u_p) du - \int_0^x k(x-u_k)^2 du. \end{aligned} \right\} (54a)$$

Эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  вычерчиваются на основании составленных уравнений по точкам, получаемым для ряда значений  $x$ .

Экстремальные значения  $Q(x)$  и  $M(x)$  и применяемые для проверки общие зависимости в эпюрах (фиг. 14):



Фиг. 14.

а) на основании уравнений (53)  $Q(x)$  [или  $M(x)$ ] имеет максимум или минимум в том сечении, где  $p(x) = 0$  [или  $Q(x) = 0$ ];

б) линия, ограничивающая эпюру  $Q(x)$  [или  $M(x)$ ], имеет точку  $O$  перегиба там, где  $p(x)$  [или  $Q(x)$ ] имеет максимум или минимум;

в) тангенс угла наклона к оси  $x$ , касательной к линии  $Q(x)$  [или  $M(x)$ ], равен  $p(x)$  [или  $Q(x)$ ] в сечении, где взята точка касания:  $\operatorname{tg} \alpha = p(x)$  [или  $\operatorname{tg} \beta = Q(x)$ ];

г) при последовательном переходе от  $p(x)$  к  $Q(x)$  и от  $Q(x)$  к  $M(x)$  степень  $x$  в уравнениях повышается на единицу [при алгебраическом законе  $p(x)$ ].

**Пример.** Балка со сплошной неравномерной нагрузкой по закону треугольника (фиг. 15). Закон нагрузки:

$$p(x_1) = \frac{2p}{l} x_1,$$

(при  $\frac{l}{2} > x_1 > 0$ ) и

$$p(x_2) = 2p \left(1 - \frac{x_2}{l}\right)$$

(при  $l > x_2 > \frac{l}{2}$ ).

Опорные реакции:

$$A = B = \frac{pl}{4} = \frac{P}{2}.$$

По формулам (54)

$$Q(x_1) = Q(0) - \int_0^{x_1} p(u_1) du_1 = A -$$

$$- \int_0^{x_1} \frac{2p}{l} u_1 du_1 = \frac{P}{2} \left(1 - 4 \frac{x_1^2}{l^2}\right);$$

$$Q(x_2) = Q\left(\frac{l}{2}\right) - \int_{\frac{l}{2}}^{x_2} p(u_2) du_2 =$$

$$- \int_{\frac{l}{2}}^{x_2} 2p \left(1 - \frac{u_2}{l}\right) du_2 = - \frac{P}{2} \left[1 - 4 \frac{(l - x_2)^2}{l^2}\right];$$

$$M(x_1) = M(0) - \int_0^{x_1} \frac{P}{2} \left(1 - 4 \frac{u_1^2}{l^2}\right) du_1 =$$

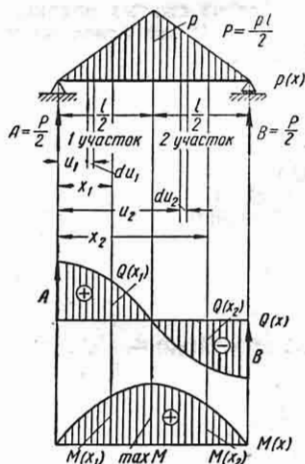
$$= \frac{P}{6} \left(3x_1 - 4 \frac{x_1^3}{l^2}\right);$$

$$M(x_2) = M\left(\frac{l}{2}\right) - \int_{\frac{l}{2}}^{x_2} \frac{P}{2} \left[1 - 4 \frac{(l - x_2)^2}{l^2}\right] du_2 =$$

$$= \frac{P}{6} \left[3(l - x_2) - 4 \frac{(l - x_2)^3}{l^2}\right];$$

$$Q = 0 \text{ при } x_1 = \frac{l}{2}, \text{ т. е. } \max M = \frac{Pl}{6}.$$

При последовательном вычерчивании эпюр  $p(x)$ ,  $Q(x)$  и  $M(x)$  соблюдается условие (53); ордината дает величину тангенса наклона для следующей эпюры.



Фиг. 15.

Балка с сосредоточенными силами. На участке между двумя соседними сосредоточенными силами поперечная сила остается постоянной, а изгибающий момент меняется по закону прямой. Для построения эпюр  $Q(x)$  и  $M(x)$  удобно делать подсчет ряда отдельных значений  $Q$  и  $M$  для всех сечений, расположенных на бесконечно ма-



лых расстояниях левее и правее точек приложения сосредоточенных сил; скачки в эпюре  $Q$  равны внешним сосредоточенным силам  $P_1, P_2, \dots$

**Пример.** Балки на двух опорах с сосредоточенными силами по фиг. 16. Сначала определяются

$$A = \frac{\sum M_B}{l} = \frac{P_1 c_1' + P_2 a_2' + P_3 c_3' + P_4 c_4'}{l};$$

$$B = \frac{\sum M_A}{l} = \frac{P_1 c_1 + P_2 c_2 + P_3 c_3 + P_4 c_4}{l}.$$

Проверка:

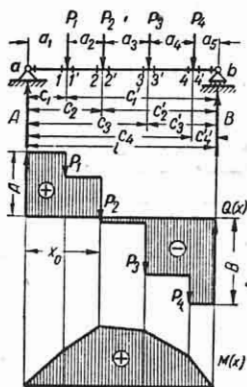
$$A + B + \sum P = 0.$$

Далее находят отдельные значения  $Q$  и  $M$ ;  $Q_a = A$  (точка  $a$ );  $Q_l = A$  (точка  $l$ );  $Q_{l'} = A - P_1$  (точка  $l'$ ) и т. д.;

$$M_a = 0; M_1 = M_1' = A c_1;$$

$$M_2 = M_2' = A c_2 - P_1 (c_2 - c_1)$$

и т. д. Эти значения откладываются в выбранном масштабе как ординаты; для получения эпюр



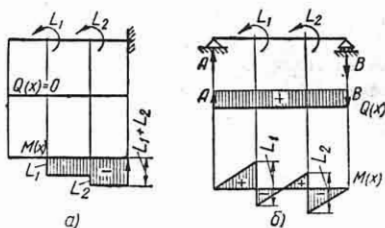
Фиг. 16.

концы ординат последовательно соединяются прямыми.

Наибольший изгибающий момент — под внешней силой в том сечении, где  $Q$  меняет знак.

Балка с сосредоточенными моментами. При применении только сосредоточенных моментов поперечная сила на всем протяжении между опорами остается постоянной. Если балка — в виде консоли (фиг. 17, а), то поперечная сила равна нулю, и изгибающий момент остается постоянным по отдельным участкам балки между местами приложения

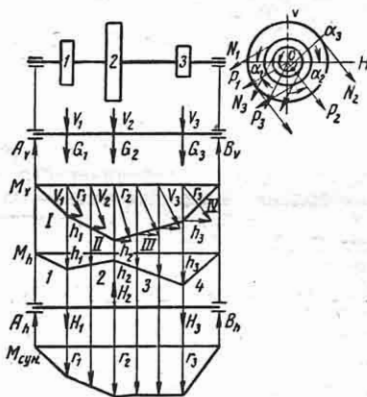
внешних сосредоточенных моментов; если балка — на шарнирных опорах (фиг. 17, б), то возникающие реактивные силы дают поперечные силы, и эпюра



Фиг. 17.

изгибающих моментов состоит по отдельным участкам балки из параллельных прямых. Скачки в эпюре моментов равны внешним сосредоточенным моментам  $L_1$  и  $L_2$ .

Балка с любым направлением сосредоточенных сил, перпендикулярных к оси. Каждую силу раскладывают на составляющие в главных плоскостях балки (или в горизонтальной и вертикальной плоскостях  $V$  и  $H$ ) и вычерчивают для обеих групп сил отдельные эпюры  $Q^{(V)}, Q^{(H)}$ ;  $M^{(V)}, M^{(H)}$ . Геометрическое сложение для отдельных сечений значений  $Q^{(V)}, Q^{(H)}$  и соответственно  $M^{(V)}, M^{(H)}$  дает полную величину поперечных сил и моментов для этих сечений (эпюры суммарных  $Q$  и  $M$ ).



Фиг. 18.

**Пример.** На вал (фиг. 18) действуют силы, приложенные касательно к окружностям шкивов 1, 2, 3. Равнодействующие  $P$  натяжений  $N$  ремня

переносятся на ось вала  $O$ . Составляющие по вертикальному и горизонтальному направлениям этих равнодействующих

$$V_1 = P_1 \sin \alpha_1; \quad V_2 = P_2 \sin \alpha_2; \quad V_3 = P_3 \sin \alpha_3; \\ H_1 = P_1 \cos \alpha_1; \quad H_2 = P_2 \cos \alpha_2; \quad H_3 = P_3 \cos \alpha_3.$$

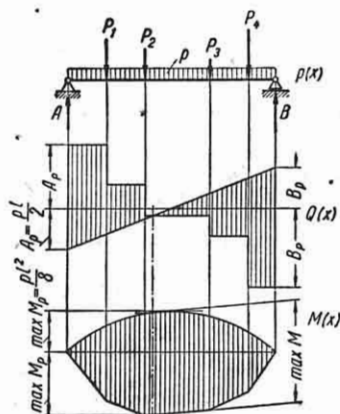
К нагрузкам  $V$  прибавляются веса  $G$  шкивов. От вертикальных и горизонтальных нагрузок отдельно определяются опорные реакции  $A_V, B_V, A_H, B_H$  и строятся эпюры изгибающих моментов  $M_V$  и  $M_H$ .

Гипотенуза  $r$ , построенная по значениям  $M_V = v$  и  $M_H = h$ , как по катетам, дает в рассматриваемом сечении вала величину суммарного изгибающего момента

$$r = M_{сум} = \sqrt{M_V^2 + M_H^2}.$$

Аналогично могут находиться  $Q_{сум}$

Сложение эпюр. Используется принцип наложения. Эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  могут быть построены отдельно от сосредоточенных сил, сосредоточен-



Фиг. 19.

ных моментов и от сплошной нагрузки (фиг. 19). Путем алгебраического сложения ординат эпюр для отдельных нагрузок (см. таблицу 10) получаются эпюры  $Q(x)$  и  $M(x)$  заданной сложной нагрузки.

**Графо-аналитический метод.** Интегралы правой части формул (54) рассматриваются как площади  $Q_{p,x}$  и  $Q_{Q,x}$  части эпюр  $p(x)$  и  $Q(x)$  между началом координат и сечением  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= Q(0) - Q_{p,x}; \\ M(x) &= M(0) + Q_{Q,x}. \end{aligned} \right\} (55)$$

Правило знаков см. стр. 50—51.

**Пример 1.** Для балки фиг. 20

$$A = \frac{\sum M_B}{l} = \frac{1,4 + 2,2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5}{2} = 2,8 \text{ т};$$

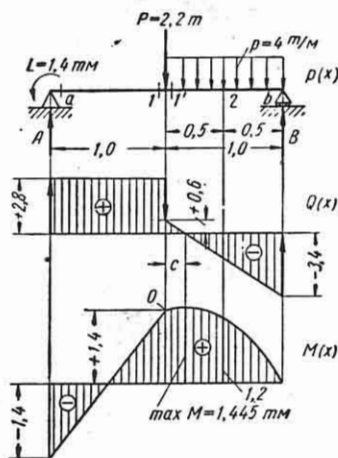
аналогично  $B = 3,4 \text{ т}$ .

Подсчет  $Q$  и  $M$  ведется в таблице:

Сечения балки	$p(x)$ в т/м	$\int p, x$ в т	Сумма сосредоточенных сил слева от сечения $\sum P$ в т	$Q(x) = \sum P - \int p, x$	$\int Q, x$ в т·м	Сумма сосредоточенных моментов слева от сечения $\sum L$ в т·м	$M(x) = \sum L + \int Q, x$
$a$	0	0	2,8	2,8	0	-1,4	-1,4
$l$	0	0	2,8	2,8	2,8	-1,4	+1,4
$l'$	4,0	0	0,6	0,6	2,8	-1,4	+1,4
$2$	4,0	2,0	0,6	-1,4	2,6	-1,4	+1,2
$b$	4,0	4,0	0,6	-3,4	1,4	-1,4	0

<sup>1</sup> Равняется  $-B$ . <sup>2</sup> Равняется  $-L$ .

В точке  $O$  линии, ограничивающей эпюру  $M$ , имеет место перелом в соответствии со скачком в эпюре  $Q$ :  $\text{tg } \beta_1 = +2,8$ ;  $\text{tg } \beta_2 = +0,6$  ( $\frac{\text{т·м}}{\text{м}}$ ). Сечение, имеющее  $\text{max } M$ , находится по раз-



Фиг. 20.

меру  $c$ , определяемому из подобия треугольников в эпюре  $Q$ :

$$c = \frac{0,6}{3,4 + 0,6} = 0,15 \text{ м};$$

$$\text{max } M = 1,4 + \frac{0,6 \cdot 0,15}{2} = 1,445 \text{ т·м}.$$

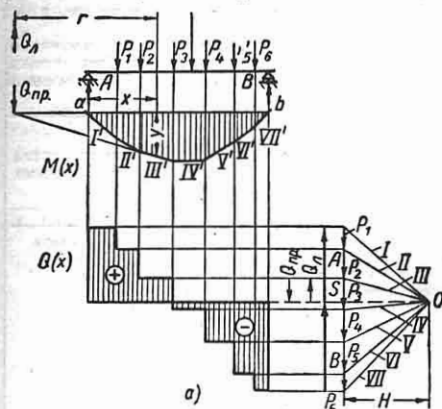
**Графический метод.** Для заданных внешних сил  $P$  строится силовой многоугольник и соответствующий ему веревочный многоугольник (см. т. I, стр. 364).

Изгибающий момент в каком-либо сечении балки (фиг. 21)

$$M(x) = Q_A r = m \nu H \text{ (т.м.)},$$

где  $y$  — отрезок прямой, параллельной равнодействующей  $Q_A$  левых сил и про-

Если балка имеет сплошную нагрузку, то последняя заменяется рядом сосредоточенных сил 1, 2, 3... (фиг. 21, в). По ним строится веревочный многоугольник, и в него вписывается веревочная кривая.



**Зашемленные балки**

Для разрешения статической неопределимости балки обычно находят изгибающие моменты от зашемления.

Балка с двумя жестко зашемленными концами A и B. Моменты заделки при постоянном сечении балки ( $EJ = \text{const}$ )

$$\left. \begin{aligned} M_A &= -\frac{2}{l} (2A_\phi - B_\phi); \\ M_B &= -\frac{2}{l} (2B_\phi - A_\phi). \end{aligned} \right\} \text{ (56a)}$$

Здесь  $A_\phi$  и  $B_\phi$  — фиктивные опорные реакции (см. табл. 11), равные умноженным на  $EJ$  значениям углов поворота над опорами A и B для балки при шарнирных опорах с заданной нагрузкой. Опорные реакции:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \frac{M_B - M_A}{l}; \\ B &= B_0 + \frac{M_A - M_B}{l}, \end{aligned}$$

где  $A_0$  и  $B_0$  — реакции при шарнирных опорах балки при той же нагрузке.

Балка с одним жестко зашемленным концом (опора A) и другим шарнирно опертым (опора B) (при  $EJ = \text{const}$ ):

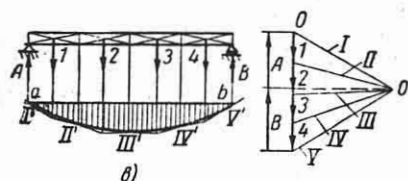
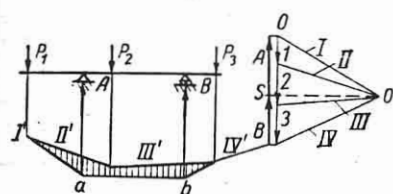
$$M_A = -\frac{3A_\phi}{l}; \quad M_B = 0. \quad \text{(56б)}$$

Опорные реакции:

$$A = A_0 - \frac{M_A}{l}; \quad B = B_0 + \frac{M_A}{l}.$$

**Формулы для опорных реакций,  $Q(x)$  и  $M(x)$ .**

Для основных случаев нагрузки статически определимых и зашемленных балок формулы даны в табл. 10. Более сложный случай нагрузки может рассматриваться как наложение простейших случаев, рассмотренных в табл. 10.



Фиг. 21.

ходящей через рассматриваемое сечение, между замыкающей  $ab$  и лучом, взятый в масштабе (1 см чертежа равен т.м.);  $H$  — полюсное расстояние, измеренное в масштабе плана сил (1 см чертежа равен т.м.).

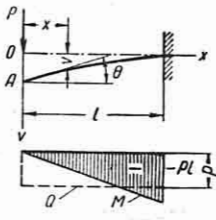
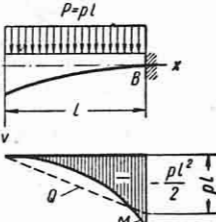
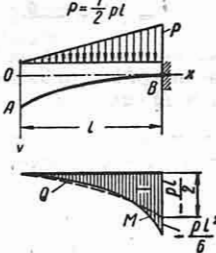
Эпюра  $M$  образуется отрезками  $y$  между замыкающей и лучами (заштрихованная площадь на фиг. 21). Масштаб эпюры  $M$ : 1 см чертежа равен  $m \nu H$  т.м. Эпюра получается графическим переносом соответствующих ординат из силового многоугольника (см. нижнюю часть фиг. 21, а). Масштаб эпюры  $Q$ : 1 см чертежа равен т.т.

Таблица 10

## Опорные реакции, усилия и перемещения в однопролетных и консольных балках

$P$  — сосредоточенная сила или полная нагрузка в  $кГ$ ;  $p$  — интенсивность сплошной нагрузки в  $кГ/см$ ;  $L$  — внешний изгибающий момент в  $кГсм$ ;  $Q$  — поперечная сила в  $кГ$ ;  $M$  — изгибающий момент в  $кГсм$ ;  $v$  — прогиб в  $см$  в сечении с координатой  $x$  в  $см$ ;  $\theta$  — угол поворота поперечных сечений на конце балки в радианах;  $f = v_{\max}$  — стрела прогиба в  $см$ ;  $E$  — модуль продольной упругости в  $кГ/см^2$  материала балки. Предполагается, что горизонтальная ось, проведенная в поперечном сечении через его центр тяжести, совпадает с главной осью сечения; по отношению к ней момент инерции обозначен  $J$  в  $см^4$ ;  $\max(-M)$  обозначен отрицательный момент с наибольшим абсолютным значением.

П р а в и л о з н а к о в. Реакции, направленные вверх, поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , действующие на правую часть балки соответственно вверх и по часовой стрелке, считаются положительными; прогиб вниз и угол поворота по часовой стрелке считаются положительными. Эпюры  $M$  отложены со стороны сжатых волокон

Схема балки и нагрузки, Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>1. Статически определимые балки (формулы для опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов применимы также в случае балок переменного сечения)</p>		
<p>1. Консоль. Сила на конце</p> 	$B = P; \quad Q = -P;$ $M = -Px; \quad \max M = 0;$ $\max(-M) = -Pl \text{ (в B)}$	$v = \frac{Pl^3}{6EJ} \left( 2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right);$ $f = \frac{Pl^3}{3EJ} \text{ (в A)}; \quad \theta = -\frac{Pl^2}{2EJ} \text{ (в A)}$
<p>2. Консоль. Сплошная равномерная нагрузка.</p> 	$B = P = pl; \quad Q = -\frac{P}{l} x;$ $M = -\frac{Px^2}{2l}; \quad \max M = 0;$ $\max(-M) = -\frac{Pl^2}{2} \text{ (в B)}$	$v = \frac{Pl^3}{24EJ} \left( 3 - 4 \frac{x}{l} + \frac{x^4}{l^3} \right);$ $f = \frac{Pl^3}{8EJ}; \quad \theta = -\frac{Pl^2}{6EJ} \text{ (в A)}$
<p>3. Консоль. Сплошная нагрузка по треугольнику</p> 	$B = P = \frac{Pl}{2}; \quad Q = -\frac{P}{l^2} x^2;$ $M = -\frac{1}{3} \frac{P}{l^2} x^3; \quad \max M = 0;$ $\max(-M) = -\frac{1}{3} Pl \text{ (в B)}$	$v = \frac{Pl^3}{60EJ} \left( 4 - 5 \frac{x}{l} + \frac{x^5}{l^3} \right);$ $f = \frac{Pl^3}{15EJ}; \quad \theta = -\frac{Pl^2}{12EJ} \text{ (в A)}$

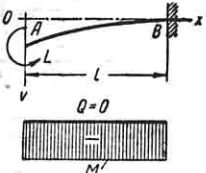
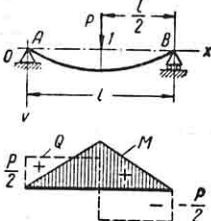
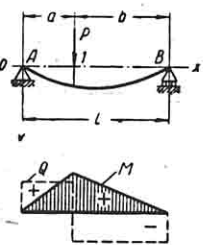
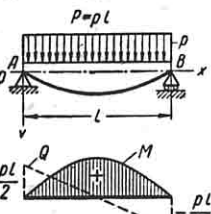
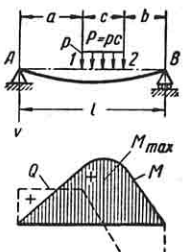
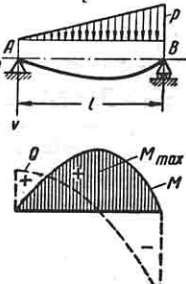
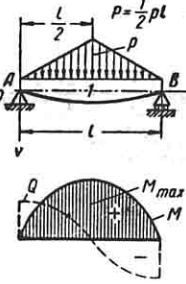
<p>Схема балки и нагрузки. Эпюры <math>Q</math> и <math>M</math></p>	<p>Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента</p>	<p>Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки</p>
<p>4. Консоль. Момент на конце</p> 	$B = 0; Q = 0;$ $M = -L;$ $\max(-M) = -L \text{ (от A до B)}$	$v = \frac{Ll^2}{2EJ} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right);$ $f = \frac{Ll^2}{2EJ} \text{ (в A); } \theta = -\frac{Ll}{EJ} \text{ (в A)}$
<p>5. Балка, свободно опертая по концам. Сила в середине пролета</p> 	$A = B = \frac{P}{2};$ $Q = \frac{P}{2} \text{ (от A до l);}$ $Q = -\frac{P}{2} \text{ (от l до B);}$ $M = \frac{1}{2} Px \text{ (от A до l);}$ $M = \frac{1}{2} P(l - x) \text{ (от l до B);}$ $\max M = \frac{Pl}{4} \text{ (при } x = \frac{l}{2} \text{)}$	$v = \frac{Pl^3}{48EJ} \left( 3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right)$ <p>(от A до l);</p> $f = \frac{Pl^3}{48EJ} \text{ (в l);}$ $\theta = \frac{Pl^2}{16EJ} \text{ (в A)}$
<p>6. Балка, свободно опертая по концам. Сила в пролете</p> 	$A = P \frac{b}{l}; \quad B = P \frac{a}{l};$ $Q = P \frac{b}{l} \text{ (от A до l);}$ $Q = -P \frac{a}{l} \text{ (от l до B);}$ $M = P \frac{b}{l} x \text{ (от A до l);}$ $M = P \frac{a}{l} (l - x) \text{ (от l до B);}$ $\max M = P \frac{ab}{l} \text{ (в l)}$	$v = \frac{P}{6EJ} \frac{a^2 b^2}{l} \left( 2 \frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b} \right)$ <p>(от A до l);</p> $f = \frac{Pab}{27EJl} (a + 2b) \sqrt{3a(a + 2b)}$ <p>при <math>x = \sqrt{\frac{1}{3} a(a + 2b)}</math> (когда <math>a &gt; b</math>) или приближенно</p> $f \approx \frac{Pb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2);$ $\theta = \frac{Pl^2}{6EJ} \left( \frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3} \right) \text{ (в A);}$ $\theta = -\frac{Pl^2}{6EJ} \left( \frac{2b}{l} + \frac{b^3}{l^3} - \frac{3b^2}{l^2} \right) \text{ (в B)}$
<p>7. Балка, свободно опертая по концам. Сплошная равномерная нагрузка</p> 	$A = \frac{P}{2}; \quad B = \frac{P}{2};$ $Q = \frac{1}{2} P \left( 1 - \frac{2x}{l} \right);$ $M = \frac{pl^2}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right);$ $\max M = \frac{pl^2}{8} \text{ (при } x = \frac{l}{2} \text{)}$	$v = \frac{pl^4}{24EJ} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right);$ $f = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ} \text{ при } x = \frac{l}{2};$ $\theta = \frac{pl^3}{24EJ} \text{ (в A)}$

Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии и, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>8. Балка, свободно опертая по концам. Сплошная равномерная нагрузка <math>p</math> части пролета</p> <p><math>a = b + \frac{c}{2}</math></p> 	$A = \frac{pc}{l} \left( b + \frac{1}{2} c \right);$ $B = \frac{pc}{l} \left( a + \frac{1}{2} c \right);$ $Q = A \text{ (от } A \text{ до } l);$ $Q = A - p(x - a) \text{ (от } l \text{ до } 2);$ $Q = -B \text{ (от } 2 \text{ до } B);$ $M = Ax \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = Ax - p \frac{(x - a)^2}{2} \text{ (от } l \text{ до } 2);$ $M = Ax - pc \left( x - a - \frac{1}{2} c \right) \text{ (от } 2 \text{ до } B);$ $\max M = pc \frac{d}{l} \left( a + \frac{cd}{2l} \right)$ <p>при <math>x = a + \frac{cd}{l}</math>.</p>	$v = \frac{pc l^3}{48EJ} \left[ 8 \frac{d}{l} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{x}{l} \left( 8 \frac{d^3}{l^2} - \frac{2ac^2}{l^2} - \frac{c^3}{l^2} + 2 \frac{c^2}{l^2} \right) \right]$ <p>(от <math>A</math> до <math>l</math>);</p> $v = \frac{pc l^3}{48EJ} \left[ 8 \frac{d}{l} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{x}{l} \left( 8 \frac{d^3}{l^2} - \frac{2ac^2}{l^2} - \frac{c^3}{l^2} + 2 \frac{c^2}{l^2} \right) + 2 \frac{c^2}{l^2} + 2 \frac{(x - a)^4}{c l^2} \right] \text{ (от } l \text{ до } 2);$ $\theta = \frac{pc l^2}{24EJ} \left[ 4 \frac{d}{l} - 4 \frac{d^3}{l^2} + \frac{ac^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{c^3}{l^2} - \frac{c^2}{l^2} \right] \text{ (в } A)$
<p>9. Балка, свободно опертая по концам. Нагрузка по треугольнику</p> <p><math>p = \frac{1}{2} pl</math></p> 	$A = \frac{1}{3} P; \quad B = \frac{2}{3} P;$ $Q = P \left( \frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right);$ $M = \frac{1}{3} P \left( x - \frac{x^3}{l^2} \right);$ $\max M = 0,128 Pl \text{ при } x = 0,577l$	$v = \frac{Pl^3}{180EJ} \left( 7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x^3}{l^2} \right);$ $f = 0,01304 \frac{Pl^3}{EJ} \text{ при } x = 0,519l;$ $\theta = \frac{7Pl^2}{180EJ} \text{ (в } A);$ $\theta = - \frac{8Pl^2}{180EJ} \text{ (в } B)$
<p>10. Балка, свободно опертая по концам. Нагрузка по треугольнику</p> <p><math>p = \frac{1}{2} pl</math></p> 	$A = \frac{P}{2}; \quad B = \frac{P}{2};$ $Q = \frac{P}{2} \left( 1 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ (от } A \text{ до } l);$ $Q = - \frac{P}{2} \left[ 1 - 4 \frac{(l-x)^2}{l^2} \right] \text{ (от } l \text{ до } B);$ $M = \frac{P}{6} \left( 3x - 4 \frac{x^3}{l^2} \right) \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = \frac{P}{6} \left[ 3(l-x) - 4 \frac{(l-x)^3}{l^2} \right] \text{ (от } l \text{ до } B);$ $\max M = \frac{1}{6} Pl \text{ (в } l)$	$v = \frac{Pl^3}{12EJ} \left( \frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{2}{5} \frac{x^3}{l^2} \right);$ $f = \frac{Pl^3}{30EJ} \text{ (в } l);$ $\theta = \frac{5}{96} \frac{Pl^2}{EJ} \text{ (в } A)$

Продолжение табл. 10

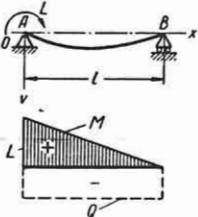
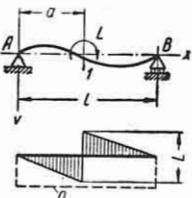
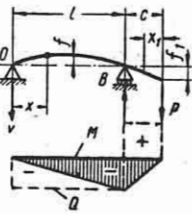
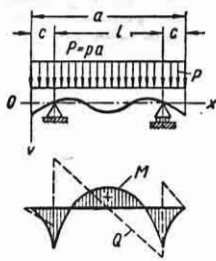
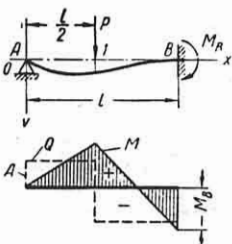
Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>11. Балка, свободно опертая по концам. Момент над опорой</p> 	$A = -\frac{L}{l}; \quad B = \frac{L}{l};$ $Q = -\frac{L}{l};$ $M = L \left(1 - \frac{x}{l}\right);$ $\max M = L \text{ (в A)}$	$v = \frac{Ll^3}{6EJ} \left(2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right);$ $f = 0,0642 \frac{Ll^3}{EJ} \text{ при } x = 0,422l;$ $\theta = \frac{Ll}{3EJ} \text{ (в A);}$ $\theta = -\frac{Ll}{6EJ} \text{ (в B)}$
<p>12. Балка, свободно опертая по концам. Момент в пролете</p> 	$A = -\frac{L}{l}; \quad B = \frac{L}{l};$ $Q = -\frac{L}{l};$ $M = Ax \text{ (от A до l);}$ $M = L \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ (от l до B);}$ $\max M = Aa + L \text{ (справа от l);}$ $\max (-M) = Aa \text{ (слева от l)}$	$v = \frac{Ll^3}{6EJ} \left[ \frac{x^3}{l^3} - \left( \frac{6a}{l} - \frac{3a^2}{l^2} - 2 \right) \frac{x}{l} \right]$ <p>(от A до l);</p> $v = \frac{Ll}{6EJ} \left( 2 - \frac{6a}{l} + \frac{3a^2}{l^2} \right) \text{ (в A);}$ $\theta = \frac{Ll}{EJ} \left( \frac{1}{3} - \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ (в l);}$ $\theta = \frac{Ll}{6EJ} \left( 1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ (в B)}$
<p>13. Свободно опертая балка с одной консолью, нагруженной на конце</p> 	$A = -\frac{Pc}{l}; \quad B = \frac{P(l+c)}{l};$ $Q = -A \text{ (от A до B);}$ $Q = P \text{ (при } 0 < x_1 < c);$ $M = -\frac{Pcx}{l} \text{ (от A до B);}$ $M = -Px_1 \text{ (при } 0 < x_1 < c);$ $\max M = 0;$ $\max (-M) = -Pc \text{ (в B)}$	$v = \frac{P}{EJ} \frac{cl^3}{6} \left( \frac{x^3}{l^3} - \frac{x}{l} \right)$ <p>(от A до B);</p> $v = \frac{P}{EJ} \frac{cl^3}{6} \left( \frac{x_1^3}{lc^3} - \frac{2l+3c}{l} \times \right.$ $\left. \times \frac{x_1}{c} + 2 \frac{l+c}{l} \right)$ <p>(при <math>0 &lt; x_1 &lt; c</math>);</p> $f = 0,0642 \frac{Pcl^3}{EJ} \text{ при } x = 0,578l;$ $f_1 = \frac{P}{EJ} \frac{(l+c)c^3}{3}$

Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>14. Свободно опертая балка с двумя равными консолями. Нагрузка сплошная равномерная. Расстояние <math>x</math> принято от точки <math>O</math></p> 	$A = B = \frac{P}{2}; \quad Q = -px \text{ при } x < c;$ $Q = p \left( \frac{a}{2} - x \right) \text{ при } l+c > x > c;$ $M = -\frac{px^2}{2} \text{ при } x < c;$ $M = -\frac{pa^2}{2} \left( \frac{c}{a} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при <math>(l+c) &gt; x &gt; c</math>;</p> $\max M = \frac{pa}{8} (2l - a);$ $\max (-M) = -\frac{pc^2}{2}.$ <p>Опасное сечение в <math>A</math> и <math>B</math> (при <math>c &gt; 0,207a</math>) и в середине пролета <math>l</math> (при <math>c &lt; 0,207a</math>)</p>	<p>Уравнение упругой линии может быть составлено путем сложения прогибов для случаев пп. 2, 7 и 11. Точка перегиба упругой линии при</p> $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - ca}$
<p>II. Балки постоянного сечения с жесткой заделкой</p>		
<p>15. Один конец свободно оперт, другой жестко защемлен. Сила в середине пролета</p> 	$A = \frac{5}{16} P; \quad B = \frac{11}{16} P;$ $M_B = -\frac{3}{16} Pl;$ $Q = \frac{5}{16} P \text{ (от } A \text{ до } l);$ $Q = -\frac{11}{16} P \text{ (от } l \text{ до } B);$ $M = \frac{5}{16} Px \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = P \left( \frac{l}{2} - \frac{11}{16} x \right) \text{ (от } l \text{ до } B);$ $\max M = \frac{5}{32} Pl \text{ (в } l);$ $\max (-M) = -\frac{3}{16} Pl \text{ (в } B)$	$v = \frac{Pl^3}{96EJ} \left( 3 \frac{x}{l} - 5 \frac{x^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">(от <math>A</math> до <math>l</math>);</p> $v = \frac{Pl^3}{96EJ} \left[ 3 \frac{x}{l} + 16 \left( \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - 5 \frac{x^2}{l^2} \right]$ <p style="text-align: center;">(от <math>l</math> до <math>B</math>);</p> $f = 0,0093 \frac{Pl^3}{EJ} \text{ при } x = 0,447l;$ $\theta = \frac{Pl^2}{32EJ} \text{ (в } A)$



Продолжение табл. 10

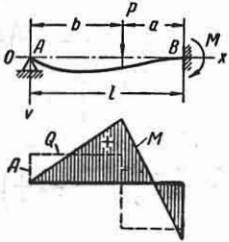
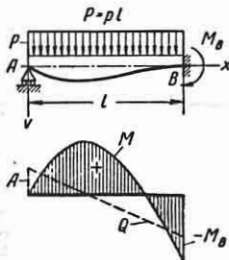
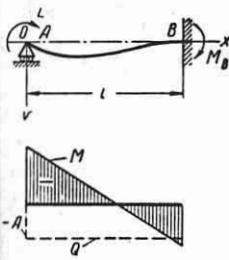
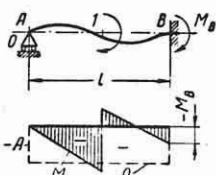
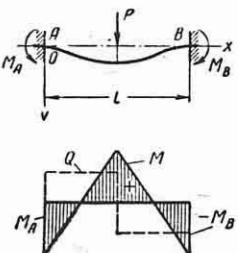
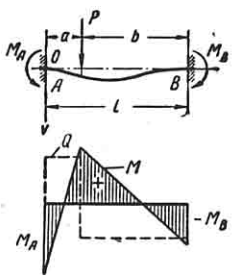
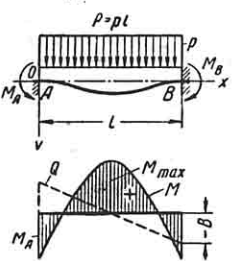
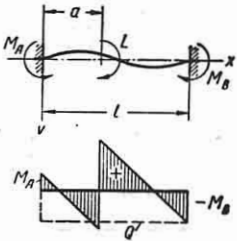
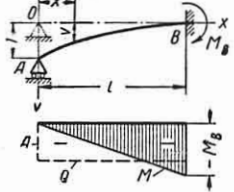
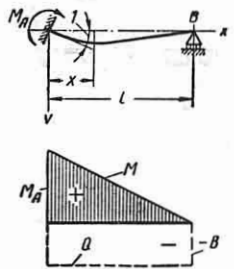
Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>16. Один конец свободно оперт, другой жестко зашпелен. Сила в пролете</p> 	$A = \frac{P}{2} \left( \frac{3a^2 l - a^3}{l^2} \right); \quad B = P - A;$ $M_B = \frac{P}{2} \left( \frac{a^3 + 2al^2 - 3a^2 l}{l^2} \right)$ <p>(достигает наибольшей величины при <math>a = 0,423l</math>);</p> $Q = A \quad (\text{от } A \text{ до } l);$ $Q = A - P \quad (\text{от } l \text{ до } B);$ $M = Ax \quad (\text{от } A \text{ до } l);$ $M = Ax - P(x - l + a) \quad (\text{от } l \text{ до } B);$ <p>max <math>M = Ab</math> (в <math>l</math>);  при <math>a = 0,634l</math> получается наибольшее значение, равное <math>0,174Pl</math>.  max <math>(-M) = -M_B</math> (в <math>B</math>);  при <math>a = 0,423l</math> получается наибольшее значение, равное <math>0,193Pl</math></p>	$v = \frac{P}{6EJ} \left[ A \left( 3 \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) - 3P \frac{a^2 x}{l^2} \right] -$ <p>(от <math>A</math> до <math>l</math>);</p> $v = \frac{P}{6EJ} \left\{ A \left( 3 \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) - P \left[ 3 \frac{a^2 x}{l^2} - \left( \frac{x}{l} - \frac{b}{l} \right)^2 \right] \right\}$ <p>При <math>a = 0,586l</math> наибольший прогиб в точке <math>l</math>.  <math>f = 0,0098 \frac{Pl^3}{EJ}</math>;  <math>\theta = -\frac{Pl^2}{4EJ} \left( \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3} \right)</math> (в <math>A</math>)</p>
<p>17. Один конец свободно оперт, другой жестко зашпелен. Сплошная равномерная нагрузка</p> 	$A = \frac{3}{8} P; \quad B = \frac{5}{8} P;$ $M_B = \frac{1}{8} Pl;$ $Q = P \left( \frac{3}{8} - \frac{x}{l} \right);$ $M = P \left( \frac{3}{8} x - \frac{x^2}{2l} \right);$ <p>max <math>M = \frac{9}{128} Pl</math>;  max <math>(-M) = -\frac{Pl}{8}</math> (в <math>B</math>)</p>	$v = \frac{Pl^3}{48EJ} \left( 2 \frac{x^4}{l^4} - 3 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right);$ <p><math>f = 0,0054 \frac{Pl^3}{EJ}</math> при <math>x = 0,421l</math>;  <math>\theta = \frac{Pl^2}{48EJ}</math> (в <math>A</math>)</p>
<p>18. Один конец свободно оперт, другой жестко зашпелен. Момент над свободной опорой</p> 	$A = -\frac{3}{2} \frac{L}{l}; \quad B = \frac{3}{2} \frac{L}{l};$ $M_B = \frac{1}{2} L;$ $Q = -\frac{3}{2} \frac{L}{l};$ $M = \frac{1}{2} L \left( 2 - 3 \frac{x}{l} \right);$ <p>max <math>M = L</math> (в <math>A</math>);  max <math>(-M) = -\frac{1}{2} L</math> (в <math>B</math>)</p>	$v = \frac{Ll^3}{4EJ} \left( \frac{x^3}{l^3} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} \right);$ <p><math>f = \frac{Ll^3}{21EJ}</math> при <math>x = \frac{l}{3}</math>;  <math>\theta = \frac{Ll}{4EJ}</math> (в <math>A</math>)</p>

Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>19. Один конец свободно оперт, другой жестко защемлен. Момент в пролете. Расстояние точки <math>l</math> приложения момента <math>L</math> от левой опоры обозначено <math>a</math></p> 	$A = -B = -\frac{3}{2} \frac{L}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right);$ $M_B = \frac{1}{2} L \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right);$ <p style="text-align: center;"><math>Q = A</math> (от <math>A</math> до <math>B</math>);  <math>M = Ax</math> (от <math>A</math> до <math>l</math>);  <math>M = Ax + L</math> (от <math>l</math> до <math>B</math>);</p> $\max M = L \left[1 - \frac{3a(l^2 - a^2)}{2l^3}\right]$ <p style="text-align: center;">(в <math>l</math> справа);  <math>\max (-M) = -M_B</math> (в <math>B</math>)  при <math>a &lt; 0,275l</math>;  <math>\max (-M) = Aa</math> (в <math>l</math> слева)  при <math>a &gt; 0,275l</math></p>	$v = \frac{Ll^2}{EJ} \left[ \frac{l^2 - a^2}{4l^2} \left( \frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x}{l} \right) + \frac{l - a}{l} \frac{x}{l} \right]$ <p style="text-align: center;">(от <math>A</math> до <math>l</math>);</p> $v = \frac{Ll^2}{EJ} \left[ \frac{l^2 - a^2}{4l^2} \left( \frac{x^3}{l^3} - 3 \frac{x}{l} \right) + \frac{x}{l} - \frac{x^2 + a^2}{2l^2} \right]$ <p style="text-align: center;">(от <math>l</math> до <math>B</math>);</p> $\theta = -\frac{Ll}{EJ} \left( \frac{a}{l} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">(в <math>A</math>)</p>
<p>20. Оба конца жестко защемлены. Сила в середине пролета</p> 	$A = B = \frac{1}{2} P;$ $M_A = M_B = \frac{Pl}{8};$ $Q = \frac{P}{2} \text{ (от } A \text{ до } l);$ $Q = -\frac{P}{2} \text{ (от } l \text{ до } B);$ $M = \frac{1}{8} P(4x - l) \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = \frac{1}{8} P(3l - 4x) \text{ (от } l \text{ до } B);$ $\max M = \frac{1}{8} Pl \text{ (в } l);$ $\max (-M) = -\frac{1}{8} Pl$ <p style="text-align: center;">(в <math>A</math> и <math>B</math>)</p>	$v = \frac{Pl^3}{48EJ} \left( 3 \frac{x^3}{l^3} - 4 \frac{x^2}{l^2} \right);$ $f = \frac{Pl^3}{192EJ} \text{ (в } l)$

<p>Схема балки и нагрузки. Эпоры <math>Q</math> и <math>M</math></p>	<p>Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента</p>	<p>Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки</p>
<p>21. Оба конца жестко зашце- млены. Сила в пролете</p> 	$A = \frac{Pb^3}{l^3} (3a + b);$ $B = \frac{Pa^3}{l^3} (3b + a);$ $M_A = P \frac{ab^2}{l^2}; \quad M_B = P \frac{a^2b}{l^2};$ $Q = A \text{ (от } A \text{ до } l);$ $Q = A - P \text{ (от } l \text{ до } B);$ $M = -P \frac{ab^2}{l^2} + Ax \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = -\frac{Pab^2}{l^2} + Ax - P(x - a)$ <p style="text-align: center;">(от <math>l</math> до <math>B</math>);</p> $\max M = -P \frac{ab^2}{l^2} + Aa \text{ (в } l);$ $\max (-M) = -M_A$ <p style="text-align: center;">(если <math>a &lt; b</math>);</p> <p style="text-align: center;">наибольшее значение равно <math>-0,148Pl</math></p> $\text{при } a = \frac{1}{3} l;$ $\max (-M) = -M_B \text{ (если } a > b)$	$v = \frac{Pab^2}{6EJ} \frac{x^2}{l^3} \left( 3 - 3 \frac{x}{l} - \frac{b}{a} \frac{x}{l} \right)$ <p style="text-align: center;">(от <math>A</math> до <math>l</math>);</p> $f = \frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^2b^2}{(3a + b)^2}$ <p style="text-align: center;">при <math>x = \frac{2al}{3a + b}</math> (если <math>a &gt; b</math>);</p> $f = \frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \frac{a^2b^3}{(3b + a)^2}$ <p style="text-align: center;">при <math>x = l - \frac{2bl}{3b + a}</math> (если <math>a &lt; b</math>)</p>
<p>22. Оба конца жестко зашце- млены. Сплошная равномер- ная нагрузка</p> 	$A = B = \frac{P}{2}; \quad M_A = M_B = \frac{Pl}{12}$ $Q = \frac{P}{2} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right);$ $M = \frac{P}{2} \left( x - \frac{x^2}{l} - \frac{1}{6} l \right);$ $\max M = \frac{Pl}{24} \text{ при } x = \frac{l}{2};$ $\max (-M) = -\frac{Pl}{12} \text{ (в } A \text{ и } B)$	$v = \frac{Px^2l}{24EJ} \left( \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x}{l} + 1 \right);$ $f = \frac{Pl^3}{384EJ} \text{ при } x = \frac{l}{2}$

<p>Схема балки и нагрузки. Эпюры <math>Q</math> и <math>M</math></p>	<p>Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента</p>	<p>Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки</p>
<p>23. Оба конца жестко зашлемлены. Момент в пролете на расстоянии <math>a</math> от левой опоры</p> 	$A = -6 \frac{L}{l^3} (al - a^3);$ $B = 6 \frac{L}{l^3} (al - a^3);$ $M_A = -\frac{L}{l^3} (4la - 3a^2 - l^2);$ $M_B = \frac{L}{l^3} (2la - 3a^2);$ $Q = A;$ $M = -M_A + Ax \text{ (от } A \text{ до } l);$ $M = -M_A + Ax + L \text{ (от } l \text{ до } B);$ $\max M = L \left( 4 \frac{a}{l} - 9 \frac{a^2}{l^2} + 6 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ (справа от } l);$ $\max (-M) =$ $= L \left( 4 \frac{a}{l} - 9 \frac{a^2}{l^2} + 6 \frac{a^3}{l^3} - 1 \right) \text{ (слева от } l)$	$v = -\frac{l^3}{6EJ} \left[ A \frac{x^3}{l^3} - \frac{3M_A x^2}{l^3} \right]$ <p>(от <math>A</math> до <math>l</math>); наибольший по величине прогиб вверх (вниз) при <math>x = \frac{2M_A}{A}</math>, если <math>a &gt; \frac{l}{3}</math> (при <math>x = l - \frac{2M_B}{B}</math>, если <math>a &lt; \frac{2l}{3}</math>)</p>
<p>III. Влияние смещения опор и изменения температуры</p>		
<p>24. Один конец свободно оперт, другой жестко зашлемлен. Осадка свободной опоры <math>\delta</math> с.м</p> 	$A = -\frac{3EJ}{l^2}; \quad B = \frac{3EJ}{l^2};$ $M_B = \frac{3EJ}{l^2}; \quad Q = -\frac{3EJ}{l^2};$ $M = -\frac{3EJ}{l^2} x; \quad \max M = 0;$ $\max (-M) = -\frac{3EJ}{l^2} \text{ (в } B)$	$v = \frac{1}{2} \left( 2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right);$ $f = 1 \text{ (в } A)$ $\theta = -\frac{3}{2l} \text{ (в } A); \quad \theta = 0 \text{ (в } B)$
<p>25. Один конец свободно оперт, другой зашлемлен. Поворот зашлемленного конца <math>A</math> на угол, равный <math>1</math> радиану</p> 	$A = -\frac{3EJ}{l^2}; \quad B = \frac{3EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{3EJ}{l}; \quad Q = A;$ $M = \frac{3EJ}{l^2} (l - x);$ $\max M = \frac{3EJ}{l} \text{ (в } A)$	$v = \frac{l}{2} \left( 2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right);$ $f = 0,193l \text{ при } x = 0,422l;$ $\theta = 1 \text{ (в } A);$ $\theta = -\frac{1}{2} \text{ (в } B)$

Продолжение табл. 1<sup>о</sup>

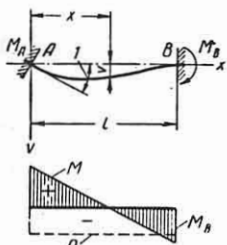
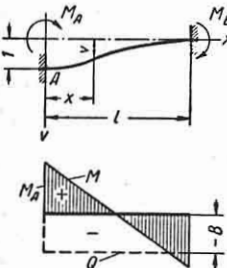
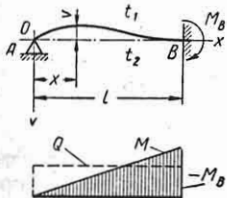
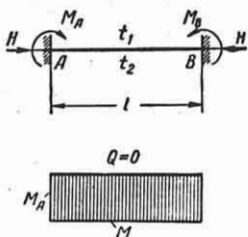
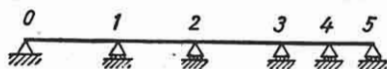
<p>Схема балки и нагрузки. Эшоры <math>Q</math> и <math>M</math></p>	<p>Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента</p>	<p>Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки</p>
<p>26. Оба конца жестко зашце- млены. Поворот зашце- мленного конца <math>A</math> на угол <math>1</math> радиан</p> 	$A = -\frac{6EJ}{l^2}; \quad B = \frac{6EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{4EJ}{l}; \quad M_B = \frac{2EJ}{l};$ $Q = -\frac{6EJ}{l^2};$ $M = \frac{2EJ}{l} \left( 2 - 3 \frac{x}{l} \right);$ $\max M = \frac{4EJ}{l} \text{ (в } A \text{);}$ $\max (-M) = -\frac{2EJ}{l} \text{ (в } B \text{)}$	$v = l \left( \frac{x^3}{l^3} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x}{l} \right);$ $f = \frac{4}{27} l \text{ при } x = \frac{l}{3};$ $\theta = 1 \text{ (в } A \text{);}$ $\theta = 0 \text{ (в } B \text{)}$
<p>27. Оба конца не поворачи- ваются. Осадка левой опоры на <math>1</math> см</p> 	$A = -\frac{12EJ}{l^3}; \quad B = \frac{12EJ}{l^3};$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2};$ $Q = -\frac{12EJ}{l^3};$ $M = \frac{6EJ}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right);$ $\max M = \frac{6EJ}{l^2} \text{ (в } A \text{);}$ $\max (-M) = -\frac{6EJ}{l^2} \text{ (в } B \text{)}$	$v = \frac{x^2}{l^2} \left( 2 \frac{x}{l} - 3 \right) + 1;$ $f = 1 \text{ (в } A \text{);}$ $\theta = 0 \text{ (в } A \text{ и } B \text{)}$
<p>28. Один конец закреплен на подвижной шарнирной опоре, а другой жестко зашце- млен; приращение температу- ры в верхних и нижних воло- кнах соответственно <math>t_1</math> и <math>t_2</math>. Изменение температуры по высоте сечения по закону прямой; <math>\alpha</math> — коэффициент линейного расширения.</p> 	$A = -B = \frac{3\alpha(t_1 - t_2)EJ}{2hl};$ $M_B = \frac{3\alpha(t_1 - t_2)EJ}{2h};$ $Q = A; \quad M = \frac{3\alpha(t_1 - t_2)EJx}{2hl};$ $\max M = \frac{3\alpha(t_1 - t_2)EJ}{2h} \text{ (в } B \text{);}$ $\max (-M) = 0 \text{ (в } A \text{)}$	$v = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{4h} l^2 \times$ $\times \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right);$ <p style="text-align: center;">кривизна <math>\frac{1}{\rho} =</math></p> $= \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \left( \frac{3x}{2l} - 1 \right);$ $f = -0,065 \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} l$ <p style="text-align: center;">при <math>x = \frac{l}{3}</math></p>

Схема балки и нагрузки. Эпюры $Q$ и $M$	Опорные реакции и поперечные силы, уравнение изгибающего момента, величина и место наибольшего изгибающего момента	Уравнение упругой линии, стрела прогиба, углы поворота торцевых плоскостей балки
<p>29. Оба конца не поворачиваются; приращение температуры в верхних и нижних волокнах соответственно <math>t_1</math> и <math>t_2</math>. Изменение температуры по высоте сечения по закону прямой; <math>\alpha</math> — коэффициент линейного расширения</p> 	$A = B = 0;$ $M_A = M_B = \frac{\alpha (t_1 - t_2) EJ}{h};$ $H = \alpha (t_1 - t_2) EF;$ $M = \frac{\alpha (t_1 - t_2) EJ}{h} = \text{const};$ $\max M = \frac{\alpha (t_1 - t_2) EJ}{h}$ <p>(от A до B)</p>	$v = 0 \text{ (от A до B);}$ $f = 0$

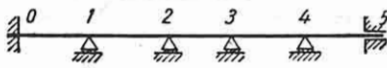
### ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ И БАЛКАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ

**Балки на жестких опорах.** Нерезная балка по фиг. 22 имеет одну шарнирно неподвижную опору и ряд шарнирно подвижных опор. Число лишних неизвестных в такой балке равно



Фиг. 22.

числу промежуточных опор. Нерезная балка по фиг. 23 имеет по концам защемляющие (одну неподвижную, другую подвижную) опоры и ряд промежуточных шарнирно подвижных опор. В такой балке число лишних неизвестных



Фиг. 23.

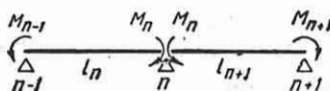
равно числу промежуточных опор плюс по одной неизвестной на каждую защемляющую опору.

Для расчета неразрезной балки принимаются за неизвестные изгибающие моменты над опорами.

Для балки постоянного сечения неизвестные определяются из следующего уравнения трех моментов:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6Q_n a_n}{l_n} - \frac{6Q_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} = -6(B_n \phi + A_{(n+1)} \phi), \quad (57)$$

где  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  — моменты на опорах  $n-1$ ,  $n$  и  $n+1$ ;  $l_n$ ,  $l_{n+1}$  — длины двух последовательных пролетов  $n$  и  $n+1$  (фиг. 24);  $Q_n a_n$ ,  $Q_{n+1} b_{n+1}$  — статические моменты относительно  $(n-1)$ -й



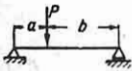
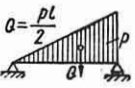
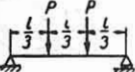
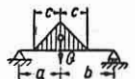
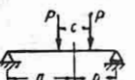
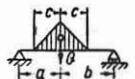

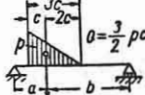
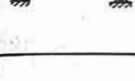
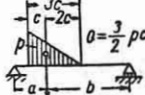
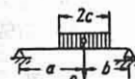

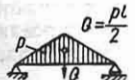
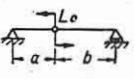
Фиг. 24.

и  $(n+1)$ -й опор, площадей эпюр изгибающих моментов  $n$ -го и  $(n+1)$ -го пролетов, рассматриваемых как однопролетные балки, от заданной нагрузки, т. е. статические моменты эпюр, построенных

Таблица 11

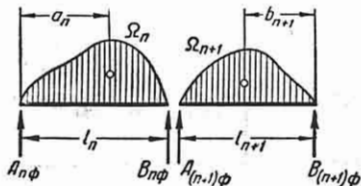
Грузовые члены уравнения трех моментов ( $EJ = \text{const}$ )

$l$  — длина пролета;  $\Omega$  — площадь эпюры моментов простой балки;  $A_\phi = \frac{\Omega b}{l}$  и  $B_\phi = \frac{\Omega a}{l}$  — левая и правая фиктивные реакции

	$\Omega = \frac{Pab}{2}; A_\phi = \frac{Pab}{6l}(l+b);$ $B_\phi = \frac{Pab}{6l}(l+a)$		$\Omega = \frac{QP}{12}; A_\phi = \frac{7}{180}QP;$ $B_\phi = \frac{8}{180}QP$
	$\Omega = \frac{2}{9}Pl^2;$ $A_\phi = B_\phi = \frac{Pl^2}{9}$		$\Omega = A_\phi + B_\phi;$ $A_\phi = \frac{Qcbl}{12} [2\mu(1+\nu) - \xi^2];$ $B_\phi = \frac{Qcal}{12} [2\nu(1+\mu) - \xi^2];$
	$\Omega = P \left( ab - \frac{c^2}{4} \right);$ $A_\phi = \frac{Pb}{6l} \left\{ 2a(l+b) - \frac{3c^2}{2} \right\};$ $B_\phi = \frac{Pa}{6l} \left\{ 2b(l+a) - \frac{3c^2}{2} \right\};$		$\xi = \frac{c}{l}; \mu = \frac{a}{l}; \nu = \frac{b}{l}$
	$\Omega = \frac{Ql^2}{12};$ $A_\phi = B_\phi = \frac{Ql^2}{24}$		$\Omega = A_\phi + B_\phi;$ $A_\phi = \frac{Qcbl}{4} \left[ \mu(1+\nu) - \frac{(15\nu - 2\xi)\xi^2}{10\nu} \right];$ $B_\phi = \frac{Qca}{4} \left[ \nu(1+\mu) - \frac{(15\mu + 2\xi)\xi^2}{10\mu} \right];$
	$\Omega = \frac{Q}{6}(3ab - c^2);$ $A_\phi = \frac{Qb}{6l}(l^2 - b^2 - c^2);$ $B_\phi = \frac{Qa}{6l}(l^2 - a^2 - c^2);$		$\xi = \frac{c}{l}; \mu = \frac{a}{l}; \nu = \frac{b}{l}$
	$\Omega = \frac{Q}{6}(3ab - c^2);$ $A_\phi = \frac{Qb}{6l}(l^2 - b^2 - c^2);$ $B_\phi = \frac{Qa}{6l}(l^2 - a^2 - c^2);$		$\Omega = \frac{Ql^2}{10};$ $A_\phi = B_\phi = \frac{Ql^2}{20}$
	$\Omega = \frac{5}{48}Ql^2;$ $A_\phi = B_\phi = \frac{5}{96}Ql^2$		$\Omega = \frac{L}{2}(a-b);$ $A_\phi = \frac{L}{6l}(l^2 - 3b^2);$ $B_\phi = \frac{L}{6l}(3a^2 - l^2)$

без учета действия надпорных моментов (фиг. 25);  $A_\phi$  и  $B_\phi$  — фиктивные опорные реакции простой балки (см. стр. 99).

Если схема неразрезной балки соответствует фиг. 22, то число уравнений



Фиг. 25.

равно числу промежуточных опор, если фиг. 23, то число уравнений равно числу всех опор. В последнем случае первое уравнение трех моментов имеет вид

$$2M_0l_1 + M_1l_1 = -\frac{6\Omega_1 b_1}{l_1} = 6A_{1\phi}. \quad (58)$$

Правые части уравнений называются грузовыми членами, и их значение для различных нагрузок можно определить по табл. 11.

Для балки, имеющей постоянное сечение в пределах одного пролета, уравнение трех моментов имеет вид

$$\begin{aligned} & M_{n-1}l_{n-1} \frac{J_{n+1}}{J_n} + \\ & + 2M_n \left( l_n \frac{J_{n+1}}{J_n} + l_{n+1} \right) + M_{n+1}l_{n+1} = \\ & = -\frac{6\Omega_n a_n}{l_n} \frac{J_{n+1}}{J_n} - \frac{6\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} = \\ & = -6 \left[ B_{n\phi} \frac{J_{n+1}}{J_n} + A_{(n+1)\phi} \right], \quad (59) \end{aligned}$$

где  $J_n$  и  $J_{n+1}$  — моменты инерции сечений  $n$ -го и  $(n+1)$ -го пролетов.

Для балки переменного сечения уравнение трех моментов принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \beta_n M_{n-1} + (\alpha_n^b + \alpha_{n+1}^a) M_n + \\ & + \beta_{n+1} M_{n+1} = -(\varphi_n^b + \varphi_{n+1}^a), \quad (60) \end{aligned}$$

где углы  $\beta_n$ ,  $\beta_{n+1}$ ,  $\alpha_n^b$ ,  $\alpha_{n+1}^a$ ,  $\varphi_n^b$  и  $\varphi_{n+1}^a$ ,

входящие в это уравнение, показаны на фиг. 26. Эти величины для каждого про-

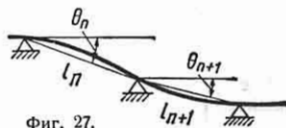
лета определяются отдельно графо-аналитическим или графическим способом.

После решения системы уравнений трех моментов все опорные моменты известны и каждый пролет рассматривается как простая балка, находящаяся под совокупным воздействием нагрузок и опорных моментов.

Для случая, когда одна или несколько опор получают осадку, величина которой известна (фиг. 27), уравнение трех моментов принимает вид:

$$\begin{aligned} & \text{а) для балки постоянного сечения} \\ & M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + \\ & + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ(\theta_n - \theta_{n+1}), \quad (61) \end{aligned}$$

где  $E$  — модуль упругости;  $J$  — момент инерции сечения балки;



Фиг. 27.

б) для балки с сечением, меняющимся от пролета к пролету,

$$\begin{aligned} & M_{n-1}l_n \frac{J_{n+1}}{J_n} + 2M_n \left( l_n \frac{J_{n+1}}{J_n} + l_{n+1} \right) + \\ & + M_{n+1}l_{n+1} = +6EJ_{n+1}(\theta_n - \theta_{n+1}); \quad (62) \end{aligned}$$

в) для балки переменного сечения

$$\begin{aligned} & \beta_n M_{n-1} + M_n(\alpha_n^b + \alpha_{n+1}^a) + \\ & + \beta_{n+1} M_{n+1} = \theta_n - \theta_{n+1}. \quad (63) \end{aligned}$$

Здесь  $\theta_n$  и  $\theta_{n+1}$  — углы поворота линий, соединяющих концы  $n$ -го и  $(n+1)$ -го пролетов, вызванные осадкой.

Совместное влияние нагрузки и осадки опор учитывается по принципу наложения.

Для расчета неразрезных балок постоянного сечения с равными пролетами даны табл. 12 и 13.



Таблица 12




Неразрезные балки с равными пролетами  $l$ , нагруженные равномерно распределенной нагрузкой или сосредоточенными грузами одинаковой интенсивности и величины

Изгибающие моменты, опорные реакции и прогибы

Приведенные в таблицах коэффициенты для изгибающих моментов должны быть умножены на  $pl^2$  или  $P_l$ , коэффициенты для опорных реакций — на  $pl$  или  $P$ , коэффициенты для прогибов — на  $\frac{pl^4}{EJ}$  или  $\frac{PJ^3}{EJ}$ .

Изгибающие моменты положительны, если они вызывают растяжение с нижней стороны балки. Опорные реакции положительны, если они направлены вверх.

а) Два равных пролета

Случай нагрузки	Опорные моменты $M_B$	Наибольшие моменты в пролете		Опорные реакции				Наибольшие прогибы в пролете
		В первом пролете $M_I$	Во втором пролете $M_{II}$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$R_D$	
	-0,1250 -0,0625	0,0703 0,0957	0,0703 —	0,3750 0,4375	1,2500 0,6250	0,3750 -0,0625	—	0,00520 0,00906
	-0,1875 -0,0938	0,1563 0,2031	0,1563 —	0,3125 0,4063	1,3750 0,6875	0,3125 -0,0938	—	0,00915 0,01502
	-0,3333 -0,1667	0,2222 0,2778	0,2222 —	0,6667 0,8333	2,6667 1,3333	0,6667 -0,1667	—	0,01470 0,02505

б) Три равных пролета

Случай нагрузки	Опорные моменты		Наибольшие моменты в пролете		Опорные реакции					Наибольшие прогибы в пролете	
	$M_B$	$M_C$	$M_I$	$M_{II}$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$R_D$	$f_I$	$f_{II}$	
	-0,1000	-0,1000	0,0800	0,0250	0,4000	1,1000	1,1000	0,4000	0,0068	0,0005	
	-0,0500	-0,0500	-	0,0750	-0,0500	0,5500	0,5500	-0,0500	-	0,0068	
	-0,0500	-0,0500	0,1013	-	0,4500	0,5500	0,5500	0,4500	0,0099	-	
	-0,1167	-0,0333	-	-	0,3833	1,2000	0,4500	-0,0333	-	-	
	-0,0667	0,0167	-	-	0,4333	0,6500	-0,1000	0,0167	0,0088	-	
	-0,1500	-0,1500	0,1750	0,1000	0,3500	1,1500	1,1500	0,3500	0,0115	0,0021	
	-0,0750	-0,0750	-	0,1750	-0,0750	0,5750	0,5750	-0,0750	-	0,0115	
	-0,0750	-0,0750	0,2125	-	0,4250	0,5750	0,5750	0,4250	0,0162	-	
	-0,1750	-0,0500	-	-	0,3250	1,3000	0,4250	-0,0500	-	-	
	-0,1000	0,0250	-	-	0,4000	0,7250	-0,1500	0,0250	0,0146	-	
	-0,2667	-0,2667	0,2444	0,0667	0,7333	2,2667	2,2667	0,7333	0,0188	0,0021	
	-0,1333	-0,1333	-	0,2000	-0,1333	1,1333	1,1333	-0,1333	-	0,0189	
	-0,1333	-0,1333	0,2889	-	0,8667	1,1333	1,1333	0,8667	0,0272	-	
	-0,3111	-0,0889	-	-	0,6889	2,5333	0,8667	-0,0889	-	-	
	-0,1778	0,0444	-	-	0,8222	1,4000	-0,2667	0,0444	0,0244	-	

## в) Четыре равных пролета

Случай нагрузки	Опорные моменты				Наибольшие моменты в пролете				Опорные реакции				Наибольшие прогибы в пролете			
	$M_B$	$M_C$	$M_D$	$M_I$	$M_{II}$	$M_{III}$	$M_{IV}$	A	B	C	D	E	f <sub>I</sub>	f <sub>II</sub>	f <sub>III</sub>	
																$M_V$
	-0,1071	-0,0714	-0,1071	0,0771	0,0864	0,0864	0,0771	0,3929	1,1428	0,9286	1,1428	0,3929	0,0063	0,0019	-	
	-0,0636	-0,0357	-0,0636	0,0996	-	0,0807	-	0,4464	0,5715	0,4642	0,5715	-0,0636	0,0096	-	0,0074	
	-0,1205	-0,0180	-0,0580	0,0720	0,0790	-	0,0977	0,3795	1,2232	0,3573	0,5980	0,4420	-	-	-	
	-0,0357	-0,1071	-0,0357	-	0,0561	-	-	-0,0357	0,4643	1,1428	0,4643	-0,0357	-	-	-	
	-0,0669	0,0178	-0,0045	0,0938	-	-	-	0,4331	0,6516	-0,1070	0,0287	-0,0045	0,0088	-	-	
	-0,0491	-0,0634	0,0134	-	0,738	-	-	-0,0491	0,5448	0,5711	-0,0802	0,0134	-	0,0066	-	
	-0,1637	-0,1072	-0,1607	0,1637	0,1161	0,1161	0,1637	0,3393	1,2143	0,8928	1,2143	0,3393	0,0109	0,0041	-	
	-0,0804	-0,0636	-0,0804	0,2098	-	0,1830	-	0,4196	0,6072	0,4464	0,6072	-0,0804	0,0159	-	0,0125	
	-0,1808	-0,0288	-0,0871	0,1597	0,1462	-	0,2065	0,3192	1,3348	0,2858	0,6472	-0,4130	-	-	-	
	-0,0536	-0,1607	-0,0536	-	0,1428	0,1428	-	-0,0536	0,4464	1,2143	0,4464	-0,0536	-	-	-	
	-0,1004	0,0288	-0,0067	0,1998	-	-	-	0,3996	0,7276	-0,1607	0,0402	-0,0067	0,0147	-	-	
	-0,0737	-0,0804	0,0201	-	0,1730	-	-	-0,0737	0,5670	0,6072	-0,1206	0,0201	-	0,0113	-	
	-0,2857	-0,1905	-0,2857	0,2381	0,1111	0,1111	0,2381	0,7143	2,3810	1,8094	2,3810	0,7143	0,0177	0,0057	-	
	-0,1429	-0,0952	-0,1429	0,2857	-	0,2222	-	0,8573	1,1906	0,9043	1,1906	-0,1428	0,0266	-	0,0206	
	-0,3214	-0,0480	-0,1547	0,2263	0,1942	-	0,2318	0,6788	2,5950	0,6190	1,2618	0,8454	-	-	-	
	-0,0952	-0,2857	-0,0952	-	0,2222	0,2222	-	-0,0952	0,9056	2,3792	0,9056	-0,0952	-	-	-	
	-0,1784	0,0475	-0,0119	0,2738	-	-	-	0,8216	1,4043	-0,2853	0,0713	-0,0119	0,0244	-	-	
	-0,1309	-0,1424	0,0357	-	0,1986	-	-	-0,1309	1,1194	1,1896	-0,2138	0,0357	-	0,0183	-	

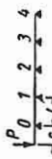
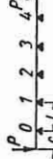
Продолжение табл. 12

з) Много равных пролетов

Случай нагрузки	Опорные моменты				Наибольшие моменты в пролете			Опорные реакции			
	$M_B$	$M_C$	$M_{m-1}$	$M_m$	$M_I$	$M_{II}$	$M_{III}$	$R_A$	$R_B$	$R_C$	$R_{cm}$
	-0,1057	-0,0774	-0,0833	-0,0833	0,0778	0,0339	0,0417	0,3943	1,1340	0,9641	1,0000
	-0,0670	-0,0180	-	-	0,0938	-	-	0,4338	0,6514	-	-
	0,0473	-0,0539	-	-	-	0,0744	-	-0,0473	0,5407	0,5749	-
	-	-	-0,0528	-0,0528	-	-	0,0722	-	-	-	0,5670
			-0,0670	-0,1056	-	-	0,0394	-	-	-	1,1340
	-0,1585	-0,1161	-0,1250	-0,1250	0,1708	0,1127	0,1250	0,3415	1,2009	0,9464	1,0000
	-0,1005	0,0270	-	-	0,1830	-	-	0,3995	0,7280	-	-
	-0,0710	-0,0804	-	-	-	0,1743	-	-0,0710	0,5616	0,6114	-
	-	-	-0,0792	-0,0792	-	-	0,1708	-	-	-	0,6005
			-0,1005	-0,1584	-	-	0,1206	-	-	-	1,2010
	-0,2819	-0,2064	-0,2222	-0,2222	0,2393	0,1017	0,1111	0,7181	2,3574	1,9045	2,0000
	-0,1787	0,0480	-	-	0,2737	-	-	0,8213	1,4054	-	-
	-0,1261	-0,1437	-	-	-	0,2013	-	-0,1261	1,1085	1,1997	-
	-	-	-0,1408	-0,1408	-	-	0,1925	-	-	-	1,1785
			-0,1787	-0,2816	-	-	0,1203	-	-	-	2,3570

Таблица 13

Неразрезные балки с консолями \*

Случай нагрузки	Число пролетов	Опорные моменты			Опорные реакции					
		$M_1$	$M_2$	$M_3$	$R_0$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
	2	0,25	—	—	$1 + 1,25 \frac{c}{l}$	$-1,50 \frac{c}{l}$	$0,25 \frac{c}{l}$	—	—	—
	3	0,2667	-0,0667	—	$1 + 1,267 \frac{c}{l}$	$-1,60 \frac{c}{l}$	$0,40 \frac{c}{l}$	$-0,067 \frac{c}{l}$	—	—
	4	0,2678	-0,0714	0,0179	$1 + 1,268 \frac{c}{l}$	$-1,607 \frac{c}{l}$	$0,429 \frac{c}{l}$	$-0,107 \frac{c}{l}$	—	$0,018 \frac{c}{l}$
	2	0,50	-1	—	$1 + 1,50 \frac{c}{l}$	$-3,00 \frac{c}{l}$	$1 + 1,50 \frac{c}{l}$	—	—	—
	3	0,20	0,20	-1	$1 + 1,20 \frac{c}{l}$	$-1,20 \frac{c}{l}$	$-1,20 \frac{c}{l}$	$1 + 1,20 \frac{c}{l}$	—	—
	4	0,2858	-0,1429	0,2858	$1 + 1,286 \frac{c}{l}$	$-1,714 \frac{c}{l}$	$0,857 \frac{c}{l}$	$-1,714 \frac{c}{l}$	$1 + 1,286 \frac{c}{l}$	$P$

\*  $M_0 = -Pc$ . Для первой схемы  $M_1 = 0$ ; для второй схемы при четырех пролетах  $M_1 = -Pc$ .

**Балки на упруго оседающих опорах**

Перемещение опор в вертикальном направлении считается пропорциональным давлению на опору  $\epsilon = \frac{\delta}{R}$ . Здесь  $\epsilon$  — коэффициент податливости опоры;  $\delta$  — перемещение опоры;  $R$  — давление на опору.

Для определения изгибающих моментов над опорами составляется система уравнений пяти моментов.

Для балки с равными пролетами, равной жесткостью пролетов и равной податливостью опор уравнения пяти моментов имеют вид

$$\begin{aligned}
 &M_{n-2a} + M_{n-1}(1-4a) + \\
 &+ M_n(4+6a) + M_{n+1}(1-4a) + \\
 &+ M_{n+2a} = \\
 &= -6 \left( \frac{Q_n a_n}{l^2} + \frac{Q_{n+1} b_{n+1}}{l^2} \right) - \\
 &- a l (R_{n-1}^\circ - 2R_n^\circ + R_{n+1}^\circ), \quad (64)
 \end{aligned}$$

где

$$a = \frac{6EJ}{l^3} \epsilon,$$

$R_{n-1}^\circ, R_n^\circ, R_{n+1}^\circ$  — опорные давления на  $(n-1), n$  и  $(n+1)$  опорах, рассчитанные в предположении, что балка разрезана на опорах.

**Расчет балок на жестких и на упруго оседающих опорах по методу начальных параметров**

Параметрами перемещений и усилий для сечения  $x$  являются прогиб  $v(x)$ , угол поворота  $\theta(x)$ , изгибающий момент  $M(x)$  и поперечная сила  $Q(x)$  в этом сечении. Начальными называются параметры  $v(0), \theta(0), M(0), Q(0)$  для сечения, принимаемого за начальное. Метод разработан трудами советских ученых [3], [6], [13]; он отличается общностью и применим к различным случаям расчета.

Для балки постоянной жесткости по формулам (54) и (104) (см. фиг. 13, б)

$$\begin{aligned}
 v(x) = &v(0) + \theta(0)x - M(0) \frac{x^2}{2EJ} - \\
 &- Q(0) \frac{x^3}{6EJ} - \sum \frac{L(x-u_L)^2}{2EJ} + \\
 &+ \sum \frac{P(x-u_P)^3}{6EJ} + \sum \frac{p(x-u_p)^4}{24EJ} + \\
 &+ \sum \frac{k(x-u_k)^5}{120EJ};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta(0) - M(0) \frac{x}{EJ} - Q(0) \frac{x^2}{2EJ} - \\ &- \sum \frac{L(x-u_L)}{EJ} + \sum \frac{P(x-u_p)^2}{2EJ} + \\ &+ \sum \frac{p(x-u_p)^3}{6EJ} + \sum \frac{k(x-u_k)^4}{24EJ}; \\ M(x) &= M(0) + Q(0)x + \\ &+ \sum L - \sum P(x-u_p) - \\ &- \sum \frac{p(x-u_p)^2}{2} - \sum \frac{k(x-u_k)^3}{6}; \\ Q(x) &= Q(0) - \sum P - \sum p(x-u_p) - \\ &- \sum \frac{k(x-u_k)^2}{2}. \end{aligned} \quad (65)$$

В формулах (65) члены, учитывающие ту или иную внешнюю нагрузку, вводятся только для сечений, лежащих правее точки приложения соответствующей нагрузки. Кроме того, предполагается, что сплошная равномерная нагрузка  $p$  приложена на участке от  $u_p$  (левый конец участка) до  $u'_p > x$  (правый конец участка). Если  $x > u'_p$ , то в формулы (65) вводится слагаемое от нагрузки  $-p$ , прилагаемой справа от сечения  $u'_p < x$ . Аналогично учитывается нагрузка по закону треугольника.

Начальные параметры определяются по условиям закрепления балки, после чего могут быть вычислены параметры любого сечения балки.

Метод начальных параметров используется при расчете многопролетных балок на жестких или упругих опорах.

Применение метода к определенным прогибам балок см. стр. 98.

При расчете многопролетных балок реакции лишних опор причисляются к внешней нагрузке; по формулам (65) параметры сечения  $x$  выражаются в функции начальных параметров, неизвестных реакций и заданной внешней нагрузки. Неизвестные реакции и начальные параметры определяют из граничных условий.

**Пример.** Балка постоянного сечения жестко заделана с одного конца и опирается на две опоры, из которых одна неподвижная, а другая — упруго оседающая. Коэффициент осадки  $\alpha$ . Нагрузка сплошная равномерная и равна  $p$  (фиг. 28). Поче-

тив начало координат в заделке, имеем  $v(0) = \theta(0) = 0$ . Далее,

$$\begin{aligned} EJv(x) &= -M(0) \frac{x^3}{2} - Q(0) \frac{x^3}{6} - \\ &- R_1 \frac{(x-a)^3}{6} + \frac{px^4}{24}; \end{aligned}$$

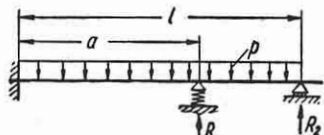
$$M(x) = M(0) + Q(0)x + R_1(x-a) - \frac{px^2}{2};$$

$$Q(x) = Q(0) + R_1 - px.$$

Граничные условия:  $v(l) = 0$ ;  $v(a) = \alpha R_2$ ;  $M(l) = 0$ ;  $Q(l) = -R_2$  или

$$\begin{aligned} EJv(l) &= -M(0) \frac{l^3}{2} - Q(0) \frac{l^3}{6} - R_1 \frac{(l-a)^3}{6} + \\ &+ \frac{pl^4}{24} = 0; \end{aligned}$$

$$EJv(a) = -M(0) \frac{a^2}{2} - Q(0) \frac{a^2}{6} + \frac{pa^4}{24} = EJ\alpha R_2;$$



Фиг. 28.

$$M(l) = M(0) + Q(0)l + R_1(l-a) - \frac{pl^2}{2} = 0;$$

$$Q(l) = Q(0) + R_1 - pl = -R_2.$$

Из этих четырех уравнений определяются  $M(0)$ ,  $Q(0)$  и реакции опор  $R_1$  и  $R_2$ .

### Балки на сплошном упругом основании

*Сплошным упругим основанием под балкой* называется основание, упруго деформирующееся и создающее реакцию, распределенную непрерывно по длине балки. Во многих технических задачах, в частности в расчетах труб и резервуаров, играет роль основание, реакция которого в любой точке имеет интенсивность, пропорциональную прогибу в этой точке\*. При таком основании интенсивность реакций  $q(x)$  связана с прогибом  $v(x)$  зависимостью

$$q(x) = kv(x). \quad (66)$$

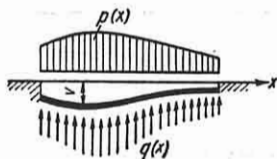
где  $k$  — постоянная, называемая *коэффициентом упругого основания*, отнесенная ко всей ширине балки и имеющая размерность  $\text{кг/см}$ . Связь балки с основанием предполагается двусторонней, т. е. существующей при любом направлении прогиба (вверх или вниз).

\* Упругое основание, реакции которого обусловлены не только прогибами, но и поворотами сечений балки (моментные реакции). Кроме того, упругое основание иногда рассматривается как сплошная упругая среда (упругая полуплоскость, упругое полупространство).

Дифференциальное уравнение упругой линии балки постоянного сечения, лежащей на сплошном упругом основании и находящейся под действием сплошной нагрузки  $p(x)$  (фиг. 29), имеет вид

$$EJv''''(x) + kv(x) = p(x), \quad (67)$$

где  $EJ$  — жесткость балки;  $p(x)$  — непрерывная функция или функция с разрывами первого рода.



Фиг. 29.

Общее решение уравнения (67) без правой части имеет вид

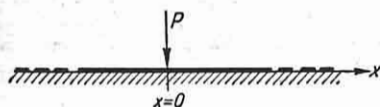
$$v(x) = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x), \quad (68)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}. \quad (69)$$

Решение (68) содержит четыре постоянные  $A, B, C$  и  $D$ , которые определяются из условий на концах балки.

Балка имеет бесконечную длину и нагружена одной сосредоточенной силой  $P$  (фиг. 30). Для этого случая имеем следующие значения величин про-



Фиг. 30.

гиба, угла наклона касательной, изгибающего момента и поперечной силы:

$$v(x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x);$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} e^{-\beta x} \sin \beta x =$$

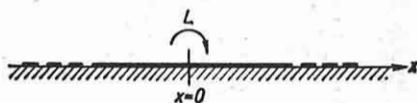
$$= -\frac{P\beta^2}{k} \zeta(\beta x);$$

$$M(x) = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) = -\frac{P}{4\beta} \psi(\beta x);$$

$$Q(x) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x = -\frac{P}{2} \theta(\beta x). \quad (70)$$

На бесконечно длинную балку действует один сосредоточенный момент  $L$  (фиг. 31). Те же величины имеют выражения:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= \frac{L\beta^2}{k} \zeta(\beta x); \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{L\beta^3}{k} \psi(\beta x); \\ M(x) &= \frac{L}{2} \theta(\beta x); \\ Q(x) &= -\frac{L\beta}{2} \varphi(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$



Фиг. 31.

Полубесконечная балка с силой  $P$  и моментом  $L$  в точке  $x=0$  (фиг. 32).

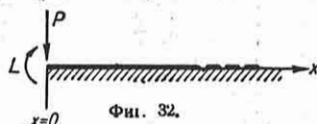
$$v(x) = \frac{2P\beta}{k} \theta(\beta x) - \frac{2L\beta^2}{k} \psi(\beta x);$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2P\beta^2}{k} \varphi(\beta x) + \frac{4L\beta^2}{k} \theta(\beta x); \quad (72)$$

$$M(x) = -\frac{P}{\beta} \zeta(\beta x) + L\varphi(\beta x);$$

$$Q(x) = -P\psi(\beta x) - 2L\zeta(\beta x).$$

Численные значения функций  $\varphi(\beta x)$ ,  $\psi(\beta x)$ ,  $\theta(\beta x)$  и  $\zeta(\beta x)$  даны в табл. 14.

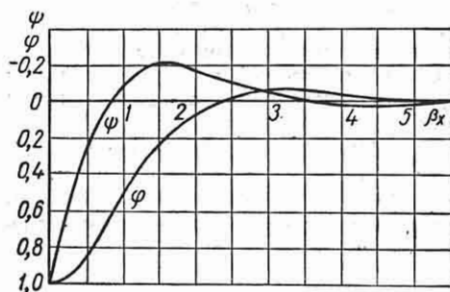


Фиг. 32.

Графическое изображение функций  $\varphi(\beta x)$  и  $\psi(\beta x)$  дано на фиг. 33.

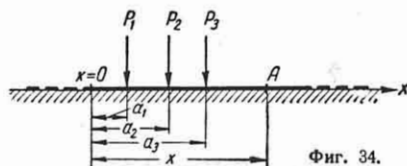
Таблица 14  
Значения функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\zeta$

$\beta x$	$\varphi$	$\psi$	$\theta$	$\zeta$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	+0,0599	0,3798	0,3199
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	-0,2068	+0,0158	0,2226
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1230
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0895
2,3	+0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0743
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0492
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	+0,0019
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0140
4,0	-0,0258	+0,0019	-0,0120	-0,0139
4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0125
4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0108
4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
4,7	-0,0092	0,0090	+0,0001	-0,0091
4,8	-0,0075	0,0089	+0,0007	-0,0082
4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0057
5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
5,6	+0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
5,9	0,0015	0,0036	0,0026	-0,0010
6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007
6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004
6,2	0,0019	0,0022	0,0020	-0,0002
6,3	0,0019	0,0018	0,0018	+0,0001
6,4	0,0018	0,0015	0,0017	-0,0003
6,5	0,0018	0,0012	0,0015	0,0004
6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0005
6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0006
6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006



Фиг. 33.

На бесконечную балку действует несколько грузов  $P_1, P_2, P_3 \dots$  (фиг. 34). Для определения в какой-нибудь точке  $A$  расчетных величин, т. е. прогиба, угла поворота, изгибающего момента или поперечной силы, нужно суммировать



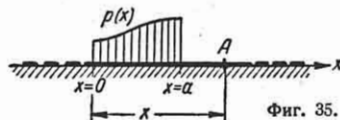
Фиг. 34.

действия этих грузов, рассматривая каждое из них по схеме случая 1 и используя формулы (70). Таким образом,

$$v(x) = \frac{P_1 \beta}{2k} \varphi[\beta(x - a_1)] + \frac{P_2 \beta}{2k} \varphi[\beta(x - a_2)] + \frac{P_3 \beta}{2k} \varphi[\beta(x - a_3)] \dots \quad (73)$$

и т. д.

На бесконечную балку действует на некотором участке распределенная нагрузка  $p(x)$  (фиг. 35). Расчетные величины в некоторой точке  $A$



Фиг. 35.

определяются путем интегрирования элементарных воздействий по фиг. 30:

$$v(x) = \int_0^x \frac{p(\xi) \beta}{2k} \varphi[\beta(x - \xi)] d\xi = \frac{\beta}{2k} \int_0^x p(\xi) \varphi[\beta(x - \xi)] d\xi, \quad (74)$$



что дает решение уравнения (67) с правой частью.

В частном случае, когда интенсивность нагрузки  $p$  постоянна, для точки  $A$ , лежащей вне загруженного участка,

$$v(x) = \frac{P}{2k} (e^{-\beta c} \cos \beta c - e^{-\beta b} \cos \beta b) = \frac{P}{2k} [\theta(\beta c) - \theta(\beta b)], \quad (75)$$

где  $b$  и  $c$  — большее и меньшее расстояния точки  $A$  от концов участка.

То же самое для точки  $B$ , лежащей внутри загруженного участка:

$$v(x) = \frac{P}{2k} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c) = \frac{P}{2k} [2 - \theta(\beta b) - \theta(\beta c)]. \quad (76)$$

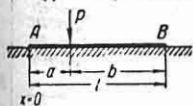
Комбинируя случаи 4 и 5 со случаями 1 и 2, можно получить расчетные величины для балки, имеющей ограниченную длину, при наиболее часто встречающихся в практике нагрузках.

Для балки ограниченной длины, нагруженной произвольно, применяют следующий общий способ [12]. Балка рассматривается как часть бесконечно длинной балки, нагруженной теми же силами, что и заданная, а кроме того, сосредоточенными силами и моментами в точках, соответствующих концам заданной балки. Эти дополнительные силы и моменты подбираются так, чтобы были удовлетворены условия на концах заданной балки; в таком случае решение для бесконечно длинной балки будет одновременно и решением для ограниченной балки, если им пользоваться в пределах длины последней.

Для упрощения решения целесообразно заданную нагрузку представить как сумму симметричной и антисимметричной нагрузок и для каждой из последних решать задачу отдельно, а затем результаты сложить.

**Пример.** Балка длиной  $l$  нагружена сосредоточенной силой  $P$  на расстояниях  $a$  и  $b$  от концов (фиг. 36). Вместо заданной схемы нагрузок рассматриваем две следующие схемы: а) симметричную и б) антисимметричную; сумма этих нагрузок составляет заданную.

Симметричная нагрузка (фиг. 37, а). Продолжим балку в обе стороны до бесконечности (фиг. 37, б) и приложим в точках  $A$  и  $B$  симметричные силы  $P_0$  и моменты  $L_0$ , которые, очевидно, не нарушат симметрии изгиба балки.



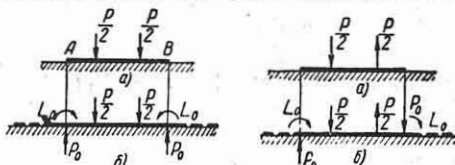
Фиг. 36.

Изгибающие моменты в точках  $A$  и  $B$  бесконечно длинной балки будут одинаковы, а поперечные силы — отличаться знаком. Для точки  $B$  на основании формул (70) и (71) будем иметь следующие выражения для изгибающего момента и поперечной силы от действия двух грузов и дополнительных воздействий  $P_0$  и  $L_0$ :

$$M(B) = \frac{P}{8\beta} [\psi(\beta b) + \psi(\beta a)] - \frac{P_0}{4\beta} [\psi(0) + \psi(\beta l)] + \frac{L_0}{2} [\theta(0) + \theta(\beta l)];$$

$$Q(B) = -\frac{P}{4} [\theta(\beta b) + \theta(\beta a)] - \frac{P_0}{2} [\theta(0) - \theta(\beta l)] + \frac{L_0\beta}{2} [\varphi(0) - \varphi(\beta l)].$$

По условиям на концах короткой балки эти величины должны быть равны нулю; кроме того,



Фиг. 37.

Фиг. 38.

$\varphi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 1$ ; следовательно, имеем два уравнения для определения  $P_0$  и  $L_0$ :

$$\frac{1}{2\beta} [1 + \psi(\beta l)] P_0 - [1 + \theta(\beta l)] L_0 = -\frac{P}{4\beta} [\psi(\beta l) + \psi(\beta a)] - [1 - \theta(\beta l)] P_0 + \beta [1 - \varphi(\beta l)] L_0 = \frac{P}{2} [\theta(\beta b) + \theta(\beta a)].$$

Антисимметричная нагрузка (фиг. 38, а). Продолжив балку в обе стороны до бесконечности (фиг. 38, б), приложим в точках  $A$  и  $B$  антисимметричные схемы сил  $P_0$  и моментов  $L_0$ , которые сохранят антисимметричную форму изгиба балки. Изгибающие моменты в точках  $A$  и  $B$  будут отличаться знаком, а поперечные силы — одинаковы. Для точки  $B$  на основании формул (70) и (71) будем иметь

$$M(B) = \frac{P}{8\beta} [\psi(\beta b) - \psi(\beta a)] + \frac{P_0}{4\beta} [\psi(0) - \psi(\beta l)] - \frac{L_0}{2} [\theta(0) - \theta(\beta l)];$$

$$Q(B) = -\frac{P}{4} [\theta(\beta b) - \theta(\beta a)] + \frac{P_0}{2} [\theta(0) + \theta(\beta l)] - \frac{L_0\beta}{2} [\varphi(0) + \varphi(\beta l)],$$

откуда получаются два уравнения для определения  $P_0$  и  $L_0$ :

$$-\frac{1}{2\beta} [1 - \psi(\beta l)] P_0 + [1 - \theta(\beta l)] L_0 = -\frac{P}{4\beta} [\psi(\beta b) - \psi(\beta a)];$$

$$[1 + \theta(\beta l)] P_0 - \beta [1 + \varphi(\beta l)] L_0 = \frac{P}{2} [\theta(\beta b) - \theta(\beta a)].$$

Суммируя реакции от симметричного нагружения с таковыми от антисимметричного нагружения, получаем реакции от заданной нагрузки. После

этого можно определить все расчетные величины для бесконечно длинной балки; в пределах  $A - B$  они действительны и для короткой балки.

При задании конкретных значений величин нагрузок, размеров балки и коэффициента упругого основания задача решается в численном виде.

В общем случае действия нагрузок на балку любой длины применяется общее решение, данное акад. А. Н. Крыловым [3]:

$$v(x) = A_1 Y_1(\beta x) + A_2 Y_2(\beta x) + A_3 Y_3(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) + \Phi(\beta x); \quad (77)$$

$$\Phi(\beta x) = \frac{4}{k} \int_0^{\beta x} Y_4(\beta x - t) p(t) dt,$$

где  $Y_1(\beta x)$ ,  $Y_2(\beta x)$ ,  $Y_3(\beta x)$  и  $Y_4(\beta x)$  — фундаментальные функции Крылова, имеющие выражения:

$$Y_1(\beta x) = \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x;$$

$$Y_2(\beta x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x);$$

$$Y_3(\beta x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x; \quad (78)$$

$$Y_4(\beta x) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \beta x \sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x).$$

Слагаемое  $\Phi(\beta x)$  представляет собой частное решение дифференциального уравнения (67) при наличии правой части. Для различных нагружений оно равно:

а) для сплошной равномерной нагрузки  $p$ , начинающейся от  $x = a$ ,

$$\left\| \frac{p}{k} [1 - Y_1[\beta(x-a)]]; \right.$$

б) для сосредоточенного груза  $P$  в точке  $x = a$

$$\left\| \frac{4P\beta}{k} Y_4[\beta(x-a)]; \right.$$

в) для сосредоточенного момента  $L$  в точке  $x = a$

$$\left\| -\frac{4L\beta^2}{k} Y_3[\beta(x-a)]. \right.$$

Символ  $\left\| \right.$  обозначает, что это слагаемое вводится для  $x > a$ .

Для определения постоянных  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  необходимо удовлетворить условиям на концах балки.

## ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ В БАЛКАХ ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ

### Эпюра наибольших изгибающих моментов в простой балке от подвижной нагрузки

Определяется наибольший изгибающий момент (и поперечная сила), получаемый при невыгоднейшем для рассматриваемого сечения расположении подвижной нагрузки. Огибающая эпюры моментов, построенных для всевозможных положений подвижной нагрузки, является *эпюрой наибольших изгибающих моментов*  $M$ .

Наибольшая величина  $M$  в эпюре наибольших изгибающих моментов называется *абсолютным наибольшим изгибающим моментом* ( $\max M$ ) для данной балки.

Два подвижных груза  $P_1$  и  $P_2$ , находящихся на постоянном расстоянии  $a = c_1 + c_2$  один от другого (давление крановой тележки, фиг. 39). Абсолютный наибольший изгибающий момент получается под большим грузом при таком положении грузов, когда середина пролета делит пополам расстояние между большим грузом и равнодействующей обоих грузов:  $x = 0,5c_1$  (при  $P_1 \geq P_2$  расстояние  $x$  берется от середины пролета до  $P_1$ ).

Опорные реакции и изгибающие моменты для балки с двумя равными грузами приведены в табл. 15.

Таблица 15

Опорные реакции  $A$  и изгибающие моменты  $M$  в зависимости от  $a:l$

$a:l$	$\max A$	$\max M_1$	$M_2$ для $x = \frac{1}{4} a$
0	2,0P	0,500Pl	0,500Pl
0,1	1,9P	0,451Pl	0,446Pl
0,2	1,8P	0,405Pl	0,385Pl
0,3	1,7P	0,361Pl	0,316Pl
0,4	1,6P	0,320Pl	0,240Pl
0,5	1,5P	0,281Pl	0,156Pl
0,586	1,414P	0,250Pl	0,079Pl

Если  $a:l = 0,586$ , то абсолютное наибольшее значение  $M_1$  равно  $\frac{Pl}{4}$  (груз  $P$  в середине пролета).

При  $P_1 = P_2 = P$

$$\max M_1 = \max M_2 =$$

$$= \max M = \frac{Pl}{2} \left( 1 - \frac{a}{2} \right)^2 \text{ при } x = \frac{a}{4}. \quad (79a)$$

Момент под грузом

$$M = \frac{Pl}{2} \left( 1 - \frac{a}{l} + \frac{2x}{l} \frac{a}{l} - \frac{4x^2}{l^2} \right). \quad (80a)$$

При  $P_1 \geq P_2$

$$\max M_1 = \frac{R}{4l} (l - c_1)^2, \quad (79b)$$

где  $R = P_1 + P_2$ .

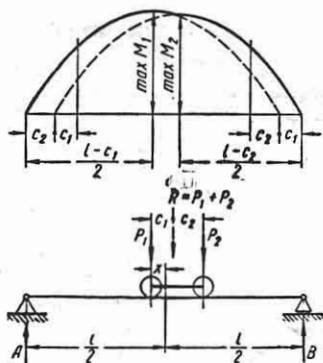
Момент под большим грузом

$$M_1 = \frac{R}{l} \left( \frac{l}{2} + x - c_1 \right) \left( \frac{l}{2} - x \right). \quad (80b)$$

Опорная реакция

$$A = \frac{R}{l} \left( \frac{l}{2} + x - c_1 \right).$$

Эпюра наибольших изгибающих моментов строится по уравнениям (80a) и (80b) или, как показано на фиг. 39,



Фиг. 39.

вычерчиванием двух квадратных парабол, симметричных относительно вертикалей с ординатами

$$\max M_1 = \frac{R}{4l} (l - c_1)^2$$

и

$$\max M_2 = \frac{R}{4l} (l - c_2)^2.$$

На участке между опорой и сечением, отстоящим от нее на расстоянии  $a$ ,

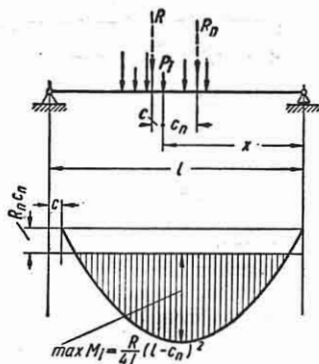
эпюра идет по прямой, если один груз сходит с балки.

Общий случай нагрузки. Под грузом  $P_i$  передвижной группы грузов (см. фиг. 40) изгибающий момент

$$M_i = \frac{R}{l} [(l - c) - x] x - R_n c_n, \quad (81)$$

где  $R$  — равнодействующая всех сил,  $R_n$  — равнодействующая грузов, расположенных справа от  $P_i$ .

Построенная на фиг. 40 графически эпюра  $M_i$  действительна при таких по-



Фиг. 40.

ложениям грузов, пока они все находятся на балке. Эпюра наибольших изгибающих моментов для всей балки получается как общая огибающая эпюр, построенных в виде аналогичных парабол для моментов под каждым из грузов.

### Линии влияния для расчета простых балок

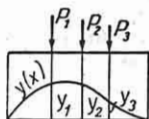
Линия влияния есть диаграмма, изображающая изменение какой-нибудь величины (изгибающего момента, поперечной силы, прогиба и т. п.), вызванное движением единичного груза постоянного направления. Для балок рассматривается действие груза, перпендикулярного к оси балки.

Если уравнение линии влияния для какой-нибудь величины  $S$  есть  $y = y(x)$ , то при действии одного груза  $P$  эта величина выражается формулой  $S = Py$ , где  $y$  — ордината линии влияния под грузом. Если на балку действуют  $n$

грузов  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , то величина  $S$  выражается формулой

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i, \quad (82)$$

где  $y_i$  — ордината линии влияния под грузом  $P_i$  (фиг. 41).



Фиг. 41.



Фиг. 42.

При действии сплошной нагрузки постоянной интенсивности  $p$  величина  $S$  выражается формулой

$$S = p\Omega, \quad (83)$$

где  $\Omega$  — площадь линии влияния на участке действия нагрузки.

При действии сплошной нагрузки переменной интенсивности  $p = p(x)$  величина  $S$  выражается формулой

$$S = \int p(x) y(x) dx, \quad (83a)$$

где интеграл распространяется на участок нагрузки (фиг. 42).

**Консоль.** Для сечения консоли изгибающий момент и поперечная сила на расстоянии  $a$  от конца (фиг. 43, а), вызванные действием груза  $P = 1$  на расстоянии  $x$  от конца, выражаются уравнениями

$$M(a, x) = -(a - x);$$

$$Q(a, x) = -1$$

$$\text{для } 0 < x < a;$$

$$M(a, x) = Q(a, x) = 0$$

для  $x > a$ .

Линии влияния даны на фиг. 43, б и в. Балка на двух опорах (фиг. 44, а). Опорные реакции, вызванные действием груза  $P = 1$  на расстоянии  $x$  от левой опоры,

$$A(x) = \frac{l-x}{l}; \quad B(x) = \frac{x}{l}.$$

Изгибающие моменты и поперечные силы для сечения балки на расстоянии  $a$  от левой опоры при действии груза  $P = 1$  на расстоянии  $x$  от левой опоры:

$$M(a, x) = B(l-a) = \frac{x}{l}(l-a)$$

при  $0 < x < a$ ;

$$M(a, x) = Aa = \frac{l-x}{l}a$$

при  $a < x < l$ ;

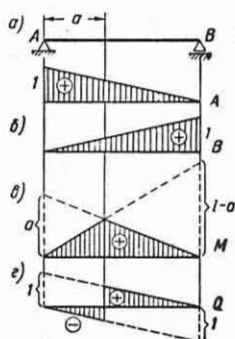
$$Q(a, x) = -B = -\frac{x}{l}$$

при  $0 < x < a$ ;

$$Q(a, x) = A = \frac{l-x}{l}$$

при  $a < x < l$ .

Линии влияния даны на фиг. 44, в и г.



Фиг. 44.

### Линии влияния для расчета статически неопределимых балок

Линии влияния для расчета неразрезных балок при подвижной нагрузке даны в табл. 16. Линии влияния для балки с одним и двумя зашеченными концами приводятся в табл. 17.

**Построение линий влияния.** Чтобы построить линию влияния в какой-нибудь точке статически неопределимой балки для какого-нибудь обобщенного усилия (изгибающего момента, поперечной силы и опорной реакции), необходимо балку разрезать в этой точке и сообщить ей обобщенное перемещение в направлении силы, равное единице. Полученная упругая линия представит собой линию влияния для искомого обобщенного усилия. Так, например, если требуется построить линию влияния для поперечной силы в точке  $x = a$  (фиг. 45, а), то следует разрезать балку в точке  $x = a$  и раздвинуть концы левой и правой частей на величину, принимаемую за единицу.

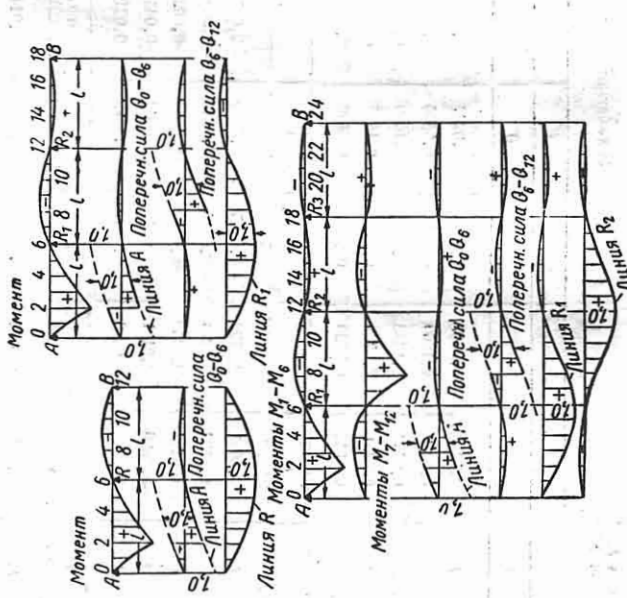
Таблица 16

Ординаты линий влияния для неразрезных балок с двумя, тремя и четырьмя пролетами

а) Два равных пролета

Груз $l$ в точке	Ординаты линии влияния						Попереч- ные силы
	Изгибающие моменты в точках						
	1	2	3	4	5	6	
0	0	0	0	0	0	0	1,000
1	0,1323	0,0976	0,0632	0,0285	-0,0060	-0,0405	0,783
2	0,0988	0,1976	0,1298	0,0619	-0,0061	-0,0740	0,583
3	0,0677	0,1354	0,2031	0,1041	0,0051	-0,0938	0,406
4	0,0402	0,0803	0,1205	0,1606	0,0340	-0,0926	0,241
5	0,0172	0,0343	0,0516	0,0687	0,0860	-0,0686	0,103
6	0	0	0	0	0	0	0
7	-0,0106	-0,0212	0,0318	-0,0424	-0,0530	-0,0636	-0,064
8	-0,0154	-0,0309	0,0463	-0,0617	-0,0772	-0,0926	-0,093
9	-0,0156	-0,0313	0,0469	-0,0626	-0,0782	-0,0938	-0,094
10	-0,0123	-0,0247	0,0370	-0,0494	-0,0617	-0,0740	-0,074
11	-0,0068	-0,0135	0,0203	-0,0270	-0,0338	-0,0405	-0,041
12	0	0	0	0	0	0	0

Ординаты линии влияния моментов должны быть умножены на пролет  $l$ .



Продолжение табл. 16

## б) Три равных пролета

Груз $l$ в точке	Ординаты линии влияния											Поперечные силы		Опор- ная ре- акция $R_1$			
	Изгибающие моменты в точках											$Q_0 - Q_6$	$Q_6 - Q_0$				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	1,00000	0				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,1318	0,0967	0,0618	0,0267	-0,0088	-0,0432	-0,0842	-0,0252	-0,0162	0,7901	0,0540	0,2639					
2	0,0980	0,1960	0,1273	0,0585	-0,0102	-0,0790	-0,0625	-0,0461	-0,0296	0,5877	0,0987	0,5110					
3	0,0667	0,1333	0,2000	0,1000	0,0000	-0,1000	-0,0792	-0,0583	-0,0375	0,4000	0,1250	0,7250					
4	0,0391	0,0782	0,1174	0,1565	0,0289	-0,0987	-0,0782	-0,0576	-0,0370	0,2346	0,1234	0,8888					
5	0,0165	0,0329	0,0495	0,0659	0,0826	-0,0677	-0,0536	-0,0395	-0,0254	0,0990	0,0846	0,9856					
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000					
7	-0,0095	-0,0190	-0,0285	-0,0379	-0,0474	-0,0569	0,0872	0,0644	0,0418	-0,0569	0,8639	0,9208					
8	-0,0132	-0,0263	-0,0395	-0,0526	-0,0658	-0,0789	0,0364	0,1516	0,1002	-0,0789	0,6913	0,7702					
9	-0,0125	-0,0250	-0,0375	-0,0500	-0,0625	-0,0750	0,0083	0,0917	0,1750	-0,0750	0,5000	0,5750					
10	-0,0090	-0,0181	-0,0271	-0,0362	-0,0452	-0,0543	-0,0028	0,0487	0,1500	-0,0543	0,3087	0,3630					
11	-0,0044	-0,0088	-0,0131	-0,0175	-0,0219	-0,0263	-0,0036	0,0191	0,1500	-0,0263	0,1361	0,1624					
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
13	0,0028	0,0057	0,0085	0,0113	0,0141	0,0169	0,0028	-0,0113	0,0169	0,0169	-0,0846	-0,1015					
14	0,0041	0,0082	0,0123	0,0165	0,0206	0,0247	0,0041	-0,0165	0,0247	0,0247	-0,1234	-0,1481					
15	0,0042	0,0083	0,0125	0,0167	0,0208	0,0250	0,0042	-0,0167	0,0250	0,0250	-0,1250	-0,1500					
16	0,0033	0,0066	0,0099	0,0132	0,0165	0,0197	0,0033	-0,0132	0,0197	0,0197	-0,0987	-0,1184					
17	0,0018	0,0036	0,0054	0,0072	0,0090	0,0108	0,0018	-0,0072	0,0108	0,0108	-0,0540	-0,0648					
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					

Ординаты линии влияния моментов должны быть умножены на пролет  $l$ .

в) Четыре равных пролета

l в узле	Ординаты линии влияния												Поперечные силы				Опорные реакции	
	Изгибающие моменты в точках												Q <sub>0</sub> -Q <sub>0</sub>		Q <sub>0</sub> -Q <sub>12</sub>		R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Q <sub>0</sub> -Q <sub>0</sub>	Q <sub>0</sub> -Q <sub>12</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0			
1	0,1318	0,0966	0,0617	0,0266	-0,0084	-0,0434	-0,0843	-0,0251	-0,0159	-0,0068	0,0024	0,1116	0,0550	0,2651	-0,0695			
2	0,0979	0,1958	0,1271	0,0582	-0,0106	-0,0793	-0,0626	-0,0459	-0,0291	-0,0124	0,0044	0,5874	0,1005	0,5131	-0,1270			
3	0,0566	0,1332	0,1998	0,0977	-0,0004	-0,1004	-0,0792	-0,0368	-0,0156	0,0056	0,0268	0,3996	0,1272	0,7276	-0,1607			
4	0,0391	0,0781	0,1172	0,1562	+0,0285	-0,0992	-0,0782	-0,0573	-0,0364	0,0055	0,0265	0,2341	0,1257	0,8916	-0,1588			
5	0,0164	0,0328	0,0494	0,0657	+0,0823	-0,0681	-0,0637	-0,0393	-0,0249	-0,0106	0,0038	0,0986	0,0863	0,9877	-0,1090			
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	1,0000	0			
7	-0,0094	-0,0188	-0,0293	-0,0377	-0,0471	-0,0565	-0,0672	0,0640	0,0411	0,0179	-0,0051	-0,0565	0,8617	0,9182	0,1734			
8	-0,0130	-0,0260	-0,0390	-0,0520	-0,0650	-0,0780	-0,0935	0,1509	0,0987	0,0464	-0,0059	-0,0780	0,8865	0,7645	0,3862			
9	-0,0123	-0,0246	-0,0369	-0,0491	-0,0614	-0,0737	-0,0885	0,1097	0,1730	0,0885	-0,0041	-0,0737	0,4933	0,5670	0,6072			
10	-0,0098	-0,0176	-0,0265	-0,0365	-0,0441	-0,0529	-0,0629	0,0477	0,0981	0,1483	-0,0318	-0,0846	0,3016	0,3545	0,8042			
11	-0,0042	-0,0084	-0,0127	-0,0169	-0,0211	-0,0253	-0,0305	0,0183	0,0403	0,0620	+0,0840	-0,0610	0,1310	0,1563	0,9453			
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000			
13	0,0026	0,0051	0,0077	0,0102	0,0128	0,0153	0,0026	-0,0101	-0,0229	-0,0356	-0,0483	0,0153	-0,0763	-0,0916	0,9453			
14	0,0035	0,0071	0,0106	0,0141	0,0177	0,0212	0,0036	-0,0141	-0,0317	-0,0493	0,0670	0,0212	-0,1058	-0,1270	0,8042			
15	0,0034	0,0067	0,0101	0,0134	0,0168	0,0201	0,0034	-0,0134	-0,0302	-0,0469	0,0637	0,0201	-0,1005	-0,1205	0,6072			
16	0,0024	0,0049	0,0073	0,0097	0,0121	0,0145	0,0024	-0,0097	-0,0218	-0,0339	0,0461	0,0145	-0,0727	-0,0862	0,3862			
17	0,0012	0,0024	0,0035	0,0047	0,0059	0,0070	0,0012	-0,0047	-0,0106	-0,0164	0,0223	0,0070	-0,0351	-0,0421	0,1734			
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	-0,0008	-0,0015	-0,0024	-0,0030	-0,0038	-0,0045	-0,0003	0,0030	0,0068	0,0106	0,0144	-0,0045	0,0227	0,0272	-0,1090			
20	-0,0011	-0,0022	-0,0033	-0,0044	-0,0055	-0,0066	-0,0011	0,0044	0,0099	0,0154	0,0209	-0,0066	0,0331	0,0397	-0,1588			
21	-0,0011	-0,0022	-0,0034	-0,0045	-0,0056	-0,0067	-0,0011	0,0045	0,0101	0,0155	0,0212	-0,0067	0,0385	0,0402	-0,1607			
22	-0,0009	-0,0018	-0,0028	-0,0035	-0,0044	-0,0053	-0,0009	0,0035	0,0079	0,0123	0,0168	-0,0058	0,0285	0,0323	-0,1270			
23	-0,0005	-0,0010	-0,0015	-0,0019	-0,0024	-0,0029	-0,0005	0,0019	0,0043	0,0068	0,0092	-0,0029	0,0145	0,0174	-0,0695			
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Ординаты линии влияния моментов должны быть умножены на пролет l.

Ординаты линий влияния для однопролетных статически неопределимых балок

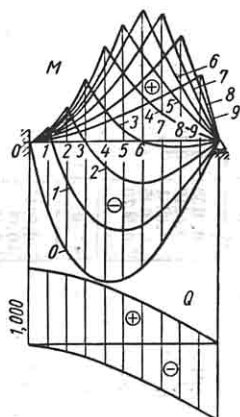


Схема А

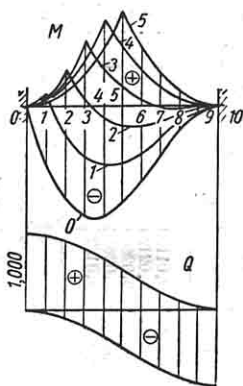


Схема Б

Однопролетная балка с одним защемленным концом (схема А)  
а) Изгибающие моменты

Сечение $\frac{x}{l}$	Положение груза $\frac{x}{l}$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,0	-0,0855	-0,144	-0,1785	-0,192	-0,1875	-0,168	-0,1365	-0,096	-0,0495
0,1	+0,0131	-0,0495	-0,0907	-0,1128	-0,1188	-0,1112	-0,0925	-0,0665	-0,0345
0,2	+0,0116	+0,045	-0,0028	-0,0336	-0,050	-0,0545	-0,0490	-0,0368	-0,0196
0,3	+0,0102	+0,039	+0,085	+0,0457	+0,0188	+0,0025	-0,0055	-0,0072	-0,0046
0,4	+0,0087	+0,0335	+0,073	+0,1249	+0,0875	+0,0592	+0,0381	+0,0224	+0,0103
0,5	+0,0073	+0,0280	+0,0608	+0,104	+0,1563	+0,116	+0,0818	+0,0520	+0,0252
0,6	+0,0058	+0,0224	+0,0485	+0,0832	+0,125	+0,1728	+0,1254	+0,0816	+0,0302
0,7	+0,0044	+0,0168	+0,0365	+0,0624	+0,0937	+0,1296	+0,1691	+0,1112	+0,0552
0,8	+0,0029	+0,0112	+0,0243	+0,0416	+0,0625	+0,0864	+0,1127	+0,1408	+0,0701
0,9	+0,0014	+0,0056	+0,0121	+0,0208	+0,0312	+0,0432	+0,0564	+0,0704	+0,0850

Ординаты линии влияния моментов должны быть умножены на пролет  $l$ .

## б) Поперечные силы

Положение груза $\frac{x}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Верхняя линия	1,000	0,986	0,944	0,879	0,792	0,688	0,568	0,436	0,296	0,149	0
Нижняя линия	0	-0,014	-0,056	-0,121	-0,208	-0,312	-0,432	-0,564	-0,704	-0,851	-1,00

Для поперечной силы левее сечения следует взять ординату нижней линии, для поперечной силы правее сечения — ординату верхней линии.



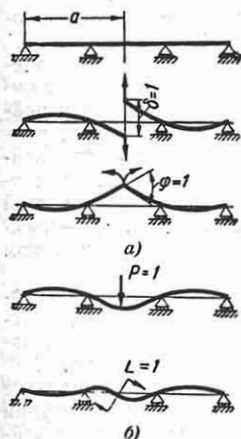
Однопролетная балка с двумя зашпеленными концами (схема Б)									
а) Изгибающие моменты									
Сечение $\frac{x}{l}$	Положение груза $\frac{x}{l}$								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,0	-0,081	-0,128	-0,147	-0,144	-0,125	-0,096	-0,063	-0,032	-0,009
0,1	+0,0162	-0,0384	-0,0686	-0,0792	-0,075	-0,0608	-0,0414	-0,0216	-0,0062
0,2	+0,0124	+0,0512	+0,0098	+0,0144	+0,0250	-0,0256	-0,0198	-0,0112	-0,0034
0,3	+0,0096	+0,0408	+0,0882	+0,0504	+0,0250	+0,0096	+0,0018	-0,0008	-0,0006
0,4	+0,0078	+0,0304	+0,0666	+0,1152	+0,0750	+0,0448	+0,0234	+0,0093	+0,0022
0,5	+0,005	+0,020	+0,045	+0,080	+0,125	+0,080	+0,045	+0,020	+0,005

Ординаты линии влияния моментов должны быть умножены на пролет  $l$ .

б) Поперечные силы											
Положение груза $\frac{x}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Верхняя линия	1,000	0,972	0,896	0,784	0,648	0,500	0,352	0,216	0,104	0,028	0
Нижняя линия	0	-0,028	-0,104	-0,216	-0,352	-0,500	-0,648	-0,784	-0,896	-0,972	-1,000

Для поперечной силы левее сечения следует взять ординату нижней линии, для поперечной силы правее сечения — ординату верхней линии.

Указанное перемещение есть обобщенное перемещение, отвечающее обобщенной силе, линия влияния которой определяется, т. е. поперечной силе в точке  $x = a$ ; вся упругая линия в целом есть искомая линия влияния.



Фиг. 45.

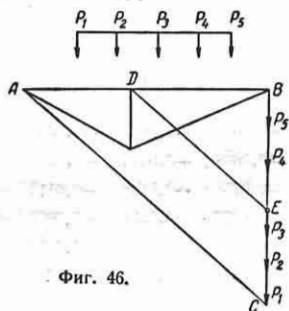
Если требуется найти линию влияния для опорного момента на третьей опоре в той же балке, то нужно ввести шарнир над этой опорой балки и повернуть концы балки на угол, равный единице;

упругая линия представит собой линию влияния левого опорного момента.

Чтобы получить линию влияния для прогиба или угла поворота сечения в какой-нибудь точке (статически определенной или статически неопределимой балки), необходимо в этой точке приложить силу или соответственно пару, равную единице. Полученная упругая линия представит собой линию влияния для прогиба или угла поворота в данной точке (фиг. 45, б).

Невыгоднейшее положение системы грузов (линия влияния — треугольник): 1) По крайней мере один из грузов (называемый *критическим*) находится над вершиной линии влияния. 2) Критический груз выбирается по следующему признаку: если он расположен слева от вершины, то средняя погонная нагрузка левого участка превышает правую, а при расположении его справа от вершины — наоборот. 3) Равномерно распределенная нагрузка располагается над всей площадью линии влияния одного знака. Графический прием определения критического груза для треугольной линии влияния показан на фиг. 46:

откладываются от точки  $B$  все силы  $P_1, P_2, P_3, \dots$  в порядке их расположения от  $B$  к  $A$ , соединяются  $A$  и  $C$  и проводится  $DE \parallel AC$ ; точка  $E$  располагается на критическом грузе.



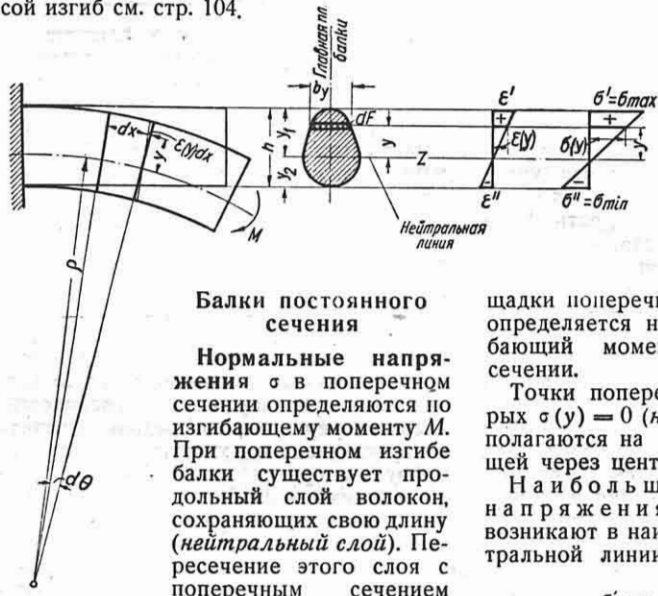
Фиг. 46.

При криволинейной линии влияния определение наивыгоднейшего положения нагрузки производится путем проб.

### НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКАХ И РАСЧЕТ ИХ НА ПРОЧНОСТЬ

Определение напряжений при пластических деформациях см. гл. IX. Брус большой кривизны (при отношении радиуса кривизны  $\rho$  оси бруса к высоте  $h$  сечения бруса  $\frac{\rho}{h} < 5$ ) см. стр. 112.

Тонкостенные балки см. гл. IV. Косой изгиб см. стр. 104.



#### Балки постоянного сечения

Нормальные напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении определяются по изгибающему моменту  $M$ . При поперечном изгибе балки существует продольный слой волокон, сохраняющих свою длину (нейтральный слой). Пересечение этого слоя с поперечным сечением балки образует ней-

тральную линию, которая отделяет в сечении растянутую часть от сжатой. Размеры сечений, перпендикулярного и параллельного нейтральной линии, называются соответственно высотой и шириной сечения.

Основные принимаемые допущения:

1) поперечное сечение остается плоским и перпендикулярным к оси балки при ее изгибе (*гипотеза плоских сечений*);

2) напряжения  $\sigma$  пропорциональны относительной деформации  $\epsilon$ .

Считается, что главная центральная ось поперечного сечения лежит в плоскости действия изгибающего момента (*прямой изгиб*).

Относительная деформация  $\epsilon(y)$  волокна балки (фиг. 47)

$$\epsilon(y) = \frac{d\theta}{dx} y = \frac{1}{\rho} y, \quad (84)$$

где  $dx$  — бесконечно малое расстояние между двумя поперечными сечениями, образующими при изгибе между собой угол  $d\theta$ ;  $\rho$  — радиус кривизны оси балки при деформации.

Нормальные напряжения  $\sigma(y)$  в поперечном сечении при постоянном  $E$

$$\sigma(y) = E\epsilon(y) = E \frac{1}{\rho} y \quad (85)$$

или

$$\sigma(y) = \frac{M}{J} y, \quad (86)$$

где  $J = \int_F y^2 dF$  — мо-

мент инерции поперечного сечения в  $\text{см}^4$  по отношению к нейтральной линии;  $y$  — расстояние от нейтральной линии

площадки поперечного сечения, для которой определяется напряженне  $\sigma(y)$ ;  $M$  — изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

Точки поперечного сечения, в которых  $\sigma(y) = 0$  (нейтральная линия), располагаются на прямой  $y = 0$ , проходящей через центр тяжести сечения.

Наибольшие нормальные напряжения в поперечном сечении возникают в наиболее удаленных от нейтральной линии точках сечения:

$$\sigma^+ = \frac{M}{W_1}; \quad \sigma^- = \frac{M}{W_2} \quad (87)$$

(при  $y_1 \neq y_2$ );

$$\sigma' = \sigma'' = \sigma = \frac{M}{W}$$

(при  $y_1 = y_2 = \frac{h}{2}$ ).

Моменты сопротивления сечения в  $\text{см}^3$  для растянутого и для сжатого волокон

$$W_1 = \frac{J}{y_1}; \quad W_2 = \frac{J}{y_2}$$

(при  $y_1 \neq y_2$ );

$$W_1 = W_2 = W = \frac{J}{\frac{h}{2}} \quad (87a)$$

(при  $y_1 = y_2 = \frac{h}{2}$ ).

Подсчет моментов инерции и моментов сопротивления сечений см. стр. 34.

Учет дополнительных нормальных напряжений, возникающих в тонкостенных балках в связи с кручением, см. гл. IV.

Касательные напряжения  $\tau$  в поперечном сечении определяются по поперечной силе  $Q$ . Приводимые ниже формулы составлены для случая, когда

касательные напряжения  $\tau(y)$  по площадке, совпадающей с поперечным сечением, и  $\tau'(y) = \tau(y)$  по площадке, параллельной нейтральному слою (закон парности касательных напряжений).

При изгибе напряжения  $\tau$  распределяются в поперечном сечении неравномерно и имеют наибольшую величину на нейтральной линии. Сумма всех касательных усилий в поперечном сечении приводится к поперечной силе  $Q$ , т. е.

$$\int_F \tau dF = Q.$$

Сечение, составленное из прямоугольников со сторонами, параллельными нейтральной оси. Напряжения  $\tau(y)$  на расстоянии  $y$  от нейтральной оси параллельны  $Q$  и постоянны по ширине балки:

$$\tau(y) = \tau'(y) = \frac{QS}{Jb} \quad (88)$$

(формула Журавского).

Здесь  $J$  — момент инерции всего сечения по отношению к нейтральной линии;  $S = F_0 y_0$  — статический момент по отношению к нейтральной линии части сечения, отсекаемой прямой, параллельной нейтральной линии и проведенной от нее на расстоянии  $y$ ;  $b$  — ширина сечений балки на расстоянии  $y$  от нейтральной линии.

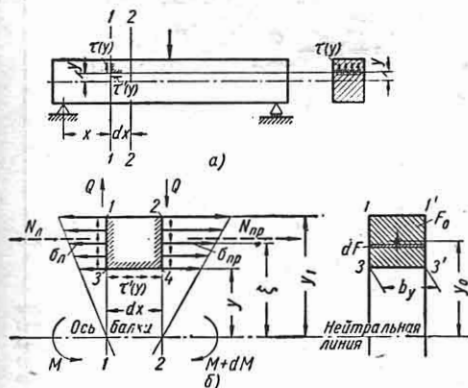
Сечение, ограниченное криволинейными контуром (или наклонными линиями). Касательное напряжение у контура направлено вдоль контура; приближенно для сечений выпуклой формы

$$\tau(\theta) = \frac{QS}{Jb \cos \theta}, \quad (88a)$$

где  $\theta$  — угол наклона по отношению к направлению  $Q$  касательной к контуру в рассматриваемой точке;  $b$  — ширина сечения в месте определения  $\tau(\theta)$ .

Распределение касательных напряжений при изгибе для основных форм сечений приведено в табл. 18.

Распределение касательных напряжений в сечении при изгибе может быть найдено экспериментально по методу аналогии — см. [4].

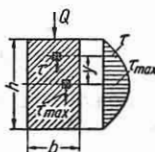


Фиг. 48.

поперечная сила совпадает с осью симметрии сечения; если поперечная сила действует в направлении главной оси сечения, не являющейся осью симметрии сечения, то приводимые ниже формулы используются как приближенные. В каждой точке, расположенной на расстоянии  $y$  от оси (фиг. 48, а и б), возникают

**Касательные напряжения в поперечном сечении при изгибе**  
 $Q$  — поперечная сила по оси, проходящей через центр тяжести;  $\tau_{\max}$  — наибольшее касательное напряжение в сечении;  $F$  — площадь сечения;  $\mu$  — коэффициент Пуассона

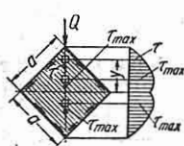
1. Прямоугольник;  $Q$  в направлении стороны  $h$



$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right];$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh}$$

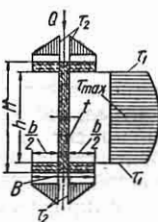
2. Квадрат на ребро;  $Q$  — в направлении диагонали



$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{a^2} Q \left[ 1 + \frac{2}{a} y - 4 \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right];$$

$$\tau_{\max} = 1,77 \frac{Q}{a^2}$$

3. Двутавр;  $Q$  — в направлении оси стенки



По стенке

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q}{t} \times \frac{BH^2 - bh^2}{BH^3 - bh^3}.$$

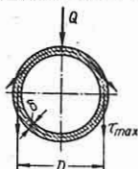
$$\tau_1 = 1,5 \frac{Q}{t} \times$$

$$\times \frac{B(H^2 - h^2)}{BH^3 - bh^3}.$$

По поясам

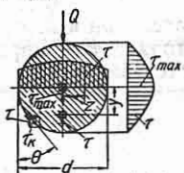
$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{3}{2} Q \frac{b(H+h)}{BH^3 - bh^3}$$

4. Тонкостенное кольцо



$$\tau_{\max} = 2 \frac{Q}{\pi D \delta}$$

5. Круг



Наибольшее напряжение (в центре; при  $\mu \approx 0,3$ )

$$\tau_{\max} = \frac{6,1 Q}{\pi d^2};$$

на нейтральной линии в расстоянии  $x$  от центра

$$\tau = \frac{2(3+2\mu)Q}{(1+\mu)\pi d^2} \left( d^2 - \frac{4(1-2\mu)}{3+2\mu} x^2 \right)$$

При  $\mu = 0,3$ :

среднее на нейтральной линии

$$\tau_{cp} = \frac{16Q}{3\pi d^2};$$

на окружности под углом  $\theta$  (касательно к контуру)

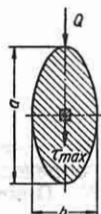
$$\tau_k = \frac{4,2Q}{\pi d^2} \sqrt{1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2};$$

на диаметре, перпендикулярном к нейтральной линии,

$$\tau = \frac{6Q}{\pi d^2} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{d} \right)^2 \right]$$

6. Эллипс;  $Q$  — в направлении оси  $a$ ;  $\mu = 0,3$   
 Наибольшее напряжение

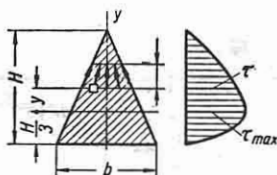
$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{9,0Q}{\pi ab} \left( 1 - \frac{a^2 + 0,23b^2}{3a^2 + b^2} \right)$$



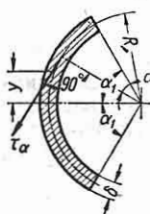
7. Равнобедренный треугольник; поперечная сила по оси  $y$

$$\tau = 1,5 \frac{Q}{F \cos \alpha} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{H} \right)^2 \right];$$

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q}{F}$$



8. Часть кольца



$$\tau_a = \frac{QS}{J\delta},$$

где

$$S = \delta r^2 [\cos(\alpha, -\alpha) - \cos \alpha_1];$$

$$J = \delta r^3 \left( \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right);$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{2r\delta\alpha_1} \frac{1 - \cos \alpha_1}{1 - \frac{\sin 2\alpha_1}{2\alpha_1}}$$

**Пример 1.** Касательные напряжения  $\tau$  по площадке  $mn$  между отверстиями в прокатном двутавре (фиг. 49, а) находятся на основании условия равновесия элемента  $12mn$  балки:

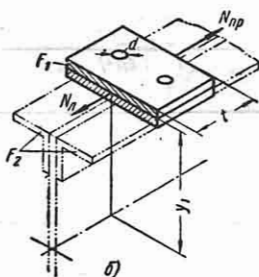
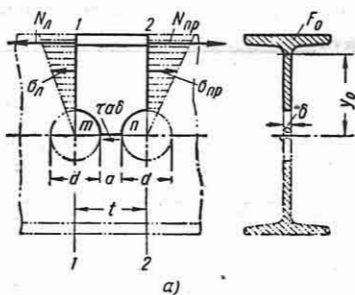
$$\tau a \delta = N_{np} - N_A = \int_{F_0} \sigma_{np} dF - \int_{F_0} \sigma_A dF = \frac{Q t}{J} F_0 y_0.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{Q t}{J} \cdot \frac{F_0 y_0}{a \delta}.$$

Здесь  $F_0$  и  $y_0$  — площадь и координата центра тяжести части сечения, расположенного выше  $mn$ .

**Пример 2.** Напряжения  $\tau$  среза в поясных заклепках балки (фиг. 49, б).  $J$  — момент инерции сечения балки;  $t$  — шаг поясных заклепок диа-



Фиг. 49.

метром  $d$ ;  $F_1$  и  $F_2$  — площадь соответственно листов и угольников одного пояса;  $y_1$  и  $y_2$  — расстояния от нейтральной линии до центра тяжести сечения листов и до центра тяжести сечения пояса (листов и угольников). Для двухрядных вертикальных односторонних заклепок, прикрепляющих листы пояса к угольникам,

$$2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_A = N_{np} - N_A = \frac{Q t}{J} F_1 y_1;$$

для горизонтальных двухсрезовых заклепок (на фигуре не видны), прикрепляющих пояс к стенке,

$$2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_n = \frac{Q t}{J} (F_1 + F_2) y_0.$$

Здесь  $\tau_A$  и  $\tau_n$  — касательные напряжения в заклепках.

Главные напряжения и их направления определяются по нормальным и касательным напряжениям в поперечном сечении по формулам табл. 19. Направления главных напряжений для различных точек внутри контура балки изображаются с помощью траекторий напряжений (см. стр. 19). Приведенные в табл. 19 зависимости достаточно точны для участков балок, удаленных от зон концентрации напряжений и местных нагузков.

Влияние на напряженное состояние балки концентрации напряжений см. гл. XIII.

**Расчет на прочность** Проверку на устойчивость см. гл. X.

1. Проверка прочности по наибольшему нормальному напряжению в крайних волокнах:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]_{\text{изг}}; \quad (89a)$$

здесь  $[\sigma]_{\text{изг}}$  — допускаемое напряжение на изгиб;  $M$  — изгибающий момент, определяемый по нагрузке с помощью эпюры моментов;  $W$  — момент сопротивления, определяемый по форме и размерам сечения.

В случае хрупкого материала при статической нагрузке

$$\frac{M}{W_1} \leq [\sigma]_{\text{раст}} \text{ и } \frac{M}{W_2} \leq [\sigma]_{\text{сж}},$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — моменты сопротивления для определения напряжений в крайних, соответственно, растянутых и сжатых волокнах;  $[\sigma]_{\text{раст}}$  и  $[\sigma]_{\text{сж}}$  — допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Условие прочности по касательному напряжению

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (89б)$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение;  $\tau_{\max}$  находится по поперечной силе с помощью формул табл. 18 и 19.

При полной проверке прочности для любого элемента балки, расположенного в поперечном сечении на расстоянии  $y$  от нейтральной линии, находится приведенное напряжение

$$\sigma_{np} = \frac{\sigma(y)}{2} \pm \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\sigma(y)]^2 + 4[\tau(y)]^2} \leq [\sigma]_{\text{изг}} \quad (90a)$$

(по теории прочности наибольших нормальных напряжений);

$$\sigma_{np} = \sqrt{[\sigma(y)]^2 + 4[\tau(y)]^2} \leq [\sigma]_u \quad (906)$$

(по теории прочности наибольших касательных напряжений).

В приведенных формулах  $\sigma(y)$  и  $\tau(y)$  — нормальное и касательное напряжения по площадке поперечного сечения рассматриваемого элемента балки. Формулы

для приведенных напряжений по другим теориям прочности см. табл. 25 и гл. XIV.

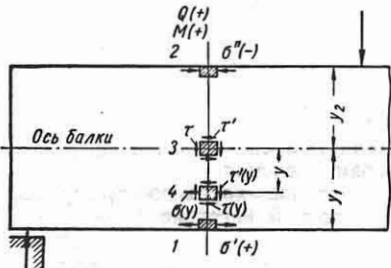
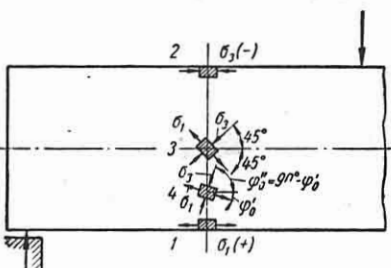
Полная проверка прочности необходима в точках, где  $\sigma_y$  и  $\tau$  имеют одновременно большую величину, например для двутавра в месте резкого изменения ширины сечения.

2. Определение размеров сечения. По изгибающему моменту в рассматриваемом сечении  $M$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]_u$  на изгиб

Таблица 19

## Напряженное состояние балки

$\sigma(y)$  и  $\tau(y)$  — нормальное и касательное напряжения в поперечном сечении балки на расстоянии  $u$  от нейтральной линии;  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  — главные напряжения по площадкам, перпендикулярным к плоскости изгиба балки

<p>Напряжения по площадке поперечного сечения и параллельно нейтральному слою</p> 	<p>Главные площадки и главные напряжения</p> 	
Точки и тип напряженного состояния	Напряжения по площадкам поперечного сечения и параллельным нейтральному слою	Главные напряжения и наклон главных площадок
Точки 1 и 2, наиболее удаленные от нейтральной линии. Линейное напряженное состояние	$\sigma' = \frac{M}{W_1}; \quad \sigma'' = \frac{M}{W_2};$ $W_1 = \frac{J}{y_1}; \quad W_2 = \frac{J}{y_2}$	$\sigma_1 = \sigma'; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ (точка 1);}$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \sigma'' \text{ (точка 2).}$ <p>Главные площадки: в поперечном сечении, параллельно нейтральному слою, перпендикулярно к первым двум</p>
Точка 3 (на нейтральной линии). Чистый сдвиг	$\sigma = 0; \quad \tau = \tau' = \frac{QS}{Jb}$ <p>(см. табл. 18)</p>	$\sigma_1 = +\tau; \quad \sigma_2 = 0;$ $\sigma_3 = -\tau; \quad \varphi_0 = \pm 45^\circ,$ <p>третья главная площадка совпадает с плоскостью изгиба</p>
Точка 4 (общий случай). Плоское напряженное состояние	$\sigma(y) = \frac{M}{J} y;$ $\tau(y) = \tau'(y) = \frac{QS_y}{Jb_y}$ <p>(см. табл. 18)</p>	$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma(y)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2(y) + 4\tau^2(y)};$ $\sigma_2 = 0 \text{ (по площадке в плоскости изгиба);}$ $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau(y)}{\sigma(y)}.$ <p>Наибольшие касательные напряжения</p> $\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2(y) + 4\tau^2(y)}$

подсчитывается величина момента сопротивления:

$$W = \frac{M}{[\sigma]_u}$$

По подсчитанной величине  $W$  для выбранной формы сечения находятся его размеры с помощью табл. 5—9 или путем подбора.

*Частные случаи*

*Сечение круглое сплошное.* Диаметр сечения

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M}{[\sigma]_u}} \approx 2,17 \sqrt[3]{\frac{M}{[\sigma]_u}} \quad (91a)$$

*Сечение круглое полое.* Наружный диаметр сечения

$$D = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M}{(1-\alpha^4)[\sigma]_u}} \approx 2,17 \sqrt[3]{\frac{M}{(1-\alpha^4)[\sigma]_u}} \quad (91б)$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$  — отношение внутреннего диаметра к наружному.

*Сечение прямоугольное.* Высота сечения (размер сечения в плоскости изгиба)

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M}{\alpha[\sigma]_u}} \approx 1,82 \sqrt[3]{\frac{M}{\alpha[\sigma]_u}} \quad (91в)$$

где  $\alpha = \frac{b}{h}$  — отношение ширины сечения к высоте.

Подбор сечений клепаных и сварных балок см. т. 4, гл. XIX.

3. Определение допускаемой нагрузки на балку по напряжениям в крайних волокнах:

$$M_{доп} = W [\sigma]_u \quad (92)$$

По  $M_{доп}$  с помощью эпюры  $M$  находится величина допускаемой нагрузки.

4. Запас прочности по опасному сечению

$$n = \frac{M_{пред}}{M} \quad (93)$$

где  $M_{пред}$  — предельный, выдерживаемый балкой (см. гл. IX и XIV), и  $M$  — действующий изгибающий момент в данном сечении.

Определение допускаемых напряжений  $[\sigma]$  и  $[\tau]$  и необходимых запасов

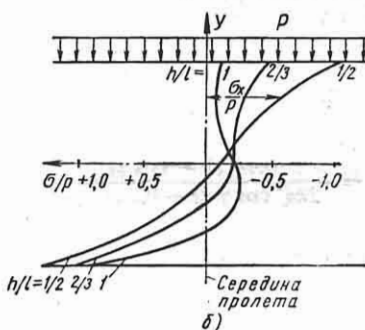
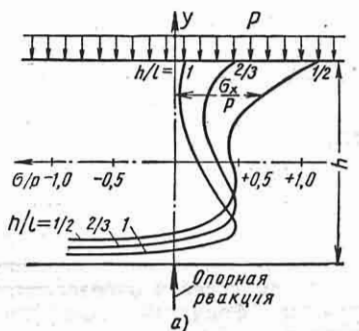
прочности  $n$ , а также более полные данные по расчету на прочность см. гл. XIV.

**Балка со значительной высотой сечения**

( $h > \frac{l}{4}$ ;  $h$  — высота сечений,  $l$  — пролет).

Так как гипотеза плоских сечений при  $h > \frac{l}{4}$  нарушается, то формулы (84) — (88) могут быть использованы лишь как грубо приближенные для определения значений напряжений. Величины напряжений могут быть найдены методами теории упругости [4] или путем применения экспериментальных методов (см. гл. XV).

Для балки прямоугольного сечения со сплошной равномерной нагрузкой  $p$  при  $\frac{h}{l} = 1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}$  и числе опор  $n > 5$  распределение напряжений  $\sigma$  в поперечном сечении в сред-



Фиг. 50.

ней части длины балки дано на фиг. 50: а — в сечении над опорой, б — в середине пролета. При  $h$  значительно большем  $l$  напряжение  $\sigma$  в сечении над опорой в крайних со стороны опертго края (нижних) волокнах балки приблизительно равно нагрузке  $p$ , отнесенной к ширине балки.

### Балка переменного сечения

Приведенные ниже формулы могут быть использованы как приближенные. Более точно и для различных очертаний контура детали и отверстий в ней напряжения находятся экспериментальными методами (см. гл. XV).

Балка в виде клина. В балке по фиг. 51, а, имеющей форму клина постоянной ширины  $b$ , одно главное напряжение при нагрузке силой  $P$  на конце направлено по радиусу  $r$ , а второе равняется нулю:

$$\sigma_r = - \frac{2}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{P \cos \theta}{br} \quad (94)$$

Наибольшие нормальные и касательные напряжения при  $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \beta \frac{M}{J} \frac{h}{2};$$

$$\tau_{\max, \min} = \gamma \frac{P}{F}, \quad (94a)$$

где  $J = \frac{bh^3}{12}$ ;  $F = bh$ ;  $M = Px$  и коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  берутся в зависимости от угла  $\alpha$

$\alpha$ . . . . .	5°	10°	15°	20°
$\beta$ . . . . .	1,00	0,97	0,95	0,91
$\gamma$ . . . . .	3,00	2,91	2,84	2,72

**Балка конической формы.** В балке по фиг. 51, б наибольшие напряжения в поперечном сечении определяются по следующим формулам (коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ):

а) от сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в вершине конуса:

$$\sigma_{\max} = \frac{2,6P \sin \gamma (1 + \cos \gamma)}{\pi a^2 (1 - \cos \gamma) (2 + 0,6 \cos \gamma)} \quad (95a)$$

(в верхних и нижних волокнах);

$$\tau_{\max} = \frac{0,4P (1 + \cos \gamma)}{2\pi a^2 \cos \gamma (2 + 0,6 \cos \gamma)} \quad (95б)$$

(в центре сечения);

б) от сосредоточенного момента  $L$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{3L (1 + \cos \gamma)^2 (8,6 \cos \gamma - 0,8)}{\pi a^3 [6 (1 - \cos^2 \gamma) + 2,6 \cos \gamma (2 + \cos \gamma)^2]} \quad (95в)$$

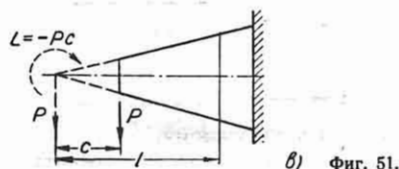
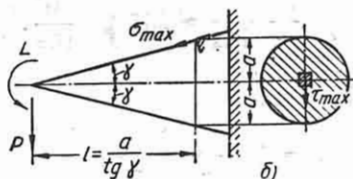
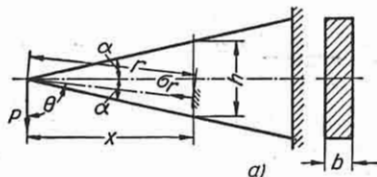
(в верхних и нижних волокнах);

$$\tau_{\max} = \frac{9L (1 + \cos \gamma)^2 \sin \gamma}{\pi a^3 \cos^3 \gamma [6 (1 - \cos^2 \gamma) + 2,6 \cos \gamma (2 + \cos \gamma)^2]} \quad (95г)$$

(в центре сечения).

Приведенные формулы применимы для сечений, удаленных от вершины.

Для случая нагрузки, указанной на фиг. 51, в, напряжения находятся по приведенным выше формулам путем сочетания нагрузок  $P$  и  $L = -Pc$ .



б) Фиг. 51.

При наличии малого круглого отверстия вдоль оси вала напряжения  $\tau_{\max}$  найденные по формулам (95б) и (95г), должны быть удвоены.

Балка равного сопротивления имеет во всех поперечных сечениях одинаковую величину наибольшего напряжения в крайних волокнах, равную допускаемому напряжению  $[\sigma]_u$ . Условие

$$W = \frac{M(x)}{[\sigma]_u} \quad (96)$$

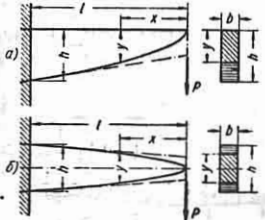
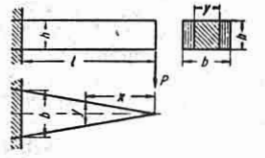
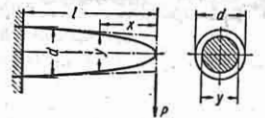
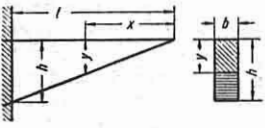
определяет  $W$ ; по величине  $W$  находят размеры для каждого поперечного сечения балки;  $M(x)$  — изгибающий момент в сечениях при действии заданной постоянной нагрузки. При наличии подвижной нагрузки (см. стр. 78)  $M(x)$  в формуле (96)

берется равным наибольшему изгибающему моменту в сечении при наиболее неблагоприятном положении подвижных грузов для этого сечения. Основные случаи см. табл. 20.



Таблица 20

**Балки равного сопротивления изгибу**  
 $[\sigma]_u$  — допускаемые напряжения на изгиб;  $f$  — стрела прогиба

Продольный разрез и поперечное сечение балки	Изменение поперечного сечения по длине балки	Форма контура продольного разреза балки	Формула для расчета размеров поперечных сечений и стрелы прогиба
<b>I. Балка закреплена одним концом. Сосредоточенная сила <math>P</math> на конце балки</b>			
	<p>Прямоугольное постоянной ширины <math>b</math> и переменной высоты <math>y</math></p>	<p>а) Верхнее очертание — прямая, нижнее — квадратная парабола                  б) Квадратная парабола</p>	$y = \frac{6P}{b[\sigma]_u} x;$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{b[\sigma]_u}};$ $f = \frac{8P}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3$
 <p>Упругая линия — дуга круга</p>	<p>Прямоугольное постоянной высоты <math>h</math> и переменной ширины <math>y</math></p>	<p>Прямые линии</p>	$y = \frac{6P}{h^2[\sigma]_u} x;$ $b = \frac{6Pl}{h^2[\sigma]_u};$ $f = \frac{6P}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3$
	<p>Круглое диаметром <math>y</math></p>	<p>Кубическая парабола</p>	$y^3 = \frac{32P}{\pi[\sigma]_u} x;$ $d = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi[\sigma]_u}}$
<b>II. Балка закреплена одним концом. Нагрузка <math>p</math>, равномерно распределенная по длине балки</b>			
 <p>Полная нагрузка <math>pl</math></p>	<p>Прямоугольное постоянной ширины и переменной высоты <math>y</math></p>	<p>Прямые линии</p>	$y = x \sqrt{\frac{3p}{b[\sigma]_u}};$ $h = l \sqrt{\frac{3p}{b[\sigma]_u}}$

Наименьший размер сечения у концов балки, где изгибающие моменты приближаются к нулю, определяется из условия прочности по касательным напряжениям:

$$bh = \frac{3Q_{\max}}{2[\tau]_{cp}} \quad (96a)$$

(балка прямоугольного сечения с размерами  $b$  и  $h$ );

$$d = 4 \sqrt{\frac{Q_{\max}}{3\pi[\tau]_{cp}}} \quad (66b)$$

(балка круглого сечения диаметром  $d$ ).

Здесь  $Q_{\max}$  — наибольшая поперечная сила у концов;  $[\tau]_{cp}$  — допустимое напряжение на срез.

**Балки со ступенчатым изменением сечений.** Вместо балок равного сопротивления практически применяются балки со ступенчатым изменением сечения. Для получения ступенчатого вала намечается

между диаметром  $d_0 = 4 \sqrt{\frac{Q_{\max}}{3\pi [\tau]_{cp}}}$   
и наибольшим  $d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi [\sigma]_{\mu}}}$

несколько промежуточных диаметров  $d_1, d_2, \dots, d_{\max}$  и вычисляются соответствующие диаметрам моменты сопротивления

$$W_0 = \frac{\pi d_0^3}{32};$$

$$W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32}; \dots; W_{\max} = \frac{\pi d_{\max}^3}{32}.$$

Произведение этих моментов сопротивления на допустимое напряжение  $[\sigma]_{\mu}$  дает величину допустимого момента для каждого участка вала. На эпюре моментов проводится ряд горизонтальных линий с ординатами, равными  $W_0 [\sigma]_{\mu}, W_1 [\sigma]_{\mu}, \dots, W_{\max} [\sigma]_{\mu}$ ; точки пересечения этих линий с эпюрой моментов определяют требуемые положение и длины участков вала диаметрами  $d_0, d_1, \dots, d_{\max}$ .

Аналогично устанавливаются места обрывов листов клепаной и сварной балок (см. т. 4, гл. XIX).

*Пример.* Вал переменного сечения:  $l=120$  см;  $a=70$  см;  $b=50$  см;  $P=5000$  кг;  $[\sigma]_{\mu} = 400$  кг/см<sup>2</sup>;  $[\tau]_{cp} = 250$  кг/см<sup>2</sup> (фиг. 52);

$$A = \frac{5000 \cdot 70}{120} = 2100 \text{ кг}; \quad B = \frac{5000 \cdot 70}{120} = 2900 \text{ кг};$$

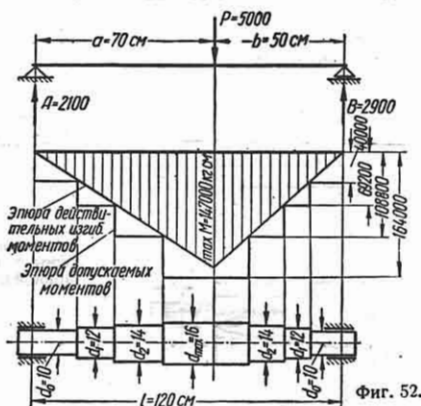
$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2100 \cdot 70}{\pi \cdot 400}} = 15,5 \approx 16 \text{ см};$$

$$d_0 = 4 \sqrt{\frac{2900}{3\pi \cdot 250}} = 4,5 \text{ см}.$$

Принимая из условия нагревания диаметры цапф равными 10 см, можно диаметры для участков вала взять равными  $d_0 = 10$  см;  $d_1 = 12$  см;  $d_2 = 14$  см;  $d_{\max} = 16$  см.

Для каждого из этих диаметров находят величины  $W [\sigma]_{\mu} = M_{\text{доп}}$  и проводятся горизонтальные на эпюре изгибающих моментов. Округлением полу-

ченных длин участков окончательно устанавливается форма вала. Эпюра допустимых моментов  $M_{\text{доп}}$  не должна пересекать эпюру моментов  $M$  от нагрузки.



Фиг. 52.

### Балка из разнородных материалов

Разнородные элементы, из которых составлена балка, должны быть соединены так, чтобы обеспечивалась их совместная работа. В таком случае поперечные сечения балки при чистом изгибе остаются плоскими. В приводимых формулах предполагается, что плоскость симметрии сечения совпадает с плоскостью действия изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ . Сечение балки из разнородных материалов приводится к сечению однородной балки путем умножения площади каждой работающей части сечения на отношение модуля продольной упругости ее материала к модулю упругости, выбираемому за основной.

Балка из разнородных материалов, расположенных слоями. Обозначаются:  $F$  — площадь  $i$ -й части поперечного сечения, имеющей материал с модулем продольной упругости  $E_i$ ;  $S_i$  и  $J_i$  — статический момент и момент инерции ее по отношению к нейтральной линии;  $E_y$  — модуль упругости для материала части балки, расположенной на расстоянии  $y$  от нейтральной линии;  $b_y$  — ширина сечения на расстоянии  $y$ .

При работе всех частей балки в пределах пропорциональности координата центра тяжести приведенного сечения, через который проходит нейтральная линия,

$$y_0 = \frac{\sum E_i F_i y}{\sum E_i F_i}.$$

Нормальные и касательные напряжения в сечении на расстоянии  $y$  от нейтральной линии.

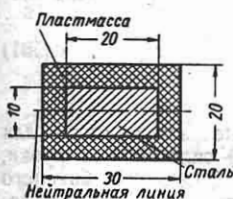
$$\sigma(y) = \frac{MEy}{\sum E_i J_i} y;$$

$$\tau(y) = \frac{Q \sum E_i S_i \text{ част. п.л.}}{b_y \sum E_i J_i} \quad (97)$$

Суммы составляются по всем  $i$  площадкам, кроме величины  $\sum E_i \cdot S_i \text{ част. п.л.}$ , которая подсчитывается для части сечения, расположенной выше (или ниже) слоя балки, находящегося на расстоянии  $y$ . Если сечение не имеет плоскости симметрии, то определяются главные оси приведенного сечения и находятся напряжения по правилам расчета на косой изгиб.

Приведенные формулы применимы и для балок из одного материала, имеющего различные модули упругости на растяжение и сжатие.

*Пример.* Для сечения балки из пластмассы, армированной стальным прутком (фиг. 53), определить изгибающий момент  $M$  так, чтобы напряжения не превосходили предела пропорциональности.



Фиг. 53.

Для пластмассы  $E_{ст} = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$   
 $E_{\text{пластмассы}} = 6 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2$  и пределы пропорциональности  $\sigma_{пл} = 3000 \text{ кг/см}^2$  (сталь) и  $\sigma_{пл} = 300 \text{ кг/см}^2$  (пластмасса).

Моменты инерции по отношению к нейтральной линии: стальной части  $J_{ст} = 0,167 \text{ см}^4$ , пластмассы  $J_{\text{пластмассы}} = 1,833 \text{ см}^4$ .

Полный изгибающий момент при напряжении, равном пределу пропорциональности для стальной части

$$M_{ст} = \frac{3000(2 \cdot 10^8 \cdot 0,167 + 6 \cdot 10^4 \cdot 1,833)}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,5} = 1330 \text{ кгсм};$$

для части из пластмассы

$$M_{\text{пластмассы}} = \frac{300(2 \cdot 10^8 \cdot 0,167 + 6 \cdot 10^4 \cdot 1,833)}{6 \cdot 10^4 \cdot 1,0} = 2220 \text{ кгсм}.$$

Искомый момент  $M = 1330 \text{ кгсм}$ .

### Изгибаемая биметаллическая полоса

Общая толщина  $h$  из полос с толщинами  $h_1$  и  $h_2$ ; постоянное  $\Delta t$  — по всему объему. Наибольшее напряжение — в точках соединения двух материалов; для полосы, отмечаемой индексом 1, напряжение  $\sigma_1$  равно

$$\sigma_1 = D_1 E_1 (a_1 - a_2) \Delta t,$$

где

$$D_1 = \frac{c_1 k_1^3 (3 - c_1 k_1) + (1 + c_1 k_1^2)^2}{4c_1 k_1 (1 + k_1)^2 + (1 - c_1 k_1^2)^2}$$

и

$$c_1 = \frac{E_1}{E_2}, \quad k_1 = \frac{h_1}{h_2}.$$

Ось полосы искривляется по дуге круга радиуса

$$\rho = \frac{Ah}{(a_1 - a_2) \Delta t},$$

где

$$A = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{(1 - c_1 k_1^2)^2}{4c_1 k_1 (1 + c_1 k_1)^2} \right].$$

### ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА

Энергия деформации от действия изгибающего момента на участке от  $x = 0$  до  $x = c$

при  $\sigma = \frac{M(x)}{J}$  у равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^c \int_F \sigma^2 dF dx = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{M^2(x)}{EJ} dx, \quad (98)$$

где  $J$  — момент инерции сечения;  $M(x)$  — изгибающий момент в сечении с координатой  $x$ .

Если нейтральная линия не совпадает с главной осью сечения (косой изгиб), то необходимо полный изгибающий момент разложить в двух главных плоскостях балки и действие обеих составляющих рассматривать отдельно.

Поперечная сила. Энергия деформации

$$U = \frac{1}{2} \int_0^c \int_F \frac{\tau^2}{G} dF dx =$$

$$= \frac{1}{2G} \int_0^c k \frac{Q^2(x)}{F} dx, \quad (98a)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения;  $Q(x)$  — поперечная сила в сечении с координатой  $x$ . Для круглого и прямоугольного сечений  $k = 1,2$ ; для двутавра и швеллера  $F$  — площадь сечения стенки.

Полная величина  $U$  при изгибе равна сумме величин, получаемых по уравнениям (98) и (98a).

### ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ (Расчет на жесткость)

Теория и расчет больших перемещений при изгибе и других видах деформаций см. [8], [14], а также стр. 119.

Наибольшие прогибы балки, отнесенные к величине пролета, а также наибольшие углы поворота балки характеризуют ее жесткость под заданной нагрузкой. В зависимости от условий работы деталей производится проверка их на жесткость путем сопоставления возникающих перемещений с их допускаемыми значениями.

Полный прогиб  $v_{\text{полн}}$  в каком-либо сечении складывается из прогиба  $v$ , вызванного нормальными напряжениями изгиба (от изгибающих моментов), прогиба  $v_Q$  от касательных напряжений (от поперечных сил) и смещения  $v_0$  от осадки опор:

$$v_{\text{полн}} = v + v_Q + v_0.$$

Ниже приводятся формулы для расчета  $v$  (обычно основная часть общего прогиба) и для оценки влияния поперечной силы на прогиб. Расчет осадки опор производится в соответствии с их конструкцией; см. также гл. XIII.

### Основные зависимости и формулы для определения перемещений

Приведенные ниже уравнения составлены для случаев малых деформаций ( $\text{tg } \theta \approx \theta$ ) и когда плоскость действия изгибающих моментов совпадает с главной плоскостью бруса, в которой лежат главные оси поперечных сечений. Расчет перемещений при несовпадении плоскости действия изгибающих моментов с главной плоскостью бруса см. стр. 104.

**Основные зависимости.** Ось балки, первоначально прямая, при деформации балки, не удлиняясь, располагается по кривой  $v(x)$ , называемой *упругой линией* (см. фиг. 13). Величина  $v(x)$  называется *прогибом* в сечении  $x$ , наибольший прогиб  $v_{\text{max}} = f$  — *стрелой прогиба*. Два поперечных сечения с координатами  $x$  и  $x + dx$ , до деформации между собой параллельные, в результате деформации, оставаясь перпендикулярными к оси балки, образуют между собой угол  $d\theta$ ; плоскости сечений пересекаются в центре  $O$  кривизны. В сечении  $x$  радиус кривизны оси обозначается  $\rho(x)$ . Относительная продольная деформация волокна на расстоянии  $y$  от нейтральной линии

$$\epsilon_y = \frac{1}{\rho(x)} y. \quad (99)$$

При деформациях в пределах упругости кривизна в сечении  $x$

$$k(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (99a)$$

где  $M(x)$  — изгибающий момент;  $EJ(x)$  — жесткость на изгиб в сечении  $x$ .

Геометрические зависимости для упругой линии

$$\frac{d\theta_x}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (100)$$

(при малых прогибах);

$$\frac{d\theta_x}{dx} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (100a)$$

(при больших прогибах).

*Дифференциальное уравнение упругой линии* при малых прогибах и учете лишь деформации от изгибающего момента

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (101)$$

Дифференциальные зависимости для интенсивности  $p(x)$  сплошной нагрузки, поперечной силы  $Q(x)$ , изгибающего момента  $M(x)$ , угла  $\theta(x)$  поворота сечения в радианах и прогиба  $v(x)$  в см в сечении  $x$ :

$$\frac{dv}{dx} = \theta(x);$$

$$EJ(x) \frac{d\theta(x)}{dx} = -M(x) = EJ(x) \frac{d^2v}{dx^2};$$

$$\frac{d}{dx} M(x) = Q(x) = -\frac{d}{dx} \left[ EJ(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} M(x) &= \frac{d}{dx} Q(x) = \\ &= -p(x) = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

**Правило знаков:** положительными считаются  $M(x)$  при выпуклости балки вниз,  $\theta(x)$  — при повороте сечения по часовой стрелке,  $v(x)$  — при прогибе вниз; правило знаков для  $p(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $M(x)$  см. стр. 50.

Угол  $\theta(x)$  и прогиб  $v(x)$  связаны с изгибающими моментами  $M(x)$  балки зависимостями

$$\theta(x) = - \int \frac{M}{EJ} dx + C;$$

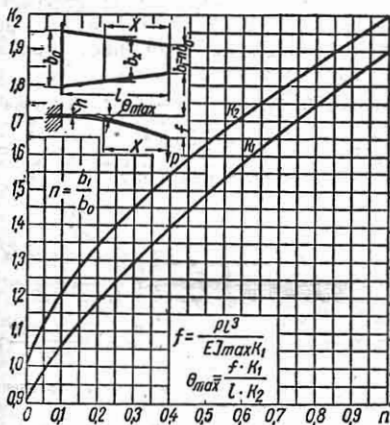
$$v(x) = - \int dx \int \frac{M}{EJ} dx + Cx + D. (102a)$$

Если жесткость балки постоянна, то  $EJ$  в уравнениях (102a) выносятся из-под

знака интеграла. Кривизна  $\frac{1}{\rho(x)} = 0$  ( $\rho = \infty$ ) получается в сечении, имеющем  $M = 0$ .

Формулы для  $v$  и  $\theta$  основных случаев балок постоянной жесткости.

Формулы приводятся в табл. 10; графики для расчета  $v$  и  $\theta$  балки переменной ширины дается на фиг. 54. Значения  $v$



Фиг. 54.

и  $\theta$  для более сложных случаев нагрузки могут быть найдены сложением величин  $v$  и  $\theta$ , полученных по табл. 10 для отдельных составляющих заданной нагрузки.

**Пример.** Задана свободно опертая на двух опорах балка постоянной жесткости  $EJ$  пролетом  $l$ , имеющая слева консоль длиной  $a$  со сплошной равномерной нагрузкой  $p$ . Определить стрелу прогиба на конце консоли.

Прогиб на конце жестко защемленной консоли (случай 2, табл. 10)  $f_1 = \frac{pa^3}{8EJ}$ . Вертикальное перемещение конца консоли в связи с поворотом на угол  $\theta$  сечения над левой опорой (случай 11 табл. 10)

$$f_2 = \theta a = \frac{1}{3} \frac{pa^2}{EJ} a.$$

Полный прогиб на конце консоли

$$f = f_1 + f_2 = \frac{pa^2}{2EJ} \left( \frac{a}{4} + \frac{l}{2} \right).$$

**Дополнительные влияния на прогиб.** Дополнительный прогиб от поперечной силы необходимо учитывать при высоте сечения порядка  $\frac{1}{4}$  пролета балки или большей. Дифференциальное уравнение упругой линии с учетом деформаций изгиба и сдвига

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M(x)}{EJ} + \frac{k}{GF} p(x), (103)$$

где  $p(x)$  — интенсивность сплошной нагрузки;  $M(x)$  — изгибающий момент в сечении  $x$ ;  $EJ$  — жесткость на изгиб;  $GF$  — жесткость на сдвиг;  $G$  — модуль сдвига;  $F$  — площадь поперечного сечения балки;  $k$  — коэффициент учитывающий неравномерность сдвигов по сечению. Для круга  $k = 1,1$ , для прямоугольника  $k = 1,2$ ; для двутавра  $k$  от 2 до 2,9.

Частный случай — консоль длиной  $l$  с силой  $P$  на конце, высотой прямоугольного сечения  $h$  и жесткостью на изгиб  $EJ$ : стрела прогиба с учетом сдвигов

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} \left( 1 + c \frac{h^2}{l^2} \right);$$

для стали  $c = 0,75$  и для дерева  $c = 6,0$ .

Дополнительный прогиб от местных деформаций, вызванных сосредоточенной силой, см. [4], [11].

Частный случай — балка прямоугольного сечения на двух опорах: дополнительный прогиб от местной деформации, вызванной силой, приложенной в середине пролета,

$$0,75 \frac{Pl}{Eh} \left( 1 - 0,28 \frac{h}{l} \right);$$

$h$  и  $l$  — высота сечения и пролет балки;  $E$  — модуль продольной упругости.

### Методы определения перемещений

Метод единичной силы см. гл. III.

Метод ортогональных фокусов см. [7].

Метод моментов высоких степеней см. [2].

Формулы для перемещений в балках при изгибе получаются путем интегрирования дифференциального уравнения (101) при заданных нагрузках и граничных условиях в местах закрепления балки.

При интегрировании уравнения (101) по отдельным участкам балки необхо-

димом для обеспечения условий сопряжения участков балки определять  $2(n-1)$  постоянных интегрирования ( $n$  — число участков). По более простому и общему методу интегрирования дифференциального уравнения изгиба акад. А. Н. Крылова [3] в любом случае балки определяется всего лишь два постоянных интегрирования по условиям закрепления концов балки.

Ниже приводятся наиболее часто применяемые методы для составления уравнений прогибов и углов поворота сечений балки и для подсчета их величин.

**Расчет по методу начальных параметров** (см. стр. 51 и 73). Общие уравнения упругой линии при сложной нагрузке для балки постоянной жесткости (см. фиг. 13, б):

$$\begin{aligned}
 v(x) &= v(0) + \theta(0)x - M(0)\frac{x^2}{2EJ} - \\
 &\quad - Q(0)\frac{x^3}{6EJ} - \sum \frac{L(x-u_L)^2}{2EJ} + \\
 &\quad + \sum \frac{P(x-u_P)^3}{6EJ} + \sum \frac{P(x-u_P)^4}{24EJ} + \\
 &\quad + \sum \frac{k(x-u_K)^5}{120EJ}; \\
 \theta(x) &= \theta(0) - M(0)\frac{x}{EJ} - Q(0)\frac{x^2}{2EJ} - \\
 &\quad - \sum \frac{L(x-u_L)}{EJ} + \sum \frac{P(x-u_P)^2}{2EJ} + \\
 &\quad + \sum \frac{P(x-u_P)^3}{6EJ} + \\
 &\quad + \sum \frac{k(x-u_K)^4}{24EJ}. \quad (104)
 \end{aligned}$$

$v(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $M(0)$  и  $Q(0)$  — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $x=0$ , принимаемом за начальное (*начальные параметры*).

Здесь  $u_L$ ,  $u_P$ ,  $u_P$  и  $u_K$  — расстояния от начала координат балки, расположенного в крайнем левом (или правом) конце балки, соответственно до мест приложения внешних моментов, сосредоточенных сил, до начал участков со сплошной равномерной нагрузкой или со сплошной нагрузкой по закону наклонной прямой [см. формулу (54а)]. Величина  $k$  считается положительной,

если интенсивность направленной вниз сплошной нагрузки возрастает с увеличением  $x$ .

В формулах (104) члены, учитывающие ту или иную внешнюю нагрузку, вводятся только для сечений, лежащих правее точки приложения соответствующей нагрузки. Кроме того, предполагается, что сплошная равномерная нагрузка  $p$  приложена на участке от  $u_P$  (левый конец участка) до  $u'_P \geq x$  (правый конец участка); если  $x > u'_P$ , то в формулы (104) вводится слагаемое от нагрузки, равной  $-p$  и прилагаемой справа от сечения  $u'_P < x$ . Аналогично учитывается нагрузка по закону наклонной прямой.

Начальные параметры определяются по условиям закрепления балки, после чего могут быть вычислены параметры любого сечения балки. Применение формулы (104) к балкам переменного сечения поясняется примером 3.

**Пример 1.** Консоль  $EJ = \text{const}$ ; нагрузка по фиг. 55.

На участке от  $x=0$  до  $x=c$

$$\theta(x) = \theta(0) - \frac{Lx}{EJ};$$

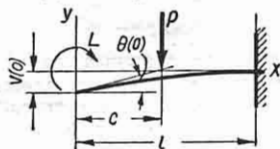
$$v(x) = v(0) + \theta(0)x - \frac{Lx^2}{2EJ};$$

на участке от  $x=c$  до  $x=l$

$$\theta(x) = \theta(0) - \frac{Lx}{EJ} + \frac{P(x-c)^2}{2EJ};$$

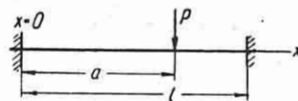
$$v(x) = v(0) + \theta(0)x - \frac{Lx^2}{2EJ} + \frac{P(x-c)^3}{6EJ};$$

$\theta(0)$  и  $v(0)$  находятся по последним уравнениям из условий:  $\theta(l) = 0$ ;  $v(l) = 0$ .



Фиг. 55.

**Пример 2.** Жестко защемленная с двух концов балка постоянного сечения пролетом  $l$ , к которой приложена сосредоточенная сила  $P$  (фиг. 56).



Фиг. 56.

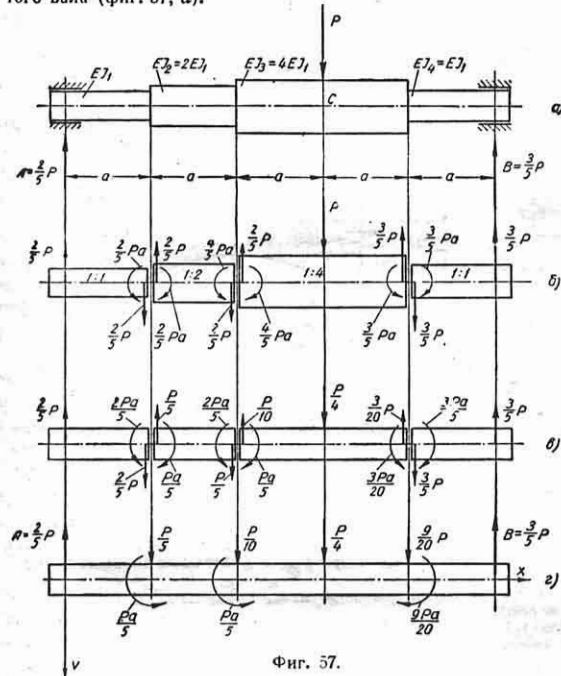
Начало координат помещается в левой заделке. Из четырех начальных параметров  $v(0) = 0$  и  $\theta(0) = 0$  (для  $x=0$ ) и  $v(l) = 0$  и  $\theta(l) = 0$  (для  $x=l$ ). Отсюда по формулам (104) получаем два уравне-

ния для определения двух других начальных параметров  $M(0)$  и  $Q(0)$ :

$$EJv'(l) = -M(0) \frac{l^2}{2} - Q(0) \frac{l^3}{6} + P \frac{(l-a)^2}{6} = 0;$$

$$EJ\theta(l) = -M(0)l - Q(0) \frac{l^2}{2} + P \frac{(l-a)^2}{2} = 0.$$

**Пример 3.** Требуется составить формулы для угла поворота на левой опоре и прогиба в точке  $C$  (под силой  $P$ ) для ступенчатого свободно опертого вала (фиг. 57, а).



Фиг. 57.

Вал приводится к балке постоянной жесткости. Для этого вал разрезается на участки в местах ступенчатого изменения поперечных сечений и прилагаем к концам каждого участка действующие на него нагрузки и внутренние усилия  $Q$  и  $M$  (фиг. 57, б). Далее, жесткости всех участков принимаем одинаковыми, например равными меньшей жесткости  $EJ_1$ , и для сохранения деформации нагрузки и усилия каждого участка уменьшаем в отношении действительной и приведенной жесткости, как указано на фиг. 57, в.

Для вала, эквивалентного заданному по деформации (фиг. 57, в),  $v(0) = 0$ . Для определения  $v'(0)$  составляем  $v(x)$  для последнего участка вала:

$$v(x)_{5a > x > 4a} = \theta(0)x - \frac{2P}{5} \frac{x^2}{6EJ_1} + \frac{Pa}{5} \frac{(x-a)^2}{2EJ_1} + \frac{Pa}{5} \frac{(x-2a)^2}{2EJ_1} + \frac{P}{5} \frac{(x-2a)^3}{6EJ_1} + \frac{P}{10} \frac{(x-2a)^3}{6EJ_1} + \frac{P}{4} \frac{(x-3a)^3}{6EJ_1} - \frac{9aP}{20} \frac{(x-4a)^2}{2EJ_1} + \frac{9P}{20} \frac{(x-4a)^2}{6EJ_1} \quad (a)$$

Отсюда для  $x = 5a$

$$v(x)_{x=5a} = \theta(0) \cdot 5a - \frac{46}{15} \frac{Pa^3}{EJ_1} = 0$$

и

$$\theta(0) = 0_A = + \frac{46}{75} \frac{Pa^2}{EJ_1} \quad (6)$$

(по часовой стрелке).

Прогиб под силой  $P$  в точке  $C$  находим, пользуясь первыми шестью членами уравнения (а) и подставляя в него полученное значение  $\theta(0)$ :

$$v(x)_{x=3a} = v_C = + \frac{247}{300} \frac{Pa^3}{EJ_1}$$

(прогиб вниз).

**Графо-аналитический метод** основан на совпадении дифференциальных уравнений, связывающих  $p(x)$  с  $M(x)$  и  $\frac{M(x)}{EJ}$  с  $v(x)$  [см. уравнения (102)]. Благодаря этому вычисление  $v$  по  $\frac{M}{EJ}$  ведется так же, как  $M$  по  $p$ .

При применении метода ординаты эпюры  $M$ , поделенные на  $EJ$ , рассматриваются для каждого значения  $x$  как фиктивная нагрузка:

$$p_{\phi}(x) = \frac{M(x)}{EJ}; \quad (105)$$

тогда угол поворота  $\theta$  и прогиб  $v$  равны соответственно поперечной силе  $Q_{\phi}$  и изгибающему моменту  $M_{\phi}$  в рассматриваемом сечении от фиктивной нагрузки  $p_{\phi}$  фиктивной балки:

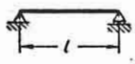
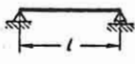
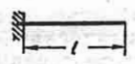
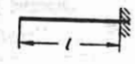
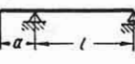
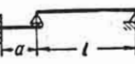
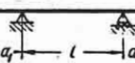
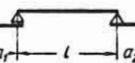
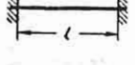
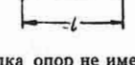
$$\theta(x) = Q_{\phi}(x); \quad v(x) = M_{\phi}(x). \quad (106)$$

Длина участков фиктивной балки та же, что действительной, но опоры в фиктивной балке выбираются так, чтобы удовлетворить условиям деформации действительной балки; схема фиктивной балки, соответствующая заданной действительной, берется по табл. 21. Значения фиктивных реакций для простой балки см. табл. 11.

Правило знаков  $M(x)$  (+) дает фиктивную нагрузку  $p_{\phi}(x)$  (+), направленную вниз. При определении  $Q_{\phi}(x)$  и  $M_{\phi}(x)$  по  $p_{\phi}(x)$  применяется правило знаков для действительных  $Q$  и  $M$ ;  $Q_{\phi}(x)$  (+) и  $M_{\phi}(x)$  (+) дают соответственно  $\theta(x)$  (+) (поворот сечения по часовой стрелке) и  $v(x)$  (+) (прогиб вниз).

Таблица 21

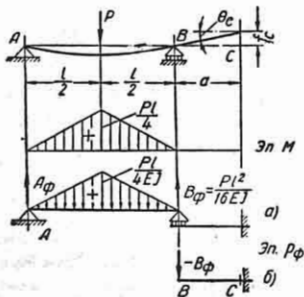
Схемы действительной и соответствующей ей фиктивной балки

Схема действительной балки	Схема соответствующей ей фиктивной балки
	
	
	
	
	
	Балка опор не имеет*

\* Фиктивная нагрузка уравновешивается без фиктивных реакций (условия деформации для заданной балки с жестко зашпеленными концами).

Пример 1. Сила  $P$  приложена в середине пролета балки с консолью, имеющей  $EJ = \text{const}$  (фиг. 58).

Положительная эпюра действительных моментов  $M$  дает положительную фиктивную нагрузку



Фиг. 58.

$p_\phi = \frac{M}{EJ}$ , направляемую вниз. В соответствии с тем что прогибы действительной балки в точках  $A$  и  $B$  равны нулю, фиктивная балка имеет в этих точках шарниры.

Угол поворота и стрела прогиба на конце консоли (фиг. 58, б)

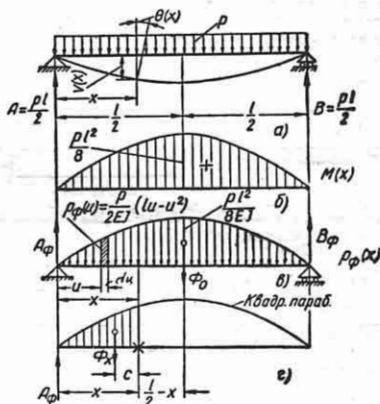
$$\theta_c = Q_\phi, c = -B_\phi = -\frac{Pl^2}{16EJ}$$

(поворот против часовой стрелки),

$$l_c = M_\phi, c = B_\phi a = -\frac{Pl^2}{16EJ} a$$

(прогит вверх).

Пример 2. Балка, свободно опертая на двух опорах со сплошной равномерной нагрузкой  $p$ ;  $EJ = \text{const}$ . Определяются прогиб  $v(x)$  и угол поворота  $\theta(x)$  в сечении  $x$  (фиг. 59, а).



Фиг. 59.

Строится эпюра изгибающих моментов  $M(x)$  (фиг. 59, б), выбирается соответствующая фиктивная балка (табл. 21) и прилагается к ней фиктивная нагрузка

$$p_\phi(x) = \frac{M(x)}{EJ} = \frac{p}{2EJ}(lx - x^2)$$

(фиг. 59, в).

Равнодействующая фиктивной нагрузки, как площадь эпюры  $p_\phi$ , и фиктивные опорные реакции

$$\Phi_0 = \frac{2}{3} l \frac{Pl^2}{8} = \frac{Pl^3}{12EJ};$$

$$A_\phi = B_\phi = \frac{1}{2} \Phi_0 = \frac{Pl^3}{24EJ}.$$

Для любого сечения на расстоянии  $x$  от опоры (один и тот же закон нагрузки на всей длине балки):

угол поворота сечения

$$\theta(x) = Q_\phi(x) = A_\phi - \int_0^x p_\phi(u) du =$$

$$= \frac{Pl^3}{24EJ} - \frac{p}{2EJ} \int_0^x (lu - u^2) du =$$

$$= \frac{Pl^3}{24EJ} \left[ 1 - 6 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 4 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right];$$

прогиб

$$v(x) = M_\phi(x) = A_\phi x - \int_0^x p_\phi(u)(x-u) du =$$

$$= \frac{Pl^3}{24EJ} x - \frac{p}{2EJ} \int_0^x (lu - u^2)(x-u) du =$$

$$= \frac{Pl^4}{24EJ} \left[ \frac{x}{l} - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right].$$



Формулы для  $\psi(x)$  и  $v(x)$  могут быть составлены без выполнения интегрирования, если воспользоваться готовыми формулами (см. т. I, стр. 360) для координаты центра тяжести  $c$  и площади  $\Phi_x$  части эпюры фиктивной нагрузки  $p\phi$ , ограниченной в рассматриваемом примере квадратной параболой:

$$\psi(x) = A\phi - \Phi_x; \quad v(x) = A\phi^2 x - \Phi_x c.$$

**Графический метод.** Решение дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -p(x); \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ(x)}$$

выполняется графическим построением двух веревочных многоугольников. Замыкающая проводится в зависимости от условий закрепления балки.

Масштаб построения. Если линейный масштаб дает на 1 см чертежа  $m$  см натуры, а силовой — на 1 см чертежа  $N$  кг, то при полюсном расстоянии  $h_1$  см силового многоугольника, равном  $h_1$  см чертежа, вертикальный отрезок между замыкающей и веревочной кривой в 1 см дает изгибающий момент  $M = h_1 N m$  кгсм; 1 см<sup>2</sup> площади этой эпюры принимается за фиктивную нагрузку  $\frac{h_1 N m^2}{EJ}$  кгсм<sup>2</sup>/кгсм<sup>2</sup>. Если при

вычерчивании второго веревочного многоугольника принять 1 см чертежа равным  $\frac{h_1 m^2 N}{EJ}$  и полюсное расстояние  $H_2$  равным  $h_2$  см чертежа, то вертикальная ордината второго веревочного многоугольника в 1 см дает прогиб

$$\frac{h_1 m^2 N}{EJ} m h_2 \text{ см.}$$

Отсюда по заданному масштабу ординат упругой линии находится необходимая величина  $h_2$  полюсного расстояния.

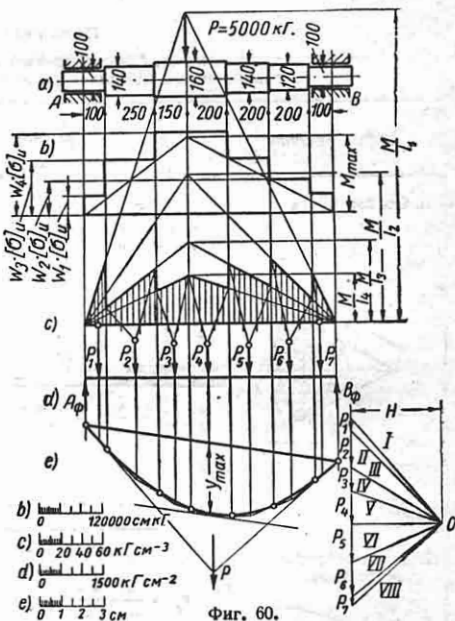
**Пример.** Вал со ступенчатым изменением сечения (фиг. 60). Обозначения:  $J$  и  $W$  — моменты инерции и моменты сопротивления сечения вала;  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение на изгиб.

Заштрихованная эпюра фиктивных нагрузок получена, как показано на фиг. 60, с, по эпюре изгибающих моментов  $M$ . Принятый при построении масштаб указан в нижней части фиг. 60.

Стрела прогиба по построенному веревочному многоугольнику (фиг. 60, e)

$$f = \frac{1}{E} N u_{\max} = \frac{1}{2,0 \cdot 10^6} (4,1 \text{ см} \times 500 \text{ кгсм}^2/\text{см}) \times (3,4 \text{ см} \times 10 \text{ см}/\text{см}) = 0,034 \text{ см.}$$

Здесь в расчет введены масштаб фиктивных сил: 1 см — 500 кгсм<sup>2</sup> и масштаб длин: 1 см — 10 см.

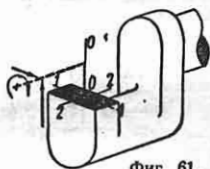


### СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сложное сопротивление получается при сочетании простых видов деформаций: растяжения или сжатия, сдвига, кручения, изгиба.

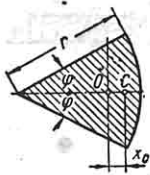
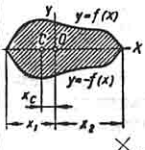
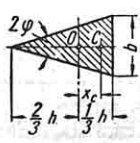
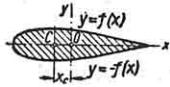
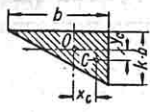
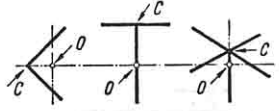
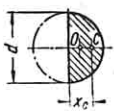
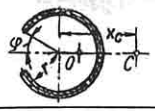

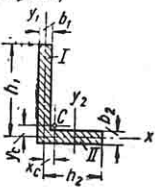
Общий случай сложного сопротивления. В общем случае действия нагрузок в поперечном сечении детали (фиг. 61) могут быть шесть внутренних усилий:  $N, Q_1, Q_2, M_k, M_1, M_2$ .

Для определения усилий в рассматриваемом сечении проводят три оси сечения: главные оси сечения 1 и 2, проходящие через его центр тяжести, и ось  $O$ , перпендикулярную к плоскости рассматриваемого сечения и проходящую через центр изгиба сечения (точка поперечного сечения, через которую проходит плоскость действия поперечной нагрузки, не вызывающей напряжений скручивания; если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения (см. также стр. 27)). Положение центра изгиба для основных сечений дано в табл. 22; определение центра изгиба для тонкостенных профилей см. гл. IV.

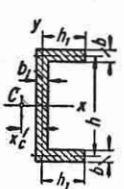
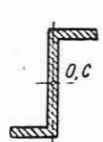
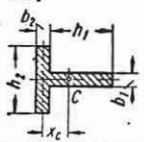
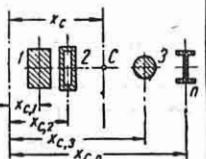
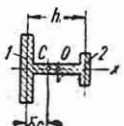


## Положение центра изгиба

O — центр тяжести сечения; C — центр изгиба;  $\mu$  — коэффициент Пуассона  
 Центр изгиба тонкостенных профилей различной формы см. гл. IV

Форма сечения	Положение центра изгиба	Форма сечения	Положение центра изгиба																												
1. Сектор круга 	$x_c = cr,$ где коэффициент $c$ — из приведенной ниже таблицы в зависимости от $\varphi$ и $\mu$ : <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>\varphi^\circ</math></td> <td>при <math>\mu = 0</math></td> <td>при <math>\mu = 1</math></td> <td>при <math>\mu = 1/2</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0,129</td> <td>0,168</td> <td>0,194</td> </tr> <tr> <td>4,5</td> <td>0,125</td> <td>0,158</td> <td>0,180</td> </tr> <tr> <td>7,5</td> <td>0,014</td> <td>0,139</td> <td>0,155</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>0,094</td> <td>0,109</td> <td>0,119</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>0,067</td> <td>0,075</td> <td>0,180</td> </tr> <tr> <td>22,5</td> <td>0,048</td> <td>0,053</td> <td>0,056</td> </tr> </table>	$\varphi^\circ$	при $\mu = 0$	при $\mu = 1$	при $\mu = 1/2$	3	0,129	0,168	0,194	4,5	0,125	0,158	0,180	7,5	0,014	0,139	0,155	12	0,094	0,109	0,119	18	0,067	0,075	0,180	22,5	0,048	0,053	0,056	6. Симметричное сплошное сечение Приближенно:  $x_c = \frac{\int f(x)^3 dx}{\int f(x) dx} + \frac{2\mu}{1+\mu} \times \frac{\int f^2(x) dx + 3 \int f^2(x) [f'(x)]^2 dx}{\int f^2(x) dx}$ (пределы интегрирования от $x_1$ до $x_2$ )	
$\varphi^\circ$	при $\mu = 0$	при $\mu = 1$	при $\mu = 1/2$																												
3	0,129	0,168	0,194																												
4,5	0,125	0,158	0,180																												
7,5	0,014	0,139	0,155																												
12	0,094	0,109	0,119																												
18	0,067	0,075	0,180																												
22,5	0,048	0,053	0,056																												
2. Равнобедренный треугольник 	$x_c = \frac{2h}{15} \frac{3 - 11\mu}{1 + \mu}$ при малом $\varphi$ $\frac{2}{15} h < x_c < \frac{2h}{15} \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu}$	7. Симметричное сплошное сечение, удлиненное 	$\bar{x} < x_c < \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu} \bar{x}$ где $\bar{x} = \frac{\int f^2(x) x dx}{\int f^2(x) dx}$ (пределы интегрирования от $x_1$ до $x_2$ — по всей контуре)																												
3. Прямоугольный треугольник 	При $k \leq 1$ $x_c = \frac{2b}{15} \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu}$ $y_c = \frac{2kb}{15} \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu}$	8. Тонкостенный профиль, у которого средние линии прямых полок пересекаются в одной точке 	Центр изгиба в точке пересечения средних линий полок																												
4. Полукруг 	$x_c = \frac{4}{15\pi} \frac{3 + 4\mu}{1 + \mu} a$	9. Сектор тонкого кругового трубчатого сечения 	$x_c = \frac{2r}{(\pi - \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi} \times \frac{(\pi - \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi}{(\varphi = 0)}$ Для трубы с разрезом $x_c = 2r$																												
5. Сегмент квадратной параболы 	Удлиненный $\frac{4}{35} h < x_c < \frac{4h}{35} \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu}$ Укороченный $\frac{4h}{35} \frac{1 + 4\mu}{1 + \mu} > x_c > \frac{4h}{35} \frac{1 + 3\mu}{1 + \mu}$	10. Угольник (при $h \geq 5b$ ) 	$x_c = \frac{1}{2} h_2 \frac{J_{x_1, II}}{J_{x_1, I} + J_{x_1, II}}$ $y_c = \frac{1}{2} h_1 \frac{J_{y_1, I}}{J_{y_1, I} + J_{y_1, II}}$ $J_{x_1, I}, J_{y_1, I} \text{ и } J_{x_1, II}, J_{y_1, II} \text{ — моменты инерции прямоугольников I и II по отношению к их центральным осям, соответственно, } x_1, y_1 \text{ и } x_2, y_2.$ При малых $b_1$ и $b_2$ точка C на пересечении осей $y_1$ и $x_1$																												

Продолжение табл. 22

Форма сечения	Положение центра изгиба	Форма сечения	Положение центра изгиба
11. Швеллер (при $h \geq 5b$ ) 	$x_c = -\frac{hJ_{xy}}{J_x}$ <p><math>J_{xy}</math> — центробежный момент инерции половины сечения по отношению к осям <math>x</math> и <math>y</math>; <math>J_x</math> — момент инерции полной площади по отношению к оси <math>x</math>.</p> <p>При <math>b_1 = b</math> <math>x_c = -\frac{h_1^2 h^2 b}{4J_x}</math></p>	14. Зетовое сечение с равными полками 	Центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения
12. Тавр 	$x_c = \frac{1}{2} (h_1 + b_2) \times \frac{1}{1 + \frac{h_2^3 b_2}{b_1^3 h_1}}$	15. Составное сечение. Главные центральные оси составляющих площадок между собой параллельны 	$E_1, E_2, \dots, E_n$ — модуль продольной упругости для материала площадок $1, 2, \dots, n$ ; $J_1, J_2, \dots, J_n$ — моменты инерции площадок $1, 2, \dots, n$ по отношению к горизонтальным главным осям $1, 2, \dots, n$
13. Двутавр 	$x_c = h \frac{J_2}{J_1 + J_2}$ <p><math>J_1</math> и <math>J_2</math> — моменты инерции полок 1 и 2 по отношению к горизонтальной оси</p>	$x_c = \frac{E_1 J_1 x_{c,1} + E_2 J_2 x_{c,2} + \dots + E_n J_n x_{c,n}}{E_1 J_1 + E_2 J_2 + \dots + E_n J_n}$	

Продольное усилие  $N$ , вызывающее равномерное растяжение или сжатие в сечении, равняется сумме проекций на ось  $O$  (брус) нагрузок, приложенных к детали по одну сторону (например, слева) от рассматриваемого сечения.

Момент кручения  $M_k$  находится по сумме моментов указанных нагрузок по отношению к оси  $O$ , перпендикулярной к плоскости рассматриваемого сечения и проходящей через центр изгиба.

Поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  равны проекциям соответственно на оси 1 и 2 в рассматриваемом сечении нагрузок, приложенных к детали по одну сторону (например, слева) от рассматриваемого сечения.

Изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  равны суммам моментов указанных нагрузок соответственно по отношению к осям 1 и 2. Для  $N, M_k, Q_1, Q_2, M_1$  и  $M_2$  в отдельности определяются с помощью формул, относящихся к данному виду сопротивления, соответствующие им напряжения в сечении; полученные напряжения складываются алгебраически ( $\sigma$ ) или геометрически ( $\tau$ ).

Усилие  $N$  и моменты  $M_1$  и  $M_2$  вызывают в поперечном сечении нормальные напряжения  $\sigma_N, \sigma_{M_1}$  и  $\sigma_{M_2}$ ; усилия  $Q_1, Q_2$  и момент  $M_k$  вызывают касательные напряжения  $\tau_{Q_1}, \tau_{Q_2}$  и  $\tau_{M_k}$ .

Полное нормальное напряжение  $\sigma_{сум}$  в какой-либо точке сечения

$$\sigma_{сум} = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_1} \pm \sigma_{M_2} \quad (107)$$

Полное касательное напряжение  $\tau_{сум}$  в точке сечения находится как геометрическая сумма касательных напряжений, получаемых отдельно от  $Q_1, Q_2$  и  $M_k$ . На контуре сечения касательные напряжения от поперечной силы и момента кручения совпадают с касательной к контуру и складываются алгебраически (см. фиг. 62):

$$\tau_{сум}^A = \pm \tau_{M_k}^A \pm \tau_{Q_2}^A \quad (108a)$$

(в точке  $A$ );

$$\tau_{сум}^B = \pm \tau_{M_k}^B \pm \tau_{Q_1}^B \quad (108b)$$

(в точке  $B$ ):

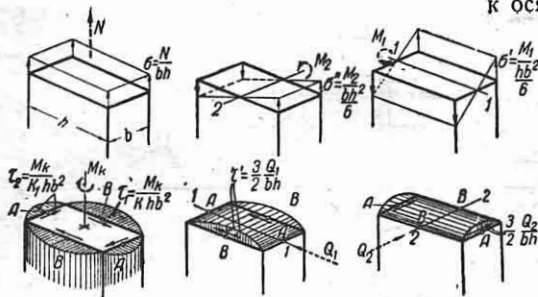
В выходящих углах  $\tau_{сум} = 0$ . Знак плюс или минус выбирается в зависимости от направления действующих усилий и положения рассматриваемой точки в сечении.

Пример эпюр напряжений для прямоугольного сечения показан на фиг. 62.

ной центральной осью  $l$  сечения, связаны зависимостью

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_1}{J_2} \operatorname{tg} \theta,$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — главные центральные моменты инерции сечения по отношению к осям  $1$  и  $2$ .



Фиг. 62.

Значения коэффициентов  $k$  и  $k_1$  для прямоугольного сечения см. табл. 4.

В точках поперечного сечения получается плоское напряженное состояние. Главные напряжения в общем случае определяются по формулам

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{сум}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{сум}^2 + 4\tau_{сум}^2},$$

$$\sigma_3 = 0.$$

Расчет на прочность ведется по наибольшему приведенному напряжению:

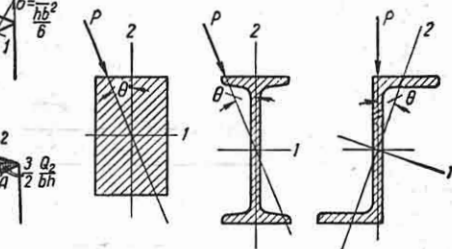
$$\sigma_{пр} \leq [\sigma]. \quad (109)$$

Подсчет  $\sigma_{пр}$  производится по формулам табл. 25. Выбор величин  $[\sigma]$  и уточнение расчета на прочность см. гл. XIV.

**Косой изгиб** (сочетание двух изгибов, по отношению к обоим главным осям).

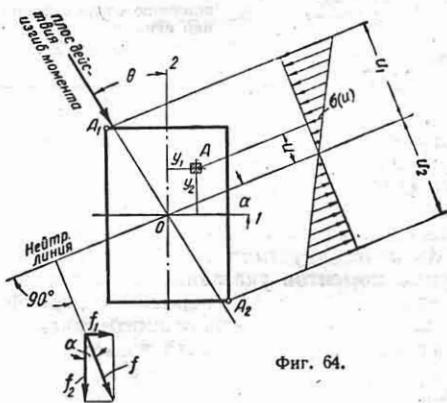
Плоскость действия полного изгибающего момента  $M$  пересекает плоскость поперечного сечения балки по прямой, которая проходит через центр изгиба, но не совпадает с главной центральной осью сечения  $1$  или  $2$  (фиг. 63). Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента (см. фиг. 64).

Угол  $\theta$ , образуемый плоскостью действия изгибающего момента и главной центральной осью  $2$  сечения, и угол  $\alpha$ , образуемый нейтральной линией с глав-



Фиг. 63.

Нормальные напряжения  $\sigma$  в сечении находятся как алгебраическая сумма напряжений  $\sigma'$  и  $\sigma''$  в рассматриваемой точке, получаемых отдельно от каждого составляющего момента  $M_1$  и  $M_2$ , дейст-



Фиг. 64.

вующих по отношению к главным центральным осям  $1$  и  $2$  сечения:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \pm \frac{M_1}{J_1} y_2 \pm \pm \frac{M_2}{J_2} y_1 \leq [\sigma]_{изг}. \quad (110)$$

Здесь  $M_1 = M \cos \theta$ ;  $M_2 = M \sin \theta$ ;  $M$  — полный изгибающий момент в сечении;  $[\sigma]_{изг}$  — допускаемое напряжение на изгиб. В случае хрупкого материала допускаемое напряжение на изгиб для рас-

тянутой и сжатой зон принимается равным соответственно  $[\sigma]_{\text{раст}}$  и  $[\sigma]_{\text{сж}}$ .

Для сечений, имеющих эллипс инерции в виде круга (круглое и квадратное поперечные сечения), напряжение может находиться по формуле (86) непосредственно по полному изгибающему моменту  $M$ ; момент инерции  $J$  берется по отношению к центральной оси, перпендикулярной к плоскости действия  $M$ .

Распределение суммарных нормальных напряжений в сечении подчинено закону плоскости (фиг. 64):

$$\sigma = \pm \frac{M}{\sqrt{J_1^2 \cos^2 \alpha + J_2^2 \sin^2 \alpha}} u. \quad (110a)$$

Наибольшие напряжения возникают в точках  $A_1$  и  $A_2$  сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии (при  $u = u_1$  и при  $u = u_2$ ).

Уравнение нейтральной линии

$$\frac{\sin \theta}{J_2} x + \frac{\cos \theta}{J_1} y = 0, \quad (111)$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точек нейтральной линии по отношению к осям  $1$  и  $2$ .

Касательные напряжения в рассматриваемой точке поперечного сечения находятся по формулам табл. 18 отдельно от составляющих  $Q_1$  и  $Q_2$  поперечной силы по главным осям  $1$  и  $2$  сечения.

Полное касательное напряжение в точке поперечного сечения равно геометрической сумме составляющих напряжений, полученных от  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Прогиб балки происходит в направлении, перпендикулярном к нейтральной линии. Полный прогиб  $f$  находится как геометрическая сумма прогибов  $f_1$  и  $f_2$ , вызываемых изгибающими моментами в главных плоскостях  $1$  и  $2$  балки (см. фиг. 64):

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_1}{f_2}. \quad (112)$$

**Растяжение или сжатие с изгибом**  
(внецентренное действие, продольной силы)

Проверка на устойчивость при сжатии см. гл. X.

Расчет бруса малой жесткости см. стр. 119.

Общий случай. Нормальные напряжения в точке  $A$  сечения  $m-m$  (фиг. 65)

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{Pe_1}{J_1} y_2 \pm \frac{Pe_2}{J_2} y_1$$

или

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 \pm \frac{e_1}{i_1^2} y_2 \pm \frac{e_2}{i_2^2} y_1 \right) \quad (113)$$

(сложение напряжений, соответствующих центральной продольной силе  $N = P$  и двум изгибающим моментам

$M_1 = Pe_1$  и  $M_2 = Pe_2$ ). Здесь  $e_1$  и  $e_2$  — координаты по отношению к центральным осям  $1$  и  $2$  точки  $C$  пересечения линии действия силы  $P$  с плоскостью сечения  $m-m$ ;  $y_1$  и  $y_2$  — расстояния в направлении осей  $1$  и  $2$  точки, в которой определяются

напряжения;  $i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}$ ;

$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}}$  — радиусы инерции сечения для главных центральных осей  $1$  и  $2$

Точки сечения, в которых нормальное напряжение равно нулю, образуют нейтральную линию. Уравнение нейтральной линии

$$1 + \frac{e_1}{i_1^2} x + \frac{e_2}{i_2^2} y = 0, \quad (114)$$

где  $x$  и  $y$  — ее координаты по отношению к осям  $1$  и  $2$ .

Для построения нейтральной линии вычисляются отрезки  $a_1$  и  $a_2$ , отсекаемые ею на осях  $1$  и  $2$ :

$$a_1 = -\frac{i_2^2}{e_1}; \quad a_2 = -\frac{i_1^2}{e_2}. \quad (115)$$

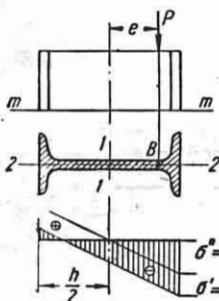
Нейтральная линия расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка  $C$ , через которую в сечении проходит линия действия продольной силы. Касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии, дают на контуре две точки, в которых возникают наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. Если точка



Фиг. 65.

приложения силы перемещается по некоторой прямой, то нейтральная линия вращается вокруг некоторой точки.

Симметричное сечение (прямоугольник, двутавр, круг) с силой, лежащей в плоскости симметрии. Сила  $P$  в сечении  $m-m$  (фиг. 66) проходит через точку  $B$ , лежащую на главной оси 2 так, что сила имеет эксцентриситет  $e$  в направлении оси 2. Полное напряжение в крайних точках сечения



Фиг. 66.

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{P}{F} \left( 1 \pm \frac{e}{i_1^2} y \right), \quad (116)$$

где

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}}.$$

В случае прямоугольного поперечного сечения, имеющего размер сечения  $h$ , параллельный эксцентриситету  $e$ ,

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{P}{bh} \left( 1 \pm \frac{6e}{h} \right). \quad (116a)$$

Проверка на прочность при изгибе в двух главных плоскостях:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_1}{J_1} y_2 \pm \frac{M_2}{J_2} y_1 \leq [\sigma]_{\text{н}}, \quad (117)$$

где  $N$  — продольное усилие;  $M_1$  и  $M_2$  — изгибающие моменты по отношению к главным осям 1 и 2 сечения;  $F$ ,  $J_1$  и  $J_2$  — площадь и главные моменты инерции сечения нетто;  $y_1$  и  $y_2$  — расстояния рассматриваемой точки от осей 1 и 2. Уточнения расчета на прочность см. гл. XIV.

При изгибе в одной главной плоскости

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нм}}} \pm \frac{M}{W_{\text{нм}}} < [\sigma]_{\text{н}}. \quad (118)$$

Если допустимое напряжение  $[\sigma]_{\text{н}}$  на изгиб значительно отличается от допустимого напряжения на растяжение

$[\sigma]_p$  и на сжатие  $[\sigma]_{\text{сж}}$ , то проверка прочности ведется по формулам

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нм}}} \frac{[\sigma]_{\text{н}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \pm \frac{M}{W_{\text{нм}}} \leq [\sigma]_{\text{н}} \quad (118a)$$

(сжатие с изгибом);

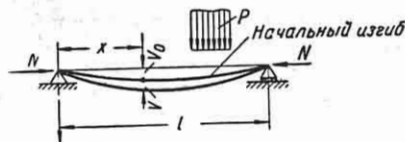
$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нм}}} \frac{[\sigma]_{\text{н}}}{[\sigma]_p} \pm \frac{M}{W_{\text{нм}}} \leq [\sigma]_{\text{н}} \quad (118б)$$

(растяжение с изгибом).

В случае хрупкого материала проверка прочности производится по наибольшим напряжениям для растянутой и сжатой зон при допустимых напряжениях  $[\sigma]_{\text{раст}}$  и  $[\sigma]_{\text{сж}}$ .

Проверку на устойчивость см. гл. X.

**Продольно-поперечный изгиб** (изгиб происходит в главной плоскости). В гибком бруске прогибы  $v$  соизмеримы с размерами поперечного сечения и начальным эксцентриситетом  $e = v_0$  и дают дополнительную силу  $N$  из-за изгиба (фиг. 67). Полный изгибающий момент  $M$  в сечении  $x$  при деформации складывается из



Фиг. 67.

изгибающего момента от поперечной нагрузки и момента от продольной силы:

$$M = M_{\text{пол}} \pm N(e + v), \quad (119)$$

где  $e$  — начальный эксцентриситет силы  $N$ .

Нормальные напряжения в поперечном сечении в крайних волокнах в плоскости изгиба

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_{\text{пол}} + N(e + v)}{W}, \quad (120)$$

где  $M_{\text{пол}}$  — изгибающий момент в рассматриваемом сечении от поперечной нагрузки (при  $N = 0$ );  $F$  и  $W$  — площадь и момент сопротивления сечения. Продольная растягивающая сила уменьшает, а сжимающая увеличивает напряжения изгиба

от поперечной нагрузки. Как следует из формулы (120), при продольно-поперечном изгибе напряжения оказываются не пропорциональными нагрузкам.

Прогибы  $v$  определяются по приводимым ниже приближенным или точным формулам для одновременного действия поперечной и продольной нагрузок. Приводимые формулы относятся к брусам, имеющим малые прогибы и углы поворота и малую высоту сечения по сравнению с радиусом искривления. Изгиб тонких брусев в общем случае см. стр. 119.

Оценка необходимости учета момента  $Nv$  от продольной силы. Находят  $v_{\text{пол}}$  от действия поперечных нагрузок и подсчитывают приближенную величину напряжений от изгиба, вызванных продольной силой:

$$\sigma_{\text{прод. изг}} \approx \frac{Nv_{\text{пол}}}{W}. \quad (120a)$$

Если  $\sigma_{\text{прод. изг}} \ll \sigma$ , то напряжения от изгиба, вызванные продольной силой, можно не учитывать; здесь

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_{\text{пол}} + Ne}{W}.$$

Приближенный метод определения  $M$ . Наибольший прогиб  $f$  от одновременного действия поперечных и продольных нагрузок находится по приближенной формуле

$$f \approx \frac{f_0}{1 \mp \alpha^2}. \quad (121)$$

где  $f_0$  — наибольший прогиб от поперечных нагрузок и момента  $Ne$ ;  $\alpha = \frac{N}{P_{\text{кр}}}$  — отношение продольной силы  $N$  и критической  $P_{\text{кр}}$  для данного бруса. Знак минус при  $N$  сжимающей и плюс при  $N$  растягивающей.

Полный изгибающий момент при одновременном действии заданных поперечных и продольных сил

$$M_{\text{max}} \approx M_{\text{пол}} + Ne + \frac{Nf_0}{1 \mp \alpha^2}. \quad (121a)$$

Приближенные формулы (121) и (121a) дают ошибку  $< 20\%$  при  $N < 0,5P_{\text{кр}}$  (для  $-N$ ) и при  $N < 10P_{\text{кр}}$  (для  $+N$ ) (при постоянном знаке кривизны по длине бруса).

В случае совместного действия различных видов поперечной нагрузки изгибающий момент (а также поперечные

силы и прогибы) находится как сумма изгибающих моментов, получающихся при данной продольной силе  $N$  от действия каждой из поперечных нагрузок в отдельности.

Точный метод определения  $M$  заключается в решении дифференциального уравнения упругой линии для изгиба при одновременном действии поперечной и продольной нагрузок (см. стр. 119, а также [5], [8]).

Изгибающие моменты для основных случаев продольно-поперечного изгиба могут быть на основании точного решения подсчитаны по формулам табл. 23.

Графический метод определения изгибающих моментов при продольно-поперечном изгибе разработан Н. Г. Ченцовым (см. [11]).

Проверка на прочность.

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} + \frac{M_{\text{max}}}{W_{\text{нт}}} \leq [\sigma]_{\text{из}}, \quad (122)$$

где  $M_{\text{max}}$  — наибольший изгибающий момент, определяемый указанным выше методом;  $F_{\text{нт}}$  и  $W_{\text{нт}}$  — полезные площадь и момент сопротивления сечения;  $[\sigma]_{\text{из}}$  — допустимое напряжение на изгиб (см. гл. XIV). Запас прочности при продольно-поперечном изгибе падает непропорционально увеличению нагрузки в связи с нелинейной зависимостью между напряжениями и приложенной нагрузкой.

Проверка на устойчивость в плоскости, перпендикулярной к поперечной нагрузке, производится по продольной силе  $N$  без учета поперечной нагрузки (см. гл. X).

### Изгиб и кручение

Общий случай (поперечное сечение не является кругом). Суммарный изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$  в сечении разлагаются на составляющие  $M_1$  и  $M_2$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  по главным осям 1 и 2 сечения. Отдельно от  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  и момента кручения  $M_k$  находятся соответствующие им нормальные (от  $M_1$  и  $M_2$ ) и касательные (от  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_k$ ) напряжения в сечении. Напряжение от  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_k$  находятся по формулам

$$\sigma_{M_1} = \frac{M_1}{J_1} y_1; \quad \sigma_{M_2} = \frac{M_2}{J_2} y_2$$

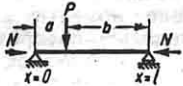
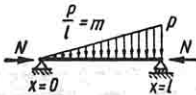


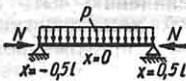


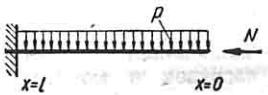
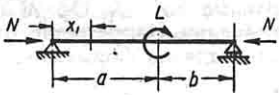
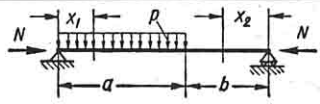
$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k}. \quad (123)$$

## Изгибающие моменты для основных случаев продольно-поперечного изгиба

 $l$  — пролет балки или длина консоли

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}; \quad u = \frac{kl}{2}.$$

Поперечное сечение постоянное

Схема бруса и уравнение изгибающего момента	Схема бруса и уравнение изгибающего момента
<p>1.</p>  $M(x) = \frac{P}{k} \left[ -\frac{\sin kb \sin kx}{\sin 2u} + \sin k(x-a) \right]$ <p>(при <math>x &lt; a</math> последний член в квадратных скобках отбрасывается)</p>	<p>6.</p>  $M(x) = \frac{p}{k^2} \left[ \frac{\sin kx}{\sin 2u} - \frac{kx}{2u} \right];$ $\max M \text{ при } x = \frac{1}{k} \arccos \frac{\sin 2u}{2u}$
<p>2.</p>  $M(x) = -L \frac{\sin k(l-x)}{\sin 2u};$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{L}{2 \cos u}; \quad \max M = \frac{L}{\sin kl}$	<p>7.</p>  $M(x) = \frac{P}{k} \frac{\sin kx}{\cos kl}$
<p>3.</p>  $M(x) = -\frac{p}{k^2} \left( 1 - \frac{\cos kx}{\cos u} \right);$ $M_0 = -\frac{pl^2}{8} \varphi_0(u).$ <p>Значения <math>\varphi_0(u)</math> см. табл. 24</p>	<p>8.</p>  $M(x) = \frac{L}{\cos kl} \cos k(l-x)$
<p>4.</p>  $v = v_0 \sin \frac{\pi x}{l};$ $M(x) = \frac{Nv_0}{1+a} \sin \frac{\pi x}{l}; \quad a = \frac{Nl^2}{\pi^2 EJ}$	<p>9.</p>  $M_{\max} = \frac{p}{k^2 \cos kl} (1 - \cos kl - kl \sin kl)$ <p>(при <math>x = l</math>)</p>
<p>5.</p>  $M(x_1) = L \frac{\cos kb}{\sin kl} \sin kx$ <p>(<math>0 &lt; x_1 &lt; a</math>)</p>	<p>10.</p>  $M(x_1) = \frac{p}{k^2} \left[ \frac{\cos kl - \cos k(l-a)}{\sin kl} \sin kx - \cos kx + 1 \right];$ $M(x_2) = \frac{p}{k^2} \left[ \frac{\cos kl - \cos k(l-a)}{\sin kl} \sin kx - \cos kx + \cos k(x-a) \right]$



Продолжение табл. 23

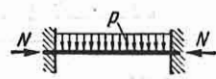
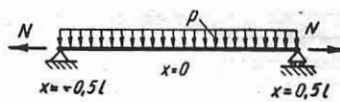


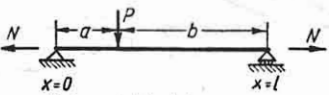

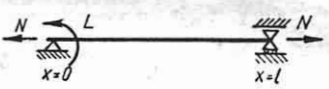
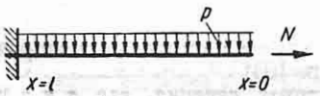
Схема бруса и уравнение изгибающего момента	Схема бруса и уравнение изгибающего момента
11.  $M(x) = \frac{p}{k^2} \left( 1 - \frac{u \cos kx}{\sin u} \right)$ Начало координат в середине пролета	15.  $M(x) = \frac{p}{k^2} \left( \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} u} - 1 \right);$ $M(u) = -\frac{pl^2}{8} \varphi_0^*(u)$ Значения $\varphi_0^*(u)$ см. табл. 24
12.  $v_1 = \frac{v_0}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$ $v_0 - \text{начальный прогиб};$ $M(x) = \frac{1}{2} \frac{Nv_0}{1 + \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{2\pi x}{l}; \quad \alpha = \frac{Nl^2}{\pi^2 EJ}$	16.  $M(x) = \frac{P}{k} \frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{ch} kl}$
13.  $M(x) = \frac{P}{k} \left[ -\frac{\operatorname{sh} kb \operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} 2u} + \operatorname{sh} k(x-a) \right]$ (при $x < a$ последний член в квадратных скобках отбрасывается)	17.  $M(x) = \frac{L}{\operatorname{ch} kl} \operatorname{ch} k(l-x)$
14.  $M(x) = L \frac{\operatorname{sh} k(l-x)}{\operatorname{sh} 2u}; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{L}{2 \operatorname{ch} u}$	18.  $M_{\max} = \frac{p}{k^2 \operatorname{ch} kl} (1 - \operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl)$ (при $x=l$ )

Таблица 24

Значения  $\varphi_0(u)$ ,  $\varphi_0^*(u)$  для продольно-поперечного изгиба к табл. 23)

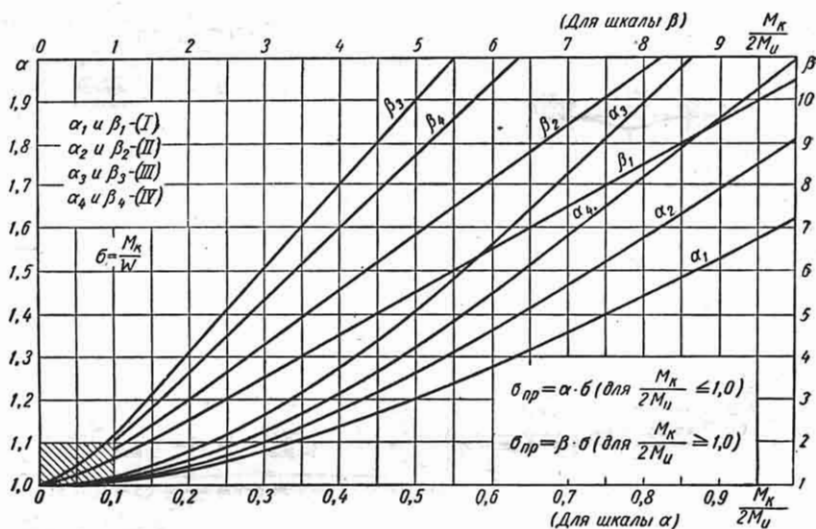
$$u = \frac{kl}{2}; \quad k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$$

$u$	$\varphi_0(u)$	$u$	$\varphi_0^*(u)$	$u$	$\varphi_0(u)$	$u$	$\varphi_0^*(u)$
0	1,000	0	1,000	1,00	1,704	5,0	0,079
0,10	1,004	0,5	0,905	1,10	1,989	6,0	0,055
0,20	1,016	1,0	0,704	1,20	2,441	7,0	0,041
0,30	1,038	1,5	0,511	1,30	3,240	8,0	0,031
0,40	1,073	2,0	0,367	1,40	4,938	9,0	0,025
0,50	1,117	2,5	0,268	1,45	6,940	10,0	0,020
0,60	1,176	3,0	0,200	1,50	11,60	11,0	0,017
0,70	1,255	3,5	0,153	$\frac{\pi}{2}$	$\infty$	12,0	0,014
0,80	1,361	4,0	0,120				
0,90	1,504	4,5	0,097				

Напряжения от  $Q_1$  и  $Q_2$  находятся с помощью табл. 18.

Величины напряжений зависят как от формы и размеров сечения, так и от положения точки в сечении, для которой они находятся. Для точек сечения, в которых напряжения от каждого из усилий достигают наибольшей величины, находятся алгебраические суммы  $\sigma$  нормальных напряжений и геометрии

отсутствии концентрации напряжений расчет на прочность производится по приведенному моменту  $M_{np}$  или приведенному напряжению  $\sigma_{np}$ , определяемым по формулам табл. 25. Для подсчета  $\sigma_{np}$  может быть использован график фиг. 68, дающий коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от отношения крутящего и изгибающего моментов  $\frac{M_K}{2M_U}$  и применяемой



Фиг. 58.

ческие суммы  $\tau$  касательных напряжений (см. стр. 103).

Для точек сечения, где  $\sigma$  и  $\tau$  имеют наибольшие значения, определяются величины приведенных напряжений  $\sigma_{np}$  по формуле табл. 25.

По условию прочности должно быть  $\sigma_{np} \leq [\sigma]$ .

Выбор величины допускаемого напряжения  $[\sigma]$ , а также уточнения расчета на прочность см. гл. XIV.

Поперечное сечение круговое (сплошное или полое). Расчет может вестись по приведенному моменту  $M_{np}$ .

Суммарный изгибающий момент

$$M_u = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \quad (124)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — изгибающие моменты по отношению к любым двум взаимно перпендикулярным центральным осям сечения 1 и 2. Для кругового поперечного сечения при изгибе и кручении и при

гипотезы прочности I, II, III, IV (см. табл. 25).

Условие прочности:

$$\sigma_{np} = \frac{M_{np}}{W} \leq [\sigma], \quad (125)$$

где  $W = \frac{\pi d^3}{32}$  — осевой момент сопротивления круглого сечения.

Диаметр  $d$  сплошного вала определяется по формуле

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{np}}{\pi [\sigma]}}$$

Наружный диаметр  $D$  сечения полого вала определяется по формуле

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{np}}{\pi (1 - \alpha^4) [\sigma]}}; \quad \alpha = \frac{d}{D},$$

где  $d$  — внутренний диаметр сечения.

Прямоугольное сечение. Расчет ведется по приведенному напряже-

Таблица 25

Формулы для приведенных напряжений  $\sigma_{np}$  и приведенных моментов  $M_{np}$ 

$\sigma$  и  $\tau$  — напряжения в поперечном сечении;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $\epsilon$  — относительная продольная деформация;  $M_u = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$  — суммарный изгибающий момент;  $M_K$  — крутящий момент в сечении;  $E$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала;  $\sigma_T, \tau_T$  и  $\sigma_B, \tau_B$  — пределы текучести и пределы прочности соответственно при растяжении и кручении.

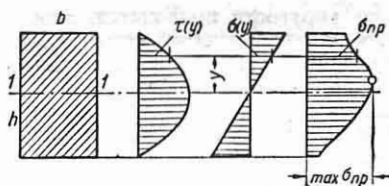
Уточнения расчета на прочность — см. гл. XIV.

Гипотезы прочности и состояния материала	Приведенные напряжения		Приведенные моменты
	через главные напряжения	через напряжения на площадке поперечного сечения	
Гипотеза наибольших нормальных напряжений; хрупкое (I)	$\sigma_{np} = \max  \sigma $ (= $\sigma_1$ или $\sigma_3$ )	$\sigma_{np} = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$M_{np} = 0,5M_u + 0,5\sqrt{M_u^2 + M_K^2}$
Гипотеза наибольших удлинений; хрупкое (II)	$\sigma_{np} = E \max \epsilon =$ = $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$ (при $\sigma_1$ в направлении $\max \epsilon$ )	$\sigma_{np} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ При $\mu = 0,3$ : $\sigma_{np} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$M_{np} = \frac{1-\mu}{2}M_u + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{M_u^2 + M_K^2}$ При $\mu = 0,3$ : $M_{np} = 0,35M_u + 0,65\sqrt{M_u^2 + M_K^2}$
Гипотеза наибольших касательных напряжений; пластическое (III)	$\sigma_{np} = 2\tau \max =$ = $\sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$M_{np} = \sqrt{M_u^2 + M_K^2}$
Гипотеза касательных октаэдрических напряжений; пластическое (IV)	$\sigma_{np}^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$	$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$M_{np} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_K^2}$
Гипотеза Мора; для пластического состояния $\kappa = \frac{\sigma_T}{2\tau_T}$ и для хрупкого $\kappa = \frac{\sigma_B}{2\tau_B}$	$\sigma_{np} = \sigma_1 - (2\kappa - 1)\sigma_3$	$\sigma_{np} = (1 - \kappa)\sigma + \kappa\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$M_{np} = (1 - \kappa)M_u + \kappa\sqrt{M_u^2 + M_K^2}$

нию  $\sigma_{np}$ . Если плоскость изгибающего момента и плоскость действия поперечной силы направлены параллельно длинной стороне  $h$  прямоугольника (фиг. 69), то наибольшие нормальные напряжения  $\sigma$  получаются на коротких сторонах прямоугольника, а наибольшие касательные напряжения  $\tau$  на нейтральной линии  $I-I$ :

$$\sigma = \frac{6M_1}{bh^2}; \quad \tau = \frac{M_K}{khb^2} + \frac{3}{2} \frac{Q_1}{bh}, \quad (126)$$

где  $M_1$  — изгибающий момент по отношению к главной оси  $I$ ;  $M_K$  — момент



Фиг. 69.

кручения;  $Q_1$  — поперечная сила в главной плоскости, содержащей ось  $I$ ;  $k$  — коэффициент из табл. 4. Распределение

по сечению напряжений, вызванных кручением, см. табл. 4.

Для точек сечения, в которых  $\sigma$  и  $\tau$  имеют максимальные значения, вычисляются приведенные напряжения по формулам табл. 25.

Проверка прочности производится по наибольшей величине  $\sigma_{пр}$ :

$$\sigma_{пр} \leq [\sigma].$$

## РАСЧЕТ КРИВЫХ И ВИТЫХ БРУСЬЕВ

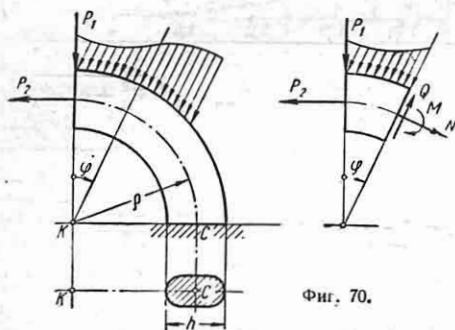
### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ БРУСЬЕВ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

Ось кривого бруса лежит в плоскости действия внешних сил.

Сечения бруса симметричны относительно той же плоскости (фиг. 70).

При отношениях  $\frac{r}{h} < 5$ , где  $r$  — радиус кривизны оси бруса, а  $h$  — размер поперечного сечения бруса в направлении радиуса  $r$ , в расчетах следует учитывать влияние кривизны бруса.

**Внутренние силы.** В поперечных сечениях бруса (фиг. 70) внутренние



Фиг. 70.

силы упругости приводятся, вообще говоря, к изгибающему моменту  $M$ , действующему в плоскости кривизны, нормальной силе  $N$ , направленной по касательной к оси бруса, и поперечной силе  $Q$ , направленной по оси симметрии сечения.

Изгибающий момент и поперечная сила связаны зависимостью

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad (127)$$

где  $ds$  — дифференциал длины оси бруса.

Выбор величины допускаемого напряжения  $[\sigma]$ , а также уточнения расчета на прочность см. гл. XIV.

### Изгиб и кручение при наличии продольной силы

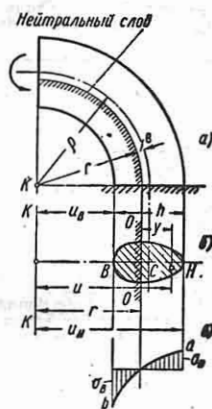
Вал круглого и некругового сечения рассматривается как в общем случае сложного сопротивления (см. стр.103)

Условились считать изгибающий момент  $M$  положительным, если при изгибе кривизна оси бруса в рассматриваемом сечении увеличивается.

Знак поперечной силы  $Q$  устанавливается из соотношения (127). Нормальная сила  $N$  считается положительной, если она является растягивающей.

### Напряжения при чистом изгибе

$$(M \neq 0; Q = 0; N = 0)$$



Фиг. 71.

В поперечном сечении бруса (фиг. 71, а и б) возникают только нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M(u-r)}{Fu(r-r)} = \frac{M \cdot y}{Fe(r+y)}. \quad (128)$$

$\sigma > 0$  соответствует напряжению растяжения;  $F$  — площадь поперечного сечения бруса;  $u$  — расстояние любой точки поперечного сечения бруса от оси  $KK$ , проходящей через центр кривизны и параллельной нейтральной оси  $OO$  (фиг. 71, б):

$$y = u - r; \quad e = r - r;$$

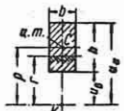
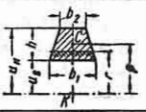
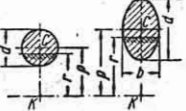
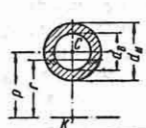
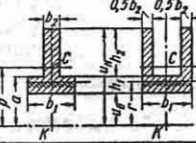
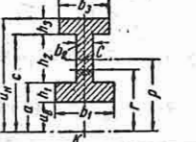
$r$  — радиус кривизны нейтральных волокон;

$$r = \frac{F}{\int \frac{dF}{u}}. \quad (129)$$

Значения  $r$  для сечения различной формы приведены в табл. 26.

Таблица 26

Значение радиуса кривизны нейтрального слоя для сечений различной формы

Форма сечения	Радиус кривизны нейтрального слоя
	$r = \frac{h}{\ln \frac{u_n}{u_g}}$
	$r = \frac{F}{b_1 u_n - b_2 u_g \ln \frac{u_n}{u_g} - (b_1 - b_2) h}$
	$r = \frac{a^2}{\delta(\rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{a^2}{4}})}$
	$r = \frac{d^2 u_n^2 - a^2}{\delta(\sqrt{\rho^2 - \frac{d^2}{4}} - \sqrt{\rho^2 - \frac{d_n^2}{4}})}$
	$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{u_n}{u_g} + b_2 \ln \frac{u_n}{u_g}}$
	$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{u_n}{u_g} + b_2 \ln \frac{u_n}{u_g} + b_3 \ln \frac{u_n}{u_g}}$

Подсчет  $r$  в числах должен проводиться самым тщательным образом, так как в формулу (128) входит разность двух численно близких величин  $\rho$  и  $r$ .

Изменение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения  $h$  представлено эпюрой на фиг. 71, в. Кривая  $ab$  — гипербола.

Наибольшее напряжение, как правило, развивается в точках поперечного сечения, ближайших к центру кривизны (внутренних):

$$\sigma_g = \frac{M(u_g - r)}{F u_g(\rho - r)} \quad (130)$$

Напряжение в точках сечения на внешних (наружных) волокнах

$$\sigma_n = \frac{M(u_n - r)}{F u_n(\rho - r)} \quad (131)$$

Значения  $u_g$  и  $u_n$  см. на фиг. 71, б (в тех случаях, когда центр тяжести сечения расположен близко к внутренним волокнам бруса,  $|\sigma_n| > |\sigma_g|$ ).

При предварительных расчетах на прочность кривых брусьев прямоугольного и круглого поперечного сечения можно пользоваться формулами [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_g &= -k_g \frac{M}{W}; \\ \sigma_n &= k_n \frac{M}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Для прямоугольного сечения

$$W = \frac{bh^2}{6}$$


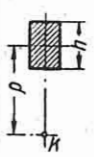
Для круглого сечения

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

Значения коэффициентов  $k_g$  и  $k_n$  приведены в табл. 27.

Таблица 27

Значения коэффициентов  $k_g$  и  $k_n$

	$\frac{\rho}{d}$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	$k_g$	1,60	1,36	1,26	1,17	1,12	1,09	1,08
	$k_n$	0,73	0,82	0,86	0,91	0,93	0,95	0,96
	$\frac{\rho}{h}$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
	$k_g$	1,53	1,29	1,21	1,12	1,09	1,06	1,05
	$k_n$	0,75	0,82	0,86	0,92	0,95	0,97	0,98

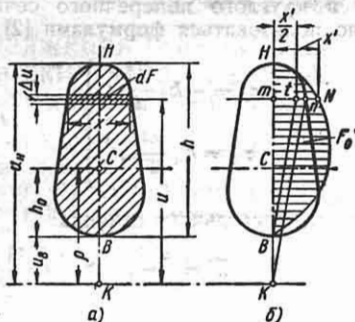
Приближенно для сечений прямоугольной формы при  $\frac{\rho}{h} > 1$

$$k_g = \frac{6 \frac{\rho}{h} - 1}{6 \frac{\rho}{h} - 3}; \quad (133)$$

для сечений круглой формы при  $\frac{\rho}{d} > 1$

$$k_s = \frac{8 \frac{\rho}{d} - 1}{8 \frac{\rho}{d} - 4}. \quad (134)$$

Для сечений сложного очертания положение нейтральной линии следует определять графо-аналитическим способом А. С. Орлина [5] (фиг. 72).



Фиг. 72.

Если найти приведенную площадь

$$F_0 = \int_F \frac{(u - u_0)}{u} dF \quad (135)$$

и положить

$$\frac{F_0}{F} = \psi,$$

то

$$r = \frac{u_s}{1 - \psi},$$

тогда

$$\sigma_s = -\frac{M}{F} \cdot \frac{1}{\left(\frac{h_0}{\psi} - \rho\right)}; \quad (136)$$

$$\sigma_n = \frac{M}{F} \cdot \frac{\left(\frac{h}{\psi u_n} - 1\right)}{\left(\frac{h_0}{\psi} - \rho\right)}, \quad (137)$$

где  $h_0 = \rho - u_0$  — расстояние центра тяжести сечения от внутреннего волокна бруса (фиг. 72, а).

Расстояние нейтрального слоя от оси бруса (см. фиг. 71)

$$e = \frac{h_0 - \rho\psi}{1 - \psi}. \quad (138)$$

Для вычисления интеграла (135) сечение разбивается на узкие полоски равной ширины  $\Delta u$  (фиг. 72, а). По средней длине  $x$  каждой полоски подсчитывается приведенная длина

$$x' = \frac{x(u - u_0)}{u}.$$

Приведенная площадь

$$F_0 = \Delta u \sum x'.$$

Отрезки  $x'$  удобно строить графически (фиг. 72, б). Соединим, например, точку  $n$  контура сечения с центром кривизны  $K$ . Луч из точки  $B$ , параллельный  $Kn$ , отсечет на горизонте  $mn$  отрезок

$$mt = \frac{x'}{2}.$$

Откладывая от оси симметрии  $BH$  отрезок  $mN = 2mt = x'$ , наносят точки  $N$  контура  $BNH$ , ограничивающего приведенную площадь  $F_0$ . Таким построением находится точка контура  $BNH$ . Площадь  $F_0$ , заштрихованная на фиг. 72, б, определяется в этом случае планиметром. Расчет кривого бруса графическим способом см. [5].

Методами теории упругости изучен чистый изгиб плоского кривого бруса прямоугольного и круглого поперечного сечения [1], [6].

**Напряжение при изгибе плоского кривого бруса в общем случае**  
( $M \neq 0$ ;  $N \neq 0$ ;  $Q \neq 0$ )

Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N, \quad (139)$$

где  $\sigma_M$  вычисляется по формуле (128):

$$\sigma_N = \frac{N}{F}. \quad (140)$$

Условие прочности:  $\sigma \leq [\sigma]$ , где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

Касательные напряжения в поперечном сечении бруса распределяются примерно так же, как в поперечном сечении прямого бруса при его изгибе. Уточнение вопроса см. [4]. При исследовании напряженного состояния и определении главных напряжений следует руководствоваться теми же приемами, что и в случае прямого бруса.

*Пример.* Рама клепальной машины (фиг. 73) подвергается действию сил  $P = 5$  т. Определить напряжение в точках  $A$  и  $B$  сечения  $AB$ .

Изгибающий момент в сечении *AB*

$$M = -5000(100 + 18 + 12) = -650\,000 \text{ кгсм.}$$

Нормальная сила в сечении *AB*

$$N = +5000 \text{ кг.}$$

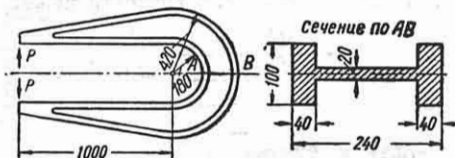
Площадь сечения *AB*

$$F = 2 \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = 112 \text{ см}^2.$$

Радиус кривизны  $\rho = 30 \text{ см}$ . Высота сечения  $h = 24 \text{ см}$ .

$$\frac{\rho}{h} = \frac{30}{24} = 1,25.$$

Расчет следует вести по формулам для кривого бруса большой кривизны.



Фиг. 73.

По формуле табл. 26 для двутаврового сечения

$$r = \frac{10 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 10 \cdot 4}{10 \ln \frac{22}{18} + 2 \ln \frac{38}{22} + 10 \ln \frac{42}{38}} = 27,43 \text{ см.}$$

Расстояние нейтрального слоя от центра тяжести сечения

$$e = \rho - r = 30 - 27,43 = 2,57 \text{ см.}$$

По формуле (130)

$$\sigma_a = \frac{-650\,000(18 - 27,43)}{112 \cdot 18(30 - 27,43)} = +1180 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (131)

$$\sigma_n = \frac{-650\,000(42 - 27,43)}{112 \cdot 42(30 - 27,43)} = -780 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (140)

$$\sigma_N = \frac{5000}{112} \approx 45 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (139) полное напряжение в точке *A* сечения *AB* (фиг. 73)

$$\sigma_A = +1180 + 45 = 1225 \text{ кг/см}^2.$$

Полное напряжение в точке *B*

$$\sigma_B = -780 + 45 = -735 \text{ кг/см}^2.$$

**Потенциальная энергия.** Потенциальная энергия *U* деформированного кривого бруса, ось которого имеет длину *s*,

$$U = \sum_s \int \left( \frac{M^2 ds}{2EF\rho} + \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{kQ^2 ds}{2GF} + \frac{MN ds}{EF\rho} \right). \quad (141)$$

В формулу (141) *M* и *N* вносятся со своими знаками. *E* и *G* — модуль нормальной упругости и модуль сдвига.

Коэффициент *k* зависит от формы поперечного сечения: для прямоугольного сечения  $k \approx 1,2$ ; для круглого  $k \approx 1,1$ .

**Вычисление перемещений.** Для плоского кривого бруса большой кривизны перемещение точки его оси равно

$$\delta = \sum_s \int \left( \frac{MM_1 ds}{EF\rho} + \frac{NN_1 ds}{EF} + \frac{kQQ_1 ds}{GF} + \frac{(MN_1 + NM_1) ds}{EF\rho} \right), \quad (142)$$

где *M*<sub>1</sub>, *N*<sub>1</sub> и *Q*<sub>1</sub> — внутренние силовые факторы в сечениях бруса от единичной нагрузки, приложенной в точке, перемещение которой определяется по направлению искомого перемещения  $\delta$ .

Если радиус кривизны бруса  $\rho > 5h$ , то расчет перемещений ведется по формуле

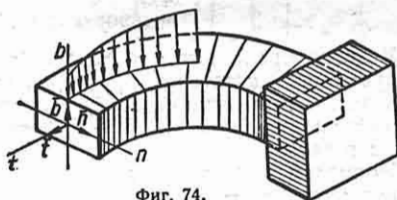
$$\delta = \sum_s \int \frac{MM_1 ds}{EJ}. \quad (142a)$$

Если перемещение  $\delta$ , подсчитанное по формуле (142) или (142a), окажется отрицательным, то это означает, что перемещение направлено в сторону, противоположную единичной нагрузке.

Угловое перемещение поперечного сечения определяется по тем же формулам (142) и (142a), но *M*<sub>1</sub>, *N*<sub>1</sub> и *Q*<sub>1</sub> в этом случае будут внутренними силовыми факторами, возникающими от единичной пары, приложенной в том сечении, перемещение которого определяется.

**Напряжения в плоских кривых брусках круглого и прямоугольного поперечного сечения при нагрузке, действующей в плоскостях, нормальных к плоскости кривизны** (фиг. 74)

Внутренние силы в сечении приводятся к центру тяжести и раскладываются по осям *t*, *n*, *b* (фиг. 74).  $\bar{t}$  — орт



Фиг. 74.

касательной к оси, направлен по внешней нормали к поперечному сечению бруса; *n* — орт главной нормали оси,

направлен к центру кривизны;  $\bar{b}$  — орт бинормали, перпендикулярен плоскости кривизны и образует с  $\bar{t}$  и  $\bar{n}$  правостороннюю систему.

В общем случае в поперечном сечении бруса возникают изгибающий момент  $M_n$ , действующий в плоскости  $tb$ ; крутящий момент  $M_t$  ( $M_t > 0$ , когда со стороны конца вектора  $\bar{t}$  он направлен против стрелки часов); поперечная сила  $Q_b$  — параллельная оси  $b$  ( $Q_b > 0$ , когда сила направлена вдоль оси  $b$ ).

Напряжения в кривом брусике круглого поперечного сечения диаметра  $d$  (фиг. 75) по исследованиям Н. А. Чернышева [7].

В точках  $A$  нормальные и касательные напряжения с достаточной степенью точности могут быть вычислены по формулам для прямого бруса:

$$\sigma_A = \frac{M_n}{W_n} \quad \text{и} \quad \tau_A = \frac{M_t}{W_p},$$

где  $W_n = \frac{\pi d^3}{32}$ , а  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ .

Расчет на прочность должен вестись по приведенному напряжению (см. табл. 25).

В поперечном сечении бруса  $|\sigma_A|$  является наибольшим нормальным напряжением.

Наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении возникает в точке  $B$  (фиг. 75), ближайшей к центру кривизны оси бруса:

$$\tau_B = k_t \frac{M_t}{W_p} + k_b \frac{Q_b}{F}; \quad (143)$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Условие прочности:  $\tau \leq [\tau]$ , где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение.

Значения коэффициентов  $k_t$  и  $k_b$  при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$  приведены в табл. 28.

Нормальное напряжение в точке  $B$  равно нулю ( $\sigma_B = 0$ ).

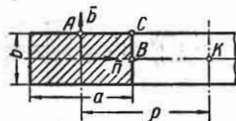
Напряжения в кривом брусике прямоугольного поперечного сечения (фиг. 76) по исследованиям С. П. Демидова [3].

Таблица 28

Значения коэффициентов  $k_t$  и  $k_b$ 

$\frac{\rho}{d}$	$k_t$	$k_b$	$\frac{\rho}{d}$	$k_t$	$k_b$
1	1,40	1,76	3	1,13	1,41
1,5	1,27	1,58	4	1,10	1,36
2	1,20	1,49	5	1,08	1,34

В точках  $A$  нормальное напряжение с достаточной степенью точности может



Фиг. 76.

быть вычислено, как для прямого бруса:

$$\sigma_A = \frac{M_n}{W_n},$$

где  $W_n = \frac{ab^2}{6}$  (фиг. 76).

Касательное напряжение в точке  $A$

$$\tau_A = k \frac{M_t}{W_k}.$$

При коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$  и

$\frac{b}{a} = 0,33 \quad 0,5 \quad 0,8 \quad 1,0 \quad 1,25 \quad 1,5 \quad 2,0 \quad 3,0$

$k = 1,32 \quad 1,26 \quad 1,09 \quad 1,0 \quad 0,92 \quad 0,86 \quad 0,80 \quad 0,75$

$$W_k = \nu a^2 b,$$

где  $\nu$  находится в зависимости от величины отношения  $\frac{b}{a}$ :

$\frac{b}{a} = 0,33 \quad 0,5 \quad 0,8 \quad 1,0 \quad 1,25 \quad 1,5 \quad 2,0 \quad 3,0$

$\nu = 0,107 \quad 0,155 \quad 0,193 \quad 0,208 \quad 0,221 \quad 0,231 \quad 0,246 \quad 0,267$

Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении развивается во внутренних угловых его точках  $C$  (фиг. 76):

$$\sigma_C = k_n \frac{M_n}{W_n}.$$

Значения коэффициента  $k_n$  при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$  приведены в табл. 29.



Таблица 29

Значения коэффициента  $k_n$

$\frac{\rho}{a}$	$b/a$							
	0,33	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2	3
2	1,21	1,22	1,28	1,34	1,40	1,43	1,45	1,47
2,5	1,17	1,18	1,22	1,27	1,32	1,34	1,37	1,38
3	1,14	1,15	1,19	1,23	1,26	1,28	1,31	1,32
3,5	1,12	1,13	1,16	1,19	1,23	1,24	1,26	1,27
4	1,11	1,11	1,14	1,17	1,20	1,21	1,23	1,24
5	1,09	1,09	1,11	1,14	1,16	1,17	1,18	1,19

Касательные напряжения в угловых точках прямоугольного поперечного сечения, как известно, равны нулю ( $\tau_C = 0$ ).

Наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении возникает, как правило, в середине внутренней его стороны, т. е. в точке  $B$  (фиг. 76):

$$\tau_B = k'_t \frac{M_t}{W_\kappa} + k'_b \frac{Q}{F} \quad (143a)$$

( $F = ab$ ).

Принимая коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , имеем

$\frac{b}{a}$	0,33	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2	3
$k'_b = 2,67$	2,19	1,83	1,72	1,64	1,61	1,56	1,53	

Значения коэффициента  $k'_t$  приведены в табл. 30.

Таблица 30

Значения коэффициента  $k'_t$

$\frac{\rho}{a}$	$b/a$							
	0,33	0,5	0,8	1	1,25	1,5	2	3
2	1,28	1,23	1,16	1,14	1,11	1,10	1,08	1,05
2,5	1,22	1,19	1,13	1,11	1,10	1,08	1,06	1,04
3	1,18	1,16	1,11	1,09	1,08	1,07	1,05	1,03
3,5	1,16	1,13	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,03
4	1,14	1,12	1,08	1,07	1,06	1,05	1,04	1,02
5	1,11	1,09	1,07	1,05	1,05	1,04	1,03	1,02

Нормальное напряжение в точке  $B$  равно нулю ( $\sigma_B = 0$ ).

### НАПРЯЖЕНИЯ У ВИНТОВЫХ БРУСЬЕВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Уравнения оси винтового бруса в цилиндрических координатах (фиг. 77)

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi,$$

где  $R$  — радиус образующего цилиндра;  $\varphi$  — полярный угол;  $h$  — шаг винтовой линии;

$$h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол подъема винтовой линии. Система координат  $xuz$  для правой винтовой линии выбирается правой.

Кривизна оси

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} \quad (144)$$

( $\rho$  — радиус кривизны оси винтового бруса).

Кручение оси

$$k = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R}. \quad (145)$$

Кривизна и кручение оси винтового бруса постоянны во всех ее точках.

Кривизна бруса характеризуется

отношением  $\frac{\rho}{r}$ ,

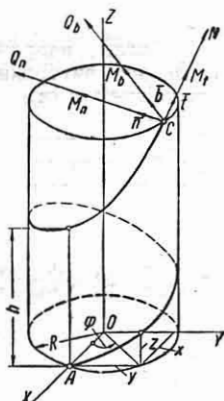
где  $r$  — радиус кругового сечения. В

случае  $\frac{\rho}{r} > 10 \div$

$\div 12$  при расчете винтового бруса с достаточной степенью точности можно пользоваться формулами, разработанными для прямого бруса.

**Внутренние силы.** В общем случае нагружения силы упругости приводятся к главному моменту и главному вектору, который принято относить к центру тяжести сечения. Главный момент и главный вектор раскладываются по осям  $t, n, b$  (фиг. 77).

$\vec{T}$  — орт касательной к оси, направлен в сторону возрастания дуги  $s$ , отсчитыв-



Фиг. 77.

ваемой по оси бруса;  $\bar{n}$  — орт главной нормали, направлен к центру кривизны;  $\bar{b}$  — орт бинормали, перпендикулярен  $\bar{t}$  и  $\bar{n}$  (система координат  $t, n, b$  выбирается правой для правой винтовой линии и наоборот);  $M_n$  и  $M_b$  — изгибающие моменты относительно осей  $n$  и  $b$ ;  $M_t$  — крутящий момент;  $Q_n$  и  $Q_b$  — составляющие поперечной силы по осям  $n$  и  $b$ ;  $N$  — нормальная сила (составляющая по оси  $t$ ).

Внутренние силы  $Q_n, Q_b$  и  $N$ , приложенные к части бруса, содержащей начало отсчета дуги  $s$  (т. е. точку  $A$  на фиг. 77), положительны, если они направлены вдоль осей  $t, n, b$  в этом сечении.

Моменты внутренних сил  $M_t, M_n, M_b$ , приложенные к части бруса, содержащей начало отсчета дуги (точку  $A$  на фиг. 77), положительны, если они „вращают“ оси соответственно от  $t$  к  $n$ , от  $n$  к  $b$  и от  $b$  к  $t$  по кратчайшему расстоянию.

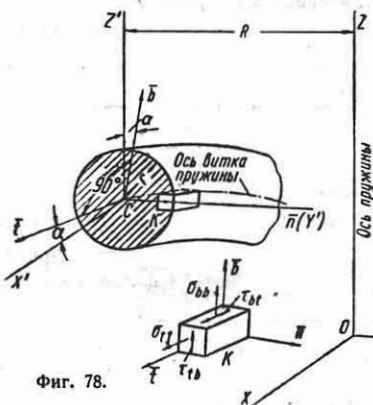
### Напряженное состояние (при отсутствии нагрузок, распределенных по длине бруса)

Исследование напряженного состояния в рассматриваемом случае проведено методами теории упругости Н. А. Чернышевым [7].

Наиболее напряженными являются точки на внутреннем волокне бруса (ближайшем к оси  $Z$  образующего цилиндра).

Значения компонентов напряжений (фиг. 78) в опасной точке  $K$  при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$ :

Для винтового бруса, нагруженного по торцам силой  $P$ , направленной по оси



Фиг. 78.

образующего цилиндра (ось  $Z$ ), имеем в опасной точке  $K$  при  $\mu = 0,3$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{bb} &= k_{bP} \frac{PR}{W}; \\ \sigma_{tt} &= k_{tP} \frac{PR}{W}; \\ \tau_{bt} &= \tau_{tb} = k_P \frac{PR}{W_p}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Значения коэффициентов  $k_{bP}, k_{tP}$  и  $k_P$  приведены в табл. 31 в зависимости от значений отношения  $\frac{R}{r}$  и угла  $\alpha$ .

Сила  $P$ , растягивающая винтовой брус, вносится в формулы (147) со знаком плюс.

Сила обратного направления вносится со знаком минус.

$$\sigma_{bb} = -\frac{1}{W} \left[ 0,154M_b \left( \frac{r}{\rho} \right) + (0,246M_b - 0,096M_t \operatorname{tg} \alpha - 0,070\rho N) \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right]; \quad (146)$$

$$\sigma_{tt} = -\frac{1}{W} \left[ M_b + (0,871M_b - 0,250\rho N) \left( \frac{r}{\rho} \right) + (0,642M_b + 0,032M_t \operatorname{tg} \alpha - 0,074\rho N) \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right];$$

$$\tau_{tb} = \tau_{bt} = \frac{1}{W_p} \left[ M_t + (0,635M_t + 0,615\rho Q_b) \left( \frac{r}{\rho} \right) + (0,346M_t - 0,183M_b \operatorname{tg} \alpha + 0,529\rho Q_b) \left( \frac{r}{\rho} \right)^2 \right];$$

$$W = \frac{\pi r^3}{4}; \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2}$$

(нормальные напряжения  $\sigma > 0$  являются растягивающими).

Формулы (147) находят применение при расчете винтовых цилиндрических пружин растяжения-сжатия (см. т. 4, гл. XVIII).

Для винтового бруса, нагруженного по концам парами  $M_0$ , в плоскости, пер-

Таблица 31

Значения коэффициентов  $k_{bP}$ ,  $k_{tP}$  и  $k_P$ 

$\frac{R}{r}$	$k_{bP}$			$k_{tP}$			$k_P$		
	$\alpha$			$\alpha$			$\alpha$		
	0°	15°	30°	0°	15°	30°	0°	15°	30°
3	0	0,023	0,033	0	0,368	0,673	1,514	1,441	1,241
4	0	0,015	0,028	0	0,337	0,625	1,367	1,306	1,136
6	0	0,008	0,013	0	0,309	0,581	1,233	1,182	1,039
8	0	0,006	0,009	0	0,296	0,560	1,170	1,124	0,993
10	0	0,005	0,007	0	0,288	0,547	1,134	1,091	0,966

Таблица 32

Значения коэффициентов  $k_{bm}$ ,  $k_{tm}$  и  $k_m$ 

$\frac{R}{r}$	$k_{bm}$			$k_{tm}$			$k_m$		
	$\alpha$			$\alpha$			$\alpha$		
	0°	15°	30°	0°	15°	30°	0°	15°	30°
3	0,079	0,069	0,045	1,362	1,288	1,098	0,000	0,314	0,585
4	0,054	0,047	0,032	1,258	1,196	1,028	0,000	0,300	0,562
6	0,033	0,029	0,020	1,163	1,112	0,968	0,000	0,286	0,541
8	0,023	0,021	0,014	1,119	1,073	0,942	0,000	0,279	0,531
10	0,018	0,016	0,011	1,094	1,050	0,926	0,000	0,275	0,524

пендикулярной к оси  $Z$  образующего цилиндра (закручивающей парой), имеем в опасной точке  $K$  при  $\mu = 0,3$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{bb} &= -k_{bm} \frac{M_0}{W}; \\ \sigma_{tt} &= -k_{tm} \frac{M_0}{W}; \\ \tau_{bt} &= \tau_{tb} = k_m \frac{M_0}{W_p}. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Значения коэффициентов  $k_{bm}$ ,  $k_{tm}$  и  $k_m$  приведены в табл. 32 в зависимости от значений  $\frac{R}{r}$  и угла  $\alpha$ .

Момент  $M_0$ , закручивающий винтовой брус, вносится в формулы (148) со знаком плюс; момент, раскручивающий винтовой брус, — со знаком минус. Формулы (148) находят применение при расчете винтовых пружин кручения (см. т. 4, гл. XVIII).

Расчет на прочность ведется по приведенному напряжению (см. табл. 25).

## РАСЧЕТ НА ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ БОЛЬШОЙ ГИБКОСТИ

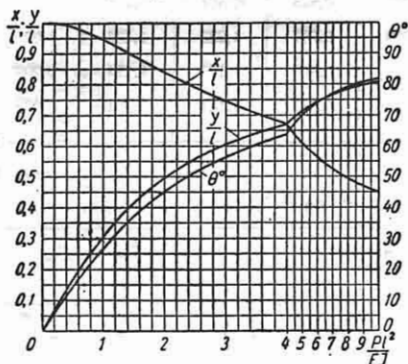
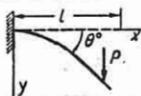
### ВВЕДЕНИЕ

Большие перемещения при плоском изгибе стержня характеризуются тем, что взаимные перемещения двух точек оси стержня имеют тот же порядок, что и длина отрезка стержня между этими точками; угловые перемещения  $\vartheta$  столь

значительны, что при расчетах нельзя принимать  $\sin \vartheta \approx \vartheta$  и  $\cos \vartheta \approx 1$ .

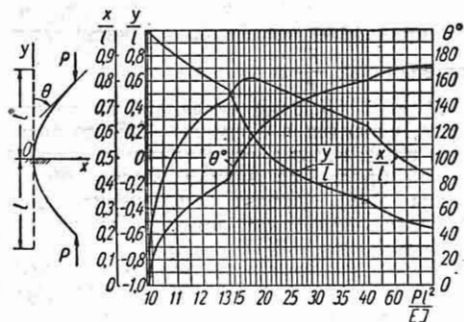
В задачах изгиба в больших перемещениях искомыми величинами обычно являются уравнение изогнутой оси стержня, упругое перемещение какой-либо точки стержня при заданной нагрузке, напряжения, потенциальная энергия,

упругая характеристика, т. е. зависимость углового или линейного перемещения выбранной точки стержня в заданном направлении от величины нагрузки, траектория движения данной точки при изгибе стержня и т. п.



Фиг. 79.

При больших перемещениях неприменимы принципы неизменности начальных размеров и независимости действия сил, а направление действия сил и место их приложения к стержню могут изменяться в процессе изгиба.



Фиг. 80.

Аналитическое решение задач относительно громоздко; более просто задачи решаются графически или графоаналитически.

Для двух наиболее часто встречающихся схем нагружения стержней на фиг. 79 и 80 приведены результаты точного решения в виде графиков прогиба, горизонтального смещения и угла пово-

рота конца стержня в зависимости от величины силы  $P$ , длины  $l$  и жесткости  $EJ$  стержня на изгиб ( $E$  — модуль упругости материала,  $J$  — осевой момент инерции поперечного сечения стержня).

## ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ [17], [18]

В основе этого метода лежит графическое построение формы изогнутой оси стержня.

Ниже рассматривается построение изогнутой оси стержней, начальная форма которых прямая, дуга окружности или ломаная линия и которые нагружены сосредоточенными силами и моментами. Поперечное сечение должно быть постоянно по длине и иметь ось симметрии в плоскости изгиба.

Деформации материала при изгибе стержня могут и не следовать закону Гука, а также могут быть и упруго-пластическими. Изменение при изгибе кривизны стержня может быть сколь угодно большим. Растяжение или сжатие стержня не учитывается.

Решение в случае изменяющегося по длине стержня поперечного сечения и при наличии распределенной нагрузки и моментами (но при упругих деформациях) см. [17].

Построение изогнутой оси стержня, получающейся после разгрузки и благодаря наличию пластических деформаций, см. [18].

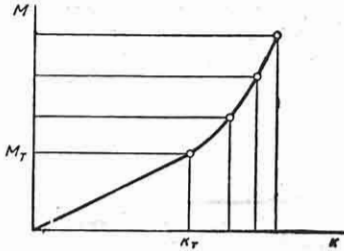
Для построения формы изогнутой оси стержня необходимо иметь график зависимости кривизны  $k = \frac{1}{\rho}$  ( $\rho$  — радиус кривизны изогнутой оси) от величины изгибающего момента  $M$ .

Эта зависимость при упругих деформациях определяется по формуле  $k = \frac{1}{EJ} M$  ( $E$  — модуль упругости материала при растяжении,  $J$  — момент инерции сечения), а при пластических деформациях получается при испытании на изгиб образца стержня или строится по диаграмме растяжения (диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ ).

### Построение графика $k - M$ по диаграмме растяжения $\sigma - \varepsilon$

Это построение применимо, если материал имеет одинаковые характеристики при растяжении и сжатии, а поперечное сечение стержня симметрично относительно нейтральной оси.

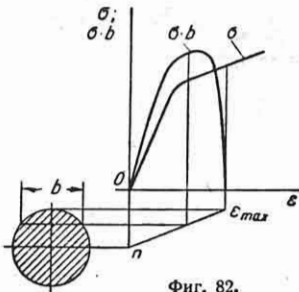
Начальный участок графика до момента  $M_T = \sigma_T W$  ( $\sigma_T$  — предел текучести материала,  $W$  — момент сопротивления поперечного сечения), при котором начинаются пластические деформации, — прямая, проводимая по уравнению  $k = \frac{1}{EJ} M$  (фиг. 81). Дальнейшая криволинейная часть графика строится по



Фиг. 81.

точкам. Для этого следует задаться рядом значений кривизны  $k$  и определить для каждого значения кривизны величину момента следующим построением (фиг. 82).

Левее и ниже диаграммы  $\sigma - \epsilon$  в произвольном масштабе вычерчивается по-



Фиг. 82.

перечное сечение стержня так, чтобы нейтральная ось была параллельна оси  $\epsilon$ .

По формуле  $\epsilon_{\max} = \frac{h}{2} k$  подсчитывается деформация  $\epsilon_{\max}$  при выбранном значении  $k$  ( $h$  — высота сечения). Величина  $\epsilon_{\max}$  откладывается на оси  $\epsilon$ , и полученная точка соединяется с точкой  $n$  пересечения нейтральной оси с продолжением оси  $\sigma$ .

На сечении стержня проводится на произвольном расстоянии от нейтральной оси ряд линий, параллельных оси  $\epsilon$ , через точки пересечения этих линий с наклонной прямой  $n\epsilon_{\max}$  проводятся

прямые, параллельные оси  $\sigma$ , и на них в произвольном масштабе откладываются от оси  $\epsilon$  отрезки, пропорциональные произведению  $\sigma b$  ( $\sigma$  — напряжение в некоторой точке сечения, а  $b$  — ширина поперечного сечения стержня в этом месте).

По полученным точкам строится кривая  $\sigma b - \epsilon$  и затем по формуле  $M = \frac{2}{k^2} S$  подсчитывается момент, соответствующий принятой кривизне  $k$  ( $S$  — статический момент относительно оси  $\sigma$  площади, ограниченной кривой  $\sigma b$  и осью  $\epsilon$ ; для вычисления его площадь под кривой  $\sigma b$  делится на ряд полосок, параллельных оси  $\sigma$ , и подсчитывается сумма произведений площади каждой полоски на расстояние от центра тяжести полоски до оси  $\sigma$ ).

### Построение изогнутой оси стержня

Наиболее просто производится построение изогнутой оси для стержня, закрепленного одним концом и нагруженного на другом конце силой, нормальной к оси стержня (фиг. 83, а—г).

Момент в произвольном сечении  $z$  стержня равен произведению силы  $P$  на плечо  $z$ . Поэтому график  $k - M$  представляет собой также график изменения кривизны  $k$  по координате  $z$  (фиг. 83, а). (Масштаб по оси  $z$  равен масштабу момента в графике  $k - M$ , деленному на величину силы  $P$ .)

Интегрированием графика  $k - z$  получается график  $\sin \varphi - z$  (фиг. 83, б), где  $\varphi$  — угол наклона касательной в произвольной точке стержня.

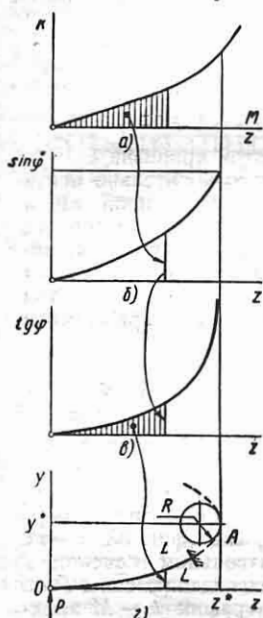
Это интегрирование выполняется графически (см. т. I, стр. 183) или путем подсчета площади под кривой и умножения ее на масштабы построения по осям  $k$  и  $z$ . При упругих деформациях материала график  $\sin \varphi - z$  может быть построен по формуле  $\sin \varphi = \frac{P}{2EJ} z^2$ .

Кривая  $\sin \varphi - z$  по тригонометрическим таблицам перестраивается в кривую  $\text{tg } \varphi - z$  (фиг. 83, в), а графическое интегрирование последней дает изогнутую ось стержня в прямоугольной системе координат  $yOz$  (фиг. 83, г).

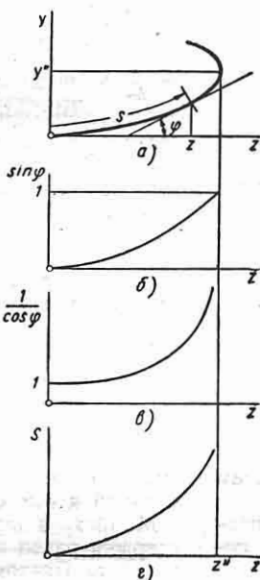
Вблизи точки сжатия  $A$  построение изогнутой оси затруднительно, так как здесь  $\text{tg } \varphi \rightarrow \infty$ . На этом участке изогнутая ось вычерчивается, как дуга окружности радиуса  $R$ , определяемого

кривизной при координате  $z^*$  (координата  $z^*$  соответствует значению  $\sin \varphi = 1$ ).

Длина  $s$  изогнутой оси до точки с координатой  $z$  (фиг. 84, а) определяется следующим построением.



Фиг. 83.



Фиг. 84.

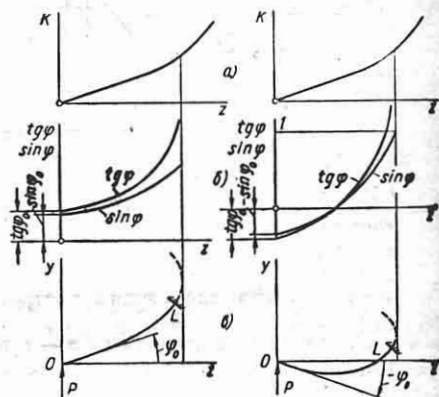
По кривой  $\sin \varphi - z^*$  (фиг. 84, б) строится кривая  $\frac{1}{\cos \varphi} - z$  (фиг. 84, в), интегрирование которой дает кривую  $s - z$  (фиг. 84, г).

В том случае, когда сила  $P$  составляет с осью стержня угол, отличающийся от прямого на величину  $\varphi_0$  (фиг. 85, в), кривая графика  $\sin \varphi$  (фиг. 85, а) поднимается или опускается в зависимости от знака  $\varphi_0$  на величину  $\sin \varphi_0$  (фиг. 85, б). Зависимость направления переноса кривой  $\sin \varphi$  от направления угла  $\varphi_0$  указана на фиг. 85. Дальнейшие построения производятся так же, как и в предыдущем случае.

Если изгиба стержень представляет собой дугу окружности (фиг. 86, в — тонкая линия), то кривая графика  $k - z$  поднимается или опускается в зависимости от знака кривизны на величину начальной кривизны  $k_{нач}$  (фиг. 86, а), после чего построения производятся аналогично первому случаю (кривизна  $k < 0$ , если изогнутая ось обращена выпуклостью в сторону оси  $y$ ).

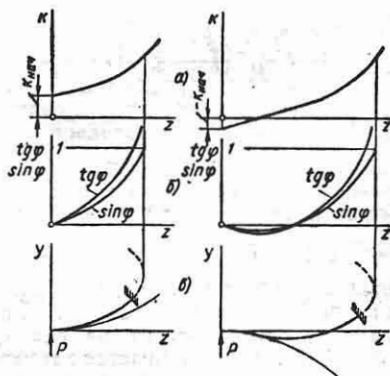
Изогнутая ось стержня, нагруженного силой  $P$  и моментом  $M$ , строится так же, как для стержня, нагруженного только силой  $P$ , но имеющего начальную кривизну  $k_{нач}$  (эта кривизна определяется по графику  $k - M$ ).

При построении изогнутой оси стержня, состоящего из участков различного поперечного сечения, на графике  $k - z$  наносятся кривые для каждого участка. Сначала строится изогнутая ось по кривой  $k - z$  для первого участка,



Фиг. 85.

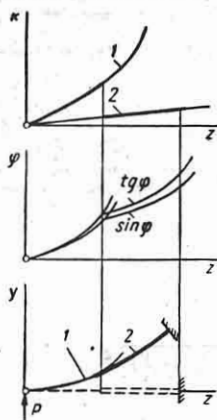
затем определяется конец первого участка, строится изогнутая ось второго участка (фиг. 87) и т. д.



Фиг. 86.

Так же по участкам строится изогнутая ось стержня, нагруженного несколькими силами. После построения оси на первом участке и определения координаты

наты  $z_1^*$  конца его сила  $P$  приводится к началу второго участка, где определяется равнодействующая  $R$  сил  $P_1$  и  $P_2$ .

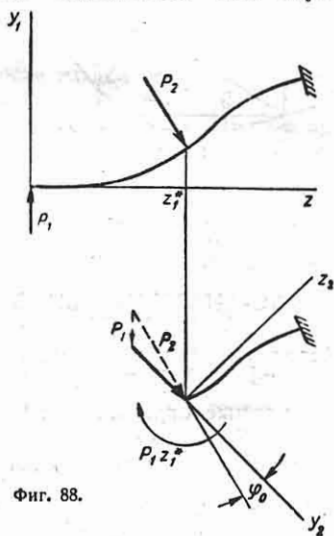


Фиг. 87.

Затем строится изогнутая ось для второго участка, который рассматривается как стержень, нагруженный силой  $R$  и моментом  $P_1 z_1^*$  (фиг. 88).

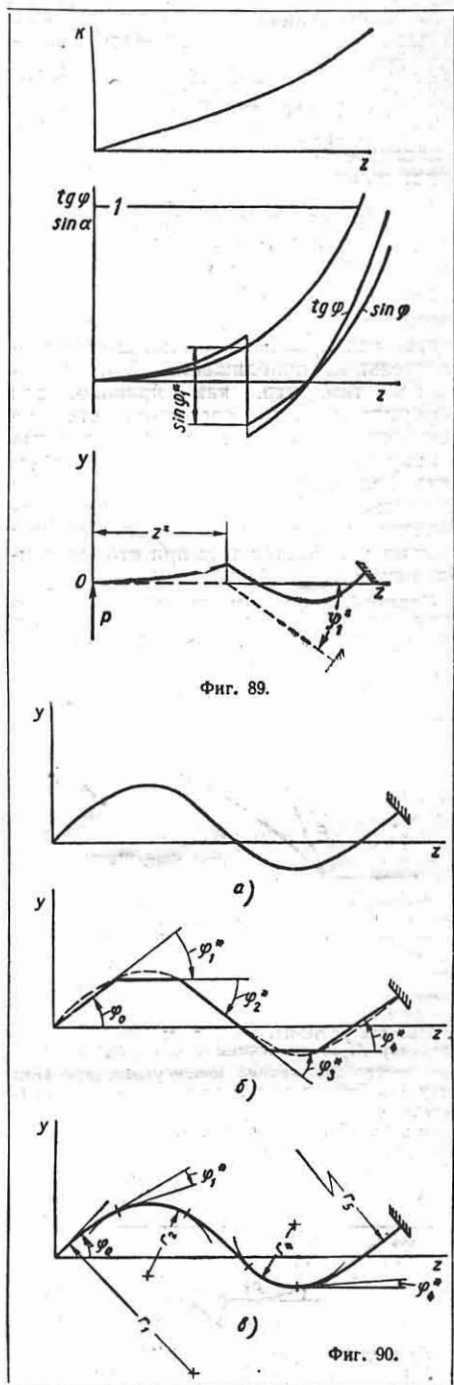
Для стержней, состоящих из отрезков прямых, соединенных под углом, или дуг окружностей, изогнутая ось строится также по участкам.

После построения изогнутой оси первого участка и определения координаты  $z_1^*$  (фиг. 89) стыка первого и второго участков кривая  $\sin \varphi$  для второго участка поднимается или опускается



Фиг. 88.

(в соответствии со знаком угла  $\varphi_1^*$  между первым и вторым участком) на величину синуса этого угла. Затем по этой измененной кривой  $\sin \varphi$  строится изогнутая ось второго участка, определяется координата  $z_2^*$  стыка второго и третьего участков и т. д.



Фиг. 89.

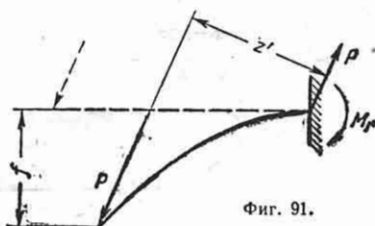
Фиг. 90.

Для построения изогнутой оси стержня, начальная форма которого — произвольная кривая (см. фиг. 90, а), следует эту кривую заменить ломаной, состоящей из отрезков прямых линий (фиг. 90, б) или прямых и дуг окружностей (фиг. 90, в). В последнем случае точность построения будет выше.

### Применение построения изогнутой оси для решения задач

Решение конкретных задач с использованием графического построения изогнутой оси производится методом последовательных приближений. Это объясняется тем, что, как правило, для деформированного состояния стержня неизвестно направление приложенных к нему сил, а в тех случаях, когда задана величина деформаций, приходится задаваться значениями нагрузок. Практически достаточная точность решения обычно получается уже при втором приближении.

**Пример 1.** Определить прогиб  $f$  консольной балки под действием приложенной к ее концу силы  $P$  постоянного направления (фиг. 91).



Фиг. 91.

Так как в деформированном состоянии балки угол между ее осью и линией действия силы неизвестен, построение изогнутой линии удобнее начать с заданного конца, задавшись величиной реактивного момента  $M_p$ . Построение проводится только до того значения координаты  $z = z'$ , при котором кривизна  $k = 0$ .

Проведя решение, следует сравнить принятую величину  $M_p$  со значением момента  $Pz'$  и повторить построение, приняв новую уточненную величину  $M_p$ . Проверка решения может быть произведена также сравнением длин изогнутой и ненагруженной балок.



Фиг. 92.

**Пример 2.** Определить прогиб  $f$  балки, лежащей на опорах и нагруженной вертикальной силой  $P$  по середине пролета (фиг. 92).

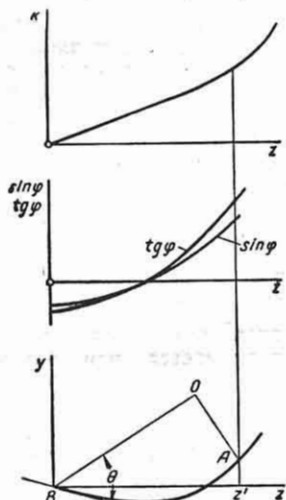
Как и предыдущая, эта задача решается методом последовательных приближений.

Задаемся углом  $\theta$  поворота балки на опоре. При изгибе балка скользит по опоре, и между ними возникает трение; поэтому сила  $R$  реакции опоры составляет с нормалью к оси балки угол  $\varphi_0$ , равный углу трения. Величина силы  $R$  определяется из условия равенства ее вертикальной проекции половине силы  $P$ , т. е.

$$R = \frac{P}{2 \cos(\theta - \varphi_0)}$$

Ход построения изогнутой линии (фиг. 93) алогичен построению, приведенному на фиг. 85.

Далее на графике изогнутой оси откладывается прямая  $BO$  и прямая  $OA$  (до пересечения с изо-



Фиг. 93.

гнутой линией). Затем определяется значение координаты  $z'$  точки  $A$  приложения силы  $P$  и по кривой  $\sin \varphi$  находится величина угла  $\varphi^*$ .

Сравнивая углы  $\varphi^*$  и  $\theta$ , следует уточнить значение  $\varphi^*$  и еще раз провести решение.

### ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ [8] (Метод упругих параметров, по Е. П. Попову)

#### Основные ограничения\*

1. Стержень нагружен сосредоточенными силами и моментами только по концам.

2. Форма стержня до нагружения — прямая или дуга окружности.

Стержень, имеющий до деформации форму дуги окружности радиуса  $R$ , эквивалентен прямому стержню, изогнутому моментом  $M = \frac{C}{R} [C — жесткость$

\* Общий метод Е. П. Попова приводится здесь только для задач, удовлетворяющих перечисленным ниже ограничениям.

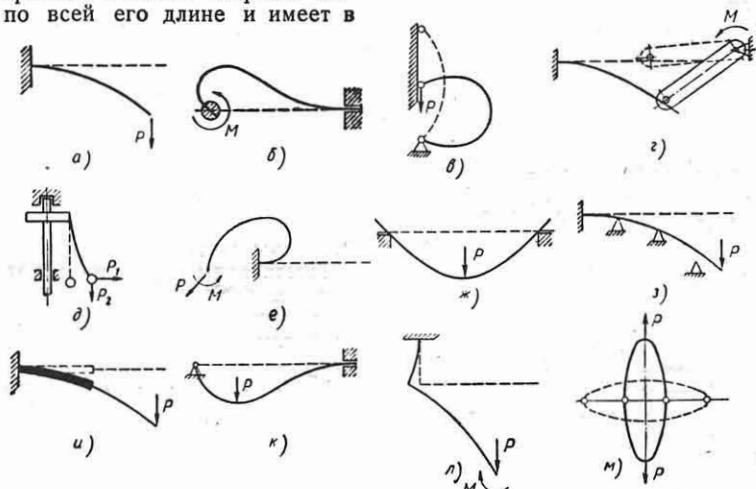


при изгибе; для стержней  $C = EJ$ , для тонких полосок (пластинчатых пружин)  $EJ < C < \frac{EJ}{1 - \mu^2}$ ;  $J$  — осевой момент инерции поперечного сечения стержня;  $E$  — модуль упругости материала при растяжении;  $\mu$  — коэффициент Пуассона].

3. Поперечное сечение стержня постоянно по всей его длине и имеет в

Методы приведения задач к условиям основного класса, а также решение задач, не сводящихся к основному классу (распределенная нагрузка, произвольно искривленная начальная форма и пр.), см. [8]. Там же дан аналитический метод решения задач.

При решении задач графо-аналитическим методом необходимо придержи-



Фиг. 94.

плоскости изгиба ось симметрии и наименьшую жесткость.

4. Стержень нерастяжим, но при изгибе длина расчетной части его оси может изменяться, например, за счет проскальзывания в опорах (фиг. 94, б и ж) или перемещения точки приложения нагрузки (фиг. 94, з).

5. Изменение кривизны оси стержня при изгибе может быть сколь угодно большим, но при этом напряжения в любой точке стержня не должны превосходить предела пропорциональности.

Стержни, отвечающие перечисленным условиям, называются стержнями *основного класса*.

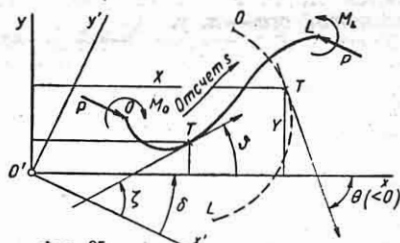
Примеры, иллюстрирующие изгиб таких стержней в больших перемещениях, см. на фиг. 94, а — е. На фиг. 94, ж — м показаны стержни, состоящие из нескольких участков.

Если каждый участок отвечает условиям основного класса, то при решении задач участки рассматриваются как отдельные стержни основного класса, а на стыках они связываются силовыми и геометрическими краевыми условиями.

живаться определенных правил выбора координат, знаков, отсчета углов и линейных величин, а также пользоваться рядом специфических приемов, понятий и терминов, которые ниже и излагаются перед примерами решения задач. Последовательность расчета см. стр. 135.

### Выбор координат, правила отсчета и знаков

Один конец стержня (фиг. 95) выбирается *начальным* (точка  $O$ ), а другой —



Фиг. 95.

*концевым* (точка  $L$ ). В недеформированном состоянии стержень изображен

пунктиром, а в деформированном (изогнутом) — сплошной линией. Всем величинам (момент, кривизна и пр.), связанным с начальной точкой стержня, присваивается индекс  $O$ , а с конечной  $L$ .

Отсчет длины дуги  $s$  до произвольной точки  $T$  оси стержня производится от начальной точки  $O$ . Положительное направление касательной принимается по направлению отсчета дуги  $s$ .

Длина всего стержня обозначается буквой  $l$ .

Помимо произвольно выбираемой неподвижной системы координат  $xO'y$  вводится вспомогательная система координат  $x'O'y'$ , ось  $x'$  которой проводится параллельно линии действия

Знак кривизны  $\frac{1}{\rho}$  определяется в этом графо-аналитическом методе знаком производной

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\zeta}{ds}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении стержня подсчитывается как

$$M = P(y'_L - y') + M_L$$

и считается положительным, если он увеличивает положительную кривизну или уменьшает отрицательную.

**Условия геометрического подобия стержней**

Две кривые геометрически подобны, если соответственные угловые размеры их равны, а линейные — пропорциональны.

Достаточным условием подобия изогнутых осей стержней является соответственное равенство любых трех из пяти так называемых коэффициентов подобия:

$$\beta = l \sqrt{\frac{P}{C}}, \text{ момент-} \\ M_0 + \frac{C}{R}$$

ных — в начальной точке  $\omega_0 = \frac{M_0 + \frac{C}{R}}{\sqrt{PC}}$

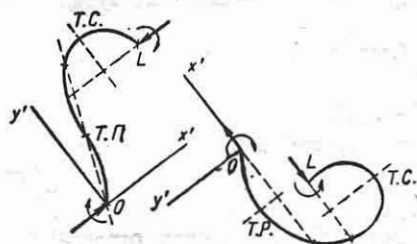
$$\text{и конечной точке } \omega_L = \frac{M_L + \frac{C}{R}}{\sqrt{PC}} \text{ (знаки}$$

$\omega_0$  и  $\omega_L$  совпадают со знаками кривизны в точках  $O$  и  $L$ ) и угловых — в начальной точке  $\zeta_0 = \vartheta_0 + \delta$  и в конечной  $\zeta_L = \vartheta_L + \delta$ .

Три из этих коэффициентов подобия могут быть найдены из граничных условий задачи.

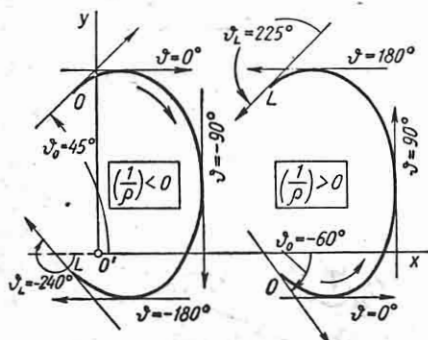
### Форма изогнутой оси

Изогнутая ось стержня может иметь характерные точки (фиг. 97) сжатия



Фиг. 97.

(*т. с.*), растяжения (*т. р.*) и перегиба (*т. н.*). Кривизна  $\frac{1}{\rho}$  и угол  $\zeta$  в этих



Фиг. 96.

силы  $P$ , приложенной в начальной точке  $O$ , и в направлении этой силы. Если в процессе изгиба стержня направление линии действия силы  $P$  изменяется, то соответственно поворачивается и ось  $x'$ .

Наклон оси  $x$  к оси  $x'$  измеряется углом  $\delta$ . При правой системе координат положительное направление отсчета  $\delta$  — против часовой стрелки.

Координаты произвольной точки  $T$  оси недеформированного стержня обозначаются  $X, Y$ , а той же точки, но на изогнутой оси —  $x, y$ .

Углы  $\vartheta$  и  $\zeta$  наклона касательной и координаты произвольной точки изогнутой оси в системах координат  $xO'y$  и  $x'O'y'$  связаны соотношениями  $\vartheta = \zeta - \delta$ ;  $x = x' \cos \delta + y' \sin \delta$ ;  $y = y' \cos \delta - x' \sin \delta$ .

В начальной точке  $O$  изогнутой оси значения углов  $\vartheta$  и  $\zeta$  берутся в интервалах  $0 \leq \vartheta_0 < \pi$  или  $0 \geq \vartheta_0 \geq -\pi$  и  $0 \leq \zeta_0 < \pi$  или  $0 \geq \zeta_0 \geq -\pi$ , а затем вдоль изогнутой оси углы  $\vartheta$  и  $\zeta$  меняются непрерывно (фиг. 96).

точках принимают следующие значения:

$$\frac{1}{\rho_{m,n}} = 0; |\zeta|_{m,n} = \max;$$

$$\left| \frac{1}{\rho_{m,c}} \right| = \max; \zeta_{m,c} = 2n\pi;$$

$$\left| \frac{1}{\rho_{m,p}} \right| = \min; \zeta_{m,p} = (2n+1)\pi$$

( $n$  — целое).

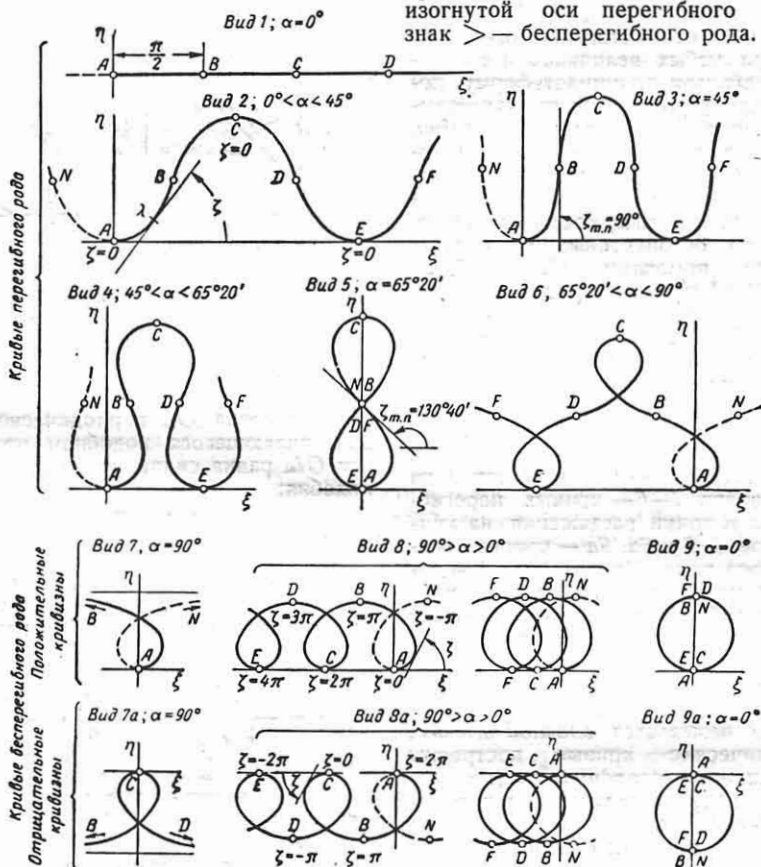
Нормаль к изогнутой оси, проведенная в т. с. или т. р., является осью симметрии для прилежащих участков

перегиба, относится к *перегибному роду*, а имеющая точки растяжения — к *бесперегибному роду*.

Если на изогнутой оси стержня нет ни точек перегиба, ни точек растяжения, то она может относиться или к перегибному, или к бесперегибному роду. В этом случае ее род может быть определен по соотношениям абсолютных значений коэффициентов подобия для начальной и конечной точек стержня:

$$\omega_0 \leq \left| 2 \cos \frac{\zeta_0}{2} \right| \text{ и } |\omega_L| \leq \left| 2 \cos \frac{\zeta_L}{2} \right|,$$

причем знак  $<$  имеет место в случае изогнутой оси перегибного рода, а знак  $>$  — бесперегибного рода.



Фиг. 98.

изогнутой оси; т. п. является центром симметрии. Точки перегиба и растяжения не могут одновременно иметь места на изогнутой оси стержня основного класса. Изогнутая ось, имеющая точки

Следует также иметь в виду, что при изгибе первоначально прямого стержня только силой изогнутая ось будет перегибного рода (точка перегиба находится в месте приложения силы). Если, кроме

этой силы, прикладывать еще постепенно увеличивающийся момент, то изогнутая ось сначала будет перегибного рода (но точек перегиба на ней может и не быть), а затем, по мере увеличения момента, она перейдет в форму бесперегибного рода. Если же первоначально прямой или кривой стержень нагружен некоторым моментом и постепенно увеличивающейся силой, то изогнутая ось будет вначале бесперегибного рода, а затем, по мере увеличения силы, она перейдет в форму перегибного рода.

### Периодические упругие кривые

Изогнутая ось стержня основного класса при любых величинах и соотношениях нагрузок принимает форму, подобную некоторому участку так называемой *периодической упругой кривой*. Бесконечное множество форм периодических кривых разделяется на девять видов. На фиг. 98 показана форма периодических кривых нечетных видов, т. е. видов обозначенных на фиг. 98 нечетными номерами (1, 3, 5, 7, 9 и 9а). Каждый из четных видов (2, 4, 6, 8 и 8а) имеет бесчисленное множество форм, являющихся промежуточными в пределах форм соответствующих нечетных видов. На фиг. 98 для каждого четного вида показана одна из возможных форм. Точки А, С, Е, ... периодической кривой — точки сжатия, В, D, F, ..., N ... — точки перегиба на кривых видов 1—6 — кривых перегибного рода и точки растяжения на кривых видов 8, 9 и 8а, 9а — кривых бесперегибного рода. Кривая вида 7 — переходная между кривыми перегибного и бесперегибного рода, она не имеет ни точек растяжения, ни точек перегиба.

Все ветви (NA, AB, BC, CD, DE, EF, ...) какой-либо периодической кривой имеют одинаковые размеры и форму. Ветвь АВ называется *главной ветвью*. Периодические кривые построены в *безразмерных координатах*  $\xi$ ,  $\eta$ .

Начало координат помещается в начале главной ветви (точка А); ось  $\eta$  проведена по нормали к периодической кривой.

### Связь изогнутой оси стержня с периодической кривой

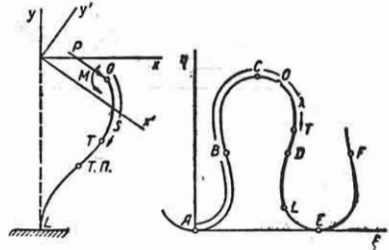
Безразмерные величины отрезка OL периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня OL (фиг. 99), свя-

заны с размерными величинами этой изогнутой оси следующим образом:

1) координаты  $\xi$  и  $\eta$  с координатами  $x'$  и  $y'$  — формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'_0 + \frac{\xi - \xi_0}{\beta} l; \\ y' &= y'_0 + \frac{\eta - \eta_0}{\beta} l; \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

2) длина дуги  $s$  от начала O до произвольной точки T изогнутой оси OL связана с безразмерной длиной  $\lambda$  от на-



Фиг. 99.

чала А до соответствующей точки T периодической кривой соотношением

$$s = \frac{\lambda - \lambda_0}{\beta} l \quad (\text{или } \lambda = \lambda_0 + \beta \frac{s}{l}); \quad (150)$$

длина отрезка OL периодической кривой, являющегося подобием изогнутой оси OL, равна силовому коэффициенту подобия:

$$\lambda_L - \lambda_0 = \beta; \quad (150a)$$

3) кривизна  $\omega$  произвольной точки периодической кривой равна моментному коэффициенту подобия, вычисленному для соответствующей точки изогнутой оси:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{M + \frac{C}{R}}{\sqrt{PC}} = \frac{l}{\beta} \cdot \frac{d\zeta}{ds} = \frac{d\zeta}{d\lambda} \\ \text{или} \\ M &= \frac{\omega}{\beta} Pl - \frac{C}{R}; \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

4) углы  $\zeta$  в соответствующих точках изогнутой оси и периодической кривой равны.

### Упругие параметры

Координаты  $\xi$  и  $\eta$  произвольной точки главной ветви обозначаются  $\xi'$  и  $\eta'$ , а если начало координат находится в конце

главной ветви (в точке  $B$ ) и оси координат имеют обратное направление, то  $\xi''$  и  $\eta''$  (см. фиг. 100). Длина дуги  $\lambda$ , отсчитываемая до произвольной точки главной ветви от точки  $A$ , обозначается  $\lambda'$ , а от точки  $B$  обозначается  $\lambda''$ .  $\xi'$ ,  $\eta'$  и  $\lambda'$  для точки  $B$  обозначаются  $\xi'_{90}$ ,  $\eta'_{90}$  и  $\lambda'_{90}$ , а  $\xi''$ ,  $\eta''$  и  $\lambda''$  для точки  $A$  обозначаются  $\xi''_0$ ,  $\eta''_0$  и  $\lambda''_0$ .

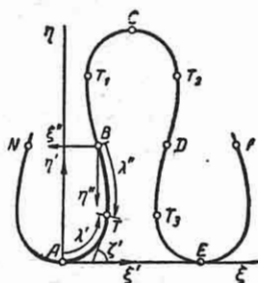
Имеют место соотношения  $\xi'' = \xi''_0 - \xi'$ ;  $\eta'' = \eta''_0 - \eta'$ ;  $\lambda'' = \lambda''_0 - \lambda'$  и  $\xi' = \xi'_{90} - \xi''$ ;  $\eta' = \eta'_{90} - \eta''$ ;  $\lambda' = \lambda'_{90} - \lambda''$ , а также  $\xi'_{90} = \xi''_0$ ;  $\eta'_{90} = \eta''_0$ ;  $\lambda'_{90} = \lambda''_0$ .

Кривизна  $\omega$  и угол  $\zeta$  для точек главной ветви обозначаются  $\omega'$  и  $\zeta'$ .

Величины  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\lambda'$ ,  $\omega'$ ,  $\zeta'$ ,  $\xi''$ ,  $\eta''$  и  $\lambda''$  называются *упругими параметрами* точки периодической кривой.

Для произвольной точки любой ветви периодической кривой величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\zeta$  и  $\omega$  могут быть выражены через упругие параметры *соответственной точки* главной ветви (соответственными назы-

ваются точки, совпадающие при наложении ветвей друг на друга, например точки  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  на фиг. 100). Так, например, для точки  $T_3$  величина  $\lambda$  может быть вычислена как  $\lambda = 2\lambda'_{90} + \lambda'$  или  $\lambda = 3\lambda'_{90} - \lambda''$ , величина  $\eta$  как  $\eta = \eta'_{90} + \eta'$  или  $\eta = -2\eta'_{90} - \eta''$  и т. д.



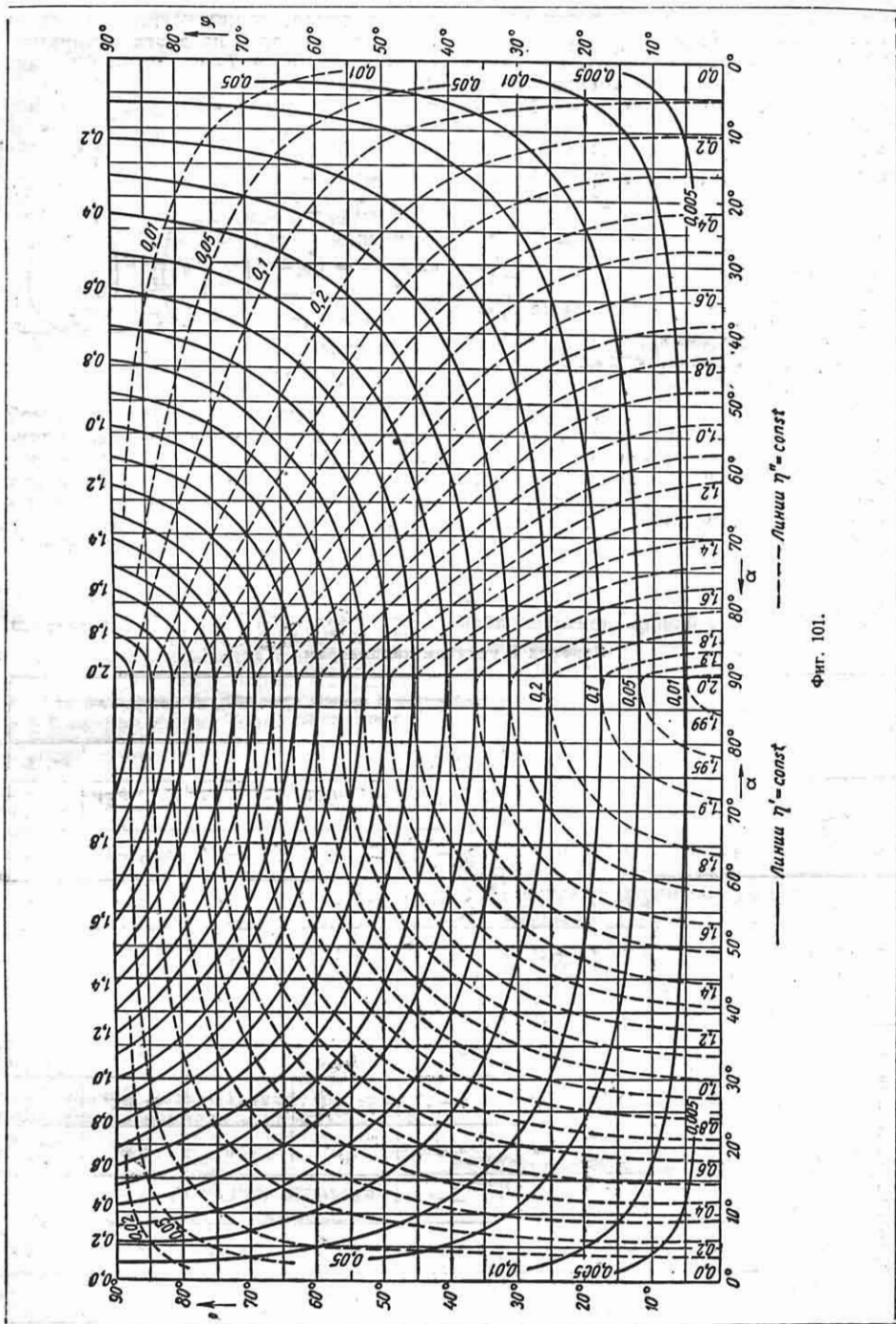
Фиг. 100.

Формулы перехода к упругим параметрам для различных ветвей периодической кривой даны в *таблице перехода к упругим параметрам* (табл. 33). Для пользования этой таблицей надо сначала найти ту ветвь периодической кривой, на которой расположена начальная точка отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня.

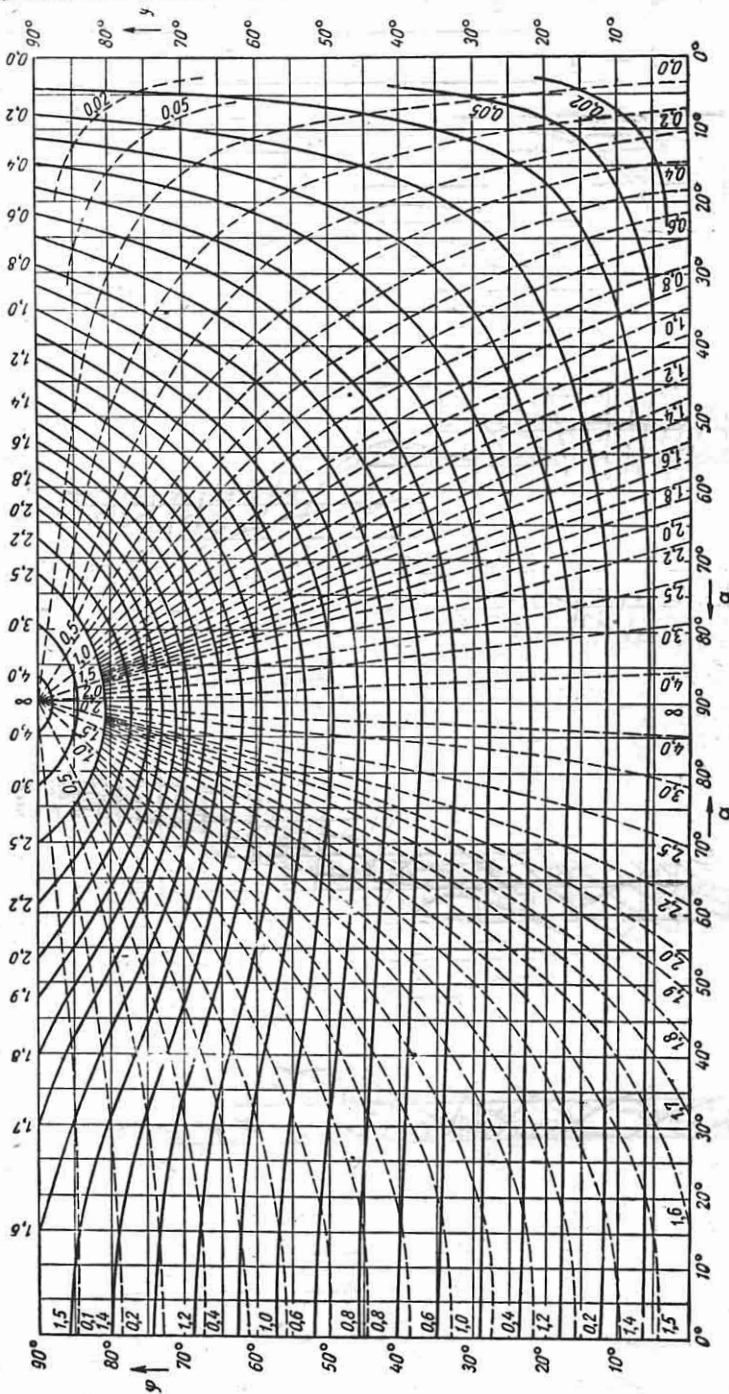
Таблица 33

Переход к упругим параметрам

Характер кривых	Параметры	Ветвь периодической упругой кривой (фиг. 100), на которой лежит данная точка							
		NA	AB	BC	CD	DE	EF	и т. д.	
Все кривые	$\lambda =$	$-\lambda'$	$+\lambda'$	$2\lambda'_{90} - \lambda'$	$2\lambda'_{90} + \lambda'$	$4\lambda'_{90} - \lambda'$	$4\lambda'_{90} + \lambda'$	...	
	$\xi =$	$-\xi'$	$+\xi'$	$2\xi'_{90} - \xi'$	$2\xi'_{90} + \xi'$	$4\xi'_{90} - \xi'$	$4\xi'_{90} + \xi'$	...	
Кривые перегибного рода	$\eta =$	$+\eta'$	$+\eta'$	$2\eta'_{90} - \eta'$	$2\eta'_{90} - \eta'$	$+\eta'$	$+\eta'$	...	
	$\zeta =$	$-\zeta'$	$+\zeta'$	$+\zeta'$	$-\zeta'$	$-\zeta'$	$+\zeta'$	...	
	$\omega =$	$+\omega'$	$+\omega'$	$-\omega'$	$-\omega'$	$+\omega'$	$+\omega'$	...	
Кривые бесперегибного рода	положительной кривизны	$\eta =$	$+\eta'$	$+\eta'$	$+\eta'$	$+\eta'$	$+\eta'$	$+\eta'$	...
		$\zeta =$	$-\zeta'$	$+\zeta'$	$2\pi - \zeta'$	$2\pi + \zeta'$	$4\pi - \zeta'$	$4\pi + \zeta'$	...
		$\omega =$	$+\omega'$	$+\omega'$	$+\omega'$	$+\omega'$	$+\omega'$	$+\omega'$	...
	отрицательной кривизны	$\eta =$	$-\eta'$	$-\eta'$	$-\eta'$	$-\eta'$	$-\eta'$	$-\eta'$	...
		$\zeta =$	$2\pi + \zeta'$	$2\pi - \zeta'$	$+\zeta'$	$-\zeta'$	$-(2\pi - \zeta')$	$-(2\pi + \zeta')$	...
		$\omega =$	$-\omega'$	$-\omega'$	$-\omega'$	$-\omega'$	$-\omega'$	$-\omega'$	...



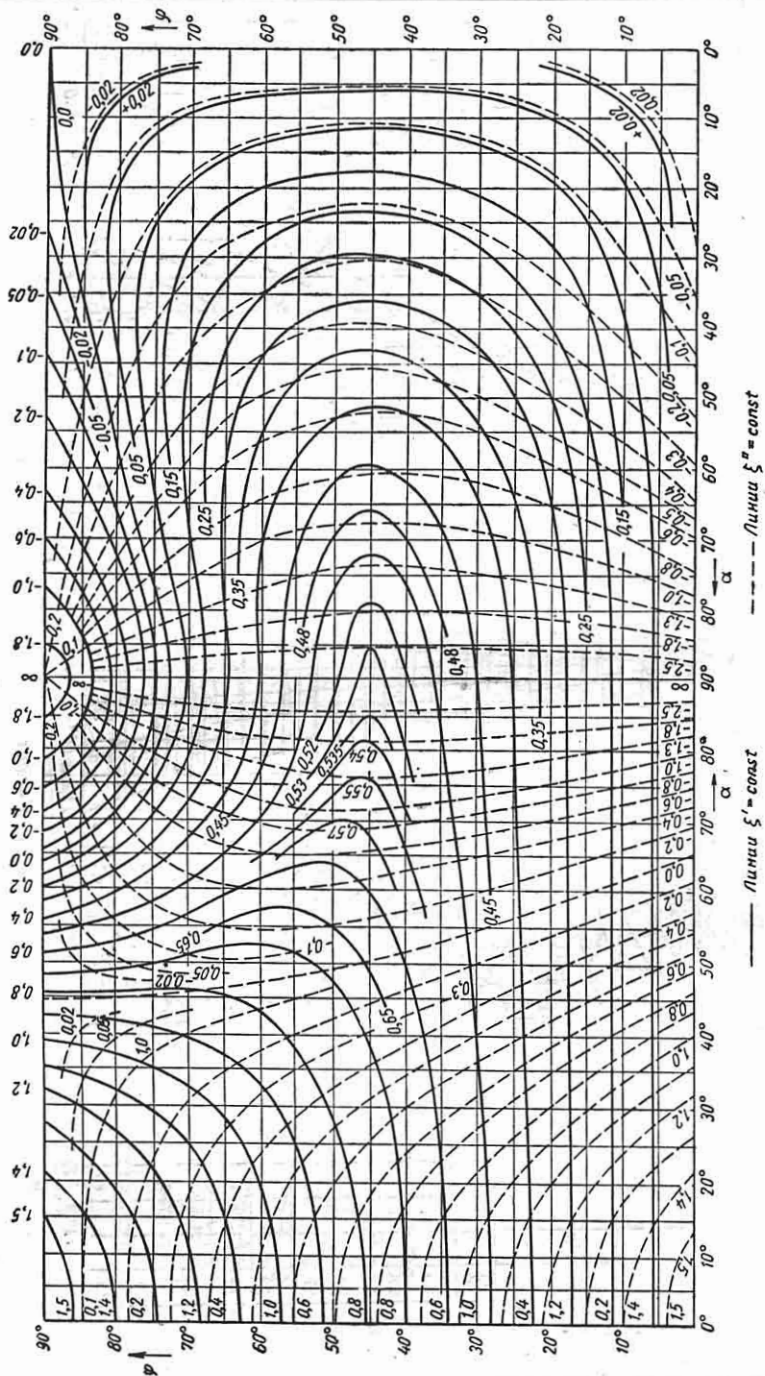
Фиг. 101.



----- Линии  $\lambda'' = const$

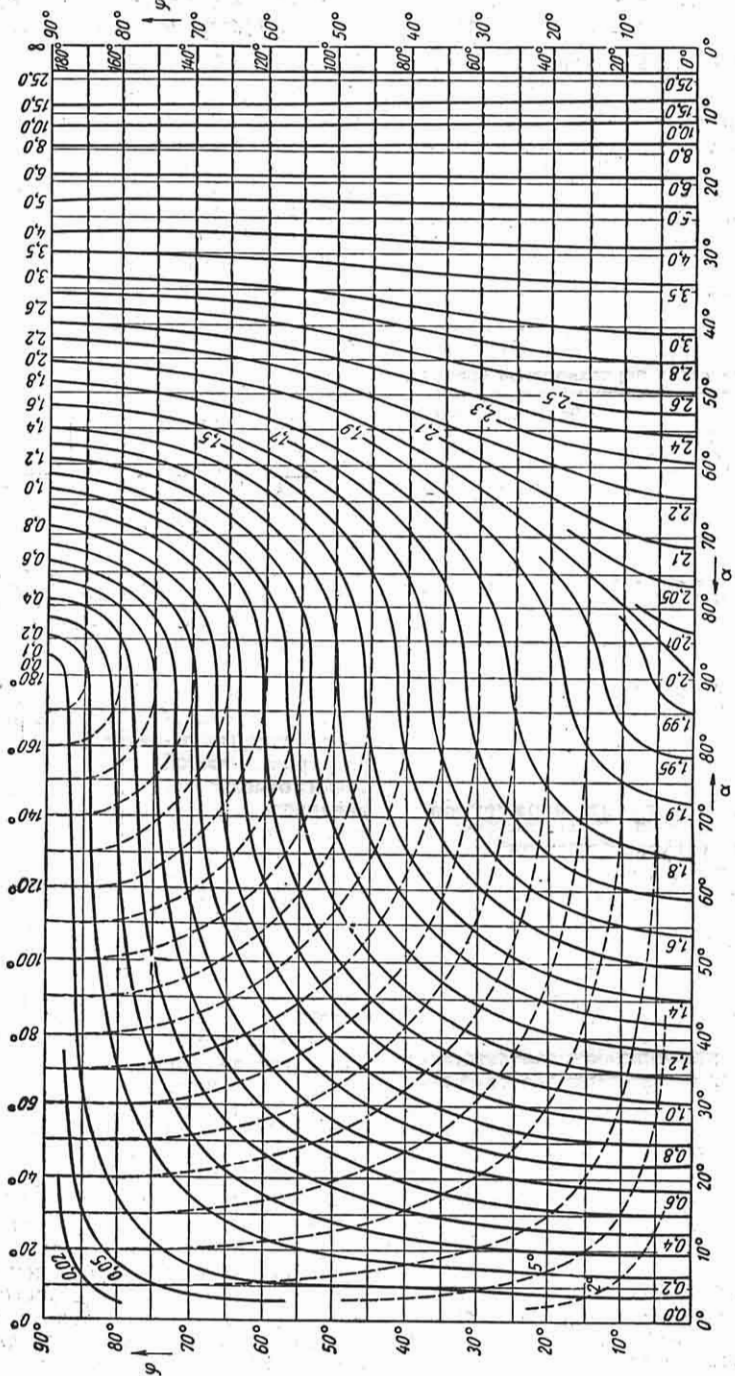
————— Линии  $\lambda' = const$

Фиг. 102.



Фиг. 103.





--- Линии  $\zeta' = const$

— Линии  $\omega' = const$

Фиг. 104.

Это производится по табл. 34 соответственно знаку в начальной точке изогнутой оси стержня кривизны  $\left(\frac{1}{\rho}\right)_0$  и угла  $\zeta_0$ .

Так, например, стержень  $OL$  (фиг. 99) в начальной точке  $O$  имеет отрицательную кривизну  $\left(\frac{1}{\rho} < 0\right)$  и отрицательный угол  $(0 > \zeta_0 > -\pi)$ , и из табл. 34 следует, что начальная точка  $O$  отрезка  $OL$  периодической кривой, подобного изогнутой линии стержня, лежит на ветви  $CD$ .

Таблица 34

## Определение ветви периодической кривой

Знак кривизны в начальной точке $O$ изогнутой оси	Знак угла в начальной точке $O$ изогнутой оси	Ветвь периодической упругой кривой, на которой лежит отраженное начальное положение точки $O$ изогнутой оси
$\left(\frac{1}{\rho}\right)_0 > 0$	$0 < \zeta_0 < \pi$ $0 < \zeta_0 < \pi$	NA AB
$\left(\frac{1}{\rho}\right)_0 < 0$	$0 > \zeta_0 > -\pi$ $0 > \zeta_0 > -\pi$	BC CD

## Диаграммы упругих параметров

Значения упругих параметров для различных точек главной ветви периодических кривых подсчитаны и сведены в диаграммы упругих параметров (фиг. 101—104).

На этих диаграммах в некоторых координатах  $\alpha - \varphi$  проведены линии одинаковых значений упругих параметров.

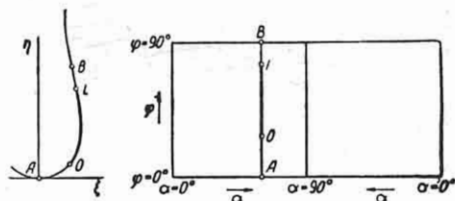
Каждой величине  $\alpha$  соответствует определенная форма периодической кривой (для вида 1  $\alpha = 0^\circ$ , вида 2  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ , вида 3  $\alpha = 45^\circ$  и т. д.). Вертикаль  $\alpha = 90^\circ$  делит диаграммы пополам. Упругие параметры для периодических кривых перегибного рода даны на левой половине диаграмм, а для периодических кривых бесперегибного рода на правой половине.

Различные значения  $\varphi$  соответствуют разным положениям точки на главной ветви. В начальной точке  $A$   $\varphi = 0^\circ$ , а в конце ветви (точка  $B$ )  $\varphi = 90^\circ$ .

## Отображение изогнутой оси стержня на диаграмме упругих параметров

Главная ветвь периодической кривой на диаграмме упругих параметров отображается вертикалью  $AB$  (фиг. 105), а отрезок  $OL$  главной ветви — вертикальным отрезком  $OL$  диаграммы.

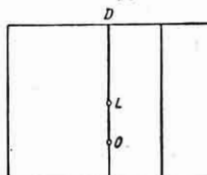
Отрезок периодической кривой, расположенный на двух ветвях, отображается на диаграмме упругих параметров двойной линией. [Так, например,



Фиг. 105.

отрезок  $ODL$  (см. фиг. 99) отображается линией  $ODL$  (фиг. 106); линии диаграммы, отображающие участки кривой, симметричные относительно точки перегиба  $D$ , накладываются друг на друга.]

Для определения положения на диаграмме упругих параметров любой точки отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня, надо знать, к какому



Фиг. 106.

роду (перегибному или бесперегибному) относится изогнутая ось, и найти величину любых двух упругих параметров для данной точки. [Для определения положения характерных точек достаточно знать величину одного упругого параметра, так как точкам сжатия отвечает ось абсцисс ( $\varphi = 0^\circ$ ) диаграммы упругих параметров, точкам перегиба — левая половина (левее  $\alpha = 90^\circ$ ) верхней горизонтали ( $\varphi = 90^\circ$ ), а точкам растяжения — правая половина (правее  $\alpha = 90^\circ$ ) верхней горизонтали.] После нахождения на диаграмме упругих параметров положения одной точки любая последующая точка определяется величиной только одного упругого параметра, так как первая точка уже дала положение вертикали, отображающей отрезок периодической кривой.

### Применение периодической упругой кривой и упругих параметров для решения задач

Решение любой задачи сводится к отысканию на диаграмме упругих параметров отображения отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня.

Найденное на диаграмме положение точек, отображающих начальную, концевую и какие-либо иные точки изогнутой оси стержня, дает для каждой точки величину всех восьми упругих параметров, зная которые можно вычислить, пользуясь табл. 33, величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$  и  $\zeta$ , а затем по этим величинам в сочетании с условиями задачи решить все вопросы задачи, т. е. найти, например: уравнение изогнутой оси (в параметрической форме)

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\beta}{l} [(\xi - \xi_0) \cos \delta + \\ &+ (\eta - \eta_0) \sin \delta]; \\ y &= y_0 + \frac{\beta}{l} [(\eta - \eta_0) \cos \delta - \\ &- (\xi - \xi_0) \sin \delta]; \end{aligned} \right\} (152)$$

угол наклона касательной к оси  $x$  в произвольной точке изогнутой оси

$$\vartheta = \zeta - \delta; \quad (153)$$

связь между силой  $P$ , длиной  $l$  стержня и его жесткостью  $C$  (хотя бы одна из этих величин должна быть задана в условии задачи)

$$l \sqrt{\frac{P}{C}} = \beta = \lambda_L - \lambda_0; \quad (154)$$

момент в произвольной точке

$$M = \frac{C}{l} \left( \beta \omega - \frac{l}{R} \right); \quad (155)$$

напряжение в произвольной точке

$$\sigma = \frac{|M|}{W} \quad (156)$$

( $W$  — момент сопротивления сечения); потенциальную энергию деформаций

$$\begin{aligned} V &= Pl \left( \frac{\xi_L - \xi_0}{\beta} + \frac{1}{2} \omega_A^2 - 1 \right) - \\ &- \frac{C}{R} \left( \zeta_L - \zeta_0 - \frac{l}{2R} \right) \end{aligned} \quad (157)$$

( $\omega_A$  — кривизна в точке  $A$  периодической кривой);

уравнения (параметрические) для построения упругих характеристик:

а) силовой: сила  $P$  — проекция  $q$  взаимного перемещения концов стержня на линию действия силы:

$$\begin{aligned} P &= \beta^2 \frac{C}{l}; \quad q = (X_L - X_0) \cos \delta_n - \\ &- (Y_L - Y_0) \sin \delta_n - (\xi_L - \xi_0) \frac{l}{\beta} \end{aligned} \quad (158a)$$

( $\delta_n$  — угол между осями  $x$  и  $x'$  в начальный момент деформации стержня);

б) моментной для начальной точки: момент  $M_0$  в начальной точке — угол  $\zeta_0$  ее поворота:

$$M_0 = \omega_0 \beta \frac{C}{l} - \frac{C}{R}; \quad \zeta_0; \quad (158б)$$

в) моментной для концевой точки: момент  $M_L$  в концевой точке — угол  $\zeta_L$  ее поворота:

$$M_L = \omega_L \beta \frac{C}{l} - \frac{C}{R}; \quad \zeta_L; \quad (158в)$$

траекторию произвольной точки стержня [строится по уравнениям (152)] и т. д.

### Схема и порядок решения задач

Решение любой задачи проводится по следующей схеме:

а) определяются величины коэффициентов подобия по заданным условиям задачи;

б) для начальной и концевой точек отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня, определяются величины некоторых упругих параметров и по их значению отыскивается отображение изогнутой оси на диаграмме упругих параметров;

в) соответственно значениям упругих параметров, найденных по диаграммам, определяются по формулам (152) — (158) все искомые величины.

Целесообразно придерживаться следующего порядка решения задач:

1. Составить схему закрепления и нагружения стержня и убедиться в том, что рассматриваемый стержень находится в условиях, соответствующих основному классу стержней (см. „Основные ограничения“, стр. 124).

2. Наметить в соответствии с данными задачи примерную форму изогнутой оси.

3. Отметить начальную и концевую ( $O$  и  $L$ ) точки стержня, выбрать начало координат (точка  $O'$ ) и провести оси координат  $xu$  и  $x'y'$  (положение относительно стержня точки  $O'$  и осей  $xu$  произвольно и определяется только соотношениями удобства решения задачи).  $O$  направлением осей  $x'y'$  см. „Выбор координат, правила отсчета и знаков“, (стр. 125).

4. Подсчитать значения или соотношения тех коэффициентов подобия, которые могут быть вычислены из условий задачи.

5. Определить род (перегибный или бесперегибный) изогнутой оси (см. „Форма изогнутой оси“, стр. 126).

6. Установить знаки углов  $\vartheta_0$  и  $\zeta_0$  и знак кривизны  $\left(\frac{1}{\rho}\right)_0$  (см. „Выбор координат, правила отсчета и знаков“, стр. 125).

7. По табл. 34 определить ветвь периодической кривой, на которой лежит начальная точка отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня.

8. Пользуясь формулами (149)–(151) (см. „Связь изогнутой оси стержня с периодической кривой“, стр. 128), выразить значения или соотношения безразмерных величин  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\zeta$  и  $\omega$  через коэффициенты подобия и заданные условия задачи.

9. По табл. 33 определить величину или соотношения упругих параметров точек главной ветви, соответственных начальной и концевой точкам отрезка периодической кривой, подобного изогнутой оси стержня (см. „Упругие параметры“, стр. 128).

10. Найти на диаграмме упругих параметров отображение изогнутой оси стержня (см. „Отображение изогнутой оси стержня на диаграмме упругих параметров“, стр. 134).

11. По формулам (152)–(158) (см. „Применение периодической упругой кривой и упругих параметров для решения задач“, стр. 135) вычислить все искомые величины задачи, выразив с помощью табл. 33 безразмерные величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ,  $\zeta$  и  $\omega$  в этих формулах через упругие параметры. Значения последних взять из диаграмм упругих параметров.

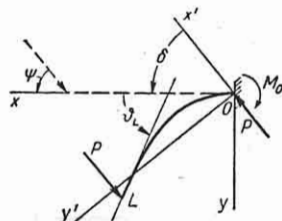
**Пример 1.** Прямой стержень длиной  $l$  и жесткостью  $C$  одним концом заделан, а на другом нагружен силой  $P$ , направленной под постоянным углом  $\psi$  к первоначальной оси стержня (фиг. 107).

Найти вертикальное и горизонтальное смещение и угол поворота конца стержня, определить момент в заделке и подсчитать потенциальную энергию изгиба.

**Решение.**

1. Ограничения для стержней основного класса (см. стр. 124) выполняются условиями задачи.

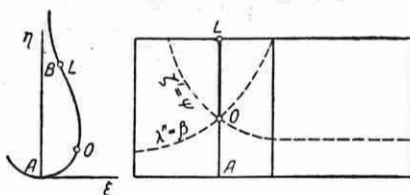
2. Намечаем форму изогнутой оси (фиг. 107).



Фиг. 107.

3. Приняв заделку за начальную точку  $O$ , а свободный конец стержня за концевую  $L$ , проведем через точку  $O$  оси координат  $x, y$ , направив ось  $x$  по стержню. Из той же точки  $O$  проведем оси  $x', y'$  вспомогательной системы координат (фиг. 107), направив ось  $x'$  под углом  $\delta = \psi$  к оси  $x$  (см. стр. 126).

4. Поскольку кривизна в концевой точке  $L$  равна нулю, а стержень до нагружения прямой, моментный коэффициент подобия для точки  $L$  равен нулю, т. е.  $\omega_L = 0$ . Для начальной точ-



Фиг. 108.

ки  $O$  угловой коэффициент подобия  $\zeta_0$  равен углу  $\delta$ , но из условия задачи  $\delta = \psi$  и, следовательно,  $\zeta_0 = \psi$ .

Так как значения силы  $P$ , длины  $l$  и жесткости  $C$  стержня заданы, то величина силового коэффициента подобия может быть вычислена:

$$\beta = l \sqrt{\frac{P}{C}}$$

5. Изогнутая ось стержня — перегибного рода; концевая точка  $L$  — точка перегиба, так как конец первоначально прямого стержня нагружен только силой (см. стр. 127).

6. При принятом направлении осей  $x'$  и  $y'$  кривизна и угол  $\zeta$  в начальной точке положительны  $\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)_0 > 0 \text{ и } \zeta_0 > 0\right]$ .

7. По табл. 34 устанавливаем, что точка  $O$  лежит на главной ветви; концевая точка  $L$  является первой точкой перегиба и, следовательно, совпадает с концом главной ветви — точкой  $B$  (см. фиг. 108).

8. По величине трех коэффициентов подобия  $\beta$ ,  $\omega_L$  и  $\zeta_0$  определяем (см. стр. 123) для начальной и концевой точек отрезка  $OL$  периодической кри-

вой, подобного изогнутой оси стержня, безразмерные величины  $\omega_L = 0$  и  $\zeta_0 = \psi$  и соотношение  $\lambda_L - \lambda_0 = \beta$ .

9. В соответствии с табл. 33 устанавливаем:

$$\begin{aligned} \omega'_L &= \omega_L = 0; \quad \zeta'_0 = \zeta_0 = \psi; \\ \lambda_L - \lambda_0 &= \lambda'_{90} - \lambda'_0 - \lambda''_0 = \beta. \end{aligned}$$

10. По значениям двух упругих параметров для точки  $O$ :  $\zeta'_0 = \psi$  и  $\lambda''_0 = \beta$  находим отображение этой точки на диаграмме упругих параметров (см. фиг. 108). Отображение точки  $L$  должно лежать на вертикали, проходящей через отображение точки  $O$ , а так как точка  $L$  — точка перегиба, то ее отображение лежит на верхней горизонтали.

Вертикальный отрезок  $OL$  диаграммы упругих параметров является отображением отрезка  $OL$  периодической кривой (см. фиг. 108).

11. Теперь можно найти величины всех упругих параметров для точек  $O$  и  $L$ , а зная их по формулам (152), (153), (155) и (157) получим ответы на все вопросы задачи:

1) вертикальное перемещение конца стержня

$$y_L = \frac{l}{\beta} (\eta''_0 \cos \psi - \xi''_0 \sin \psi);$$

2) горизонтальное перемещение

$$X_L - x_L = l - \frac{l}{\beta} (\xi''_0 \cos \psi + \eta''_0 \sin \psi);$$

3) угол поворота конца

$$\vartheta_L = \zeta'_L - \psi;$$

4) момент в заделке

$$M_0 = \frac{\omega'_0}{\beta} Pl;$$

5) потенциальная энергия деформаций

$$V = Pl \left( \frac{\xi''_0}{\beta} + \frac{1}{2} \omega_A^2 - 1 \right)$$

[здесь  $\omega_A$  — параметр  $\omega'$ , взятый для точки  $A$  (см. фиг. 108)].

**Пример 2.** При включении фрикционной муфты колодки 1 прижимаются к ободу 2 ленточными пружинами 3. В ненапряженном состоянии (штриховая линия на фиг. 109) пружина имеет форму дуги окружности радиуса  $R$ .

Определить рабочее усилие, развиваемое одной пружиной во включенном положении, наибольшее усилие, которое должно быть приложено к включающему кольцу 4 для включения муфты, усилие, удерживающее кольцо во включенном положении, и наибольшее напряжение в пружине.

Материал пружин — никелекремнистая пружинная сталь 60С2Н2А ( $E = 1,95 \cdot 10^4$  кгГ/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_s = 175$  кгГ/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_T = 160$  кгГ/мм<sup>2</sup>).

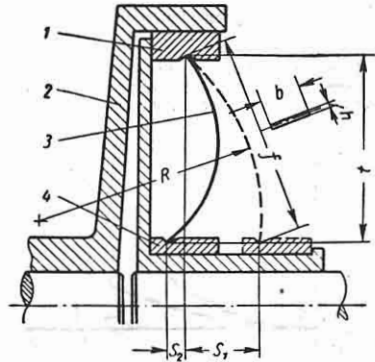
Размеры пружины и элементов муфты:  $R = 120$  мм,  $b = 30$  мм,  $h = 0,8$  мм,  $f = 130$  мм,  $s_1 = 48$  мм,  $s_2 = 12$  мм.

**Решение.**

1. Пружина представляет собой гибкий стержень, удовлетворяющий основным ограничениям (стр. 124).

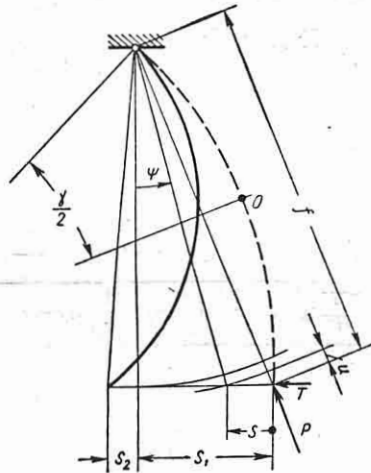
2. Составим схему закрепления, нагружения и деформации пружины (фиг. 110). Сила  $T$  — проекция силы  $P$  — «включающая» сила. Нормаль, прове-

денная в середине пружины, является осью симметрии. При решении удобно рассматривать половину пружины, считая пружину закрепленной в середине (фиг. 111).



Фиг. 109.

3. Выберем начальную точку  $O$  в заделке, а концевую  $L$  на нагруженном конце пружины и проведем оси  $x'$  и  $y'$  (фиг. 111).



Фиг. 110.

4. Точка  $O$  — точка сжатия. Угловым коэффициентом подобия в ней  $\zeta_0 = 0$ . В точке  $L$  моментный коэффициент подобия

$$\omega_L = \frac{C}{R} = \frac{1}{R \sqrt{\frac{P}{C}}}$$

Силовой коэффициент подобия

$$\beta = l \sqrt{\frac{P}{C}}$$

(Длина пружины

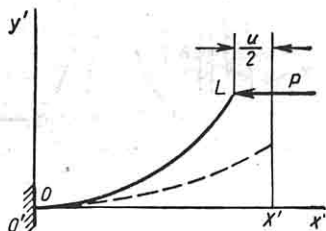
$$l = \gamma^\circ \frac{\pi}{180} R; \quad \sin \gamma = \frac{f}{2R}$$

Так как  $b \approx 37,5h$ , то жесткость  $C$  подсчитаем по формуле

$$C = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{bh^3}{12}$$

Приняв коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$  и подставив числовые значения, получим  $l = 67$  мм и  $C = 27\,400$  кг/мм<sup>2</sup>.

5. Начальная форма пружины — бесперегибного рода, но при увеличении нагрузки она может перейти в форму перегибного рода (см. стр. 126).

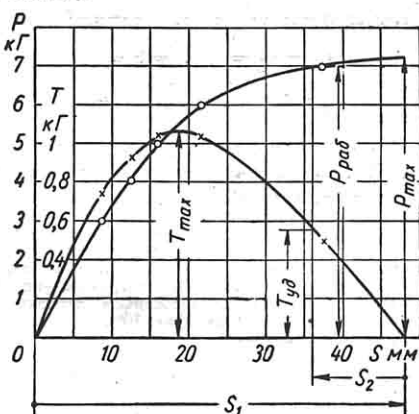


Фиг. 111.

6, 7. Начальная точка  $O$  лежит в начале главной ветви периодической кривой, так как при выбранном направлении осей  $x'$  и  $y'$   $\left(\frac{1}{P}\right)_0 > 0$ , а  $\zeta_0 = 0$  (см. табл. 34).

8, 9. Так как точка  $O$  совпадает с началом главной ветви, а точка  $L$  лежит на главной ветви,

то  $\lambda'_0 = 0$ ;  $\lambda'_L = \beta$  и  $\omega'_L = \omega_L$  [см. формулу (150а) и табл. 33].



Фиг. 112.

10. Задаваясь несколькими значениями силы  $P$ , определим числовую величину параметров  $\lambda'_L$  и  $\omega'_L$  и по диаграммам найдем величины упругих параметров  $\xi'_L$  и  $\eta'_L$ .

Таблица 35

## Результаты вычислений

$P$ в кг	3	4	5	6	7	8
$\frac{P}{C}$ в 1/мм <sup>2</sup>	$1,095 \cdot 10^{-4}$	$1,46 \cdot 10^{-4}$	$1,825 \cdot 10^{-4}$	$2,19 \cdot 10^{-4}$	$2,555 \cdot 10^{-4}$	$2,92 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{\frac{P}{C}}$ в 1/мм <sup>2</sup>	0,01092	0,01209	0,0135	0,01481	0,01588	0,01708
$\lambda'_L = \beta$	0,731	0,81	0,905	0,9925	1,063	1,144
$\omega'_L$	0,572	0,517	0,463	0,422	0,3935	0,366
$\xi'_L$	0,7	0,766	0,85	0,925	0,975	1,025
$\eta'_L$	0,194	0,235	0,28	0,33	0,382	0,47
$\frac{l}{\beta}$	91,2	82,7	74,1	67,5	63,0	58,5
$x'_L$ в мм	63,85	63,35	63	62,45	61,5	60
$y'_L$ в мм	17,7	19,45	20,75	21,3	24,05	27,5
$u$ в мм	2,3	3,3	4	5,1	7	10
$s$ в мм	8,3	12,5	15,7	21,5	37,39	—
$T$ в кг	0,755	0,906	1,032	1,025	0,486	—

11. По формулам  $x'_L = \frac{l}{\beta} \xi'_L$  и  $y'_L = \frac{l}{\beta} \eta'_L$  определим координаты конца  $L$  стержня.

Результаты вычислений сведены в табл. 35.

В этой же таблице дана величина  $u$  сближения концов пружины, вычисленная по формуле

$$u = 2(X' - x'),$$

где  $X = \frac{l}{2}$  (см. фиг. 110 и 111).

В предпоследней графе таблицы помещена величина  $s$  перемещения включающего кольца, вычисленная по формуле

$$s = s_1 - \sqrt{s_1^2 + u^2 - 2Ru}$$

(см. фиг. 110), а в последней графе — величина включающей силы  $T$ , определенная как

$$T = P \sin \phi = P \frac{\sqrt{s_1^2 + u^2 - 2Ru}}{R - u}.$$

Для получения ответов на вопросы задачи построим графики зависимости сил  $P$  и  $T$  от величины  $s$  (фиг. 112).

По этим графикам находим рабочее усилие, развиваемое пружинкой,  $P_{раб} = 7$  кг, наибольшее усилие включения  $T_{max} = 1,06$  кг (для одной пружины) и удерживающую силу  $T_{уд} = 0,525$  кг.

Наибольшее напряжение в пружине определяется как

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max} x'_{max}}{\frac{bh^2}{6}},$$

где  $P_{max}$  — наибольшее усилие, определяемое по графику фиг. 112.  $P_{max} = 7,2$  кг, а  $x'_{max}$  — координата конца  $L$  пружины при усилии  $P = P_{max}$  (см. фиг. 111);  $x'_{max} \approx 25$  мм.

Подстановка чисел дает  $\sigma_{max} = 56,4$  кг/мм<sup>2</sup>.

### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1953.
2. Глушков Г. С., Инженерные методы расчета на прочность и жесткость, Машгиз, 1949.
3. Крылов А. Н., О расчете балок на упругом основании, изд. АН СССР, 1931.
4. Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
5. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч. I—III, Гостехиздат, 1941, 1947.
6. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин, Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, Машгиз, ч. I и II, 1950 и 1952.
7. Попов А. А., Сопротивление материалов, Машгиз, 1953.
8. Попов Е. П., Нелинейные задачи статики тонких стержней, ОГИЗ, 1948.
9. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, изд. МГУ, 1950.
10. Сиверцев И. Н., Давыдов В. В., Маттес Н. В., Учебный справочник по прочности судов внутреннего плавания, изд-во Мин. речфлота, 1950.
11. Справочная книга по расчету самолета на прочность, Оборонгиз, 1954.
12. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, ч. I и II, Гостехиздат, 1934.
13. Уманский А. А., Специальный курс строительной механики, ч. I, Гостехиздат, 1935; ч. II, Стройиздат, 1940.
14. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.
15. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Олисов Б. А., Кудрявцев И. Н., Мальгин Л. И., Курс сопротивления материалов, ч. I и II, Гостехиздат, 1949.
16. Яновский М. И., Конструирование и расчет на прочность деталей паровых машин, изд-во АН СССР, 1947.

17. Тихомиров Е. Н., Применение графических методов для задач малой жесткости при переменном поперечном сечении бруса, «Техника воздушного флота» № 9, 1940.
18. Заседателей С. М., Графический метод решения некоторых задач упруго-пластичности изгиба стержней в больших перемещениях, МВТУ, сборник № 26, Машгиз, 1953.
19. Roark R., Formulas for stress and strain, New York, 1943.

### Расчет кривых и витых брусьев

1. Головин Х., Одна из задач статики упругого тела. «Известия Петербургского технологического института», 1880.
2. Давиденков Н. Н., К расчету кривых брусьев, «Прикладная математика и механика», т. I, вып. 2, 1933.
3. Демидов С. П., Расчет на прочность плоского кривого бруса прямоугольного поперечного сечения, нагруженного силами, перпендикулярными к плоскости кривизны, сб. «Расчеты на прочность элементов машиностроительных конструкций», МВТУ, вып. 31, Машгиз, 1955.
4. Пономарев С. Д., К вопросу об определении касательных напряжений при изгибе плоского кривого бруса большой кривизны, «Вестник инженеров и техников» № 9, 1936.
5. Попов А. А., Орлин А. С., Пономарев С. Д., Расчет кривого бруса, ГТИ, 1933.
6. Тимошенко С. П., Теория упругости, ГТИ, 1934.
7. Чернышев Н. А., Напряженное состояние и деформация цилиндрических пружин, свитых из круглого прутка, сб. «Динамика и прочность пружин», изд. АН СССР, 1950.

## ГЛАВА III

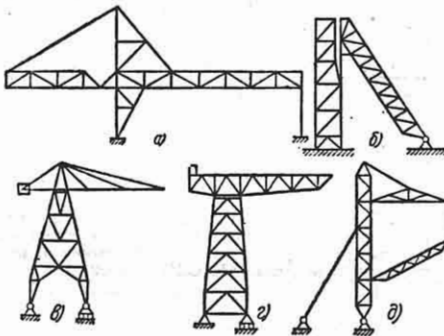
### РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

#### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

##### Общие сведения

Отличие *фермы* от других стержневых конструкций состоит в том, что она остается неизменяемой, если во всех узловых точках (узлах) считать соединения шарнирными, т. е. допускающими свободное вращение примыкающих стержней (*геометрическая неизменяемость*).

Практически узловые соединения металлических ферм выполняются жесткими (клепаными или сварными). Однако при узловой нагрузке напряженное состояние правильно центрированных стержней в основном определяется продольными усилиями, которые с достаточной точностью могут быть найдены в предположении шарнирных узлов. Учет дополнительных напряжений изгиба, обусловленных жесткостью узлов, может потребоваться лишь в исключительных случаях, в частности при значительной динамической нагрузке ферм из материала с малой пластичностью.

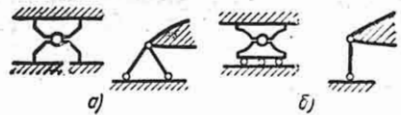


Фиг. 1.

Фермы имеют широкое применение в грузоподъемных машинах (краны, транспортеры) и в других типах машин (фиг. 1, а—г).

**Типы ферм.** По характеру расположения стержней и направлений действующих внешних сил фермы могут быть разделены на *плоские*, т. е. такие, в которых оси всех стержней и направления действующих внешних сил, включая опорные реакции, лежат в одной плоскости, и *пространственные*, в которых оси стержней не ограничены условием расположения в одной плоскости.

**Опоры и опорные реакции.** *Опора фермы* есть устройство, соединяющее ферму с основанием и налагающее связи на ее перемещения. Ферма прикрепляется к основанию отдельными узлами



Фиг. 2.

(точками), поэтому опора может налагать на перемещения фермы три, две или одну связь.

В плоских фермах опора может содержать две связи (фиг. 2, а) или одну связь (фиг. 2, б).

Опорная реакция есть равнодействующая системы сил, заменяющих действие опоры на ферму.

Опорные реакции определяются внешней нагрузкой на ферму и зависят от устройства опор.

Правильно образованная (геометрически неизменяемая) ферма, не содержащая лишних стержней, одновременно является *статически определимой*.

##### Плоские фермы

**Образование плоских ферм.** Правильное образование простейшей ферменной конструкции (неизменяемой свободной фермы) достигается последовательным присоединением узлов к преды-



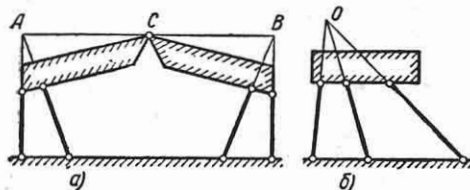
дущим узлам, начиная от концов исходного стержня, каждый раз двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Решетка получается в виде системы треугольников. Такая ферма обязательно имеет хотя бы один узел, присоединенный только двумя стержнями к предыдущим, и может быть расформирована последовательным отбрасыванием двух стержневых узлов.

Путем перестановки одного или нескольких стержней из простейшей фермы получается преобразованная, не имеющая узлов, в которых сходятся всего два стержня. Преобразованные фермы всегда следует контролировать на мгновенную изменемость (малую подвижность), делающую ферму непригодной для практического использования. Ферм, близких к мгновенно изменяемым, следует избегать, так как при произвольной нагрузке в стержнях получатся весьма большие усилия.

Неподвижное соединение двух жестких плоских тел требует трех стержней. Два стержня эквивалентны шарниру в точке пересечения.

Проверка на мгновенную изменемость плоских сооружений в практически важных случаях достигается контролем соблюдения двух правил: 1) три стержня, взаимно прикрепляющие два тела, не должны пересекаться в одной точке и не быть параллельными; 2) три шарнира, попарно соединяющие между собой три плоских тела, не должны лежать на одной прямой. В отдельных случаях следует учитывать эквивалентность двух стержней и шарнира.

На фиг. 3, а мгновенная изменемость обусловлена расположением трех то-



Фиг. 3.

чек — шарнира  $C$  и двух точек пересечения стержней  $A$  и  $B$  на одной прямой, на фиг. 3, б — пересечением трех стержней в одной точке  $O$ .

Расчет усилий в плоских фермах при неподвижной нагрузке. Порядок расчета: 1) вычерчивание расчетной схемы; 2) определение нагрузок;

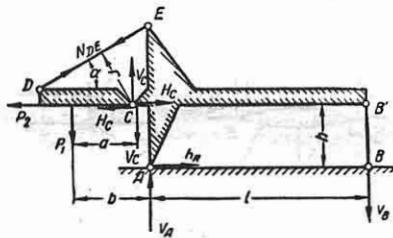
3) определение опорных реакций и сил взаимодействия в шарнирах между отдельными фермами; 4) определение усилий в стержнях; 5) подбор сечений элементов в соответствии с указаниями гл. II.

Нагрузки определяются на основании фактических весовых, проектных или нормативных данных.

Реакции опор определяются аналитически из уравнений равновесия или графически непосредственным разложением сил, либо при помощи веревочного многоугольника. Если ферменная конструкция представляет совокупность нескольких соединенных между собой ферм, то каждая из частей может быть отделена и рассматривается самостоятельно, но в точках, где произведено отделение, к этой части должны быть приложены силы, характеризующие действие на нее других частей. Эти силы определяются так же, как и реакции (см. т. 1, стр. 364—365).

Аналитическое определение реакций производится путем составления уравнений равновесия сил (см. т. 1, гл. XVIII, стр. 352—357).

*Пример 1. Конструкция перегружателя (фиг. 4) представляет собой жесткое целое; условия опирания — как у простой балки. Нагрузки —*



Фиг. 4.

вертикальная сила  $P_1$  и горизонтальная сила  $P_2$  (торможение). Реакция  $H_A$  определяется из уравнения  $\sum X = 0$ , откуда

$$H_A - P_2 = 0; \quad H_A = P_2,$$

реакция  $V_A$  — из уравнения равновесия моментов относительно шарнира  $B$ :

$$-P_1(b+l) - P_2h + V_A l = 0;$$

$$V_A = \frac{1}{l} [P_1(b+l) + P_2h].$$

Ферма состоит из двух частей: фермы  $DC$  и фермы  $ECAB'$ . Ферма  $DC$  отделяется от фермы  $ECAB'$  в шарнире  $C$ , и наклонный стержень  $DE$  выбрасывается; в точке  $C$  на ферму  $DC$  будет действовать реакция с горизонтальной и вертикальной составляющими  $H_C$  и  $V_C$ , а в точке  $D$  — сила  $N_{DE}$  под углом  $\alpha$  к горизонтали, рав-

ная усилию отброшенного стержня  $DE$ . Для определения  $H_C$ ,  $V_C$  и  $N_{DE}$  можно применить уравнения моментов и проекций сил. Рассматривая равновесие фермы  $DC$ , имеем уравнения моментов относительно точки  $C$ :

$$-P_1 a + N_{DE} r = 0; \quad N_{DE} = P_1 \frac{a}{r}.$$

Уравнения проекций на горизонтальную и вертикальную оси дают

$$-P_2 + H_C + N_{DE} \cos \alpha = 0;$$

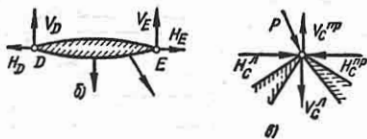
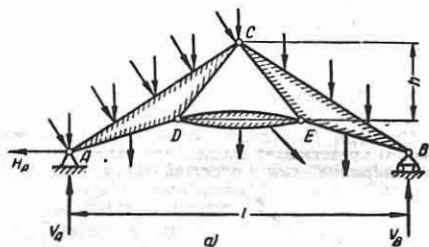
$$-H_C = N_{DE} \cos \alpha - P_2 = P_1 \frac{a}{r} \cos \alpha - P_2;$$

$$-P_1 + V_C + N_{DE} \sin \alpha = 0;$$

$$V_C = -N_{DE} \sin \alpha + P_1 = P_1 \left(1 - \frac{a}{r} \sin \alpha\right).$$

Таким образом, силы, действующие на ферму  $DC$  со стороны фермы  $ECAB'$ , найдены. Прикладывая к ферме  $ECAB'$  в точках  $C$  и  $E$  силы  $H_C$ ,  $V_C$  и  $N_{DE}$ , направленные противоположно найденным, получаем необходимые данные для расчета этой фермы.

**Пример 2. Стропильная ферма** (фиг. 5, а). Расчет начинается с определения реакции  $V_B$  из



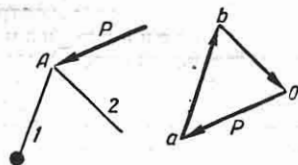
Фиг. 5.

уравнения  $\Sigma M_A = 0$ , реакции  $H_A$  — из уравнения  $\Sigma X = 0$  и реакции  $V_A$  — из уравнения  $\Sigma Y = 0$ . Если брус  $DE$  не нагружен внешними силами (усилия на брус  $DE$  передаются только в шарнирах), то он играет роль стяжки, и усилие в нем  $N_{DE}$  определяется из уравнения равновесия моментов сил, действующих на часть фермы  $CEB$  относительно шарнира  $C$ . Если же брус  $DE$  несет нагрузку, то четыре реакции в шарнирах  $D$  и  $E$  (фиг. 5, б) определяются из указанного уравнения  $\Sigma M_C = 0$  и трех уравнений равновесия бруса  $DE$  в таком порядке: сперва находим  $V_D$  как реакцию простой балки, точно так же  $V_E$ , затем  $H_E$  из уравнения  $\Sigma M_C = 0$  для части  $CEB$  и, наконец,  $H_D$  из уравнения  $\Sigma X = 0$  для бруса  $DE$ . Реакции в шарнире  $C$  благодаря присутствию нагрузки в этом узле будут различными по величине для частей  $ACD$  и  $CEB$  и обозначаются поэтому  $V_C^A$  и  $V_C^{np}$ ,  $H_C^A$

и  $H_C^{np}$  (фиг. 5, б). Они определяются из уравнений  $\Sigma X = 0$  и  $\Sigma Y = 0$ , составленных отдельно для обеих частей, после того как определены реакции бруса  $DE$ . Можно ограничиться определением  $V_C^A$ ,  $H_C^A$  и найти  $V_C^{np}$ ,  $H_C^{np}$  при помощи уравнений  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  для вырезанного шарнира  $C$ .

Графическое определение реакции основано на двух случаях уравнивания сил на плоскости.

**Первый случай.** Требуется уравновесить заданную силу  $P$  двумя силами, линии действия которых 1 и 2 заданы и пересекаются на линии  $P$  (фиг. 6).

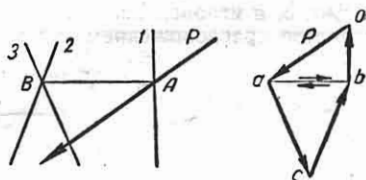


Фиг. 6.

Решение. Строится замкнутый треугольник  $OabO$ , у которого стороны  $Oa$ ,  $ab$  и  $bO$  параллельны направлениям  $P$ , 1 и 2. Отрезки  $ab = P_1$  и  $bO = P_2$  суть искомые силы.

Направление сил определяется обходом силового треугольника по направлению известной силы  $P$ .

**Второй случай.** Требуется уравновесить заданную силу  $P$  тремя силами, не пересекающимися в одной точке и не параллельными, линии действия которых 1, 2 и 3 заданы (фиг. 7). Сначала уравнивается сила  $P$  двумя

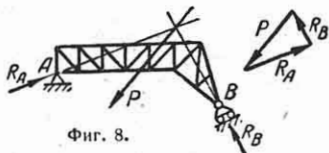


Фиг. 7.

силами: первая направлена по оси 1, а вторая — по прямой  $AB$ , где  $A$  — точка пересечения  $P$  с 1, а  $B$  — точка пересечения прямых 2 и 3, что приводит к первому случаю. С этой целью строится замкнутый треугольник сил  $Oab$ , где  $Oa = P$ ,  $ab$  — составляющая вдоль прямой  $AB$  и  $bO$  — составляющая вдоль прямой 1. Далее  $ba$  уравнивается двумя силами  $ac$  и  $cb$ , направленными

вдоль прямых 2 и 3. Обходя четырехугольник равновесия по направлению силы  $P$ , получаем направления трех уравновешивающих сил.

**Пример 1.** Ферма с цилиндрической неподвижной опорой слева и цилиндрической подвижной опорой справа. Равнодействующая нагрузка  $P$  действует наклонно (фиг. 8).

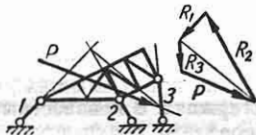


Фиг. 8.

Реакция  $R_B$  опоры  $B$  перпендикулярна к линии, вдоль которой возможно движение опоры. Линия действия реакции  $R_A$  опоры  $A$  проходит через центр опоры. Через  $B$  проводим прямую действия реакции до пересечения с  $P$ , затем точку пересечения соединяем с  $A$ , что определяет направление левой реакции. После этого силу  $P$  уравновешиваем двумя силами, направления которых известны, что выполняется с помощью силового треугольника (1-й случай).

Если сила  $P$  параллельна направлению реакции  $R_B$ , то обе реакции параллельны силе  $P$  и определяются при помощи уравнений моментов.

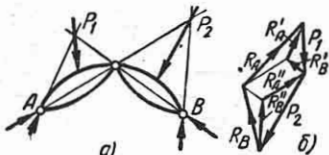
**Пример 2.** Ферма, имеющая три опорных стержня 1, 2, 3 (фиг. 9). Уравновесив силу  $P$ , действующую на ферму, тремя силами, линии



Фиг. 9.

действия которых направлены по осям опорных стержней, находим опорные реакции, в данном случае усилия опорных стержней. Задача сводится ко 2-му случаю.

**Пример 3.** Трехшарнирная арка (фиг. 10, а). Реакции опор  $A$  и  $B$  определяем отдельно для нагрузки  $P_1$ , действующей на левой половине, полагая



Фиг. 10.

правую половину ненагруженной, и отдельно для нагрузки  $P_2$ , действующей на правой половине, полагая левую половину ненагруженной (фиг. 10, б). В каждом случае нагруженная половина арки рассматривается как отдельная ферма, а ненагруженная — как опорный стержень. Реакции  $R_A$  и  $R_B$  при нагрузках  $P_1$  и  $P_2$ , действующих совместно, получаем геометрическим сложением реакций, определенных для  $P_1$  и  $P_2$  раздельно.

Применение веревочного многоугольника к определению реакций — см. т. 1, стр. 365.

Усилия в стержнях могут быть определены аналитически или графически путем построения диаграммы Максвелла-Кремоны.

Аналитическое определение усилий в стержнях основано на использовании уравнениями равновесия отдельных вырезанных узлов (метод узловых сечений) или уравнениями равновесия отрезанных частей фермы (метод сквозных сечений).

Составляя для всех узлов в отдельности пары уравнений равновесия

$$\pm P \cos(P, x) \pm \sum_i N \cos(N, x) = 0;$$

$$\pm P \cos(P, y) \pm \sum_i N \cos(N, y) = 0,$$

где  $i$  — число стержней, сходящихся в узле, можно определить усилия во всех стержнях, включая опорные.

Практически этим методом пользуются лишь для двухстержневых узлов и для трехстержневых, когда два из трех стержней вытянуты в одну прямую. В последнем случае усилие в третьем (так называемом *дополнительном*) стержне определяется из уравнения равновесия проекций на ось, перпендикулярную к общему направлению двух стержней:

$$N_{доп} = \pm P \frac{\cos \alpha_P}{\cos \alpha_{доп}},$$

где  $\alpha_P$  — угол узловой нагрузки  $P$  с осью проекций;  $\alpha_{доп}$  — угол дополнительного стержня с той же осью.

Если узел не нагружен, то усилие дополнительного стержня равно нулю. Если  $P$  направлено вдоль дополнительного стержня, то усилие в нем по абсолютной величине равно узловой нагрузке  $P$ .

Метод сквозных сечений в большинстве случаев позволяет определить каждое усилие из одного уравнения с одним неизвестным.

Проводят (если это возможно) сквозное сечение через три стержня, в числе которых находится и определяемый (фиг. 11). Составляют уравнение моментов всех сил, действующих на оставшуюся часть фермы относительно точки пересечения двух других стержней:

$$\pm N \cdot r \pm M_P = 0$$

(эта точка в дальнейшем называется *точкой моментов* действия).

Здесь  $N$  — искомое усилие;  $r$  — плечо усилия относительно точки моментов;  $M_P$  — сумма моментов внешних сил относительно точки моментов.

Знак ставится в зависимости от направления вращения, например + по часовой стрелке, причем предварительно усилие  $N$  считается растягивающим, т. е. направленным от узла. Если в результате  $N$  окажется положительным, то усилие действительно растягивающее, если  $N$  — отрицательное, то оно сжимающее.

Фиг. 11.

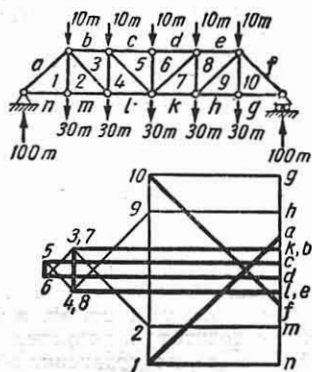
Если два из трех стержней, попадающих в сквозное сечение, параллельны (точка моментов уходит в бесконечность), то вместо уравнения моментов пользуются уравнением равновесия проекций всех сил, действующих на часть фермы, на ось  $u$ , перпендикулярную к двум параллельным стержням:

$$\pm N \cos(N, u) \pm U_P = 0,$$

где  $U_P$  — сумма проекций внешних сил на ось  $u$ .

Если не удается провести сквозное сечение, пересекающее три стержня, то проводят несколько сечений и определяют усилия в стержнях из системы уравнений.

Графическое определение усилий в стержнях состоит в построении диаграммы Максвелла-Кремоны (фиг. 12).



Фиг. 12.

Диаграмма дает изображение усилий всех стержней. Построение основано на рассмотрении равновесия узлов (первый случай уравновешивания, стр. 142). Способ изложен на примере расчета фермы.

1) Определяют внешние силы — узловые нагрузки и опорные реакции.

2) Поля между внешними силами обозначают буквами, поля между стержнями — цифрами, тогда каждая сила и каждый стержень (или усилие) обозначаются двумя буквами, двумя цифрами или буквой и цифрой.

3) Обходя внешние поля фермы в одном направлении (обычно по часовой стрелке), строят в определенном масштабе многоугольник внешних сил. Вершины многоугольника отмечают соответствующими буквами полей.

4) Построение диаграммы начинают от узла, в котором сходятся два стержня. Чертят силовой треугольник, проводя через концы вектора нагрузки прямые, параллельные стержням узла. Система обозначений дает один определенный треугольник равновесия из возможных двух, отличающихся расположением. Для левого опорного узла нагрузка изображается отрезком  $n-a$ . Через точку  $n$  проведена прямая, параллельная стержню  $n-1$ , через точку  $a$  — прямая, параллельная стержню  $a-1$ . На пересечении поставлена точка  $1$ .

5) Переходят к узлу, в котором сходятся только два стержня с неизвестными усилиями. Нагрузкой узла является вектор, концы которого имеют обозначения полей, примыкающих снаружи к двум стержням с неизвестными усилиями. Через эти точки проводят прямые, параллельные указанным стержням. Точку пересечения обозначают одноименно с полем, лежащим между двумя стержнями. Таким узлом является узел  $12mn$ . Через точку  $1$  проведена прямая, параллельная  $1-2$ , через точку  $m$  — прямая, параллельная  $m-2$ . Точка пересечения отмечена цифрой 2.

Далее процесс продолжается, как указано. Следующий узел  $ab321$ . Неизвестные усилия  $b-3$  и  $3-2$ . Через  $b$  проведена прямая, параллельная  $b-3$ , через точку  $2$  — прямая, параллельная  $2-3$ . На пересечении ставят цифру 3 и т. д.

6) Контролем правильности построения служит замыкание диаграммы: в последнем (опорном) узле равнодействующая усилий должна быть равна найденной ранее опорной реакции.

7) Нагрузка и усилия каждого узла образуют на диаграмме замкнутый многоугольник. Знаки усилий определяют путем обхода многоугольника в принятом направлении (по часовой стрелке)

и мысленного переноса течения сил на чертеж фермы: силы, направленные от узла, соответствуют растяжению, к узлу — сжатию. Например, обходя левый верхний узел в порядке  $ab321$ , получаем  $1—a$ ,  $b—3$  — сжатие,  $3—2$ ,  $2—1$  — растяжение.

8) Если отсутствует двухстержневой (начальный) узел или в процессе построения нельзя перейти к узлу, имеющему лишь два неизвестных усилия, то одно из усилий (или два, три, ...) определяют независимо от построения диаграммы, например, методом сечений.

9) В случае неузловой нагрузки (нагрузка в пределах панели) для построения диаграммы нагрузку панели следует заменить статически эквивалентной системой из двух сил, действующих в узлах по концам панели; в добавление к растяжению — сжатию панель будет испытывать изгиб как балка.

10) Если нагружен внутренний узел, то силу следует перед расчетом „вывести наружу“, проще всего разложив ее по направлениям любых двух стержней, сходящихся в данном узле, и приложить найденные компоненты к наружным узлам. Окончательные усилия в этих двух стержнях получаются суммированием компонентов и усилий, полученных из расчета фермы.

**Расчет усилий в плоских фермах при подвижной нагрузке.** Для суждения о невыгодном в отношении данного усилия или другой расчетной величины расположении подвижной нагрузки, а также для вычисления производимого любой нагрузкой эффекта применяются линии влияния. *Линией влияния* называется диаграмма, последовательные ординаты которой дают переменную величину усилия при движении единичного безразмерного груза ( $P=1$ ) вводимого загружаемого пояса.

На фиг. 13 даны линии влияния для балочной фермы. Линии влияния опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  представляют собой треугольники без переломов с ординатой над исследуемой опорой, равной единице, и другой опорной ординатой, равной нулю. Линии влияния реакций являются исходными для построения всех остальных линий влияния, так как каждое усилие может быть выражено из условий равновесия левой либо правой отделенной разрезом части фермы через одну левую либо правую реакцию без введения в расчетную формулу самого единич-

ного груза. Когда груз правее разреза, то рассматривается равновесие левой части, когда он левее разреза — равновесие правой части.

Линии влияния усилий состоят из двух ветвей — правой и левой, пересекающихся под точкой моментов для усилия. Если точка моментов лежит между опорами, то при ферме, имеющей стойки, линия влияния имеет форму треугольника. Если точка моментов за пределами пролета, — линия влияния состоит из двух треугольников разного знака, причем вершины треугольников лежат на вертикалях концов разрезанной панели нагруженного пояса. Левая опорная ордината продолжения правой ветви равна отношению плеча левой опорной реакции относительно моментной точки данного усилия к плечу самого усилия. Аналогично правая опорная ордината продолжения левой ветви равна отношению плеча правой реакции относительно той же точки моментов рассматриваемого усилия к плечу самого усилия.

Правило остается в силе, если моментная точка уходит в бесконечность: указанное отношение плеч в этом случае

заменяется величиной  $\frac{1}{\sin \alpha}$ , где  $\alpha$  — угол

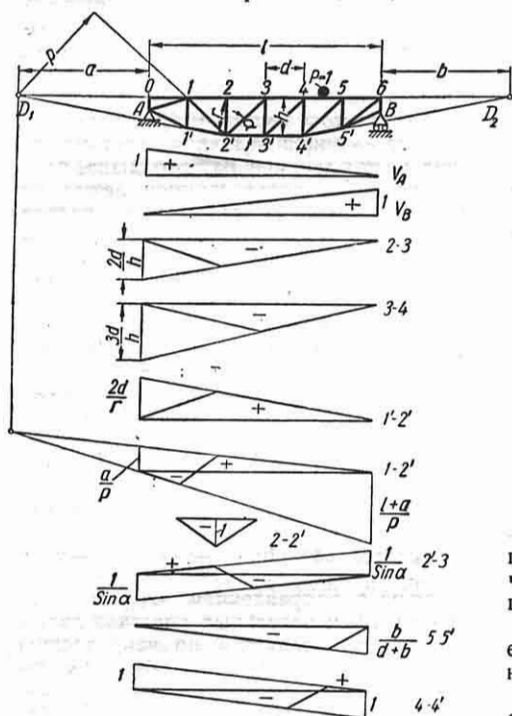
стержня с направлением параллельных поясов. Знак отдельных участков линии влияния определяется по направлению вращения отрезанной части фермы относительно моментной точки. На фиг. 13 моментная точка для раскоса  $1—2'$  обозначена через  $D_1$ , плечо левой реакции — через  $a$ , плечо усилия раскоса — через  $p$ . Левая опорная ордината

правой ветви равна  $\frac{a}{p}$ , правая опорная

ордината левой ветви соответственно —  $\frac{l+a}{p}$ . Средний участок линии влияния

определяется проектированием узлов  $1$  и  $2$  разрезанной панели на левую и правую ветви. Для установления знаков ставим груз правее разрезанной панели и рассматриваем равновесие левой части. Реакция  $V_A$  вращает относительно моментной точки против часовой стрелки, следовательно, усилие раскоса, действующее на узел  $1$ , должно вращать против часовой стрелки, т. е. направлено от узла (растяжение). Итак, при грузе правее разреза раскос растянут. Ставим знак плюс на правой ветви и знак минус на левой.

Стойка 2—2' является так называемым дополнительным стержнем. Она работает только от нагрузки в пределах панелей 1—2 и 2—3. Средняя ордината ее линии влияния равна единице.



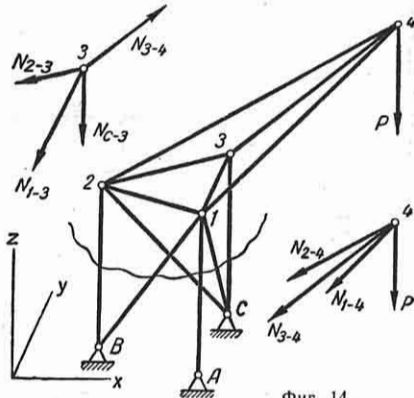
Фиг. 13.

Установка подвижной нагрузки в опасное положение. Усилие в стержне от действия сосредоточенных нагрузок выражается формулой  $N = \sum P_i y_i$ , где  $P_i$  — грузы,  $y_i$  — ординаты линии влияния под грузами. Крановые нагрузки состоят из одного или двух сосредоточенных грузов. При двух грузах (тележка) величины их обычно неодинаковы. Опасное положение нагрузки соответствует установке более тяжелого груза над вершиной с наибольшей ординатой. При линии влияния с участками разного знака следует произвести две установки нагрузки для определения наибольшего положительного и наибольшего отрицательного значения усилия.

Усилие от равномерно распределенной нагрузки равно  $N = p\omega$ , где  $p$  — погонная интенсивность нагрузки,  $\omega$  — площадь загружаемого участка линии влияния.

## Пространственные фермы

**Образование пространственных ферм.** Образование простейшей прикрепленной фермы — последовательное наращивание каждого из узлов при помощи трех стержней, не лежащих в одной плоскости. Например, ферма крана (фиг. 14) образована в порядке нумерации узлов 1—2—3—4. Число стержней



Фиг. 14.

прикрепленной фермы равно утроенному числу узлов, причем узлы, принадлежащие „земле“, в счет не входят.

При расчете на узловую нагрузку соединения стержней в узлах считаются шарнирными (шаровые шарниры без трения).

Расчет усилий ведется в порядке, обратном образованию, начиная от узла, в котором сходятся три стержня. Стержни, принадлежащие к ненагруженным трехстержневым узлам, имеют нулевые усилия и мысленно отбрасываются.

Аналитический расчет состоит в решении системы троек уравнений равновесия узлов  $\sum X=0$ ,  $\sum Y=0$ ,  $\sum Z=0$ .

Для узла 4 уравнения равновесия будут:

- 1)  $-N_{1-4} \cos(1-4, x) - N_{2-4} \cos(2-4, x) - N_{3-4} \cos(3-4, x) = 0;$
- 2)  $-N_{1-4} \cos(1-4, y) - N_{2-4} \cos(2-4, y) + N_{3-4} \cos(3-4, y) = 0;$
- 3)  $-N_{1-4} \cos(1-4, z) - N_{2-4} \cos(2-4, z) - N_{3-4} \cos(3-4, z) - P = 0,$

для узла 3

$$4) +N_{3-4} \cos(3-4, x) - N_{3-2} \cos(3-2, x) - N_{3-1} \cos(3-1, x) = 0$$

и далее таким же образом.

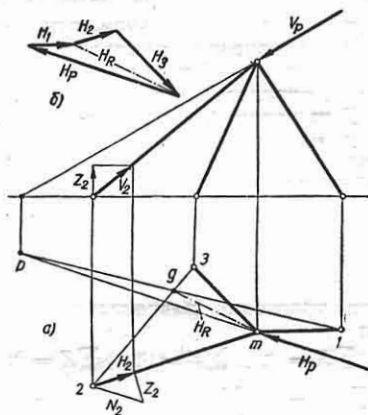
Косинусы, равные отношению проекции стержня на данную ось к истинной длине стержня, следует брать по абсолютной величине. Усилия  $N$  вводятся в уравнения со знаком, соответствующим знаку проекции на ось, причем все неизвестные усилия считаются растягивающими, направленными от узла. Одно и то же усилие входит в два уравнения равновесия проекций на одну и ту же ось (для двух узлов)—один раз со знаком плюс, другой раз — со знаком минус. Этот же способ применяется для преобразованных ферм, но решение уравнений усложняется, так как система не распадается на последовательно решаемые тройки. Расчет часто упрощается применением правила: если все стержни узла, кроме одного, лежат в одной плоскости, то усилие в выходящем из плоскости стержне определяется независимо от остальных из уравнения равновесия проекций на нормаль к указанной плоскости; если узел не нагружен, то усилие в выходящем стержне равно нулю.

Способ удобен для ферм, у которых большое число стержней лежит в плоскостях, параллельных координатным; при произвольном расположении стержней следует применять графические методы.

Графический способ расчета простейших ферм состоит в последовательном разложении силы на три направления в ортогональных проекциях. В отдельных случаях цепь разложений осуществляется без повторов в откладывании усилий — в виде непрерывной диаграммы. Все графические операции основаны на положении: *если система сил находится в равновесии, то и проекции их на любую плоскость также уравновешиваются.*

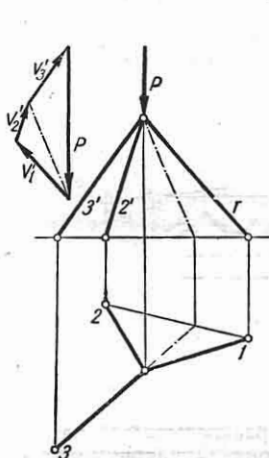
Разложение известной силы в узле на три направления (фиг. 15): проводится плоскость через силу  $P$  и один из стержней (например, 1). Определяется в плане прямая  $gm$  пересечения этой плоскости с плоскостью стержней 2 и 3. Сила  $H_p$  в плане раскладывается по направлениям (1) и ( $gm$ ) при помощи силового треугольника (фиг. 15, б). Горизонтальная проекция  $H_R$  равнодействующей усилий 2 и 3 раскладывается по направлениям 2 и 3. Силовой многоугольник обходят по течению известной силы  $H_p$ . Горизонтальные проекции  $H_1, H_2, H_3$  усилий и направления вертикальных проекций определяют и истинные вели-

чины усилий  $N_1, N_2, N_3$  (см. построение для  $N_2$  на фиг. 15, а около точки 2).

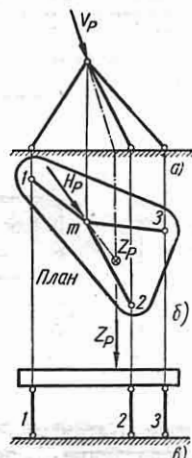


Фиг. 15.

В случае вертикальной нагрузки узла в первую очередь определяются вертикальные проекции усилий  $V_1, V_2, V_3$ . Построение ясно из фиг. 16.



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Графо-аналитический способ. Первой операцией является определение проекций  $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$  усилий на вертикальную ось (так называемых вертикалов) из уравнений равновесия моментов сил, приложенных в их горизонтальных следах. Задача эквивалентна определению усилий в трех вертикальных опорных стержнях, поддерживающих твердое тело (неизменяемую ферму), нагруженное вертикальной силой  $Z_p$ , равной вертикалу

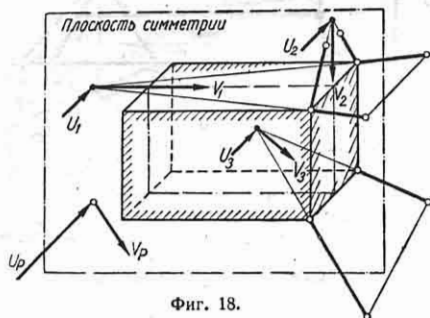
силы  $P$  и приложенной в ее следе на горизонтальной плоскости (фиг. 17).  $Z_1$  находится из уравнения моментов относительно горизонтальной оси 2—3;  $Z_2$  — из уравнения моментов относительно оси 1—3 и т. д. Имея вертикалы  $Z$ , определяют графически проекции  $V$  на вертикальную плоскость, а по ним и на горизонтальные проекции  $H$ ; истинные величины усилий  $N = \sqrt{Z^2 + H^2}$ .

Прикрепление твердого тела к земле или другому телу осуществляется шестью стержнями (связями). Усилия в стержнях определяются из шести уравнений равновесия твердого тела:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x &= 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned}$$

В отдельных случаях усилия определяются сразу из независимых уравнений равновесия моментов относительно осей, пересекающих пять стержней, либо усилия определяются в последовательности, позволяющей избежать решения системы совместных уравнений.

На фиг. 18 показано прикрепление тела, обладающее плоскостью симметрии



Фиг. 18.

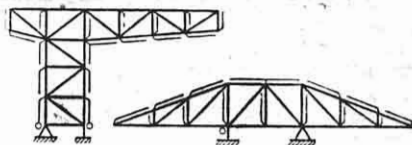
три. Нагрузка  $P$  раскладывается на составляющие  $U_p$ , перпендикулярную к плоскости симметрии, и  $V_p$ , лежащую в этой плоскости. Первая заменяется тремя параллельными составляющими  $U_1, U_2, U_3$  в точках пересечения попарно симметричных стержней и дает при разложении по их направлениям одинаковые по величине, но противоположные по знаку усилия. Вторая заменяется тремя составляющими  $V_1, V_2, V_3$ , лежащими в плоскости симметрии и одновременно в плоскостях попарно симметричных стержней. Разложение по направлениям стержней дает в них одинаковые по величине

и по знаку усилия. Статически неопределимые случаи прикрепления твердого тела более чем шестью стержнями см. [8]. Другие способы расчета статически определимых пространственных ферм см. [4], [5], [6], [7], [8].

### Расчет спаренных плоских ферм [8]

В пространственной системе, состоящей из двух плоских ферм, неизменяемым образом закрепленных в своих плоскостях и связанных между собой стержнями, образующими зигзаг, эти связи передают нагрузки, перпендикулярные к плоскостям ферм, на опоры. Стержни опор, перпендикулярные к плоскостям ферм, называются *упорными стержнями*. Конструкция статически определима, если от любого узла можно только одним способом, следуя по зигзагу связей, прийти к упорному стержню. Если имеется один упорный стержень, то зигзаг связей должен быть непрерывным, но незамкнутым. При нескольких упорных стержнях число отдельных зигзагов, открытых на одном конце и оканчивающихся упорным стержнем, должно быть равно числу этих стержней.

Для изображения конструкций, состоящих из двух одинаковых ферм, обычно достаточно пользоваться фасадом передней фермы. В каждом узле предполагается распорка связей. Раскос связей изображается линией, параллельной стержню главной фермы, причем соединительная черточка отмечает узел передней фермы, в котором к ней примыкает данный раскос связей. На фиг. 19 приведены примеры простейших статически определимых конструкций с упорными стержнями, отмеченными



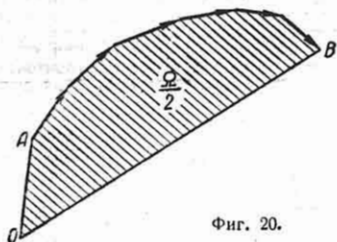
Фиг. 19.

кружками. Сила, перпендикулярная к чертежу, изображается кружком с точкой, если она действует к наблюдателю, и кружком с крестиком, если она действует от него.

Нагрузка от связей на ферму (переднюю) представляет собой цепочку с л, начало которой совпадает с нагруженным узлом, а конец — с узлом, где



помещен упорный стержень. Цепочкой называется силовой многоугольник, стороны которого могут быть совмещены с линиями действия сил (фиг. 20). Мас-



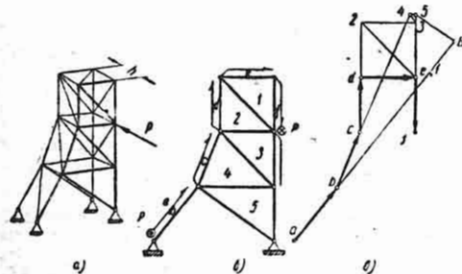
Фиг. 20.

штабное число, на которое надо умножить отрезки контура фермы, снабженного связями, равно  $q = \frac{P}{h}$ , где  $P$  — сила, перпендикулярная к плоскости фермы,  $h$  — расстояние между фермами.

Усилия в упорном стержне равно  $P$ . Определение усилий в двух упорных стержнях при непрерывном зигзаге связей между ними представляет собой статически неопределимую задачу.

Для определения реакций и усилий в стержнях основных ферм используется свойство силовой цепочки, согласно которому момент ее относительно полюса  $O$  равен  $M = q\Omega$ , где  $\Omega$  — удвоенная площадь сектора с полигональной дугой  $AB$  и полюсом  $O$ . Применение этого правила показано ниже в примере 2.

**Пример 1** (фиг. 21). Ферменная конструкция имеет связи во всех панелях, кроме правой нижней (фиг. 21, а). Последняя диагональ связей упо-



Фиг. 21.

рается в неподвижный пятый шарнир, поэтому отдельный упорный стержень не изображен. Сила  $P$  натягивает все элементы связей между силой и упорным шарниром.

На фиг. 21, б показано изображение конструкции по указанному выше способу и дана нумерация полей, а на фиг. 21, в — взаимная диаграмма усилий для передней фермы. Силовой масштаб равен  $\frac{P}{h}$ . Нагрузки задней фермы в данном

случае смещены на одну панель от упорного стержня и имеют обратное направление.

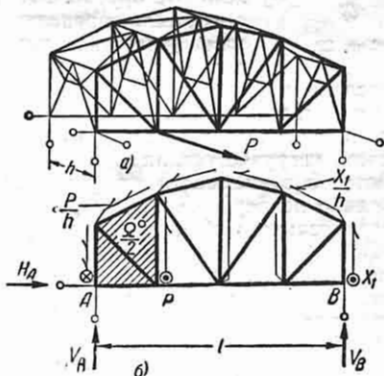
**Пример 2** (фиг. 22). Пролетное строение с открытым нижним поясом, часто встречающееся в крановых конструкциях. Второй упорный стержень делает систему 1 раз статически неопределимой. За неизвестную принято усилие  $X_1$  в правом упорном стержне (фиг. 22, а).

На фиг. 22, б показаны силовые цепочки от  $P$  (погонная интенсивность  $q^0 = \frac{P}{h}$ ) и от  $X_1$  (интенсивность  $q_1 = \frac{X_1}{h}$ ).

Для расчета усилий в ферме необходимо найти опорные реакции. Из уравнения  $\Sigma M_A = 0$  получаем

$$V_B = -\frac{1}{hl} (P\Omega^0 + X_1\Omega),$$

где  $\Omega^0$  — удвоенная площадь трапеции, заштрихованной на фиг. 22, б;  $\Omega$  — удвоенная площадь



Фиг. 22.

всего фасада фермы;  $V_A = -V_B$  (из уравнения  $\Sigma Y = 0$ ):

$$H_A = \frac{P}{h} d + \frac{X_1}{h} l,$$

где  $d$  — длина первой панели. Далее определяются усилия всех стержней отдельно от  $P$  и  $X_1 = 1$  и методом сил из уравнения  $X_1^0 + \Delta_1 P = 0$  определяется величина  $X_1$ . Очень часто довольствуются приближенным решением, распределяя силу  $P$  на упорные стержни по закону рычага.

Теорию и примеры расчета спаренных ферм (би конструкций) см. [8].

Динамический расчет ферм см. [9], [10]. Расчет ферм с учетом пластических деформаций см. [28], [29], [30], [32].

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

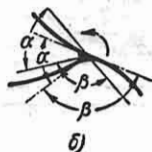
*Рамой* называется стержневая система, в которой для обеспечения неизменяемости стержни соединены между собой во всех или в некоторых узлах жестко и которая теряет неизменяемость,

если жесткие узлы предположить шарнирными (фиг. 23, а).

Жесткость узла выражается в том, что касательные к упругим линиям стержней в узле после деформации образуют между собой тот же угол, что оси стержней до деформации (фиг. 23, б).



а)



б)

Фиг. 23.

Рамы могут быть статически определимыми и статически неопределимыми.

Статически определимые рамы рассчитываются как кривые или ломаные брусья. Расчет статически определимых рам является основой для расчета статически неопределимых рам (см. стр. 156—162).

Плоские рамы, нагруженные в своей плоскости. При заданной нагрузке усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  определяются в зависимости от устройства опор либо непосредственно, либо после предварительного определения опорных реакций.

Для определения усилий в сечении производится мысленный разрез; часть, расположенная по одну сторону сечения, отбрасывается и действие приложенных к ней сил заменяется эквивалентной системой в виде изгибающего момента,  $M$ , поперечной силы  $Q$  и продольной силы  $N$  (см. гл. II).

Построение эпюр моментов, продольных и поперечных сил. Для изгибающих моментов вместо правила знаков устанавливается следующее правило: ординаты эпюры откладываются со стороны растянутого волокна изогнутого стержня. В случае необходимости ввести знак момента стержни рамы уподобляются балкам и отмечается нижнее и верхнее волокно. Положительным считается момент, вызывающий растяжение в нижнем волокне. Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение, отрицательной, — если вызывает сжатие.

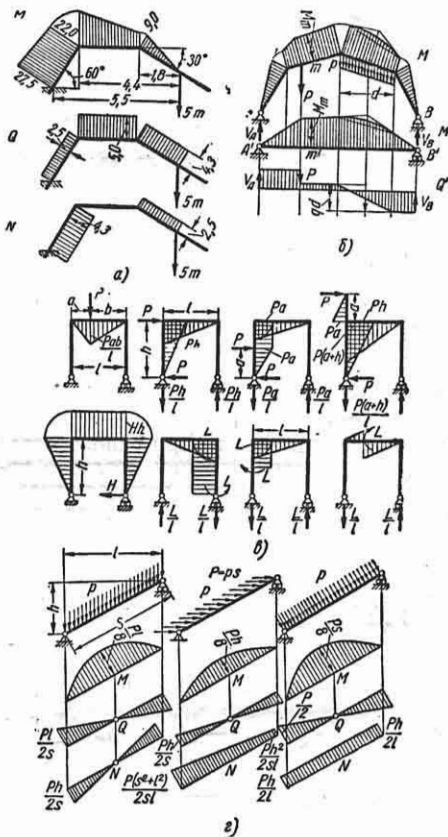
Поперечная сила считается положительной или отрицательной в зависимости от схемы (фиг. 24, а или соответственно 24, б). Если рама имеет свободный конец, то построение эпюр начинается от этого конца.



Фиг. 24.

Если свободного конца нет, то сперва определяются опорные реакции, а затем строится эпюра.

На фиг. 25, а показаны эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для ломаной консоли. Усилия определяются последовательно, начиная от свободного конца. В раме на фиг. 25, б предварительно определяются реакции опор, как для прямой балки, являющейся горизонтальной проекцией данной рамы. На фиг. 25, в показаны



Фиг. 25.

эпюры изгибающих моментов для однопролетной рамы при различных воздействиях силы и момента; здесь также предварительно из условия равновесия определяются реакции опор. На фиг. 25, а показаны эпюры моментов для наклонных прямых стержней. На эпюрах фиг. 25, б и в изгибающие моменты отложены от сжатого волокна, как это принято для балок.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Определение перемещений производится: а) для проверки жесткости конструкции; б) при составлении системы уравнений для определения усилий в

брусках статически неопределимой конструкции; в) для выяснения влияния неточностей в размерах элементов или температурных удлинений на форму конструкции. Все деформации и обусловленные ими перемещения считаются величинами весьма малыми по сравнению с исходными геометрическими элементами конструкции, поэтому размеры и углы вводятся в расчеты без учета их изменения вследствие деформации и влияние отдельных факторов на величину окончательных усилий или перемещений можно суммировать. В этом состоит принцип сложения действия сил для достаточно жестких конструкций.

### Перемещения плоской стержневой системы

Плоская система нагружена и деформируется в своей плоскости (формула Максвелла-Мора). Перемещение равно

$$\Delta_m = \int \frac{M}{EJ} \bar{M} ds + \int \frac{N}{EF} \bar{N} ds + \int \frac{kQ}{GF} \bar{Q} ds + \int \frac{a(t_n - t_b)}{h} \bar{M} ds + \int \alpha t_{cp} \bar{N} ds + \sum \varphi \bar{M} + \sum \lambda \bar{N} + \sum \eta \bar{Q}. \quad (1)$$

Обозначения:  $ds$  — элемент длины бруса (интегрирование ведется по длине всех брусков);  $M, N, Q$  — ординаты эпюр усилий в заданном (фактическом) состоянии системы;  $EJ, EF, GF$  — изгибная, продольная и поперечная жесткости сечений брусков, в общем случае переменные по длине;  $k$  — коэффициент, вводимый для учета неравномерности распределения касательных напряжений по высоте бруса при изгибе.

Значения  $k$  для употребительных сечений: прямоугольник 1,2, круг 1,1, двутавр прокатный 2,0—2,3, двутавр клепаемый 2,3—2,9, двутавр с тонкой стенкой и массивными поясами  $k = \frac{F_{полная}}{F_{стенки}}$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения;  $t_n$  и  $t_b$  — температуры нижнего и верхнего волокон бруса (нижним считается волокно, растянутое положительным изгибающим моментом);  $t_{cp}$  — приращение температуры оси бруса по отношению к температуре сборки;  $\varphi, \lambda, \eta$  — сосредоточенные деформации — угловая,

продольная и поперечная (сдвиг) (фиг. 26), им приписывается знак плюс, если характер деформации соответствует упругой деформации от положительных  $M, N, Q$ ;  $\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}$  — ординаты эпюр от единичной обобщенной силы, соответствующей искомому перемещению. Если определяется прогиб в сечении  $m$ , берется безразмерная сосредоточенная сила  $P_m = 1$  в направлении искомого прогиба. Если определяется угол поворота сечения  $m$ , берется безразмерный сосредоточенный момент  $L_m = 1$ .

Три первых слагаемых формулы (1) дают упругое перемещение соответственно от изгиба, от продольной и от поперечной деформации; следующие два слагаемых дают температурное перемещение соответственно от неравномерного и равномерного нагрева; три последних слагаемых дают перемещение от наперед заданных неупругих сосредоточенных деформаций. При вычислении перемещения вводятся только те слагаемые, которые соответствуют учитываемой деформации.

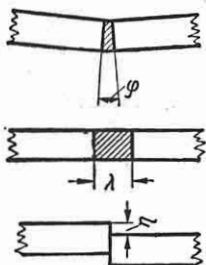
Если отдельные стержни имеют постоянное сечение, то в формуле (1) жесткости  $EJ, EF, GF$  выносятся за знак интеграла и интеграл по длине всех стержней вычисляется как сумма интегралов, взятых по длине каждого стержня.

Для стержней, работающих только на продольную силу, имеющих  $F = \text{const}, N = \text{const}, \bar{N} = \text{const}$ , имеем

$$\int \frac{N}{EF} \bar{N} ds = \sum \frac{N \bar{N} l}{EF}.$$

См. также ниже случай ферменной конструкции.

Для балочных и рамных конструкций с прямолинейными стержнями, сечение которых подобрано по изгибу, относительное влияние продольной и поперечной деформаций незначительно, поэтому учитывается только деформация изгиба. Эпюра  $\bar{M}$  состоит из прямолинейных участков. Значение  $\int \frac{M}{EJ} \bar{M} ds$



Фиг. 26.

на протяжении прямолинейного участка эпюры  $\bar{M}$  равно произведению площади эпюры  $\frac{M}{EJ}$  на ординату эпюры  $\bar{M}$  под центром тяжести этой площади — *правило Верещагина*.

При постоянной жесткости на протяжении отдельных участков формула для упругого перемещения будет

$$\Delta_m = \sum \frac{1}{EJ} \int M \bar{M} ds. \quad (2)$$

Для вычисления интегралов вида  $\int M_i M_k ds$  при заданных эпюрах  $M_i$  и  $M_k$  дана табл. 1. Случай переменной жесткости стержней см. [22].

*Пример.* Определить горизонтальную составляющую перемещения конца А рамы, изображенной на фиг. 27, а, находящейся под действием



Фиг. 27.

жены на фиг. 27, б и в. Перемещение определяется по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_{1a} &= \frac{Pa^2 h_2}{2EJ_2} + \frac{Pa h_1}{EJ_1} \cdot \frac{2h_2 - h_1}{2} = \\ &= \frac{Pa}{2E} \left[ \frac{ah^2}{J_2} + \frac{h_1(2h_2 - h_1)}{J_1} \right]. \end{aligned}$$

Перемещения консольного кругового бруса в некоторых случаях нагружения даны в табл. 2.

Выражение интегралов  $\int M_i M_k ds$ . (Основание всех площадей  $s$ ) Таблица 1

Эпюра $M_k$	Эпюры $M_i$		
	$\frac{sh_1^2}{3}$	$\frac{sh_1 h_2}{3}$	$\frac{S}{6} (2h_1 h_6 + h_1 h_5)$
	$\frac{sh_1 h_2}{6}$	$\frac{sh_2^2}{6}$	$\frac{S}{6} h_2 (2h_5 + h_6)$
	$\frac{S}{6} h_1 (2h_4 + h_3)$	$\frac{S}{6} h_2 (2h_4 + h_3)$	$\frac{S}{6} [2(h_3 h_5 + h_4 h_6) + h_3 h_6 + h_4 h_5]$
	$\frac{sf_1 h_1}{12}$	$\frac{sf_1 h_2}{12}$	$\frac{sf_1}{12} (3h_5 + h_6)$
	$\frac{sf_2 h_1}{4}$	$\frac{sf_2 h_2}{4}$	$\frac{sf_2}{12} (3h_6 + h_5)$
	$\frac{sf h_1}{3}$	$\frac{sf h_2}{3}$	$\frac{sf}{3} (h_5 + h_6)$
	$\frac{S}{6} h_1 (2h_7 + k_2)$	$\frac{S}{6} h_2 [2h_7 + k_2]$	$\frac{S}{6} [h_5 k_1 + 4e h_7 + h_6 k_2]$

Таблица 2

Условия и перемещения консольного кругового бруса

$M, N, Q$  — изгибающий момент, продольная и поперечная сила в произвольном сечении;

$\varphi, u, \theta$  — вертикальное и горизонтальное перемещения и угол поворота конца







Схема	$M$	$N$	$Q$	$\varphi$	$u$	$\theta$
	$-Pr \sin \varphi$	$-P \sin \varphi$	$P \cos \varphi$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{Pr^3}{EJ} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{Pr^4}{EJ} (1 - \cos \alpha)$
	$-Pr(1 - \cos \varphi)$	$P \cos \varphi$	$P \sin \varphi$	$\frac{Pr^2}{EJ} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{Pr^3}{EJ} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{Pr^4}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$
	$-L$	$0$	$0$	$\frac{Lr^2}{EJ} (1 - \cos \alpha)$	$\frac{Lr^3}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{Lr}{EJ} \alpha$
	$-pr^2(1 - \cos \varphi)$	$-pr(1 - \cos \varphi)$	$pr \sin \varphi$	$\frac{pr^4}{EJ} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{pr^5}{EJ} \left( \frac{3\alpha}{2} - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{pr^6}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$
	$-sr^2(\varphi - \sin \varphi)$	$sr \sin \varphi$	$sr(1 - \cos \varphi)$	$\frac{sr^4}{EJ} \left[ \sin \alpha + \frac{\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \alpha \right] + \frac{\sin 2\alpha}{4}$	$\frac{sr^5}{EJ} \left[ \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]$	$\frac{sr^6}{EJ} \left[ \frac{\alpha^3}{2} + \cos \alpha - 1 \right]$

Таблица 3

Усилия и перемещения консольного кругового бруса под нагрузкой, перпендикулярной к его плоскости

Отношение жесткостей изгиба и кручения  $\lambda = \frac{EJ}{GJ_k}$ ;  $GJ_k$  — жесткость при кручении

Схема	Момент изгиба перпендикулярно плоскости $xu$ $M$	Крутящий момент $M_k$	Перемещение, перпендикулярное к плоскости $xu$	Угол поворота вокруг оси $x$	Угол поворота вокруг оси $y$
	$P r \sin \varphi$	$P r (1 - \cos \varphi)$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left[ \frac{1+3\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha - 2\lambda \sin \alpha \right]$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left[ \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\lambda+1}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right]$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left[ \frac{\lambda-1}{2} \sin^2 \alpha + \lambda (1 - \cos \alpha) \right]$
	$L \sin \varphi$	$-L \cos \varphi$	$\frac{Lr^2}{EJ} \left[ \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\lambda+1}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right]$	$\frac{Lr}{EJ} \left( \frac{1+\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha \right)$	$\frac{Lr}{EJ} \cdot \frac{\lambda-1}{2} \sin^2 \alpha$
	$L \cos \varphi$	$L \sin \varphi$	$\frac{Lr^2}{EJ} \left[ \frac{\lambda-1}{2} \sin^2 \alpha + \lambda (1 - \cos \alpha) \right]$	$\frac{Lr}{EJ} \cdot \frac{\lambda-1}{2} \sin^2 \alpha$	$\frac{L}{EJ} \left( \frac{1+\lambda}{2} \alpha - \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha \right)$
	$pr^2 (1 - \cos \varphi)$	$pr^2 (\varphi - \sin \varphi)$	$\frac{pr^4}{EJ} [(1 - \cos \alpha)^2 + \lambda (\alpha - \sin \alpha)^2]$	$\frac{pr^2}{EJ} \left[ (\lambda+1)(1 - \cos \alpha) - \frac{\lambda-1}{4} (1 - \cos 2\alpha) - \lambda \alpha \sin \alpha \right]$	$\frac{pr^2}{EJ} \left[ (\lambda+1) \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\alpha - \lambda \alpha \cos \alpha \right]$

Плоская система нагружена и деформируется перпендикулярно своей плоскости. В этом случае формула Максвелла-Мора имеет вид

$$\Delta_m = \int \frac{M}{EJ} \bar{M} ds + \int \frac{M_k}{GJ_k} \bar{M}_k ds + \int \frac{kQ}{GF} \bar{Q} ds + \int \frac{\alpha(t_n - t_a)}{h} \bar{M} ds + \sum \varphi \bar{M} + \sum \varphi_k \bar{M}_k + \sum \eta \bar{Q}. \quad (3)$$

Здесь  $M$  — изгибающие перпендикулярно плоскости системы моменты;  $Q$  — поперечные силы;  $M_k$  — крутящие моменты;  $\varphi$  — сосредоточенная угловая деформация типа изгиба;  $\varphi_k$  — то же типа скручивания;  $\eta$  — сосредоточенная поперечная деформация.

Перемещения консольного кругового бруса см. в табл. 3.

**Пространственная стержневая система.** Правая часть общей формулы для перемещения  $\Delta_m$  получается в виде суммы правых частей формул (1) и (3). При этом изгибающие моменты  $M$  в формуле (1) относятся к изгибу в одной из главных плоскостей инерции, в формуле (3) моменты  $M$  относятся к изгибу в другой главной плоскости.

**Определение перемещений ферменных конструкций.** Аналитический способ. Перемещение  $m$ -го узла фермы  $\Delta_m$  вычисляется в следующем порядке:

а) определяются удлинения стержней  $\lambda_i$ : упругие удлинения по формуле

$$\lambda_{ip} = \frac{N_{ip} l_i}{E_i F_i},$$

температурные по формуле

$$\lambda_{it} = \alpha_i t_i; \quad (4)$$

б) независимо от заданного состояния фермы рассматривается второе (иначе, воображаемое) состояние, когда в узле  $m$  приложена в направлении искомого перемещения сила, численно равная единице (фиг. 28).

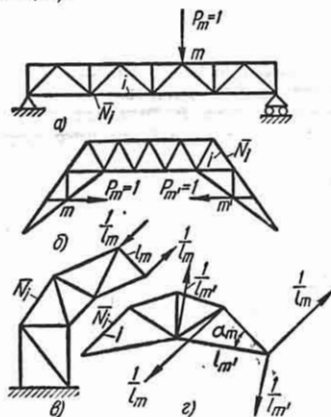
Усилия в стержнях в этом состоянии обозначаются  $\bar{N}$ . Искомый прогиб равен

$$\Delta_m = \sum \lambda_i \bar{N}_i. \quad (5)$$

Перемещение равно сумме произведений фактических удлинений на усилия в стержнях от единичной силы, соответствующей по направлению искомого перемещению. Суммирование распространяется на все стержни.

Этим способом определяется прогиб в заданном направлении, иначе говоря, проекция полного прогиба на заданную ось, например, вертикальную. Для определения вектора полного прогиба данного узла следует взять геометрическую сумму прогибов по двум направлениям, например, по вертикали и по горизонтали.

Для определения изменения расстояния между узлами  $m$  и  $m'$  берутся две противоположные единичные силы (фиг. 28, б).



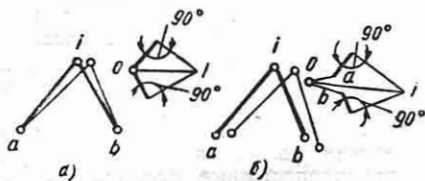
Фиг. 28.

Для определения угла поворота стержня берется пара сил с моментом, равным единице, причем составляющие пары, равные  $\frac{1}{l_m}$ , прикладываются к узлам стержня перпендикулярно оси стержня (фиг. 28, в). Усилия  $\bar{N}$  в этом случае имеют размерность  $см^{-1}$ . Для определения приращения угла  $\alpha_m$  берутся две противоположные единичные пары (фиг. 28, г).

Графический метод (метод Вильо) дает возможность построить диаграмму полных перемещений всех узлов фермы, если известны удлинения отдельных стержней.

Если требуется найти перемещение узла  $i$ , в котором сходятся два стержня (фиг. 29, а), удлинения которых известны, то для каждого из стержней откладывается от произвольной точки  $O$  отрезок, равный удлинению стержня и параллельный его направлению, а затем через концы этих отрезков проводятся перпендикуляры до их взаимной встречи в точке  $i$ .

Вектор  $O_i$  изобразит перемещение узла. Если заданы, кроме того, перемещения концов  $a$  и  $b$  стержней (фиг. 29, б),

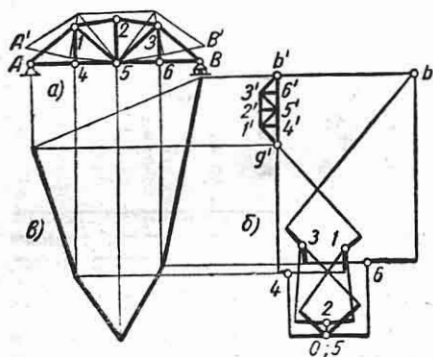


Фиг. 29.

то сначала от точки  $O$  откладываются эти отрезки, а затем выполняется указанное выше построение.

Зная удлинения отдельных стержней, можно построить перемещения всех узлов фермы.

**Пример.** Один узел принимается неподвижным, а направление одного из примыкающих к нему стержней неизменным. В нашем примере ва неподвижные приняты узел 5 (фиг. 30, б) и на-



Фиг. 30.

правление стержня 5—2. Начиная от узла 5 и переходя к узлам 2, 1, 3, ... строят диаграмму относительных перемещений, соответствующую пунктирному изображению деформированной фермы на фиг. 30, а. Чтобы удовлетворить опорным условиям, а именно неизменности положения левой опоры и расположению правой опоры на прямой  $AB$  после деформации, необходимо произвести дополнительное смещение всей фермы в целом в ее плоскости.

Сначала перемещаем  $A'$  в  $A$  (сопутательное перемещение всей фермы), что соответствует переносу полюса  $O$  диаграммы в точку  $a$ . Затем вращаем ферму вокруг  $A$  до тех пор, пока точка  $B'$  не упадет на прямую  $AB$ , что на диаграмме изобразится картиной вращения фермы, представляющей фигуру, подобную ферме и повернутую на  $90^\circ$ . Перемещение любого узла в результате только одного вращения дается вектором, соединяющим точку  $a'$  с изображением этого узла на картине вращения. Окончательное перемещение любого узла представляется вектором, соединяющим соответствующие данному узлу точки картины

вращения и диаграммы относительных перемещений (например,  $2'-2$ ,  $3'-3$  и т. д.).

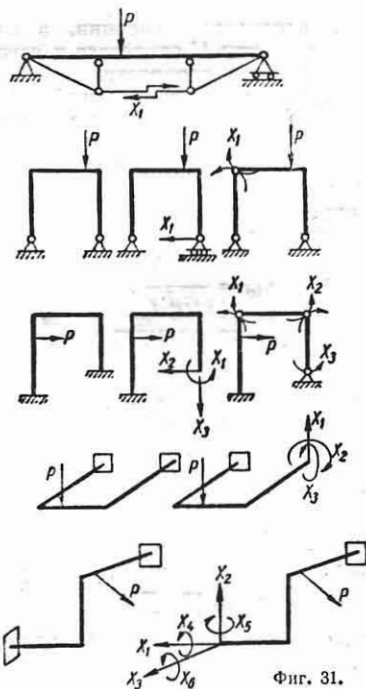
По диаграмме перемещений строим линию прогибов пояса (фиг. 30, в).

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Всякая статически неопределимая система может быть сведена к геометрически неизменяемой системе с минимальным числом связей (т. е. статически определенной) путем перерезывания или отбрасывания избыточных (лишних) связей в виде стержней, опор, жестких заделок и замены их усилиями. Полученная таким образом система называется *основной системой*.

Усилия лишних связей называются *лишними неизвестными*. Их число называется степенью статической неопределимости.

Для заданной статически неопределимой системы можно разнообразными способами, нарушая те или иные связи, выбрать основную систему. Примеры выбора основной системы и назначения лишних неизвестных см. на фиг. 31.



Фиг. 31.

Принимается, что конструкции являются жесткими, перемещения их весьма





$Q$  производят проверку прочности отдельных брусков.

7. Проверка окончательной эпюры. Перемещение по направлению любой лишней неизвестной равно нулю. Пусть  $M$  — ординаты окончательной эпюры,  $\bar{M}_1$  — ординаты эпюры от  $X_1 = 1$  (для основной системы), тогда должно быть

$$\int_s \frac{M}{EJ} \bar{M}_1 ds = 0; \quad (10)$$

точно так же

$$\int_s \frac{M}{EJ} \bar{M}_2 ds = 0 \quad (11)$$

и т. д.

8. Расчет на жесткость. Перемещения статически неопределимой системы определяются по формуле

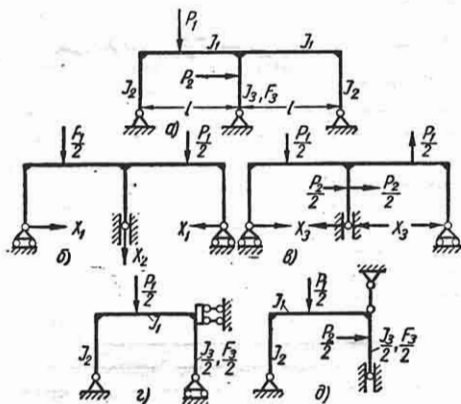
$$\Delta_{ip} = \int_s \frac{M}{EJ} \bar{M}_i ds + \int_s \frac{N}{EF} \bar{N}_i ds + \int_s \frac{kQ}{GF} \bar{Q}_i ds, \quad (12)$$

где  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  — ординаты окончательных эпюр;  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{Q}_i$  — ординаты эпюр, построенных для любой статически определимой основной системы от действия единичной силы в направлении искомого перемещения. Пример расчета рамы с одной лишней неизвестной см. стр. 159.

**Построение линий влияния.** Каждая линия влияния (перемещения или усилия в сечении) может быть построена, как *эпюра прогибов* по направлению движущегося груза от соответствующего фактора, действующего в исследуемом сечении. Если строится линия влияния перемещения (обобщенного), то система нагружается силой (обобщенной), равной единице, соответствующей искомому перемещению. Например, для построения линии влияния вертикального прогиба в сечении  $m$  для вертикальной нагрузки достаточно нагрузить систему вертикальной силой  $P_m = 1$  и построить эпюру прогибов по направлению движущегося груза т. е. в данном случае по вертикали. Если строится линия влияния усилия, то систему следует нагрузить соответствующей сосредоточенной деформацией, равной единице. Для построения линии влияния изгибающего момента  $M$  берется деформация  $\varphi = 1$ , для линии

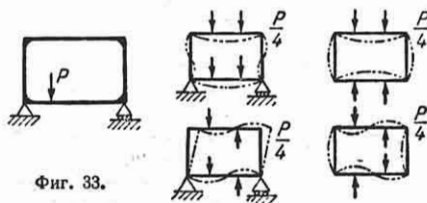
влияния  $N$  берется  $\lambda = 1$  и для линии влияния  $Q$  берется  $\eta = 1$ . Таким образом, построение каждой линии влияния требует решения статически неопределимой задачи от соответствующей нагрузки или сосредоточенной деформации с тем, чтобы можно было осуществить построение эпюры прогибов.

**Упрощение канонических уравнений симметричной системы.** В случае симметричной конструкции (фиг. 32, а) следует основную систему выбирать сим-



Фиг. 32.

метричной и заменить нагрузки симметричными и антисимметричными силовыми группами, в совокупности эквивалентными заданным нагрузкам (фиг. 32, б и в). В первом состоянии лишние неизвестные также представляются симметричными обобщенными силами ( $X_1$  и  $X_2$ ), а во втором состоянии — антисимметричными (в данном случае одной обобщенной силой  $X_3$ ). Расчет как бы приводится к исследованию двух конструкций



Фиг. 33.

половинного пролета (фиг. 32, г и д). Система трех уравнений с тремя неизвестными в каждом заменяется двумя уравнениями, содержащими  $X_1$  и  $X_2$ , и одним независимым уравнением, содержащим  $X_3$ .

Окончательное состояние системы получается суммированием отдельных состояний.

В случае наличия двух осей симметрии конструкции (фиг. 33) расчет замкнутой рамы с тремя неизвестными заменяется расчетом трех рам с одной неизвестной каждая и одной статически определимой.

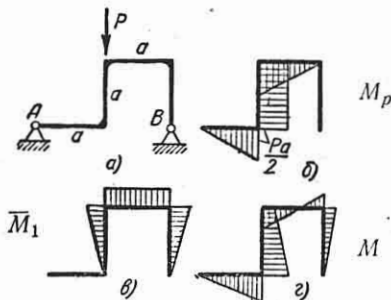
Расчет плоских рам с одной лишней неизвестной является простейшим частным случаем расчета рам методом сил, требующим составления и решения одного канонического уравнения.

Схема расчета: 1) удаляется лишняя связь, и ее действие заменяется неизвестной силой — усилием или реакцией  $X_1$ ; 2) определяются составляющие перемещения рамы в направлении удаленной связи, вызванные действием: а) нагрузкой, изменения температуры ( $\Delta_{1P}$ ) и б) неизвестной силы, предвзвительно принимаемой равной единице ( $\delta_{11}$ ); 3) составляется уравнение, выражающее условие, что полная составляющая перемещения, вызванная совместным действием указанных факторов а) и б), в действительности равна нулю:  $\Delta_{1P} + X_1 \delta_{11} = 0$ .

Из составленного уравнения определяется неизвестная сила, т. е. лишняя неизвестная  $X_1$ .

После определения лишней неизвестной изгибающие моменты, продольные и поперечные силы определяются, как в статически определимой раме.

*Пример.* Построить эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил для рамы, изображенной на фиг. 34, а.  $EJ = \text{const}$ .



Фиг. 34.

В опоре  $B$  удаляем одну связь — опоре сообщаем подвижность в горизонтальном направлении. В полученной основной системе вместо удаленной связи прикладываем неизвестную силу  $X_1 = 1$ . Эпюры изгибающих моментов от нагрузки изображены на фиг. 34, б; эпюры от горизонтальной силы  $X_1 = 1$ , действующей в точке  $B$  вдоль прямой  $BA$ ,

на фиг. 34, в. Ординаты эпюр отложены от растянутого волокна.

Перемещения в направлении отброшенной связи от нагрузки и от силы  $X_1 = 1$  определяем перемножением эпюр (см. стр. 152). Получаем:

а) перемещение от нагрузки

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ} \left( \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{Pa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = -\frac{Pa^3}{2EJ};$$

б) перемещение от силы  $X_1 = 1$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + a^2 \cdot a \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{a^3}{EJ}.$$

Горизонтальное перемещение опоры  $B$  от нагрузки и от силы  $X_1$  в статически неопределимой раме должно быть равно нулю, что выражается следующими уравнениями:

$$\Delta_{1P} + X_1 \delta_{11} = 0; \quad -\frac{Pa^3}{2EJ} + \frac{5}{3} \cdot \frac{a^3}{EJ} X = 0,$$

откуда  $X_1 = \frac{3}{10} P$ .

Окончательная эпюра изгибающих моментов — см. фиг. 34, з.

Поперечная сила  $Q$  в произвольном стержне  $AB$  определяется по формуле

$$Q = \frac{M_B - M_A}{l_{AB}} + Q_0,$$

где  $M_A$  и  $M_B$  — изгибающие моменты на концах  $A$  и  $B$ ;  $Q_0$  — поперечная сила в стержне, принимаемом за свободно опертую балку.

Продольные силы определяются из условий равновесия.

В некоторых случаях расчет рамы, имеющей несколько лишних неизвестных, может быть приведен к расчету рам с одной неизвестной. Это достигается применением метода аналогий (метода упругого центра, или графо-аналитического метода).

Формулы для расчета однопролетных рам даны в табл. 4.

Формулы для расчета плоских колец даны в табл. 5.

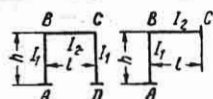
## Расчет плоских одноконтурных рам по методу аналогий

**Нагрузка в плоскости рамы.** Строится эпюра изгибающих моментов  $M^0$  основной системы.

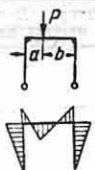
Ординаты эпюры  $M^0$  делятся на соответствующие жесткости  $EJ$  и принимаются за распределенную фиктивную нагрузку, перпендикулярную к плоскости рамы и направленную к наблюдателю, если ординаты эпюры  $M^0$  снаружи контура. Всю фиктивную нагрузку можно объединить в один результирующий

Таблица 4

Формулы для расчета однопролетных рам  
(Положительные моменты вызывают  
растяжение с внутренней стороны рамы)

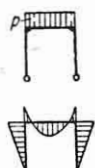


$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad N = 2k + 3$$



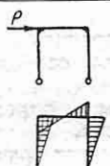
$$M_B = M_C = -\frac{Pab}{l} \cdot \frac{3}{2N};$$

$$M_P = \frac{Pab}{l} + M_B$$



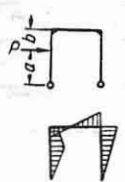
$$M_B = M_C = -\frac{pl^2}{4N};$$

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} + M_B$$



$$M_B = \frac{Ph}{2};$$

$$M_C = -\frac{Ph}{2}$$



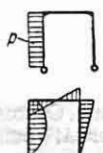
$$\beta = \frac{b}{h}; \quad M_B =$$

$$= \frac{Pa}{2} \left[ -\frac{(2-\beta)\beta k}{N} + 1 \right];$$

$$M_C =$$

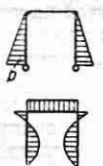
$$= \frac{Pa}{2} \left[ -\frac{(2-\beta)\beta k}{N} - 1 \right];$$

$$M_P = (1-\beta)(Pb + M_B)$$



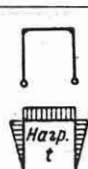
$$M_B = \frac{ph^2}{4} \left( -\frac{k}{2N} + 1 \right);$$

$$M_C = \frac{ph^2}{4} \left( -\frac{k}{2N} - 1 \right)$$



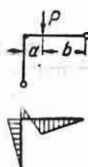
$$M_B = M_C = -\frac{7ph^2k}{60N}$$

Продолжение табл. 4



$$M_B = M_C = -\frac{3EJ_2 \alpha l}{hN}$$

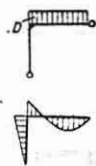
$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad N = k + 1$$



$$\beta = \frac{b}{l};$$

$$M_B = -\frac{Pa\beta(1+\beta)}{2N};$$

$$M_P = (Pa + M_B)\beta$$

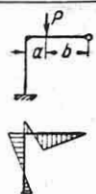


$$M_B = -\frac{pl^2}{8N}$$



$$M_B = -\frac{3EJ_2 \alpha t}{hN} \cdot \frac{l^2 + h^2}{l^2}$$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; \quad N = 3k + 4$$

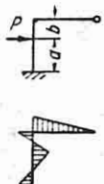


$$\beta = \frac{b}{l};$$

$$M_A = \frac{Pa\beta(1+\beta)}{N};$$

$$M_B = -2M_A;$$

$$M_P = (Pa + M_B)\beta$$



$$\beta = \frac{b}{h};$$

$$M_B = -\frac{Pab}{h} \cdot \frac{3(1-\beta)k}{N};$$

$$M_A = -\frac{Pab}{h} \cdot \frac{33k + 2(1+\beta)}{N};$$

$$M_P = \frac{Pab}{h} + \beta M_A +$$

$$+ (1-\beta) M_B$$

Продолжение табл. 4

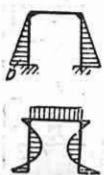
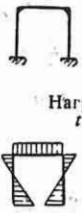
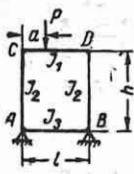
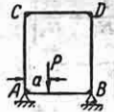
Продолжение табл. 4

$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; N = 3k + 4$	
	$M_B = -\frac{pl^2}{2N};$ $M_A = -\frac{M_B}{2}$
	$M_B = -\frac{ph^2k}{4N};$ $M_A = -\frac{ph^2(k+2)}{4N}$
	$I = \frac{6EJ_2at}{lN}; B = \frac{l^2 + h^2}{lh};$ $M_A = I \left[ \frac{2l(k+1)}{hk} + B \right];$ $M_B = -I \left[ \frac{l}{h} + 2B \right]$
$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; N = k + 1$	
	$M_B = -\frac{Pab}{l} \cdot \frac{\beta}{N}; \beta = \frac{b}{l};$ $M_A = -\frac{M_B}{2}; M_C = -\frac{Pab}{l} \cdot \frac{(2-\beta)k + 2(1-\beta)}{2N};$ $M_P = \frac{Pab}{l} + 3M_B + (1-\beta)M_C$
	$M_C = -\frac{pl^2(3k+2)}{24N};$ $M_B = -\frac{pl^2}{12N};$ $M_A = -\frac{M_B}{2}$
	$I = \frac{3EJ_2at}{lN}; B = \frac{l^2 + h^2}{lh};$ $M_A = I \left[ \frac{l(k+1)}{hk} + B \right];$ $M_C = I \left[ B + \frac{h(k+1)}{l} \right];$ $M_B = -2TB$

$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; N_1 = k + 2; N_2 = 6k + 1; \beta = \frac{b}{l}$	
	$M_A = \frac{Pab}{l} \left[ \frac{1}{2N_1} - \frac{2\beta - 1}{2N_2} \right];$ $M_D = \frac{Pab}{l} \left[ \frac{1}{2N_1} + \frac{2\beta - 1}{2N_2} \right];$ $M_B = -\frac{Pab}{l} \left[ \frac{1}{N_1} + \frac{2\beta - 1}{2N_2} \right];$ $M_C = -\frac{Pab}{l} \left[ \frac{1}{N_1} - \frac{2\beta - 1}{2N_2} \right]$
	$M_A = M_D = \frac{pl^2}{12N_1};$ $M_B = M_C = -\frac{pl^2}{6N_1};$ $M_{max} = \frac{pl^2}{8} + M_B$
	$M_A = -\frac{Ph}{2} \cdot \frac{3k+1}{N_1};$ $M_B = \frac{Ph}{2} \cdot \frac{3k}{N_2};$ $M_D = -M_A;$ $M_C = -M_B$
	$X_1 = \frac{Pab}{h} \cdot \frac{1 + \beta + \beta k}{2N_1};$ $X_2 = \frac{Pab}{h} \cdot \frac{(1-\beta)k}{2N_1};$ $X_3 = \frac{3Pa(1-\beta)k}{2N_2};$ $M_D \rangle = -X_1, \mp$ $\mp \left( \frac{Pa}{2} - X_3 \right);$ $M_C \rangle = -X_1 \pm X_2$
	$M_A = \frac{ph^2}{4} \left[ -\frac{k+3}{6N_1} - \frac{-4k+1}{N_2} \right];$ $M_B = \frac{ph^2}{4} \left[ -\frac{k}{5N_1} + \frac{2k}{N_2} \right];$ $M_C = \frac{ph^2}{4} \left[ -\frac{k}{6N_1} - \frac{2k}{N_2} \right];$ $M_D = \frac{ph^2}{4} \left[ -\frac{k+3}{6N_1} + \frac{4k+1}{N_2} \right]$

Продолжение табл. 4

Продолжение табл. 4

$k = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}; N_1 = k + 2; N_2 = 6k + 1$	
	$M_A = M_D = -\frac{Ph^2}{60} \cdot \frac{3k + 8}{N_1}$ $M_B = M_C = -\frac{Ph^2 k}{30N_1}$
 <p>Нарез</p>	$T = \frac{3EJ_2 \alpha t}{hN_1}$ $M_A = M_D = T \frac{k + 1}{k}$ $M_B = M_C = -T$
$k = \frac{J_1}{J_2} \cdot \frac{h}{l}; m = \frac{J_1}{J_2}; \alpha = \frac{a}{l}$ $v = (2 + k) + \frac{m}{k} (3 + 2k); \mu = 1 + 6k + m$	
	$\left. \begin{aligned} M_A \\ M_B \end{aligned} \right\} = -\frac{Pl}{2} \alpha (1 - \alpha) \left[ \frac{1}{v} \mp \frac{1 - 2\alpha}{\mu} \right]$ $\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = -\frac{Pl}{2} \alpha (1 - \alpha) \left[ -\frac{2k + 3m}{kv} \mp \frac{1 - 2\alpha}{\mu} \right]$
	$\left. \begin{aligned} M_A \\ M_B \end{aligned} \right\} = -\frac{Pl}{2} \alpha (1 - \alpha) m \left[ \frac{3 + 2k}{kv} \pm \frac{1 - 2\alpha}{\mu} \right]$ $\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = -\frac{Pl}{2} \alpha (1 - \alpha) m \left[ \frac{1}{v} \mp \frac{1 - 2\alpha}{\mu} \right]$

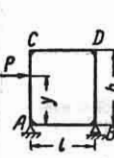
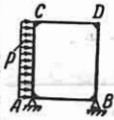
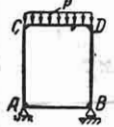
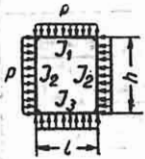
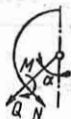
$k = \frac{J_1}{J_2} \frac{h}{l}; m = \frac{J_1}{J_2}$	$v = (2 + k) + \frac{m}{k} (3 + 2k); \mu = 1 + 6k + m$
	$\eta = \frac{y}{h}$ $\left. \begin{aligned} M_A \\ M_B \end{aligned} \right\} = \frac{Ph}{2} \eta \left\{ \frac{1 - \eta}{v} [(1 + k) \eta - (2 + k)] \mp \frac{1 + 3k(2 - \eta)}{\mu} \right\}$ $\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = \frac{Ph}{2} \eta \left\{ -\frac{1 - \eta}{v} [\eta(k + m) + m] \pm \frac{3k\eta + m}{\mu} \right\}$
	$\left. \begin{aligned} M_A \\ M_B \end{aligned} \right\} = \frac{Ph^2}{4} \left[ -\frac{3 + k}{6v} \mp \frac{1 + 4k}{\mu} \right]$ $\left. \begin{aligned} M_C \\ M_D \end{aligned} \right\} = \frac{Ph^2}{4} \left[ -\frac{k + 3m}{6v} + \frac{2k + m}{\mu} \right]$
	<p>а) Нагрузка на элементе CD</p> $M_A = M_B = \frac{Pl^2}{12} \cdot \frac{1}{v}$ $M_C = M_D = -\frac{Pl^2}{12} \cdot \frac{2k + 3m}{kv}$ <p>б) Нагрузка на элементе AB</p> $M_A = M_B = \frac{Pl^2}{12} m \frac{3 + 2k}{kv}$ $M_C = M_D = -\frac{Pl^2}{12} \cdot \frac{m}{v}$
	$J_2 = J_1;$ $M_A = M_B = M_C = -M_D = -\frac{p}{12} \cdot \frac{l^2 + kh^2}{k + 1}$



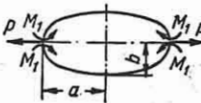
Таблица 5



## Формулы для расчета колец

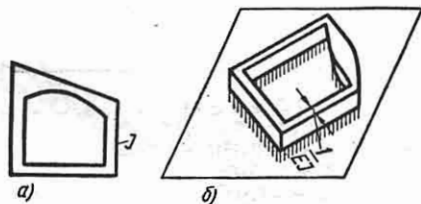
$M_1, N_1, Q_1, M, N$  и  $Q$  положительны, если они направлены, как указано на чертеже. Обозначения:  $E$  — модуль упругости;  $J$  — момент инерции сечения;  $z = r \sin \alpha$ ;  $u = \cos \alpha$ ;  $s = \sin \theta$ ;  $c = \cos \theta$ ;  $l = \sin \varphi$ ;  $e = \cos \varphi$ ;  $\delta_x$  и  $\delta_y$  — увеличения диаметра кольца в направлениях  $x$  и  $y$ .

	$M = Pr \left( 0,3183 - \frac{1}{2} z \right) \quad \max (+M) = 0,3183Pr \text{ при } z = 1$ $\max (-M) = -0,1817Pr \text{ при } z = \frac{\pi}{2}$ $N = -\frac{1}{2} Pz \quad Q = -\frac{1}{2} Pu \quad \delta_x = +0,137 \frac{Pr^3}{EJ} \quad \delta_y = -0,149 \frac{Pr^3}{EJ}$
	$(0 < \alpha < \theta) \quad M = Pr [0,3183(s - c\theta + u\theta - usc) - u + c]$ $(\theta < \alpha < \pi) \quad M = Pr [0,3183(s - c\theta + u\theta - usc)]$ $N = P [0,3183u(\theta - sc) - u]$ $N = P [0,3183u(\theta - sc)]$ $Q = P [0,3183z(sc - \theta) + z]$ $Q = P [0,3183z(sc - \theta)]$ $\delta_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left[ 0,6366(s - c\theta) + \frac{1}{2}(sc - \theta) \right]$ $\delta_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[ 0,6366(s - c\theta) + c + \frac{1}{2}s^2 - 1 \right]$
	$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}) \quad M = L \left( 0,6366u - \frac{1}{2} \right)$ $\left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right) \quad M = L \left( 0,6366u + \frac{1}{2} \right)$ $(0 < \alpha < \pi) \quad N = 0,6366 \frac{L}{r} u \quad Q = -0,6366 \frac{L}{r} z \quad \delta_x = 0 \quad \delta_y = 0$ $\max (+M) = +\frac{1}{2} L \quad \max (-M) = -\frac{1}{2} L$
	$(0 < \alpha < \theta) \quad M = L [0,3183(2us + \theta) - 1]$ $(\theta < \alpha < \pi) \quad M = L [0,3183(2us + \theta)]$ $N = \frac{L}{r} 0,6366us \quad N = \frac{L}{r} 0,6366us$ $Q = -\frac{L}{r} 0,6366zs \quad Q = -\frac{L}{r} 0,6366zs$ $\delta_x = \frac{Lr^3}{EJ} (0,6366\theta - s) \quad \delta_y = \frac{Lr^3}{EJ} (0,6366\theta + c - 1)$
	$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}) \quad M = Pr (0,3183u + z - 0,8183)$ $\left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right) \quad M = Pr (0,1817 + 0,3183u)$ $N = P (0,3183u + z) \quad N = 0,3183Pu$ $Q = P (u - 0,3183z) \quad Q = -0,3183Pz$ $\delta_x = -0,1366 \frac{Pr^3}{EJ}$ $\delta_y = 0,1488 \frac{Pr^3}{EJ}$

	$M = Pr \begin{matrix} (0 < \alpha < \theta) \\ [0,3183 (s\theta + c + us^2 - 1) - \\ - s + z] \end{matrix} \quad \left  \quad M = Pr \begin{matrix} (\theta < \alpha < \pi) \\ [0,3183 (s\theta + c + us^2 - 1)] \end{matrix} \right.$ $N = P (0,3183us^2 + z) \quad \left  \quad N = 0,3183us^2P \right.$ $Q = P (u - 0,3183zs^2) \quad \left  \quad Q = 0,3183zs^2 - P \right.$ $\delta_x = \frac{Pr^2}{EJ} \left[ -\frac{s^2}{2} + 0,6366 (s\theta + c - 1) \right]$ $\delta_y = \frac{Pr^2}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (sc + \theta) + 0,6366 (s\theta + c - 1) - s \right]$																
	$(0 < \alpha < \theta)$ $M = \frac{1}{2} Pr \left( \frac{u}{s} - \frac{1}{\theta} \right); \max(+M) = \frac{1}{2} Pr \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{\theta} \right) \text{ при } \alpha = 0, 2\theta, 4\theta \text{ и т. д.}$ $\max N = \frac{1}{2} P \frac{1}{s}; \max(-M) = -\frac{1}{2} Pr \left( \frac{1}{\theta} - \operatorname{ctg} \theta \right) \text{ под каждым грузом}$ <p>Радиальные перемещения точки приложения груза</p> $\frac{Pr^3}{2EJ} \left[ \frac{1}{s^2} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{sc}{2} \right) - \frac{1}{\theta} \right] \text{ (наружу)}$ <p>Радиальное перемещение в точках <math>\alpha = 0, 2\theta, 4\theta</math> и т. д.</p> $\frac{Pr^3}{4EJ} \left( \frac{2}{\theta} - \frac{1}{s} - \frac{\theta c}{s^2} \right) \text{ (внутри)}$																
	<p>Эллиптическое кольцо</p> $M_1 = kPa$ <p><math>k</math> — коэффициент, зависящий от отношения <math>a : b</math></p>																
$\frac{a}{b} =$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td><td>1,3</td><td>1,4</td><td>1,5</td><td>1,6</td><td>1,7</td><td>1,8</td><td>1,9</td><td>2,0</td><td>2,10</td><td>2,20</td><td>2,30</td><td>2,40</td><td>2,50</td> </tr> </tbody> </table>	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50		
$k =$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>0,318</td><td>0,295</td><td>0,274</td><td>0,255</td><td>0,240</td><td>0,227</td><td>0,216</td><td>0,205</td><td>0,195</td><td>0,185</td><td>0,175</td><td>0,167</td><td>0,161</td><td>0,155</td><td>0,150</td><td>0,145</td> </tr> </tbody> </table>	0,318	0,295	0,274	0,255	0,240	0,227	0,216	0,205	0,195	0,185	0,175	0,167	0,161	0,155	0,150	0,145
0,318	0,295	0,274	0,255	0,240	0,227	0,216	0,205	0,195	0,185	0,175	0,167	0,161	0,155	0,150	0,145		

Фиктивный груз  $R^\phi$ , найдя его положение по правилам сложения параллельных сил:

$$R^\phi = \oint \frac{M^0}{EJ} ds = \oint M^0 \delta^\phi ds. \quad (13)$$



Фиг. 35.

Фиктивной конструкцией для замкнутой рамы (фиг. 35, а) или рамы с

заделанными пятнами является абсолютно жесткий брус, свободно лежащий на упре углом основания, параллельном плоскости рамы (фиг. 35, б).

Основание имеет следующую форму: средняя линия совпадает с осью рамы, а ширина подошвы, предполагаемой весьма узкой (тонкий профиль), равна гибкости в данном сечении действительной рамы (фиг. 35, б):

$$\delta^\phi = \frac{1}{EJ}.$$

$x, y$  — координаты точек оси рамы в главных центральных осях инерции фиктивного профиля;  $x^\phi, y^\phi$  — координаты результирующего фиктивного груза относительно главных центральных осей.



$F^\phi$ ,  $J_x^\phi$ ,  $J_y^\phi$  — площадь и моменты инерции фиктивного профиля для главных осей его.

Полный изгибающий момент в любом сечении действительной рамы определяется по формуле

$$M = M^0 + M^* = M^0 - \left( \frac{R^\phi}{F^\phi} + \frac{R^\phi y^\phi}{J_x^\phi} y + \frac{R^\phi x^\phi}{J_y^\phi} x \right). \quad (14)$$

Здесь  $M^0$  — момент в основной системе от нагрузки;  $M^*$  — момент от лишних неизвестных.

Выражение в скобках, представляющее собой момент от лишних неизвестных, вычисляется, как нормальное напряжение в точках средней линии фиктивного профиля при внецентренном сжатии фиктивной нагрузкой  $R^\phi$ .

Частные случаи. Если рама имеет шарнир, то  $F^\phi = \infty$ , и центр тяжести фиктивного профиля совпадает с шарниром. Трехчленная формула для  $M^*$  замещается двухчленной.

Если рама двухшарнирная, то одна из главных центральных осей ( $x$ ) пересекает оба шарнира, причем  $F^\phi = J_y^\phi = \infty$ ; формула для  $M^*$  становится одночленной. Если пятовое сечение рамы имеет упруго вращающуюся опору с угловой податливостью  $\frac{\theta}{M} = \varepsilon$  1/кгсм, то фиктивный профиль приобретает здесь сфердоточенную площадку  $\Delta F^\phi = \varepsilon$ .

Консольные отростки рамы при построении фиктивного профиля во внимание не принимаются и влияют лишь на эпюру  $M^0$ , поскольку передают свою нагрузку основной системе.

Нагрузка перпендикулярна плоскости рамы. Расчет начинается с построения эпюры изгибающих моментов  $M^0$  и крутящих  $M_k^0$  для основной системы.

Интенсивность распределения фиктивной нагрузки от крутящих и изгибающих моментов

$$q^\phi = \frac{M_k^0}{GJ_k}; \quad p^\phi = \frac{M^0}{EJ}.$$

Фиктивные нагрузки лежат в плоскости рамы, причем  $q^\phi$  действует по касательной, а  $p^\phi$  — по нормали к оси рамы.

Общие формулы для крутящего и изгибающего моментов в любом сечении

$$M_k = M_k^0 + M_k^*; \quad M = M^0 + M^*.$$

Крутящий и изгибающий моменты  $M_k^*$  и  $M^*$  от лишних неизвестных вычисляются как касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в фиктивной тонкостенной короткой ребристой оболочке, имеющей толщину стенок  $\delta_1^\phi = \frac{1}{GJ_k}$  и приведенную толщину ребер  $\delta_2^\phi = \frac{1}{EJ}$ . Для случая круглого или трубчатого сечения стержней  $J_k = J_p = 2J$  при  $G = 0,4E$  имеем

$$\delta_2^\phi = 0,8\delta_1^\phi.$$

Расчет тонкостенной короткой оболочки см. стр. 183.

Графо-аналитический расчет сложных рам см. [22].

### Практический расчет статически неопределимых рам со многими лишними неизвестными

Определение числа лишних неизвестных плоской рамы. Число  $L$  лишних неизвестных определяется по формуле

$$L = 3K - 3I + C_0 - 3, \quad (15)$$

где  $K$  — число замкнутых контуров рамы;  $I$  — число внутренних шарниров\*;  $C_0$  — число опорных стержней.

Число  $K$  определяется по минимальному числу разрезов, которое нужно сделать, чтобы уничтожить замкнутые контуры;  $C_0 = 2$  для цилиндрической неподвижной опоры и  $C_0 = 1$  для цилиндрической подвижной опоры.

Для расчета рам со многими неизвестными (каркасы многоэтажных зданий и т. п.) разработан ряд методов (метод перемещений, метод моментов, метод фокусов и др.). Ниже приводятся основы метода, предложенного Н. М. Бернадским в 1929 г. [27] и являющегося одним из наиболее эффективных.

Метод распределения узловых моментов [27], [33] распадается на два этапа: I этап — расчет при неподвижных

\* Имеется в виду, что каждый из шарниров вводит одну добавочную подвижность. Если один шарнир является общим для  $n$  стержней, то его следует считать за  $n - 1$  шарниров.

узлах; II этап — учет перемещений узлов. Для систем, узлы которых не могут смещаться, второй этап отпадает.

### I этап расчета

1) Мы с легио вводят закреплениа, препятствующие линейному перемещению узлов. Число закреплений равно числу степеней свободы той кинематической цепи, которая получится, если все жесткие узлы рамы заменить шарнирными.

2) В системе с неподвижными узлами временно вводятся во всех узлах моментные связи, препятствующие повороту узлов. Этим каждый стержень превращается в отдельную балку, защемленную по концам (если на одном конце стержня шарнир, то она превращается в балку, защемленную на одном конце и шарнирную на другом). Определяются моменты защемления таких балок от нагрузки. Расчет начинают с какого-нибудь узла  $A$ , в котором сходится ряд стержней, из которых некоторые загружены, определяют алгебраическую сумму моментов защемления в данном узле. Моменты считаются положительными, если они действуют на узел по часовой стрелке. Найденная алгебраическая сумма есть неуравновешенный момент  $\Delta M^A$  узла  $A$ , воспринимаемый введенной моментной связью.

3) Введенная временно моментная связь уничтожается, для чего к узлу прикладывается момент, равный по величине и противоположный по знаку неуравновешенному моменту (фиг. 36, а). Этот момент распределяется между всеми стержнями, сходящимися в узле  $A$ , пропорционально погонным жесткостям  $\nu$  стержней, так что на долю  $i$ -го стержня приходится часть неуравновешенного момента (с противоположным знаком)

$$M_i^A = \Delta M^A \mu_i = \Delta M^A \frac{\nu_i}{\sum \nu} \quad (16)$$

где  $\nu_i$  — погонная жесткость данного стержня;  $\sum \nu$  — сумма погонных жесткостей всех стержней, сходящихся в узле  $A$ . Распределение охватывает также и те стержни, от нагрузки которых образовался неуравновешенный момент. Множитель  $\mu_i$  называется коэффициентом распределения. Значения  $\nu$  следующие:

а) для стержня, присоединенного к противоположному узлу жестко,

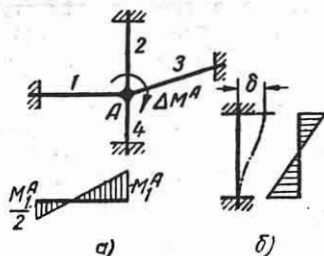
$$\nu = \frac{J}{l};$$

б) для стержня, присоединенного к противоположному узлу шарнирно,

$$\nu = \frac{3}{4} \frac{J}{l}.$$

Возникающие на противоположных концах стержней моменты равны  $\frac{1}{2} \Delta M^A \mu_i$  (фиг. 36, а). Эти моменты алгебраически складываются с неуравновешенными моментами узлов смежных с узлом  $A$ , и являются вторичными по отношению к ним.

Далее рассматривается смежный узел, например  $B$ , на котором повторяется



Фиг. 36.

операция распределения неуравновешенного момента с обратным знаком, после чего на узел  $A$  от  $B$  через стержень  $BA$  перейдет вторичный неуравновешенный момент, который при повторном цикле снова распределяется, как и первый. Распределение неуравновешенных моментов как начальных, так и вторичных выполняется для всех узлов рамы.

С увеличением числа циклов абсолютная величина неуравновешенных моментов убывает. Распределение прекращается, когда абсолютная величина неуравновешенных моментов становится достаточно малой. Вычисления ведутся в табличной форме.

4) После суммирования всех отдельных моментов по схеме защемленного стержня и от всех распределений моментов получают окончательные изгибающие моменты стержня, а затем эпюра изгибающих моментов для рамы.

5) Определяются реакции  $R_{ip}$  в закреплениах, введенных для придания неподвижности узлам.

### II этап расчета

1) Уничтожаются последовательно по одному все закрепления, введенные для придания неподвижности узлам. Раме сообщаются перемещения, ставшие воз-

возможными в результате снятия каждого закрепления; число таких независимых перемещений равно числу введенных ранее закреплений. Для каждого перемещения строится эпюра изгибающих моментов по методу, не отличающемуся от указанного выше (I этап), с той только разницей, что роль нагруженных заземленных стержней играют стержни, смещаемые без поворота концов; начальные неуравновешенные моменты по концам таких стержней равны  $6\delta J/l$  (или  $3\delta J/l$  при одном шарнирном конце), где  $\delta$  — перемещение узла, перпендикулярное к стержню (фиг. 36, б). Величина  $\delta$  берется произвольной, например такой, чтобы начальный неуравновешенный момент был равен единице.

2) Определяются силы  $R_{11}, R_{12}, \dots, E_{np}$ , действующие взамен отброшенных закреплений и возникающие при каждом из указанных перемещений ( $R_{ik}$  — сила вдоль  $i$ -го закрепления при  $k$ -м перемещении).

3) Ищется такая линейная комбинация указанных выше перемещений рамы, при которой силы  $R_{ik}$ , будучи алгебраически сложены с реакциями  $R_{ip}$  закреплений рамы по схеме I этапа расчета, дадут нуль.

Допустим, что система имеет две степени подвижности и в I этапе введены два закрепления. Пусть реакции в этих закреплениях по I этапу будут  $R_{1p}$  и  $R_{2p}$ ; силы, соответствующие перемещениям по II этапу: а) при первом перемещении сила вдоль 1-й отброшенной связи  $R_{11}$  и реакции 2-й связи  $R_{21}$ ; б) при втором перемещении — реакция 1-й связи  $R_{12}$  и сила вдоль 2-й отброшенной связи  $R_{22}$ . Условие для определения указанной линейной комбинации (т. е. условие обращения в нуль всех реакций добавочных связей) будет

$$\left. \begin{aligned} R_{1p} + R_{11}\alpha_1 + R_{12}\alpha_2 &= 0; \\ R_{2p} + R_{21}\alpha_1 + R_{22}\alpha_2 &= 0, \end{aligned} \right\} (17)$$

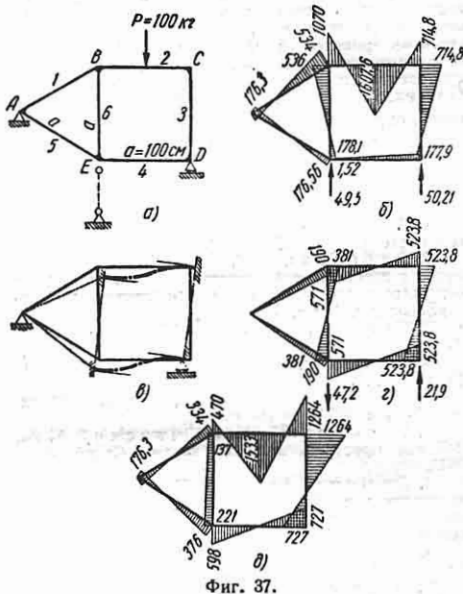
откуда определяются множители  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .  
4) Окончательно изгибающие моменты, продольные и поперечные силы  $M$ ,  $N$  и  $Q$  выразятся формулами

$$\left. \begin{aligned} M &= M_p + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2; \\ N &= N_p + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2; \\ Q &= Q_p + \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2, \end{aligned} \right\} (18)$$

где  $M_p, N_p, Q_p$  — изгибающие моменты, продольные и поперечные силы рамы с неподвижными узлами;  $M_{1,2}, N_{1,2}$

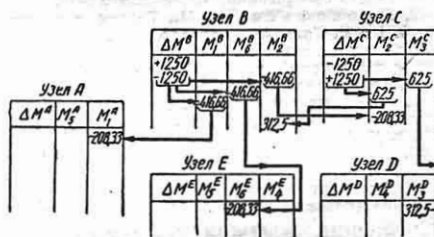
$Q_{1,2}$  — то же при перемещениях, сообразных раме при удалении закреплений.

Пример. Построить эпюры изгибающих моментов рамы, изображенной на фиг. 37, а.



Фиг. 37.

Для устранения подвижности узлов временно вводим добавочную опору в узле E, в узлах B и C — неуравновешенные моменты защемления  $+1250$  и  $-1250$  кгсм, отвечающие работе стержня 2 как балки, защемленной обоими концами; эти моменты распределяем на стержни (I этап).



Фиг. 38.

Схема первого цикла распределения показана на фиг. 38.

После ряда повторных циклов распределения получается эпюра изгибающих моментов (этап II) (фиг. 37, б).

Опорные реакции  $R_D$  и  $R_E$  получаются из равновесия

$$\begin{aligned} R_D &= (M_4^E - M_4^D) : a + (M^E - M_2^C) : \left(\frac{a}{2}\right) = \\ &= (1,52 + 177,9) : 100 + (1707,6 + 714,8) : 50 = \\ &= 50,21 \text{ кг.} \\ R_E &= [-50,21 \cdot 186,6 + 100(50 + 86,6)] : 86,6 = \\ &= 49,50 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Таким образом, реакция вспомогательной опоры равна 49,50 кг. Теперь надо вообразить, что к узлу *E* приложена произвольная сила, вызывающая смещение узлов рамы (фиг. 37, в). Предварительно считаем, что изогнулись только стержни 2 и 4, полагая их зашечленными в узлах *B*, *C* и соответственно *E*, *D*; при этом будут иметь место неравномерные моменты, которые прием произвольно равными  $\pm 1000$  кгсм. После этого по принятой схеме распределяем эти моменты по стержням рамы (II этап). Ряд циклов распределения дает эпюру моментов (фиг. 37, г). Реакция  $R_D$  и сила  $R_E$ , вызывавшие смещение узлов, определяются из равновесия

$$R_D = [(571 + 523,8) : 100] 2 = 21,90 \text{ кг:}$$

$$R_E = - (21,90 \cdot 186,6) : 86,6 = -47,20 \text{ кг.}$$

Следовательно, найденная эпюра *II* вызывается силой, приложенной к узлу *E*, равной 47,2 кг и действующей вниз. Если мы теперь эпюру *II* умножим на отношение 49,5:47,2 и сложим с эпюрой *I*, то на узел *E* не будет действовать никакая сила (т. е. вспомогательная опора уничтожится) и, следовательно, суммарная эпюра будет искомым эпюрой изгибающих моментов рамы (фиг. 37, д).

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Журавский Д. И., О мостах раскосной системы Гау, СПб 1855.
2. Рабинович И. М., Кинематический метод в строительной механике, 1928. К теории винтовых ферм, 1924. К теории статически неопределимых ферм, 1933.
3. Ясинский Ф. С., Собрание сочинений, 1899.
4. Симинский К. К., Пространственные фермы, 1911.
5. Подольский И. С., Пространственные фермы, 1931.
6. Горбунов Б. Н. и Уманский А. А., Статика пространственных систем, Стройиздат, 1932.
7. Диментберг Ф. М., Общий метод пространственной графостатики, основанный на изображении в одной плоскости. Известия Отделения технических наук АН СССР, № 7, 1939.
8. Уманский А. А., Пространственные системы, Стройиздат, 1948.
9. Бернштейн С. А., О работе металлических мостов под динамической нагрузкой. Трансжелдориздат, 1931. Основы динамики сооружений, Гостройиздат, 1941.
10. Ильясевич С. А., Основы динамического расчета балочных металлических мостов, Трансжелдориздат, 1934.
11. Гольденблат И. И., Динамическая устойчивость сооружений, Стройиздат, 1948.
12. Прокофьев И. П., Теория сооружений, ч. I и II, Трансжелдориздат, 1948.
13. Прокофьев И. П. и Смирнов А. Ф., Теория сооружений, ч. III (Устойчивость и динамика), Трансжелдориздат, 1948.
14. Рабинович И. М., Курс строительной механики стержневых систем, Стройиздат, ч. I, 1950, ч. II, 1954.
15. Симинский К. К., Статика сооружений, 1930.
16. Богуславский П. Е., Строительная механика крановых металлоконструкций, Машгиз, 1944.
17. Ростовцев Г. Г., Строительная механика самолета, ч. I и II, ОНТИ, 1936.
18. Уманский А. А., Курс строительной механики самолета, вып. 1, 2, 3, изд. ВВИА имени Жуковского, 1948—1951.
19. Кирпичев В. Л., Основания графиче-
- ской статики, изд. 3-е, 1914, Лишние неизвестные в строительной механике, изд. 2-е, ГТТИ, 1934.
19. Галеркин Б. Г., К расчету безраскосных ферм и жестких рам, ГТТИ, 1925.
20. Гвоздев А. А., Общий метод расчета статически неопределимых систем. Трансжелдориздат, 1927.
21. Ерохин И. П. и Малиев А. С., Формулы для расчета сложных рам методом расчленения, 1935.
22. Уманский А. А., Специальный курс строительной механики, Стройиздат, ч. I, 1935, ч. 2, 1940.
23. Жемочкин Б. Н., Расчет статически неопределимых систем. Метод угловых деформаций, 1927, Расчет рам, Гостройиздат, 1933.
24. Филипенко-Бородич М. М., Основы теории работы упругих сил в плоских системах, 1932.
25. Безухов Н. И., Строительная механика, Гостройиздат, 1931.
26. Горбунов Б. Н. и Кротов Ю. В., Расчет пространственных рам, 1936.
27. Бернадский Н. М., Символический расчет жестких стержневых систем, Труды Среднеазиатского опытного научно-исследовательского института водного хозяйства, сер. В, вып. 3/13, 1929.
28. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, 1949.
29. Жудин Н. Д., Расчет стальных конструкций с учетом пластических деформаций. Сборник трудов КСИ, вып. 2, 1935.
30. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Стройиздат, 1955.
31. Корноухов Н. В., Прочность и устойчивость стержневых систем, Стройиздат, 1936.
32. Протасов К. Г., Расчет статически неопределимых мостовых ферм, Трансжелдориздат, 1947.
33. Рогидский С. А., Расчет рам, Машгиз, 1948.
34. Бернштейн С. А., Основы расчета статически неопределимых систем, Гостройиздат, 1936.
35. Завриев К. С., Сопротивление сооружений, Тбилиси, 1939.
36. Дарков А. В. и Кузнецов В. И., Статика сооружений, Трансжелдориздат, 1951.

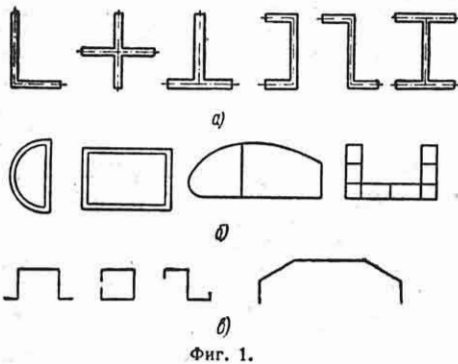
## ГЛАВА IV

### РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### КАЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Стержень считается тонкостенным, если отношение ширины стенок к их толщине  $\frac{b}{\delta} > 5 \div 10$ .

**Определения.** Поперечное сечение тонкостенного стержня называется его *профилем*. Линия, делящая пополам толщину стенки профиля, называется *средней линией*. По виду средней линии профили делятся на *открытые* и *замкнутые*. Средние линии стенок открытого профиля могут пересекаться в одной точке, образуя пучок (примеры — угольник, крест, тавр), могут не иметь одной общей точки (швеллер, зетобразный профиль) и быть разветвленными (двутавр) (фиг. 1, а). Замкнутые профили, имеющие более одной ячейки,

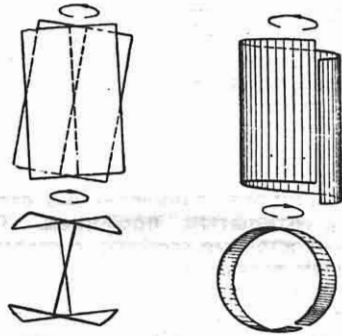


Фиг. 1.

называются *многосвязными* (фиг. 1 б, справа).

Профиль считается жестким в своей плоскости, в чем состоит отличие тонкостенного стержня от оболочки, для которой существенным является изгиб стенок от местной нагрузки.

Различают две категории открытых профилей: *недеформирующие профили* — стенки профиля образуют пучок, при кручении сечение профиля остается плоским; *деформирующие профили* — стенки не образуют пучка, пересекаясь по крайней мере в двух точках, при кручении плоскость сечения искажается, происходит *депланация* профиля, средняя линия из плоской ломаной (или кривой) превращается в пространственную (фиг. 2). При этом проекция средней ли-



Фиг. 2.

нии на первоначальную плоскость сечения не искривляется, а только поворачивается.

**Особенности открытых профилей в зависимости от жесткости кручения  $GJ_k$ .** Основное свойство стержней с открытым профилем — слабое сопротивление *свободному* (иначе, *чистому*) *кручению*. Так называется скручивание двумя равными и противоположными парами, приложенными в плоскостях торцов стержня, причем депланация торцов ничем не стеснена и нормальные напряжения в поперечных сечениях не возникают. При весьма тонких стенках ( $\frac{b}{\delta} > 15 \div 20$  — авиaproфили, от-

крытые цилиндрические оболочки, фиг. 1, в) сопротивление свободному скручиванию практически исчезает ( $GJ_k \rightarrow 0$ ).

Крутящие моменты в стержнях с деформирующим, например двутавровым, профилем при  $GJ_k \rightarrow 0$  могут быть восприняты поперечными силами в плоскостях полок. Одновременно появляются и нормальные напряжения изгиба полок, что можно объяснить также несвободной (стесненной) деформацией поперечных сечений. Такое восприятие крутящих моментов называется *стесненным*, или *изгибным кручением*. Напряжения типа стесненного, или изгибного, кручения возникают от действия как крутящих моментов, так и от продольных сил и пар, поскольку они при некоторых условиях вызывают деформацию кручения.

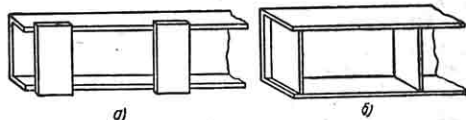
**Стесненное кручение прокатных профилей.** Прокатные строительные и судостроительные профили сравнительно с авиационными имеют значительно более толстую стенку. Поэтому пренебрежение жесткостью  $GJ_k$  при исследовании стесненного кручения для таких профилей ведет к большим неточностям. При кручении прокатных профилей существенную роль играют две системы касательных напряжений — свободного и стесненного кручения.

**Устойчивость тонкостенных стержней с открытым профилем.** Сжатые тонкостенные стержни с открытым профилем теряют общую устойчивость не только изгибаясь, но и закручиваясь, и в некоторых случаях, особенно при эксцентричном приложении сжимающей силы, критическая сила оказывается намного ниже эйлеровой. Возможна также потеря устойчивости от изгиба и от растягивающей силы. При большой ширине полок необходима проверка на местную устойчивость по формулам для пластинок с одним свободным и другим заземленным продольным краем.

**Замкнутые профили.** Замкнутые (трубчатые) профили обладают несравненно большей (в десятки и сотни раз) крутильной жесткостью, чем открытые профили той же конфигурации, и эта разница тем резче, чем стенка тоньше. Напряжения стесненного кручения играют в них второстепенную роль и учитываются только при вытянутой форме профиля например в несущей конструкции

крыла самолета, рассматриваемого, как оболочка, подкрепленная поперечными диафрагмами и продольным набором. В смысле общей устойчивости при сжатии стержни с замкнутым профилем не отличаются от массивных. Если ширина плоской стенки больше 40 $\delta$ , необходима проверка местной устойчивости.

**Конструктивные рекомендации.** Конструкции из стержней с замкнутым профилем при той же затрате металла значительно жестче в случае пространственной работы, чем конструкции из стержней с открытым профилем. Жесткость открытых профилей можно повысить, применяя решетку или планки. Стержень с достаточно часто приваренными планками по своим качествам близок к замкнутому (фиг. 3, а). При конструировании следует отдавать предпочтение таким решениям, при которых



Фиг. 3.

тонкостенные стержни открытого профиля не испытывают кручения либо крутящие моменты передаются на опоры специально поставленными связями.

Чем тоньше стенка, тем большее значение приобретает обеспечение жесткости поперечного сечения, в особенности при наличии сосредоточенной поперечной нагрузки. Повышение поперечной жесткости достигается постановкой диафрагм (фиг. 3, б). Диафрагмы следует ставить также и при замкнутом профиле.

### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СВОБОДНОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ С ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ

Характер траекторий касательных напряжений показан на фиг. 4. Распределение касательных напряжений по толщине, за исключением небольших участков у коротких сторон, — линейное. На средней линии  $\tau = 0$ , на краю

$$\tau = \frac{M_k}{J_k} \delta.$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_k} \delta_{\max}.$$

Опасная точка — по середине края наиболее толстой стенки.

Так называемый момент инерции при кручении\*

$$J_K \approx \frac{1}{3} \int_s [\delta(s)]^3 ds.$$

При  $\delta = \text{const}$

$$J_K \approx \frac{s\delta^3}{3};$$

здесь  $s$  — периметр средней линии.

При нескольких стенках постоянной толщины в пределах стенки

$$J_K = \frac{1}{3} \sum_i s_i \delta_i^3.$$

Суммирование распространяется на все стенки. Относительный (погонный) угол закручивания

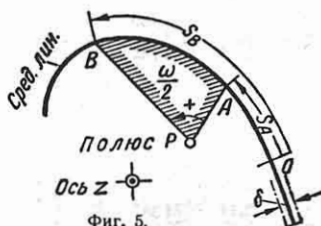
$$\vartheta = \frac{M_K}{G a J_K} \text{ см}^{-1};$$

здесь  $a$  — экспериментальный поправочный коэффициент, равный 1,2 для прокатных двутавров и 1,12 для швеллеров.

Величины  $J_K$  для двутавров и швеллеров, подсчитанные с учетом уклона полка и закруглений и не требующие введения поправочного коэффициента, приведены в табл. 1 и 2.

Эпюра единичной депланации при свободном кручении. Эта эпюра используется при расчетах на стесненное кручение. Проекция полного перемещения точки средней линии на продольную ось стержня называется депланацией в данной точке.

Приращение депланации  $w_B$  в точке  $B$  по отношению к депланации  $w_A$  в точке  $A$  (фиг. 5) при кручении вокруг

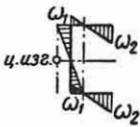
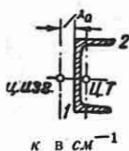


оси, след которой (полюс) в точке  $P$ ,  $w_B - w_A = -\vartheta s$ , где  $\omega$  — удвоенная площадь сектора с вершиной в  $P$  и дугой  $AB$ .

Геометрические характеристики прокатных двутавров (ОСТ 10016-39) [29]

№ профиля	Бимомент инерции $J_{\omega}$ в $\text{см}^4$	Ордината эпюры $\omega$ для крайней точки профиля в $\text{см}^2$	Бимомент сопротивл-з $J_{\omega} = \frac{W_{\omega}}{\omega}$ в $\text{см}^4$	Момент инерции при свободном кручении $J_K$ в $\text{см}^4$	Характеристика $k = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_{\omega}}}$ в $\text{см}^{-1}$
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1 353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2 560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4 879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8 219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20	13 121	46,15	284,31	14,81	0,02074
	18 857	47,05	294,50	17,85	0,02215
22	22 773	55,91	407,33	20,32	0,01844
	23 930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24	33 799	64,48	524,15	25,57	0,01698
	35 426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27	52 987	76,68	690,99	31,93	0,01515
	55 414	77,92	711,21	37,60	0,01608
30	76 704	88,38	867,93	38,83	0,01389
	80 114	89,75	892,60	45,78	0,01475
33	83 612	91,13	917,50	55,23	0,01587
	107 160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
36	111 780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
	116 520	103,73	1123,3	65,74	0,01466
40	154 820	115,19	1344,0	56,85	0,01183
	161 210	116,85	1379,6	66,72	0,01256
36	167 760	118,51	1415,6	79,99	0,01348
	228 900	134,13	1706,6	68,75	0,01070
40	237 950	136,00	1749,6	80,68	0,01137
	247 210	137,85	1793,3	96,55	0,01220

Геометрические характеристики прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39) [29]

№ профиля	Координата центра изгиба $x_a$ в см	Момент инерции $J_{\omega}$ в см <sup>4</sup>			Бимоменты сопротивления		Момент инерции при свободном кручении $J_k$ в см <sup>4</sup>	 $k$ в см <sup>-1</sup>	
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{\omega_1}$ в см <sup>3</sup>	$W_{\omega_2}$ в см <sup>3</sup>			
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,1437	
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375	
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219	
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411	
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245	
14	a	1,58	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483	
	b	1,39	1711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,03730
16	a	1,68	2760	14,74	28,63	187,23	96,40	6,306	0,02950
	b	1,48	3099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,227	0,03180
18	a	1,83	4745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
	b	1,57	5292	16,83	37,02	314,50	142,95	10,50	0,02749
20	a	1,94	7698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
	b	1,73	8560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,50	0,02359
22	a	2,07	11593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,01958
	b	1,86	12863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079
24	a	2,10	15320	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
	b	1,88	17007	26,10	57,75	651,56	294,50	16,47	0,01921
27	a	1,67	18640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
	b	2,14	24337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
30	a	1,91	26883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
	b	1,70	29355	28,82	72,10	1018,6	407,14	26,34	0,01848
30	c	2,26	36645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
	b	2,03	40436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
c	1,80	44104	33,59	83,06	1313,0	530,97	31,75	0,01666	

Примечание к табл. 1 и 2. При вычислении  $k$  приняты  $G=800\,000$  кг/см<sup>2</sup>;  $E=2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

Величина  $\omega$  называется *единичной депланацией*, а относительный угол закручивания  $\vartheta$  — мерой депланации\*.

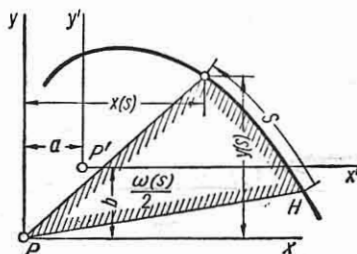
Для построения эпюры депланации  $\omega(s)$  или  $\omega(s)$  необходимо задать полюс  $P$  и точку, где  $\omega$  известно, в частности, равно нулю (так называемую нулевую точку  $H$ ). Ординаты эпюры  $\omega(s)$  — функции дуговой координаты  $s$  — равны удвоенной площади, ометаемой подвижным радиусом-вектором, вращающимся вокруг полюса. Приращения  $\omega(s)$  считаются положительными при вращении радиуса-вектора против часовой стрелки.

При изменении полюса и нулевой точки к ординатам эпюры  $\omega(s)$  прибавляется линейная функция координат точек средней линии (фиг. 6):

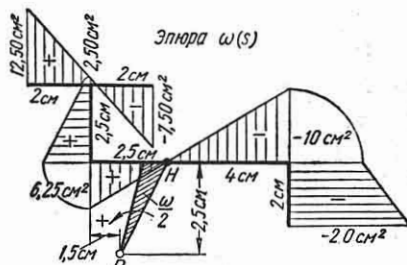
$$\omega(s) = -\vartheta [\omega(s) + ax(s) - by(s) + K] = -\vartheta \omega'(s),$$

где  $K$  — константа.

Изменение полюса эквивалентно изменению плоскости, от которой отсчи-



Фиг. 6.



Фиг. 7.

\* Мера депланации иногда приписывается знак, обратный знаку  $\vartheta$  [11].

тываются депланации в точках средней линии профиля.

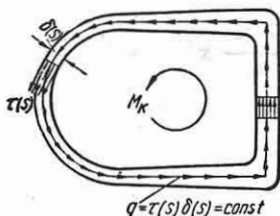


В случае профиля-пучка эпюра  $\omega$  при полюсе в центре пучка имеет нулевые ординаты. При всяком другом полюсе профиль также остается плоским.

Числовой пример построения эпюры  $\omega(s)$  показан на фиг. 7. Полюс —  $P$ , нулевая точка —  $H$ .

### НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СВОБОДНОМ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ С ЗАМКНУТЫМ ПРОФИЛЕМ

Касательные напряжения считаются распределенными равномерно по толщине стенки. Траектории касательных напряжений параллельны или близки к параллельности средней линии профиля (фиг. 8).



Фиг. 8.

Произведение  $q = \tau(s) \delta(s)$  называется *погонным касательным усилием*. Размерность его  $\text{кг/см}$ .

При свободном кручении

$$q = \frac{M_K}{\omega_K} = \text{const.}$$

где  $\omega_K$  — удвоенная площадь, охватываемая средней линией замкнутого профиля.

$$\tau(s) = \frac{q}{\delta(s)} = \frac{M_K}{\omega_K \delta(s)}.$$

Максимальное касательное напряжение соответствует точке профиля с минимальной толщиной стенки.

Общая формула для относительного угла закручивания при переменном по дуге погонном касательном усилии  $q = q(s)$

$$\vartheta = \frac{1}{G \omega_K} \int \tau(s) ds.$$

Другой вид той же формулы:

$$\vartheta = \frac{1}{G \delta_c \omega_K} \int q(s) ds'.$$

Здесь  $ds' = \frac{\delta_c}{\delta(s)} ds$  — приведенный

элемент дуги средней линии;  $\delta_c$  — постоянная, имеющая размерность длины,

вводимая для удобства расчета. Обычно  $\delta_c$  — средняя толщина стенки профиля. При  $\delta = \text{const}$ ,  $\delta_c = \delta$ ,  $ds' = ds$ .

При свободном кручении, когда  $q = \text{const}$ ,

$$\vartheta = \frac{M_K}{G J_K},$$

где

$$J_K = \frac{\omega_K^2 \delta_c}{s_K}.$$

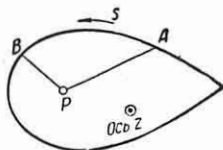
Здесь  $s'_K = \oint ds'$  — приведенный периметр средней линии профиля. При  $\delta = \delta_c = \text{const}$  берется просто периметр  $s_K$ .

Эпюра единичной депланации при свободном кручении. Приращение депланации  $w_B$  в точке  $B$  по отношению к точке  $A$  (фиг. 9)

$$w_B - w_A = -\vartheta \hat{\omega}$$

Здесь  $\hat{\omega}$  — единичная депланация, вычисляемая по формуле

$$\hat{\omega} = \omega - \frac{\omega_K}{s'_K} s',$$



Фиг. 9.

где  $\omega$  — удвоенная площадь сектора  $PAB$ ;  $s'$  — приведенная длина дуги  $AB$ ;  $\omega_K$  — удвоенная площадь контура;  $s'_K$  — приведенный периметр.

Вычитание величины  $\frac{\omega_K}{s'_K} s'$  можно вы-

полнить также графически (фиг. 10). Начиная от нулевой точки  $H$ , вдоль горизонтальной прямой чертится развертка приведенного периметра. Откладываются ординаты эпюры  $\omega$ . Вершина последней ординаты  $\omega$  соединяется прямой линией

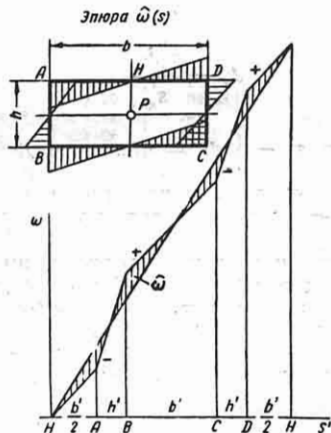
с точкой  $H$ . Ординаты  $\hat{\omega}$  отсчитываются от этой прямой. На фиг. 10 дан пример коробки с двумя осями симметрии, полюс совмещен с центром тяжести, начальная точка  $H$ . Ординаты  $\hat{\omega}$  перенесены на профиль. При равенстве приведенных длин сторон

$$b' = \frac{b \delta_c}{\delta_b} = h' = \frac{h \delta_c}{\delta_h}$$

имеем  $\hat{\omega}(s) \equiv 0$ , такой прямоугольный профиль не депланирует. В примере

на фиг. 10 взято  $b' > h'$ ; если бы было  $b' < h'$ , то знаки ординат эпюры  $\hat{\omega}$  изменились бы на обратные.

К недепланирующим принадлежат треугольные профили (при одинаковых и различных толщинах стенок) и много-



Фиг. 10.

угольные постоянной толщины со средней линией, описанной около окружности, и некоторые другие.

Изменение эпюры  $\hat{\omega}$  при изменении полюса и нулевой точки также сводится к добавлению линейной функции координат точки средней линии (см. предыдущий раздел).

Многосвязные профили см. [5], [28].

## СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ [4]

### Распределение напряжений $\sigma$ и $\tau$ по сечению

Расчет тонкостенного стержня на растяжение (сжатие), изгиб и свободное кручение делается по правилам, изложенным в гл. II, причем нормальные напряжения зависят только от усилий  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , а касательные только от  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_k$ . Уточненный расчет тонкостенных брусьев с депланирующим профилем требует учета стесненности кручения и дополнительных нормальных и касательных напряжений стесненного кручения. При этом крутящий момент свободного кручения соответствующим образом уменьшается.

Основная гипотеза: *продольные перемещения точек средней линии профиля пропорциональны единичным деплациям при свободном кручении, ординатам так называемой главной эпюры  $\omega$  (открытый профиль) или  $\hat{\omega}$  (замкнутый профиль).*

При отсутствии закручивания эта гипотеза и гипотеза плоских сечений равнозначны.

Нормальное напряжение в сечении открытого профиля, фиксируемом координатой  $z$  (ось  $z$  вдоль стержня), и в точке средней линии профиля, фиксируемой дуговой координатой  $s$ , определяется по четырехчленной формуле В. З. Власова:

$$\sigma(z, s) = \frac{N(z)}{F} - \frac{M_x(z)}{J_x} y(s) + \frac{M_y(z)}{J_y} x(s) - \frac{B(z)}{J_\omega} \omega(s).$$

Значение отдельных слагаемых. Первые три слагаемых соответствуют гипотезе плоских сечений и дают нормальные напряжения растяжения — сжатия с изгибом\*, четвертое слагаемое дает напряжения  $\sigma_\omega(z, s)$  от изгибного (стесненного) кручения, связанные с деплацией.

$B(z)$  — усилие в сечении  $z$ , определяющее величину напряжений  $\tau_\omega(z, s)$  и называемое *изгибно-крутящим бимоментом* или просто бимоментом. Размерность его —  $\text{кгсм}^2$ . Бимомент представляет собой статически уравновешенное внутреннее усилие.

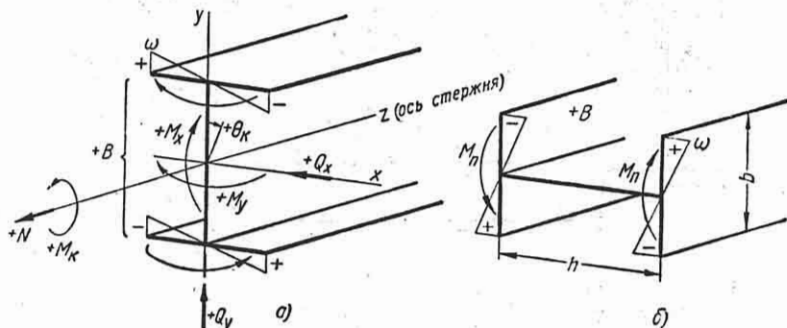
В случае двутавра (фиг. 11, а и б) он равен произведению каждого из моментов, изгибающих полки в противоположные стороны в их плоскостях, на плечо, равное расстоянию между средними линиями полки, т. е.  $B = M_q \cdot h$  (фиг. 11, б),

$\omega(s)$  — ордината главной эпюры единичной деплации профиля, характеризующей распределение  $\sigma_\omega$  по профилю. Эпюра  $\omega$  строится для впереди лежащего сечения (фиг. 11, а и б) при полюсе, совпадающем с центром изгиба (см. ниже), и при нулевой точке, выбранной так, чтобы интеграл  $\int \omega dF = 0$ . В случае двутавра центр изгиба и нулевая точка совпадают с центром тяжести, эпюра  $\omega$  имеет вид четырех треуголь-

\* При вычислении напряжений в крайних волокнах вместо  $y(s)$  и  $x(s)$  берется  $y_{\text{max}}$ ,  $x_{\text{max}}$ .

ников, каждый с максимальной ординатой  $\pm \frac{bh}{2}$  (фиг. 11, а).

Бимомент считается положительным, если при положительном  $\omega$  напряжение  $\sigma_\omega$  получается отрицательным (сжимающим). Правило знаков для всех усилий



Фиг. 11.

дается на фиг. 11, а и б. Наблюдатель идет в положительном направлении оси стержня  $z$  и смотрит на впереди лежащее сечение. Для  $N, M_x, M_y, Q_x, Q_y$  используется правило, общепринятое в сопротивлении материалов. Правило для  $B, M_k$  и  $\varphi = \theta_k$  выбрано с учетом аналогии между изгибом и стесненным кручением. Величина

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF = \int_F \omega^2(s) \delta(s) ds \text{ см}^6.$$

$J_\omega$  — так называемый бимомент инерции тонкостенного профиля (другое название — секториальный момент инерции), интеграл, вычисляемый по правилам перемножения эпюры  $\omega(s)$  на эпюру  $\omega(s) \delta(s)$ , например, по правилу Верещагина. В случае двутавра  $J_\omega = \frac{J_n h^2}{2}$ , где  $J_n$  — момент инерции полки относительно ее поперечной оси симметрии, можно принять

$$J_\omega \approx J_y \frac{h^2}{4};$$

здесь  $J_y = J_{\min}$  — минимальный момент инерции профиля двутавра.

Максимальные нормальные напряжения от бимомента определяются по формуле

$$\max \sigma_\omega = \pm \frac{B}{W_\omega},$$

где  $W_\omega = \frac{J_\omega}{\omega_{\max}}$  — бимомент сопротивления профиля.

*Касательные напряжения изгиба и стесненного кручения.* Нормальным напряжениям сопутствуют касательные, которые считаются распределенными равномерно по толщине стенки  $\delta(s)$ . Величина  $q(z, s) = \tau(z, s) \delta(s)$  называется погонным касательным усилием в сечении  $z$ ,

точке профиля  $s$ . Вектор  $\bar{q}$  направлен по касательной к средней линии в точке  $s$ .

Общая формула для  $q(z, s)$  получается из условия равновесия отрезка стержня аналогично формуле Журавского.

$$q(z, s) = q(z, 0) - \frac{Q_y(z)}{J_\tau} S_x(s) + \frac{Q_x(z)}{J_y} S_y(s) - \frac{\bar{M}_k(z)}{J_\omega} S_\omega(s).$$

Значение отдельных слагаемых.  $q(z, 0)$  — усилие в сечении  $z$  в начальной точке отсчета дуги  $s$  средней линии.

Для открытого профиля начало берется к краю, тогда  $q(z, 0) = 0$ , если вдоль края не приложено внешнего касательного (сдвигающего) усилия. Для замкнутого профиля начало берется в произвольной точке;  $q(z, 0)$  подлежит определению.

Следующие два слагаемых дают касательное усилие от поперечных сил изгиба.

Последнее слагаемое — касательное усилие от действия крутящего момента стесненного кручения.

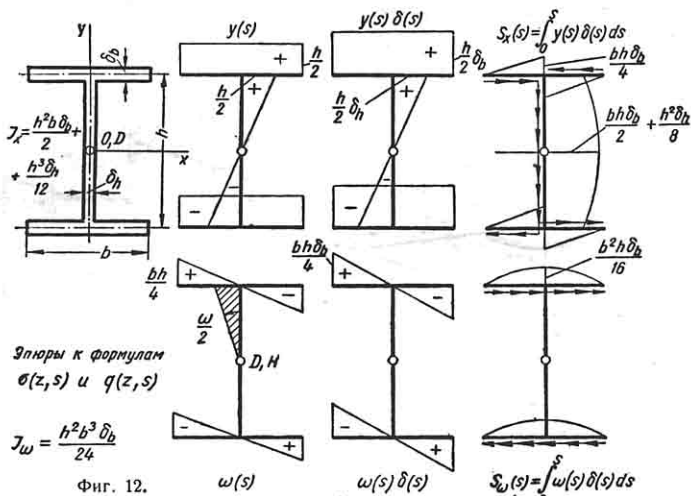
Этот момент равен производной от бимомента:

$$\bar{M}_k(z) = B'(z).$$

Здесь имеется аналогия с соотношениями между изгибающими моментами и поперечными силами:

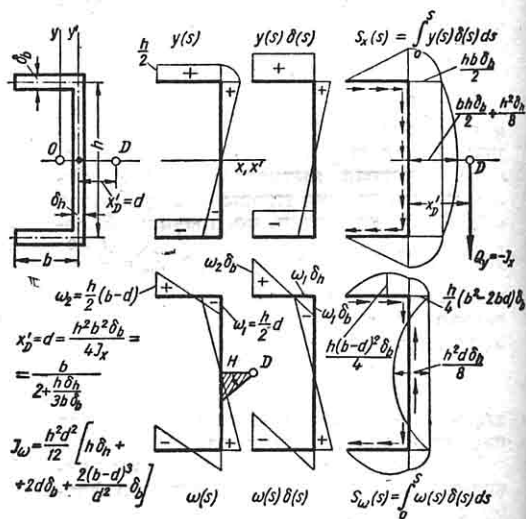
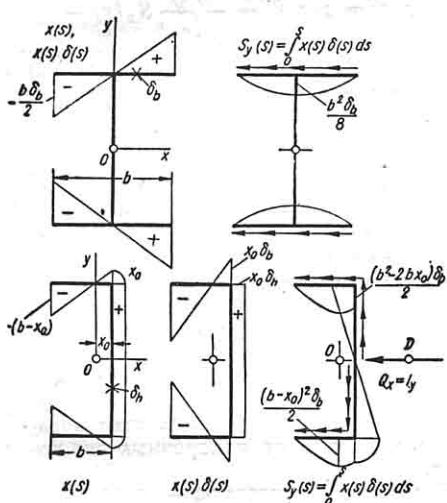
$$Q_y(z) = M'_x(z); \quad Q_x(z) = M'_y(z).$$

$S_{\omega}(s)$  — то же от эпюры  $\omega(s) \delta(s)^*$ . Сначала строятся эпюры  $y, x, \omega$ , затем  $y\delta, x\delta, \omega\delta$  и, наконец, эпюры  $S_x, S_y, S_{\omega}$ , ординаты которых равны площадям по-



Эпюры величин  $S$ , в первом случае совпадающих со статическими моментами вышележащей части профиля, удобнее

зади лежащих частей эпюр  $x\delta, y\delta, \omega\delta$ , причем на краю величина  $S$  равна нулю (фиг. 12—14).



всего строить как интегральные эпюры. Эпюра  $S_x(s)$  строится как интегральная эпюра от эпюры  $y(s) \delta(s)$ . Эпюра  $S_y(s)$  — то же от  $x(s) \delta(s)$ . Эпюра

\* Величина  $S_{\omega}(s) = \int_0^s \omega(s) \delta(s) ds$  называется статическим бимоментом или секторальным статическим моментом.

Стрелки потоков касательных усилий направлены от края полки при положительной крайней ординате интегрируемой эпюры и к краю при отрицательной.

Замкнутый профиль [6]. Формулы для  $\sigma(z, s)$  и  $q(z, s)$  остаются в силе при условии замены главной эпюры  $\omega(s)$

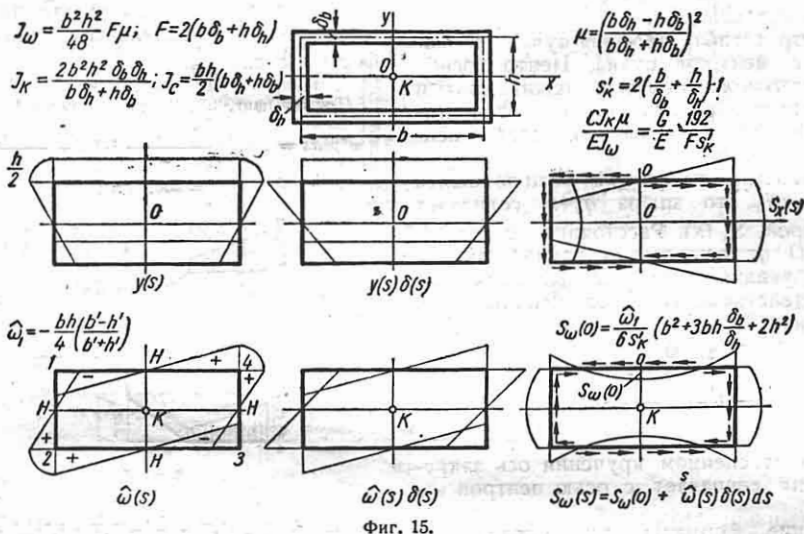
главной эпюрой  $\hat{\omega}(s)$ . Эпюры  $S_x(s)$ ,  $S_y(s)$  и  $S_\omega(s)$  строятся при дополнительном условии  $\oint S(s) ds = 0$ , что позволяет определить  $S(0)$  в произвольно

Здесь  $\varphi'_k(z)$  — относительный угол закручивания;  $\bar{M}_k(z)$  — крутящий момент свободного кручения.

В случае замкнутого профиля к погонному усилию  $q(z, s)$  добавляется постоянное усилие свободного кручения

$$q(z) = G\varphi'_k z \frac{\omega_k \delta_c}{s_k} = \frac{\bar{M}_k(z)}{\omega_k}$$

Для получения  $\tau$  полное погонное усилие делится на толщину стенки  $\delta(s)$ .



Фиг. 15.

взятом продольном разрезе (нулевой точке).

Эпюры для прямоугольного симметричного профиля см. на фиг. 15. Несимметричные и многосвязные профили см. [5], [6], [28].

Полная величина касательных напряжений. В случае открытого профиля с исчезающе малой жесткостью свободного кручения полная величина касательных напряжений определяется формулой  $\tau(z, s) = \frac{q(z, s)}{\delta(s)}$ .

При прокатных профилях добавляются напряжения свободного кручения, рассчитанные по закону двух треугольников (см. фиг. 4, стр. 171):

$$\tau(z, s) = G\varphi'_k(z) \delta(s) = \frac{\bar{M}_k(z) \delta(s)}{J_k}$$

Порядок определения напряжений. Расчет начинается с вычисления помимо обычных еще и специальных геометрических характеристик тонкостенного профиля — его центра изгиба, главной эпюры единичной деформации и бимоментов инерции, после чего определяются изгибно-крутящие бимоменты в отдельных сечениях.

### Центр изгиба

Центр тяжести  $O$  фиксирует положение оси стержня (ось  $z$ ) и начало главных центральных осей инерции поперечного сечения (оси  $x, y$ ). Проекция нагрузки, приложенной по одну сторону от сечения на ось  $z$ , дает продольную силу  $N$ , а моменты относительно осей  $x, y$  дают изгибающие моменты  $M_x, M_y$ . Центр

изгиба  $D$  фиксирует положение осей, параллельных осям  $z, x, y$ . Ось  $z_D$  называется *осью центров изгиба*. Момент нагрузки относительно оси  $z_D$  дает *крутящий момент*  $M_k$  (внешний). Проекции нагрузки на оси  $x_D, y_D$  дают поперечные силы  $Q_x, Q_y$ . Если нагрузка пересекает ось центров изгиба, крутящий момент равен нулю.

Центр изгиба определяется, как точка пересечения равнодействующих касательных усилий, соответствующих двум случаям поперечного изгиба — в главной плоскости  $yOz$  и в главной плоскости  $xOz$ .

Центр изгиба профиля-пучка совпадает с центром пучка. Центр изгиба симметричного профиля лежит на оси симметрии. При наличии двух осей симметрии центр изгиба совпадает с центром тяжести.

Швеллер (см. фиг. 14). Если положить  $Q_y = -J_x$ , то эпюра  $q_y(s)$  совпадает с эпюрой  $S_x(s)$ . Расстояние центра изгиба  $D$  от оси стенки равно моменту пары усилий в полках, деленному на равнодействующую всех усилий, т. е. величину  $J_x$ :

$$x'_D = \frac{\frac{1}{2} b \frac{hb\delta_b}{2}}{J_x} = \frac{h^2 b^2 \delta_b}{4J_x}$$

При стесненном кручении ось закручивания совпадает с осью центров изгиба.

Общие формулы для определения координат центра изгиба:

$$x'_D = \frac{\int \omega'(s) y(s) \delta(s) ds}{J_x};$$

$$y'_D = - \frac{\int \omega'(s) x(s) \delta(s) ds}{J_y}$$

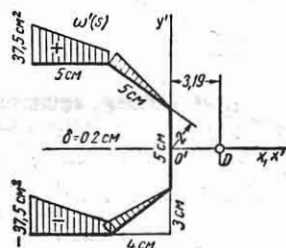
Формулы справедливы и для замкнутого профиля при условии замены  $\omega'(s)$  на  $\hat{\omega}'(s)$  и  $D$  на  $K$  [6]. В этих формулах  $x', y'$  — координатные оси, параллельные главным центральным осям, но имеющие произвольное начало  $O'$ , в частном случае  $O'$  может совпадать с  $O$  (центром тяжести);  $\omega'(s)$  — ординаты эпюры единичной депланации, построенной при полюсе  $O'$  и произвольной нулевой точке;  $x(s)$  и  $y(s)$  — координаты точек средней линии в главных центральных осях.

Вычисление интегралов делается по правилам переменности эпюр (см. гл. III). Первый числитель: эпюра  $y(s) \delta(s)$  умножается на эпюру  $\omega'(s)$ . Второй числитель: эпюра  $x(s) \delta(s)$  умножается на эпюру  $\omega'(s)$ . Знаменатели: эпюра  $y(s) \delta(s)$  умножается на эпюру  $y(s)$ , аналогично эпюра  $x(s) \delta(s)$  умножается на эпюру  $x(s)$ .

Числитель формулы для  $x'_D$  может быть найден так же, как статический момент относительно главной оси  $x$  эпюры  $\omega'(s) \delta(s)$ , ординаты которой повернуты в свое истинное положение, т. е. нормально к плоскости чертежа. Аналогично определяется числитель формулы для  $y'_D$ .

Пример (фиг. 16). Полюс в точке  $O'$ .

$$\int \omega' y \delta ds = 2 \cdot 0,2 \left( \frac{37,5 + 10}{2} 5 \cdot 5,5 + \frac{10 \cdot 5,0}{2} 4,5 \right) = 306,5 \text{ см}^3;$$



Фиг. 16.

$$J_x = 2 \cdot 0,2 \left[ 5,0 \cdot 5,5^3 + \frac{5,0}{3} (5,5^2 + 5,5 \cdot 2,5 + 2,5^2) + \frac{2,5^3}{3} \right] = 96,1 \text{ см}^4;$$

$$x'_D = \frac{306,5}{96,1} = 3,19 \text{ см.}$$

Главная эпюра единичной депланации  $\omega(s)$  и бимомент инерции профиля  $J_\omega$

Главная эпюра единичной депланации  $\omega(s)$ , дающая распределение нормальных напряжений  $\sigma_\omega(s)$  при стесненном кручении, строится при полюсе, совпадающем с центром изгиба, и при нулевой точке  $H$ , обращенной в нуль интеграл, равный площади эпюры  $\omega\delta$ :

$$\int \omega \delta ds = 0.$$

Если имеется ось симметрии, то  $H$  совпадает с пересечением оси симме-

три со средней линией. В противном случае строится эпюра  $\omega^*(s)$  при произвольно выбранной нулевой точке и от всех ординат отнимается величина

$$K = \frac{1}{F} \int \omega^*(s) \delta(s) ds,$$

где

$$F = \int \delta(s) ds$$

есть площадь профиля.

Для замкнутых профилей [6]:

$$J_{\omega} = \oint \tilde{\omega}^2(s) \delta(s) ds.$$

Главные эпюры единичной деформации, бимоменты инерции, бимоменты сопротивления ( $W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{\max}} \text{ см}^4$ ) и координаты центра изгиба для двутавров и швеллеров приведены в табл. 1.

$x'_D = \frac{2J_{yx}}{J_x} c$	$y'_D = \frac{J_{zy}}{J_y} h$	$y'_D = \frac{J_{yx}}{J_y} h$
$J_{\omega} = \frac{2J_{yx}J_{zx}c^2 + J_{yx}b^2}{J_x}$	$J_{\omega} = \frac{J_{yx}J_{zy}h^2}{J_y}$	$J_{\omega} = J_{\omega x} + J_{\omega y} + \frac{J_{yx}J_{zy}h^2}{J_y}$
<i><math>J_{Jx}, J_{Jz}, J_{Jy}</math> — осевые моменты инерции частей 1, 2... относительно осей <math>x, y</math>; <math>J_{Jx}, J_{Jz}</math> — бимоменты инерции относительно собственных центров изгиба.</i>		

Фиг. 17.

Эти формулы справедливы и для замкнутого профиля с заменой  $\omega(s)$  на  $\tilde{\omega}(s)$ .

При построении эпюр наблюдатель смотрит на впереди лежащее сечение или, что то же, на начальный (левый) торец. Полюс берется в центре изгиба. Радиус-вектор вращается против часовой стрелки.

Бимомент инерции

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = \int_s \omega^2(s) \delta(s) ds \text{ см}^6$$

вычисляется путем перемножения эпюры  $\omega(s) \delta(s)$  на эпюру  $\omega(s)$ , соответственно  $\tilde{\omega}(s) \delta(s)$  на  $\tilde{\omega}(s)$ . Перемножаемые эпюры обычно строятся и для получения эпюры  $S_{\omega}(s)$  (см. фиг. 12—15).

Для профилей-пучков

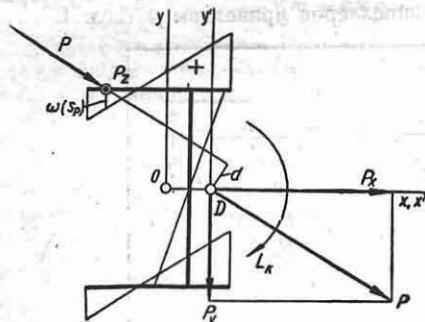
$$\omega(s) \equiv 0, \quad J_{\omega} = 0.$$

Данные для употребительных составных профилей см. на фиг. 17 [29].

### Приведение нагрузок к типам усилий

В соответствии с семью типами усилий в сечении  $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_K, B$  каждая нагрузка раскладывается на компоненты этих типов. За основу берется сосредоточенная сила, приложенная к стержню в точке с координатами  $z, s_p$ . Прежде всего сила раскладывается на два компонента:  $P$  в плоскости сечения и  $P_z$  перпендикулярно плоскости сечения (фиг. 18). Сила  $P$  переносится параллельно в центр изгиба  $D$  с добавлением сосредоточенного крутящего момента  $L_K = P \cdot d$ . Затем  $P$  раскладывается на компоненты  $P_y$  и  $P_x$  параллельно главным центральным осям  $y, x$ . Положительное направление компонентов (фиг. 18) соответствует от-

рицательным скачком в эпюрах  $M_K$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$ . Правило знаков для этих усилий дано на фиг. 11. Сила  $P_z$  переносится в центр тяжести  $O$  с добавлением двух сосредоточенных изгибающих моментов:  $L_x = -P_z y(s_p)$  и  $L_y = P_z x(s_p)$ . Кроме того, сила  $P_z$  порождает сосредоточенный бимомент  $C = -P_z \omega(s_p)$ , здесь  $\omega(s_p)$  — ордината главной эпюры  $\omega$  в точке средней линии, где приложена



Фиг. 18.

сила  $P_z^*$ . Сила может быть приложена и к отступку стенки, и тогда эпюра  $\omega$  должна быть продолжена на отступок. Сосредоточенные компоненты  $P_z$ ,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $C$  считаются положительными, когда они соответствуют положительным скачкам в эпюрах односторонних с ними усилий  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $B$ .

Интенсивности компонентов распределенной вдоль оси стержня  $z$  нагрузки, приложенной в точке  $s$  сечения, определяются аналогично.

Сосредоточенная растягивающая сила  $P_z$ , приложенная к свободному торцу стержня, дает усилия на торце

$$N = P_z; M_x = -P_z y(s_p); M_y = P_z x(s_p); B = -P_z \omega(s_p).$$

Погонная растягивающая нагрузка  $p_z(s)$ , распределенная вдоль средней линии свободного торца, дает усилия

$$N = \int p_z(s) \delta(s) ds; \\ M_x = - \int p_z(s) y(s) \delta(s) ds; \\ M_y = \int p_z(s) x(s) \delta(s) ds; \\ B = - \int p_z(s) \omega(s) \delta(s) ds.$$

\* При нескольких силах  $P_z$ , приложенных в различных точках тонкостенного профиля, их нельзя заменять одной равнодействующей.

В случае замкнутого профиля  $\omega$  заменяется на  $\hat{\omega}$ .

Закручивание вызывают только нагрузки  $L_K$  и  $C$  или аналогичные распределенные нагрузки.

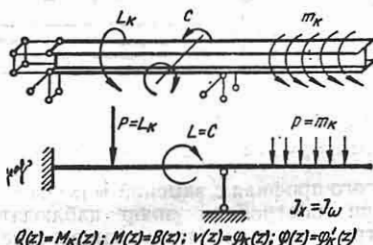
### Определение усилий (построение эпюр) [4]

По компонентам нагрузок определяют усилия и строят эпюры  $N(z)$ .

Кроме этих эпюр, необходимы эпюры бимоментов  $B(z)$  и эпюры крутящих моментов свободного  $\bar{M}_K(z)$  и стесненного  $\bar{M}_K(z)$  кручения, причем

$$\bar{M}_K(z) + \bar{M}_K(z) = M_K.$$

В ряде случаев эти эпюры получаются элементарно. Если профиль недеформирующийся (пучок), то  $B \equiv \bar{M} \equiv 0$ . Если профиль открытый и деформирующийся, то при  $GJ_K \rightarrow 0$  все эпюры, связанные с кручением,  $B(z)$ ,  $\bar{M}_K(z)$ ,  $\varphi_K(z)$ ,  $\varphi'_K(z)$  как в статических определяемых, так и неопределимых случаях строятся на основании аналогии между изгибом и стесненным кручением (фиг. 19). Закручиваемый стержень моделируется из-



Фиг. 19.

гибаемой балкой, причем опоре, препятствующей вращению сечения, но не препятствующей деформации, соответствует шарнирная опора балки, а опоре, препятствующей только деформации, — заделка, препятствующая только повороту. Полной заделкой на кручение соответствует полная заделка на изгиб. Нагрузив балку силами  $P = L_K$ , моментами  $L = C$ , распределенной нагрузкой  $p = m_K$ , строят эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$ , прогибов  $v$ , углов поворота  $\varphi$ , которые формально совпадают с эпюрами  $M_K = \bar{M}_K$ ,  $B$ ,  $\varphi_K$ ,  $\varphi'_K$ ; последние две — при условии, что  $J_x = J_\omega$  [4].



При  $GJ_k \neq 0$  (случай прокатного открытого профиля) для построения эпюр также можно воспользоваться аналогией между стесненным кручением и изгибом, но моделирующая балка получается растянуто-изогнутой [31], причем продольная сила равна  $GJ_k$ . Эпюры  $B(z)$  и их уравнения для ряда случаев даны на фиг. 20 [29].

щадь эпюры относительных углов закручивания:

$$\varphi_k(z) = \varphi_k(0) + \frac{1}{GJ_k} \int_0^z \bar{M}_k(z) dz.$$

Построение эпюр при других нагрузках и опорных закреплениях сводится к

интегрированию дифференциального уравнения стесненного кручения, даваемого в двух формах:

$$B''(z) - k^2 B(z) = -m_k(z)$$

или

$$\varphi^{IV}(z) - k^2 \varphi''(z) = \frac{m_k(z)}{EJ_\omega},$$

где

$$k^2 = \frac{GJ_k}{EJ_\omega}.$$

Здесь  $m_k$  — интенсивность крутящей моментной нагрузки.

Общий интеграл уравнения, выраженный по методу начальных параметров в виде уравнений двух эпюр, имеет вид:

$$B(z) = B(0) \operatorname{ch} kz + \bar{M}_k(0) \frac{1}{k} \operatorname{sh} kz + [B(z)];$$

$$\bar{M}_k(z) = \bar{M}_k(0) \operatorname{ch} kz + B(0) k \operatorname{sh} kz + [\bar{M}_k(z)].$$

Сюда следует присоединить выражения для  $\bar{M}_k(z)$ ,  $\varphi_k'(z)$ ,  $\varphi_k(z)$  (см. выше).

Члены в квадратных скобках дают влияние нагрузок, расположенных между начальным сечением 0 и исследуемым  $z$ . Так, в случае сосредоточенного крутящего момента  $L_k$  в сечении  $u$  имеем

$$[B(z)] = \frac{1}{k} L_k \operatorname{sh} k(z-u);$$

$$[\bar{M}_k(z)] = L_k \operatorname{ch} k(z-u).$$

Схема стержня и моделирующей балки	Эпюры бимоментов	Уравнение эпюры бимоментов
		$B(z) = B(l) \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{ch} kl}$ $B(z) = -M_k(l) \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{k \operatorname{ch} kl}$ $B(z) = -\frac{m_k}{k^2 \operatorname{ch} kl} [kl \operatorname{sh} k(l-z) - \operatorname{ch} kl \cdot \operatorname{ch} kz]$
		$B(z) = B(0) \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + B(l) \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl}$ $B(z) = \frac{L_k}{2k} \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}}$ $B(z) = \frac{m_k}{k^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k(\frac{l}{2}-z)}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right]$
		$B(z) = \frac{L_k}{2k} \frac{\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k(\frac{l}{2}-z)}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}$ $B(z) = \frac{m_k}{k^2} \left[ 1 - \frac{kl \operatorname{ch} k(\frac{l}{2}-z)}{2 \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right]$

Фиг. 20.

Пунктиром показаны эпюры  $B(z)$  при  $GJ_k \rightarrow 0$ . Уравнения эпюр выражены при помощи гиперболических функций, причем

$$k = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}}.$$

Значения  $k$  приведены в табл. 1. Эпюры  $\bar{M}_k(z)$  получаются дифференцированием:

$$\bar{M}_k(z) = B'(z),$$

а эпюры  $\bar{M}_k(z)$  — вычитанием:

$$\bar{M}_k(z) = M_k(z) - \bar{M}_k(z).$$

Относительный угол закручивания

$$\varphi_k'(z) = \frac{\bar{M}_k(z)}{GJ_k}.$$

Абсолютный угол закручивания получается интегрированием или как пло-

В случае равномерно распределенной крутящей моментной нагрузки интенсивностью  $m_k \text{ кгГ/см}$  на участке от  $u = c$  до  $u = d$

$$[B(z)] = \frac{m_k}{k^2} [\text{ch } k(z-d) - \text{ch } k(z-c)];$$

$$\overline{M}_k(z) = \frac{m_k}{k} [\text{sh } k(z-d) - \text{sh } k(z-c)].$$

Начальные параметры  $B(0), \overline{M}_k(0)$  определяются из граничных условий.

Граничное условие (для торца)	Математическое выражение
Отсутствие стеснения для деформации . . . . .	$B = 0$
Отсутствие стеснения для поворота . . . . .	$M_k = \overline{M}_k + \overline{M}'_k = 0$
Полное стеснение деформации . . . . .	$\overline{M}_k = \varphi_k = 0$
Полное стеснение поворота . . . . .	$\varphi_k = 0$

**Пример.** Стальная сварной стержень швеллерного профиля  $h = 20 \text{ см}$ ,  $b = 10 \text{ см}$ ,  $\delta_h = \delta_b = 1 \text{ см}$  длиной  $l = 150 \text{ см}$  зашпелен левым концом и свободен на правом конце. На расстоянии  $u = 100 \text{ см}$  от заделки стержень нагружен сосредоточенным скручивающим моментом  $L_k = 5000 \text{ кгГсм}$ .

Определим бимомент в сечении заделки и наибольшее нормальное напряжение стесненного кручения.

Начало поместим на левом конце. Искомый бимомент  $B(0)$  определим из условия на правом (свободном) конце  $B(l) = 0$ . Учитывая, что  $\overline{M}_k(0) = 0$  и, следовательно,  $\overline{M}'_k(0) = L_k$ , имеем

$$B(0) \text{ch } kl + L_k \frac{1}{k} \text{sh } kl - L_k \frac{1}{k} \text{sh } k(l-u) = 0,$$

откуда

$$B(0) = - \frac{L_k}{k} \frac{\text{sh } kl - \text{sh } k(l-u)}{\text{ch } kl}.$$

Пользуясь данными на фиг. 14, определяем расстояние центра изгиба от оси стенки

$$d = \frac{b}{2 + \frac{h\delta_b}{3b\delta_b}} = \frac{10}{2 + \frac{20 \cdot 1}{3 \cdot 10 \cdot 1}} = 3,75 \text{ см}.$$

Далее находим бимомент инерции профиля

$$J_\omega = \frac{h^3 d^3}{12} \left[ h\delta_h + 2\delta_b + \frac{2(b-d)^2}{d^2} \delta_b \right] = \frac{20^3 \cdot 3,75^3}{1} \left( 20 \cdot 1 + 2 \cdot 3,75 \cdot 1 + 2 \frac{6,25^2}{3,75^2} \right) = 29400 \text{ см}^4.$$

Определяем момент инерции при свободном кручении

$$J_K = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} (2b\delta_b^3 + h\delta_h^3) = \frac{1}{3} (2 \cdot 10 \cdot 1^3 + 20 \cdot 1^3) = 13,33 \text{ см}^4.$$

Принимая  $\frac{G}{E} = \frac{3}{8}$ , определяем характеристику профиля:

$$k = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}} = \sqrt{\frac{8}{8} \frac{13,33}{29400}} = 0,01305 \text{ см}^{-1}.$$

Находим безразмерные аргументы гиперболических функций, входящие в формулу для  $B(0)$ :

$$kl = 0,01305 \cdot 150 = 1,95; \\ k(l-u) = 0,01305 \cdot 50 = 0,65.$$

По таблицам гиперболических функций (см. т. 1, стр. 52) находим:

$$\text{sh } 0,65 = 0,6975;$$

$$\text{sh } 1,95 = \frac{1}{2} (3,2632 + 3,6269) = 3,44755;$$

$$\text{ch } 1,95 = \frac{1}{2} (3,4177 + 3,7622) = 3,58995.$$

Подстановка в формулу для  $B(0)$  дает

$$B(0) = - \frac{5000}{0,01305} \frac{3,44755 - 0,6975}{3,58995} = -293000 \text{ кгГсм}^2.$$

По главной эпюре единичной деформации (эпюре секториальных площадей) на фиг. 14 находим максимальную ординату эпюры:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_2 = \frac{h}{2} (b-d) = \frac{20}{2} (10 - 3,75) = 62,5 \text{ см}^2.$$

Максимальное нормальное напряжение стесненного кручения:

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \frac{B(0) \omega_{\text{max}}}{J_\omega} = \pm \frac{293000 \cdot 62,5}{29400} = \pm 623 \text{ кгГсм}^2.$$

Готовые решения см. [11], [17], [29].

В случае замкнутого профиля эффект стеснения обычно не учитывают, полагая  $B(z) = 0$ . В случае вытянутого профиля иногда приходится учитывать стеснение.

Дифференциальное уравнение стесненного кручения стержня с замкнутым профилем, подкрепленным диафрагмами, обеспечивающими достаточную жесткость поперечного сечения:

$$B''(z) - k^2 B(z) = -\mu m_k;$$

$$k^2 = \mu \frac{GJ_K}{EJ_\omega}.$$

Здесь  $\mu = 1 - \frac{J_K}{J_c}$  — коэффициент деформации;  $J_c = \oint r^2(s) \delta(s) ds$  — так называемый *направленный полярный момент инерции* профиля, отличающийся от обычного полярного момента инерции  $J_p$  тем, что вместо радиусов-векторов  $r$  берутся плечи  $r$  (перпендикуляры) из центра изгиба  $K$  к средним линиям стенок. Значения  $J_c, J_K, \mu$  для прямоугольной коробки выписаны на фиг. 15.

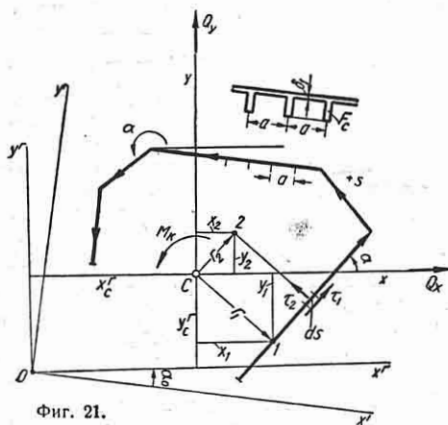
Уравнения эпюр  $B(z)$  и  $\overline{M}_k(z)$  совпадают с приведенными выше для откры-

того профиля с той разницей, что при вычислении  $[B(z)]$  и  $[M_K(z)]$  нагрузки следует брать умноженными на коэффициент деформации  $\mu$ .

### КОРОТКИЙ ТОНКОСТЕННЫЙ СТЕРЖЕНЬ, ЗАЩЕМЛЕННЫЙ ОДНИМ ИЛИ ДВУМЯ КОНЦАМИ [22], [24]

К этой схеме приводятся отдельные тонкостенные отливки, а также участки труб и оболочек в области значительных вырезов, работающие на сдвиг и кручение. Предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими. Гипотеза о пропорциональности нормальных напряжений деформациям здесь заменяется гипотезой о пропорциональности касательных напряжений сдвигам.

Нормальные напряжения в стенках незначительны, но они концентрируются в угловых точках, где желательно иметь продольное усиление (стрингер); касательные напряжения, независимо от того, является ли профиль открытым или замкнутым, распределены по толщине равномерно. Формулы даются в предположении, что оболочка усилена ребрами вдоль образующих. Если площадь ребра  $F_c$ , расстояние между ними  $a$ , то  $\delta_2 = \frac{F_c}{a}$  составляет толщину воображаемой второй стенки, сопротивляющейся сдвигу по направлению нормали к основной стенке, толщина которой  $\delta_1$  (фиг. 21).



Фиг. 21.

Касательное напряжение в стенке

$$\tau_1 = \frac{M_K}{J_c} r_1 + \frac{Q_y}{F_y} \sin \alpha + \frac{Q_x}{F_x} \cos \alpha.$$

Касательное напряжение в ребрах

$$\tau_2 = \frac{M_K}{J_c} r_2 + \frac{Q_y}{F_y} \cos \alpha - \frac{Q_x}{F_x} \sin \alpha.$$

Следует задаться положительным направлением обхода контура и совпадающим с ним направлением  $+\tau_1$ . Положительное направление  $\tau_2$  соответствует вращению вектора  $\tau_1$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки;  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и положительным направлением средней линии данной стенки;  $r_1$  — длина перпендикуляра из начала координат на стенку (касательную в случае криволинейной стенки);  $r_2$  — длина перпендикуляра на нормаль к стенке в исследуемой точке;  $r_1$  и  $r_2$  считаются положительными, если  $+\tau_1$  и соответственно  $+\tau_2$  создают вращение вокруг начала против часовой стрелки или, что то же, положительный момент  $M_K$ , вращающий против часовой стрелки, создает  $+\tau_1$  и  $+\tau_2$ .

$$J_c = \int r_1^2 dF_1 + \int r_2^2 dF_2$$

есть направленный полярный момент инерции;

$$dF_1 = \delta_1 ds; \quad dF_2 = \delta_2 ds.$$

$$F_x = \int \cos^2 \alpha dF_1 + \int \sin^2 \alpha dF_2 = \\ = \int \delta_1 \cos^2 \alpha ds + \int \delta_2 \sin^2 \alpha ds;$$

$$F_y = \int \sin^2 \alpha dF_1 + \int \cos^2 \alpha dF_2 = \\ = \int \delta_1 \sin^2 \alpha ds + \int \delta_2 \cos^2 \alpha ds;$$

$F_x$  и  $F_y$  — так называемые направленные площади.

Начало координат  $C$  называется центром сдвига (иначе, центром жесткости), а оси  $x$  и  $y$  — главными осями сдвига. Если профиль имеет две оси симметрии, то центр сдвига совпадает с центром тяжести. При одной оси симметрии центр сдвига лежит на этой оси, но не совпадает с центром тяжести.

Наклон главных осей  $x, y$  по отношению к произвольным  $x', y'$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\int \sin 2\alpha dF_3}{\int \cos 2\alpha dF_3},$$

где

$$dF_3 = dF_1 - dF_2 = (\delta_1 - \delta_2) ds.$$

При  $\delta_1 = \delta_2$  любые ортогональные оси являются главными.

Координаты центра сдвига в главных осях

$$x_c^2 = \frac{S_{1y} + S_{2y}}{F_y}; \quad y_c^2 = \frac{S_{1x} + S_{2x}}{F_x}$$

Здесь (см. фиг. 21)

$$S_{1y} = \int x_1 dF_1 = \sum \delta_1 s_1 x_1;$$

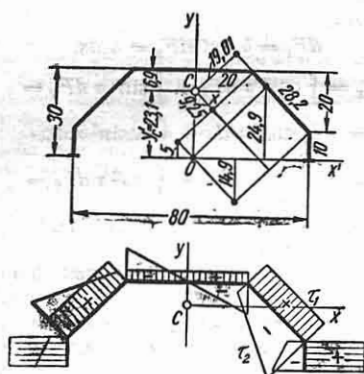
$$S_{1x} = \int y_1 dF_1 = \sum \delta_1 s_1 y_1;$$

$$S_{2y} = \int x_2 dF_2 = \sum \delta_2 \int x_2 ds;$$

$$S_{2x} = \int y_2 dF_2 = \sum \delta_2 \int y_2 ds.$$

На протяжении прямолинейной стенки каждый из факторов  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_K$  дает эпюру  $\tau_1$  или  $\tau_2$  с постоянными ординатами за исключением эпюры  $\tau_2$  от  $M_K$ , следующей закону прямой линии, пересекающей ось стенки в точке  $I$  (встречи  $r_1$  и  $s$ ).

**Пример.** Определить геометрические характеристики и построить эпюры  $\tau_1$  и  $\tau_2$  для корытного



Фиг. 22.

профиля от действия  $M_K$  при  $Q_x = Q_y = 0$ ;  $\delta_2 = 0,8$   $\delta_1 = \text{const}$  (фиг. 22):

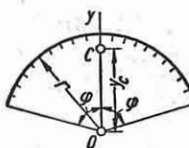
$$F_x = 2(20\delta_1 \cdot 1^2 + 28,2\delta_1 \cdot 0,707^2 + 28,2\delta_2 \cdot 0,707^2 + 10\delta_2 \cdot 1^2) = 68,2\delta_1 + 48,2\delta_2 = 106,8\delta_1;$$

$$F_y = 2(28,2\delta_1 \cdot 0,707^2 + 10\delta_1 \cdot 1^2 + 20\delta_2 \cdot 1^2 + 28,2\delta_2 \cdot 0,707^2) = 48,2\delta_1 + 68,2\delta_2 = 102,7\delta_1;$$

$$y_c = \frac{2 \left[ 20\delta_1 \cdot 30 + 28,2\delta_1 \cdot 24,9 + 28,2\delta_2 \left( \frac{5-14,9}{2} \right) + 10\delta_2 \cdot \frac{10}{2} \right]}{68,2\delta_1 + 48,2\delta_2} = \frac{2462,6\delta_1}{106,8\delta_1} = 23,1 \text{ см}; \quad 30 - 23,1 = 6,9 \text{ см};$$

$$J_c = 2 \left[ 20\delta_1 \cdot 6,9^2 + 28,2\delta_1 \cdot 19,01^2 + 10\delta_1 \cdot 40^2 + \frac{20^3}{3} \delta_2 + (37,45^2 - 9,25^2) \frac{\delta_2}{3} + (23,1^2 - 13,1^2) \frac{\delta_2}{3} \right] = 54 500\delta_1 + 45 844\delta_2 = 91 300\delta_1 \text{ см}^4.$$

Профиль, очерченный по дуге круга с центральным углом  $2\varphi$ . Геометрические характеристики приведены на фиг. 23.



$$y_c = 2r\delta_1 \frac{\sin \varphi}{(\delta_1 + \delta_2) \varphi + (\delta_1 - \delta_2) \frac{\sin 2\varphi}{2}}$$

$$F_x = r [(\delta_1 + \delta_2) \varphi + (\delta_1 - \delta_2) \frac{\sin 2\varphi}{2}]$$

$$F_y = r [(\delta_1 + \delta_2) \varphi - (\delta_1 - \delta_2) \frac{\sin 2\varphi}{2}]$$

$$J_c = 2\delta_1 r [(r^2 + y_c^2) \varphi - 2r y_c \sin \varphi]$$

Фиг. 23.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО И ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ОТКРЫТЫМ ПРОФИЛЕМ [4]

Критическая сила стержня с тонкостенным профилем чаще всего равна или близка, но иногда значительно меньше эйлеровой критической силы. Второй случай имеет место при очень тонкой стенке и широкополочном профиле. Для прокатных профилей учета тонкостенности, как правило, не требуется. Эксцентриситет приложения сжимающей нагрузки также снижает ее критическое значение. Проверка устойчивости выполняется по формуле

$$\frac{N}{\varphi F} \leq [\sigma]$$

с той разницей, что аргументом табличного значения коэффициента уменьшения допускаемого напряжения  $\varphi$  является

не максимальная гибкость  $\lambda_{\max} = \frac{l}{i_{\min}}$ ,

а значение  $\lambda'_{\max} = \pi \sqrt{\frac{EF}{N_{кр}}}$ ; если

$N_{кр} = N_E$  (эйлеровой критической силе), то  $\lambda' = \lambda$ . Ниже даются формулы и способы определения критической сжимающей силы симметричных и несимметричных, центрально и внецентренно сжатых профилей для основного случая — шарнирного закрепления концов, создающего препятствия для линейных

перемещений торцов и их вращения относительно продольной оси, но не препятствующего повороту при изгибе (девиации), а также депланации торца. Учет других условий закрепления достигается путем умножения фактической длины стержня на коэффициент свободной длины  $\mu$ . При полном защемлении двух торцов  $\mu = 0,5$ ; при одном полностью защемленном и другом свободном  $\mu = 2,0$ ; при одном защемленном и другом шарнирно опертом  $\mu = 0,7$ . Более сложные случаи сочетания граничных условий изгиба и кручения см. [16], [29]. Вопросы устойчивости стержней, закрепленных вдоль линии, параллельной оси стержня, а также жестко связанных с оболочкой, см. [15], [29]. Стержни с планками см. [33].

**Профиль с двумя осями симметрии.** Стержень, сжатый постоянным усилием вдоль оси (в сечениях с двумя осями симметрии ось бруса совпадает с осью центров изгиба), имеет две изгибные и одну крутильную форму потери устойчивости. Первые две формы характеризуются поступательными перемещениями поперечных сечений, третья — вращением сечений. При шарнирном опирании обоих концов, препятствующем поступательным перемещениям и вращению, но не препятствующем поворотам, (девиации) и депланации торцов, критической силой является наименьшая из трех сил:

$$N_x = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}; \quad N_y = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2};$$

$$N_\varphi = \frac{\pi^2 E J_\omega}{l^2 i_p^2} + \frac{G J_K}{i_p^2};$$

$i_p^2 = \frac{J_p}{F} = \frac{J_x + J_y}{F}$  — квадрат полярного радиуса инерции поперечного сечения;  $N_\varphi$  лишь в редких случаях бывает меньше  $N_x$  и  $N_y$  (для двутавра, при весьма широких полках).

Тот же профиль при внецентренном сжатии силой, приложенной с эксцентриситетом  $x_N$  ( $y_N = 0$ ), имеет одну изгибную и две изгибно-крутильные формы выпучивания:

$$N_1 = N_y;$$

$$N_2 = \frac{i_p^2}{2(i_p^2 - x_N^2)} \left( N_x + N_\varphi - \sqrt{(N_x - N_\varphi)^2 + 4 \frac{x_N^2}{i_p^2} N_x N_\varphi} \right);$$

$$N_3 > N_2.$$

Критической является меньшая из двух сил  $N_1$  и  $N_2$ .

**Профиль с одной осью симметрии ( $x$ ).** Центральное сжатие:

$$N_1 = N_y;$$

$$N_2 = \frac{i_p^2 + x_D^2}{2i_p^2} \left( N_x + N_\varphi - \sqrt{(N_x - N_\varphi)^2 + 4N_x N_\varphi \frac{x_D^2}{i_p^2 + x_D^2}} \right);$$

$$N_3 > N_2.$$

Обозначения прежние:  $x_D$  — абсцисса центра изгиба относительно центра тяжести.  $J_\omega$  в формуле для  $N_\varphi$  вычисляется относительно полюса, совпадающего с центром изгиба.

Другой вид формулы:

$$N_2 = \frac{1}{2} \left( N_x + N_\varphi^0 - \sqrt{(N_x - N_\varphi^0)^2 + \left( N_x \frac{x_D}{i_p} \right)^2} \right).$$

Здесь для вычисления  $N_\varphi^0$  в прежней формуле для  $N_\varphi$  построение эпюры  $\omega$  и подсчет  $J_\omega$  делаются при полюсе, совпадающем с центром тяжести, и нулевой точкой на оси симметрии.

**Несимметричный профиль при внецентренном сжатии силой вдоль оси центров изгиба.** Здесь могут быть две изгибные и одна крутильная форма потери устойчивости:

$$N_1 = N_x; \quad N_2 = N_y;$$

$$N_3 = \frac{N_\varphi (i_p^2 + x_D^2 + y_D^2)}{i_p^2 + \frac{U_y}{J_y} x_D + \frac{U_x}{J_x} y_D - x_D^2 - y_D^2}.$$

Здесь

$$U_x = \int_F \rho^2 y dF = \int_F (x^2 + y^2) y dF;$$

$$U_y = \int_F (x^2 + y^2) x dF;$$

$N_\varphi$  вычисляется для значения  $J_\omega$  при полюсе эпюры  $\omega$  в центре изгиба и главной нулевой точке;  $x$ ,  $y$  — текущие координаты точек средней линии профиля в главных централь-

Величины  $U_y$  и  $r^2$  для прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39)

№ профиля	$U_y$ в см <sup>6</sup>	$r^2$ в см <sup>2</sup>	№ профиля	$U_y$ в см <sup>6</sup>	$r^2$ в см <sup>2</sup>	№ профиля	$U_y$ в см <sup>6</sup>	$r^2$ в см <sup>2</sup>			
5	13,58	10,85	20	1628	81,6	30	6 564	163,3			
6,5	25,34	14,27	21	1903	76,0				a	7 147	153,3
8	56,67	18,59		a	2301				94,5	b	7 869
10	122,8	25,75	22	2661	90,8	33	8 767	190,0			
12	234,6	34,59		a	2952				111,9	a	9 784
14	a	416,8	44,42	24	3376	104,4	36	10 720	169,5		
	b	500,3	41,45		a	3756				98,6	a
16	a	694,8	54,91	27	4418	134,7	36	15 020	214,3		
	b	826,5	50,90		a	4860				126,0	b
18	a	1116	67,14	27	5521	119,1	40	22 080	266,3		
	b	1215	61,85		a						a
							b	25 730	243,6		

ных осях инерции;  $x_D, y_D$  — координаты центра изгиба. Интегралы  $U_x, U_y$  вычисляются по правилам перемножения эпюр, как интегралы по контуру, причем  $dF = \delta(s) ds$ .

**Несимметричный профиль при центральном сжатии.** Критической силой является наименьший корень кубического уравнения

$$A_0 + A_1 N + A_2 N^2 + A_3 N^3 = 0.$$

Коэффициенты уравнения:

$$A_0 = -r^2 N_x N_y N_\varphi;$$

$$A_1 = r^2 (N_x N_y + N_x N_\varphi + N_y N_\varphi);$$

$$A_2 = -r^2 (N_x + N_y + N_\varphi) + N_x x_D^2 + N_y y_D^2; \quad A_3 = I_p^2.$$

Здесь

$$r^2 = I_p^2 + x_D^2 + y_D^2.$$

При вычислении  $N_\varphi$  — полюс в центре изгиба.

Приближенная формула:

$$N_{кр} = \frac{-A_0}{\sqrt[3]{A_1^3 + 3A_2^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2}}.$$

**Общий случай — несимметричный профиль, внецентренное сжатие** (координаты силы  $x_N, y_N$ ).

Коэффициенты кубического уравнения вычисляются по формулам

$$A_0 = -r^2 N_x N_y N_\varphi;$$

$$A_1 = r^2 N_\varphi (N_x + N_y) +$$

$$+ (r^2 + 2x'_s x_N + 2y'_s y_N) N_x N_y;$$

$$A_2 = -r^2 N_\varphi - (r^2 + 2x'_s x_N + 2y'_s y_N - x_N^2) N_x - (r^2 + 2x'_s x_N + 2y'_s y_N - y_N^2) N_y;$$

$$A_3 = r^2 + 2x'_s x_N + 2y'_s y_N - x_N^2 - y_N^2.$$

Обозначения:  $x', y'$  — оси с началом в центре изгиба, параллельные главным центральным осям инерции;  $x'_s =$

$= \frac{U_y}{2J_y} - x_D$ ;  $y'_s = \frac{U_x}{2J_x} - y_D$  — координаты центра так называемого круга устойчивости; значения  $U_x, U_y, r^2$  — см. выше;  $x'_N, y'_N$  — координаты точки приложения силы в осях  $x', y'$ . Критическая сила вычисляется по указанной в конце предыдущего пункта приближенной формуле.

Величины  $U_y$  и  $r^2$  для прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39) приведены в табл. 3 ( $U_x = 0$ ).

### ОБЩАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛОК ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ [29]

При недостаточной поперечной жесткости балка может потерять устойчивость путем закручивания. Согласно ТУ проектирования стальных конструкций общая устойчивость проверяется по формуле

$$\frac{M}{\varphi_0 W_{0p}} \leq [\sigma],$$

где

$$\varphi_0 = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T}.$$

Для расчета необходимо вычислить  $\sigma_{кр}$  для нагрузки того же типа, как и действующая на балку. В первой графе таблицы (на фиг. 24) даны схемы нагрузок и опорных закреплений балок. Во второй графе приведены значения критической нагрузки в случае двух осей симметрии профиля и приложения нагрузки на уровне оси балки. В третьей

где

$$U_x = \int_F (x^2 + y^2) y dF.$$

Координаты  $x, y$ , как всегда, в главных центральных осях.

Определив  $P_{кр}$ , находим соответствующий данному случаю загрузкиения наибольший изгибающий момент  $M_{кр}$ , а за

Схема загрузкиения и опор	Критическая нагрузка при профиле с двумя осями симметрии	Уравнение для критической нагрузки стержня с одной осью симметрии (y)
	$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (8000 EJ_\omega + 810 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (82,1 y'_p + 94,0 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_1^2 = 0$
	$P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (2910 EJ_\omega + 295 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (59,7 y'_p + 43,8 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_2^2 = 0$
	$P_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (86600 EJ_\omega + 4200 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (363,8 y'_p + 183,4 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_3^2 = 0$
	$P_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (20900 EJ_\omega + 101,2 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (199,4 y'_p + 52,8 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_4^2 = 0$
	$P_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (648000 EJ_\omega + 15910 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (1307 y'_p + 56,6 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_5^2 = 0$
	$P_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{EJ_y (114800 EJ_\omega + 2820 l^2 G_K)}$	$P_{кр}^2 - (59,4 y'_p + 53,8 y'_s) \frac{EJ_y}{l^2} P_{кр} - P_6^2 = 0$

Фиг. 24.

графе приведены квадратные (относительно  $P_{кр}$ ) уравнения, относящиеся к балкам с одной осью симметрии (y), при нагрузке, расположенной на  $y'_p$  ниже центра изгиба (если выше, то  $y'_p$  берется с минусом). Положительный корень уравнения соответствует нагрузке, направленной сверху вниз, отрицательный — нагрузке, направленной снизу вверх. Это позволяет учесть влияние положения нагрузки по высоте также и в случае двух осей симметрии, когда  $y'_s = 0$ . В этом случае повышение нагрузки всегда уменьшает  $P_{кр}$ . Входящие в виде свободных членов величины  $P_1, P_2, \dots, P_6$  вычисляются по формулам первой графы, причем  $J_\omega$  берется при полюсе, совпадающем с центром изгиба;

$$y'_s = \frac{U_x}{2J_x} - y_D,$$

тем и напряженне  $\sigma_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_{бр}}$ . Далее

подсчитывается  $\varphi_6 = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T}$ ; для стали марки Ст. 3 величина  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_{пл} = 2000 \text{ кг/см}^2$ . Если  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пл}$  или, что то же,  $\varphi_6 < 0,85$ , то  $\varphi_6$  является окончательным и по нему делается расчет, если же  $\varphi_6 > 0,85$ , то вместо  $\varphi_6$  вводится  $\varphi'_6$  — величина, меньшая единицы, определяемая по формуле

$$\varphi'_6 = 1,2 - \frac{0,326}{\sqrt{\varphi_6}}.$$

Обоснование последнего приема и многочисленные практические данные по расчету общей устойчивости балок см. [29], [30].

Пример. Рассчитать на устойчивость подкрановую балку пролетом  $l = 14 \text{ м}$ , шарнирно опер-

тую по концам. Нагрузка сосредоточенная, приложена по середине пролета на высоте 17 см над центром изгиба. Высота балки  $h = 100$  см.

Геометрические характеристики сечения:  $J_x = 240\,000$  см<sup>4</sup>;  $J_y = 2780$  см<sup>4</sup>;  $J_k = 176,5$  см<sup>4</sup>;  $J_\omega = 1\,560\,000$  см<sup>6</sup>.

Ось  $y$  направлена вниз. Центр изгиба на 35,1 см выше центра тяжести. Ордината центра изгиба

$$y_D = -35,1 \text{ см}; y_P = -17 \text{ см.}$$

Подсчетом найдено  $U_x = 2,542 \cdot 10^6$  см<sup>3</sup>.

$$j_s = \frac{U_x}{2J_x} - y_D = \frac{2,542 \cdot 10^6}{2 \cdot 0,24 \cdot 10^6} + 35,1 = 40,5 \text{ см.}$$

Составляем квадратное уравнение (2-й случай таблицы на фиг. 24):

$$P_{кр}^2 - [59,7 \cdot (-17) + 43,8 \cdot 40,5] \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2780}{1400^3} P_{кр} -$$

$$- (2910 \cdot 2,1 \cdot 10^6 - 1,56 \cdot 10^6 - 295 \cdot 1400^2 \cdot 0,3 \cdot 10^6 \cdot 176,5) \times \\ \times \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 2780}{1400^3} = 0$$

или

$$P_{кр}^2 - 1,62 \cdot 10^8 P_{кр} - 73,9 \cdot 10^6 = 0,$$

откуда

$$P_{кр} = 810 + 8600 = 9410 \text{ кг.}$$

Второй корень (отрицательный) дает критическое значение силы  $P$ , направленной вверх.

Максимальное напряжение при критической нагрузке

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{кр} l}{4W_x} = \frac{9400 \cdot 1400}{4 \cdot 4000} = 823 \text{ кг/см}^2.$$

Так как  $\sigma_{\max} < \sigma_{\text{пл}}$ , то полученное значение  $P_{кр}$  является окончательным.

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. В л а с о в В. З., Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения, Сборник ВИА РККА, № 20, 1936.

2. В л а с о в В. З., „Проект и стандарт“ № 8, 9 и 10 за 1936 г.

3. В л а с о в В. З., Устойчивость открытых профилей, „Строительная промышленность“ № 6, 1938.

4. В л а с о в В. З., Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940.

5. У м а н с к и й А. А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939.

6. У м а н с к и й А. А., О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета, „Техника воздушного флота“ № 12, 1940.

7. У м а н с к и й А. А., Расчет тонкостенных криволинейных балок, Труды Научно-технической конференции ВВИА имени Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944. См. также [29].

8. У м а н с к и й А. А., О расчете плоских кривых тонкостенных стержней с конечной жесткостью свободного кручения, Труды Научно-технической конференции ВВИА имени Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944.

9. Г о р б у н о в Б. Н., Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней, „Прикладная математика и механика“, вып. 1, 1943.

10. Г о р б у н о в Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Приближенные методы расчета вагонных рам, Машгиз, 1946.

11. Г о р б у н о в Б. Н. и Стрельбицкая А. И., Теория рам из тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948.

12. Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС, Сборник статей под ред. В. З. Власова, 1941.

13. Б е л я е в В. Н., Расчет свободно несущих крыльев, „Труды ЦАГИ“, № 165, 1935.

14. З н а м е н с к и й П. М., Устойчивость открытых профилей, „Техника воздушного флота“ № 12, 1934.

15. Р ж а н и ц и н А. Р., Сложное сопротивление тонкостенных профилей в пределах и за пределами упругости, Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС, 1941.

16. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л., Устойчивость тонкостенных стержней в зависимости от граничных условий, Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС.

17. Б ы ч к о в Д. В. и М р о щ и н с к и й А. К., Кручение металлических балок, Стройиздат, 1944.

18. Б ы ч к о в Д. В., Расчет балочных и рамных систем из тонкостенных элементов, Стройиздат, 1948.

19. Р е п м а н Ю. В., Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней, Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС, 1941.

20. Д о б у д о г л о Н. Г., Опытное исследование устойчивости металлических строительных профилей, Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС, 1941.

21. А ф а н а с ь е в А. М., О расчете крыла моноблок на стесненное кручение, Труды Научно-технической конференции ВВИА имени Жуковского, т. 2, вып. 2, 1944.

22. М а р ь и н В. А., Приближенный расчет коротких открытых цилиндрических оболочек, сборник „Расчет пространственных конструкций“, вып. 1, Машстройиздат, 1950.

23. Д ж а н е л и д з е Г. Ю. и П а н о в к о Я. Г., Статика упругих тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948.

24. А л а д у р о в Р. А., Определение касательных напряжений в тонкостенной конструкции вблизи заделки, „Труды ЦАГИ“ № 614, 1947.

25. К а н С. Н. и П а н о в к о Я. Г., Элементы строительной механики тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1952.

26. Ц и б у л я Б. П., Изгиб и кручение конических оболочек, сборник „Расчет пространственных конструкций“, вып. 1, Машстройиздат, 1950.

27. Б а л а б у х Л. И., Расчет на прочность конических кессонов, „Труды ЦАГИ“ № 640, 1947.

28. А ф а н а с ь е в А. М., Байков В. Т., Марьин В. А., Геммерлинг А. В. и др., Сборник задач по расчету тонкостенных конструкций, под ред. А. А. Уманского, Оборонгиз, 1941.

29. Энциклопедический справочник „Машиностроение“, т. 1, кн. 2, Машгиз, 1947, стр. 298—350, „Тонкостенные стержни“.

30. Ч у в и к и н Г. М., Общая устойчивость монорейсовых балок, сборник ВНИИПТМАШ, „Специальные расчеты монорейсовых балок“, Машгиз, 1948.

31. К а р я к и н Н. И., „Вестник инженеров и техников“ № 3, 1948.

32. Г р и г о р ь е в Ю. П., К расчету кривых тонкостенных брусев, сборник „Расчет пространственных конструкций“, вып. 1, Машстройиздат, 1950.



33. Д л у г а ч М. И., О расчете тонкостенных стержней, усиленных решеткой или планками, сборник „Расчет пространственных конструкций“, вып. 1, Машстройиздат, 1950.
34. Р ж а н и ц ы н А. Р., Устойчивость тонкостенных стержней за пределом упругости, Труды лаборатории строительной механики ЦНИИПС, под ред. В. З. Власова, Стройиздат, 1949.
35. М и л е й к о в с к и й И. Е., Расчет составных стержней методами строительной механики оболочек, сборник „Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций“, Стройиздат, 1952.
36. Л у к а ш П. А., Применение теории проф. В. З. Власова к исследованию пространственной устойчивости сжатых поясов открытых балочных мостов, сборник „Экспериментальные и теоретические исследования тонкостенных пространственных конструкций“, Стройиздат, 1952.
37. У м а н с к и й А. А., Пространственные системы, Стройиздат, 1948.
38. В л а с о в В. З., Строительная механика тонкостенных пространственных систем, Стройиздат, 1949.
39. Стрельбицкая А. И., Некоторые зависимости между силовыми факторами в предельном состоянии тонкостенного профиля, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, т. 10, 1949.
40. Стрельбицкая А. И., Предельное состояние двутаврового профиля при стесненном кручении, Сборник трудов Института строительной механики АН УССР, т. 14, 1950.
41. Ф и л о н е н к о - Б о р о д и ч М. М. и др., Курс сопротивления материалов, ч. II, гл. XI, изд. 3-д, Гостехиздат, 1949.
42. Б е л я е в Н. М., Сопротивление материалов, гл. XXX, изд. 7-е, Гостехиздат, 1951.
43. Д а р к о в А. В. и К у з н е ц о в В. И., Статика сооружений, гл. XII, Трансжелдориздат, 1951.
44. Р ж а н и ц ы н А. Р., Расчет тонкостенных стержней ступенчато-переменного сечения, сборник „Исследования по теории сооружений“, вып. V, Стройиздат, 1951.
45. Я г н Ю. И., Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1952.
46. Ф е о ф а н о в А. Ф., Расчеты тонкостенных конструкций, Оборонгиз, 1953.
47. О б р а з ц о в И. Ф., К расчету тонкостенных стержней на устойчивость при изгибе, Труды МАИ, Оборонгиз, 1953.
48. Б и д е р м а н В. Л., Расчет прямых тонкостенных профилей на прочность и на жесткость, сборник „Прочность в машиностроении“, Машгиз, 1951.
49. Е л е н е в с к и й Г. С., Строительная механика крыла переменного сечения, Оборонгиз, 1954.
50. У р б а н И. В., Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций, Трансжелдориздат, 1955.

РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

*Пластинкой* называется тело призматической или цилиндрической формы, высота которого мала по сравнению с размерами основания.

Плоскость, делящая пополам толщину пластинки, называется *срединной плоскостью*: линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью цилиндра или призмы образует *контур пластинки*.

Если толщина пластинки не превышает  $1/5$  наименьшего размера основания, пластинка называется *тонкой*.

Если толщина пластинки превышает указанный предел, точные расчеты ведутся на основании теории *толстых плит*.

Различают три класса тонких пластинок, работающих на поперечную нагрузку: жесткие, гибкие и абсолютно гибкие пластинки.

*Жесткими* называют пластинки, прогиб которых составляет не более  $1/4$  толщины; при действии поперечной нагрузки срединную поверхность можно считать не испытывающей деформаций растяжения или сжатия.

*Гибкими* называют пластинки, прогиб которых больше  $1/4$ , но менее 5 толщин; деформация при закрепленных краях связана с появлением значительных напряжений в срединной поверхности.

Нормальные напряжения в каком-либо сечении пластинки складываются из цепных или мембранных напряжений, равномерно распределенных по толщине пластинки (равных напряжениям в срединной поверхности), и напряжений изгиба.

*Абсолютно гибкими* пластинками, или *мембранами*, называют пластинки, прогиб которых превышает толщину в 5 раз и более; при их расчете можно

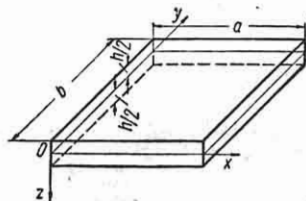
пренебречь напряжениями изгиба, которые малы по сравнению с напряжениями в срединной поверхности.

Если пластинка подвергается сжатию или сдвигу под действием сил, расположенных в срединной плоскости, должен быть произведен расчет на устойчивость.

Нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости пластинки, называется *критической*.

Опертая по контуру пластинка способна после потери устойчивости (выпучивания) воспринимать возрастающую нагрузку.

**Система координат.** Плоскость  $xOy$  прямоугольной системы координат совпадает с горизонтальной срединной



Фиг. 1.

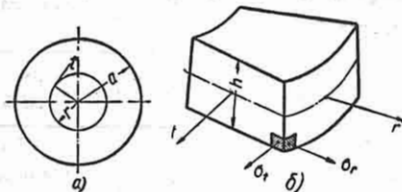
плоскостью пластинки. Ось  $z$  направляют по вертикали вниз. В случае прямоугольной пластинки ось  $x$  направляют по одной из длинных сторон пластинки; начало координат — в одном из углов (фиг. 1). В случае круглой пластинки вводят цилиндрическую систему координат; основная плоскость совпадает со срединной плоскостью пластинки, ось  $z$  проходит через центр.

Обозначения:

- $h$  — толщина пластинки;
- $a$  — { радиус круглой пластинки;
- { сторона прямоугольной пластинки;

- $b$  — { внутренний радиус кольцевой пластинки;  
сторона прямоугольной пластинки;  
 $P$  — полная поперечная нагрузка, сосредоточенная или распределенная;  
 $p$  — интенсивность распределенной нагрузки (сила, приходящаяся на единицу площади);  
 $w$  — прогиб произвольной точки срединной плоскости;  
 $M_x, M_y$  — погонные моменты (моменты, рассчитанные на единицу длины);  
 $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — нормальные напряжения изгиба, наибольшие по толщине пластинки;  
 $\sigma_x^0$  и  $\sigma_y^0$  — нормальные напряжения в срединной поверхности;  
 $E$  — модуль продольной упругости;  
 $\mu$  — коэффициент Пуассона;  
 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки.

Для круглой пластинки индексы  $x$  и  $y$  заменяются индексами  $r$  и  $t$ , соответствующими направлениям радиуса-вектора и перпендикуляра к нему (фиг. 2, а).



Фиг. 2.

На фиг. 2, б показаны векторы напряжений изгиба  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , наибольших по толщине пластинки.

Общую теорию пластинок см. [11] и [14].

Приведенным напряжением по теории наибольших касательных напряжений для пластинок при однозначных главных напряжениях является величина наибольшего из них, а при разнозначных напряжениях — сумма их абсолютных величин. Приведенное напряжение не должно превышать допускаемого, величина которого определяется в зависи-

мости от свойств материала и характера нагрузки (статическая, переменная). При пластическом материале расчет допускаемой нагрузки осуществляется по нагрузке, соответствующей предельному состоянию (см. гл. IX и XIV), или по предельно допускаемой упруго-пластической деформации.

## РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК НА ИЗГИБ

**Расчет тонких пластинок.** Расчетные формулы для жестких пластинок. Таблицы и формулы составлены для  $\mu = 0,3$ .

*Прямоугольная пластинка шарнирно опёрта по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади [5].*

Прогиб в центре при  $a \geq b$

$$f = C_1 \frac{pb^4}{Eh^3}.$$

Напряжения в центре

$$\sigma_y = C_2 p \left(\frac{b}{h}\right)^2; \quad \sigma_x = C_3 p \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Значения коэффициентов  $C_1 - C_3$  даны в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов  $C_1 - C_3$ 

$\frac{a}{b}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1,0	0,0443	0,2874	0,2874
1,1	0,0530	0,3318	0,2964
1,2	0,0616	0,3756	0,3006
1,3	0,0697	0,4158	0,3024
1,4	0,0770	0,4518	0,3036
1,5	0,0843	0,4872	0,2994
1,6	0,0906	0,5172	0,2958
1,7	0,0964	0,5448	0,2916
1,8	0,1017	0,5688	0,2874
1,9	0,1064	0,5910	0,2826
2,0	0,1106	0,6102	0,2784
3,0	0,1336	0,7134	0,2424
4,0	0,1400	0,7410	0,2304
5,0	0,1416	0,7476	0,2250
$\infty$	0,1422	0,7500	0,2250

*Прямоугольная пластинка защемлена по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади ( $a \geq b$ ).*

Прогиб в центре

$$f = C_1 \frac{pb^4}{Eh^3}.$$

Напряжения в центре

$$\sigma_y = C_2 p \left(\frac{b}{h}\right)^2; \quad \sigma_x = C_3 p \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Напряжения на контуре в середине длинной стороны

$$\sigma_y = -C_4 P \left( \frac{b}{h} \right)^2;$$

знак минус указывает на то, что растянутыми являются верхние волокна.

Значения коэффициентов  $C_1, \dots, C_4$  даны в табл. 2.

Таблица 2  
Значения коэффициентов  $C_1 - C_4$

$\frac{a}{b}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
1,0	0,0138	0,1374	0,1374	0,3102
1,1	0,0165	0,1602	0,1404	0,3324
1,2	0,0191	0,1812	0,1386	0,3672
1,3	0,0210	0,1968	0,1344	0,4008
1,4	0,0227	0,2100	0,1290	0,4284
1,5	0,0241	0,2208	0,1224	0,4518

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка  $P$  сосредоточена в центре ( $a \geq b$ ).

Прогиб в центре равен

$$f = C \frac{Pb^2}{Eh^3}.$$

Значения коэффициента  $C$  даны в табл. 3.

Распределение напряжений около точки приложения нагрузки примерно

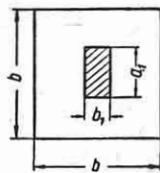
такое же, как в круглой пластинке радиуса  $0,64b$ , нагруженной силой, сосредоточенной в центре (см. стр. 194).

Квадратная пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка  $P$  равномерно распределена по площади центральной части  $a_1 \times b_1$  (фиг. 3).

Напряжения в центре

$$\sigma_y = C_1 \frac{P}{h^2};$$

$$\sigma_x = C_2 \frac{P}{h^2}.$$



Фиг. 3.

В табл. 4 даны величины коэффициента  $C_1$ ; коэффициенты  $C_2$  находятся перестановкой  $a_1$  и  $b_1$ .

Прямоугольная пластинка защемлена по всему контуру; нагрузка  $P$  сосредоточена в центре ( $a \geq b$ ).

Прогиб в центре равен

$$f = C_1 \frac{Pb^2}{Eh^3}.$$

Напряжение в середине длинной стороны равно

$$\sigma = -C_2 \frac{P}{h^2}.$$

Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  даны в табл. 5.

Таблица 3  
Значения коэффициента  $C$

$\frac{a}{b}$	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	$\infty$
$C$	0,1265	0,1381	0,1478	0,1621	0,1714	0,1769	0,1803	0,1846	0,1849

Таблица 4  
Значения коэффициента  $C_1$

$\frac{a_1}{b} \backslash \frac{b_1}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	$\infty$	1,926	1,506	1,254	1,080	0,948	0,846	0,750	0,672	0,612	0,552
0,1	2,268	1,704	1,392	1,182	1,020	0,900	0,804	0,720	0,648	0,588	0,528
0,2	1,848	1,524	1,284	1,104	0,966	0,852	0,762	0,684	0,618	0,558	0,504
0,3	1,572	1,350	1,170	1,008	0,906	0,804	0,720	0,648	0,588	0,528	0,480
0,4	1,392	1,218	1,074	0,948	0,846	0,756	0,678	0,612	0,552	0,504	0,456
0,5	1,248	1,110	0,984	0,876	0,786	0,696	0,636	0,576	0,522	0,474	0,426
0,6	1,128	1,008	0,900	0,810	0,726	0,654	0,594	0,540	0,486	0,444	0,402
0,7	1,020	0,918	0,822	0,744	0,672	0,606	0,546	0,498	0,456	0,414	0,372
0,8	0,930	0,840	0,756	0,684	0,618	0,564	0,510	0,462	0,420	0,378	0,342
0,9	0,846	0,762	0,690	0,624	0,564	0,516	0,468	0,420	0,384	0,348	0,318
1,0	0,762	0,690	0,630	0,570	0,516	0,468	0,426	0,384	0,348	0,318	0,288

Таблица 5

Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ 

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$C_1$	0,0611	0,0706	0,0755	0,0777	0,0786	0,0788
$C_2$	0,7542	0,8940	0,9624	0,9906	1,0002	1,0044

Прямоугольная пластинка оперта шарнирно по двум сторонам  $b$ , третья сторона  $a$  защемлена и четвертая — свободна; нагрузка равномерно распределена по всей площади [3].

Максимальный прогиб (в середине свободной стороны) при  $a \geq b$  равен

$$f = C_1 \frac{pb^4}{Eh^3}.$$

Максимальные напряжения в середине свободной стороны

$$\sigma_x = C_2 p \left( \frac{a}{h} \right)^2;$$

в середине защемленной стороны ( $a \geq b$ )

$$\sigma_y = -C_3 p \left( \frac{b}{h} \right)^2.$$

Коэффициенты  $C_1 - C_3$  — по табл. 6. При  $b > a$  в формулах для  $f$  и  $\sigma_y$  следует  $b$  заменить на  $a$ .

Таблица 6  
Значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ 

$\frac{b}{a}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\infty$
$C_1$	1,37	1,03	0,635	0,366	0,123	0,154	0,164	0,166	0,166
$C_2$	0	0,0468	0,176	0,335	0,583	0,738	0,786	0,798	0,798
$C_3$	3,0	2,568	1,914	1,362	0,714	0,744	0,750	0,750	0,750

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по двум сторонам, третья сторона защемлена, а четвертая — свободна. Нагрузка  $P$  сосредоточена в середине свободной стороны (фиг. 4) [11].

Прогиб под силой при  $a \geq b$

$$f = \frac{1,82Pb^2}{Eh^3}.$$

Расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{3,06P}{h^2}.$$

Прямоугольная пластинка шарнирно оперта по контуру; верхняя поверхность нагрета больше, чем нижняя, на  $t$  градусов. По толщине температура меняется по линейному закону.

Коэффициент линейного расширения  $\alpha$ .

Напряжения на краях

$$\sigma = E \frac{\alpha t}{2}$$

(в сечении, нормальном к контуру).

Прямоугольная пластинка, защемленная по всему контуру; нагрев верхней поверхности. По толщине температура меняется по линейному закону.

Напряжения на краях в сечении вдоль контура

$$\sigma = E \frac{\alpha t}{2(1-\mu)}.$$

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади.

Прогиб в центре

$$f = \frac{0,7pa^4}{Eh^3}.$$

Напряжения:

в центре

$$\sigma_r = \sigma_t = 1,24p \left( \frac{a}{h} \right)^2;$$

у контура

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = 0,52p \left( \frac{a}{h} \right)^2.$$

Круглая пластинка защемлена по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади.

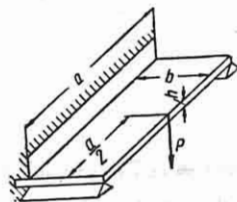
Прогиб в центре

$$f = 0,17 \frac{pa^4}{Eh^3}.$$

Напряжения:

в центре

$$\sigma_r = \sigma_t = 0,49p \left( \frac{a}{h} \right)^2;$$



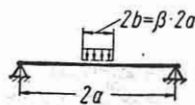
Фиг. 4.

у контура

$$\sigma_r = -0,75p \left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad \sigma_t = \mu\sigma_r.$$

У контура нижние волокна сжаты.

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка равномерно распределена в центральной части по площади круга радиуса  $b$  (фиг. 5).



Фиг. 5.

Отношение  $\frac{b}{a} = \beta$ .

Прогиб в центре

$$f = (1,73 - 1,03\beta^2 + 0,68\beta^2 \ln \beta) \frac{\rho a^2 b^2}{Eh^3},$$

Напряжения:  
в центре

$$\sigma_r = \sigma_t = (1,5 - 0,262\beta^2 - 1,95 \ln \beta) p \left(\frac{b}{h}\right)^2;$$

у контура

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = 0,525(2 - \beta^2) p \left(\frac{b}{h}\right)^2.$$

Круглая пластинка защемлена по контуру; нагрузка равномерно распределена в центральной части по площади круга радиуса  $b$ . Отношение  $\frac{b}{a} = \beta$ .

Прогиб в центре

$$f = (0,68 - 0,51\beta^2 + 0,68\beta^2 \ln \beta) \frac{\rho a^2 b^2}{Eh^3}.$$

Напряжения:  
в центре

$$\sigma_r = \sigma_t = 0,49(\beta^2 - 4 \ln \beta) p \left(\frac{b}{h}\right)^2;$$

у контура

$$\sigma_r = -0,75(2 - \beta^2) p \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

$$\sigma_t = \mu\sigma_r.$$

Круглая пластинка шарнирно оперта по контуру; нагрузка  $P$  сосредоточена в центре.

$$\text{Прогиб в центре } f = 0,55 \frac{\rho a^2}{Eh^3}.$$

Максимальные растягивающие напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left(0,63 \ln \frac{a}{h} + 1,16\right).$$

Круглая пластинка защемлена по контуру; нагрузка  $P$  сосредоточена в центре.

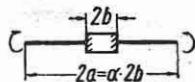
Прогиб в центре

$$f = 0,218 \frac{\rho a^2}{Eh^3}.$$

Максимальные растягивающие напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left(0,63 \ln \frac{a}{h} + 0,68\right).$$

Круглая кольцевая пластинка защемлена по внутреннему контуру. По внешнему контуру равномерно распределена моментная нагрузка (фиг. 6); на единицу длины приходится момент  $M_0$ .



Фиг. 6.

Прогиб при  $r = a$

$$f = 5,46 \frac{1 - \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \frac{M_0 a^2}{Eh^3}.$$

На внутреннем контуре

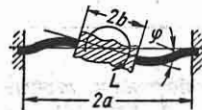
$$\sigma_r = \frac{12}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \frac{M_0}{h^2};$$

$$\sigma_t = \mu\sigma_r;$$

на внешнем контуре

$$\sigma_r = \frac{6M_0}{h^2}; \quad \sigma_t = \frac{6 \left(1,3 - \frac{0,7}{\alpha^2}\right)}{1,3 + \frac{0,7}{\alpha^2}} \frac{M_0}{h^2}.$$

Круглая пластинка защемлена по контуру и нагружена в центре моментом  $L$  (фиг. 7). Угол поворота центральной жесткой части



Фиг. 7.

$$\varphi = C_1 \frac{L}{Eh^3}.$$

На внутреннем контуре максимальное напряжение

$$\sigma_r = C_2 \frac{L}{ah^2};$$

на наружном контуре

$$\sigma_r = C_3 \frac{L}{ah^2}.$$

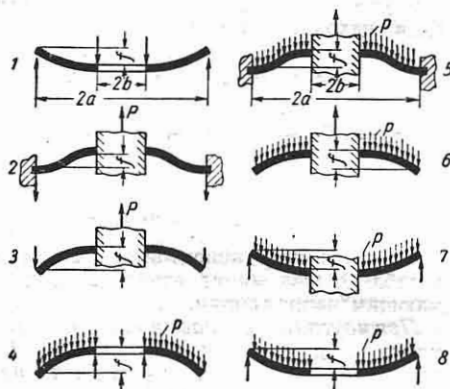
Значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  даны в табл. 7.

Таблица 7

Значения коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$

$\frac{b}{a}$	0,5	0,6	0,7	0,8
$C_1$	0,081	0,035	0,0123	0,0082
$C_2$	1,14	0,685	0,465	0,262
$C_3$	0,573	0,452	0,325	0,212

Круглая кольцевая пластинка нагружена по контуру (фиг. 8, случаи 1—3)



Фиг. 8.

или равномерно по всей площади (фиг. 8, случаи 4—8). На фиг. 8 представлены

различные случаи закрепления пластинки. Максимальный прогиб  $f$  и максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$  равны

$$f = C_1 \frac{Pa^2}{Eh^3}; \quad \sigma_{\max} = C_2 \frac{P}{h^2}$$

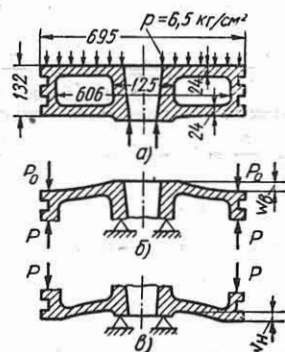
(случаи 1—3):

$$f = C_1 \frac{pa^4}{Eh^3}; \quad \sigma_{\max} = C_2 \frac{pa^3}{h^2}$$

(случаи 4—8).

Здесь  $P$  — равнодействующая нагрузки, распределенной по контуру;  $p$  — нагрузка, приходящаяся на единицу площади; значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  даны в табл. 8.

Пример. Поршень, размеры которого даны на фиг. 9, а, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки  $p = 6,5 \text{ кг/см}^2$ . Определить



Фиг. 9.

прогиб края поршня и максимальные напряжения [7].

Рассматриваем верхнее и нижнее днища как кольцевые пластинки, имеющие радиусы  $a = 30,3 \text{ см}$  и  $b = 6,25 \text{ см}$ . Считаем, что внутренний и наружный контуры каждой пластинки зашечлены, но могут смещаться друг относительно друга в осевом направлении.

Таблица 8

Значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$

$\frac{a}{b} =$	1,25		1,5		2		3		4		5	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
1	0,341	1,10	0,519	1,26	0,672	1,48	0,734	1,88	0,724	2,17	0,704	2,34
2	0,00129	0,115	0,0064	0,220	0,0237	0,405	0,062	0,703	0,092	0,933	0,114	1,13
3	0,00510	0,227	0,0249	0,428	0,0877	0,753	0,209	1,205	0,293	1,514	0,350	1,745
4	0,202	0,66	0,491	1,19	0,902	2,04	1,220	3,34	1,300	4,30	1,310	5,10
5	0,00077	0,090	0,0062	0,273	0,0329	0,71	0,110	1,54	0,179	2,23	0,234	2,80
6	0,00231	0,135	0,0183	0,410	0,0938	1,04	0,293	2,15	0,448	2,99	0,564	3,69
7	0,00343	0,122	0,0313	0,336	0,1250	0,74	0,291	1,21	0,417	1,45	0,492	1,59
8	0,184	0,592	0,414	0,976	0,664	1,440	0,824	1,880	0,830	2,08	0,813	2,19

На нижнюю пластинку передается от верхней нагрузка, равнодействующую которой обозначим через  $P$  (фиг. 9, в). Пластинка нагружена по схеме случая 2 (фиг. 8). Отношение  $\frac{a}{b}$  равно 4,85. Пользуясь табл. 8, находим интерполированием коэффициент  $C_1 = 0,11$ . Прогиб края пластинки равен

$$w_n = 0,11 \frac{P_{30,3^2}}{E \cdot 2,4^3} = 7,3 \frac{P}{E}.$$

На верхнюю пластинку действуют: 1) реактивная сила со стороны нижней пластинки  $P$ ; 2) равнодействующая  $P_0$  давления, приходящегося на обод пластинки (фиг. 9, б):

$$P_0 = \frac{\pi}{4} (69,5^2 - 60,6^2) 6,5 = 5920 \text{ кг}$$

и 3) распределенная нагрузка  $p$ .

Под действием первых двух сил край пластинки сместится на величину

$$w_b' = 7,3 \frac{P_0 - P}{E}.$$

Для определения прогиба под действием распределенной нагрузки пользуемся схемой случая 5 (фиг. 8). Коэффициент  $C_2$  равен 0,225, отсюда

$$w_b'' = 0,225 \frac{p_{30,3^4}}{E \cdot 2,4^3} = 13\,800 \frac{p}{E}.$$

Приравняем прогибы краев обеих пластинок:

$$7,3 \frac{P}{E} = 7,3 \frac{P_0 - P}{E} + 13\,800 \frac{p}{E},$$

отсюда  $P = 9100 \text{ кг}$ . Прогиб края поршня при  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  равен

$$w_n = w_b = 7,3 \frac{9100}{2 \cdot 10^6} = 0,033 \text{ см.}$$

По табл. 8 находим коэффициенты  $C_2$ : для случая 2,  $C_2 = 1,1$ ; для случая 5,  $C_2 = 2,7$ . Максимальные напряжения в нижней пластинке

$$\sigma = 1,1 \frac{9100}{2,4^2} = 1740 \text{ кг/см}^2,$$

в верхней пластинке

$$\sigma = 2,7 \frac{6,5 \cdot 30,3^2}{2,4^2} - 1,1 \frac{9100 - 5920}{2,4^2} = 2190 \text{ кг/см}^2.$$

При таких напряжениях поршень должен быть изготовлен из материала с пределом текучести не меньше 25—30 кг/мм<sup>2</sup>.

Другие случаи граничных условий и характера нагружения для круглых пластинок см. [10], [12], для пластинок прямоугольных и иного очертания [5].

Расчетные формулы для гибких пластинок (применимы в тех случаях, когда деформации являются упругими).

Круглая пластинка подвергается действию нагрузки, равномерно распределенной по всей площади [15].

Стрела прогиба (в центре) определяется из кубического уравнения

$$A \left(\frac{f}{h}\right)^3 + B \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{p}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^4. \quad (1)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  даны в табл. 9.

После определения стрелы прогиба нормальные напряжения изгиба  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  и напряжения в срединной поверхности  $\sigma_r^0$ ,  $\sigma_t^0$  находятся по формулам

$$\sigma_r = \alpha E \frac{hf}{a^2}; \quad \sigma_t = \beta E \frac{hf}{a^2};$$

$$\sigma_r^0 = \gamma E \left(\frac{f}{a}\right)^2; \quad \sigma_t^0 = \delta E \left(\frac{f}{a}\right)^2.$$

Полные напряжения равны

$$(\sigma_r)_n = \sigma_r + \sigma_r^0; \quad (\sigma_t)_n = \sigma_t + \sigma_t^0.$$

Значения коэффициентов  $\alpha, \dots, \delta$  даны в табл. 9; знак минус относится к сжимающим напряжениям.

Прямоугольная пластинка со сторонами  $a$  и  $b$  шарнирно оперта по контуру; контур не смещается; нагрузка равномерно распределена по всей площади [4] ( $a \geq b$ ).

Таблица 9

Значения коэффициентов  $A, B, \alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ 

Граничные условия		A	B	В центре		У контура			
				$\alpha = \beta$	$\gamma = \delta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Шарнирное опирание по контуру	Контур свободно скользит	0,376	1,436	1,778	0,295	0	0,755	0	-0,427
	Контур не смещается	2,660	1,436	1,778	0,905	0	0,755	0,610	0,183
Зашемленне по контуру	Контур свободно скользит	0,857	5,862	2,860	0,500	4,400	1,320	0	-0,333
	Контур не смещается	2,762	5,862	2,860	0,976	4,400	1,320	0,476	0,145



Стрела прогиба (в центре) определяется из кубического уравнения

$$A \left(\frac{f}{h}\right)^3 + B \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{p}{E} \left(\frac{b}{2h}\right)^4. \quad (2)$$

Для центра пластинки

$$\sigma_x = \alpha E \frac{4hf}{b^2}; \quad \sigma_y = \beta E \frac{4hf}{b^2};$$

$$\sigma_x^0 = \gamma E \left(\frac{2f}{b}\right)^2; \quad \sigma_y^0 = \delta E \left(\frac{2f}{b}\right)^2.$$

Полные напряжения равны

$$(\sigma_x)_n = \sigma_x + \sigma_x^0; \quad (\sigma_y)_n = \sigma_y + \sigma_y^0.$$

Коэффициенты  $A, B, \alpha, \dots, \delta$  даны в табл. 10.

Таблица 10

Значения коэффициентов  $A, B, \alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$

$\frac{a}{b}$	$A$	$B$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
1,0	1,82	1,33	1,645	1,645	0,615	0,615
1,1	1,53	1,11	1,416	1,587	0,518	0,600
1,2	1,34	0,96	1,242	1,544	0,448	0,592
1,3	1,21	0,84	1,107	1,510	0,392	0,584
1,4	1,11	0,76	1,000	1,484	0,351	0,581
1,5	1,05	0,70	0,913	1,462	0,315	0,574
1,6	1,00	0,65	0,843	1,444	0,288	0,571
1,7	0,95	0,60	0,784	1,429	0,263	0,568
1,8	0,93	0,57	0,735	1,417	0,246	0,567
1,9	0,90	0,54	0,693	1,407	0,230	0,566
2,0	0,88	0,52	0,658	1,398	0,217	0,566

Табл. 10 составлена для  $\mu = 0,25$ .

Абсолютно гибкая круглая пластинка (мембрана) с несмещающимся контуром подвергается действию равномерно распределенной нагрузки.

Прогиб в центре

$$f = 0,662h \sqrt[3]{\frac{p}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^4}.$$

Максимальное напряжение в центре

$$\sigma_{\max}^0 = 0,423 \sqrt[3]{E \left(\frac{pa}{h}\right)^2}.$$

*Пример.* Прямоугольная стальная пластинка со сторонами  $150 \times 100$  см и толщиной  $h = 0,3$  см подвергается действию равномерно распределенной нагрузки  $p = 0,25$  кг/см<sup>2</sup>. Определить стрелу прогиба и максимальные напряжения.

Уравнение (2) принимает вид

$$1,05 \left(\frac{f}{h}\right)^3 + 0,70 \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{0,25 \cdot 50^4}{2 \cdot 10^6 (0,3)^4},$$

отсюда

$$\frac{f}{h} = 0,45; \quad f = 1,34 \text{ мм.}$$

Пользуясь табл. 10 и полагая  $\frac{a}{b} = 1,5$ , найдем полные напряжения в центре:

$$(\sigma_x)_n = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,34}{50^2} (0,913 \cdot 0,3 + 0,315 \cdot 1,34) = 746 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\sigma_y)_n = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1,34}{50^2} (1,462 \cdot 0,3 + 0,574 \cdot 1,34) = 1294 \text{ кг/см}^2.$$

## РАСЧЕТ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

*Круглая плита закреплена по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади.*

Стрела прогиба  $f'$  равна [1]:  
при шарнирном опирании по контуру

$$f' = f \left[ 1 + 0,7 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right];$$

при защемлении по контуру

$$f' = f \left[ 1 + 3,33 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right];$$

здесь  $f$  — стрела прогиба по соответствующей формуле теории тонких пластинок.

*Прямоугольная пластинка со сторонами  $a \times b$  шарнирно опирается по контуру; нагрузка равномерно распределена по всей площади ( $a \geq b$ ).*

Стрела прогиба  $f'$  равна [1]

$$f' = f \left[ 1 + \alpha \left(\frac{h}{2b}\right)^2 \right].$$

Здесь  $f$  — стрела прогиба по соответствующей формуле теории тонких пластинок; значения коэффициента  $\alpha$ :

$\frac{a}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0	5,0	$\infty$
$\alpha$	1,18	0,98	0,87	0,80	0,75	0,72	0,64	0,62	0,61	0,61

Для определения нормальных напряжений при изгибе шарнирно опертых толстых плит могут применяться формулы теории тонких пластинок даже в том случае, если отношение толщины к наименьшему размеру основания достигает  $\frac{1}{3}$ .

### РАСЧЕТ ПЛАСТИНОК НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Устойчивость пластинок в пределах упругости.

Прямоугольная пластинка подвергается сжатию усилиями, равномерно распределенными по сторонам

$$x = 0 \text{ и } x = a$$

(фиг. 10)

Критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  равно

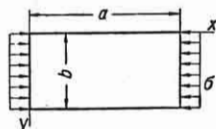
$$\sigma_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = k \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \quad (3)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от граничных условий и отношения сторон пластинки; значение  $D$  см. стр. 191.

а) Значения  $k$  для случая, когда все края пластинки оперты шарнирно:

б) Для других граничных условий значения  $k$  даны в табл. 11 („заш.“ — зашпеленный край, „шарн.“ — шарнирно опертый край, „своб.“ — свободный край).

Для случая упругого зашпеления края  $y = 0$  и шарнирного опирания остальных сторон (степень зашпеления харак-



Фиг. 10.

теризуется жесткостью на кручение  $GJ_k$  ребра, примыкающего к данному краю) значения  $k$  находятся из табл. 12 [2].

Для случая упругого зашпеления края  $x = 0$  и шарнирного опирания других краев значения  $k$  определяются из табл. 13.

Для случая одинакового упругого зашпеления по краям  $y = 0$  и  $y = b$

$\frac{a}{b}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	От 2 до ∞
$k$	27	13,2	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20	4,04	4,00	4,04	4,13	4,28	4,47	4,34	4,20	4,08	4,05	4,01	4,00

Таблица 11

Значения коэффициента  $k$

Граничные условия для краев				Отношение сторон пластинки $\frac{a}{b}$										
$x = 0$	$x = a$	$y = 0$	$y = b$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞	
Заш.	Заш.	Заш.	Заш.	—	—	9,4	9,3	8,8	8,5	8,5	8,2	7,8	7,0	
Шарн.	Шарн.	Заш.	Заш.	7,05	7,29	7,69	7,15	7,04	7,20	7,05	7,00	7,15	7,0	
Заш.	Заш.	Шарн.	Шарн.	13,38	8,73	6,74	5,84	5,45	5,34	5,18	4,85	4,41	4,0	
Шарн.	Шарн.	Заш.	Своб.	—	2,70	1,70	1,47	1,36	1,33	1,34	1,38	1,36	1,33	
Шарн.	Шарн.	Шарн.	Своб.	3,65	2,15	1,44	1,14	0,95	0,84	0,76	0,70	0,56	0,46	

Таблица 12

Значения коэффициента  $k$

$\frac{a}{b}$	$\frac{GJ_k}{Db}$								$\frac{a}{b}$	$\frac{GJ_k}{Db}$							
	0,25	0,50	1,0	2,0	4,0	6,0	10,0	0,25		0,50	1,0	2,0	4,0	6,0	10,0		
0,5	6,52	6,63	6,71	6,77	6,81	6,82	6,83	0,8	4,56	4,75	4,96	5,13	5,25	5,30	5,34		
0,6	5,44	5,58	5,70	5,79	5,85	5,87	5,89	0,9	4,42	4,64	4,89	5,11	5,28	5,40	5,40		
0,7	4,85	5,03	5,19	5,32	5,40	5,44	5,46	1,0	4,39	4,64	4,93	5,21	5,43	5,52	5,60		

Таблица 13

Значения коэффициента  $k$

$\frac{b}{a}$ \ $\frac{GJ_k}{Da}$	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	10,0
0,33	4,08	4,09	4,10	4,11	4,11	4,11
0,50	4,16	4,19	4,21	4,23	4,23	4,24
1,0	4,32	4,46	4,60	4,70	4,77	4,82
1,5	5,10	5,39	5,76	6,14	6,46	6,73
2,0	6,70	7,06	7,60	8,28	8,98	9,68
2,5	8,87	9,28	9,94	10,89	12,00	14,75
3,0	11,59	12,02	12,77	13,91	15,43	17,50

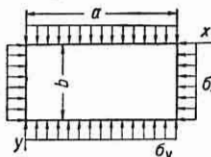
при шарнирном опирании остальных краев, значения  $k$  определяются из табл. 14.

Таблица 14

Значения коэффициента  $k$

$\frac{a}{b}$ \ $\frac{GJ_k}{Db}$	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	10,0
0,5	6,84	7,09	7,31	7,47	7,57	7,64
0,6	5,80	6,12	6,43	6,68	6,85	6,96
0,7	5,24	5,64	6,06	6,42	6,67	6,86
0,8	4,96	5,42	5,97	6,44	6,80	7,08
0,9	4,84	5,36	5,99	6,62	7,12	7,52
1,0	4,79	5,39	6,14	6,92	7,57	7,64

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается одновременно сжатию в двух направлениях (фиг. 11); отношение сжимающих усилий задано:



Фиг. 11.

$$\gamma = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

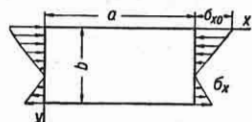
Критическое напряжение  $\sigma_x$  определяется по формуле (3); значения  $k$  даны в табл. 15 [3].

Таблица 15

Значение коэффициента  $k$

$\frac{a}{b}$ \ $\gamma$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
1	3,36	2,85	2,50	2,22	2,00	1,33
2	3,36	2,40	1,84	1,49	1,25	0,69
3	3,24	2,42	1,74	1,36	1,11	0,58
$\infty$	3,20	2,40	1,67	1,25	1,00	0,50

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, нагружена усилиями, распределенными вдоль ст-



Фиг. 12.

рон  $x = 0$  и  $x = a$  (фиг. 12) по линейному закону:

$$\sigma_x = \sigma_{x0} \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right); \quad \left( \frac{a}{b} > 0,2 \right).$$

Критическое напряжение ( $\sigma_{x0}$ )<sub>кр</sub> определяется по формуле (3); значения  $k$  даны в табл. 16 [3].

Таблица 16

Значения коэффициента  $k$

Вид нагрузки	$\alpha$ \ $\frac{a}{b}$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5
Чистый изгиб	2	29,1	24,1	24,4	25,6	24,3
Изгиб и сжатие	1,333	18,7	12,9	11,2	11,0	11,5
	1	15,1	9,7	8,1	7,8	8,4
	0,8	13,3	8,3	6,9	6,6	7,1
	0,667	10,8	7,1	6,0	5,8	6,1

Для одинакового упругого защемления по краям  $y = 0$  и  $y = b$ , при шарнирном опирании остальных краев, величина  $k$  определяется из табл. 17 [2].

Таблица 17

Значения коэффициента  $k$

$\frac{a}{b}$ \ $\frac{GJ_k}{Db}$	0,25	0,50	1,0	2,0	4,0	10,0
$\frac{b}{a} = 1$	0,5	12,83	13,37	13,86	14,23	14,46
	0,6	11,03	11,69	12,34	12,87	13,23
	0,7	10,22	10,86	11,72	12,44	12,96
	0,8	9,60	10,50	11,55	12,53	13,26
	0,9	9,41	10,42	11,68	12,94	13,93
	1,0	9,40	10,52	11,99	13,54	14,46
$\frac{b}{a} = 2$	0,4	34,05	36,04	37,79	39,03	39,80
	0,5	30,45	32,83	35,17	37,01	38,24
	0,6	29,11	31,90	34,92	37,52	39,35
	0,7	29,00	32,17	35,91	39,41	42,06
	0,8					40,32

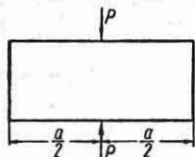
Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается сжатию двумя сосредоточенными силами, приложенными в серединах больших сторон (фиг. 13):

$$P_{кр} = k \frac{4\pi D}{b}$$

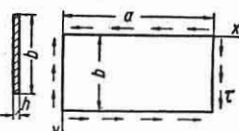
Значение  $k$  зависит от отношения  $\frac{a}{b}$ :

$\frac{a}{b}$ . . . . .	1	2	3	$\infty$
$k$ . . . . .	1,49	1,03	1,00	1,00

Прямоугольная пластинка ( $a \geq b$ ) подвергается действию равномерно распределенных по всем краям касательных усилий (фиг. 14).



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Критическое напряжение  $\tau_{кр}$  равно

$$\begin{aligned} \tau_{кр} &= k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = \\ &= k \frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)} E \left(\frac{h}{b}\right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

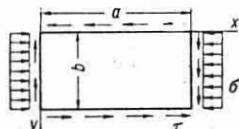
Значение  $k$  зависит от граничных условий и отношения сторон  $\frac{a}{b}$ .

а) Для случая, когда все четыре края оперты шарнирно, значения  $k$  находятся по приближенной формуле

$$k = 5,34 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

б) Для других граничных условий значения  $k$  даны в табл. 18.

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается совместно действию усилий сжатия (растяжения), равномерно распределенных по сторонам  $x=0$  и  $x=a$ , и вместе с тем усилий сдвига, равномерно распределенных по всем краям (фиг. 15).



Фиг. 15.

Пусть найдены критические напряжения сжатия  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$  для пластинки заданных размеров при раздельном действии усилий сжатия и сдвига.

Критические напряжения  $\sigma_{кр}$  и  $\tau_{кр}$  при совместном действии сил удовлетворяют приближенному соотношению

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_0} + \left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_0}\right)^2 = 1. \quad (5)$$

По уравнению (5) могут быть найдены критические напряжения, если задано отношение  $\frac{\sigma_{кр}}{\tau_{кр}}$  или одна из этих величин.

В случае растягивающих усилий первому члену в левой части уравнения (5) должен быть придан знак минус.

Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается совместно действию изгибающих усилий по сторонам  $x=0$  и  $x=a$  и усилий сдвига по всем сторонам (фиг. 16).

Пусть найдены критические напряжения изгиба  $\sigma_0$  и сдвига  $\tau_0$  для пластинки заданных размеров при раздельном действии изгиба и сдвига.

Значения коэффициента  $k$ 

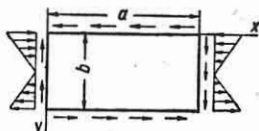
Таблица 18

Граничные условия для краев				Отношение сторон пластинки $\frac{a}{b}$					
$x=0$	$x=a$	$y=0$	$y=b$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	$\infty$
Заш.	Заш.	Заш.	Заш.	14,58	11,40	10,96	10,85	—	8,99
Шарн.	Шарн.	Заш.	Заш.	12,28	11,12	10,21	9,81	9,61	8,99
Заш.	Заш.	Шарн.	Шарн.	12,28	7,78	6,70	6,40	6,17	5,35

Критические напряжения  $\sigma_{кр}$  и  $\tau_{кр}$  при совместном действии сил удовлетворяют приближенному соотношению

$$\left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{кр}}{\tau_0}\right)^2 = 1. \quad (6)$$

Более подробно о расчете на комбинированную нагрузку см [13].



Фиг. 16.

Круглая пластинка подвергается действию сжимающих радиальных усилий, равномерно распределенных по контуру.

Критическое напряжение равно

$$\sigma_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{a^2 h}, \quad (7)$$

где  $a$  — радиус пластинки; коэффициент  $k$  в случае шарнирного опирания по контуру равен  $k = 0,425$ ; в случае защемления  $k = 1,49$ .

**Устойчивость пластинок за пределами упругости.** Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по краям, подвергается сжатию в одном направлении усилиями, равномерно распределенными по сторонам  $x = 0$  и  $x = a$

(см. фиг. 10);  $\frac{a}{b} \geq 1$ .

Приведенная на стр. 198 формула (3) справедлива при условии, что критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  не превышает предела пропорциональности материала  $\sigma_{ли} \approx \sigma_y$ .

Для стали Ст. 3 формулы упругой области применимы при условии  $\frac{b}{h} \geq 60$

(принято  $\sigma_y = 2000 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$ ).

В пределах  $\frac{b}{h} \leq 40$  следует принимать

(в запас прочности) критическое напряжение равным  $\sigma_T$ ;  $\sigma_{кр} = 2400 \text{ кг/см}^2$ .

В промежуточной области  $40 \leq \frac{b}{h} \leq 60$  применима формула

$$\sigma_{кр} = \left(3200 - 20 \frac{b}{h}\right) \text{ кг/см}^2. \quad (8)$$

Для дуралюмина Д16Т формулы упругой области применимы при  $\frac{b}{h} \geq 36$  (принято  $\sigma_y = 2000 \text{ кг/см}^2$ ).

В области  $16 \leq \frac{b}{h} \leq 36$  следует принимать

$$\sigma_{кр} = \left(4880 - 80 \frac{b}{h}\right) \text{ кг/см}^2. \quad (9)$$

Редукционные коэффициенты для подкрепленных пластинок после потери устойчивости. Прямоугольная пластинка шарнирно оперта на ребра, жесткие по отношению к изгибу, и подвергается вместе с ребрами сжатию в направлении стороны  $a$  ( $a \geq b$ ). При совместной с ребрами деформации пластинка может нести после потери устойчивости возрастающую нагрузку, величина которой превышает критическую.

Закон распределения напряжений в срединной поверхности пластинки меняется с увеличением нагрузки. Напряжения  $\sigma_p$  в краевых полосах, прилегающих к продольным ребрам, пропорциональны (в пределах упругости) относительному сближению нагруженных кромок  $e$ :

$$\sigma_p = Ee.$$

В то же время напряжения в центральной части мало отличаются от критических. Вид эпюры сжимающих напряжений по ширине пластинки показан на фиг. 17.

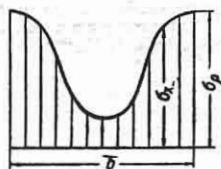
Нагрузка, воспринимаемая пластинкой после потери устойчивости, определяется по формуле

$$P = \varphi \sigma_p b h, \quad (10)$$

где  $\varphi$  — так называемый редукционный коэффициент.

Коэффициент  $\varphi$  следует принимать: а) при проверке прочности перекрытий, состоящих из значительного числа смежных панелей обшивки и заведомо жестких на изгиб подкрепляющих ребер, по формуле

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_p}}; \quad (11)$$



Фиг. 17.

б) при проверке прочности конструкций, состоящих из обшивки и относительно небольшого числа подкрепляющих ребер или изолированных панелей, по формуле

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_p}} \quad (12)$$

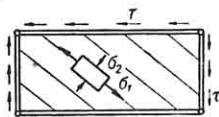
В формулах (11) и (12)  $\sigma_{кр}$  — критическое напряжение для пластинки заданных размеров;  $\sigma_p$  — напряжение в подкрепляющих ребрах. Несущая способность пластинки определяется, как правило, из условий прочности и устойчивости подкрепляющих ребер.

Определение критической нагрузки для случая общей потери устойчивости пластинки вместе с ребрами см. [11], [14].

*Прямоугольная пластинка шарнирно оперта на ребра, жесткие по отношению к изгибу, и подвергается*

*действию касательных усилий  $\tau$  (фиг. 18).*

В этом случае пластинка может также нести после потери устойчивости панели возрастающую нагрузку, величина которой во много раз превышает критическую. При значительной деформации длинной пластинки ( $a \gg b$ ) происходит образование ясно выраженных наклонных складок (диагонального поля растяжений). Главными напряжениями сжатия  $\sigma_2$  можно при этом пренебречь; напряжения растяжения  $\sigma_1$  определяются по формуле



Фиг. 18.

$$\sigma_1 = \frac{2\tau}{\sin 2\alpha},$$

где  $\alpha$  — угол между направлением складок и длинной стороной, близкий к  $40^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Алексеев С. А., Изгиб толстых плит, "Труды ВВИА имени Жуковского", вып. 273 и 312, 1949 и статья в сборнике "Расчет пространственных конструкций", вып. 1, Машстройиздат, 1950.
2. Бруде Б. М., Устойчивость пластинок в элементах стальных конструкций, Машстройиздат, 1949.
3. Бубнов И. Г., Труды по теории пластин, Техтеоретиздат, 1953.
4. Барвак П. М., Приближенный расчет пластинок средней толщины, "Труды Киевского строительного института", вып. 3, 1936.
5. Галеркин Б. Г., Упругие тонкие плиты, собр. соч., т. II, изд. АН СССР, 1953.
6. Ильяшин А. А., Устойчивость пластин и оболочек за пределами упругости, "Прикладная математика и механика", вып. 5, 1944 и вып. 5—6, 1946; Пластичность, Техтеоретиздат, 1948.
7. Канторович З. Б., Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1952.
8. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, собр. трудов, т. I, изд. АН СССР, 1951.

9. Лехницкий С. Г., Анизотропные пластинки, Техтеоретиздат, 1947.
10. Мартюшев Л. В., Изгиб круглой плиты, ОНТИ, 1935.
11. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч. 2-я, Судпромгиз, 1941.
12. Переходцева А. М., Расчет на изгиб круглых кольцевых пластин, "Труды ЦАГИ", вып. 403, 1939.
13. Слепов Б. И., Устойчивость прямоугольных пластин, "Труды ЦНИИ имени Крылова" № 13, 1946.
14. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, Техтеоретиздат, 1948; Устойчивость упругих систем, Техтеоретиздат, 1946.
15. Феодосьев В. И., О больших прогибах и устойчивости круглых мембран, "Прикладная математика и механика", вып. 5, 1945 и вып. 2, 1946; Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.
16. Шиманский Ю. А., Изгиб пластин ОНТИ, 1934.

## ГЛАВА VI

### РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК

#### РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

##### Напряжения и перемещения в тонкостенных оболочках

Расчет тонкостенных оболочек основан на следующих допущениях:

а) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами напряжений;

б) нормаль, проведенная к срединной поверхности до деформации, остается прямой и нормальной к деформированной срединной поверхности.

Во многих случаях оказывается допустимым принять, что нормальные напряжения в нормальных сечениях оболочки распределяются равномерно по ее толщине, т. е. пренебречь изгибающими моментами, действующими в сечениях оболочки (безмоментная теория). Так, например, в зонах оболочки, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил и моментов, от мест жесткого закрепления оболочки, от ребер усиления и вообще от мест приложения упругих и жестких связей, напряжения могут быть в обычных случаях с большой точностью определены по безмоментной теории.

Изгибные напряжения носят, как правило, характер местного возмущения напряженного состояния и имеют существенно заметную величину лишь в окрестности перечисленных выше особенностей закрепления и нагрузки.

Вследствие локальности изгибных напряжений их во многих случаях можно в расчет и не принимать, несмотря на то, что они достигают иногда значительных величин; их можно, например, не учитывать, если появление пластических деформаций и местное изменение формы оболочки не снижают ее несущей способности; их безусловно следует учитывать,

если материал оболочки хрупкий или если нагрузка циклическая.

Например, в случае нагружения, показанном табл. 1, п. 4, частичная потеря упругих свойств оболочки в зоне приложения сосредоточенных сил снижает несущую способность, и здесь местные напряжения во всех случаях необходимо учитывать.

В цилиндрической оболочке (табл. 1, п. 5) появление пластических деформаций в зоне жесткого кольца не снижает несущей способности оболочки, и здесь, если материал способен пластически деформироваться, местные изгибные напряжения могут в расчет и не приниматься. В этом случае достаточно ограничиться только определением общих напряжений по безмоментной теории и установить по ним условие прочности.

То же самое можно сказать и о температурных напряжениях. Эти напряжения следует учитывать только в том случае, если материал оболочки хрупкий; если же материал обладает пластическими свойствами, учет влияния температуры производится только путем соответствующего снижения механических характеристик материала (предела текучести и прочности) без учета температурных напряжений.

Для оболочки, имеющей форму тела вращения, при симметричном нагружении меридиональное напряжение может быть найдено из условий равновесия части оболочки, отсеченной нормальным круговым сечением, а окружное напряжение — из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_x}{R_1} + \frac{\sigma_y}{R_2} = \frac{p}{h},$$


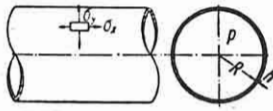
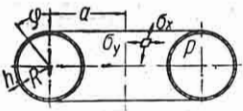
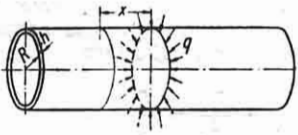
где  $p$  — внутреннее избыточное давление;  $h$  — толщина оболочки;  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны;  $\sigma_x$  — нормальное

Таблица 1

Формулы для определения напряжений и перемещений в тонкостенных оболочках [2], [4], [13]

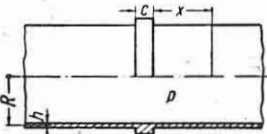
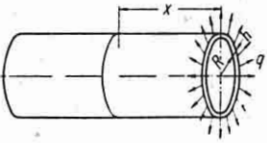
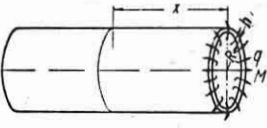
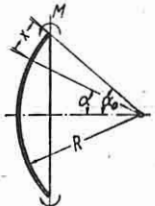
Обозначения:  $p$  — давление в  $\text{кг/см}^2$ ;  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — меридиональное и окружное напряжения;  $h$  — толщина оболочки;  $E$  — модуль упругости в  $\text{кг/см}^2$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $w$  — радиальное перемещение в см.

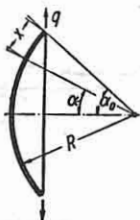
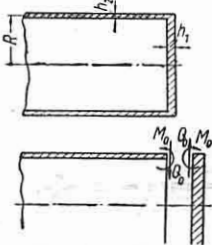
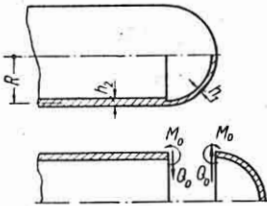
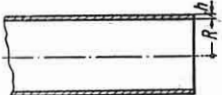
$$k = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}}; \text{ при } \mu = 0,3 \quad k = \frac{1,29}{\sqrt{Rh}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Форма оболочки и вид нагрузки	Расчетные формулы по безмоментной теории
<p>1. Сфера. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в <math>\text{кг/см}^2</math></p> 	$\sigma_x = \sigma_y = \frac{pR}{2h};$ $w = \frac{pR^2}{2Eh}(1-\mu)$
<p>2. Цилиндр. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в <math>\text{кг/см}^2</math></p> 	$\sigma_x = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_y = \frac{pR}{h} = \max \sigma;$ $w = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$
<p>3. Тор. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в <math>\text{кг/см}^2</math></p> 	$\sigma_x = \frac{pR}{2h} \cdot \frac{2a + R \sin \varphi}{a + R \sin \varphi}; \quad \sigma_y = \frac{pR}{2h};$ $\sigma_x \left( \varphi = -\frac{\pi}{2} \right) = \max \sigma = \frac{pR}{2h} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$
<p>Изгибные местные напряжения в симметричных оболочках</p>	
<p>4. Цилиндр. Равномерно распределенная по кругу нагрузка <math>q</math> в <math>\text{кг/см}</math></p> 	<p>У внутренней поверхности в произвольной точке с координатой <math>x</math></p> $\sigma_x = \frac{3q}{2kh^2} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) = \max \sigma;$ $\sigma_y = \frac{Ew}{R} + \mu \sigma_x;$ $w = -\frac{q}{8Dk^3} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx).$ <p>В точке <math>x = 0</math></p> $\sigma_x = \frac{3q}{2kh^2};$ $\sigma_y = -\frac{q}{2kh^2} [\sqrt{3(1-\mu^2)} - 3\mu];$ $\max w = -\frac{qR^2 k}{2Eh}.$
<p>Примечание. Формулы верны, если цилиндр будет достаточно длинным (<math> x_{\max}  &gt; 3\sqrt{Rh}</math>).</p>	



Продолжение табл. 1

Форма оболочки и вид нагрузки	Расчетные формулы по безмоментной теории
<p>5. Цилиндр с подкрепляющим кольцом, имеющим площадь сечения <math>F</math>. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в кг/см<sup>2</sup></p> 	<p>У внутренней поверхности при <math>x=0</math></p> $\sigma_x = \frac{3pR}{h\sqrt{3(1-\mu^2)}} \cdot \frac{1-\frac{ch}{F}}{1+\frac{2h}{Fk}} = \max \sigma; \quad \sigma_y = \frac{Ew}{R} + \mu\sigma_x;$ $w = \frac{pR^2}{EF} \cdot \frac{c + \frac{2}{k}}{1 + \frac{2h}{Fk}}. \quad \text{В кольце } \sigma = \frac{pR}{F} \cdot \frac{c + \frac{2}{k}}{1 + \frac{2h}{Fk}}.$ <p>Эти формулы применимы, если соседние подкрепляющие кольца находятся на расстоянии <math>\geq \frac{4}{k}</math>. Если кольцо очень жесткое, в формулах следует положить <math>F=\infty</math>. См. примечание к примеру 4.</p>
<p>6. Цилиндр. Равномерно распределенная по контуру радиальная нагрузка <math>q</math> в кг/см</p> 	<p>У внутренней поверхности в произвольной точке с координатой <math>x</math></p> $\sigma_x = \frac{6q}{kh^2} e^{-kx} \sin kx; \quad \sigma_y = \frac{Ew}{R} + \mu\sigma_x;$ $w = \frac{q}{2k^2D} e^{-kx} \cos kx. \quad \text{На контуре } \max w = \frac{q}{2k^2D}; \quad \sigma_y = \frac{2qkR}{h}.$ <p>Угол поворота</p> $\max w' = \frac{q}{2k^2D}.$ <p>В точке <math>x = \frac{\pi}{4k}</math>; <math>\sigma_x = \max \sigma = 1,93 \frac{q}{kh^2}</math>.</p> <p>См. примечание к примеру 4.</p>
<p>7. Цилиндр. Равномерно распределенный по контуру момент <math>M</math> в кг/см/см</p> 	<p>У внутренней поверхности в произвольной точке с координатой <math>x</math></p> $\sigma_x = \frac{6M}{h^2} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx); \quad \sigma_y = \frac{Ew}{R} + \mu\sigma_x;$ $w = \frac{M}{2k^2D} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx).$ <p>На контуре</p> $\sigma_x = \max \sigma = \frac{6M}{h^2}; \quad \sigma_y = \frac{6M}{h^2} \left[ \sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} + \mu \right];$ $\max w = \frac{M}{2k^2D}; \quad \max w' = \frac{M}{2kD}.$ <p>См. примечание к примеру 4.</p>
<p>8. Сферическая оболочка. Равномерно распределенный момент <math>M</math> в кг/см/см по контуру</p> 	<p>У внутренней поверхности в произвольной точке с координатой <math>x</math></p> $\sigma_x = \frac{2M}{h} e^{-kx} \left[ \frac{3\sqrt{2}}{h} \cos \left( kx - \frac{\pi}{4} \right) - k \operatorname{ctg} \alpha_0 \sin kx \right];$ $\sigma_y = \frac{2M}{h} e^{-kx} \left[ \mu \frac{3\sqrt{2}}{h} \cos \left( kx - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} k^2 R \sin \left( kx - \frac{\pi}{4} \right) \right].$ <p>Угол поворота на контуре</p> $\vartheta = \frac{M}{Dk}.$ <p>Радиальное перемещение</p> $w = \frac{M}{2k^2D} \sin \alpha_0$

Форма оболочки и вид нагрузки	Расчетные формулы по безмоментной теории
<p>9. Сферическая оболочка. Равномерно распределенная по контуру радиальная нагрузка <math>q</math> в кг/см</p> 	<p>У внутренней поверхности в произвольной точке с координатой <math>x</math></p> $\sigma_x = \frac{q \sin \alpha_0}{h} e^{-kx} \left[ \frac{6}{kh} \sin kx + \sqrt{2} \operatorname{ctg} \alpha_0 \cos \left( kx + \frac{\pi}{4} \right) \right];$ $\sigma_y = \frac{q \sin \alpha_0}{h} e^{-kx} \left[ \frac{6\mu}{kh} \sin kx + 2Rk \cos kx \right].$ <p>Угол поворота на контуре</p> $\vartheta = \frac{q}{2k^2 D} \sin \alpha_0.$ <p>Радиальное перемещение на контуре</p> $w = \frac{qR}{Eh} \sin \alpha_0 (2Rk \sin \alpha_0 - \mu \cos \alpha_0)$
<p>10. Цилиндр с плоским дном. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в кг/см<sup>2</sup></p> 	$M_0 = \frac{pR^2 k_2^2 D_2}{4D_1(1+\mu)} + \frac{2pR^2 k_2^2 E h_1 D_2}{E h_2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \left  E h_1 + 2R D_2 k_2^2 (1-\mu) \right };$ $2k_2 + \frac{2Rk_2^2 D_2}{D_1(1+\mu)} - \frac{k_2 E h_1}{E h_1 + 2R D_2 k_2^2 R (1-\mu)}$ $Q_0 = M_0 \left[ 2k_2 + \frac{2Rk_2^2 D_2}{D_1(1+\mu)} \right] - \frac{pR^2 k_2^2 D_2}{4D_1(1+\mu)}.$ <p>Индекс 1 соответствует днищу, а индекс 2 — цилиндру. Напряжения в цилиндре определяются при найденных <math>M_0</math> и <math>Q_0</math> суммированием напряжений из примеров 1, 6 и 7 настоящей таблицы</p> <p>Напряжения в пластине определяются также суммированием напряжений от <math>Q_0</math> и <math>M_0</math> и давления <math>p</math> (см. стр. 192)</p> <p>См. примечание к п. 4.</p>
<p>11. Цилиндр с полусферическим дном. Постоянное внутреннее давление <math>p</math> в кг/см<sup>2</sup></p> 	$M_0 = \frac{pR h_1}{4\sqrt{3}(1-\mu^2)} \cdot \frac{[c(2-\mu) - (1-\mu)](1-c^2)}{(1-c^2)^2 - 2(1+\sqrt{c^3})(1+\sqrt{c^3})};$ $Q_0 = 2M_0 k_1 \frac{\sqrt{c^3} + 1}{c^2 - 1};$ $c = \frac{h_1}{R}.$ <p><math>k_1</math> относится к дну.</p> <p>Напряжения в цилиндре определяются суммированием напряжений из примеров 2, 6 и 7 настоящей таблицы. Напряжения в сферическом днище — аналогично из примеров 1, 8 и 9 (см. [3]).</p>
<p>12. Цилиндрическая оболочка нагревается изнутри до температуры <math>t_1</math>, а снаружи — до <math>t_2</math>. Край свободен</p> 	$\sigma_y = \max \sigma = \frac{E \alpha (t_1 - t_2)}{2(1-\mu)};$ <p><math>\alpha</math> — коэффициент линейного расширения.</p>

напряжение в круговом нормальном сечении;  $\sigma_y$  — нормальное напряжение в осевом сечении.

Для оболочек вращения одна из плоскостей главных кривизн проходит через ось вращения, вторая — нормально к первой, причем в точке пересечения ее с осью лежит центр кривизны  $\frac{1}{R_2}$ .

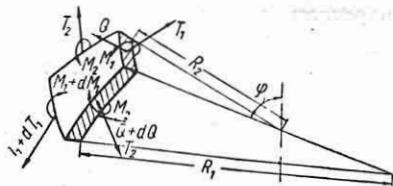
Если оболочка закреплена по одному контуру, напряжение  $\sigma_x$  определяется из условия равновесия части оболочки, отсеченной круговым сечением.  $\sigma_y$  определяется при известном  $\sigma_x$  из уравнения Лапласа.

Расчетные формулы для определения напряжений и перемещений по безмоментной теории для основных типов оболочек даются в табл. 1.

Изгибные напряжения для оболочек вращения в зоне контурных защемлений или контурных нагрузок определяются по методу Штаермана [7] \* на основании следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4\vartheta}{d\varphi^4} + 12(1 - \mu^2) \frac{R_1^4}{R_2^2 h^2} \vartheta = 0,$$

где  $R_1, R_2, h$  имеют прежние значения;  $\vartheta$  — угол поворота элемента дуги меридиана вследствие деформации оболочки;



Фиг. 1.

$\varphi$  — угол между нормалью к поверхности оболочки и осью симметрии (Фиг. 1).

Если величина

$$12(1 - \mu^2) \frac{R_1^4}{R_2^2 h^2} = 4k^4$$

постоянна или может быть с достаточной степенью точности принята постоянной,

то решение уравнения будет следующим:

$$\vartheta = e^{-kx} (A \sin kx + B \cos kx) + e^{kx} (C \sin kx + D \cos kx).$$

Если расстояние по дуге меридиана от одного контура до другого достаточно велико для того, чтобы краевые эффекты этих контуров не влияли друг на друга, можно считать, что при отсчете  $\varphi$  от первого контура произвольные постоянные  $C$  и  $D$  равны нулю. Постоянные  $A$  и  $B$  определяются в зависимости от контурных условий.

Внутренние силовые факторы в краевой зоне выражаются через функцию  $\vartheta$  следующим образом:

$$M_1 = -\frac{D}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\varphi}; \quad M_2 = \mu M_1;$$

$$Q = -\frac{D}{R_1^2} \cdot \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}; \quad T_1 = -Q \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$T_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dQ}{d\varphi}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Напряжения:

$$\sigma_x = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}; \quad \sigma_y = \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2}.$$

К этим напряжениям алгебраически должны быть добавлены соответствующие напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , полученные по безмоментной теории.

Для цилиндрической оболочки в приведенных выше уравнениях следует положить  $R_2 = \operatorname{const}$ , а  $R_1 d\varphi = dx$ , где  $x$  — расстояние от контура по образующей (см. п. 4 табл. 1).

Расчетные формулы для определения напряжений и перемещений некоторых типов симметричных оболочек приведены в табл. 1.

Расчет несимметричных оболочек изложен в работах [1], [8], [9].

### Устойчивость тонкостенных оболочек [6]

При некоторых условиях тонкостенная оболочка может потерять устойчивость. Ниже рассматриваются основные случаи нагружения оболочки, при которых происходит потеря устойчивости.

**Тонкостенная цилиндрическая оболочка, подверженная осевому равномерному сжатию** (Фиг. 2).

\* Этот метод был предложен И. Я. Штаерманом в 1924 г. [7]. Позднее этот метод был дан в работах Геккелера.

Цилиндрическая оболочка никогда не может быть идеально однородной и быть точно выполненной по форме.

Потеря устойчивости происходит при большем или меньшем давлении в зависимости от того, сколь сильно форма реальной оболочки отличается от цилиндрической. Эта зависимость в отличие от других задач является настолько резкой, что при совершенно незаметных отклонениях формы критическое давление в несколько раз отличается от того, которое получается для идеальной цилиндрической оболочки.

Верхнее значение напряжения, при котором идеальная цилиндрическая оболочка становится неустойчивой, будет

$$\sigma = 0,6 \frac{Eh}{R}.$$

В реальных условиях потеря устойчивости происходит при значительно меньшем напряжении.

Для оболочек, изготовленных обычными технологическими приемами без специальных требований к точности формы установлено экспериментально

$$\sigma_{кр} \approx 0,12 \frac{Eh}{R}. \quad (1)$$

При тщательном выполнении цилиндрической оболочки можно достичь

$$\sigma_{кр} \approx (0,16 \div 0,2) \frac{Eh}{R}.$$

Теории устойчивости оболочек со статистическим учетом погрешностей формы до настоящего времени не создано. Поэтому при проведении практических расчетов следует ориентироваться на величину критического напряжения (1), найденного экспериментально.

При достаточно большой длине  $l$  цилиндрическая оболочка может потерять устойчивость как стержень, тогда критическая сила будет определяться по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (2)$$

где  $J = \pi R^3 h$ ;  $\mu l$  — приведенная длина, зависящая от способа концевых закреплений.

При ведении практических расчетов  $P_{кр}$  следует определять по формулам (1) и (2), а затем за расчетное критическое усилие принимать меньшее из двух полученных.

*Цилиндрическая тонкостенная оболочка, находящаяся под действием внешнего равномерно распределенного давления  $p$  в кг/см<sup>2</sup> (фиг. 3).*

Для длинной трубы

$$p_{кр} = \frac{Eh^3}{4(1-\mu^2)R^3}.$$

Эта формула точна в той мере, в какой допустимо считать радиус  $R$  пренебрежимо малым по сравнению с длиной трубы  $l$ .

Если длина цилиндра соизмерима с радиусом  $R$ ,

$$p_{кр} = \frac{Eh}{R(n^2-1)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2}{\pi^2} \cdot \frac{l^2}{R^2}\right)^2} + \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3} \left[ n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + \frac{n^2}{\pi^2} \cdot \frac{l^2}{R^2}} \right]; \quad (3)$$

$n$  — целое число, которое в каждом конкретном случае при заданных  $\frac{l}{R}$

и  $\frac{R}{h}$  должно быть выбрано из условия наименьшего  $p_{кр}$ .

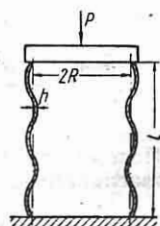
Значения  $n$  для некоторых отношений  $\frac{l}{R}$  и  $\frac{R}{h}$  даны в табл. 2.

Таблица 2

Значения  $n$

$\frac{l}{R} \backslash \frac{R}{h}$	250	200	50	25
$\infty$	2	2	2	2
10	4	3	2	2
5	5	4	3	3
2	8	6	5	4

*Тонкостенная цилиндрическая оболочка находится под совместным действием внешнего равномерно распределенного давления  $p$  и осевого сжимаю-*



Фиг. 2.



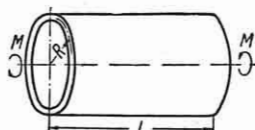
Фиг. 3.

щего напряжения  $\sigma$ . Критическое состояние определяется по формуле Муштары

$$\frac{\sigma}{\sigma_{кр}} + \frac{p}{p_{кр}} = 1,$$

где  $\sigma_{кр}$  и  $p_{кр}$  определяются по формулам (1) и (3).

*Цилиндрическая оболочка, нагруженная скручивающими моментами* (фиг. 4).



Фиг. 4.

Для длинной оболочки независимо от условий закрепления на контурах

$$M_{кр} = \frac{\pi \sqrt{2E}}{3(1-\mu^2)^{3/4}} \sqrt{Rh^5}.$$

Если величиной радиуса  $R$  нельзя пренебречь по сравнению с длиной  $l$ , критический момент будет:

а) края защемлены

$$M_{кр} = 2\pi \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{R^2 h^3}{l^2} \left[ 4,6 + \sqrt{7,8 + 1,67 \left( \frac{l^2}{2Rh} \sqrt{1-\mu^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right];$$

б) края шарнирно закреплены

$$M_{кр} = 2\pi \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{R^2 h^3}{l^2} \left[ 2,8 + \sqrt{2,6 + 1,40 \left( \frac{l^2}{2Rh} \sqrt{1-\mu^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

*Тонкостенная цилиндрическая оболочка, сжатая эксцентрично приложенной осевой нагрузкой* (фиг. 5).

Если напряжение  $\sigma$  может быть выражено в функции  $\varphi$  как

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos \varphi,$$

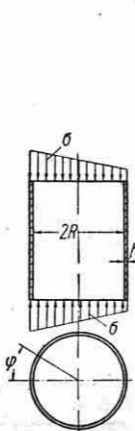
то критическое напряжение при шарнирно закрепленных краях может быть приближенно определено по формуле

$$(\sigma_0 + \sigma_1)_{кр} = 0,12 \frac{Eh}{R}.$$

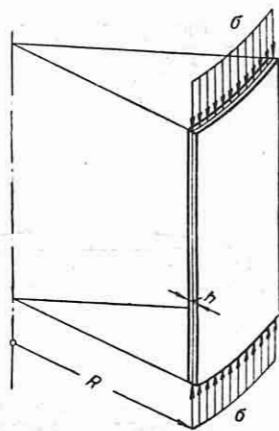
*Цилиндрическая панель, сжатая вдоль образующей равномерно распределенными усилиями* (фиг. 6).

При малом угле  $\alpha$  и шарнирно закрепленных краях

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\mu^2)(\alpha R)^2} + \frac{E \alpha^2}{4\pi^2}.$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Если ширина панели соизмерима с высотой,

$$\sigma_{кр} = 0,12 \frac{Eh}{R}.$$

*Сферическая оболочка, находящаяся под воздействием внешнего давления  $p$  в  $\text{кг/см}^2$ .*

Критическое напряжение  $\sigma = \frac{pR}{2h}$  определяется по экспериментально установленной формуле:

$$\sigma = k \frac{Eh}{R},$$

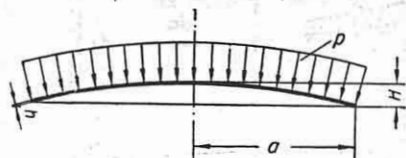
где коэффициент  $k$  в зависимости от точности изготовления сферы и условий нагружения оболочки колеблется в пределах от 0,09 до 0,16. Верхнее значение берется при высокой точности изготовления сферы и плавном ее нагружении.

Для обычных производственных условий  $k \approx 0,12 + 0,14$ .

*Сферическая панель, находящаяся под воздействием внешнего давления  $p$  в  $\kappa\Gamma/\text{см}^2$  (фиг. 7) [5]:*

$$P_{кр} = \frac{Eh^4}{a^4} \left[ k_1 \frac{H}{h} \left( k_2 \frac{H^2}{h^2} + 1 \right) + k_3 \left( k_4 \frac{H^2}{h^2} - 1 \right) \right]^{\frac{3}{2}};$$

а) при свободной опоре, допускающей смещения в плоскости опорного кольца



Фиг. 7.

(распор отсутствует) ( $\mu = 0,3$ ):  $k_1 = 1,41$ ;  $k_2 = 0,00202$ ;  $k_3 = 1,08$ ;  $k_4 = 0,250$ ;

б) при опоре, не дающей защемления и препятствующей смещению в плоскости опорного кольца:  $k_1 = 1,52$ ;  $k_2 = 0,00576$ ;  $k_3 = 0,407$ ;  $k_4 = 2,07$ ;

в) контур защемлен, но распор отсутствует:  $k_1 = 4,56$ ;  $k_2 = 0,00505$ ;  $k_3 = 5,92$ ;  $k_4 = 0,0835$ ;

г) контур защемлен и не имеет никаких перемещений:  $k_1 = 5,45$ ;  $k_2 = 0,0150$ ;  $k_3 = 3,29$ ;  $k_4 = 0,394$ .

## РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ ОБОЛОЧЕК БОЛЬШОЙ ГИБКОСТИ

### Введение

Гибкие оболочки широко применяются в качестве упругих элементов во многих машинах и приборах, где они используются как измерительные пружины, гибкие уплотнительные устройства, температурные компенсаторы, детали дистанционных передач и т. д.

Расчет на жесткость для упругих элементов имеет первостепенное значение. Вопросы прочности гибких оболочек во многих случаях еще не получили нужного завершения.

Гибкие оболочки как упругие элементы машин и приборов выполняются в виде плоских или гофрированных мембран, силфонов и трубчатых пружин.

Кривая, выражающая зависимость прогиба упругого элемента от нагрузки, называется *характеристикой* (фиг. 8). Жесткость  $k$  упругого элемента на линейном участке характеристики определяется как отношение нагрузки  $p$  к прогибу  $w$ :

$$k = \frac{p}{w}.$$

На нелинейном участке характеристики жесткость при данной нагрузке

$$k = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta w} = \frac{dp}{dw}.$$

Нагрузка, при которой возникают пластические деформации или происходит потеря устойчивости элемента, является для гибкого элемента *предельной*.

*Тяговой* или *перестановочной силой* в данном направлении называется сосредоточенная сила, приложенная к упругому элементу в заданном направлении и вызывающая в этом направлении такое же перемещение точки приложения силы, как и в случае действия на упругий элемент гидростатического давления.

Эффективная площадь равна отношению перестановочной силы к действующему давлению:

$$F_{эф} = \frac{P}{p},$$

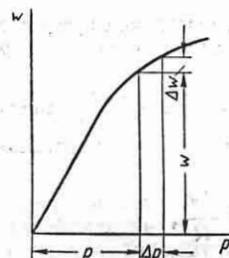
где  $P$  — перестановочная сила;  $p$  — давление;  $F_{эф}$  — эффективная площадь.

В том случае, когда эффективная площадь меняется с прогибом упругого элемента, она определяется, как

$$F_{эф} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{dP}{dp}.$$

Жесткость, эффективная площадь, предельная нагрузка являются основными параметрами, характеризующими упругий элемент.

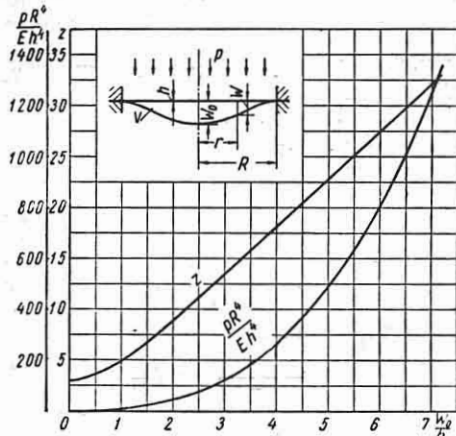
Сведения о *долговечности, гистерезисе, последствии* упругих элементов см. [5], [10].



Фиг. 8.

### Плоские мембраны

Перемещение  $w_0$  центра плоской мембраны, жестко защемленной по контуру и нагруженной гидростатическим давлением  $p$ , определяется по графику фиг. 9 ( $E$  — модуль упругости;  $R$  — рабочий радиус мембраны;  $h$  — толщина).



Фиг. 9.

Вертикальная составляющая  $w$  перемещения произвольной точки мембраны определяется, как

$$w = w_0 \frac{2(z+1)}{z-1} \times \left[ \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{z+1} - 1}{z+1} - \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1}{2} \right]. \quad (4)$$

где  $r$  — текущий радиус;  $z$  — безразмерная величина, определяемая по графику фиг. 9.

Объем  $V$  между начальной плоскостью и конечной упругой поверхностью мембраны равен

$$V = \pi R^2 w_0 \frac{z+1}{2(z+3)}. \quad (5)$$

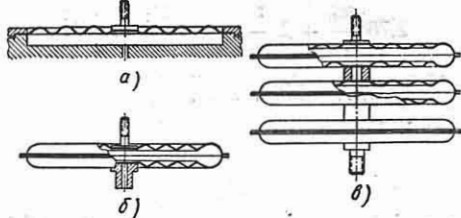
Устойчивость плоской мембраны см. [5].

Определение тягового усилия абсолютно гибкой мембраны с жестким центром см. [5].

### Гофрированные мембраны

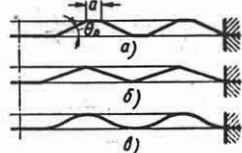
Гофрированные мембраны применяются как одиночные (фиг. 10, а), так и в виде мембранных коробок, которые

получаются соединением двух мембран по контуру (фиг. 10, б); при необходимости увеличения перемещения мембранные коробки собираются в блоки (фиг. 10, в).

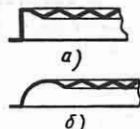


Фиг. 10.

Профилем мембраны называется образующая серединной поверхности. Основные виды профилей: трапециевидный (фиг. 11, а), пильчатый (фиг. 11, б), синусоидальный (фиг. 11, в).



Фиг. 11.

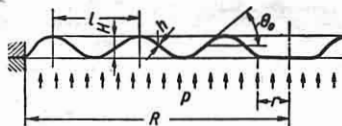


Фиг. 12.

Мембраны, из которых изготавливаются мембранные коробки, имеют *краевой гофр*, который бывает цилиндрическим (фиг. 12, а) или торондальным (фиг. 12, б).

Мембраны могут иметь линейную, затухающую  $\left(\frac{dw}{dp} \text{ уменьшается}\right)$  или возрастающую  $\left(\frac{dw}{dp} \text{ увеличивается}\right)$  характеристику. Вид характеристики зависит от профиля мембраны.

Основные параметры мембраны (фиг. 13):  $R$  — рабочий радиус мембраны;  $r$  — радиус плоского центра.



Фиг. 13.

К плоскому центру обычно прикрепляется жесткий центр;  $H$  — глубина гофрировки;  $\theta_0$  — максимальный угол наклона гофрировки;  $n$  — число волн;  $l$  — длина волны гофрировки;  $h$  — толщина материала.

Расчет на жесткость мембраны без краевого гофра, жестко защемленной по контуру и находящейся под действием гидростатического давления  $p$ , производится по формуле

$$2,76 \frac{w_0^3}{h^3} + \zeta \frac{w_0^2}{h^2} + \eta \frac{w_0}{h} = \frac{pR^4}{Eh^4} \quad (6)$$

где  $w_0$  — перемещение центра мембраны;  $E$  — модуль упругости первого рода;  $\zeta$  и  $\eta$  — коэффициенты (см. табл. 3), зависящие от геометрии мембраны.

Здесь  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Коэффициенты  $n_1$  и  $n_2$  (см. табл. 4) для мембран синусоидального и пильчатого

профилей зависят от числа волн  $n$ , для мембран трапециoidalного профиля — от числа волн  $n$  и от ширины плоского участка  $a$  (фиг. 11, а).

Пределы применимости формулы (6) ограничены для трапециoidalного профиля углом наклона  $\theta_0 < 15^\circ$ , для пильчатого профиля — углом наклона  $\theta_0 < 40^\circ$ , для синусоидального профиля — глубиной гофрировки  $H < \frac{l}{8}$  ( $l$  — длина волны, см. фиг. 13).

Формула (6) не применима при прогибах  $w_0 > (2 \div 2,5) h$ , где  $h$  — толщина материала.

Выражения коэффициентов  $\zeta$  и  $\eta$ 

Таблица 3

Профиль	$\zeta$	$\eta$
Синусоидальный	$n_1 \frac{H}{h}$	$\frac{16}{3(1-\mu^2)} + n_2 \frac{H^2}{h^2}$
Пильчатый	$n_1 \frac{R}{h} \sin \theta_0$	$\frac{16 \cos^3 \theta_0}{3(1-\mu^2)} + n_2 \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos \theta_0}$
Трапециoidalный	$n_1 \frac{R}{h} \theta_0$	$\frac{16}{3(1-\mu^2)} + n_2 \frac{R^2}{h^2} \theta_0^2$

Примечания: 1. В случае изменения направления действия давления на противоположное (см. фиг. 13) знак коэффициента  $\zeta$  следует изменить на обратный.  
2. Формулы выведены для мембраны без плоского центра с целым числом волн.

Значения  $n_1$  и  $n_2$ 

Таблица 4

Профиль	Коэффициент	Число волн $n$				
		2	3	4	5	
Синусоидальный	$n_1$	1,22	0,550	0,309	0,197	
	$n_2$	2,28	2,09	2,04	2,02	
Пильчатый	$n_1$	0,252	0,0755	0,0318	0,0162	
	$n_2$	0,0945	0,0386	0,0212	0,0135	
Трапециoidalный	$\frac{a}{l} = \frac{1}{6}$	$n_1$	0,215	0,0643	0,0271	0,0138
		$n_2$	0,0766	0,0296	0,0161	0,0101
	$\frac{a}{l} = \frac{1}{4}$	$n_1$	0,174	0,0519	0,0218	0,0112
		$n_2$	0,0528	0,0202	0,0109	0,00685
	$\frac{a}{l} = \frac{1}{3}$	$n_1$	0,122	0,0363	0,0153	0,00782
		$n_2$	0,0274	0,0105	0,00565	0,00355



Таблица 5

Выражения коэффициентов  $k_1, k_2, k_2'$ 

Профиль	$k_1$	$k_2$	$k_2'$
Трапециoidalный	$\frac{H^2}{h^2} \left[ \frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos \theta_0} + \frac{6a}{l} \right] + \left( 1 - \frac{2a}{l} \right) \cos \theta_0 + \frac{2a}{l}$	$\frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos \theta_0} + \frac{2a}{l}$	$\frac{H^2}{h^2} \left[ \frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos \theta_0} + \frac{5a}{l} \right] + \frac{1 - \frac{2a}{l}}{\cos^3 \theta_0} + \frac{2a}{l}$
Пильчатый	$\frac{H^2}{h^2 \cos \theta_0} + \cos \theta_0$	$\frac{1}{\cos \theta_0}$	$\frac{H^2}{h^2 \cos \theta_0} + \frac{1}{\cos^3 \theta_0}$
Синусоидальный (пологий: $\theta < 15^\circ$ )	$\frac{3}{2} \cdot \frac{H^2}{h^2} + 1$	1	$\frac{3}{2} \cdot \frac{H^2}{h^2} + 1$

Уточненный расчет на жесткость мембран периодического профиля без краевого гофра и плоского центра с числом волн  $n \geq 3$  может быть произведен по формуле [11]:

$$P = \frac{Eh}{R^4} \left\{ \frac{32k_2}{k^2 - 9} \left[ \frac{1}{6} - \frac{3 - \mu}{(k - \mu)(k + 3)} \right] w_0^3 + \frac{4(k_2 k_2' + 3)h^2}{3k_2 \left( 1 - \frac{\mu^2}{k_2 k_2'} \right)} w_0 \right\}. \quad (7)$$

Здесь  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ ; коэффициенты  $k_1, k_2, k_2'$  зависят от формы профиля и даются в табл. 5.

Формула (7) может быть применена при прогибах  $w_0 < (20 + 30)h$ . Формула (7) не учитывает несимметрии характеристики при изменении знака давления (изменения характеристики при изменении знака давления).

Расчет мембран синусоидального профиля с плоским центром см. [5].

Расчет сферических мембран см. [5].

Расчет мембран специального профиля линейных по давлению см. [12], [14].

Потеря устойчивости мембран см. [5].

### Сильфоны

Сильфон представляет собой тонкостенную трубку с кольцевыми гофрами (фиг. 14). Под действием гидростатического давления или осевой силы силь-

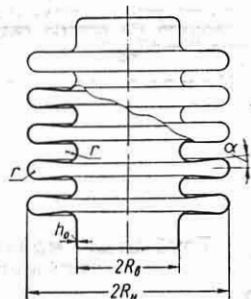
фон укорачивается или удлиняется. В пределах упругих деформаций характеристика сильфона мало отличается от линейной.

Основные параметры силь-

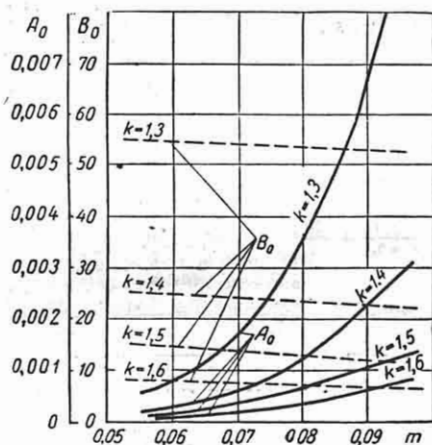
фона (фиг. 14):  $R_n$  и  $R_a$  — наружный и внутренний радиусы сильфона, измененные по средней линии контура;  $r$  — радиус закругления гофра (по средней линии контура);  $h_0$  — толщина стенки на внутреннем диаметре (принимается равной толщине трубки-заготовки при гидравлическом выдавливании);  $\alpha$  — угол уплотнения;  $n$  — число рабочих гофр.

Расчет на жесткость сильфона, изготовленного гидравлическим способом, производится по формуле

$$\lambda = P \frac{1 - \mu^2}{Eh_0} \cdot \frac{n}{A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0} \frac{h_0^2}{R_a^2}. \quad (8)$$



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Здесь  $\lambda$  — осевое перемещение дна сильфона;  $P$  — осевая сила;  $E$  — модуль упругости первого рода;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $A_0, A_1, A_2, B_0$  — коэффициенты, зависящие от отношений  $\frac{R_H}{R_B} = k$  и  $\frac{r}{R_B} = m$  (см. графики фиг. 15).

Эффективная площадь сильфона определяется выражением

$$F_{эф} = \frac{\pi}{4} (R_H + R_B)^2.$$

Примечание. При определении прогиба сильфона, находящегося под действием давления  $p$ , в формуле (8) осевую силу  $P$  нужно заменить через  $P = pF_{эф}$ .

Изменение объема сильфона находится по формуле

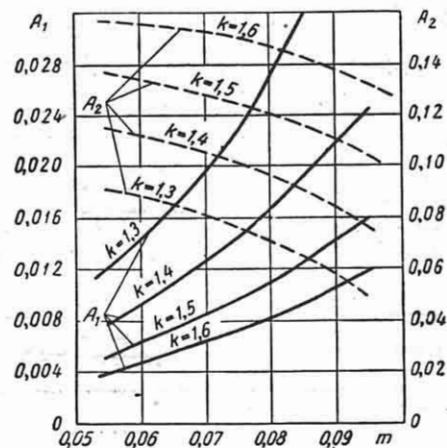
$$\Delta V = F_{эф} \lambda.$$

Напряжения в сильфоне см. [5].

### Трубчатые манометрические пружины

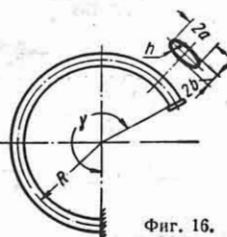
Основная разновидность трубчатых пружин — пружина Бурдона, которая представляет собой изогнутую по дуге окружности полу трубку с вытянутым поперечным сечением. Под действием давления конец трубки перемещается. Характеристика трубки Бурдона линейна в пределах упругих деформаций.

Основные размеры трубки Бурдона (фиг. 16):  $R$  — радиус кривизны центральной оси трубки (центральной осью

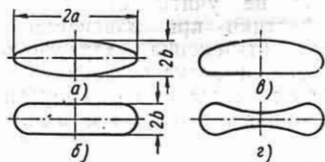


называется геометрическое место центров тяжести поперечных сечений);  $\gamma$  — центральный угол трубки;  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси сечения, измеренные по среднему контуру сечения;  $h$  — толщина стенки.

Формы сечений трубок Бурдона показаны на фиг. 17. Из них наиболее употребительные эллиптическая (фиг. 17, а) и плоско-овальная (фиг. 17, б).



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Расчет на жесткость для тонкостенных и толстостенных трубок различен. Трубка называется *тонкостенной*, если  $\frac{h}{b} < 0,6 \div 0,7$ , *толстостенной*, если  $\frac{h}{b} > 0,6 \div 0,7$ .

Для *тонкостенных* трубок относительное изменение центрального угла трубки Бурдона, находящейся под дей-

ствием внутреннего давления, определяется по формуле

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = p \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{R^2}{bh} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\alpha}{\beta + \chi^2}.$$

Здесь  $E$  — модуль упругости первого рода;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\chi$  — главный параметр трубки;

$$\chi = \frac{Rh}{a^2}; \quad (9)$$

$\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты, данные в табл. 6 в зависимости от формы поперечного сечения и отношения полуосей  $\frac{a}{b}$ .

Для толстостенных трубок плоско-овального сечения относительное изменение угла равно

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = p \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{R^2}{bh} \cdot \frac{1-\chi}{\frac{h^2}{12b^2} + \chi}.$$

Коэффициент  $\chi$  определяется, как

$$\chi = \frac{1}{ca} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 ca + \sin^2 ca}{\operatorname{ch} ca \operatorname{sh} ca + \cos ca \sin ca}.$$

Величина  $ca = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\chi}}$ , где согласно формуле (9)  $\chi = \frac{Rh}{a^2}$ .

Коэффициент  $\chi$  можно определять непосредственно из графика фиг. 18.

Перемещение конца трубки по направлению касательной к оси трубки

$$w_t = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} R (\gamma - \sin \gamma).$$

Перемещение по радиусу трубки

$$w_r = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} R (1 - \cos \gamma).$$

Полное перемещение определится, как

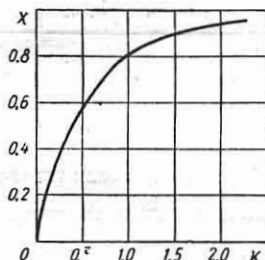
$$w = \sqrt{w_t^2 + w_r^2}.$$

При  $\gamma = 270^\circ$  полное перемещение

$$w = 5,8R \frac{\Delta\gamma}{\gamma}.$$

Определение тяговой силы.

Для тонкостенных трубок  $\left(\frac{h}{b} < 0,6 \div \div 0,7\right)$  составляющая тяговой силы в



Фиг. 18.

направлении касательной к оси трубки

$$P_t = pab \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{48S}{\xi + \chi^2} \times \times \frac{\gamma - \sin \gamma}{3\gamma - 4 \sin \gamma + \sin \gamma \cos \gamma},$$

в радиальном направлении

$$P_r = pab \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \times \times \frac{48S}{\xi + \chi^2} \cdot \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}.$$

Таблица 6

Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$

Форма сечения	$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10
		Эллиптическая	$\alpha$	0,750	0,636	0,566	0,493	0,452	0,430	0,416
$\beta$	0,083		0,062	0,053	0,045	0,044	0,043	0,042	0,042	0,042
Плоско-овальная	$\alpha$	0,637	0,594	0,548	0,480	0,437	0,408	0,388	0,360	0,343
	$\beta$	0,096	0,110	0,115	0,121	0,121	0,121	0,121	0,119	0,118

Значения коэффициентов  $S$ ,  $\xi$  и  $n$ 

Форма сечения	$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	5	6	8	10
Эллиптическая	$S$	0,0982	0,0775	0,0662	0,0565	0,0515	0,0480	0,0465	0,0455	0,0445
	$\xi$	0,833	0,662	0,584	0,499	0,459	0,439	0,429	0,416	0,404
	$n$	0,197	0,149	0,142	0,121	0,111	0,106	0,102	0,098	0,095
Плоско-овальная	$S$	0,0833	0,0848	0,0815	0,0743	0,0690	0,0652	0,0624	0,0585	0,0560
	$\xi$	0,811	0,713	0,652	0,591	0,552	0,524	0,504	0,476	0,459
	$n$	0,149	0,151	0,144	0,131	0,122	0,115	0,110	0,105	0,101

Коэффициенты  $S$ ,  $\xi$  даны в табл. 7.

Для толстостенных трубок  $\left(\frac{h}{b} > 0,6 + 0,7\right)$  составляющая тяговой силы в направлении касательной к оси трубки

$$P_t = 8pab(1 - \gamma) \times \frac{\gamma - \sin \gamma}{3\gamma - 4 \sin \gamma + \sin \gamma \cos \gamma},$$

в радиальном направлении

$$P_r = 8pab(1 - \gamma) \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma - \sin \gamma \cos \gamma}.$$

Коэффициент  $\gamma$  дан на графике (фиг. 18).

Изменение объема внутренней полости тонкостенной трубки в зависимости от давления определяется, как

$$\Delta V = 12p \frac{1 - \mu^2}{E} \times \frac{R^3}{h} a \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{n}{\beta + x^2}, \quad (10)$$

Значения коэффициента  $n$  даны в табл. 7.

Расчет спиральной и винтовой трубчатых пружин см. [5], [2].

Напряжения в трубке Бурдона см. [5].

**Пример 1.** Определить изменение давления, подерживаемого сильфоном регулятором (фиг. 19), при перемещении клапана из одного крайнего положения в другое. Полный ход клапана  $\lambda = 8$  мм. Размеры сильфона (см. фиг. 14):  $2R_H = 80$  мм;

$2R_B = 50$  мм;  $r = 2,5$  мм;  $h_0 = 0,2$  мм;  $n = 9$ ;  $\alpha = 4^\circ 46'$ . Размеры винтовой цилиндрической пружины, работающей совместно с сильфоном, следующие: средний диаметр пружины  $D = 40$  мм; диаметр проволоки  $d = 5$  мм; число рабочих витков  $i = 8$ . Материал сильфона — полутомпак;  $E = 1 \cdot 10^4$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\mu = 0,3$ ; материал пружины — пружинная сталь;  $G = 7,86 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Перемещению клапана  $\lambda$  соответствует изменение давления на сильфоне [см. примечание к формуле (8)]

$$\Delta p = \frac{k\lambda}{F_{эф}}$$

Здесь  $F_{эф}$  — эффективная площадь сильфона:

$$F_{эф} = \frac{\pi}{4} (R_H + R_B)^2 = \frac{\pi}{4} (40 + 2,5)^2 = 33,2 \text{ см}^2;$$

$k$  — суммарная жесткость сильфона и пружины:

$$k = k_c + k_n.$$

Жесткость сильфона  $k_c$  согласно формуле (8) равна

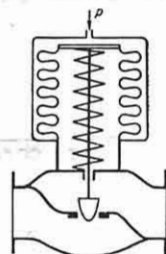
$$k_c = \frac{Eh_0}{(1 - \mu^2)n} \left( A - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0 \frac{h_0^2}{R_B^2} \right).$$

По графикам фиг. 15 при  $k = \frac{R_H}{R_B} = \frac{40}{2,5} = 1,6$

и  $m = \frac{r}{R_B} = \frac{2,5}{25} = 0,1$  определяем коэффициенты

$A_0 = 9 \cdot 10^{-4}$ ;  $B_0 = 7$ ;  $A_1 = 130 \cdot 10^{-4}$ ;  $A_2 = 1300 \times 10^{-4}$ ; угол уплотнения  $\alpha = 4^\circ 46' = 0,0834$  рад, тогда

$$k_c = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 0,2}{(1 - 0,3^2)9} \left[ 9 \cdot 10^{-4} - 0,0834 \cdot 130 \cdot 10^{-4} + (0,0834)^2 \cdot 1300 \cdot 10^{-4} + 7 \frac{(0,2)^2}{(25)^2} \right] = 7,286 \text{ кг/мм}.$$



Фиг. 19.

Жесткость пружины  $k_n$  определяется, как

$$k_n = \frac{Gd^4}{8D^3l} = \frac{7,86 \cdot 10^8 \cdot 5^4}{8 \cdot 40^3 \cdot 8} = 1,20 \text{ кг/мм.}$$

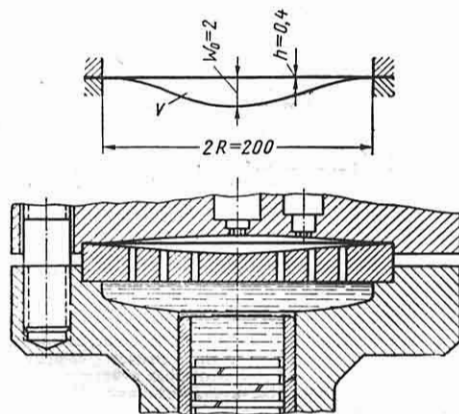
Суммарная жесткость

$$k = k_c + k_n = 0,286 + 1,20 = 1,49 \text{ кг/мм.}$$

Следовательно, изменение давления  $\Delta p$ , соответствующее полному ходу клапана, определяется, как

$$\Delta p = \frac{1,49 \cdot 8}{33,2} = 0,36 \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 2.** По заданному рабочему ходу  $w_0 = 2$  мм центра мембраны мембранного компрессора (фиг. 20) определить: 1) необходимый перепад давлений; 2) форму упругой поверхности мембраны



Фиг. 20.

в крайнем положении; 3) объем, вытесняемый мембраной при ее перемещении из нейтрального положения в крайнее.

Материал мембраны — сталь;  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** По графику фиг. 9 определяем по  $\frac{w_0}{h} = \frac{2}{0,4} = 5$  величины  $\frac{pR^4}{Eh^4} = 490$  и  $z = 23$ ; отсюда перепад давлений

$$p = \frac{490 \cdot Eh^4}{R^4} = \frac{490 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot (0,04)^4}{(10)^4} = 0,263 \text{ кг/см}^2.$$

Подставляя  $z$  в формулу (4), получаем уравнение упругой поверхности мембраны при  $w = 2$  мм:

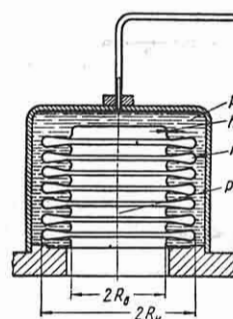
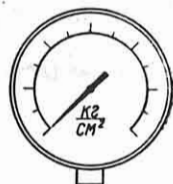
$$w = w_0 \frac{2(23+1)}{23-1} \left[ \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{23+1} - 1}{23+1} - \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1}{2} \right] = w_0 \left[ 1 - \frac{12}{11} \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{11} \left(\frac{r}{R}\right)^{24} \right].$$

Объем  $V$  определяем по формуле (5):

$$V = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,2 \frac{23+1}{2(23+3)} = 28 \text{ см}^3.$$

**Пример 3.** Определить ошибку измерения манометра с пружиной Бурдона, если измеряемое давление  $p$  среды передается маслу, заполняющему пружину Бурдона, через разделительный сифон (фиг. 21). Размеры сифона и пружины Бурдона известны.

Размеры пружины Бурдона (см. фиг. 16):  $R = 40$  мм;  $a = 10$  мм;  $b = 2$  мм;  $h = 0,4$  мм;  $\gamma = 270^\circ$ ; сечение — плоско-овальное.



Фиг. 21.

Размеры сифона (см. фиг. 14):  $2R_n = 38$  мм;  $2R_b = 26$  мм;  $r = 0,85$  мм;  $h_0 = 0,15$  мм;  $\alpha = 3^\circ 50'$ ;  $n = 11$ .

Материал сифона и пружины Бурдона — бериллиевая бронза;  $E = 1,35 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $\mu = 0,3$ .

**Решение.** Ошибка измерения

$$\delta = \frac{p - p_1}{p} \cdot 100\%,$$

где  $p$  — давление среды;  $p_1$  — давление масла.

Так как жидкость несжимаема, то

$$\Delta V_{\text{сифон}} = \Delta V_{\text{п.р. Б.}}$$

Изменение объема сифона

$$\Delta V_{\text{сифон}} = \lambda F_{\text{эф.}}$$

Ход сифона  $\lambda$  под действием разности давлений  $p - p_1$  равен

$$\lambda = \frac{(p - p_1) F_{\text{эф.}}}{k_c}$$

где жесткость сифона  $k_c$  согласно формуле (8) определяется, как

$$k_c = \frac{Eh_0}{(1 - \mu^2)n} \left( A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0 \frac{h_0^3}{R_b^3} \right).$$

Побезразмерным параметрам  $k = \frac{R_n}{R_b} = \frac{19}{13} = 1,46$

и  $m = \frac{r}{R_b} = \frac{0,85}{13} = 0,0654$  находим коэффициенты

(фиг. 15)  $A_0 = 3,5 \cdot 10^{-4}$ ;  $B_0 = 17$ ;  $A_1 = 90 \cdot 10^{-4}$ ;  
 $A_2 = 1250 \cdot 10^{-4}$ ; тогда

$$k_c = \frac{1,35 \cdot 10^4 \cdot 0,15}{(1 - 0,3^2) \pi} \left[ 10^{-4} (3,5 - 0,0669 \cdot 90 + \right. \\ \left. + 0,0669 \cdot 1250) + 17 \left( \frac{0,15}{1,3} \right)^2 \right] = 0,520 \text{ кг/мм.}$$

Эффективная площадь

$$F_{эф} = \frac{\pi}{4} (R_H + R_B)^2 = \frac{\pi}{4} (19 + 13)^2 = 804 \text{ мм}^2,$$

тогда

$$\Delta V_{сильф} = (p - p_1) \frac{F_{эф}^2}{k_c} = \\ = (p - p_1) \frac{(804)^2}{0,520} = 1,25 \cdot 10^6 (p - p_1) \text{ [мм}^3\text{]},$$

если  $(p - p_1)$  [кг/мм<sup>2</sup>].

Изменение объема пружины Бурдона подсчитывается по формуле (10), так как пружина тонкостенная  $\left( \frac{h}{b} = \frac{0,4}{2} = 0,2 < 0,6 \right)$ .

По отношению полуосей сечения  $\frac{a}{b} = \frac{10}{2} = 5$  находим по табл. 7  $n = 0,115$ ;  $\beta = 0,121$ , тогда

$$\Delta V_{пр. Б} = 12 p_1 \frac{1 - 0,3^2}{1,35 \cdot 10^4} \cdot \frac{40^3}{0,4} 10 \frac{3\pi}{2} \times \\ \times \left( 1 - \frac{1}{25} \right)^2 \frac{0,115}{0,121 + \frac{40^2 \cdot 0,4^2}{10^4}} = 4400 p_1 \text{ [мм}^3\text{]},$$

если  $p_1$  [кг/мм<sup>2</sup>].

Приравняв  $\Delta V_{сильф} = \Delta V_{пр. Б}$  получим  $1,25 \cdot 10^6 (p - p_1) = 4400 p_1$ , отсюда давление масла

$$p_1 = \frac{p}{1 + \frac{4400}{1,25 \cdot 10^6}} = \frac{p}{1 + 0,00352}.$$

Ошибка измерения

$$\delta = \frac{p - p_1}{p} 100\%_0 = \\ = \left( 1 - \frac{1}{1 + 0,00352} \right) 100\% \approx 0,35\%_0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Власов В. З., Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1949.
2. Пономарев С. Д. и др., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, Машгиз, 1950.
3. Канторович З. Б., Основы расчета химических машин и аппаратов, Машгиз, 1946.
4. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948.
5. Феодосьев В. И., Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, 1949.
6. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1946.
7. Штаерман И. Я., «Известия Киевского политехнического института», 1924.
8. Лурье А. И., Статика тонкостенных упругих оболочек, Гостехиздат, 1947.

9. Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1951.
10. Панов Д. Ю., Упругий гистерезис и последствие и учет их при исследовании упругих элементов приборов, «Труды ВВИА», вып. 218, 1945.
11. Андреева Л. Е., Расчет гофрированных мембран как анизотропных пластинок, Инженерный сборник Института механики АН СССР, т. XXI, вып. 1, 1955.
12. Андреева Л. Е., Расчет мембран, имеющих линейную характеристику по давлению, сб. «Расчеты упругих элементов машин и приборов» под ред. С. Д. Пономарева, Машгиз, 1952.
13. Roark, Formulas for stress and strain, 1943.
14. Pfeiffer, A., The Review of scientific Instruments, v. 18, № 19, sept. 1947.

## ГЛАВА VII

### РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

#### ТОЛСТОСТЕННЫЙ ЦИЛИНДР ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО И НАРУЖНОГО ДАВЛЕНИЯ

На фиг. 1 изображено поперечное сечение толстостенного полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления  $p_1$  и наружного давления  $p_2$ . Внутренний и наружный радиусы цилиндра обозначены соответственно  $r_1$  и  $r_2$ .

Если давления равномерно распределены по длине, то в произвольной точке сечения на расстоянии  $r$  от оси имеет место напряженное состояние, компоненты которого показаны на фиг. 2. Главные нормальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  определяются по формулам Ляме

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \quad (1)$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}. \quad (2)$$

Напряжение в осевом направлении  $\sigma_z$  зависит от величины продольной силы  $N$ , растягивающей или сжимающей цилиндр; это напряжение постоянно по площади поперечного сечения и равно

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (3)$$

При наличии дна осевая сила  $N$  возникает за счет действия давлений на торцевые поверхности; в этом случае напряжение в осевом направлении определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4)$$

Величина радиального перемещения произвольной точки цилиндра по на-

правлению от центра может быть вычислена по формуле

$$w = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{1 - \mu}{E} r + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\mu N r}{E \pi (r_2^2 - r_1^2)}. \quad (5)$$

где  $E$  и  $\mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра.

Если напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_z$  уже вычислены, то для определения радиального перемещения можно использовать более простую формулу:

$$w = \frac{r}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r - \mu \sigma_z). \quad (6)$$

Все приведенные выше формулы сохраняют свою силу также и в том случае, когда давления  $p_1$  и  $p_2$  распределены по длине цилиндра по линейному закону или слабо изменяются по произвольному закону.

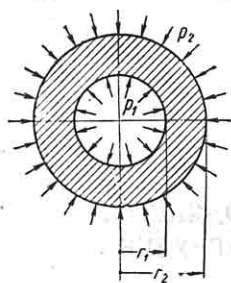
В случае действия одного только внутреннего давления  $p_1 = p$  (при произвольном осевом напряжении) формулы для напряжений и радиального перемещения упрощаются и принимают вид

$$\sigma_r = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (7)$$

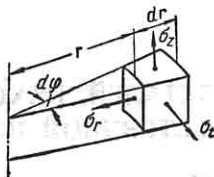
$$\sigma_t = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \quad (8)$$

$$w = \frac{p r_1^2}{E (r_2^2 - r_1^2)} \times \left[ (1 - \mu) r + (1 + \mu) \frac{1}{r} \right] - \frac{\mu \sigma_z r}{E}. \quad (9)$$

Эпюры распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  по поперечному сечению при действии внутреннего давления представлены на фиг. 3.

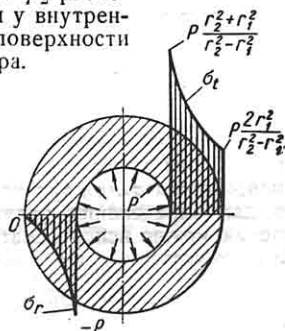


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Наиболее напряженные точки полого цилиндра при любых значениях давлений  $p_1$  и  $p_2$  расположены у внутренней поверхности цилиндра.



Фиг. 3.

В соответствии с энергетической теорией прочности, условие наступления пластических деформаций в этих точках имеет следующий вид:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]} = \sigma_T, \quad (10)$$

где  $\sigma_r = -p_1$  — радиальное напряжение во внутренних точках;

$$\sigma_t = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2) - 2p_2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \text{ — окружное}$$

напряжение в тех же точках;  $\sigma_z = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$  — осевое напряжение;

$\sigma_T$  — предел текучести материала.

Если на трубу, не имеющую днищ, действует только одно внутреннее давле-

ние  $p_1 = p$ , ( $p_2 = 0$ ), то условие возникновения пластических деформаций записывается следующим образом:

$$\frac{\sqrt{3r_2^4 + r_1^4}}{r_2^2 - r_1^2} p = \sigma_T. \quad (11)$$

При наличии дополнительной продольной силы  $N = \pi r_1^2$ , возникающей при наличии днищ, формула (11) принимает вид

$$\frac{\sqrt{3} r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p = \sigma_T. \quad (11a)$$

Формула (11) показывает, что при сколь угодно большой толщине стенки, т. е. при неограниченно большом радиусе  $r_2$ , пластические деформации будут иметь место, если  $p > \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ .

В трубопроводах с конечной толщиной стенки возникновение пластической деформации начнется при давлении заведомо меньшем, чем  $\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ . Следова-

тельно, при высоком внутреннем давлении, превышающем указанную величину, в трубопроводах всегда будут возникать пластические деформации.

Такие трубопроводы надлежит рассчитывать по предельной нагрузке (см. стр. 279—280).

### РАСЧЕТ ПРЕССОВЫХ ПОСАДОК ПРИ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЕ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ [4] \*

При соединении цилиндрических деталей посредством горячей или прессовой посадки на поверхности прилегания возникает контактное давление  $p_k$ , величина которого зависит от натяга  $\delta$ . Натягом называется разность диаметров посадочной поверхности для охватывающей и охватываемой деталей. Если длина сопрягаемых деталей одинакова, то контактное давление распределяется равно-

\* Впервые эта задача была решена А. В. Гадолным в 1861 г.



мерно; величина его в этом случае равна

$$p_k = \frac{\frac{\delta}{d_k}}{\frac{1}{E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)} \quad (12)$$

Величина крутящего момента, при котором начинается взаимное проворачивание деталей, определяется по формуле

$$M = \frac{p_k \pi d_k^2 l f}{2}$$

При большом натяге предел пропорциональности в одной из сопрягаемых деталей или в обеих деталях может быть превзойден, тогда величина контактного давления будет меньше, чем подсчитанная по формуле (12). В этом случае расчет соединения может быть произведен методами теории пластичности (см гл. IX).

Здесь  $d_k$  — диаметр посадочной поверхности;  $k_1 = \frac{d_1}{d_k}$ ,  $k_2 = \frac{d_k}{d_2}$  — коэффициенты толстостенности для внутреннего и наружного цилиндров (фиг. 4);  $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — коэффициенты Пуассона для внутреннего и наружного цилиндров.

При одинаковом материале сопрягаемых цилиндров:

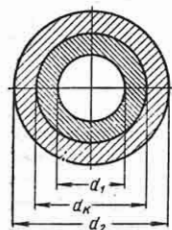
$$p_k = \frac{E \frac{\delta}{d_k}}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}} \quad (12a)$$

Если же внутренняя деталь представляет собой сплошной цилиндр ( $k_1 = 0$ ), то

$$p_k = \frac{E \delta (1 - k_2^2)}{2 d_k} \quad (12б)$$

Приведенные формулы справедливы только в пределах упругих деформаций.

Следует иметь в виду, что величина натяга, определенная по замерам деталей до запрессовки, всегда несколько больше, чем величина действительного натяга. Это объясняется тем, что на поверхности деталей после обработки остаются неровности (гребешки), которые



Фиг. 4.

обминаются при запрессовке. При шлифованных деталях разница между действительным и измеренным натягом составляет приблизительно 10—20 мк.

Усилие запрессовки можно найти по формуле

$$P = p_k \pi d_k l f,$$

где  $l$  — длина поверхности запрессовки;  $f$  — коэффициент трения.

### ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ [5]

Введем обозначение

$$\frac{1}{r^2} = x, \quad (13)$$

тогда формулы (1) и (2) для напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  можно записать в следующем виде:

$$\sigma_r = B - Ax; \quad (14)$$

$$\sigma_t = B + Ax, \quad (15)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные величины:

$$A = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$B = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Формулы (14) и (15) представляют собой уравнения прямых, отличающихся друг от друга только знаком углового коэффициента. Если взять системы координат  $x_{\sigma_t}$  и  $x_{\sigma_r}$  и расположить их таким образом, чтобы начало координат и оси ординат были совмещены, а оси абсцисс направлены в противоположные стороны, то прямые (14) и (15), построенные на этих осях координат, будут продолжением одна другой.

Поскольку область отрицательных значений переменной  $x$  не имеет физического смысла, то участок прямой,

расположенный левее начала координат, будет относиться только к напряжению  $\sigma_r$ , а участок, расположенный правее — к напряжению  $\sigma_t$ .

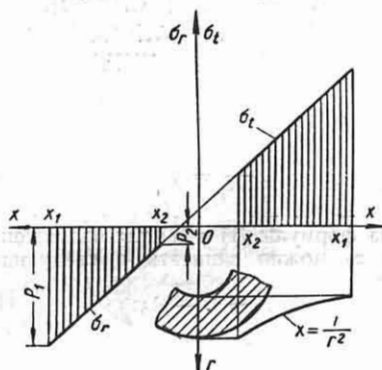
Допустим, что нам заданы значения давлений  $p_1$  и  $p_2$  и радиусов  $r_1$  и  $r_2$  и требуется определить величину напряжений. Для этого отложим вправо и влево от начала координат отрезки

$$Ox_1 = \frac{1}{r_1} \text{ и } Ox_2 = \frac{1}{r_2} \text{ (фиг. 5).}$$

В силу граничных условий радиальные напряжения для внутренних и наружных точек соответственно равны давлениям:

$$\sigma_{r_1} = -p_1 \text{ и } \sigma_{r_2} = -p_2.$$

Отложив от точек  $x_1$  и  $x_2$  в координатной системе  $x\sigma_r$  по вертикали эти давления и соединив полученные точки

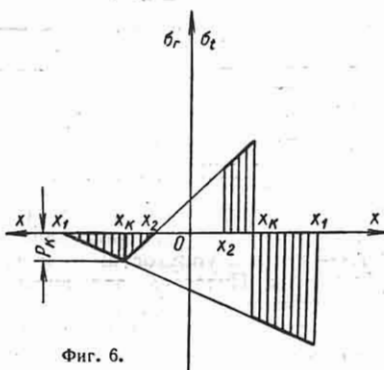


Фиг. 5.

прямой линией, получим эпюру напряжения  $\sigma_r$ . Для получения эпюры напряжения  $\sigma_t$  достаточно продолжить полученную прямую в область, расположенную правее начала координат. Следует заметить, что построенные эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  определяют изменения этих напряжений по переменной  $x$ , а не по радиусу, поэтому точки графика, расположенные ближе к началу координат, соответствуют наружным точкам цилиндра, а точки, удаленные от начала координат, — внутренним точкам цилиндра.

Для выяснения характера изменения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  по радиусу целесообразно построить дополнительно зависимость  $\frac{1}{r^2} = x$ , как это сделано на фиг. 5. Это облегчит использование графически полученного решения.

В качестве второго примера на фиг. 6 приведено построение эпюр напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  для двух цилиндров, соединенных посредством натяга. В левой



Фиг. 6.

части графика от точки  $x_k$  в масштабе отложено контактное давление  $p_k$  и полученная точка соединена с точками  $x_1$  и  $x_2$  ( $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ). Величина контактного давления может быть вначале взята произвольной, а затем установлена в соответствии с требованиями задачи. Полученные наклонные прямые в левой части графика дают значения напряжений  $\sigma_r$ , а их продолжение в правую часть графика определяет напряжения  $\sigma_t$  (в долях  $p_k$ ). После того как напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  получены, можно подсчитать радиальное перемещение произвольной точки по формуле (6).

Величина натяга  $\delta$ , необходимого для получения нужного контактного давления  $p_k$ , вычисляется по формуле (12).

Примеры графического решения более сложных задач см. [5].

Следует заметить, что изложенное выше графическое решение справедливо только в пределах упругих деформаций. При использовании как графического решения, так и всех приведенных выше формул необходимо все величины брать с учетом их знаков, считая растягивающее напряжение положительным, а сжимающее — отрицательным. Радиальное перемещение следует считать положительным в том случае, когда оно направлено от центра.

### СКРЕПЛЕННЫЕ И АВТОСКРЕПЛЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ [4], [8]

Если на толстостенный цилиндр действует только одно внутреннее давление  $p_1$ , то напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  распре-

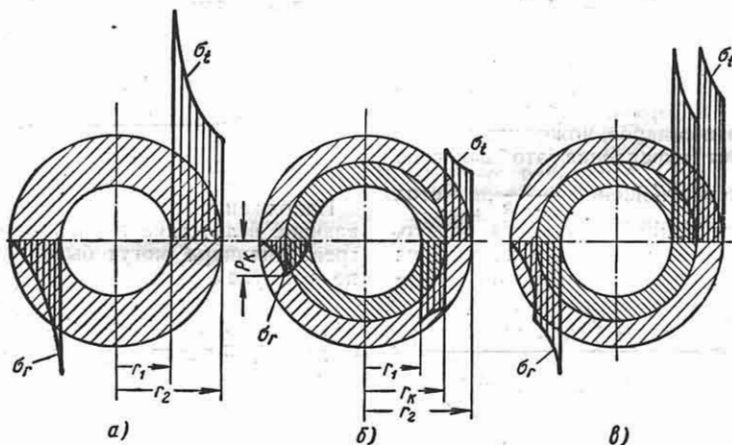
лены по сечению так, как показано на фиг. 7, а [см. также формулы (7) и (8)]. Внутренние точки цилиндра напряжены значительно сильнее, чем наружные.

Для того чтобы распределение напряжений сделать более равномерным и таким образом заставить более активно работать наружные слои цилиндра, применяют так называемые скрепленные цилиндры, составленные из двух или более

Если принять гипотезу прочности наибольших касательных напряжений, то для оптимального давления напрессовки получается следующая формула:

$$p_k = p \left[ \frac{1 - k_2^2}{2 - k_1^2 - k_2^2} - \frac{k_1^2(1 - k_2^2)}{1 - k_1^2 k_2^2} \right], \quad (16)$$

где  $k_1 = \frac{r_1}{r_k}$  и  $k_2 = \frac{r_k}{r_2}$  — коэффициенты



Фиг. 7.

труб, надетых друг на друга с некоторым натягом  $\delta$ . Окружные напряжения, возникающие за счет натяга во внутренней трубе, являются сжимающими, а во наружной трубе — растягивающими. Эпюры распределения напряжений, возникающих после посадки, представлены на фиг. 7, б. Величина этих напряжений определяется формулами Ляме в зависимости от контактного давления, которое связано с натягом формулой (12).

Если скрепленный цилиндр подвергнуть действию внутреннего давления, то напряжения за счет последнего наложатся на напряжения за счет напрессовки. В результате окружные напряжения во внутренних точках цилиндра будут меньше, чем при действии одного только внутреннего давления, в наружных же точках окружные напряжения, наоборот, увеличатся. Эпюра распределения суммарных напряжений представлена на фиг. 7, в. Оптимальное давление напрессовки и соответствующая ему величина натяга могут быть определены из условия равнопрочности внутренних точек для внутренней и наружной трубы.

толстостенности для внутренней и наружной трубы;  $p$  — внутреннее рабочее давление.

Величина эквивалентного напряжения в опасной точке внутренней или наружной трубы при этом будет равна

$$\sigma_{э\text{кв}} = p \frac{2}{2 - k_1^2 - k_2^2}. \quad (17)$$

Заметим, что наибольший эффект за счет скрепления достигается в том случае, если радиус контактной поверхности выбран равным

$$r_k = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (18)$$

При этом условии имеем: коэффициенты толстостенности внутренней и наружной трубы

$$k_1 = k_2 = \sqrt{k} \left( k = \frac{r_1}{r_2} \right); \quad (19)$$

оптимальная величина контактного давления

$$p_k = \frac{p(1 - k)}{2(1 + k)}; \quad (20)$$

натяг, соответствующий этому давлению,

$$\delta = \frac{4 p_{\kappa} r_{\kappa} (1 + k)}{E (1 - k)} = \frac{2 p r_{\kappa}}{E}; \quad (21)$$

эквивалентное напряжение в опасной точке

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{p}{1 - k}. \quad (22)$$

Сравнивая величину внутреннего давления, соответствующего началу пластических деформаций для целого и составного цилиндров, можно установить, что за счет скрепления это давление возрастает в отношении  $\frac{2}{1 + k}$ . Метод скрепления цилиндров является, однако, не единственным методом повышения несущей способности в пределах упру-

$$\sigma_r = \frac{\alpha E (t_2 - t_1)}{2 (1 - \mu) (r_2^2 - r_1^2) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} + r_2^2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (24)$$

$$\sigma_t = \frac{\alpha E (t_2 - t_1)}{2 (1 - \mu) (r_2^2 - r_1^2) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ r_2^2 \ln \frac{r_2}{r} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} - (r_2^2 - r_1^2) + \frac{r_2^2 r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (25)$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha E (t_2 - t_1)}{2 (1 - \mu) (r_2^2 - r_1^2) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 2r_2^2 \ln \frac{r_2}{r} + 2r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} - (r_2^2 - r_1^2) \right], \quad (26)$$

гих деформаций. Такие же примерно результаты достигаются, если цельный толстостенный цилиндр подвергнуть нагрузке высоким внутренним давлением так, чтобы внутренние слои цилиндра получили некоторую пластическую деформацию. После разгрузки в цилиндре возникают остаточные напряжения, распределенные примерно так же, как и напряжения, возникающие в составном цилиндре в результате натяга. Остаточные напряжения у внутренней поверхности цилиндра имеют знак, обратный знаку напряжений, возникающих при действии рабочего давления, поэтому суммарное напряжение при действии рабочего давления снижается, а несущая способность цилиндра в пределах упругих деформаций увеличивается. Этот метод увеличения прочности цилиндров называется автоскреплением.

Расчет автоскрепленных цилиндров см. [8], а также стр. 288.

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ [4]

При стационарном тепловом режиме, когда температуры внутренней и наружной поверхности цилиндра постоянны по длине и соответственно равны  $t_1$  и  $t_2$ , температура в произвольной точке на расстоянии  $r$  от оси определяется по формуле

$$t_r = \frac{t_2 \ln \frac{r}{r_1} + t_1 \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (23)$$

Напряжения в той же точке, возникающие вследствие неравномерного нагрева цилиндра, могут быть вычислены по формулам

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения;  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона для материала цилиндра.

Приведенные формулы справедливы при условии, что рассматриваемое сечение удалено от концов цилиндра на расстояние большее, чем  $1,5r_2$ . Вблизи концов цилиндра распределение напряжений не подчиняется формулам (24) — (26) и зависит от условий на торцах.

В случае свободных торцов фактические напряжения, как правило, меньше вычисленных по формулам, при наличии же днаш напряжения могут быть очень большими и требуют специального исследования.

При значительном нагреве в формулах (24) — (26) следует использовать упругие постоянные материала, соответствующие действительной температуре

(средней). При очень больших перепадах температуры ( $t_2 - t_1$ ) формулы (24) — (26) неприменимы.

Расчет цилиндров с учетом изменения механических свойств материала при нагревании см. [6].

### ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ

При действии давлений, линейно изменяющихся по длине, напряжения и перемещения вычисляются по формулам Ляме (стр. 219). При более сложном законе изменения давления, а также при наличии разрывов или сосредоточенных кольцевых сил формулы Ляме неприменимы. В этом случае точное решение задачи о деформациях цилиндров связано со значительными трудностями и в большинстве случаев может быть выполнено лишь численными методами.

Нагружение длинного цилиндра равномерным давлением, приложенным на небольшом участке боковой поверхности, см. [9].

Точное решение для некоторых других случаев нагружения цилиндров см. [7].

$$\sigma_z = \frac{E(1-\mu)}{r_2(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ A'' \left( \frac{1+k^2}{4} - \frac{\rho^2}{2} \right) - B'' \left( \ln \rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} + \frac{1}{2} \right) \right]; \quad (27)$$

Применение точного решения при рассмотрении практической инженерной задачи см. [3].

Ввиду неизбежности громоздких вычислений при точном решении задачи, заслуживают внимания более простые приближенные решения, основанные на введении некоторых допущений.

Такие решения, позволяющие получить результат с удовлетворительной точностью, даны в [1] и [2].

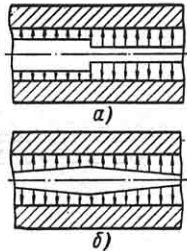
Ниже приведены расчетные формулы наиболее простого приближенного решения [2], в котором условие совместности деформации удовлетворяется точно, а условие равновесия элемента объема — приближенно. Последнее заменено условием минимума потенциальной энергии. Кроме того, в этом решении принята гипотеза отсутствия деформаций сдвига,

подобная по своему характеру гипотезе плоских сечений, применяемой при расчете бруса.

Введем безразмерные координаты

$$\zeta = \frac{z}{r_2} \text{ и } \rho = \frac{r}{r_2} \text{ и примем обозначения: } E \text{ и } \mu \text{ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; } r_1, r_2 \text{ и } r \text{ — внутренний, наружный и текущий радиусы цилиндра; } k = \frac{r_1}{r_2} \text{ — коэффициент толстостенности цилиндра.}$$

Если давление, действующее на внутреннюю или наружную поверхность цилиндра, распределено по линейному или параболическому закону и имеет в некотором сечении разрыв (фиг. 8, а) или излом (фиг. 8, б) или если к цилиндру приложены сосредоточенные кольцевые нагрузки, то напряжения в произвольной точке и радиальное перемещение этой точки вычисляются по формулам



Фиг. 8.

Если давление, действующее на внутреннюю или наружную поверхность цилиндра, распределено по линейному или параболическому закону и имеет в некотором сечении разрыв (фиг. 8, а) или излом (фиг. 8, б) или если к цилиндру приложены сосредоточенные кольцевые нагрузки, то напряжения в произвольной точке и радиальное перемещение этой точки вычисляются по формулам

$$\sigma_t = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_z + \frac{E}{r_2} \left[ \frac{A}{1-\mu} + \frac{B}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right]; \quad (28)$$

$$w = A\rho + B \frac{1}{\rho}, \quad (29)$$

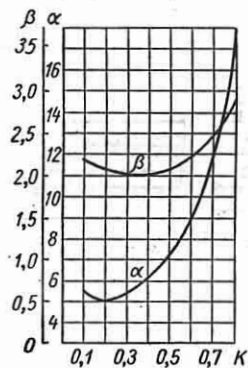
где  $A$  и  $B$  — функции от  $\zeta$ ;  $A''$  и  $B''$  — их вторые производные.

Функции  $A$  и  $B$  определяются выражениями

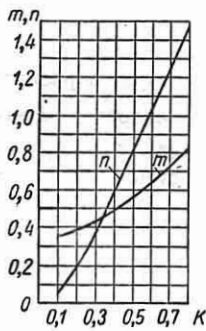
$$A = e^{-\alpha\zeta} (C_1 \sin \alpha\zeta + C_2 \cos \alpha\zeta) + e^{\alpha\zeta} (C_3 \sin \alpha\zeta + C_4 \cos \alpha\zeta) + e^{-\beta\zeta} (C_5 \sin \beta\zeta + C_6 \cos \beta\zeta) + e^{\beta\zeta} (C_7 \sin \beta\zeta + C_8 \cos \beta\zeta) + \frac{(k^2 p_1 - p_2)(1-\mu)r_2}{E(1-k^2)}; \quad (30)$$

$$B = -m [e^{-\alpha\zeta} (C_1 \sin \alpha\zeta + C_2 \cos \alpha\zeta) + e^{\alpha\zeta} (C_3 \sin \alpha\zeta + C_4 \cos \alpha\zeta)] + n [e^{-\beta\zeta} (C_5 \sin \beta\zeta + C_6 \cos \beta\zeta) + e^{\beta\zeta} (C_7 \sin \beta\zeta + C_8 \cos \beta\zeta)] + \frac{(p_1 - p_2)(1+\mu)r_2 k^2}{E(1-k^2)} \quad (31)$$

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$  и  $n$  в формулах (30) и (31) зависят от коэффициента толстостенности  $k$  и от коэффициента Пуассона  $\mu$ . Значения их при  $\mu = 0,3$  даны на графиках фиг. 9 и 10. Постоянные



Фиг. 9.



Фиг. 10.

интегрирования  $C_1 \div C_8$  определяются в каждом частном случае из условий на торцах.

Если торец является свободным, то напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  на нем равны нулю. В этом случае при значении  $\zeta = \zeta_0$ , соответствующем этому торцу,  $A''_{\zeta=\zeta_0} = 0$ ;  $B''_{\zeta=\zeta_0} = 0$ ;  $A'''_{\zeta=\zeta_0} = 0$ ;  $B'''_{\zeta=\zeta_0} = 0$ . Для за-

деланного торца  $w = 0$  и  $\frac{dw}{d\zeta} = 0$ ; соответственно  $A = 0$ ;  $B = 0$ ;  $A' = 0$ ;  $B' = 0$ .

Рассмотрим граничные условия для бесконечно длинного цилиндра, находящегося под действием постоянно-го давления, которое изменяется в некотором сечении с положительного на отрицательное (фиг. 11). Начало

координат совместим с сечением, соответствующим скачку давления.

В силу обратной симметрии нагрузки при  $\zeta = 0$  имеем  $w = 0$ ;  $\sigma_z = 0$ . Следовательно, при  $\zeta = 0$   $A_{\zeta=0} = 0$ ;  $B_{\zeta=0} = 0$ ;  $A''_{\zeta=0} = 0$ ;  $B''_{\zeta=0} = 0$ . При удалении от начала координат напряжения и перемещения не могут неограниченно возрастать, на этом основании постоянные  $C_3, C_4, C_7, C_8$  равны нулю.

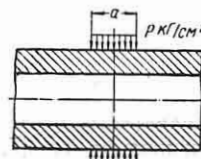
Определив из приведенных выше условий оставшиеся постоянные  $C_1, C_2, C_5, C_6$  можно по формулам (27) — (29) пол-

считать напряжения  $\sigma_z, \sigma_r$  и перемещение  $w$ . Радиальные напряжения  $\sigma_r$  во внутренних или наружных точках цилиндра равны соответственно внутреннему и наружному давлениям, поэтому формулы для них не приводятся.

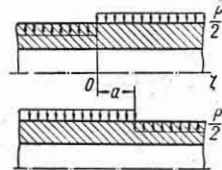
Имея решение задачи, представленной на фиг. 11, можно легко получить решение ряда других практически важных задач. Так, например, если на некотором участке длиной  $a$  действует постоянное давление  $p$ , а на остальной части цилиндра давление отсутствует (фиг. 12), то решение можно представить в виде суммы решений двух задач, как показано на фиг. 13.

При действии на цилиндр сосредоточенной кольцевой нагрузки последнюю можно рассматривать как нагрузку, равномерно распределенную на участке бесконечно малой длины.

Указанные приемы получения решения для нагрузки, равномерно распре-



Фиг. 12.



Фиг. 13.

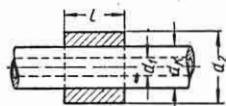
деленной на участке, или для сосредоточенной кольцевой нагрузки применимы и могут быть использованы независимо от того, каким методом, точным или приближенным, была решена исходная задача, представленная на фиг. 11. Следует заметить, что приближенное решение, изложенное в [1], дает несколько заниженные значения напряжений, тогда как решение, приведенное выше (формулы (28) — (31), [2]), приводит к завышенным напряжениям. Определив напряжения тем и другим приближенными методами, можно установить те пределы, в которых заключено действительное значение напряжений.

При малой толщине стенки цилиндра расчет при действии переменной по длине осесимметричной нагрузки следует производить, пользуясь теорией осесимметричной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (см. [4]).

Если принять 5%-ную погрешность практически допустимой, то теорией тонкостенной цилиндрической оболочки можно пользоваться при  $k = \frac{r_1}{r_2} > 0,9$ .

### РАСЧЕТ ПРЕССОВЫХ ПОСАДОК ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНЕ СОПРЯГАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ [4]

При различной длине сопрягаемых деталей контактное давление распределяется по посадочной поверхности неравномерно. Выступающие концы более длинной детали затрудняют ее деформации, поэтому контактное давление вблизи



Фиг. 14.

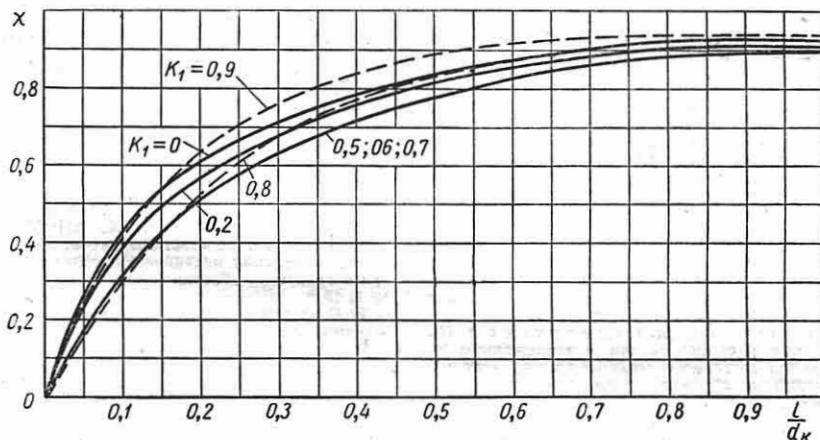
концов посадочной поверхности значительно возрастает. Решение задачи о распределении контактного давления по длине посадочной поверхности не получено. Приближенное значение среднего контактного давления можно найти, если

нести внутреннего и наружного цилиндров.

Формула (32) отличается от приведенной выше формулы (12) наличием в знаменателе коэффициента  $\chi$ , учитывающего влияние выступающих концов внутренней детали (вала). Этот коэффициент зависит от отношения длины посадочной поверхности  $l$  к ее диаметру  $d_k$ . Числовые значения коэффициента  $\chi$  при различной толстостенности внутренней детали ( $k_1 = \frac{d_1}{d_k}$ ) даны на графике фиг. 15.

Влияние выступающих концов длинной детали становится особенно существенным и должно учитываться при малой длине посадочной поверхности (при

$\frac{l}{d_k} < 0,5$ ).



Фиг. 15.

принять, что давление равномерно распределено по длине поверхности сопряжения. При этом величину среднего арифметического радиального смещения точек контактной поверхности длинной детали следует определять с помощью методов, указанных на стр. 225.

Для случая посадки короткой втулки на длинный полый вал (фиг. 14) среднее посадочное давление равно

$$p_k = \frac{\delta}{d_k} \cdot \chi \frac{1}{E_1} \left[ \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right] + \frac{1}{E_2} \left[ \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right] \quad (32)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты толстостенности

### ТОЛСТОСТЕННЫЙ ШАР, ПОДВЕРГНУТЫЙ ДЕЙСТВИЮ ДАВЛЕНИЯ

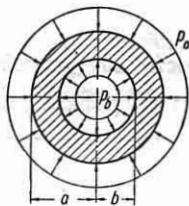
В толстостенном шаре с постоянной толщиной стенки, нагруженном равномерно распределенными давлениями  $p_a$  и  $p_b$  (фиг. 16), плоскости осевых сечений являются главными плоскостями (фиг. 17). Напряжения в произвольной точке с координатой  $r$  определяются формулами

$$\sigma_r = -\frac{p_a a^3 - p_b b^3}{a^3 - b^3} + \frac{(p_a - p_b) a^3 b^3}{a^3 - b^3} \cdot \frac{1}{r^3};$$

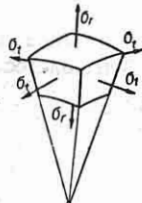
$$\sigma_t = -\frac{p_a a^3 - p_b b^3}{a^3 - b^3} - \frac{(p_a - p_b) a^3 b^3}{a^3 - b^3} \cdot \frac{1}{2r^3}.$$

Радиальное перемещение в той же точке

$$w = -\frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{p_a a^3 - p_b b^3}{a^3 - b^3} r - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{p_a - p_b}{a^3 - b^3} \cdot \frac{a^3 b^3}{r^2}$$



Фиг. 16.



Фиг. 17.

Условие прочности по теории максимальных касательных напряжений будет

$$\frac{3a^3}{2(a^3 - b^3)} |(p_b - p_a)| \leq \sigma_T$$

Наиболее опасными являются точки, расположенные у внутренней поверхности шара.

Температурные напряжения в шаре

При установившемся температурном режиме напряжения в произвольной точке с координатой  $r$  определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{aE}{1-\mu} (t_a - t_b) \frac{ab}{a^3 - b^3} \times \left[ \frac{a^2 + ab + b^2}{r} - (a + b) - \frac{a^2 b^2}{r^3} \right];$$

$$\sigma_t = \frac{aE}{1-\mu} (t_a - t_b) \frac{ab}{a^3 - b^3} \times \left[ \frac{a^2 + ab + b^2}{r} - (a + b) + \frac{a^2 b^2}{2r^3} \right];$$

температура в той же точке

$$t_r = \frac{at_a(r-b) + bt_b(a-r)}{r(a-b)}$$

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Бидерман В. Л., Расчет цилиндров средней толщины на симметрично относительно оси нагрузку, изменяющуюся по длине, "Труды II научно-технической конференции МВТУ", изд. МВТУ, 1946 (см. также [4], глава XV, § 4).

2. Бояршинов С. В., Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметричной нагрузки, сб. "Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций", под ред. С. Д. Пономарева, Машгиз, 1953.

3. Гербергер Е. Я., Стрелянова А. П., Применение решения задачи о напряженном состоянии толстостенного цилиндра к определению напряжений в ступице турбинного диска, сб. "Прочность элементов паровых турбин", Машгиз, 1951.

4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы со-

временных методов расчета на прочность в машиностроении (расчеты при статической нагрузке), Машгиз, 1950.

5. Пономарев С. Д., Расчет толстостенных труб на прочность графическим способом, "Инженерный сборник", т. IX, АН СССР, 1951.

6. Пономарев С. Д., Расчет цилиндров с учетом изменения механических свойств материала при нагревании, "Вестник инженеров и техников" № 1, 1952.

7. Прокопов В. К., Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра, "Прикладная математика и механика", т. XIII, вып. 2, 1949.

8. Смирнов-Аляев Г. А., Теория автокращения цилиндров, Оборонгиз, 1940.

9. Шапиро Г. С., О сжатии бесконечного полого кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности, "Прикладная математика и механика", т. VII, № 5, 1943.



## ГЛАВА VIII

### РАСЧЕТ ДВИЖУЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

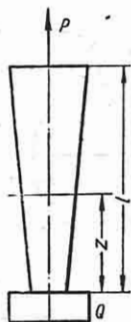
Рассматриваются напряжения и деформации, возникающие в элементах конструкций в связи с их движением при наличии ускорений.

Чтобы определить внутренние силы взаимодействия частиц неравномерно движущегося тела, необходимо к каждой частичке тела приложить дополнительную силу инерции, равную произведению массы частички на ее ускорение, взятое с обратным знаком. Рассматривая тело находящимся в равновесии под действием приложенных к телу внешних сил и сил инерции, можно определить напряженное состояние в любой точке неравномерно движущегося тела обычными методами сопротивления материалов или теории упругости.

#### РАСЧЕТ ДВИЖУЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

##### Поступательное движение стержня переменного поперечного сечения

Стержень переменного поперечного сечения находится в вертикальном положении и движется вверх под действием постоянной по времени силы  $P$ , приложенной к верхнему торцу. К нижнему торцу стержня прикреплен груз  $Q$  (фиг. 1). Собственный вес стержня учитывается. Ускорение  $a$  стержня определяется из уравнения



Фиг. 1.

$$P = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \times \left(Q + \gamma \int_0^l F dz\right).$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема материала стержня;  $F$  — площадь поперечного сечения на расстоянии  $z$  от нижнего торца;

$l$  — длина стержня;  $g$  — ускорение от силы тяжести.

Нормальное напряжение в поперечном сечении на расстоянии  $z$  от нижнего торца

$$\sigma = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \left(\frac{Q}{F} + \frac{\gamma}{F} \int_0^z F dz\right).$$

Для стержня постоянного поперечного сечения наибольшее напряжение имеет место в верхнем сечении:

$$\sigma_{\max} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \left(\frac{Q}{F} + \gamma l\right).$$

##### Вращающиеся стержневые системы

Расчет ведется на инерционную нагрузку, направленную в сторону, противоположную ускорению, интенсивностью

$$\frac{\gamma \omega^2 F r}{g},$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $r$  — расстояние от оси вращения.

Сосредоточенные массы  $\frac{Q}{g}$  дают усилия  $\frac{Q \omega^2 r}{g}$ .

##### Примеры

1. Стержень переменного поперечного сечения, несущий на одном конце груз  $Q$ , вращается с постоянной угловой скоростью относительно оси, перпендикулярной стержню (фиг. 2).

Нормальное напряжение в поперечном сечении площадью  $F$  на расстоянии  $z$  от оси вращения

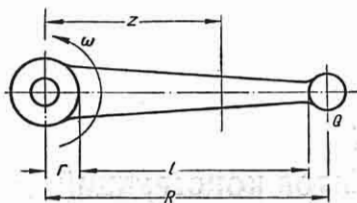
$$\sigma = \frac{\omega^2}{gF} \left( QR + \gamma \int_z^{l+r} F z dz \right);$$

размеры  $r$ ,  $l$ ,  $R$  показаны на фиг. 2.

Для стержня постоянного поперечного сечения наибольшее напряжение при  $z = r$

$$\sigma_{\max} = \frac{\omega^2}{gF} \left[ QR + \gamma Fl \left( r + \frac{l}{2} \right) \right].$$

2. Брус постоянного поперечного сечения площадью  $F$ , шарнирно закрепленный в точках  $A$  и  $B$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, параллельной оси



Фиг. 2.

бруса (фиг. 3). Интенсивность инерционной нагрузки постоянна. Эпюры изгибающих моментов представлена на фиг. 3. Максимальный изгибающий момент

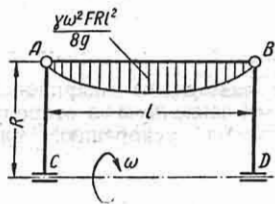
$$M_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F R l^2}{8g}$$

размеры  $R$  и  $l$  показаны на фиг. 3.

Наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении в середине бруса

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

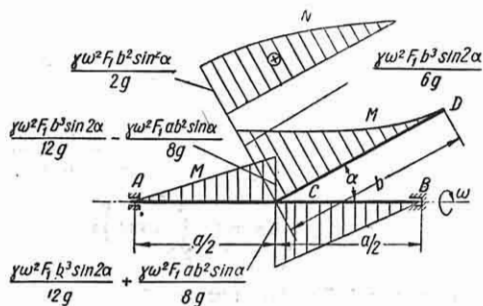
здесь и в дальнейшем  $W$  — осевой момент сопротивления сечения.



Фиг. 3.

Расчет стержней  $AC$  и  $BD$  см. пример 1.

3. Два жестко скрепленных под углом  $\alpha$  бруса  $CD$  и  $AB$  вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси бруса  $AB$  (фиг. 4). Площади поперечных сечений брусьев



Фиг. 4.

$CD$  и  $AB$  соответственно  $F_1$  и  $F_2$ . Эпюры изгибающих моментов и нормальных сил представлены на фиг. 4.

Наибольший изгибающий момент для бруса  $CD$  в сечении  $C$

$$M_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F_1 b^3 \sin 2\alpha}{6g}$$

Наибольшая нормальная (растягивающая) сила для бруса  $CD$  в сечении  $C$

$$N_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F_1 b^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Наибольшее нормальное напряжение в сечении  $C$  бруса  $CD$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F_1} + \frac{M_{\max}}{W}$$

где  $W$  — осевой момент сопротивления поперечного сечения бруса  $CD$ .

Наибольший изгибающий момент для бруса  $AB$  в сечении  $C$

$$M_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F_1 b^3 \sin 2\alpha}{12g} + \frac{\gamma \omega^2 F_1 a b^2 \sin \alpha}{8g}$$

Наибольшее нормальное напряжение на правой стороне сечения  $C$  бруса  $AB$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

где  $W$  — осевой момент сопротивления поперечного сечения бруса  $AB$ .

Изгибающий момент на левой стороне сечения  $C$  бруса  $AB$

$$M = \frac{\gamma \omega^2 F_1 b^3 \sin 2\alpha}{12g} - \frac{\gamma \omega^2 F_1 a b^2 \sin \alpha}{8g}$$

4. Тонкое кольцо радиуса  $R$  (фиг. 5) вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в своей плоскости относительно оси, проходящей через центр кольца.

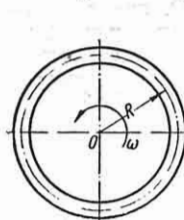
При вращении кольца в поперечном сечении возникает нормальная растягивающая сила

$$N = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g}$$

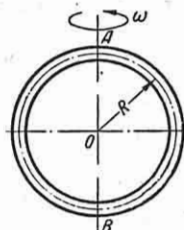
Напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} = \frac{\gamma u^2}{g}$$

где  $u$  — окружная скорость точек кольца.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

5. Тонкое кольцо радиуса  $R$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, совпадающей с диаметром (фиг. 6).

Наибольшая растягивающая сила и наибольший изгибающий момент имеют место в сечениях  $A$  и  $B$ :

$$N_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F R^2}{g}; \quad M_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F R^3}{4g}$$

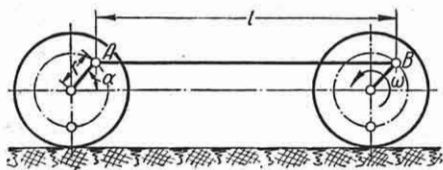
Наибольшее нормальное напряжение в сечениях  $A$  и  $B$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} + \frac{M_{\max}}{W}.$$

### Напряжения в спарнике

Все точки спарника (фиг. 7) описывают окружности радиуса  $r$ .

Наиболее опасным положением спарника является такое, при котором спарник перпендикулярен кривошипу ( $\alpha = \pm 90^\circ$ ). Для этого положения макси-



Фиг. 7.

мальный изгибающий момент в среднем сечении спарника

$$M_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 F r l^2}{8g},$$

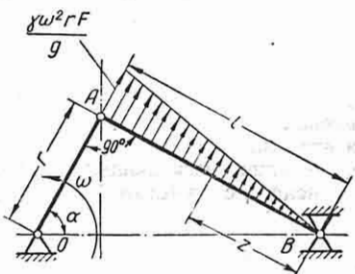
где  $\omega$  — угловая скорость вращения кривошипа;  $F$  — площадь поперечного сечения спарника.

Наибольшее нормальное напряжение, возникающее в результате изгиба спарника при движении,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

### Напряжения в шатуне

Приближенный метод расчета напряжений от изгиба в шатунах основан на предположении, что в опасном положении,



Фиг. 8.

нии, когда кривошип перпендикулярен шатуну, ускорения пропорциональны расстоянию  $z$  от точки  $B$  [14] (см. фиг. 8). Инерционная нагрузка вычисляется в предположении, что масса шатуна равномерно распределена по длине его оси.

Интенсивность нагрузки  $\frac{\gamma \omega^2 V r z}{g l^2}$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения кривошипа;  $V$  — объем шатуна.

Эпюра интенсивности распределенной нагрузки имеет вид треугольника (см. фиг. 8). Наибольший изгибающий момент имеет место в сечении на расстоянии  $0,577l$  от точки  $B$ :

$$M_{\max} = 0,064 \frac{\gamma \omega^2 V r l}{g}.$$

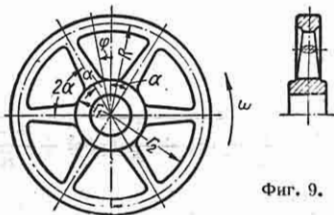
Наибольшее нормальное напряжение, возникшее в результате изгиба шатуна при движении,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

Уточненный метод расчета шатуна см. [12].

### Напряжения в маховике

Определяются напряжения, возникающие в обода и спицах маховика при его вращении с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Предполагается, что обод маховика представляет собой кривой брус малой кривизны, деформации ступицы в расчет не принимаются [15], [12] (фиг. 9).



Фиг. 9.

Обозначения:  $R$  — средний радиус обода;  $r_2 \approx R$  — внутренний радиус обода;  $r_1$  — наружный радиус ступицы;  $F$  — площадь поперечного сечения обода;  $J$  — момент инерции поперечного сечения обода;  $F_1 = F_1(r)$  — переменная площадь поперечного сечения спицы;  $2\alpha$  — угол между осями двух соседних спиц.

Нормальная растягивающая сила в поперечном сечении спицы у обода

$$N_R = \frac{\gamma \omega^2 \left( R^3 - \int_{r_1}^R \frac{S_r dr}{F_1} \right)}{\frac{R^2}{J} f_2(\alpha) + \frac{1}{F} f_1(\alpha) + \frac{1}{R} \int_{r_1}^R \frac{dr}{F_1}},$$

где

$$S_r = \int_r^R F_1 r dr;$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left( \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$f_2(\alpha) = f_1(\alpha) - \frac{1}{2\alpha}.$$

Значения функций  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$  для различного числа спиц  $n$  ( $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения функций  $f_1(\alpha)$  и  $f_2(\alpha)$  для различного числа спиц  $n$  ( $\alpha = \frac{\pi}{n}$ )

$n$	$f_1(\alpha)$	$f_2(\alpha)$	$n$	$f_1(\alpha)$	$f_2(\alpha)$
2	0,393	0,0744	10	1,592	0,000351
3	0,493	0,01593	12	1,910	0,000202
4	0,643	0,00608	16	2,55	0,000085
5	0,798	0,00297	20	3,18	0,0000434
6	0,957	0,00168	24	3,82	0,000025
8	1,274	0,000694			

Для обода со спицами постоянного поперечного сечения  $F_1$  или приближенно для обода со спицами переменного сечения со средней площадью  $F_1$

$$N_R = \frac{\gamma \omega^2}{6g} \cdot \frac{\left(4 + 3 \frac{r_1}{R}\right) R^2}{\frac{R^2}{J} f_2(\alpha) + \frac{1}{F} f_1(\alpha) + \frac{R-r_1}{RF_1}}.$$

Нормальная растягивающая сила в поперечном сечении спицы на радиусе  $r$

$$N_r = N_R + \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_r^R F_1 r dr.$$

Для спицы постоянного сечения  $F_1 = \text{const}$

$$N_r = N_R + \frac{\gamma \omega^2 F_1}{2g} (R^2 - r^2).$$

$N_r$  — максимальная при  $r = r_1$ .

Нормальная растягивающая сила и изгибающий момент в поперечном сечении обода под углом  $\varphi$  к биссектрисе угла между спицами

$$N = \frac{\gamma \omega^2 F R^2}{g} - \frac{\cos \varphi}{2 \sin \alpha} N_R;$$

$$M = \frac{N_R R}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

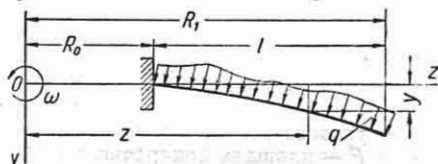
Наибольшая нормальная сила имеет место при  $\varphi = \alpha$ , а наибольший изгибающий момент при  $\varphi = 0$ .

Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении обода

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$

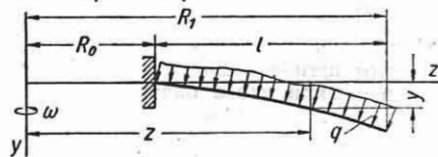
### Вращающийся слабоизогнутый стержень

Обозначения (фиг. 10 и 11):  $R_0$  — расстояние от оси вращения до заданного сечения;  $R_1$  — расстояние от оси вращения до свободного сечения;  $R_{cp} = \frac{R_0 + R_1}{2}$  — расстояние от оси вращения до среднего сечения;  $l = R_1 - R_0$  — длина стержня;  $F$  и  $J$  — площадь и момент инерции относительно нейтральной оси сечения на расстоянии  $z$



Фиг. 10.

от оси вращения;  $F_0$  и  $F_1$  — площади поперечных сечений на расстояниях  $R_0$  и  $R_1$  от оси вращения соответственно;  $E$  — модуль упругости материала стержня;  $u_{cp} = \omega R_{cp}$  — линейная скорость



Фиг. 11.

на радиусе  $R_{cp}$ ;  $q$  — интенсивность распределенной нагрузки, перпендикулярной к оси стержня, в  $\text{кг/см}$ .

Определение изгибающих моментов произведено с учетом деформации стержня.

**Изгиб стержня в плоскости вращения.** Консольный слабоизогнутый стержень (фиг. 10) переменного поперечного сечения, нагруженный распределенными силами, которые остаются нормальными к оси стержня и после его искривления, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости  $yz$ .

Нормальная сила в поперечном сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения

$$N = \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_z^{R_1} F z dz.$$

Наибольшая нормальная сила возникает в заделанном сечении:

$$N_{\max} = \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_{R_0}^{R_1} F z dz.$$

Нормальные напряжения в заделанном сечении, возникающие в результате растяжения стержня, определяются по формуле

$$\sigma = 2\alpha \frac{\gamma u_{cp}^2}{g \chi},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{l F_0 R_{cp}} \int_{R_0}^{R_1} F z dz;$$

$$\chi = \frac{2 R_{cp}}{l}.$$

Для стержня постоянного поперечного сечения  $\alpha = 1$ .

Для стержня, площадь которого меняется по линейному закону,

$$F = F_0 + (F_1 - F_0) \frac{z - R_0}{l};$$

$$\alpha = \frac{1 + \varphi}{2} - \frac{1}{6\chi} (1 - \varphi),$$

где

$$\varphi = \frac{F_1}{F_0}.$$

Для стержня, площадь которого меняется по показательному закону,

$$F = F_0 \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^{\frac{z - R_0}{l}};$$

$$\alpha = \frac{1}{\chi \ln \varphi} \left[ 1 + \varphi - \chi (1 - \varphi) + \frac{2(1 - \varphi)}{\ln \varphi} \right].$$

Величины коэффициентов  $\alpha$  для различных значений  $\varphi$  и  $\chi$  приведены в табл. 2 [17].

Таблица 2

$\chi$	$\alpha$					
	Изменение площади по линейному закону			Изменение площади по показательному закону		
	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 0,50$	$\varphi = 0,75$	$\varphi = 0,15$	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 0,50$
3,5	0,589	0,726	0,863	0,410	0,506	0,698
4,0	0,594	0,729	0,865	0,415	0,511	0,701
4,5	0,597	0,731	0,866	0,418	0,514	0,703
5,0	0,600	0,737	0,867	0,421	0,517	0,705

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, найденный без учета деформации стержня [8],

$$\begin{aligned} \bar{M} = & -\frac{\gamma \omega^2}{g} y \int_z^{R_1} F z dz + \frac{\gamma \omega^2}{g} z \int_z^{R_1} F y dz + \\ & + z \int_z^{R_1} q dz - \int_z^{R_1} q z dz, \end{aligned}$$

где  $z$  и  $y$  — координаты оси стержня в недеформированном его состоянии.

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, найденный с учетом деформации стержня [8],

$$M = \sqrt{M}, \quad (1)$$

где

$$\sqrt{M} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma \omega^2 R_0}{g M_0} \int_{R_0}^{R_1} F \bar{v} dz} \quad (2)$$

есть коэффициент разгрузки.

В формуле (2)

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 = & \frac{\gamma \omega^2 R_0}{g} \int_{R_0}^{R_1} F y dz + \\ & + R_0 \int_{R_0}^{R_1} q dz - \int_{R_0}^{R_1} q z dz < 0 \end{aligned}$$

изгибающий момент в заделанном сечении, найденный без учета деформации стержня;

$$\bar{v} = -z \int_{R_0}^z \frac{\bar{M}}{EJ} dz + \int_{R_0}^z \frac{\bar{M}}{EJ} z dz \quad (3)$$

прогиб в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, подсчитанный на основе принципа сохранения начальных размеров.

Для прямого стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной силой,

$$\bar{M} = -\frac{q(R_1 - z)^2}{2}; \quad (4)$$

$$v = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{10\gamma^2} a}, \quad (5)$$

где

$$a = \frac{2\gamma}{gE} v_{cp}^2 \lambda^2, \quad (6)$$

а

$$\lambda = l \sqrt{\frac{F}{J}}$$

гибкость стержня.

Формулы (2) и (5) справедливы при условии, что  $v > 0,7$ .

Наибольшее нормальное напряжение, вызванное изгибом стержня, определяется по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W},$$

где  $W$  — осевой момент сопротивления сечения.

Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня получается сложением напряжений, вызванных растяжением и изгибом.

**Изгиб стержня из плоскости вращения.** Консольный слабоизогнутый стержень (фиг. 11) переменного поперечного сечения, нагруженный распределенными силами, которые остаются нормальными к оси стержня и после его искривления, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси  $u$ .

Нормальная сила и нормальные напряжения определяются так же, как и в предыдущем случае.

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, найденный без учета деформации стержня [8],

$$\bar{M} = -\frac{\gamma\omega^2}{g} y \int_z^{R_1} Fzdz + \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_z^{R_1} Fyzdz + \\ + z \int_z^{R_1} qdz - \int_z^{R_1} qzdz.$$

Изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, найденный с учетом деформации стержня, определяется по формуле (1), в которой [8]

$$v = \frac{1}{1 - \frac{\gamma\omega^2}{gM_0} \int_{R_0}^{R_1} F\bar{v}zdz} \quad (7)$$

коэффициент разгрузки.

В формуле (7)

$$\bar{M}_0 = \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_{R_0}^{R_1} Fyzdz + \\ + R_0 \int_{R_0}^{R_1} qdz - \int_{R_0}^{R_1} qzdz < 0$$

изгибающий момент в заданном сечении, найденный без учета деформации стержня, а  $\bar{v}$  — прогиб в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, подсчитанный на основе принципа сохранения начальных размеров, определяемый по формуле (3).

Для прямого стержня постоянного поперечного сечения, нагруженного равномерно распределенной силой, изгибающий момент в сечении на расстоянии  $z$  от оси вращения, найденный без учета деформации стержня, определяется по формуле (4), а коэффициент разгрузки

$$v = \frac{1}{1 + \frac{9\gamma + 4}{90\gamma^2} a}. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) справедливы при условии, что  $v > 0,7$ .

Величина  $a$  определяется по формуле (6).

Напряжения, вызванные изгибом, а также полные напряжения находятся так же, как в предыдущем случае.

## РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВИНТОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН

Обозначения:  $D$  — средний диаметр пружины;  $i$  — число витков;  $C$  — жесткость проволоки при кручении;  $\gamma$  — вес единицы объема материала проволоки;  $F$  — площадь поперечного сечения проволоки;  $m = \frac{\gamma}{g} \pi DiF$  — масса проволоки;

$H$  — длина пружины в деформированном или недеформированном состоянии до вращения.

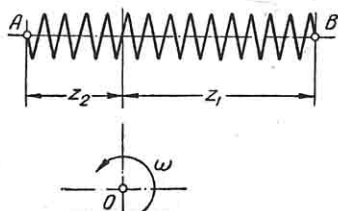
Предполагается, что угол наклона витков пружины мал ( $\alpha < 12^\circ$ ) и средний диаметр пружины значительно меньше ее длины. Это предположение позволяет рассматривать пружину, как брус постоянного сечения длиной  $H$ , площадью

$F_{\text{экв}} = \frac{\pi D^3 i}{4H}$  и жесткостью

$$E_{\text{экв}} F_{\text{экв}} = \frac{4C}{\pi D^3 i} H.$$

**Ось пружины произвольно расположена в плоскости, нормальной к оси вращения (фиг. 12) [11]**

Предполагается, что перемещения по оси  $z$  невелики. Поперечная инерционная нагрузка не учитывается.



Фиг. 12.

Для пружины, шарнирно закрепленной в точках  $A$  и  $B$ , продольные силы, развивающиеся в сечениях, вблизи этих точек в результате вращения,

$$P_A = -\frac{m\omega^2}{H^2} \cdot \frac{2z_2^3 + 3z_1z_2^2 - z_1^3}{6};$$

$$P_B = -\frac{m\omega^2}{H^2} \cdot \frac{2z_1^3 + 3z_2z_1^2 - z_2^3}{6}.$$

Частные случаи

а) Пружина расположена радиально по одну сторону от центра:

$$z_1 = z_B; \quad z_2 = -z_A; \quad z_B - z_A = H;$$

$$P_A = \frac{m\omega^2}{6} (2z_A + z_B);$$

$$P_B = -\frac{m\omega^2}{6} (2z_B + z_A).$$

б) Пружина расположена радиально так, что один ее конец находится в центре:

$$z_A = 0; \quad z_B = H;$$

$$P_A = \frac{m\omega^2}{6} H;$$

$$P_B = -\frac{m\omega^2}{3} H.$$

в) Пружина расположена радиально, так, что ее середина находится в центре:

$$z_1 = z_2 = \frac{H}{2};$$

$$P_A = P_B = -\frac{m\omega^2}{12} H.$$

**Более точный расчет для радиально расположенной пружины (фиг. 13)**

В расчете учитываются радиальные (в направлении оси пружины) смещения  $w$  сечений [11].

Это радиальное смещение связано с величиной  $z$  зависимостью

$$w = C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z - z,$$

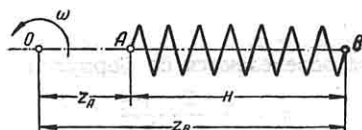
где

$$\beta = \frac{\omega D}{2H} \sqrt{\frac{\pi D i m}{C}}.$$

Сила, развиваемая в сечении на расстоянии  $z$  от оси в результате вращения пружины,

$$P = \frac{4CH}{\pi D^3 i} \cdot \frac{dw}{dz}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий закрепления концов пружины.



Фиг. 13.

Для пружины, закрепленной в точках  $A$  и  $B$  (при  $z = z_A$   $w = 0$  и при  $z = z_B$   $w = 0$ ), силы, развиваемые в сечениях  $A$  и  $B$  в результате вращения пружины,

$$P_A = \frac{4C}{\pi D^3 i} \left[ \left( 1 - \frac{\psi}{\operatorname{tg} \psi} \right) z_A + \left( \frac{\psi}{\sin \psi} - 1 \right) z_B \right];$$

$$P_B = -\frac{4C}{\pi D^3 i} \left[ \left( \frac{\psi}{\sin \psi} - 1 \right) z_A + \left( 1 - \frac{\psi}{\operatorname{tg} \psi} \right) z_B \right],$$

где

$$\psi = \beta H = \frac{\omega D}{2} \sqrt{\frac{\pi D i m}{C}}.$$

Положительный знак усилия соответствует растяжению пружины, отрицательный — сжатию ( $P_A > 0, P_B < 0$ ).

Если пружина закреплена в точках  $A$  и  $B$  в деформированном состоянии (деформирована силой  $P_0$ ), то полная сила в сечениях  $A$  и  $B$

$$P'_A = P_0 + P_A; \quad P'_B = P_0 + P_B.$$

### Критическая угловая скорость

Критическая угловая скорость, при которой рассмотренная форма деформированного состояния пружины становится неустойчивой,

$$\omega_{кр} = 2 \sqrt{\frac{\pi C}{m D^3 i}}.$$

Практически при угловой скорости, равной  $\omega_{кр}$ , витки пружины начнут интенсивно прижиматься к опоре  $B$ .

### НАПРЯЖЕНИЯ В СПЛОШНЫХ И ПОЛЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛАХ

Рассматриваются напряжения в сечениях, достаточно удаленных от концов вала, где деформацию можно считать плоской.

#### Полый вал

Полый вал внутреннего радиуса  $r_1$ , наружного радиуса  $r_2$  вращается относительно своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

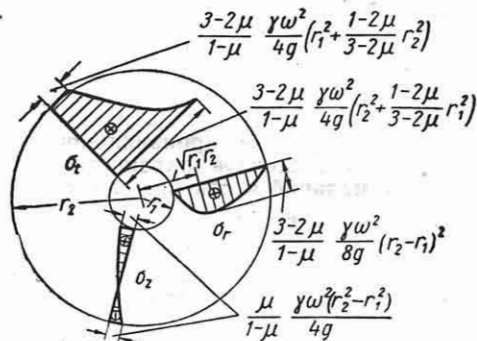
Окружное  $\sigma_t$  и радиальное  $\sigma_r$  напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{3-2\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \times \\ &\times \left( r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 \right); \\ \sigma_r &= \frac{3-2\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \times \\ &\times \left( r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right). \end{aligned}$$

Если торцы вала свободны, то осевое напряжение  $\sigma_z$  равно

$$\sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{4g} (r_1^2 + r_2^2 - 2r^2).$$

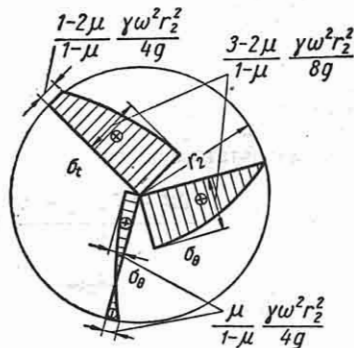
На фиг. 14 представлены эпюры напряжений для полого вала со свободными торцами.



Фиг. 14.

#### Сплошной вал

Сплошной вал радиуса  $r_2$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно своей оси.



Фиг. 15.

Окружное и радиальное напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{3-2\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \left( r_2^2 - \frac{1+2\mu}{3-2\mu} r^2 \right); \\ \sigma_r &= \frac{3-2\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} (r_2^2 - r^2). \end{aligned}$$



Если торцы вала свободны, то осевое напряжение равно

$$\sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{4g} (r_2^2 - 2r^2).$$

На фиг. 15 представлены эпюры напряжений для сплошного вала со свободными торцами.

### РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

Ниже излагаются расчеты дисков постоянной толщины, равнопрочного, конического и гиперболического, а также рассматриваются общие случаи расчета диска переменной толщины, как при равномерном, так и при неравномерном нагреве.

Для дисков постоянной толщины, равнопрочного, конического и гиперболического приводятся точные решения.

Для общего случая диска переменной толщины при равномерном нагреве излагается метод С. А. Тумаркина, в котором профиль диска разбивается на участки, близкие гиперболическим.

Расчет неравномерно нагретого диска переменной толщины, когда необходимо учитывать зависимость модуля упругости от температуры, проводится одним из четырех изложенных методов: М. И. Яновского, С. Д. Пономарева, Н. Н. Малинина и Р. С. Кинасовили. В первых трех методах расчета профиль диска заменяется ступенчатым профилем, состоящим из участков постоянной толщины, причем на каждом участке модуль упругости и коэффициент Пуассона принимаются постоянными. Метод М. И. Яновского является аналитическим, а метод С. Д. Пономарева графическим. По обоим методам для удовлетворения краевого условия расчет диска производится дважды. В методе Н. Н. Малинина необходимость выполнения второго расчета отпадает.

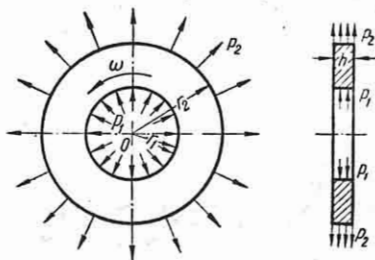
В методе Р. С. Кинасовили расчет основан на решении системы интегральных уравнений последовательными приближениями. Достаточную степень точности дает второе приближение.

Все эти методы могут быть использованы и для расчета равномерно нагретого диска.

#### Диск постоянной толщины

**Диск с отверстиями.** Диск постоянной толщины, внутреннего радиуса  $r_1$ , наружного радиуса  $r_2$ , толщины  $h < \frac{r_2}{2}$ ,

нагруженный на внутреннем контуре равномерно распределенным давлением  $p_1$  кг/см<sup>2</sup>, а на внешнем контуре равномерно распределенной растягивающей нагрузкой  $p_2$  кг/см<sup>2</sup>, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси диска (фиг. 16). Радиальное

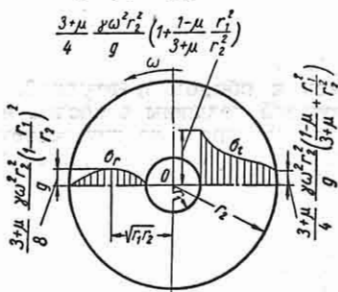


Фиг. 16.

и окружное напряжения в точках на расстоянии  $r$  от центра определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{(r_2^2 - r^2)(r^2 - r_1^2)}{r^2} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 + p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}; \\ \sigma_t &= \frac{3 + \mu}{8} \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_2^2 + r_1^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) + \frac{p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \\ &\left. + \frac{(p_1 + p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \right\} (9) \end{aligned}$$

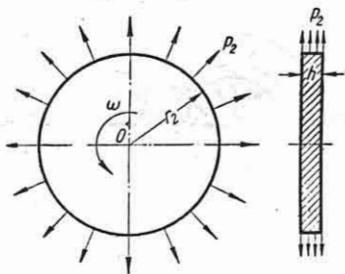
На фиг. 17 представлены эпюры напряжений при  $p_1 = p_2 = 0$ .



Фиг. 17.

**Диск без отверстия.** Диск постоянной толщины без отверстия наружного

радиуса  $r_2$ , толщиной  $h < \frac{r_2}{2}$ , нагруженный на наружной поверхности равномерно распределенной растягивающей нагрузкой  $p_2$  кг/см<sup>2</sup>, вращается с постоянной угловой скоростью относительно оси (фиг. 18).



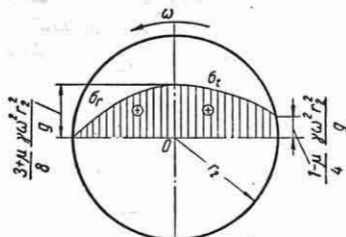
Фиг. 18.

Радиальное и окружное напряжения в точках на расстоянии  $r$  от центра

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} (r_2^2 - r^2) + p_2;$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_2^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) + p_2.$$

На фиг. 19 представлены эпюры напряжений при  $p_2 = 0$ .



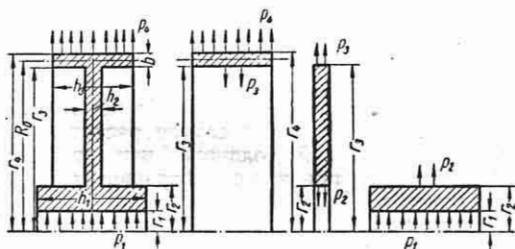
Фиг. 19.

**Диск с ободом и втулкой.** Диск постоянной толщины с ободом и втулкой, нагруженный на внутреннем контуре втулки равномерно распределенным давлением  $p_1$  кг/см<sup>2</sup>, а на внешнем контуре обода равномерно распределенной растягивающей нагрузкой  $p_4$  кг/см<sup>2</sup> (фиг. 20), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Обозначения:  $r_1$  — внутренний радиус втулки;  $r_2$  — наружный радиус втулки и внутренний радиус диска;  $r_3$  — наружный радиус диска и внутренний радиус обода;  $r_4$  — наружный ра-

диус обода;  $h_1$  — ширина втулки;  $h_2$  — толщина диска;  $h_3$  — ширина обода;  $b$  — толщина обода.

Изгиб обода и втулки не учитывается. Обод рассматривается, как тонкостенное кольцо со средним радиусом  $R_0 = \frac{r_3 + r_4}{2}$ .



Фиг. 20.

Для расчета диска, обода и втулки вначале определяются интенсивности распределенной нагрузки  $p_2$  и  $p_3$  в диске на поверхности соприкосновения его с ободом и втулкой (фиг. 20) из следующих двух уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{g} + \frac{p_4 r_4}{b} - \frac{p_3 h_2 r_3}{h_3 b} = \\ & = \frac{3 + \mu}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_2^2 + \frac{1 - \mu}{3 + \mu} r_3^2 \right) + \\ & + \frac{p_3 (r_3^2 + r_2^2) - 2p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu p_3; \\ & \frac{3 + \mu}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_3^2 + \\ & + \frac{2p_3 r_3^2 - p_2 (r_2^2 + r_3^2)}{r_3^2 - r_2^2} - \mu p_2 = \\ & = \frac{3 + \mu}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 + \\ & + \frac{2p_1 r_1^2 + \frac{p_2 h_2}{h_1} (r_1^2 + r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \frac{p_2 h_2}{h_1}. \end{aligned}$$

После определения  $p_2$  и  $p_3$  диск и втулка могут быть рассчитаны по формулам (9), причем для подсчета напряжений во втулке в формулы (9) вместо  $p_2$  подставляется величина  $\frac{p_2 h_2}{h_1}$ . Окружное напряжение в обode определяется по формуле

$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{g} + \frac{p_4 r_4}{b} - \frac{p_3 h_2 r_3}{b h_3}.$$

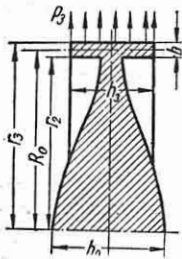
### Равнопрочный диск (фиг. 21)

В случае равномерного нагрева равнопрочным диском без отверстия с ободом называется диск, окружные и радиальные напряжения в котором во всех его точках постоянны и равны между собой:

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma.$$

Толщина равнопрочного диска меняется по закону

$$h = h_0 e^{-\frac{\gamma \omega^2 r^2}{2g\sigma}}$$



Фиг. 21.

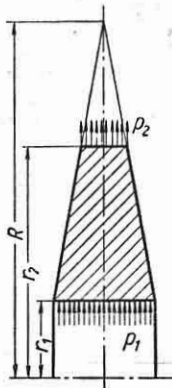
где  $h_0$  — толщина диска в центре, определяемая формулой

$$h_0 = \frac{b h_3}{\sigma r_3} \left[ \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{g} + \frac{p_3 r_3}{b} - (1 - \mu) \sigma \right] e^{\frac{\gamma \omega^2 r_2^2}{2g\sigma}}$$

Подсчитанная по этой формуле толщина  $h_0$  оказывается в ряде случаев невыполнимо большой, что в значительной степени ограничивает возможность применения дисков рассматриваемой конструкции [17].

О равнопрочном равномерно нагретом диске с отверстием как в пределах, так и за пределами упругости см. [13].

Профилирование равнопрочного неравномерно нагретого диска см. на стр. 254.



Фиг. 22.

### Конический диск

**Конический диск без обода и втулки.** Конический диск внутреннего радиуса  $r_1$  и наружного радиуса  $r_2$ , нагруженный на внутреннем контуре равномерно распределенным давлением  $p_1$  кг/см<sup>2</sup>, а на внешнем контуре равномерно распределенной растягивающей нагрузкой  $p_2$  кг/см<sup>2</sup> (фиг. 22), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Радиальное и окружное напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A\varphi_1\left(\frac{r}{R}\right) + B\varphi_2\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3\left(\frac{r}{R}\right); \\ \sigma_t &= A\psi_1\left(\frac{r}{R}\right) + B\psi_2\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \psi_3\left(\frac{r}{R}\right), \end{aligned} \right\} (10)$$

где  $R$  — радиус вершины конуса (фиг. 22);

$A$  и  $B$  — постоянные;  $\varphi_1\left(\frac{r}{R}\right)$ ,  $\varphi_2\left(\frac{r}{R}\right)$ ,  $\varphi_3\left(\frac{r}{R}\right)$ ,  $\psi_1\left(\frac{r}{R}\right)$ ,  $\psi_2\left(\frac{r}{R}\right)$  и  $\psi_3\left(\frac{r}{R}\right)$  — функции отношения текущего радиуса  $r$  к радиусу  $R$ , приведенные в табл. 3 [5].

Таблица 3

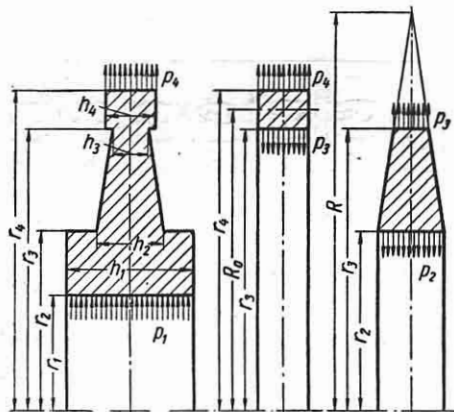
$\frac{r}{R}$	$\varphi_1\left(\frac{r}{R}\right)$	$\varphi_2\left(\frac{r}{R}\right)$	$\varphi_3\left(\frac{r}{R}\right)$	$\psi_1\left(\frac{r}{R}\right)$	$\psi_2\left(\frac{r}{R}\right)$	$\psi_3\left(\frac{r}{R}\right)$
0,00	1,434	—∞	0,1653	1,434	∞	0,1653
0,05	1,492	-273,54	0,1709	1,474	294,28	0,1693
0,10	1,555	-66,62	0,1751	1,517	77,89	0,1724
0,15	1,626	-28,66	0,1777	1,564	36,71	0,1747
0,20	1,706	-15,54	0,1790	1,616	21,91	0,1762
0,25	1,795	-9,53	0,1787	1,673	14,88	0,1768
0,30	1,897	-6,31	0,1770	1,737	10,96	0,1765
0,35	2,014	-4,39	0,1739	1,809	8,53	0,1756
0,40	2,150	-3,158	0,1693	1,889	6,91	0,1737
0,45	2,309	-2,328	0,1632	1,982	5,78	0,1709
0,50	2,500	-1,743	0,1557	2,089	4,94	0,1673
0,55	2,731	-1,318	0,1467	2,216	4,31	0,1629
0,60	3,019	-0,999	0,1362	2,368	3,816	0,1577
0,65	3,387	-0,756	0,1243	2,555	3,422	0,1516
0,70	3,876	-0,567	0,1109	2,793	3,101	0,1446
0,75	4,56	-0,417	0,0961	3,109	2,836	0,1368
0,80	5,57	-0,2974	0,0798	3,557	2,614	0,1282
0,85	7,26	-0,2002	0,0620	4,26	2,425	0,1188
0,90	10,61	-0,1205	0,0428	5,55	2,263	0,1085
0,95	20,64	-0,0547	0,0221	9,09	2,123	0,0973
1,00	∞	0	0	∞	2,00	0,0853

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} -p_1 &= A\varphi_1\left(\frac{r_1}{R}\right) + B\varphi_2\left(\frac{r_1}{R}\right) + \\ &+ \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3\left(\frac{r_1}{R}\right); \\ p_2 &= A\varphi_1\left(\frac{r_2}{R}\right) + B\varphi_2\left(\frac{r_2}{R}\right) + \\ &+ \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3\left(\frac{r_2}{R}\right). \end{aligned}$$

**Конический диск с ободом и втулкой.** Конический диск с ободом и втулкой, нагруженный на внутреннем контуре втулки равномерно распределенным давлением  $p_1$  кг/см<sup>2</sup>, а на внешнем контуре обода равномерно распределенной растягивающей нагрузкой  $p_2$  кг/см<sup>2</sup> (фиг. 23), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Обозначения:  $r_1$  — внутренний радиус втулки;  $r_2$  — наружный радиус втулки и внутренний радиус диска;  $r_3$  — наружный радиус диска и внутренний радиус обода;  $r_4$  — наружный радиус обода;  $h_1$  — ширина втулки;  $h_2$  — толщина диска на радиусе  $r_2$ ;  $h_3$  — толщина



Фиг. 23.

диска на радиусе  $r_3$ ;  $h_4$  — ширина обода;  $b = r_4 - r_3$  — толщина обода.

Изгиб обода и втулки не учитывается. Обод рассматривается как тонкостенное кольцо со средним радиусом  $R_0 = \frac{r_3 + r_4}{2}$ .

Для расчета диска обода и втулки вначале определяются интенсивности распределенной нагрузки  $p_2$  и  $p_3$  в диске на поверхности соприкосновения его с ободом и втулкой и постоянные  $A$  и  $B$  из следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{g} + \frac{p_4 r_4}{b} - \frac{p_3 h_3 r_3}{b h_4} &= A \varphi_1 \left( \frac{r_3}{R} \right) + \\ &+ B \varphi_2 \left( \frac{r_3}{R} \right) + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3 \left( \frac{r_3}{R} \right) - \mu p_3; \\ \frac{3 + \mu}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} (r_1^2 + \frac{1 - \mu}{3 + \mu} r_2^2) + \\ &+ \frac{2 p_1 r_1^2 + p_2 \frac{h_2}{h_1} (r_1^2 + r_2^2)}{r_2^2 - r_1^2} - \mu p_2 \frac{h_2}{h_1} = \\ &= A \varphi_1 \left( \frac{r_2}{R} \right) + B \varphi_2 \left( \frac{r_2}{R} \right) + \\ &+ \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3 \left( \frac{r_2}{R} \right) - \mu p_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \varphi_1 \left( \frac{r_3}{R} \right) + B \varphi_2 \left( \frac{r_3}{R} \right) + \\ + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3 \left( \frac{r_3}{R} \right) &= p_3; \\ A \varphi_1 \left( \frac{r_2}{R} \right) + B \varphi_2 \left( \frac{r_2}{R} \right) + \\ + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} \varphi_3 \left( \frac{r_2}{R} \right) &= p_2. \end{aligned}$$

После определения  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $A$  и  $B$  напряжения в диске определяются по формулам (10), напряжения во втулке — по формулам (9), причем вместо  $p_2$  в эти формулы подставляется величина  $\frac{p_2 h_2}{h_1}$ . Окружное напряжение в обode подсчитывается по формуле

$$\sigma_t = \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{g} + \frac{p_4 r_4}{b} - \frac{p_3 h_3 r_3}{b h_4}.$$

### Диск гиперболического профиля

Диском гиперболического профиля называется диск, толщина которого меняется по закону

$$h = Br^{-\alpha}.$$

Для диска гиперболического профиля удобно напряжения выразить через функции радиуса  $S = S(r)$  и  $D = D(r)$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S - D}{m - n}; \\ \sigma_t &= D - n \sigma_r. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \mu \alpha + 1}; \\ n &= \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \mu \alpha + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Функции  $S$  и  $D$  для радиуса  $r_{i+1}$  связаны со значениями этих функций для радиуса  $r_i$  следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} S_{i+1} &= \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^{m-1} (S_i + M r_i^2) - M r_{i+1}^2; \\ D_{i+1} &= \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^{n-1} (D_i + N r_i^2) - N r_{i+1}^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{m + \mu}{3 - m}; \\ N &= \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{n + \mu}{3 - n} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Напряжения  $\sigma_{r, i+1}$ ;  $\sigma_{t, i+1}$  на радиусе  $r_{i+1}$  определяют следующим образом: по напряжениям  $\sigma_{ri}$  и  $\sigma_{ti}$  находят величины

$$\left. \begin{aligned} S_i &= m\sigma_{ri} + \sigma_{ti}; \\ D_i &= n\sigma_{ri} + \sigma_{ti} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

[см. формулы (11)]. Далее по формулам (13) определяют значения функций  $S$  и  $D$  для радиуса  $r_{i+1}$ ,  $S_{i+1}$ ,  $D_{i+1}$ , после чего по формулам (11) находят напряжения  $\sigma_{r, i+1}$  и  $\sigma_{t, i+1}$ .

#### Расчет равномерно нагретого диска переменной толщины по методу С. А. Тумаркина [16]

Профиль диска разбивается на участки, близкие гиперболическим.

Для гиперболического диска зависимость его толщины от радиуса в логарифмических координатах линейная:

$$\lg h = \lg B - \alpha \lg r,$$

поэтому для разбивки профиля диска на участки в логарифмических координатах строится график зависимости толщины от радиуса (см. пример). Полученная кривая приближенно заменяется ломаной, отрезки которой соответствуют гиперболическим участкам профиля. Величина  $\alpha$  для гиперболического участка профиля находится по уравнению

$$\alpha = \frac{\lg h_i - \lg h_{i+1}}{\lg r_{i+1} - \lg r_i}, \quad (16)$$

где  $h_i$  и  $h_{i+1}$  — толщины диска на радиусах  $r_i$  и  $r_{i+1}$  соответственно.

Для участков постоянной толщины  $\alpha = 0$ , и поэтому  $m = 1$ ,  $n = -1$ , а следовательно,

$$S_i = \sigma_{ti} + \sigma_{ri}; \quad D_i = \sigma_{ti} - \sigma_{ri};$$

$$M = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (1 + \mu); \quad N = -\frac{\gamma \omega^2}{4g} (1 - \mu);$$

$$\sigma_r = \frac{S - D}{2}; \quad \sigma_t = \frac{S + D}{2}.$$

Так как обычно известны радиальные напряжения на наружном и внутреннем радиусах диска  $\sigma_{r1} = -p_1$ ,  $\sigma_{r2} = p_2$ , а величина окружного напряжения на внутреннем радиусе  $\sigma_{t1}$  неизвестна, то расчет ведут дважды.

Первый расчет. Для первого расчета величину  $\sigma_{t1}$  берут произвольной и, зная  $\alpha$  для каждого участка, определяют, как изложено в расчете гиперболического диска, радиальное и окружное напряжения от участка к участку по всему диску. Если толщина диска меняется скачкообразно, то напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  также получают скачкообразные приращения  $\Delta\sigma_r$  и  $\Delta\sigma_t$ :

$$\Delta\sigma_r = -\frac{\Delta h}{h + \Delta h} \sigma_r; \quad (17)$$

$$\Delta\sigma_t = \mu \Delta\sigma_r. \quad (18)$$

Формула (17) получена из уравнения равновесия элемента диска, а формула (18) — из условия равенства радиальных смещений.

Второй расчет. При втором расчете диск рассматривается неподвижным:  $\omega = 0$  и, следовательно,  $M = N = 0$ . Формулы (13) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} S_{i+1} &= \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^{m-1} S_i; \\ D_{i+1} &= \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)^{n-1} D_i. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для участка постоянной толщины

$$S_{i+1} = S_i;$$

$$D_{i+1} = D_i.$$

Радиальное напряжение на внутреннем радиусе во втором расчете принимается равным нулю, а окружное выбирается произвольным. В остальном второй расчет аналогичен первому.

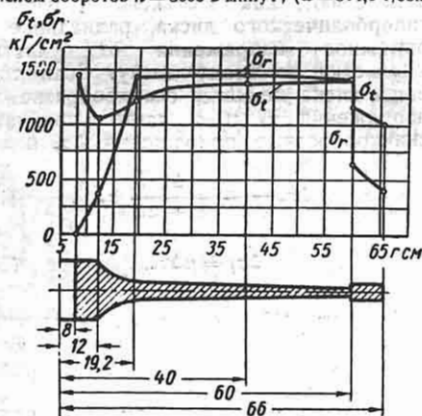
Напряжения в диске определяются как сумма напряжений, полученных из первого расчета  $(\sigma_r)_I$ ,  $(\sigma_t)_I$ , и напряжений из второго расчета  $(\sigma_r)_{II}$  и  $(\sigma_t)_{II}$ , умноженных на коэффициент  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (\sigma_r)_I + k(\sigma_r)_{II}; \\ \sigma_t &= (\sigma_t)_I + k(\sigma_t)_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Коэффициент  $k$  находится из условия равенства радиального напряжения на внешнем радиусе интенсивности распределенной нагрузки  $p_2$ :

$$k = \frac{p_2 - (\sigma_{r2})_1}{(\sigma_{r2})_{II}} \quad (21)$$

Пример [16]. Произвести поверочный расчет диска, изображенного на фиг. 24, вращающегося с числом оборотов  $n = 3000$  в минуту ( $\omega = 314,1$  1/сек).



Фиг. 24.

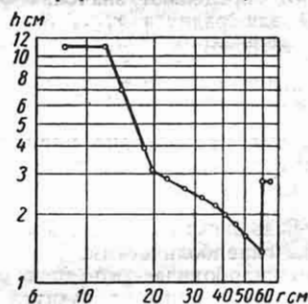
Давление на внутренней поверхности ступицы диска  $p_2 = 0$ , интенсивность распределенной нагрузки на внешней поверхности обода  $p_2 = 400$  кг/см<sup>2</sup>. Коэффициент Пуассона материала диска  $\mu = 0,3$ . Толщина диска на различных радиусах задана табл. 4.

По данным табл. 4 наносим точки на логарифмическую сетку (фиг. 25). Эти точки соединяются

Таблица 4  
Толщина  $h$  диска на различных радиусах

г в см	h в см	г в см	h в см	г в см	h в см
8	11	27,5	2,64	52,5	1,50
12	11	32,5	2,40	57,5	1,30
14	6,93	37,5	2,17	60	2,8
18	3,81	42,5	1,94	66	2,8
22,5	2,89	47,5	1,71		

ломаной из пяти звеньев. Как следует из фиг. 25, профиль диска можно принять состоящим из трех гиперболических участков и двух участков постоянной толщины. Радиусы границ участков записываем в 1-й графе табл. 5. Толщину диска на этих



Фиг. 25.

радиусах заносим во 2-ю графу. Коэффициент  $\alpha$  для каждого участка находим по формуле (16) (3-я графа). Величины  $m$  и  $n$  для каждого участка находим по формулам (12) (4-я и 5-я графы).

№ участка	г в см		$\alpha$	$m$	$n$	$r_1 + 1 / r_1$	$\left( \frac{r_1 + 1}{r_1} \right)^{m-1}$	$\left( \frac{r_1 + 1}{r_1} \right)^{n-1}$	$M$	$N$	$r_1^2$	$M r_1^2$	$N r_1^2$
	г в см	h в см											
1	8 12	11 11	0	1	-1	1,5	1	0,445	0,51	-0,1375	64 144	32,6 73,5	-8,8 -19,8
2	12 19,2	11 3,2	2,63	3,19	-0,56	1,6	2,8	0,48	-14,43	-0,0574	144 369	-2080 -5330	-8,26 -21,2
3	19,2 40	3,2 2,1	0,574	1,407	-0,833	2,08	1,347	0,26	0,841	-0,109	369 1600	311 1348	-40,2 -174,3
4	40 60	2,1 1,24	1,3	1,995	-0,695	1,5	1,497	0,503	1,79	-0,084	1600 3600	2860 6440	-134,5 -302
5	60 66	2,8 2,8	0	1	-1	1,1	1	0,826	1,51	-0,1375	3600 4350	1837 2220	-495 -598

Первый расчет. По условию  $\sigma_{r1} = 0$ . Принимаем  $\sigma_{t1} = 1000 \text{ кг/см}^2$ . Определяем  $S_1$  и  $D_1$ :

$$S_1 = m\sigma_{r1} + \sigma_{t1} = 1000;$$

$$D_1 = p\sigma_{r1} + \sigma_{t1} = 1000.$$

Далее, по формулам (13) определяем  $S$  и  $D$  на границе каждой ступени, для чего предварительно

подсчитываем величины  $\frac{r_i + 1}{r_i} ; \left(\frac{r_i + 1}{r_i}\right)^{m-1} ;$

$\left(\frac{r_i + 1}{r_i}\right)^{n-1} ; M ; N ; r_i^2 ; Mr_i^2 \text{ и } Nr_i^2 (6\text{-я} - 13\text{-я}$

графы). Величины  $M$  и  $N$  определяются по формулам (14). Полученные величины  $S$  и  $D$  приведены в 14-й и 15-й графы.

После определения  $S$  и  $D$  находим радиальное и окружное напряжения по формулам (11) (16-я и 17-я графы).

Отметим, что при переходе от четвертого участка к пятому необходимо учесть скачок в толщине.

По формуле (17)

$$\Delta\sigma_r = -\frac{\Delta h}{h + \Delta h} \sigma_r =$$

$$= -\frac{2,8 - 1,24}{2,8} 348 = -194 \text{ кг/см}^2,$$

и, следовательно,

$$(\sigma_r)_5 = (\sigma_r)_4 + \Delta\sigma_r = 348 - 194 = 154 \text{ кг/см}^2.$$

Далее, по формуле (18)

$$\Delta\sigma_t = \mu\Delta\sigma_r = -0,3 \cdot 194 = -58,2 \text{ кг/см}^2 ;$$

$$(\sigma_t)_5 = (\sigma_t)_4 + \Delta\sigma_t = 617 - 58,2 = 559 \text{ кг/см}^2.$$

Второй расчет. Принимаем  $\sigma_{r1} = 0$ .  $\sigma_{t1} = 1000 \text{ кг/см}^2$ . Величины  $S$  и  $D$  определим по

формулам (19) (18-я и 19-я графы). Радиальные и окружные напряжения находим по формулам (11) (20-я и 21-я графы). Во втором расчете, так же

как и в первом, учитываем скачок в толщине при переходе от четвертого участка к пятому.

После выполнения второго расчета по формуле (21) определяем коэффициент:

$$k = \frac{400 + 96,6}{1045} = 0,475$$

и затем по формулам (20) находим истинные радиальное и окружное напряжения в диске (25 и 26-я графы).

По данным табл. 5 на фиг. 24 построены эпюры радиальных и окружных напряжений по радиусу диска.

Равномерно нагретый диск переменной толщины может быть рассчитан также по методу М. И. Яновского как частный случай неравномерно нагретого диска (см. ниже).

### Расчет неравномерно нагретого диска переменной толщины

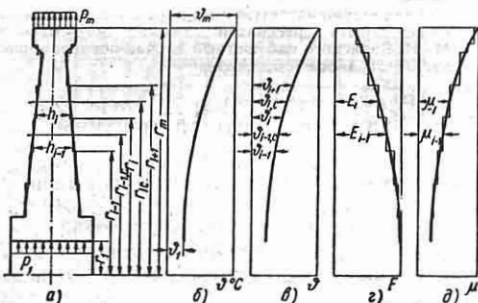
Неравномерно нагретый по радиусу диск переменной толщины  $h$ , внутренний радиус которого  $r_1$ , а наружный  $r_m$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . По внутреннему контуру диск нагружен равномерно распределенным давлением  $p_1 \text{ кг/см}^2$ , а по наружному контуру — равномерно распределенной растягивающей нагрузкой интенсивностью  $p_m$  (фиг. 26, а). Температурное поле диска является стационарным, температура по толщине диска постоянна. График изменения температуры по радиусу диска представлен на фиг. 26, б. В расчетах учитывается зависимость модуля упругости  $E$ , коэффициента Пуассона  $\mu$  и коэффициента линейного расширения  $\alpha$  от температуры  $\vartheta$ . Эти зависимости считаются известными. При

Таблица 5

$S$	$D$	$(\sigma_r)$ в $\text{кг/см}^2$	$(\sigma_t)$ в $\text{кг/см}^2$	$S$	$D$	$(\sigma_r)_{II}$ в $\text{кг/см}^2$	$(\sigma_t)_{II}$ в $\text{кг/см}^2$	$k$ $(\sigma_r)_{II}$ в $\text{кг/см}^2$	$k$ $(\sigma_t)_{II}$ в $\text{кг/см}^2$	$\sigma_r$ в $\text{кг/см}^2$	$\sigma_t$ в $\text{кг/см}^2$
1000 959,1	100 460,8	0 249,2	1000 710	1000 1000	1000 445	0 278	1000 723	0 132	475 343	0 381	1417 1053
1505 3720	570,2 291,2	249,2 914	710 802	1610 4510	567 272	278 1130	723 904	132 537	343 429	381 1451	1053 1231
2087 1877	42 171,8	914 758	802 805,8	2494 3360	37 9,61	1130 1490	904 1250	537 708	429 594	1451 1466	1231 1400
2317 1310	279,8 375	758 348	805,8 617	4220 6310	215 108	1490 2310	1250 1713	708 1095	594 815	1466 1443	1400 1432
712,8 329,8	404,8 523,5	154 -96,6	558,8 427	2346 2346	306 253	1020 1045	1326 1298	485 497	630 616	639 400	1189 1043

помощи их строятся графики изменения величин  $\theta = \alpha\vartheta$ ,  $E$  и  $\mu$  по радиусу (фиг. 26, в-д).

В первых трех изложенных ниже методах расчета профиль диска заменяется ступенчатым профилем, состоящим из участков постоянной толщины, так, чтобы толшины участков совпадали с толщинами истинного профиля в серединах участков (фиг. 26, а). Модуль



Фиг. 26.

упругости и коэффициент Пуассона на каждом участке приблизительно принимаются постоянными и равными соответствующим величинам на средних радиусах участков.

Метод М. И. Яновского [12], [17]. Обозначим

$$S = \sigma_t + \sigma_r; \quad D = \sigma_t - \sigma_r, \quad (22)$$

тогда

$$\sigma_t = \frac{S + D}{2}; \quad \sigma_r = \frac{S - D}{2}. \quad (23)$$

Функции  $S$  и  $D$  на  $r_{i+1}$ -м радиусе  $i$ -го участка  $S_{i,i+1}$ ,  $D_{i,i+1}$  (первый индекс указывает номер участка, а второй — номер радиуса) связаны с соответствующими функциями на  $r_i$ -м радиусе  $i$ -го участка  $S_{i,i}$ ,  $D_{i,i}$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} S_{i,i+1} &= S_{i,i} - E_i (\theta_{i+1} - \theta_i) - \\ &\quad - \frac{1 + \mu_i}{2} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} (r_{i+1}^2 - r_i^2); \\ D_{i,i+1} &= D_{i,i} \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} + \\ &\quad + 2E_i \frac{\Delta T_i}{r_{i+1}^2} - E_i \left( \theta_{i+1} - \theta_i \frac{r_i^2}{r_{i+1}^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1 - \mu_i}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_{i+1}^2 - \frac{r_i^4}{r_{i+1}^2} \right). \end{aligned} \right\} (24)$$

где  $E_i$  и  $\mu_i$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона на  $i$ -м участке;  $\theta_i$  и  $\theta_{i+1}$  — произведение коэффициента линейного расширения на температуру на радиусах  $r_i$  и  $r_{i+1}$  соответственно.

$$\Delta T_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \theta r dr.$$

Величина  $\Delta T_i$  определяется по формуле

$$\Delta T_i = \frac{\theta_i - \lambda_i r_i}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2) + \frac{\lambda_i}{3} (r_{i+1}^3 - r_i^3),$$

где

$$\lambda_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{r_{i+1} - r_i}.$$

Функции  $S$  и  $D$  на среднем радиусе  $i$ -го участка  $r_{ic}$  —  $S_{ic}$ ,  $D_{ic}$  связаны с величинами  $S_{ii}$  и  $D_{ii}$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} S_{ic} &= S_{ii} - E_i (\theta_{ic} - \theta_{ii}) - \\ &\quad - \frac{1 + \mu_i}{2} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} (r_{ic}^2 - r_{ii}^2); \\ D_{ic} &= D_{ii} \frac{r_{ii}^2}{r_{ic}^2} + 2E_i \frac{\Delta T_{ic}}{r_{ic}^2} - E_i \times \\ &\quad \times \left( \theta_{ic} - \theta_{ii} \frac{r_{ii}^2}{r_{ic}^2} \right) + \frac{1 - \mu_i}{4} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \times \\ &\quad \times \left( r_{ic}^2 - \frac{r_{ii}^4}{r_{ic}^2} \right). \end{aligned} \right\} (25)$$

где

$$\Delta T_{ic} = \int_{r_i}^{r_{ic}} \theta r dr = \frac{\theta_i - \lambda_i r_i}{2} \times \\ \times (r_{ic}^2 - r_i^2) + \frac{\lambda_i}{3} (r_{ic}^3 - r_i^3).$$

Напряжения на  $i$ -м радиусе  $i-1$ -го и  $i$ -го участков  $\sigma_{ii-1}$ ,  $\sigma_{ri-1}$ ,  $\sigma_{iii}$ ,  $\sigma_{rii}$  (второй индекс указывает номер участка, а третий — номер радиуса) связаны соотношениями

$$\sigma_{rii} = \sigma_{ri-1} \frac{h_{i-1}}{h_i}; \quad (26)$$



$$\sigma_{i11} - \mu_i \sigma_{r11} = \frac{E_i}{E_{i-1}} (\sigma_{i1-1} - \mu_{i-1} \sigma_{r1-1}), \quad (27)$$

где  $h_{i-1}$  и  $h_i$  — толщины диска на  $i-1$ -м и  $i$ -м участках соответственно.

Формула (26) получена из уравнения равновесия элемента, вырезанного на границе  $i-1$ -го и  $i$ -го участков, а формула (27) — из условия непрерывности радиальных перемещений на этой же границе. Функции  $S$  и  $D$  на  $i$ -м радиусе  $i-1$ -го и  $i$ -го участков  $S_{i-1}$ ,  $D_{i-1}$ ,  $S_{ii}$  и  $D_{ii}$  связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} S_{ii} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ (1 - \mu_{i-1}) \frac{E_i}{E_{i-1}} + (1 + \mu_i) \frac{h_{i-1}}{h_i} \right] S_{i-1} + \right. \\ &+ \left. \left[ (1 + \mu_{i-1}) \frac{E_i}{E_{i-1}} - (1 + \mu_i) \frac{h_{i-1}}{h_i} \right] D_{i-1} \right\}; \\ D_{ii} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ (1 - \mu_{i-1}) \frac{E_i}{E_{i-1}} - (1 - \mu_i) \frac{h_{i-1}}{h_i} \right] S_{i-1} + \right. \\ &+ \left. \left[ (1 + \mu_{i-1}) \frac{E_i}{E_{i-1}} + (1 - \mu_i) \frac{h_{i-1}}{h_i} \right] D_{i-1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Так как обычно известны радиальные напряжения на наружном и внутреннем радиусах дисков  $\sigma_{r11} = -p_1$  и  $\sigma_{rm-1m} = -p_m$ , а величина окружного напряжения на внутреннем радиусе  $\sigma_{i11}$  неизвестна, то расчет ведут дважды.

Первый расчет. Для первого расчета величину  $\sigma_{i11}$  берут произвольной и, зная  $\sigma_{r11} = -p_1$ , по формулам (22) подсчитывают функции  $S_{11}$  и  $D_{11}$ .

Для случая диска без отверстия в центральной точке при  $r=0$   $\sigma_{r11} = \sigma_{i11}$  и поэтому  $S_{11} = 2\sigma_{i11}$ ;  $D_{11} = 0$ .

Величиной  $\sigma_{i11} = \sigma_{r11}$ , так же как и для диска с отверстием, задаемся произвольно.

Далее, по формулам (25) определяют  $S_{ic}$  и  $D_{ic}$ , затем, используя соотношения (24),  $S_{12}$  и  $D_{12}$ , после чего при помощи выражений (28) находят  $S_{22}$  и  $D_{22}$ , а затем по формулам (25)  $S_{2c}$  и  $D_{2c}$  и т. д. Продвигаясь таким образом от ступицы к ободу, последовательно подсчитывают величины  $S_{ic}$  и  $D_{ic}$  на средних радиусах всех участков, а также величины  $S$  и  $D$  на наружном радиусе  $S_{m-1m}$  и  $D_{m-1m}$ .

Если построение эпюры напряжений ведется не по величинам напряжений на средних радиусах участков, а по величинам напряжений на границах участ-

ков, то тогда величины  $S_{ic}$  и  $D_{ic}$  на средних радиусах участков не определяют и после нахождения  $S_{11}$  и  $D_{11}$  подсчитывают  $S_{12}$  и  $D_{12}$  по формулам (24), а затем, используя соотношения (23), — напряжения в конце первого участка  $\sigma_{i12}$  и  $\sigma_{r12}$ .

Далее, по формулам (26) и (27) находят напряжения в начале второго участка  $\sigma_{i22}$  и  $\sigma_{r22}$ , после чего, используя соотношения (22), вычисляют  $S_{22}$  и  $D_{22}$  и т. д.

Таким образом подсчитывают напряжения на границах участков и напряжения на наружном радиусе  $r_m = \sigma_{rm-1m}$  и  $\sigma_{im-1m}$ . В этом случае для каждого напряжения на границе участка получают два значения. За действительную величину напряжения принимается среднее арифметическое этих двух величин.

Второй расчет выполняют в предположении, что диск неподвижен ( $\omega=0$ ), температурные слагаемые в приведенных выше формулах отсутствуют ( $\theta=0$ ;  $\Delta T=0$ ), а модуль упругости и коэффициент Пуассона изменяются по радиусу так же, как и в первом расчете.

Окружное напряжение на внутреннем радиусе во втором расчете, так же как и в первом, выбирается произвольным, а радиальное напряжение на внутреннем радиусе диска с отверстием всегда принимается равным нулю.

В случае диска без отверстия в центральной точке при  $r=0$   $\sigma_{r11} = \sigma_{i11}$  и поэтому  $S_{11} = 2\sigma_{i11}$ ;  $D_{11} = 0$ .

Величиной  $\sigma_{i11} = \sigma_{r11}$ , так же как и для диска с отверстием, задаемся произвольно. В остальном второй расчет аналогичен первому.

Если эпюра напряжений строится по величинам напряжений, подсчитанных для средних радиусов участков, то тогда напряжения определяют по формулам (23), причем функции  $S$  и  $D$  находят как сумму функций  $(S)_I$  и  $(D)_I$ , полученных из первого расчета, и функций  $(S)_{II}$  и  $(D)_{II}$ , найденных из второго расчета, умноженных на коэффициент  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} S &= (S)_I + k(S)_{II}; \\ D &= (D)_I + k(D)_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Коэффициент  $k$  вычисляют из условия равенства радиального напряжения на внешнем контуре интенсивности распределенной нагрузки:

$$k = \frac{2p_m - (S_{m-1})_I + (D_{m-1})_I}{(S_{m-1})_{II} - (D_{m-1})_{II}} \quad (30)$$

Если эпюра напряжений строится по величинам напряжений, подсчитанных на границах участков, то тогда напряжения определяют как сумму напряжений  $(\sigma_t)_I$  и  $(\sigma_r)_I$ , полученных из первого расчета, и напряжений из второго расчета  $(\sigma_t)_{II}$  и  $(\sigma_r)_{II}$ , умноженных на коэффициент  $k$ :

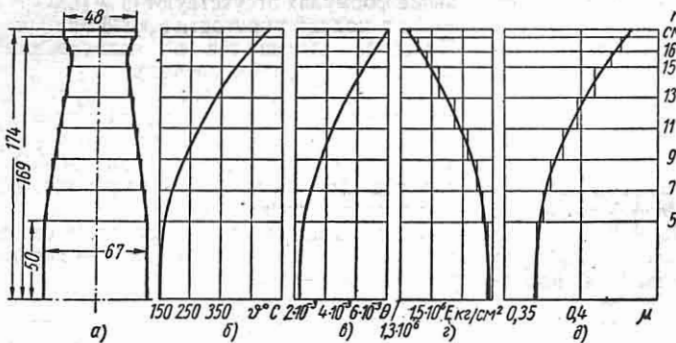
$$\sigma_t = (\sigma_t)_I + k(\sigma_t)_{II};$$

$$\sigma_r = (\sigma_r)_I + k(\sigma_r)_{II}.$$

Коэффициент  $k$  вычисляют по формуле

$$k = \frac{p_m - (\sigma_{r_{m-1}})_I}{(\sigma_{r_{m-1}})_{II}}.$$

**Пример.** Произвести поверочный расчет на прочность неравномерно нагретого диска переменной толщины без центрального отверстия (фиг. 27, а), вращающегося с постоянным числом



Фиг. 27.

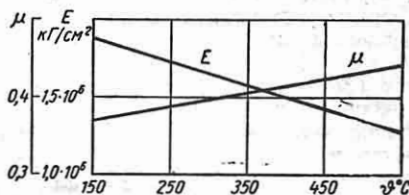
оборотов  $n = 12300$  в минуту ( $\omega = 1290$  1/сек). Интенсивность распределенной нагрузки, возникшей в результате вращения лопаток и замков, на наружной поверхности обода  $p_m = 1400$  кг/см<sup>2</sup>. Вес единицы объема материала диска  $\gamma = 0,0081$  кг/см<sup>3</sup>. График изменения температуры по радиусу диска представлен на фиг. 27, б (использованы выше условия примера заимствованы из работы [3]). Зависимости модуля упругости и коэффициента Пуассона от температуры изображены на фиг. 28.

Ввиду незначительного изменения в интервале заданных температур коэффициент линейного расширения принят постоянным и равным  $\alpha = 16 \times 10^{-6}$  см/см<sup>3</sup> °С.

Профиль диска заменен ступенчатым профилем, состоящим из девяти участков постоянной толщины (фиг. 27).

Толщины профиля на различных участках приведены в табл. 6.

Используя приведенную выше величину  $\alpha$ , а также графики изменения температуры по радиусу



Фиг. 28.

диска и зависимости модуля упругости и коэффициента Пуассона от температуры, строим эпюры изменения величин  $\theta$ ,  $E$  и  $\mu$  по радиусу (фиг. 27, в-д).

Эпюры изменения  $E$  и  $\mu$  по радиусу приближенно заменены эпюрами ступенчатого вида (фиг. 27, з и д). Величины  $\theta$  на различных радиусах, а также  $E$  и  $\mu$  на участках приведены в табл. 6.

В первом расчете принято  $\sigma_{t_{11}} = \sigma_{r_{11}} = 2000$  кг/см<sup>2</sup> и по формулам (22) определены величины  $S_{11}$  и  $D_{11}$  в центральной точке. Затем по формулам (25) и (24) подсчитаны значения функций  $S$  и  $D$  на среднем и конечном радиусах первого участка  $S_{1c}$  и  $D_{1c}$  и  $S_{11}$  и  $D_{11}$ , после чего по формулам (28) вычислены величины функций  $S$  и  $D$  на начальном радиусе второго участка  $S_{21}$  и  $D_{21}$ . Таким образом определены значения функций

$S$  и  $D$  на средних радиусах всех участков и на наружном радиусе. Результаты подсчетов сведены в табл. 6.

Во втором расчете также принято  $\sigma_{t_{11}} = \sigma_{r_{11}} = 2000$  кг/см<sup>2</sup> и, так же как в первом расчете, определены величины функций  $S$  и  $D$  на средних радиусах всех участков и на наружном радиусе. Во втором расчете в формулах (24) и (25) величины  $\omega$ ,  $\theta$  и  $\Delta T$  приняты равными нулю.

После определения значений функций  $S$  и  $D$  на наружном радиусе в первом и втором расчетах по формуле (30) подсчитан

коэффициент  $k = 1,10$ . Затем по формулам (29) вычислены величины функций  $S$  и  $D$  в центральной точке, на средних радиусах участков и на наружном радиусе, после чего по формулам (23) подсчитаны напряжения в этих же точках.

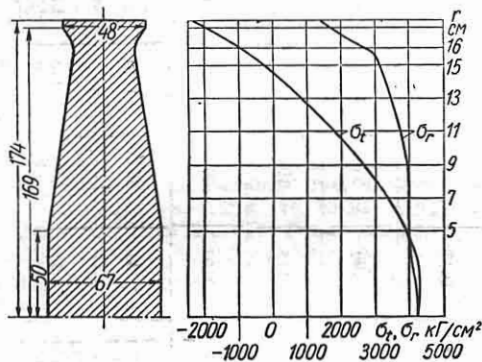
Результаты подсчетов приведены в табл. 6. По данным табл. 6 на фиг. 29 построены эпюры радиальных и окружных напряжений по радиусу диска.

В расчетах дисков радиальных турбомашин упрочнение диска за счет лопаточного и изгиб диска в случае одностороннего входа пара или газа не учитыва-

Таблица 6

№ участка	r в см	h в см	$0 \cdot 10^3$	E-10-6 в кг/см <sup>2</sup>	$\mu$	$\lambda \cdot 10^6$	$\Delta T$ в град	(S) I в кг/см <sup>2</sup>	(D) I в кг/см <sup>2</sup>	(S) II в кг/см <sup>2</sup>	(D) II в кг/см <sup>2</sup>	S в кг/см <sup>2</sup>	D в кг/см <sup>2</sup>	$\sigma_t$ в кг/см <sup>2</sup>	$\sigma_r$ в кг/см <sup>2</sup>
1	0		2,40				0	4000	0	4000	0	8420	0	4210	4210
	2,5	6,7	2,40	1,87	0,371	0,048	7,75	3940	163	4000	0	8360	163	4210	4100
	5		2,64				32,0	3320	-96,0	4000	0				
2	5		2,64					3410	-160	4110	-77,8	7550	-370	3590	3960
	6	6,4	2,80	1,83	0,375	0,205	15,1	3020	-304	4110	-59,6				
	7		3,05				34,3	2440	-560	4110	-39,7				
3	7		3,05					2650	-657	4390	-190	6910	-990	2960	3950
	8	5,8	3,30	1,79	0,380	0,300	24,0	2060	-831	4390	-145				
	9		3,65				53,8	1270	-1140	4390	-115				
4	9		3,65					1490	-1200	4720	-298	5940	-1680	2130	3810
	10	5,2	3,98	1,73	0,388	0,365	36,4	737	-1410	4720	-242				
	11		4,38				80,5	-194	-1710	4720	-200				
5	11		4,38					51,5	-1710	5140	-431	4790	-2370	1210	3680
	12	4,6	4,80	1,65	0,397	0,445	53,0	-870	-1970	5140	-362				
	13		5,27				116	-1880	-2310	5140	-309				
6	13		5,27					-1700	-2190	5670	-598	3420	-3100	160	3260
	14	4,0	5,80	1,55	0,409	0,580	75,2	-2840	-2530	5670	-516				
	15		6,43				164	-4040	-3020	5670	-449				
7	15		6,43					-3950	-2820	6110	-686	2150	-3650	-749	2900
	15,5	3,6	6,70	1,47	0,419	0,570	50,1	-4600	-2940	6110	-642				
	16		7,00				104	-5090	-3150	6110	-603				
8	16		7,00					-4750	-3090	5390	-359	530	-3630	-1550	2080
	16,45	4,2	7,30	1,41	0,426	0,689	52,3	-5410	-3250	5390	-340				
	16,9		7,62				108	-5910	-3480	5390	-322				
9	16,9		7,62					-5580	-3460	4860	-144	-660	-3700	-2180	1520
	17,15	4,8	7,80	1,37	0,430	0,760	32,9	-6020	-3570	4860	-140	-1020	-3820	-2420	1400
	17,4		8,00				66,9	-6380	-3670	4860	-136				

ются Расчет диска радиальной турбомашин (радиальной турбины, центро-



Фиг. 29.

бежного компрессора) (фиг. 30) производят по приведенному переменному по радиусу весу единицы объема материала:

$$\gamma^* = \gamma_{\partial} \left( 1 + \frac{\gamma_A F z}{\gamma_{\partial} 2\pi r h} \right), \quad (31)$$

где  $\gamma_{\partial}$  — вес единицы объема материала диска;  $\gamma_A$  — вес единицы объема материала лопаток;  $F$  — площадь сечения лопатки на текущем радиусе  $r$ ;  $h$  — толщина диска на текущем радиусе;  $z$  — число лопаток (в случае турбомашин с двусторонним входом пара или газа — число лопаток с обеих сторон).

Для расчета диска по формуле (31) строят эпюру приведенного веса единицы объема материала  $\gamma^*$ . Далее величины  $\gamma^*$  на каждом участке диска приближенно принимают постоянными и равными соответствующим величинам на средних радиусах участков. Таким образом, эпюру изменения  $\gamma^*$  заменяют эпюрой ступенчатого вида. В остальном расчет диска производят так, как было изложено выше.

**Метод С. Д. Пономарева** [12]. Поверочный расчет диска. Расчет производится графическим способом. В любой точке каждой  $i$ -й ступени диска, имеющей постоянную толщину и упругие характеристики  $E_i$ ,  $\mu_i$ , опре-

деляемые средней температурой ступени, окружное  $\sigma_{\theta i}$  и радиальное  $\sigma_{r i}$  напряжения при использовании подстановки  $x = \frac{1}{r^2}$  могут быть выражены следующим образом [12]:

$$\sigma_{\theta i} = A_i + B_i x - F_i(x); \quad (32)$$

$$\sigma_{r i} = A_i - B_i x - R_i(x), \quad (33)$$

где

$$F_i(x) = E_i \beta - E_i x \Delta T_i + \frac{1 + 3\mu_i}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{x}; \quad (34)$$

$$R_i(x) = E_i x \Delta T_i + \frac{3 + \mu_i}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{x}, \quad (35)$$

а

$$\Delta T_i = \int_{r_i}^{r_{i+1}} \theta r dr = \Delta T_i(x) \quad (36)$$

[для дисков, нагретых равномерно, функции  $F_i(x)$  и  $R_i(x)$  являются уравнениями равносторонних гипербол].

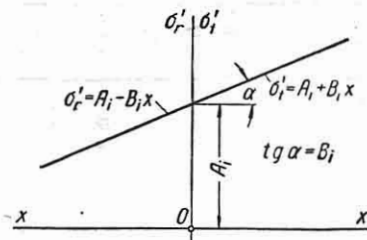
Вычисление  $\Delta T_i$  см. стр. 244.

$A_i$  и  $B_i$  — постоянные для  $i$ -й ступени. Прочие величины, входящие в зависимости (32) — (36), пояснены выше.

Для графического представления зависимостей (32) и (33) используются системы координат  $(x, \sigma_{\theta i})$  и  $(x, \sigma_{r i})$ .

Координаты  $x$  в рассматриваемом случае всегда имеют только положительное значение.

Если совместить начала координат и оси ординат (фиг. 31), а оси абсцисс  $x$



Фиг. 31.

направить в противоположные стороны, то прямые

$$\sigma'_{\theta i} = A_i + B_i x;$$

$$\sigma'_{r i} = A_i - B_i x$$

каждая в своей области существования являются продолжением одна другой и

составляют так называемую замыкающую прямую.

В этом случае  $A_1$  представляет собой отрезок, отсекаемый замыкающей прямой на оси ординат (фиг. 31).  $B_1$  определяет наклон замыкающей прямой к оси абсцисс.

Для расчета диска постоянной толщины проводятся следующие построения.

1. Диск постоянной толщины с центральным отверстием. Известны:

1) радиальное напряжение на внутреннем радиусе

$$\sigma_{r1} = -p_1,$$

где  $p_1 \text{ кг/см}^2$  — давление от посадки с натягом;

2) радиальное напряжение на внешнем радиусе

$$\sigma_{r2} = +p_2,$$

где  $p_2 \text{ кг/см}^2$  — удельная нагрузка, приложенная к диску в связи с вращением присоединенных масс (обод, лопатки и т. д.).

Предварительно по формулам (34) и (35) в избранном для напряжений масштабе  $\beta \text{ кг/см}^2$  на 1 мм в указанных выше совмещенных системах координат строятся функция  $F(x)$  [кривая  $a_1a_2$  в системе  $(x, \sigma_t)$ ] и функция  $R(x)$  [кривая  $b_1b_2$  в системе  $(x, \sigma_r)$ ] (фиг. 32). [Предполагается, что функция  $\Delta T(x)$ , необходимая для составления уравнений  $F(x)$  и  $R(x)$ , заранее установлена аналитически или графически в соответствии с законом распределения температуры по радиусу диска (см. стр. 244)].

Затем проводится замыкающая прямая  $d_1d_2$  так, чтобы граничные условия были удовлетворены (см. фиг. 32).

точки  $b_1$  вниз от кривой  $b_1b_2$ , поскольку  $p_1 < 0$

Отрезок  $b_2d_2$  при  $x_2$  в масштабе  $\beta$  равен  $p_2 \text{ кг/см}^2$ . Он отложен от точки  $b_2$  вверх, поскольку  $p_2 > 0$ .

Отрезки, заключенные между кривыми  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$  и замыкающей прямой  $d_1d_2c_2c_1$  (фиг. 32) в масштабе  $\beta$ , представляют величины искомых напряжений  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$ .

[Эпюры напряжений  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  по абсциссам  $x = \frac{1}{r^2}$  на фиг. 32 заштрихованы].

2. Диск постоянной толщины без отверстия. Известно радиальное напряжение на внешнем радиусе  $r_2$

$$\sigma_{r2} = +p_2,$$

где  $p_2 \text{ кг/см}^2$  — удельная нагрузка, приложенная к диску в связи с вращением присоединенных масс (обод, лопатки и т. д.).

Дополнительно учитываем, что при  $r = 0$   $\sigma_{r1} = \sigma_{t1}$ .

Предварительно проводятся построения, аналогичные указанным для 1-го случая.

Заметим лишь, что при  $x = \infty (r = 0)$

$$F(\infty) = R(\infty) = \frac{E\theta_1}{2};$$

$$\theta_1 = \alpha\delta_1,$$

где  $\theta_1$  — температура в центре диска;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения, соответствующий этой температуре.

В рассматриваемом случае замыкающая прямая параллельна оси абсцисс и проводится с таким расчетом, чтобы отрезок  $b_2d_2$  при  $x_2$  в масштабе  $\beta$  представлял заданную удельную нагрузку  $p_2 \text{ кг/см}^2$ .

Отрезки, заключенные между кривыми  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$  и замыкающей, в масштабе  $\beta$ , представляют величины искомых напряжений  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$ .

Напряжение в центре диска

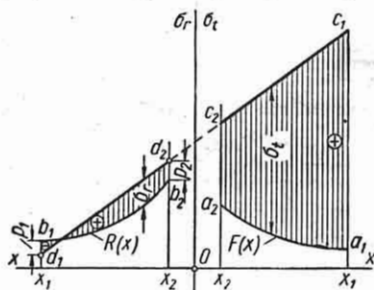
$$\sigma_{r1} = \sigma_{t1} =$$

$$= (OL \text{ мм}) \beta \frac{\text{кг/см}^2}{\text{мм}} - \frac{E\theta_1}{2} = (KL) \beta$$

(фиг. 33).

Ступенчатые диски (а следовательно, и диски произвольно-переменного профиля, приближенно представляемые как ступенчатые) графически рассчитываются аналогичным образом.

Предварительно отдельно для каждой  $i$ -й ступени строят функции  $F_i(x)$  и



Фиг. 32.

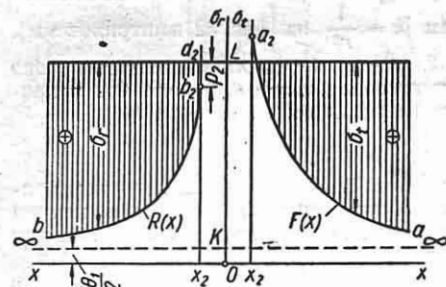
Отрезок  $b_1d_1$  при  $x_1$  в масштабе  $\beta$  равен  $p_1 \text{ кг/см}^2$ . Он откладывается от

$R_l(x)$  с учетом ее механических характеристик  $E_l, \mu_l$ .

Таким образом, диск мыслится как бы состоящим из колец различного материала.

В связи с этим на границах ступеней функции  $F(x)$  и  $R(x)$  получают некоторый разрыв.

Замыкающая прямая в рассматриваемом случае распадается на ряд сме-



Фиг. 33.

щенных друг относительно друга отрезков, каждый из которых относится лишь к одной из ступеней диска.

Эти замыкающие должны быть построены таким образом, чтобы на радиусах сопряжения участков радиальные и окружные напряжения удовлетворяли уравнению равновесия и уравнению неразрывности деформаций.

При абсциссах, соответствующих внешнему и внутреннему радиусам (или центру диска), напряжения должны удовлетворять граничным условиям.

В этом случае вертикальные отрезки, заключенные между кривыми, представляющими функции  $F(x)$  и  $R(x)$  и замыкающими, в масштабе  $\beta$  выражают напряжения  $\sigma_l$  и  $\sigma_r$ .

Обычно не удается удовлетворить граничным условиям на внутреннем и внешнем радиусах диска сразу.

Вначале проводится первый расчет при строгом соблюдении граничного условия на одном из крайних радиусов, затем проводится второй расчет при условии, что  $F(x) = R(x) = 0$ .

Во втором расчете значения характеристик упругих свойств материала ( $E_l, \mu_l$ ) по кольцам принимаются такими же, как и ранее (т. е. попеременно предполагается, что диск как бы выполнен из колец различного материала).

Объединяя тем же приемом, что и в аналитических методах (см. выше), ре-

зультаты двух расчетов, можно удовлетворить всем поставленным граничным условиям и установить таким образом (см. пример) величину напряжений в диске. При построении эпюр напряжений для заданного плавно очерченного профиля целесообразно исходить из напряжений, возникающих на средних радиусах ступеней диска, избранных для расчета.

**Пример.** Провести поверочный расчет диска (см. фиг. 27, а), исследованного ранее аналитическим способом (см. табл. 6).

Число оборотов  $n = 12300$  в минуту;  $\gamma = 0,0081 \text{ кг/см}^3$ .

Заданный плавно очерченный профиль (фиг. 27, а) заменяется ступенчатым по принятой ранее схеме (табл. 6).

Необходимые для расчета величины повторены в табл. 7. Там же приведены дополнительно вычисленные на граничных радиусах ступеней значения величин  $E\beta$ ;  $\Delta T$  (по формуле трапеции);  $\frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot x^2$  и  $\frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot x^2$ , а также значения функций  $F(x)$  и  $R(x)$  по формулам (34) и (35).

Используя эти значения, строим в масштабе напряжений  $\beta$  в координатах  $(x, \sigma_l)$  функцию  $F(x)$  (кривая  $aa_1a'_1 \dots a_0$ ) и в координатах  $(x, \sigma_r)$  функцию  $R(x)$  (кривая  $bb_1b'_1 \dots b_0$ ).

(Эти построения выполнены на фиг. 34 от  $x_0$  до  $x_2$  и на фиг. 35 от  $x_2$  до  $x_0$  в увеличенном по осям  $x$  масштабе.)

Построение замыкающих отрезков начинаем от центра диска ( $x = \infty$ ), где  $F(x) = R(x) = 2245 \text{ кг/см}^2$ .

Замыкающая на участках  $x_0 - x_1$  параллельна оси абсцисс.

Поскольку нам пока неизвестны значения напряжений в центре диска, предварительно задаем ими и принимаем равными  $\sigma_l^* = \sigma_r^* = 2000 \text{ кг/см}^2$  (предварительные напряжения будем помечать звездочкой).

Проводимый первый расчет является предварительным потому, что из-за произвольного выбора положения исходной замыкающей  $cc_1d_1d$  граничные условия на внешнем радиусе ( $\sigma_r = 1400 \text{ кг/см}^2$ ) в конечном счете не будут удовлетворены.

Избранная замыкающая  $cc_1d_1d$  определяет предварительные напряжения во всех точках первой ступени толщиной  $h = 6,7 \text{ см}$  на интервале радиусов от  $r = 0$  до  $r = 5 \text{ см}$  (на участках  $x_0 - x_1$ ).

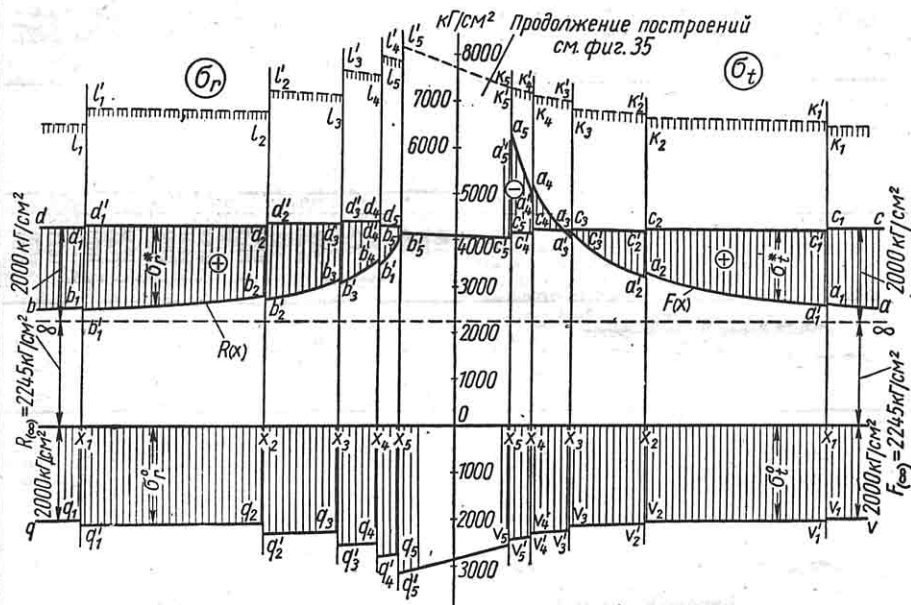
В частности, при  $x_1$   $\sigma_r^*(5) = 1710 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $b_1d_1$ ), а  $\sigma_l^*(5) = 1610 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $a_1c_1$ ).

Используя формулы (26) и (27), находим напряжения на том же радиусе  $r = 5$  (при  $x_1$ ), но уже для второй ступени толщиной 6,4 см:  $\sigma_r^*(5)' = 1785 \text{ кг/см}^2$ ;  $\sigma_l^*(5)' = 1625 \text{ кг/см}^2$ .

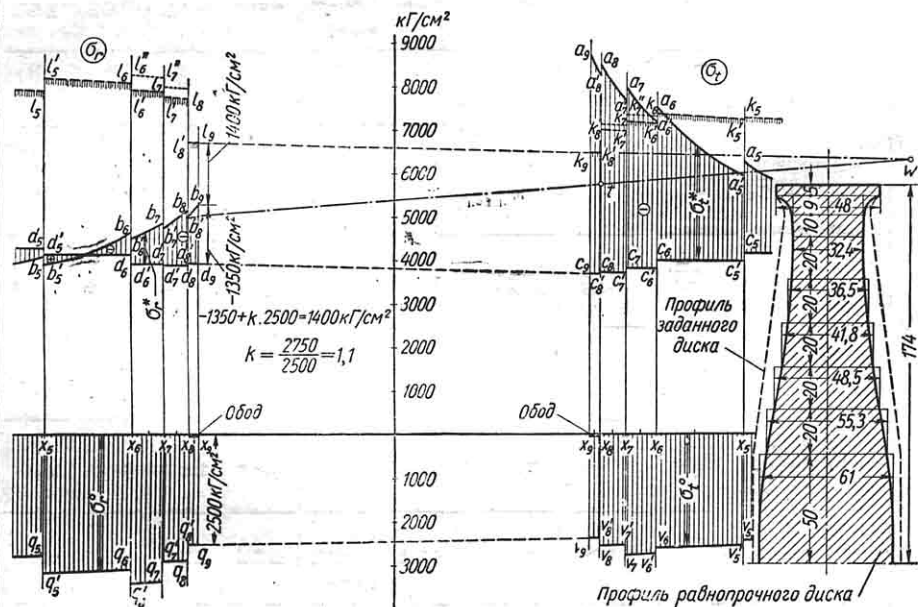
Откладывая эти значения в масштабе напряжений  $\beta \frac{\text{кг/см}^2}{\text{мм}}$  от точки  $b'_1$  и  $a'_1$  соответственно, получаем точки  $d'_1$  и  $c'_1$ , которые определяют замыкающую прямую  $c'_1c_1d_1d'_1$  для участков  $x_1 - x_2$ .

Таблица 7

№ по поп.	r в см	$r \cdot 10^4$ в л/см	h в см	$6 \cdot 10^6$	$E \cdot 10^{-6}$ в кГ/см <sup>2</sup>	$\mu$	$E_B$ в кГ/см <sup>2</sup>	$\Delta T$ в см <sup>2</sup>	$E_{\text{кат}}$ в кГ/см <sup>2</sup>	$\frac{1+\mu}{8} \frac{R}{r^2}$ в кГ/см <sup>2</sup>	$\frac{3+\mu}{8} \frac{R}{r^2}$ в кГ/см <sup>2</sup>	F(x) в кГ/см <sup>2</sup>	R(x) в кГ/см <sup>2</sup>
0	0	$\infty$		2,4	1,87	0,371	4490	0	2245	0	0	2245	2245
1	2,5 5	1600 400	6,7	2,4 2,64	1,87	0,371	4490 4490 4940	7,75 32,0	2320 2395	22,6 90,4	36 144	2193 2635	2356 2539
1	5	400	6,4	2,64	1,83	0,375	4840	32,0	2340	91,0	145	2591	2485
2	6 7	278 204		2,80 3,05	1,83	0,375	5125 47,1 5590	47,1 66,3	2400 2480	131,0 178,0	208 283	2856 3288	2608 2763
2	7	204	5,8	3,05	1,79	0,380	5450	66,3	2420	179	284	3209	2704
3	8 9	156 123,6		3,30 3,65	1,79	0,380	5910 90,3 6540	90,3 120	2520 2660	234 296	370 468	3624 4176	2890 3128
3	9 10 11	123,6 100 82,7	5,2	3,65 4,38	1,73	0,388	6310 6890 7590	120 157 201	2570 2880	300 448	470 700	4040 5158	3040 3580
4	11 12 13	82,7 69,5 59	4,6	4,38 5,27	1,65	0,397	7240 7920 8700	201 254 317	2740 3080	454 634	704 980	4954 6254	3444 4060
5	13 14 15	59 51 44,5	4,0	5,27 6,43	1,55	0,409	8180 8990 9960	317 392 481	2900 3095 3320	645 746 859	985 1040 1310	5925 6641 7499	3885 4630
6	15 15,5 16	44,5 41,7 39	3,6	6,43 7,00	1,47	0,419	9450 9750 10290	481 531 585	3150 3260 3350	870 927 988	1315 1400 1490	7170 7417 7928	4465 4660 4840
7	16 16,45 16,9	39 37 35,1	4,2	7,00 7,62	1,41	0,426	9870 10290 10750	585 637 693	3215 3425	998 1050 1110	1580 1670	7653 8435	4715 5095
8	16,9 17,15 17,4	35,1 34,0 33	4,8	7,62 8,00	1,37	0,430	10430 10690 10960	693 726 760	3330 3380 3430	1115 1150 1185	1675 1725 1790	8215 8460 8715	5005 5105 5210



Фиг. 34.



Фиг. 35.



Таблица 8

№ по пор.	r в см	h в см	$\sigma_t^*$	$\sigma_r^*$	$\sigma_t^0$	$\sigma_r^0$	$\sigma_t = \sigma_t^* + \kappa \sigma_t^0$	$\sigma_r = \sigma_r^* + \kappa \sigma_r^0$	$\sigma_{\text{экв}}$
0	0	6,7	2000	2000	2000	2000	4200	4200	4200
1	5		1610	1710	2000	2000			
1	5	6,4	1625	1785	2015	2095	3585	3950	3770
2	6		1350	1660	2030	2080			
	7		940	1500	2040	2070			
2	7	5,8	995	1655	2100	2290	2955	3945	3550
3	8		615	1455	2120	2270			
	9		65	1200	2140	2250			
3	9	5,2	145	1345	2215	2500	2120	3800	3300
4	10		-340	1080	2240	2475			
	11		-930	780	2255	2460			
4	11	4,6	-830	880	2345	2780	1210	3580	3120
5	12		-1410	550	2380	2745			
	13		-2100	220	2410	2715			
5	13	4,0	-1945	250	2530	3120	160	3260	3180
6	14		-2670	-130	2570	3080			
	15		-3530	-510	2600	3050			
6	15	3,6	-3385	-565	2700	3390	-750	2900	3300
7	15,5		-3750	-800	2730	3360			
	16		-4120	-970	2750	3340			
7	16	4,2	-3920	-830	2510	2860	-1550	2080	3160
8	16,45		-4310	-1060	2515	2855			
	16,9		-4700	-1210	2520	2850			
8	16,9	4,8	-4520	-1060	2340	2500	-2180	1520	3210
9	17,15		-4730	-1230	2340	2500			
	17,4		-5000	-1350	2340	2500	-2420	1400	3760

$$-1350 + \kappa 2500 = 1400 \text{ кг/см}^2; \kappa = 1,1.$$

На радиусе  $r = 7$  (при  $x_2$ ) эта замыкающая определяет  $\sigma_r^*(7) = 1500 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $b_2 d_2$ );

$\sigma_t^*(7) = 940 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $a_2 c_2$ ).

Повторяя аналогичные построения, можно определить предварительные напряжения во всех точках диска.

Эти построения выполнены в верхней части фиг. 34 и 35.

Напряжения первого расчета в масштабе 3 представляются отрезками, заключенными между кривыми  $aa_1 a_1' \dots a_n$  и  $bb_1 b_1' \dots b_n$  и замыкающими  $cc_1 c_1' \dots c_n$  и  $dd_1 d_1' \dots d_n$  соответственно.

Значения напряжений на границах ступеней и на их средних радиусах приведены в табл. 8.

Как и следовало ожидать, на внешнем радиусе при первом расчете заданное граничное условие оказалось невыполненным (при  $x_0$   $\sigma_r = -1350 \text{ кг/см}^2$  вместо  $+1400 \text{ кг/см}^2$ ).

Для устранения этой неувязки необходимо провести второй расчет, полагая  $F(x) = R(x) = 0$  [соответствующие ему напряжения будем обозначать индексом 0 ( $\sigma_r^0, \sigma_t^0$ )].

Графические построения, выполненные в нижней части фиг. 34 и 35, опять проводятся, начиная от центра диска.

Исходная замыкающая на участках  $x_0 - x_1$  параллельна оси абсцисс и проводится на произвольно выбранном расстоянии (в примере принято, что  $\sigma_r^0 = \sigma_t^0 = 2000 \text{ кг/см}^2$ ).

Все последующие построения и расчеты производятся в том же порядке и по тем же формулам, что и в первом расчете.

Результаты второго расчета представлены в масштабе напряжений 3 отрезками, заключенными между осью абсцисс и замыкающими  $qq_1 q_1' \dots q_n$  и  $vv_1 v_1' \dots v_n$ .

Значения напряжений на границах ступеней и на их средних радиусах приведены в табл. 8.

На внешнем радиусе диска (при  $x_0$ )  $\sigma_r^0 = +2500 \text{ кг/см}^2$ .

Значения истинных напряжений можно получить путем сложения напряжений, вычисленных при первом расчете, с напряжениями второго расчета, умноженными на некоторый коэффициент приведения  $\kappa$ .

Последний подбирается так, чтобы в результате этого сложения граничные условия на внешнем радиусе оказались точно выполненными, т. е. чтобы

$$\sigma_r^* + \kappa \sigma_r^0 = \sigma_r$$

или

$$-1350 + \kappa 2500 = 1400 \text{ кг/см}^2,$$

откуда  $\kappa = 1,1$ .

Полученные таким путем истинные напряжения, а также эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности на средних радиусах ступеней диска приведены в табл. 8.

Результаты в пределах точности технических расчетов совпадают с данными табл. 6, полученными при поперочном расчете диска аналитическим способом.

Графический способ профилирования равнопрочных дисков. За исходные данные принимаем число оборотов диска, материал диска, внешний радиус диска, размеры обода, удельную нагрузку по внешнему радиусу обода  $R_{\text{обод}}$  кг/см<sup>2</sup> и допускаемое напряжение  $[\sigma]$ , меняющееся от сечения к сечению в зависимости от температуры диска.

Рассмотрим порядок профилирования диска без центрального отверстия.

Профиль складывается из 8—10 равнопрочных ступеней, протяженность которых по радиусу предварительно выбирается. Затем в сопряженных системах координат  $(x, \sigma_t)$  и  $(x, \sigma_r)$  строятся функции  $F(x)$  и  $R(x)$ .

В основу расчета кладется энергетическая теория прочности.

Принимая в центре диска напряжение, равное допускаемому, проводим замыкающую для центрального участка от  $x_0$  до  $x_1$  (см. фиг. 34) параллельно абсциссе, что определяет напряжение  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  при  $x_1$  для центральной ступени толщиной  $h$ .

На сопряжении со следующей ступенью, имеющей толщину  $h'$ , должны соблюдаться уравнение неразрывности деформаций

$$\sigma_t' - \mu' \sigma_r' = \frac{E'}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) = a \text{ кг/см}^2 \quad (37)$$

и условие прочности

$$(\sigma_t')^2 - \sigma_t' \sigma_r' + (\sigma_r')^2 = [\sigma]^2, \quad (38)$$

откуда

$$\sigma_r' = \frac{a(1-2\mu') \pm \sqrt{4(1-\mu'+\mu'^2)[\sigma]^2 - 3a^2}}{2(1-\mu'+\mu'^2)} \quad (39)$$

и

$$\sigma_t' = a + \mu' \sigma_r'. \quad (40)$$

Решение возможно, если  $[\sigma] \geq a$ . При этом корни для  $\sigma_r'$  [см. формулу (39)] имеют разные знаки

По смыслу задачи напряжение  $\sigma_r'$  должно иметь тот же знак, что и  $\sigma_r$ .

Из условия равновесия [см. формулу (26)]

$$\frac{h'}{h} = \frac{\sigma_r}{\sigma_r'} = \eta_1. \quad (41)$$

Следовательно, для обеспечения равнопрочности ступеней, граничащих на радиусе  $r_1$  (при  $x_1$ ), толщина центральной ступени должна быть изменена в  $\eta_1$  раз.

Значения  $\sigma_t'$  и  $\sigma_r'$  определяют положение замыкающей для второго участка.

Повторяя аналогичные построения, можно установить соотношения  $\eta$  толщин всех ступеней вплоть до обода (см пример).

Располагая размерами обода и зная радиальную нагрузку по его внешнему радиусу  $R_{\text{обод}}$ , можно из условия неразрывности (37) (см. пример) определить толщину ступени диска, примыкающей к ободу, по которой с помощью коэффициентов перехода  $\eta$  можно последовательно определить толщины всех ступеней диска.

Окончательный профиль равнопрочного диска получается путем вписывания плавных кривых в ломаное очертание построенного ступенчатого профиля.

Аналогично профилируются диски, имеющие центральное отверстие.

В этом случае при профилировании исходят из необходимого контактного давления  $p_1$  кг/см<sup>2</sup> на внутреннем радиусе  $r_1$  и из окружного напряжения на этом радиусе, определяемого допускаемым напряжением  $[\sigma]$ .

*Пример.* Проведем профилирование равнопрочного диска без центрального отверстия, исходя из данных, приведенных в табл. 9.

Цифры заимствованы из табл. 7, где приведены также механические характеристики материала диска, необходимые для расчета.

Пределы текучести используемой стали соответствуют температурному полю диска. Наружный радиус обода  $r = 17,4$  см. Его протяженность по радиусу 0,5 см, толщина 4,8 см. Число оборотов диска  $n = 12\,300$  в минуту. Удельная нагрузка на внешнем радиусе обода  $R_{\text{обод}} = 1400$  кг/см<sup>2</sup>.

Поставлена задача спрофилировать равнопрочный диск для условий, в точности соответствующих режиму работы диска, рассмотренному выше при поперочном расчете.

Все построения проведены в верхней части фиг. 34 и 35 пунктиром.

Результаты расчета сведены в табл. 9.

Допускаемое напряжение в центре диска  $[\sigma] = 4200 \text{ кг/см}^2$  определяет первую замыкающую. На радиусе  $r_1 = 5 \text{ см}$  (при  $x = x_1$ )  $\sigma_t(5) = 3810 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $a_1 k_1$ ), а  $\sigma_r(5) = 3920 \text{ кг/см}^2$  (отрезок  $b_1 k_1$ ),  $\sigma_{\text{эКВ}}(5) = 3880 \text{ кг/см}^2$ , тогда как (см. табл. 7)  $[\sigma] = 4150 \text{ кг/см}^2$ . Следовательно, можно уменьшить толщину диска на этом радиусе.

По формуле (37)

$$a = \frac{E'}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) = \frac{1,83 \cdot 10^9}{1,87 \cdot 10^9} \times$$

$$\times (3810 - 0,371 \cdot 3920) = 2310 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (39)

$$\sigma_r = \frac{2310(1 - 2 \cdot 0,375) + \sqrt{4(1 - 0,375 + 0,375^2)4150^2 - 3 \cdot 2310^2}}{2(1 - 0,375 + 0,375^2)} = 4315 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (40)

$$\sigma_t' = 2310 + 0,375 \cdot 4315 = 3930 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (38)

$$\sigma_{\text{эКВ}} = 4150 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент перехода на радиусе  $r = 5 \text{ см}$  по формуле (41)

$$\eta = \frac{3920}{4315} = 0,908.$$

Откладывая от точки  $b_1' k_1'$  (фиг. 34) отрезок  $b_1' l_1'$ , представляющий в масштабе напряжений  $\beta$  значение  $\sigma_r$ , а от точки  $a_1' k_1'$

отрезок  $a_1' l_1'$ ,

Таблица 9

№ по пор.	r в см	F(x)	R(x)	$\sigma_T$	[ $\sigma$ ]	$\sigma_t$	$\sigma_r$	$\sigma_{\text{эКВ}}$	Коэф-фициент перехода $\eta$	h в мм
0	0	2245	2245	7150	4200	4200	4200	4200	0,908	61
1	5	2635	2539	7050	4150	3810	3920	3880		
1	5	2591	2485	6950	4100	3930	4315	4150	0,878	53,3
2	7	3288	2763			3300	3950	3680		
2	7	3209	2704	6850	4030	3490	4500	4100	0,864	48,5
3	9	4176	3128			2620	3970	3500		
3	9	4040	3040	6650	3920	2900	4600	4030	0,872	41,8
4	11	5158	3580			1900	3940	3400		
4	11	4954	3444	6400	3770	2150	4510	3920	0,886	36,5
5	13	6254	4060			1000	3760	3380		
5	13	5925	3885	6200	3650	1275	4240	3770	1,0	32,4
6	15	7493	4630			-160	3370	3460		
6	15	7170	4465	6050	3550	-50	3370	3400	1,0	32,4
7	16	7928	4840			-800	2980	3450		
7	16	7653	4715	5910	3480	-695	2530	3380	1,485	48
8	16,9	8435	5095			-1450	2520	3480		
8	16,9	8215	5005	5800	3420	-1730	1700	2980	-	48
9	17,4	8715	5210			-2450	1400	3380		

представляющий напряжение  $\sigma_t$ , строим замыкающую для участков  $x_1 - x_2$  и т. д.

Заметим, что для участков  $x_0 - x_7$  и  $x_7 - x_0$  попытка уменьшения толщины (см. на фиг. 35 точки  $k_6 - l_7$  и  $k_6 - k_7$  и т. д.) оказалась недопустимой, так как на этих участках резко возрастает величина эквивалентного напряжения за счет возникновения сжимающих окружных напряжений, при сниженных допускаемых напряжениях, в связи с относительно высокой температурой диска у обода. Поэтому, начиная с  $r = 15$  см (от  $x_0$ ) до обода (до радиуса  $r = 16,9$  см), толщина диска принята постоянной.

При  $r = 16,9$  см для диска  $\sigma_r = -1450$  кг/см<sup>2</sup> и  $\sigma_r = 2520$  кг/см<sup>2</sup>

$$a = \frac{1,37 \cdot 10^6}{1,41 \cdot 10^6} (-1450 - 0,426 \cdot 2520) = -2440 \text{ кг/см}^2.$$

На внешнем радиусе обода при  $r = 17,4$  см задано  $\sigma_r(17,4) = 1400$  кг/см<sup>2</sup> и  $[\sigma] = 3420$  кг/см<sup>2</sup>.

Отложим величину  $a = -2440$  кг/см<sup>2</sup> в масштабе напряжений (отрезок  $a_s t$ ) вниз от точки  $a_s$ , представляющей значение функции  $F(x)$  для обода на радиусе  $r = 16,9$  см.

Соединим построенную точку  $t$  с точкой  $b_s$  (точка  $b_s$  представляет величину функции  $R(x)$  для обода на радиусе  $r = 16,9$  см).

Разделим отрезок  $b_s t$  внешним образом точкой  $\omega$  в отношении  $\mu$ , так, чтобы  $\frac{\omega t}{\omega b_s} = \mu$ .

Замыкающая прямая  $k_s l_s$  для обода должна проходить через точку  $\omega$  и  $b_s$ , так как при этом будет выдержано заданное граничное условие и удовлетворено уравнение неразрывности на радиусе  $r = 16,9$  см сопряжения обода с диском.

Замыкающая прямая  $\omega k_s l_s$  определяет радиальное напряжение обода на радиусе  $r = 16,9$  см (отрезок  $b_s l_s$ )

$$\sigma_r^{\text{обод}}(16,9) = 1700 \text{ кг/см}^2,$$

откуда

$$h_{\text{диск}}(16,9) = h_{\text{обод}} \frac{\sigma_r^{\text{обод}}(16,9)}{\sigma_r^{\text{диск}}(16,9)} = 48 \frac{1700}{2520} = 32,4 \text{ мм}.$$

Теперь, располагая значением толщины ступени диска в интервале радиусов  $r = 13 + 16,9$  см, можно с помощью коэффициентов перехода  $\eta$  последовательно подсчитать толщины всех других ступеней, которые и приведены в последней графе табл. 9.

Расчитанный ступенчатый профиль построен на фиг. 35.

Вписанные кривые определяют профиль спроектированного равнопрочного диска.

Пунктиром на фиг. 35 представлен профиль диска, для которого ранее проводился поверочный расчет.

Метод Н. Н. Малинина [6], [7]. Поверочный расчет диска. В этом методе необходимость выполнения второго расчета отпадает.

Окружное и радиальное напряжения на радиусе  $r$   $i$ -го участка подсчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left\{ \left( 1 + \mu_i - \frac{1 + \mu_i}{2} L_i^* + \frac{1 - \mu_i}{2r^2} L_i^{**} \right) A + \left( \frac{1 - \mu_i}{r^2} + \frac{1 + \mu_i}{2} M_i^* - \frac{1 - \mu_i}{2r^2} M_i^{**} \right) B - \right. \\ &\quad \left. - (1 + 3\mu_i) \frac{1 - \mu_i^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 + (1 - \mu_i) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 + \mu_i}{r^2} T + \frac{1 + \mu_i}{2} N_i^* - \frac{1 - \mu_i}{2r^2} N_i^{**} \right\} - E_i \theta; \\ \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu_i^2} \left\{ \left( 1 + \mu_i - \frac{1 + \mu_i}{2} L_i^* - \frac{1 - \mu_i}{2r^2} L_i^{**} \right) A - \left( \frac{1 - \mu_i}{r^2} - \frac{1 + \mu_i}{2} M_i^* - \frac{1 - \mu_i}{2r^2} M_i^{**} \right) B - \right. \\ &\quad \left. - (3 + \mu_i) \frac{1 - \mu_i^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 - (1 - \mu_i) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1 + \mu_i}{r^2} T + \frac{1 + \mu_i}{2} N_i^* + \frac{1 - \mu_i}{2r^2} N_i^{**} \right\}; \end{aligned} \right\} (42)$$

где

$$\begin{aligned} T &= \int_{r_i}^r \frac{1 + \mu_k}{1 + \mu_1} \theta r dr = \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1 + \mu_k}{1 + \mu_1} \left[ \frac{\theta_k - \lambda_k r_k}{2} \times \right. \\ &\quad \left. \times (r_{k+1}^2 - r_k^2) + \frac{\lambda_k}{3} \times \right. \\ &\quad \left. \times (r_{k+1}^3 - r_k^3) \right] + \frac{1 + \mu_i}{1 + \mu_1} \left[ \frac{\theta_i - \lambda_i r_i}{2} \times \right. \\ &\quad \left. \times (r^2 - r_i^2) + \frac{\lambda_i}{3} (r^3 - r_i^3) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Для подсчета напряжений вначале определяют постоянные для каждого

участка величины  $L, M, N$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} L_i &= 1 + \mu_i - (1 + \mu_{i-1}) \eta_i - \\ &- \frac{1}{2} [1 + \mu_i - (1 + \mu_{i-1}) \eta_i] L_{i-1}^* - \\ &- \frac{1}{2} [1 - \mu_i - (1 - \mu_{i-1}) \eta_i] \frac{L_{i-1}^{**}}{r_i^2}; \\ M_i &= [1 - \mu_i - (1 - \mu_{i-1}) \eta_i] \frac{1}{r_i^2} - \\ &- \frac{1}{2} [1 + \mu_i - (1 + \mu_{i-1}) \eta_i] M_{i-1}^* - \\ &- \frac{1}{2} [1 - \mu_i - (1 - \mu_{i-1}) \eta_i] \frac{M_{i-1}^{**}}{r_i^2}; \\ N_i &= [3 + \mu_i - (3 + \mu_{i-1}) \eta_i] \times \\ &\times \frac{1 - \mu_i^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_i^2 + \\ &+ [1 - \mu_i - (1 - \mu_{i-1}) \eta_i] \times \\ &\times \frac{1 + \mu_i}{r_i^2} T_i - \frac{1}{2} [1 + \mu_i - \\ &- (1 + \mu_{i-1}) \eta_i] N_{i-1}^* - \\ &- \frac{1}{2} [1 - \mu_i - (1 - \mu_{i-1}) \eta_i] \frac{N_{i-1}^{**}}{r_i^2}. \end{aligned} \right\} (44)$$

В формулах (44)

$$\eta_i = \frac{E_{i-1}}{E_i} \cdot \frac{1 - \mu_i^2}{1 - \mu_{i-1}^2} \cdot \frac{h_{i-1}}{h_i}; \quad (45)$$

$$T_i = \int_{r_i}^{r_1} \frac{1 + \mu_{\kappa}}{1 + \mu_1} \theta r dr =$$

$$= \sum_{k=1}^i \frac{1 + \mu_{\kappa}}{1 + \mu_1} \left[ \frac{\theta_{\kappa} - \lambda_{\kappa} r_{\kappa}}{2} \times \right. \\ \left. \times (r_{\kappa+1}^2 - r_{\kappa}^2) + \frac{\lambda_{\kappa}}{3} (r_{\kappa+1}^3 - r_{\kappa}^3) \right]; \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{i-1}^* &= \sum_{k=2}^{i-1} L_{\kappa}; & L_{i-1}^{**} &= \sum_{k=2}^{i-1} L_{\kappa} r_{\kappa}^2; \\ M_{i-1}^* &= \sum_{k=2}^{i-1} M_{\kappa}; & M_{i-1}^{**} &= \sum_{k=2}^{i-1} M_{\kappa} r_{\kappa}^2; \\ N_{i-1}^* &= \sum_{k=2}^{i-1} N_{\kappa}; & N_{i-1}^{**} &= \sum_{k=2}^{i-1} N_{\kappa} r_{\kappa}^2. \end{aligned} \right\} (47)$$

После определения  $L_i, M_i$  и  $N_i$  по формулам (47) находят  $L_i^*, L_i^{**}, M_i^*, M_i^{**}, N_i^*$  и  $N_i^{**}$ .

Далее определяют постоянные  $A$  и  $B$ . Для диска с отверстием уравнения для определения постоянных  $A$  и  $B$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu_1) A - \frac{1 - \mu_1}{r_1^2} B &= (3 + \mu_1) \times \\ &\times \frac{1 - \mu_1^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 - \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} p_1; \\ \left[ 1 + \mu_{m-1} - \frac{1 + \mu_{m-1}}{2} L_{m-1}^* - \right. \\ &\left. - \frac{1 - \mu_{m-1}}{2r_m^2} L_{m-1}^{**} \right] A - \\ &- \left[ \frac{1 - \mu_{m-1}}{r_m^2} - \frac{1 + \mu_{m-1}}{2} M_{m-1}^* - \right. \\ &\left. - \frac{1 - \mu_{m-1}}{2r_m^2} M_{m-1}^{**} \right] B = (3 + \mu_{m-1}) \times \\ &\times \frac{1 - \mu_1^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_m^2 + (1 - \mu_{m-1}) \times \\ &\times \frac{1 + \mu_1}{r_m^2} T_m - \frac{1 + \mu_{m-1}}{2} N_{m-1}^* - \\ &- \frac{1 - \mu_{m-1}}{2r_m^2} N_{m-1}^{**} + \\ &+ \frac{1 - \mu_{m-1}^2}{E_{m-1}} p_m. \end{aligned} \right\} (48)$$

Для диска без отверстия  $B = 0$ , а постоянную  $A$  определяют из уравнения

$$\left. \begin{aligned} \left( 1 + \mu_{m-1} - \frac{1 + \mu_{m-1}}{2} L_{m-1}^* - \right. \\ \left. - \frac{1 - \mu_{m-1}}{2r_m^2} L_{m-1}^{**} \right) A = (3 + \mu_{m-1}) \times \\ \times \frac{1 - \mu_1^2}{8E_1} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_m^2 + (1 - \mu_{m-1}) \frac{1 + \mu_1}{r_m^2} T_m - \\ - \frac{1 + \mu_{m-1}}{2} N_{m-1}^* - \frac{1 - \mu_{m-1}}{2r_m^2} N_{m-1}^{**} + \\ + \frac{1 - \mu_{m-1}^2}{E_{m-1}} p_m. \end{aligned} \right\} (49)$$

Для равномерно нагретого диска приведенные выше формулы упрощаются.

Окружные и радиальные напряжения на радиусе  $r$   $i$ -го участка подсчитываются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = & \left( 1 - \frac{1+\mu}{2} R_i^* + \frac{1-\mu}{2r^2} R_i^{**} \right) \times \\ & \times C_1 + \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1+\mu}{2} S_i^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r^2} S_i^{**} \right) C_2 - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \times \\ & \times \left( \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 - \frac{1+\mu}{2} U_i^* + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2r^2} U_i^{**} \right); \\ \sigma_r = & \left( 1 - \frac{1+\mu}{2} R_i^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r^2} R_i^{**} \right) C_1 - \left( \frac{1}{r^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1+\mu}{2} S_i^* - \frac{1-\mu}{2r^2} S_i^{**} \right) C_2 - \\ & - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r^2 - \frac{1+\mu}{2} U_i^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r^2} U_i^{**} \right). \end{aligned} \right\} (50)$$

Для подсчета напряжений вначале определяют постоянные для каждого участка величины  $R$ ,  $S$  и  $U$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} R_i = & \zeta_i \left( 1 - \frac{1+\mu}{2} R_{i-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r_i^2} R_{i-1}^{**} \right); \\ S_i = & \zeta_i \left( \frac{1}{r_i^2} - \frac{1+\mu}{2} S_{i-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{S_{i-1}^{**}}{r_i^2} \right); \\ U_i = & \zeta_i \left( r_i^2 - \frac{1+\mu}{2} U_{i-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{U_{i-1}^{**}}{r_i^2} \right), \end{aligned} \right\} (51)$$

где

$$\zeta_i = 1 - \frac{h_{i-1}}{h_i}, \quad (52)$$

а

$$\left. \begin{aligned} R_{i-1}^* = & \sum_{k=2}^{i-1} R_k; \quad R_{i-1}^{**} = \sum_{k=2}^{i-1} R_k r_k^2; \\ S_{i-1}^* = & \sum_{k=2}^{i-1} S_k; \quad S_{i-1}^{**} = \sum_{k=2}^{i-1} S_k r_k^2; \\ U_{i-1}^* = & \sum_{k=2}^{i-1} U_k; \quad U_{i-1}^{**} = \sum_{k=2}^{i-1} U_k r_k^2. \end{aligned} \right\} (53)$$

Затем по формулам (53) находят  $R_i^*$ ,  $R_i^{**}$ ,  $S_i^*$ ,  $S_i^{**}$ ,  $U_i^*$ ,  $U_i^{**}$ . Далее определяют постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

Для диска с отверстием уравнения для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} = & \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 - p_1; \\ & \left( 1 - \frac{1+\mu}{2} R_{m-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r_m^2} R_{m-1}^{**} \right) C_1 - \\ & - \left( \frac{1}{r_m^2} - \frac{1+\mu}{2} S_{m-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r_m^2} S_{m-1}^{**} \right) C_2 = \frac{3+\mu}{8} \times \\ & \times \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_m^2 - \frac{1+\mu}{2} U_{m-1}^* - \right. \\ & \left. - \frac{1-\mu}{2r_m^2} U_{m-1}^{**} \right) + p_m. \end{aligned} \right\} (54)$$

Для диска без отверстия  $C_2 = 0$ , а постоянную  $C_1$  определяют из уравнения

$$\left. \begin{aligned} \left( 1 - \frac{1+\mu}{2} R_{m-1}^* - \frac{1-\mu}{2r_m^2} R_{m-1}^{**} \right) C_1 = \\ = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \left( r_m^2 - \frac{1+\mu}{2} U_{m-1}^* - \right. \\ \left. - \frac{1-\mu}{2r_m^2} U_{m-1}^{**} \right) + p_m. \end{aligned} \right\} (55)$$

*Пример.* Произвести поверочный расчет на прочность диска, рассчитанного ранее методом М. И. Яновского. Так же как и раньше, профиль диска разбит на девять участков (фиг. 27, а). Толщины участков, величины  $\theta$ , а также величины модуля упругости и коэффициента Пуассона на средних радиусах участков, принятые постоянными для участков, приведены в табл. 10. Далее по формуле (46) подсчитаны  $T$ , а затем по формулам (44)–(47) величины  $L^*$ ,  $L^{**}$ ,  $N^*$  и  $N^{**}$ .

Таблица 10

№ участка	г в см	h в см	0.10	$E_{10-6}$ в кг/см <sup>2</sup>	г	γ.10	0.10.J	h	γ	7	* 7	** 7	0.10.N	0.10*N	0.10** N	0.10** N	в кг/см <sup>2</sup>	в кг/см <sup>2</sup>	
1	0		2,40	1,87	0,371	0,048	0											4210	4210
	2,5	6,7	2,40				7,75											4260	4260
	5		2,64				32,0											4110	4110
2	5	6,4	2,64	1,83	0,375	0,205	32,0	1,07	-0,0860	-0,0860	-2,15	-2,15	-0,0736	-0,0736	-1,84	-1,84	3590	3590	
	6		2,80				47,1												
	7		3,05				66,3	1,12	-0,173	-0,259	-10,6	-10,6	-0,162	-0,162	-9,75	-9,75	2960	2960	
3	7	5,8	3,05	1,79	0,380	0,300	66,3	1,15	-0,225	-0,481	-28,8	-28,8	-0,235	-0,235	-28,8	-28,8	2130	2130	
	8		3,30				90,3												
	9		3,65				120	1,17	-0,303	-0,786	-65,5	-65,5	-0,360	-0,360	-72,4	-72,4	1210	1210	
4	9	5,2	3,65	1,73	0,388	0,365	120	1,21	-0,421	-1,21	-137	-137	-0,565	-0,565	-168	-168	160	160	
	10		3,98				157												
	11		4,38				201	1,16	-0,377	-1,58	-221	-221	-0,565	-0,565	-295	-295	749	749	
5	11	4,6	4,38	1,65	0,397	0,445	201	0,887	0,825	-1,26	-138	-138	0,548	0,548	-155	-155	1550	1550	
	12		4,80				254												
	13		5,27				317	0,897	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
6	13	4,0	5,27	1,55	0,409	0,580	317	0,897	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
	14		5,80				392												
	15		6,43				481	1,16	-0,377	-1,58	-221	-221	-0,565	-0,565	-295	-295	749	749	
7	15	3,6	6,43	1,47	0,419	0,570	481	0,887	0,825	-1,26	-138	-138	0,548	0,548	-155	-155	1550	1550	
	15,5		6,70				531												
	16		7,00				585	0,887	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
8	16	4,2	7,00	1,41	0,426	0,689	585	0,887	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
	16,45		7,30				637												
	16,9		7,62				693	0,897	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
9	16,9	4,8	7,62	1,37	0,430	0,760	693	0,897	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	
	17,15		7,80				726												
	17,4		8,00				760	0,897	0,260	-1,00	-64,2	-64,2	0,460	0,460	-23,6	-23,6	1400	1400	

После этого из уравнения (49) найдена постоянная интегрирования  $A = 2,17 \cdot 10^{-3}$ , а затем по формулам (42) определены напряжения на средних радиусах участков.

Результаты подсчетов приведены в табл. 10. Сопоставление последних двух граф табл. 6 и 10 показывает, что величины напряжений, подсчитанные двумя различными методами, одни и те же.

Расчет диска, посаженного на вал с натягом, и определение освобождающего числа оборотов. Равномерно нагретый диск переменной толщины  $h$ , внутренний радиус которого  $r_1$ , а наружный  $r_m$ , посажен на вал с натягом по диаметру  $\delta$ . Интенсивность равномерно распределенной по наружной поверхности нагрузки при рабочей угловой скорости  $\omega_p$  равна  $p_m$ ,  $\text{кг/см}^2$ .

Так же как и раньше, профиль диска разбивается на участки постоянной толщины, а затем по формулам (51) и (53) определяются величины  $R_i^*$ ,  $R_i^{**}$ ,  $S_i^*$ ,  $S_i^{**}$ ,  $U_i^*$  и  $U_i^{**}$ .

Контактное давление на поверхности соприкосновения диска с валом  $p_1$  при заданной угловой скорости  $\omega$  находят путем исключения из приведенных ниже уравнений величин  $C_1$  и  $C_2$  и определения величины  $p_1$ :

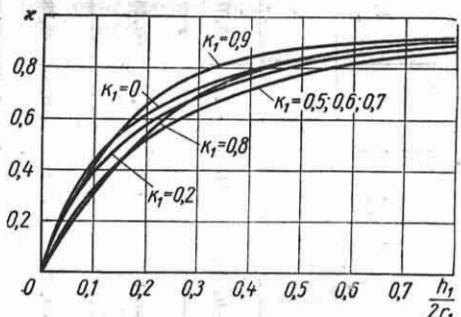
$$\left. \begin{aligned} C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r_1^2 + p_1 &= 0; \\ \left( 1 - \frac{1 + \mu}{2} R_{m-1}^* - \frac{1 - \mu}{2 r_m^2} R_{m-1}^{**} \right) C_1 - \\ - \left( \frac{1}{r_m^2} - \frac{1 + \mu}{2} S_{m-1}^* - \frac{1 - \mu}{2 r_m^2} S_{m-1}^{**} \right) C_2 - \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \times \\ \times \left( r_m^2 - \frac{1 + \mu}{2} U_{m-1}^* - \frac{1 - \mu}{2 r_m^2} U_{m-1}^{**} \right) - p_m \frac{\omega^2}{g} &= 0; \\ \frac{1 - \mu}{E} r_1 C_1 + \frac{1 + \mu}{E r_1} C_2 - \frac{1}{8g} \times \\ \times \left\{ \frac{1 - \mu^2}{E} \gamma r_1^3 + \frac{2 \gamma \theta}{E \theta} \times \right. \\ \times \left. \left[ (3 + \mu_\theta) r_\theta^2 r_1 + (1 - \mu_\theta) r_1^3 \right] \right\} \omega^2 + \\ + \times \frac{p_1 r_1}{E \theta} \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_\theta \right) &= \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \right\} (56)$$

В уравнениях (56)  $k_1 = \frac{r_{\theta_1}}{r_{\theta_2}}$  — отноше-

ние внутреннего радиуса вала  $r_{\theta_1}$  к наружному  $r_{\theta_2} \approx r_1$ ;  $\chi$  — коэффициент, зависящий от отношения толщины диска  $h_1$  на радиусе  $r_1$  к наружному диаметру вала  $2r_{\theta_2} \approx 2r_1$  и величины  $k_1$ .

На фиг. 36 приведены графики зависимости коэффициента  $\chi$  от величин  $\frac{h_1}{2r_{\theta_2}}$  и  $k_1$ .

Для определения освобождающего числа оборотов, при котором контактное



Фиг. 36.

давление обращается в нуль, необходимо в уравнениях (56) принять  $p_1 = 0$  и, исключив  $C_1$  и  $C_2$ , найти освобождающую угловую скорость  $\omega_{осв}$ . По этой угловой скорости вычисляют освобождающее число оборотов  $n_{осв}$ .

Для определения напряжений при рабочем числе оборотов необходимо в уравнениях (56) принять  $\omega = \omega_p$  и решить полученную систему относительно  $p_1$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . После этого напряжения определяют по формулам (50).

**Пример.** Определить освобождающее число оборотов и напряжения при рабочем числе оборотов  $n_p = 3000$  в минуту для равномерно нагретого диска переменной толщины (фиг. 37), посаженного на сплошной вал с натягом  $\delta = 0,01157$  см. Модуль упругости, коэффициент Пуассона и вес единицы объема материала диска  $E = 2,2 \cdot 10^6$   $\text{кг/см}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\gamma = 0,0078$   $\text{кг/см}^3$ .

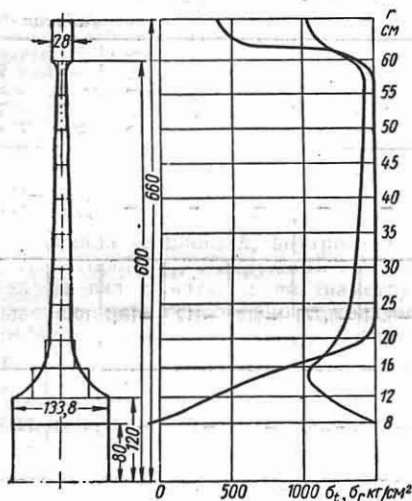
Модуль упругости, коэффициент Пуассона и вес единицы объема материала вала те же, что и соответствующие величины для материала диска.

Профиль диска разбиваем на 12 участков (фиг. 37). Толщины участков приведены в табл. 11. Далее по формулам (51) и (56) подсчитываем  $R$ ,  $S$ ,  $U$  и  $R_i^*$ ,  $R_i^{**}$ ,  $S_i^*$ ,  $S_i^{**}$ ,  $U_i^*$  и  $U_i^{**}$ . Результаты подсчетов сведены в табл. 11. По графику на фиг. 36 для  $k_1 = 0$  и  $\frac{h_1}{2r_{\theta_2}} \approx \frac{h_1}{2r_1} = 0,836$  находим

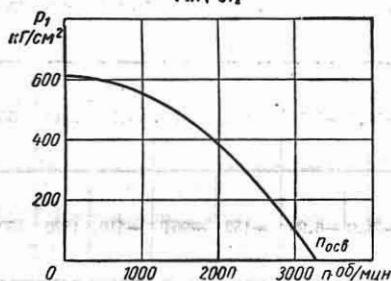


Таблица 11

№ участка	h в см		r	R	r*	R**	S·10 <sup>3</sup>	S*·10 <sup>3</sup>	S**	U	U*	U**·10 <sup>-3</sup>	σ <sub>r</sub> в кг/см <sup>2</sup>	σ <sub>t</sub> в кг/см <sup>2</sup>
	Г	В												
1	8 10 12	13,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1500 1210	-102 174
2	12 14 16	7,52	-0,779	-0,779	0,779	-112	-5,41	-5,41	-0,779	-112	-112	-16,2	1040	616
3	16 18 20	3,87	-0,943	-1,57	-2,34	-513	-8,01	-13,4	-2,83	-331	-443	-101	1160	1210
4	20 22,5 25	2,91	-0,330	-0,981	-3,33	-905	-4,52	-17,9	-4,64	-256	-699	-203	1290	1500
5	25 27,5 30	2,66	-0,0940	-0,345	-3,67	-1120	-1,49	-19,4	-5,57	-112	-812	-273	1340	1500
6	30 32,5 35	2,42	-0,0992	-0,379	-4,05	-1460	-1,58	-21,0	-6,99	-152	-964	-410	1370	1500
7	35 37,5 40	2,18	-0,110	-0,446	-4,50	-2010	-1,81	-22,8	-9,21	-217	-1180	-676	1390	1500
8	40 42,5 45	1,95	-0,118	-0,514	-5,01	-2830	-2,06	-24,9	-12,5	-297	-1480	-1150	1410	1500
9	45 47,5 50	1,72	-0,134	-0,635	-5,64	-4120	-2,52	-27,4	-17,6	-426	-1900	-2010	1420	1500
10	50 52,5 55	1,50	-0,147	-0,769	-6,41	-6040	-3,03	-30,4	-25,2	-590	-2490	-3490	1430	1500
11	55 57,5 60	1,30	-0,154	-0,902	-7,32	-8770	-3,54	-34,0	-35,9	-776	-3270	-5830	1440	1500
12	60 63 66	2,80	0,536	3,54	-3,78	-3970	13,8	-20,1	14,0	3370	102	6300	1110 1040	525 400



Фиг. 37.



Фиг. 38.

$x = 0,92$ . После этого из уравнений (56) получаем  $5,60C_2 + 0,163C_1 - 1,29 \cdot 10^{-5}n^2 + 5,15p = 12700$ ;

$$64,0C_1 - C_2 - 14,7 \cdot 10^{-5}n^2 + 64p = 0;$$

$$8,14C_2 - 0,0122C_1 - 18,1 \cdot 10^{-5}n^2 = 0.$$

Путем исключения из трех полученных уравнений постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  устанавливаем зависимость контактного давления от числа оборотов диска:

$$p_1 = 610 - 56,5 (n \cdot 10^{-3})^2.$$

На фиг. 38 представлен график этой зависимости. Из этого графика следует, что контактное давление в неподвижном диске ( $n=0$ )  $p_1 = 610$  кг/см<sup>2</sup>, величина контактного давления при рабочем числе оборотов ( $n_p=3000$  об/мин)  $p_1 = 102$  кг/см<sup>2</sup>, освобождающее число оборотов  $n_{осв} = 3290$  в минуту.

После определения контактного давления для рабочего числа оборотов из полученных выше трех уравнений находим соответствующие этому числу оборотов постоянные интегрирования  $C_1 = 717$  кг/см<sup>2</sup>,  $C_2 = 51100$  кг и затем по формулам (50) подсчитываем напряжения на серединах

участков. Результаты подсчетов приведены в табл. 5.

На фиг. 37 изображены эпюры напряжений при рабочем числе оборотов.

**Метод Р. С. Кинашовили** \*. а) Проверочный расчет диска [3]

Обозначения:  $\rho$  — плотность материала диска в кг·сек<sup>2</sup>/см<sup>4</sup>;  $E$  — модуль упругости материала в кг/см<sup>2</sup>;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\omega$  — угловая скорость вращения диска в рад/сек;  $r$ ,  $R$  — независимые переменные, означающие радиальное расстояние, в см;  $b$  — наружный радиус диска в см;  $a$  — радиус центрального отверстия в см;  $h$  — толщина диска на радиус  $r$  в см;  $T$  — температура диска на радиус  $r$  в °С;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение в кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma_t$  — окружное напряжение в кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma_{rb}$  — радиальное напряжение на радиусе, вызванное силами инерции лопаток и замков, в кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma_{рк}$  — эквивалентное напряжение в кг/см<sup>2</sup>.

Напряжения определяются для нескольких расчетных точек радиуса (5—8 точек). Для сплошного диска принимается приближенное равенство  $\sigma_{ra} = \sigma_{ta}$  на небольшом радиусе  $r = a = \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{20}\right) b_2$ . Коэффициент Пуассона очень

мало влияет на величину напряжений, поэтому в приведенных ниже уравнениях он принят постоянным.

Первое приближение радиального напряжения определяется по уравнению

$$\sigma_{r1} = \frac{1}{h} \left\{ \int_a^R \frac{h}{r} K dr - \rho \omega^2 \int_a^R r h dr + B \int_a^R \frac{Eh}{r^{2+\mu}} + n_a \sigma_{ra} \right\}. \quad (57)$$

где

$$K = \frac{(1+\mu)E}{r^{1+\mu}} \int_a^r r^{\mu} T dr - E \alpha T + a^{1+\mu} \alpha_a T a \frac{E}{r^{1+\mu}}. \quad (58)$$

Значения интегралов находятся путем численного интегрирования.

Если диск сплошной, то постоянная  $B$ , входящая в уравнение (57), равна нулю; радиальное напряжение на небольшом радиусе  $a$  определяется из условия на внешнем контуре:

$$\sigma_{rb} h b - \int_a^b \frac{h}{r} K dr + \rho \omega^2 \int_a^b r h dr = 0. \quad (59)$$

\* Раздел написан Р. С. Кинашовили.

Если диск имеет центральное отверстие и напряжение  $\sigma_{ra}$  на внутреннем контуре задано, то постоянная  $B$  определяется по уравнению

$$B = \frac{\sigma_{rb} h_b - \int_a^b \frac{h}{r} K dr + \rho \omega^2 \int_a^b r h - h_a \sigma_{ra}}{\int_a^b \frac{Eh}{r^{2+\mu}} dr}. \quad (60)$$

Найдя значения постоянных, вычисляют по уравнению (57) напряжения  $\sigma_{r1}$ , затем определяются значения второго приближения радиальных напряжений по уравнению

$$\sigma_{r2} = \frac{1}{h} \left\{ \int_a^R \frac{h}{r} K dr - \rho \omega^2 \int_a^R r h dr + \int_a^R \frac{h}{r} \left[ \frac{E(1-\mu^2)}{r^{1+\mu}} \int_a^r \frac{r^\mu \sigma_{r1}}{E} dr - (1-\mu) \sigma_{r1} \right] dr + A \int_a^R \frac{Eh}{r^{2+\mu}} dr + h_a \sigma_{ra} \right\}. \quad (61)$$

Если диск сплошной, то постоянная

$$A = \frac{a^{1+\mu}}{E_a} (1-\mu) \sigma_{ra}. \quad (62)$$

Напряжение  $\sigma_{ra}$  определяется по уравнению:

$$\sigma_{ra} = \frac{\sigma_{rb} h_b \int_a^b \frac{h}{r} K dr + \rho \omega^2 \int_a^b r h dr - \int_a^b \frac{h}{r} \left[ \frac{E(1-\mu^2)}{r^{1+\mu}} \int_a^b \frac{r^\mu \sigma_{r1}}{E} dr - (1-\mu) \sigma_{r1} \right] dr}{h_a} + \frac{\frac{a^{1+\mu}}{E_a} (1-\mu) \int_a^b \frac{Eh}{r^{2+\mu}} dr}{h_a}. \quad (63)$$

Если диск имеет центральное отверстие, то постоянная  $A$  определяется по уравнению

$$A = \frac{\sigma_{rb} h_b \int_a^b \frac{h}{r} K dr + \rho \omega^2 \int_a^b r h dr - \int_a^b \frac{h}{r} \left[ \frac{E(1-\mu^2)}{r^{1+\mu}} \int_a^b \frac{r^\mu \sigma_{r1}}{E} dr - (1-\mu) \sigma_{r1} \right] dr - h_a \sigma_{ra}}{\int_a^b \frac{Eh}{r^{2+\mu}} dr}. \quad (64)$$

Третье приближение всегда хорошо совпадает со вторым, поэтому можно остановиться на втором приближении  $\sigma_{r2}$ . Окружные напряжения определяются по уравнению

$$\sigma_t = \mu \sigma_{r2} + K + \frac{E(1-\mu^2)}{r^{1+\mu}} \int_a^r \frac{r^\mu \sigma_{r2}}{E} dr + A \frac{E}{r^{1+\mu}}. \quad (65)$$

Эквивалентные напряжения, вычисленные по уравнению

$$\sigma_{\text{ЭК}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t}, \quad (66)$$

не должны превосходить допускаемых напряжений.

б) Расчет диска с учетом пластической деформации см. гл. IX, стр. 282.

в) Профилирование сплошного диска по эквивалентным допускаемым напряжениям. Допускаемые эквивалентные напряжения ( $\sigma_{\text{ЭК}}$ ) по радиусу диска выбираются исходя из величин пределов текучести или пределов длительной прочности материала, соответствующих температурам диска.

Радиальные напряжения определяются по уравнению (67) методом последовательных приближений:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{\text{ЭК}}^2 - \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \sigma_r + K + \frac{(1 - \mu^2) E}{r^{1+\mu}} \int_a^r \frac{r^\mu \sigma_r}{E} dr + A \frac{E}{r^{1+\mu}} \right]^2}; \quad (67)$$

$$K = \frac{(1 + \mu) E}{r^{1+\mu}} \int_a^r r^\mu \alpha T dr - E \alpha T + a^{1+\mu} \alpha_a T a \frac{E}{r^{1+\mu}}.$$

Постоянная  $A$  для всех приближений остается одной и той же:

$$A = \frac{a^{1+\mu}}{E_a} (1 - \mu) \sigma_{ra} = \frac{a^{1+\mu}}{E_a} (1 - \mu) \sigma_{\text{ЭК}a}.$$

Полагая в правой части уравнения (67)  $\sigma_r = \sigma_{\text{ЭК}}$ , определяют первое приближение  $\sigma_{r1}$ . Второе приближение определяется по  $\sigma_{r1}$ . Третье приближение мало отличается от второго, поэтому можно ограничиваться вычислением  $\sigma_{r2}$ . Окружное напряжение определяется по уравнению

$$\sigma_t = \mu \sigma_r + K + \frac{(1 - \mu^2) E}{r^{1+\mu}} \int_a^r \frac{r^\mu \sigma_r}{E} dr + \frac{a^{1+\mu}}{E_a} (1 - \mu) \sigma_{\text{ЭК}a} \frac{E}{r^{1+\mu}}. \quad (68)$$

Толщина диска в расчетных точках радиуса определяется по уравнению

$$h = h_c e^{\int_R^c \frac{\sigma_r - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2}{r \sigma_r} dr + \ln \sigma_{rc} - \ln \sigma_r}, \quad (69)$$

где  $c$  — расстояние от центра диска до обода;  $h_c$  — толщина диска под ободом.

Величина  $h_c$  определяется по уравнению

$$h_c = h_b \frac{\mu \sigma_{rc} - \sigma_{tc} + \frac{E \alpha m}{3} \left[ \frac{2b^2}{b+c} - c \right] + \frac{\rho \omega^2}{4} [c^2(1 - \mu) + b^2(3 + \mu)] + \sigma_{rb} \frac{2b^2}{b^2 - c^2}}{\sigma_{rt} \left[ \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu \right]}, \quad (70)$$

где  $h_b$  — толщина обода, определяющаяся из условия прочности обода в местах крепления лопаток.

Величина  $m$ , входящая в уравнение (70), определяется из условия, что температура по толщине обода изменяется по закону прямой:

$$T = n + mr.$$

Проверка прочности обода производится по эквивалентным напряжениям, которые не должны превосходить допускаемые.

Радиальное напряжение  $\sigma_{rb}$ , вызываемое весом лопаток и замков, определяется обычно. Радиальное напряжение на внутреннем контуре обода, считая его распределенным равномерно по всей ширине обода, определяется по уравнению

$$\sigma'_{rc} = \frac{hc}{h_b} \sigma_{rc}. \quad (71)$$

Окружные напряжения на внутреннем и внешнем контурах обода определяются соответственно по уравнениям

$$\sigma'_{tc} = \frac{Eam}{3} \left[ \frac{2b^2}{b+c} - c \right] + \frac{r\omega^2}{4} \times \left[ c^2(1-\mu) + b^2(3+\mu) + \sigma_{rb} \frac{2b^2}{b^2-c^2} - \sigma'_{rc} \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} \right]; \quad (72)$$

$$\sigma_{tb} = -\frac{Eam}{3} \left[ \frac{(b-c)(2c+b)}{b+c} \right] + \frac{r\omega^2}{4} \left[ c^2(3+\mu) + b^2(1-\mu) + \sigma_{rb} \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} - \sigma'_{rc} \frac{2c^2}{b^2-c^2} \right]. \quad (73)$$

Если эквивалентные напряжения выше допускаемых, то вносятся изменения в размеры обода или в первоначальные условия.

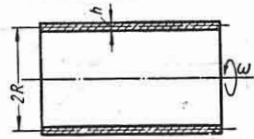
### РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

Тонкостенная цилиндрическая оболочка среднего радиуса  $R$  со свободными концами вращается относительно своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (фиг. 39). Окружное напряжение, возникающее в оболочке,

$$\sigma_t = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{g}.$$

Тонкостенная цилиндрическая оболочка среднего радиуса  $R$  толщиной  $h$ ,

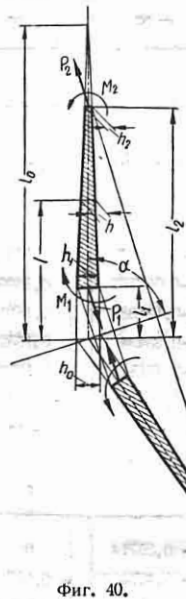
длиной  $l$  с закрепленными краями вращается относительно своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .



Фиг. 39.

Расчет производится так же, как для оболочек с внутренним давлением, равным  $p = \gamma \frac{\omega^2 R h}{g}$ , и соответствующими краевыми условиями (см. стр. 204, 205).

Коническая оболочка с толщиной, изменяющейся по линейному закону, вращается вокруг своей оси и находится под воздействием контурных радиальных сил и изгибающих моментов [4]\*. На единицу длины окружности внутреннего контура приходится сила  $P_1$  и момент  $M_1$ , а на единицу длины окружности наружного контура — соответственно сила  $P_2$  и момент  $M_2$  (фиг. 40).



Фиг. 40.

Оболочка принимается тонкой с соотношением  $\frac{l_0}{h_0} = 10 \div 20$ . Угол наклона образующей оболочки к оси в пределах от 78 до 90°.

В меридиональном сечении такой оболочки возникают нормальные напряжения растяжения  $\sigma'_t$  и

изгиба  $\sigma''_t$ . В сечении, перпендикулярном к меридиану, возникают нормальные напряжения растяжения  $\sigma'_r$  и изгиба  $\sigma''_r$ .

Напряжения изгиба в дальнейшем рассматриваются для точек, находящихся на внутренней поверхности оболочки. Для определения напряжений изгиба на

\* Раздел написан А. Д. Коваленко.

## Коэффициенты для расчета вра

$\frac{l}{l_0}$	$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 0,5$					$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1$	
	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_0$	$\alpha_1$
0	0,13246	0,064103	0,13706	$-\infty$	$+\infty$	0,070672	0,064103
0,1	0,14487	0,060290	0,14849	-2,0137	7,4589	0,087550	0,032583
0,2	0,15159	0,055505	0,16221	-0,27163	1,8553	0,099108	-0,0064925
0,3	0,15259	0,049351	0,17913	-0,033533	0,78683	0,10534	-0,055954
0,4	0,14790	0,041182	0,20072	0,019597	0,40667	0,10626	-0,12036
0,5	0,13750	0,029842	0,22964	0,029842	0,22964	0,10185	-0,20762
0,6	0,12140	0,013065	0,27110	0,027455	0,13381	0,092125	-0,33303
0,7	0,099603	-0,014370	0,33720	0,021151	0,076770	0,077073	-0,53107
0,8	0,072105	-0,067905	0,46381	0,0138765	0,040554	0,056705	-0,90185
0,9	0,038903	-0,22374	0,82876	0,0066989	0,016499	0,031013	-1,9310
1,0	0	$-\infty$	$+\infty$	0	0	0	$-\infty$
	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_0$	$\beta_1$
0	0,13246	0,064103	0,13706	$+\infty$	$-\infty$	0,072672	0,064103
0,1	0,14833	0,049344	0,14446	3,2196	-8,1419	0,10204	-0,005961
0,2	0,16140	0,030854	0,15193	0,7705	-2,4203	0,13213	-0,092245
0,3	0,17166	0,007129	0,15917	0,28224	-1,2793	0,16093	-0,19989
0,4	0,17912	-0,024275	0,16559	0,098720	-0,84692	0,18843	-0,33650
0,5	0,18377	-0,067660	0,16991	0,007976	-0,62918	0,21466	-0,51408
0,6	0,18561	-0,13138	0,16914	-0,044360	-0,50013	0,23961	-0,75275
0,7	0,18465	-0,23434	0,15528	-0,077630	-0,41507	0,26326	-1,0901
0,8	0,18088	-0,43112	0,10125	-0,10024	-0,35469	0,28564	-1,6073
0,9	0,17430	-0,98217	-0,14567	-0,11633	-0,30945	0,30673	-2,5819
1,0	0,16492	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0,32653	$+\infty$
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_0$	$\gamma_1$
0	0,21885	-0,35714	0	$+\infty$	$+\infty$	0,30259	-0,71430
0,1	0,21484	-0,42730	-0,037832	5,3159	6,8324	0,30571	-0,84704
0,2	0,20687	-0,52118	-0,092911	1,1139	1,6301	0,30142	-1,0043
0,3	0,19492	-0,65210	-0,17523	0,41938	0,68412	0,28970	-1,1936
0,4	0,17900	-0,8462	-0,30887	0,19992	0,35556	0,27057	-1,4252
0,5	0,15910	-1,1489	-0,53537	0,10720	0,20371	0,24401	-1,7137
0,6	0,13523	-1,6817	-0,96349	0,060713	0,12108	0,21005	-2,0765
0,7	0,10738	-2,7748	-1,3106	0,034459	0,071074	0,16866	-2,5155
0,8	0,075561	-5,7327	-4,6752	0,018266	0,038486	0,11985	-2,8397
0,9	0,039767	-20,799	-19,904	0,0075408	0,016069	0,063636	0,21348
1,0	0	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$

Таблица 12

шающихся конических оболочек

$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1$			$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 2$				
$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0,29575	— ∞	+ ∞	—0,0050145	0,064103	0,60182	— ∞	— ∞
0,31927	—17,379	5,9854	0,014390	—0,077841	0,64029	—32,620	—49,648
0,34466	—3,6074	2,2979	0,029594	—0,25059	0,65790	—10,450	—6,9624
0,37227	—1,2392	1,2097	0,040596	—0,46107	0,64291	—4,5229	—1,0895
0,40252	—0,49953	0,71107	0,047398	—0,71857	0,57618	—2,1485	0,18522
0,43608	—0,20762	0,43608	0,050000	—1,0360	0,42432	—1,0360	0,42432
0,47405	—0,080238	0,26835	0,048403	—1,4324	0,12348	—0,47905	0,384125
0,51843	—0,023980	0,15954	0,042603	—1,9384	—0,46693	—0,19760	0,27553
0,57445	—0,0016232	0,086165	0,032602	—2,6124	—1,7406	—0,06265	0,16448
0,66505	0,0036204	0,035474	0,018401	—3,6245	—5,5165	—0,008649	0,071144
+ ∞	0	0	0	— ∞	— ∞	0	0
$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$
0,29575	+ ∞	— ∞	—0,0050145	0,064103	0,60182	+ ∞	+ ∞
0,30821	21,842	—2,5678	0,040094	—0,22554	0,59871	19,434	77,296
0,31138	6,1165	—1,6754	0,088401	—0,56855	0,50090	11,576	18,916
0,29924	2,8603	—1,3788	0,13991	—0,96006	0,25700	7,9110	6,7101
0,26128	1,5853	—1,1923	0,19460	—1,3792	—0,21592	5,5327	2,2207
0,17766	0,92930	—1,0498	0,25250	—1,7651	—1,0587	3,8372	0,21008
0,0071825	0,53710	—0,93215	0,31360	—1,9518	—2,5293	2,5768	—0,74440
—0,34937	0,27981	—0,83103	0,37790	—1,4498	—5,1537	1,6187	—1,1754
—1,1970	0,10036	—0,74220	0,44539	1,4864	—10,214	0,88180	—1,3233
—4,0827	—0,030243	—0,66295	0,51608	16,811	—22,131	0,31203	—1,3102
— ∞	0	0	0,58995	+ ∞	— ∞	0	0
$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$
0	— ∞	+ ∞	0,23452	—1,4286	0	— ∞	— ∞
—0,16305	—5,9001	22,438	0,26377	—1,6335	—0,66004	—93,207	—5,5473
—0,39871	—1,5317	5,6700	0,28131	—1,7067	—1,5860	—24,714	3,2396
—0,75035	—0,58595	2,5231	0,28713	—1,5200	—2,8891	—10,354	3,7862
—1,2993	—0,24112	1,3772	0,28126	—0,81840	—4,7486	—4,9448	3,1679
—2,2137	—0,090655	0,81979	0,26364	0,94716	—7,4731	—2,4211	2,3977
—3,8903	—0,022044	0,50115	0,23434	5,1154	—11,650	—1,1362	1,6975
—7,4707	0,0067720	0,30005	0,19332	15,622	—18,562	—0,47110	1,1135
—17,508	0,014529	0,16458	0,14059	48,408	—31,722	—0,14516	0,64518
—70,308	0,010585	0,069198	0,076152	231,74	—65,730	—0,014717	0,27918
— ∞	0	0	0	+ ∞	— ∞	0	0

$\frac{l}{h_0}$	$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 0,5$					$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1$	
	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_0$	$\delta_1$
0	0,21885	-0,35714	0	$-\infty$	$-\infty$	0,30259	-0,71430
0,1	0,20940	-0,39264	-0,025061	-8,1585	-6,1852	0,29556	-0,78104
0,2	0,19719	-0,43799	-0,058352	-2,2523	-1,2161	0,28336	-0,85558
0,3	0,18222	-0,49827	-0,10440	-1,0283	-0,39575	0,26600	-0,93962
0,4	0,16448	-0,58263	-0,17154	-0,56239	-0,14868	0,24349	-1,0354
0,5	0,14398	-0,70925	-0,27670	-0,33242	-0,054972	0,21580	-1,1456
0,6	0,12071	-0,91943	-0,45926	-0,20128	-0,016256	0,18296	-1,2494
0,7	0,094680	-1,3271	-0,83074	-0,11937	-0,00076060	0,14496	-1,4059
0,8	0,065885	-2,3664	-1,8288	-0,064929	0,0039261	0,10180	-1,4639
0,9	0,034325	-7,3236	-6,8832	-0,027121	0,0032970	0,053480	-0,33403
1,0	0	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0	$+\infty$
	$\varepsilon_0$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_0$	$\varepsilon_1$
0	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	0	0
0,1	0,0016	-0,0022	-0,0001	0,7400	0,3057	0,0022	-0,0056
0,2	0,0065	-0,0125	-0,0009	0,5767	0,1821	0,0093	-0,0248
0,3	0,0152	-0,0321	-0,0037	0,4645	0,1162	0,0217	-0,0630
0,4	0,0279	-0,0664	-0,0108	0,3743	0,0742	0,0401	-0,1275
0,5	0,0448	-0,1236	-0,0269	0,3056	0,0460	0,0652	-0,2298
0,6	0,0665	-0,2196	-0,0621	0,2274	0,0267	0,0974	-0,3878
0,7	0,0937	-0,3900	-0,1422	0,1644	0,0138	0,1373	-0,6325
0,8	0,1249	-0,7369	-0,3491	0,1060	0,0057	0,1856	-1,021
0,9	0,1323	-1,734	-1,118	0,0514	-0,0013	0,2428	-1,639
1,0	0,2055	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0,3096	$+\infty$

внешней поверхности оболочки следует взять полученные значения с обратным знаком.

В направлениях внешней нормали к срединной поверхности оболочки имеют место перемещения  $w$ .

Указанные напряжения и перемещения вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r' &= \alpha_0 \sigma_0 + \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 \\ \sigma_t' &= \beta_0 \sigma_0 + \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 + \beta_4 C_4 \\ \sigma_r'' &= \gamma_0 \sigma_0 + \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 + \gamma_4 C_4 \\ \sigma_t'' &= \delta_0 \sigma_0 + \delta_1 C_1 + \delta_2 C_2 + \delta_3 C_3 + \delta_4 C_4 \end{aligned} \right\} (74)$$

$$w = (\varepsilon_0 \sigma_0 + \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \varepsilon_3 C_3 + \varepsilon_4 C_4) \frac{l_0^2}{E h_0} + C_5$$

В этих формулах  $\sigma_0 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 l_0^2 \sin^2 \alpha$ ,  $\alpha$ ,  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$ ,  $h_0$ ,  $h_1$  и  $h_2$  — геометрические величины, указанные на фиг. 40. Значения  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\varepsilon_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) для разных значений  $\frac{l}{l_0}$  и параметра  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha$  приведены в табл. 12, где  $\mu = 0,3$ . Постоянные  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) нахо-



Продолжение табл. 12

$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1$			$\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 2$				
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$
0	$+\infty$	$-\infty$	0,23452	-1,4286	0	$+\infty$	$+\infty$
-0,10804	-5,3527	-23,427	0,24773	-1,5320	-0,43796	59,318	-46,570
-0,25073	-2,9074	-4,9284	0,25279	-1,5491	-1,0027	5,8532	-14,978
-0,44575	-1,6954	-1,6675	0,24971	-1,4316	-1,7368	-0,52469	-6,1045
-0,72503	-1,0457	-0,64238	0,23847	-1,0664	-2,7061	-1,4117	-2,6121
-1,1520	-0,65870	-0,24197	0,21909	-0,23171	-4,0183	-1,2422	-1,0571
-1,8708	-0,41186	-0,073144	0,19157	1,5824	-5,8699	-0,88811	-0,34504
-3,2802	-0,24720	-0,0045482	0,15589	5,7930	-8,6714	-0,55945	-0,038829
-6,9098	-0,13421	0,016593	0,11208	17,840	-13,504	-0,30281	0,061841
-24,443	-0,055375	0,014189	0,060114	79,218	-24,709	-0,11979	0,057093
$-\infty$	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	0	0
$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_0$	$\varepsilon$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$
0	$-\infty$	$+\infty$	0	0	0	$-\infty$	$-\infty$
-0,0004	1,060	1,212	0,0018	-0,0110	-0,0017	-0,6939	3,319
-0,0039	0,9535	0,7474	0,0078	-0,0481	-0,0158	0,4699	2,421
-0,0159	0,8260	0,4852	0,0189	-0,1158	-0,0634	0,8823	1,715
-0,0462	0,6956	0,3138	0,0361	-0,2134	-0,1808	0,9863	1,169
-0,1141	0,5674	0,1960	0,0603	-0,3241	-0,4341	0,9337	0,7560
-0,2610	0,4434	0,1145	0,0925	-0,3844	-0,9479	0,7969	0,4517
-0,5874	0,3244	0,0594	0,1334	-0,1750	-1,981	0,6153	0,2378
-1,405	0,2108	0,0245	0,1841	1,145	-4,163	0,4127	0,0992
-4,294	0,1027	0,0058	0,2456	8,548	-9,568	0,2044	0,0234
$-\infty$	0	0	0,3186	$+\infty$	$+\infty$	0	0

дятся из условий для напряжений на контурах:

при  $l = l_1$

$$\sigma'_{r1} = \frac{P_1}{h_1 \sin \alpha}; \quad \sigma''_{r1} = \frac{6M_1}{h_1^2};$$

при  $l = l_2$

$$\sigma'_{r2} = \frac{P_2}{h_2 \sin \alpha}; \quad \sigma''_{r2} = \frac{6M_2}{h_2^2},$$

где  $l_1$  и  $h_1$  — меридиональная координата и толщина на внутреннем контуре оболочки;  $l_2$  и  $h_2$  — меридиональная координата и толщина на наружном контуре оболочки.

Постоянная  $C_5$  определяется из условия равенства нулю осевого перемеще-

ния на закрепленном крае оболочки. Так как угол образующей оболочки с осью вращения близок к прямому, то приближенно осевые перемещения равны перемещениям по нормали к поверхности оболочки  $w$ , поэтому условие для определения  $C_5$  таково:  $w = 0$  при  $l = l_1$ .

Для вращающейся оболочки с небольшим отверстием ( $l_1 \leq 0,2l_0$ ), свободной на внутреннем и наружном контуре от внешней нагрузки, наибольшее суммарное напряжение от растяжения и изгиба получается при  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha < 2$  на внутреннем, а при  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha > 2$  на наружном контуре.

**Пример.** Определить суммарное напряжение на внутренней контуре, а также прогиб на наружной контуре во вращающейся конической оболочке из алюминиевого сплава ( $\gamma = 2,5 \text{ г/см}^3$ ;  $E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ), если  $P_1 = M_1 = P_2 = M_2 = 0$ , а  $n = 10\,000 \text{ об/мин}$ .

Размеры оболочки:  $l_1 = 10\text{н}$ ;  $l_2 = 0,2l_1$ ;  $l_3 = 0,9l_1$ ;  $l_0 = 20 \text{ см}$ ;  $\alpha = 84^\circ 17'$ .

Вычисляем  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 10 \operatorname{ctg} 84^\circ 17' \approx 1$ ;

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 10000}{60} = 1045 \text{ 1/сек};$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{2,5}{9,81 \cdot 10^6} \cdot 1045^2 \cdot 20^2 \sin^2 84^\circ 17' = 1107 \text{ кг/см}^2.$$

Принимая для  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1$  из табл. 12 коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\gamma_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) и приравнявая меридиональные напряжения на внутреннем и наружном контурах оболочки нулю, получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных  $C_{1-4}$ :

$$\begin{aligned} 0,099108 \cdot 1107 - 0,0064925C_1 + \\ + 0,34466C_2 - 3,6074C_3 + 2,2979C_4 = 0; \\ 0,031013 \cdot 1107 - 1,9310C_1 + 0,56505C_2 + \\ + 0,0036204C_3 + 0,035474C_4 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,30142 \cdot 1107 - 1,0043C_1 - 0,39871C_2 - \\ - 1,5317C_3 + 5,6700C_4 = 0; \\ 0,063636 \cdot 1107 + 0,21348C_1 - 70,308C_2 + \\ + 0,010585C_3 + 0,069198C_4 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим следующие значения постоянных:

$$\begin{aligned} C_1 = 17,05 \text{ кг/см}^2; \quad C_2 = 0,99 \text{ кг/см}^2; \\ C_3 = -6,09 \text{ кг/см}^2; \quad C_4 = -57,40 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

По полученным значениям постоянных  $C_{1-4}$  и данным табл. 12 можно определить напряжения и перемещения в любой точке оболочки. В данном случае, ввиду того что  $\frac{l_0}{h_0} \operatorname{ctg} \alpha = 1 < 2$ , наибольшие напряжения будут иметь место на внутреннем контуре оболочки.

Используя табл. 12, находим на внутреннем контуре ( $l = 0,2l_1$ ) по формулам (74)

$$\sigma_t = \sigma_t' + \sigma_t'' = 204 + 599 = 803 \text{ кг/см}^2;$$

$$\omega_1 = -0,0111 + C_3$$

и на наружном ( $l = l_2$ )

$$\omega_1 = 0,0673 + C_3.$$

Полагая на внутреннем контуре  $\omega_1 = 0$ , определяем  $C_3 = 0,0111$  и  $\omega_1 = 0,0784 \text{ см}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1953.
2. Жирицкий Г. С., Конструкция и расчет на прочность деталей паровых турбин, Госэнергоиздат, 1955.
3. Кинасошвили Р. С., Расчет на прочность дисков турбомашин, Оборонгиз, 1954.
4. Коваленко А. Д., Теория расчета на прочность колес турбомашин, АН УССР, 1950.
5. Левин А. В., Рабочие лопатки и диски паровых турбин, Госэнергоиздат, 1953.
6. Малинин Н. Н., Расчет вращающегося неравномерно нагретого диска переменной толщины, Инженерный сборник, т. XVII, изд. АН СССР, 1953.
7. Малинин Н. Н., Расчет вращающегося диска, посаженного на вал с натягом, МВТУ имени Баумана. Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть в машиностроении, Сборник 26, Машгиз, 1953.
8. Малинин Н. Н., Изгиб турбинных лопаток, Известия Академии наук СССР, Отд. техн. наук, № 4, 1954.
9. Малкин Я. Ф., Профилирование турбинных дисков в связи с расчетом на прочность и вибрацию, ОНТИ НКТП СССР, 1937.
10. Моисеев А. А., Конструктивные расчеты корабельных турбоагрегатов, Судпромгиз, 1948.
11. Пономарев С. Д., Расчет и конструкция витых пружин, ОНТИ НКТП, 1938.
12. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьяев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении (Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть), Машгиз, 1952.
13. Работнов Ю. Н., О диске равного сопротивления, Прикладная математика и механика, изд. АН СССР, т. XII, вып. 4, 1948.
14. Тихомиров Е. Н., Курс сопротивления материалов, ОНТИ ГТТИ, 1934.
15. Тумаркин С. А., Напряжения в ободе со спицами и лопастями, Труды ЦАГИ, вып. 271, 1936.
16. Тумаркин С. А., Методы расчета напряжений во вращающихся дисках, Труды ЦАГИ, вып. 262, 1936.
17. Яновский М. И., Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин, АН СССР, 1947.
18. Энциклопедический справочник "Машиностроение", т. 1, кн. 2-я и т. 2, Машгиз, 1947 и 1948.

РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

РАСЧЕТЫ ДЕТАЛЕЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Брус Изгиб

Ниже приводятся формулы для расчетов за пределами упругости изогнутого бруса с поперечным сечением, имеющим (если не будет специально оговорено) две оси симметрии (фиг. 1, а), одна из которых лежит в плоскости действия изгибающего момента [3], [20], [21], [34]. Диаграммы растяжения и сжатия материала бруса одинаковы. В случае поперечного изгиба используется гипотеза плоских сечений, и касательные напряжения в поперечном сечении в расчете не учитываются.

Построение диаграммы изгиба по диаграмме растяжения и определенные напряжения. Зависимость между напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\epsilon$  определяется диаграммой растяжения материала (кривая  $ON$  на фиг. 1, б), полученной экспериментально.

Зависимость изгибающего момента  $M$  от кривизны  $\frac{1}{\rho}$  ( $\rho$  — радиус кривизны изогнутой оси бруса) устанавливается следующими выражениями:

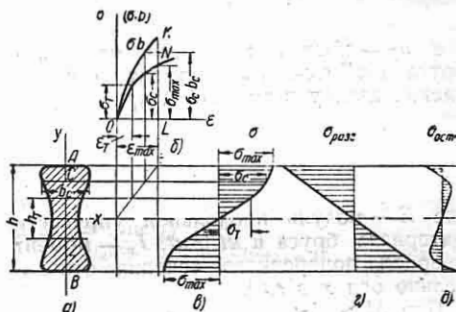
$$M = \frac{h^2}{2\epsilon_{\max}^2} \int_0^{\epsilon_{\max}} \sigma b \epsilon d\epsilon; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\epsilon_{\max}}{h}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  — нормальное напряжение;  $\epsilon$  — соответствующая ему линейная деформация в некоторой точке поперечного сечения;  $\epsilon_{\max}$  — линейная деформация в точках поперечного сечения, наиболее

удаленных от оси  $x$ ;  $h$  — высота поперечного сечения;  $b = b(y)$  — ширина поперечного сечения.

Для построения графика зависимости изгибающего момента  $M$  от кривизны  $\frac{1}{\rho}$  (диаграмма изгиба) необходимо, задавшись определенным значением  $\epsilon_{\max}$ , перестроить диаграмму растяжения, умножив величины напряжений  $\sigma$  на соответствующую ширину поперечного сечения  $b$



Фиг. 1.

(например,  $\sigma_c$  умножается на  $b_c$ ) (фиг. 1). Таким образом строится кривая  $OK$ .

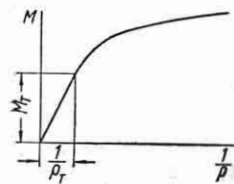
Статический момент полученной площади  $OKL$  относительно оси  $\sigma$  равен интегралу в правой части формулы (1). После этого по формуле (1) определяется изгибающий момент  $M$ , а по формуле (2) — кривизна  $\frac{1}{\rho}$ .

Задаваясь различными значениями  $\epsilon_{\max}$ , можно построить диаграмму изгиба (фиг. 2).

Если брус выполнен из ограниченно пластичного материала, имеющего сравнительно небольшую величину деформации при разрушении  $\epsilon_{разр}$ , то для определения разрушающего момента

необходимо в формуле (1) положить  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\text{разр}}$ .

Для бруса прямоугольного поперечного сечения формула (1) принимает следующий вид:



$$M = \frac{bh^2}{2\varepsilon_{\max}^2} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \sigma \varepsilon d\varepsilon. \quad (3)$$

Фиг. 2.

Интеграл в формуле (3) представляет собой статический момент площади  $ONL$  (фиг. 1, б) относительно оси  $\sigma$ .

В случае схематизированной диаграммы растяжения с линейным упрочнением зависимость изгибающего момента от кривизны может быть выражена в явной форме.

Величина изгибающего момента, при котором начинают возникать пластические деформации,

$$M_T = \sigma_T W_x,$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести материала бруса в  $\text{кг/см}^2$ ;  $W_x$  — момент сопротивления изгибу в  $\text{см}^3$ . Тогда при  $M < M_T$

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M}{EJ_x},$$

где  $E$  — модуль продольной упругости материала бруса в  $\text{кг/см}^2$ ;  $J_x$  — момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x$  в  $\text{см}^4$ .

При  $M > M_T$ :

для бруса прямоугольного сечения

$$\frac{M}{M_T} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{E_T}{E} \cdot \frac{\rho_T}{\rho} + \left( 1 - \frac{E_T}{E} \right) \left[ 3 - \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2 \right] \right\}; \quad l = \int \frac{M_1}{\rho} dz, \quad (6)$$

для бруса круглого сечения

$$\frac{M}{M_T} = \frac{2}{3\pi} \left\{ 3 \frac{\rho_T}{\rho} \left( \arcsin \frac{\rho}{\rho_T} + \frac{E_T}{E} \arccos \frac{\rho}{\rho_T} \right) + \left( 1 - \frac{E_T}{E} \right) \left[ 5 - 2 \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2} \right\},$$

где  $E_T$  — модуль упрочнения материала бруса в  $\text{кг/см}^2$  (см. стр. 18).

В случае схематизированной диаграммы растяжения материала, не обладающего упрочнением ( $E_T = 0$ ), зависимость

изгибающего момента от кривизны при  $M > M_T$  имеет вид:  
для бруса прямоугольного поперечного сечения

$$\frac{M}{M_T} = \frac{1}{2} \left[ 3 - \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

для бруса круглого сечения

$$\frac{M}{M_T} = \frac{2}{3\pi} \left\{ 3 \frac{\rho_T}{\rho} \arcsin \frac{\rho}{\rho_T} + \left[ 5 - 2 \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left( \frac{\rho}{\rho_T} \right)^2} \right\}.$$

В формулах через  $\rho_T$  обозначен радиус кривизны бруса, при котором начинается образование пластических деформаций:

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{2\varepsilon_T}{h} = \frac{M_T}{EJ_x}. \quad (5)$$

В случае изгибающего момента  $M > M_T$  поперечное сечение разделяется на две области — упругую (в которой нормальное напряжение  $\sigma < \sigma_T$ ) и пластическую ( $\sigma > \sigma_T$ ).

Высота упругой области

$$h_T = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{\max}} h = \frac{\sigma_T h}{E \varepsilon_{\max}},$$

где  $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$  — деформация, соответствующая пределу текучести материала.

Графическое построение эпюры напряжений представлено на фиг. 1, в.

**Определение прогибов.** Прогибы балки определяются по формуле

$$l = \int \frac{M_1}{\rho} dz, \quad (6)$$

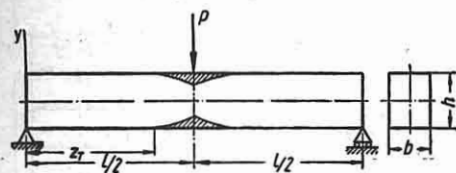
где  $\frac{1}{\rho}$  — кривизна балки от заданной нагрузки;  $M_1$  — изгибающий момент в текущем сечении от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения в той точке, перемещение которой определяется; интеграл берется по длине бруса.

Кривизна балки  $\frac{1}{\rho}$  находится при помощи эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и диаграммы изгиба (фиг. 2). Интеграл (6) может быть вы-

числен графо-аналитическим методом А. Н. Верещагина (см. стр. 152).

Угловое перемещение определяется также по формуле (6), в которой  $M_1$  — изгибающий момент от пары с моментом, равным единице, приложенной в сечении, угол поворота которого определяется.

**Пример.** Определить наибольший прогиб двухопорной балки прямоугольного сечения, нагруженной силой  $P = \frac{5}{4} P_T$ , приложенной по середине пролета (фиг. 3). Через  $P_T$  обозначена величина силы, при которой в балке начинают



Фиг. 3.

возникать пластические деформации. Материал балки не обладает упрочнением.

Изгибающий момент в текущем сечении балки на расстоянии  $z$  от опоры

$$M = \frac{Pz}{2}; \quad (7)$$

максимальный изгибающий момент имеет место в среднем сечении при  $z = \frac{l}{2}$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}.$$

Приравняв эту величину  $M_T$ , получаем

$$P_T = \frac{4M_T}{l}. \quad (8)$$

Границу пластической области по крайним волокнам балки  $z_T$  находим, приравняв величину изгибающего момента в текущем сечении величине  $M_T$ , откуда, учитывая выражение (8), получим

$$\frac{z_T}{l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_T}{P} = \frac{2}{5}. \quad (9)$$

На фиг. 3 пластическая область в балке при  $P = \frac{5}{4} P$  заштрихована.

На упругом участке балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x} = \frac{Pz}{2EJ_x}. \quad (10)$$

На упруго-пластическом участке согласно формулам (4), (5) и (7)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_T}{EJ_x \sqrt{3 - \frac{Pz}{M_T}}}, \quad (11)$$

а момент от единичной силы в любом сечении ( $0 < z < \frac{l}{2}$ )

$$M_1 = \frac{z}{2}. \quad (12)$$

Формула (6) с использованием выражений (10) — (12) принимает вид

$$f_{\max} = 2 \int_0^{z_T} \frac{Pz^2}{4EJ_x} dz + 2 \int_{z_T}^{\frac{l}{2}} \frac{M_T z dz}{2EJ_x \sqrt{3 - \frac{Pz}{M_T}}}.$$

Это выражение после преобразований с учетом формул (8) и (9) приводится к виду

$$f_{\max} = 1,23 f_T,$$

где  $f_T$  — наибольший прогиб балки при  $P = P_T$ ;

$$f_T = \frac{P_T l^3}{48EJ_x}.$$

На фиг. 4—15 представлены графики зависимости отношения наибольшего изгибающего момента в опасном сечении балки  $M_{\max}$  к величине изгибающего момента, при котором начинают возникать пластические деформации  $M_T = \sigma_T W_x$  от отношения прогиба  $f_{\max}$  в сечении, где он достигает наибольшего значения, к величине прогиба в том же сечении, при котором образуются пластические деформации  $f_T$  [27].

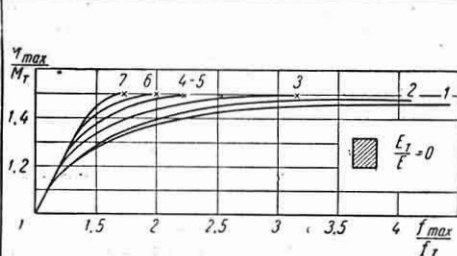
Графики приведены для различных форм поперечных сечений (прямоугольного, круглого, трубчатого) и различных отношений модуля упругости к модулю упругости, указанных на чертежах, при различных схемах нагружения балки, приведенных в табл. 1

В табл. 1 даны также величины прогибов  $f_T$ , при которых в балках начинают возникать пластические деформации.

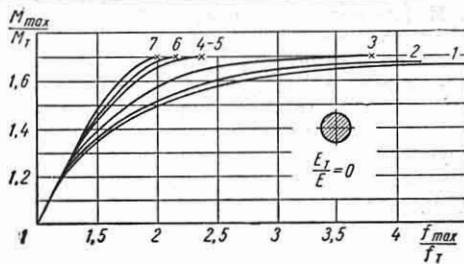
При помощи приведенных на фиг. 4—15 графиков можно определить величину момента, соответствующего допустимому для балки прогибу, после чего, установив зависимость момента от нагрузки, найти величину допускаемой нагрузки.

**Несущая способность балок.** Если материал балки не обладает упрочнением, то в предельном состоянии пластическая область заполняет все сечение.

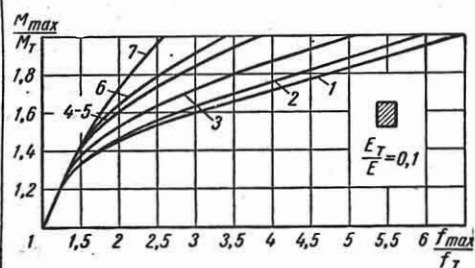
Изгибающий момент, соответствующий этому состоянию, называется предельным моментом  $M_{пред}$ .



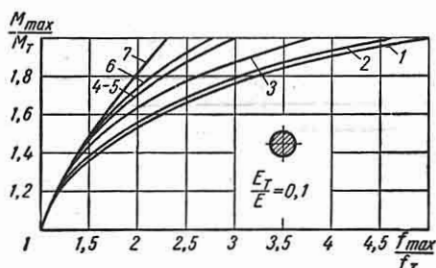
Фиг. 4.



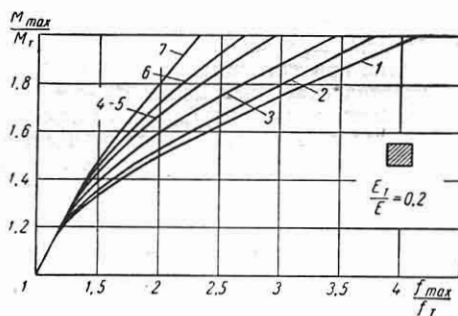
Фиг. 8.



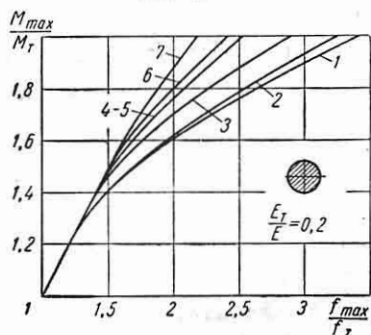
Фиг. 5.



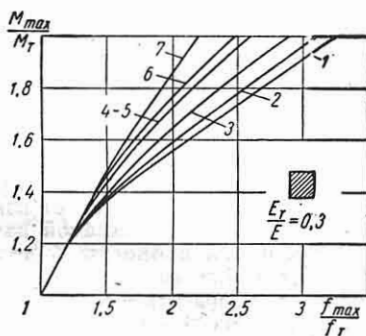
Фиг. 9.



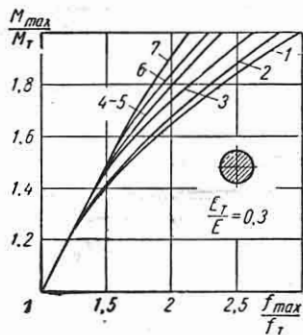
Фиг. 6.



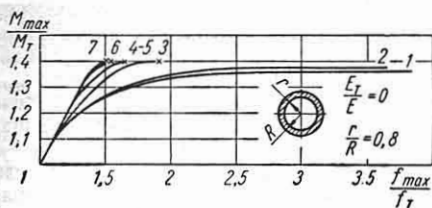
Фиг. 10.



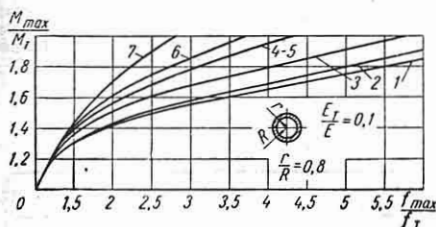
Фиг. 7.



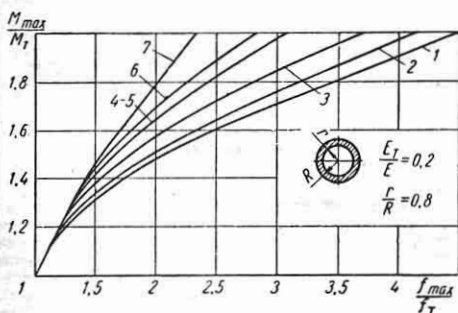
Фиг. 11.



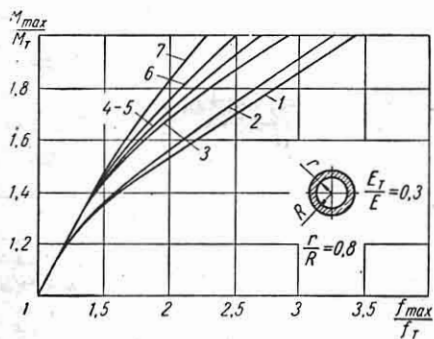
Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Таблица 1  
Прогибы для различных случаев нагружения балок

Схема балки и нагрузки	Прогиб $f_T$
<p>1. Консоль. Момент приложен на конце (чистый изгиб)</p>	$\frac{M_T l^2}{2EI}$
<p>2. Балка на двух опорах. Две равные силы приложены на расстоянии 0,25 м от опор</p>	$\frac{11}{95} \frac{M_T l^2}{EI}$
<p>3. Балка на двух опорах. Сплошная равномерная нагрузка</p>	$\frac{5M_T l^2}{48EI}$
<p>4. Балка на двух опорах. Сила приложена в середине пролета</p>	$\frac{M_T l^2}{12EI}$
<p>5. Консоль. Сила приложена на конце</p>	$\frac{M_T l^2}{3EI}$
<p>6. Консоль. Сплошная равномерная нагрузка</p>	$\frac{M_T l^2}{4EI}$
<p>7. Консоль. Сплошная нагрузка по треугольнику</p>	$\frac{M_T l^2}{5EI}$

Величина предельного изгибающего момента

$$M_{пред} = 2\sigma_T S_x,$$

где  $S_x$  — статический момент половины сечения.

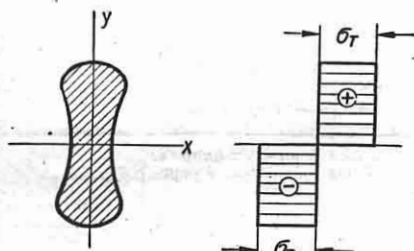
Если поперечное сечение имеет одну ось симметрии, лежащую в плоскости действия изгибающего момента, то

$$M_{пред} = \sigma_T (S_x^p + S_x^{сжс}),$$

где  $S_x^p$  и  $S_x^{сжс}$  — абсолютные значения статических моментов растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной линии  $\chi$ , делящей площадь поперечного сечения на две равные части.

В табл. 2 приведены величины  $S_x^p + S_x^{сжс}$  или  $2S_x$  для различных поперечных сечений.

Когда изгибающий момент в некотором сечении балки достигает предельного значения, в этом сечении возникает



Фиг. 16.

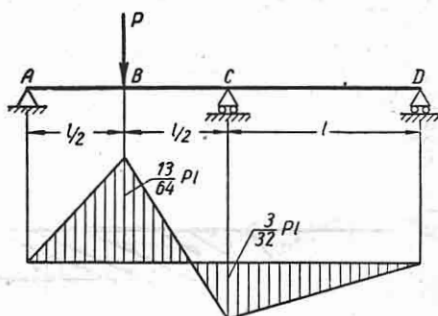
пластический шарнир. Эпюра напряжений в предельном состоянии представлена на фиг. 16.

Статически определимые балки теряют несущую способность в случае возникновения одного пластического шарнира.

При расчете статически определимых балок по методу предельного равновесия находится величина нагрузки  $P_{пред}$ , при которой в наиболее опасном сечении балки возникает пластический шарнир.

Для статически неопределимых балок появление одного пластического шарнира может еще не привести к исчерпанию грузоподъемности балки.

*Пример.* Определить величину предельной нагрузки для двухпролетной балки, изображенной на фиг. 17. Материал балки не обладает упрочнением.



Фиг. 17.

Рассматриваемая балка один раз статически неопределима. Эпюра изгибающих моментов при условии, что во всех точках балки деформации упругие, представлена на фиг. 17. При некотором значении силы  $P$  в наиболее напряженном сечении  $B$  возникает пластический шарнир (фиг. 18, а). При дальнейшем возрастании нагрузки изгибающий момент в сечении  $B$  остается постоянным.

Статические моменты для некоторых сечений

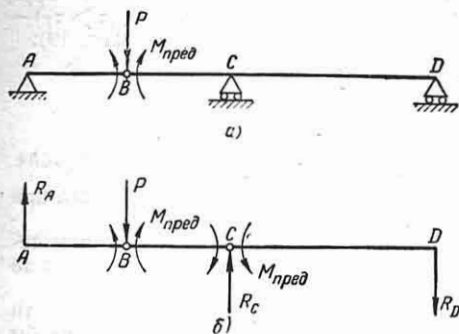
Таблица 2

$2S_x = \frac{bh^2}{4}$	$2S_x = \frac{D^3}{6}$	$2S_x = D^3 \delta$	$S_x^p + S_x^{сжс} = 0,0977bh^2$	$S_x^p + S_x^{сжс} = \frac{h^2}{3(b_1 - b_2)^2} \times \left[ b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \times \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$	$2S_x = (1,14 + 1,17) W_x$



и равным  $M_{пред}$ ; изгибающие моменты на участке  $AB$  также остаются постоянными, а изгибающие моменты на участке  $BCD$  постепенно возрастают.

Возникновение одного пластического шарнира в рассматриваемом случае превращает один раз статически неопределимую балку в балку статически



Фиг. 18.

определимую. Несущая способность балки согласно методу предельного равновесия исчерпывается в том случае, когда в сечении  $C$  изгибающий момент достигает предельного значения (когда в этом сечении возникает пластический шарнир). Величина предельной нагрузки находится из уравнений равновесия и условий равенства изгибающих моментов в сечениях пластического шарнира предельному моменту.

Составим эти условия (фиг. 18, б):

$$R_A \frac{l}{2} = M_{пред}; \quad R_D l = M_{пред},$$

откуда

$$R_A = \frac{2M_{пред}}{l}; \quad R_D = \frac{M_{пред}}{l}.$$

Запишем условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки  $A$  и суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$P_{пред} \frac{l}{2} - R_C l + R_D 2l = 0;$$

$$R_A + R_C - P_{пред} - R_D = 0.$$

Из полученных уравнений находим

$$P_{пред} = 6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

### Кручение

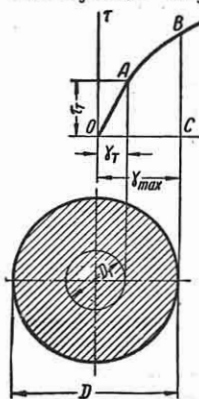
Построение диаграммы кручения по диаграмме сдвига и определение напряжений для бруса круглого поперечного сечения. Зависимость между касательным напряжением  $\tau$  и угловой деформацией  $\gamma$  определяется диаграммой сдвига (фиг. 19). Построение диаграммы сдвига по диаграмме растяжения см. стр. 19.

Уравнения, при помощи которых по диаграмме сдвига может быть построена диаграмма кручения (график зависимости крутящего момента  $M$  от относительного угла закручивания  $\theta$ ;  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ , где  $d\varphi$  — угол закручивания элемента бруса длиной  $dz$ ), имеют вид [21]

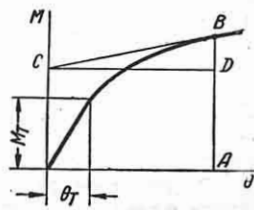
$$M = \frac{\pi D^3}{4\gamma_{max}^3} \int_0^{\gamma_{max}} \tau \gamma^2 d\gamma; \quad (13)$$

$$\gamma_{max} = \theta \frac{D}{2}, \quad (14)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение;  $\gamma$  — соответствующая ему угловая деформация в некоторой точке поперечного сечения;  $\gamma_{max}$  — угловая деформация в точках, наиболее удаленных от центра поперечного



Фиг. 19.



Фиг. 20.

сечения;  $D$  — диаметр поперечного сечения.

Интеграл в формуле (13) представляет собой момент инерции площади  $OABC$  относительно оси ординат (фиг. 19).

Задаваясь различными значениями  $\gamma_{max}$  по формуле (13) определяют  $M$ , а по формуле (14)  $\theta$ , после чего строится диаграмма кручения (фиг. 20).

Если брус выполнен из материала, разрушающегося при сравнительно не большой величине угловой деформации, то для определения разрушающего крутящего момента нужно в формуле (13) положить  $\gamma_{max} = \gamma_{разр}$ .

В случае схематизированной диаграммы сдвига с линейным упрочнением без площадки текучести зависимость крутя-

щего момента от относительного угла закручивания значительно упрощается.

Обозначим величину крутящего момента, при котором начинают возникать пластические деформации, через  $M_T$ :

$$M_T = \tau_T W_p,$$

где  $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге в  $\text{кг/см}^2$ ;  $W_p = \frac{\pi L^3}{16}$  — полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса в  $\text{см}^3$ , тогда при  $M < M_T$

$$\theta = \frac{M}{GJ_p},$$

где  $G$  — модуль сдвига в  $\text{кг/см}^2$ ;  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$  — полярный момент инерции поперечного сечения бруса в  $\text{см}^4$ .

При  $M > M_T$

$$\frac{M}{M_T} = \frac{1}{3} \left\{ 3 \frac{G_T}{G} \cdot \frac{\theta}{\theta_T} + \left( 1 - \frac{G_T}{G} \right) \left[ 4 - \left( \frac{\theta_T}{\theta} \right)^3 \right] \right\},$$

где  $G_T$  — модуль упрочнения при сдвиге материала бруса в  $\text{кг/см}^2$  (см. стр. 19).

В случае, если материал не обладает упрочнением  $G_T = 0$ , при  $M > M_T$

$$\frac{M}{M_T} = \frac{1}{3} \left[ 4 - \left( \frac{\theta_T}{\theta} \right)^3 \right].$$

В последних формулах через  $\theta_T$  обозначен относительный угол закручивания, при котором начинается образование пластических деформаций:

$$\theta_T = \frac{2\gamma_T}{D} = \frac{M_T}{GJ_p}.$$

Диаграмма сдвига может быть построена по экспериментально полученной диаграмме кручения при помощи следующей зависимости [21]:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{\pi D^3} \left( 3M + \theta \frac{dM}{d\theta} \right). \quad (15)$$

Выражение, стоящее в скобках, в некотором масштабе равно трем отрезкам  $AB$  плюс отрезок  $BD$  (фиг. 20). Величина  $\gamma_{\max}$  определяется формулой (14). Задаваясь различными значениями  $M$

и определяя по диаграмме кручения соответствующее значение  $\theta$  по формулам (15) и (14), находят  $\tau$  и  $\gamma$ .

При  $M > M_T$  поперечное сечение разделяется на две области — упругую ( $\tau < \tau_T$ ), представляющую собой круг диаметром  $D_T$ , и пластическую ( $\tau > \tau_T$ ) — кольцо диаметрами  $D_T$  и  $D$  (фиг. 19):

$$D_T = \frac{\gamma_T}{\gamma_{\max}} D,$$

где  $\gamma_T = \frac{\tau_T}{G}$  — угловая деформация соответствующая пределу текучести при сдвиге.

Эпюра напряжений в поперечном сечении есть диаграмма сдвига, взятая до величины  $\gamma_{\max}$ .

Если на диаграмме сдвига нанести поперечное сечение бруса так, чтобы половина диаметра его  $\frac{D}{2}$  в масштабе равнялась отрезку  $OC$  (фиг. 19), то тогда часть диаграммы сдвига  $OABC$  и будет являться эпюрой касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении.

**Несущая способность.** Если материал бруса не обладает упрочнением, то в предельном состоянии пластическая область заполняет все сечение. Крутящий момент, соответствующий этому состоянию, называется предельным моментом  $M_{пред}$ .

Для бруса круглого поперечного сечения

$$M_{пред} = \tau_T \frac{\pi D^3}{12}.$$

Для бруса прямоугольного сечения [20], [34]

$$M_{пред} = \tau_T \frac{b^2(3h-b)}{6},$$

где  $b \leq h$  — стороны.

Если  $b \ll h$  (поперечное сечение бруса, тонкая полоса),

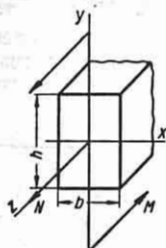
$$M_{пред} = \frac{1}{2} \tau_T h b^2.$$

Несущая способность брусьев при совместном растяжении, кручении и изгибе

Предельные соотношения между нагрузками, определяющие исчерпание несущей способности, приведены для

брусев, выполненных из материала, не обладающего упрочнением [28].

**Совместный изгиб и растяжение бруса прямоугольного сечения (фиг. 21)**



Фиг. 21.

$$\frac{N^2}{4\sigma_T b} + M = \frac{bh^2}{4} \sigma_T,$$

где  $b$  и  $h$  — стороны прямоугольника;  $N$  и  $M$  — нормальная сила и изгибающий момент (фиг. 21).

**Совместное растяжение и кручение круглого бруса**

$$M^2 + \frac{D^2 N^2}{36} + \frac{N^3}{27\pi\sigma_T} = \frac{\pi^2 D^3 \sigma_T^2}{432},$$

где  $D$  — диаметр бруса;  $N$  — нормальная сила;  $M$  — крутящий момент.

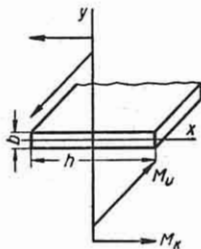
**Совместное растяжение и кручение бруса, поперечное сечение которого — тонкая полоса**

$$M + \frac{N}{\psi} = \frac{\sigma_T b h}{\psi} \sqrt{1 + \frac{\psi^2 b^2}{12}},$$

где  $b \ll h$  — стороны полосы;  $N$  — нормальная сила;  $M$  — крутящий момент.

Величина  $\psi$  определяется при заданном  $N$  из трансцендентного уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \psi b = \text{sh} \frac{\sqrt{3} \psi N}{6h\sigma_T}.$$



Фиг. 22.

**Совместный изгиб и кручение бруса, поперечное сечение которого — тонкая полоса (фиг. 22)**

$$16M_u^2 + 12M_k^2 = \sigma_T^2 b^4 h^2,$$

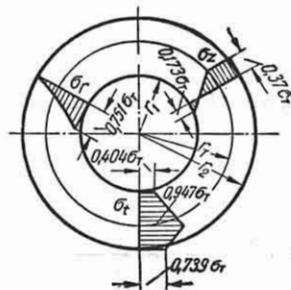
где  $b \ll h$  — стороны полосы,  $M_u$  — изгибающий момент,  $M_k$  — крутящий момент (фиг. 22).

**Толстостенная труба, нагруженная внутренним и внешним давлениями**

Приводятся формулы, полученные в предположении, что материал трубы несжимаем не только при пластических,

но и при упругих деформациях, а диаграмма растяжения материала имеет линейное упрочнение [8], [21].

Обозначения:  $r_1$  — внутренний радиус трубы;  $r_2$  — наружный радиус;  $r_T$  — радиус окружности, разделяющей упругую и пластическую области;  $r$  — текущий радиус;  $p_1$  — внутреннее давление;  $p_2$  — наружное давление;  $N$  — осевая сила;  $\sigma_t$  — окружное напряжение;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение;  $\sigma_z$  — осевое напря-



Фиг. 23.

жение;  $u$  — радиальное смещение;  $\epsilon_z$  — осевая деформация.

Образование пластических деформаций начинается с внутренней поверхности трубы.

Если торцы трубы не могут смещаться в осевом направлении или если осевая сила возникает только за счет внутреннего и внешнего давлений на днища, осевая деформация трубы равна нулю ( $\epsilon_z = 0$ ).

Приведенные ниже формулы получены в предположении, что  $\epsilon_z = 0$ . Решение задачи для случая  $\epsilon_z \neq 0$  см. [8], [21].

Соотношение между давлениями, при которых радиус границы упругой и пластической областей равен заданной величине  $r_T$  (фиг. 23), находится из выражения

$$|p_1 - p_2| = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \left( 1 - \lambda - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{r_T^2}{r_1^2} + \lambda + 2\lambda \ln \frac{r_T}{r_1} \right], \quad (16)$$

где  $\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}$  — коэффициент разупрочнения (см. стр. 18).

Соотношение между давлениями, при которых в трубе возникают пластические деформации,

$$|p_1 - p_2|_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right). \quad (17)$$

Формулы для определения напряжений имеют вид:  
в упругой области

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2}{r_1^2} - \frac{r_T^2}{r^2} - \lambda \left( \frac{r_T^2}{r_1^2} - 1 \right) + 2\lambda \ln \frac{r_T}{r_1} \right]; \\ \sigma_t &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2}{r_1^2} + \frac{r_T^2}{r^2} - \lambda \left( \frac{r_T^2}{r_1^2} - 1 \right) + 2\lambda \ln \frac{r_T}{r_1} \right]; \\ \sigma_z &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \frac{r_T^2}{r_1^2} - \lambda \left( \frac{r_T^2}{r_1^2} - 1 \right) + 2\lambda \ln \frac{r_T}{r_1} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

в пластической области

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ (1 - \lambda) \left( \frac{r_T^2}{r_1^2} - \frac{r_T^2}{r^2} \right) + 2\lambda \ln \frac{r}{r_1} \right]; \\ \sigma_t &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ 2\lambda + (1 - \lambda) \left( \frac{r_T^2}{r_1^2} + \frac{r_T^2}{r^2} \right) + 2\lambda \ln \frac{r}{r_1} \right]; \\ \sigma_z &= -p_1 + \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \lambda + (1 - \lambda) \frac{r_T^2}{r_1^2} + 2\lambda \ln \frac{r}{r_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В формулах (18) и (19) через  $\text{sign}(p_1 - p_2)$  обозначена функция, обладающая следующими свойствами:

$$\text{sign}(p_1 - p_2) = +1 \quad \text{при } p_1 - p_2 > 0;$$

$$\text{sign}(p_1 - p_2) = -1 \quad \text{при } p_1 - p_2 < 0;$$

$$\text{sign}(p_1 - p_2) = 0 \quad \text{при } p_1 - p_2 = 0.$$

Радиальное перемещение определяется по формуле

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{r_T^2}{r} \varepsilon_T.$$

Если материал трубы не обладает упрочнением, в приведенных выше формулах необходимо положить  $\lambda = 1$ .

В этом случае несущая способность трубы исчерпывается полностью при следующем соотношении между давлениями:

$$|p_1 - p_2|_{\text{пред}} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

На фиг. 23 представлены эпюры радиальных, окружных и осевых напряжений для трубы из материала, не обладающего упрочнением, с  $\frac{r_1}{r_2} = 0,5$ , нагруженной только внутренним давлением  $p_1 = p$ ,  $p_2 = 0$  при условии, что осевая деформация трубы равна нулю и радиус

границы упругой и пластической областей  $r_T = 0,8r_2$ .

Эпюры построены по формулам (18) и (19) при  $\lambda = 1$  с учетом, что  $\text{sign}(p_1 - p_2) = \text{sign } p = +1$ .

Решение задачи об упруго-пластическом состоянии трубы с учетом сжимаемости материала см. [32], [34].

Пластическое состояние круглой пластинки с отверстием, нагруженной внутренним и внешним давлениями, а также упруго-пластическое состояние бесконечного тела с цилиндрической полостью, нагруженного внутренним давлением, см. [20].

### Вращающийся диск

В расчетах дисков за пределами упругости относительно характера напряженного состояния принимаются те же допущения, что и в упругом расчете диска [22]. Ниже приведены формулы

для расчетов за пределами упругости диска постоянной толщины, напряжения в котором возникают только в результате вращения диска.

Материал диска не обладает упрочнением. Используется условие пластичности по гипотезе наибольших касательных напряжений (см. стр. 19).

Обозначения:  $r_1$  — внутренний радиус диска;  $r_2$  — наружный радиус;  $r$  — текущий радиус;  $\gamma$  — вес единицы объема материала;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $\sigma_t$  — окружное напряжение;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение.

### Сплошной диск

**Определение напряжений.** Угловая скорость вращения, при которой радиус

$$\omega = \sqrt{\frac{12g\sigma_T}{\gamma} \cdot \frac{2r_2^2 r_T - r_1(r_2^2 + r_T^2)}{3(3+\mu)r_2^4 r_T - (1+3\mu)(2r_2^2 - r_T^2)r_T^3 - 4r_1^3(r_2^2 + r_T^2)}}$$

границы упругой и пластической областей равен  $r_T$ ,

$$\omega = \sqrt{\frac{24}{\gamma} \frac{g\sigma_t}{3(3+\mu)r_2^4 - 2(1+3\mu)r_2^2 r_T^2 + (1+3\mu)r_T^4} \cdot r_2^2}$$

Напряжения в пластической области на расстоянии  $r$  от центра диска ( $0 \leq r \leq r_T$ )

$$\sigma_t = \sigma_T; \quad (20)$$

$$\sigma_r = \sigma_T - \frac{\gamma\omega^2}{3g} r^2; \quad (21)$$

напряжения в упругой области диска ( $r_T \leq r \leq r_2$ )

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2; \quad (22)$$

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2; \quad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} (r_2^2 + r_T^2) + \frac{\gamma\omega^2}{3g} \cdot \frac{r_T^4}{r_2^2 - r_T^2} - \sigma_T \frac{r_T^2}{r_2^2 - r_T^2};$$

$$C_2 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} r_2^2 r_T^2 + \frac{\gamma\omega^2}{3g} \cdot \frac{r_2^4 r_T^4}{r_2^2 - r_T^2} - \sigma_T \frac{r_2^2 r_T^2}{r_2^2 - r_T^2}.$$

**Несущая способность диска.** Предельная угловая скорость вращения, при которой пластическая область заполняет весь диск и несущая способность диска полностью исчерпывается,

$$\omega_{пред} = \sqrt{\frac{3g\sigma_T}{\gamma r_2^2}}.$$

### Диск с отверстием

**Определение напряжений.** Угловая скорость вращения, при которой радиус границы упругой и пластической областей равен  $r_T$ .

Окружное напряжение в пластической области ( $r_1 \leq r \leq r_T$ ) определяется по формуле (20), радиальное напряжение по следующей формуле:

$$\sigma_r = \sigma_T \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) - \frac{\gamma\omega^2}{3g} r^2 \left(1 - \frac{r_1^3}{r^3}\right).$$

Напряжения в упругой области диска ( $r_T \leq r \leq r_2$ ) определяются по формулам (22) и (23), где

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} (r_2^2 + r_T^2) + \frac{\gamma\omega^2}{3g} \cdot \frac{(r_T^3 - r_1^3) r_T}{r_2^2 - r_T^2} - \sigma_T \frac{(r_T - r_1) r_T}{r_2^2 - r_T^2};$$

$$C_2 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} r_2^2 r_T^2 + \frac{\gamma\omega^2}{3g} \times \frac{(r_T^3 - r_1^3) r_2^2 r_T}{r_2^2 - r_T^2} - \sigma_T \frac{(r_T - r_1) r_2^2 r_T}{r_2^2 - r_T^2}.$$

**Несущая способность диска.** Предельная угловая скорость вращения, при которой пластическая область за-

полняет весь диск и несущая способность диска исчерпывается полностью,

$$\omega_{пред} = \sqrt{\frac{3g\sigma_T}{\gamma(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)}}.$$

Решение задачи о пластическом и упруго-пластическом состояниях вращающегося диска постоянной толщины на основе условия пластичности по гипотезе интенсивности напряжений, а также о пластическом состоянии вращающегося диска при степенном условии пластичности с упрочнением см. [34].

Расчет вращающегося неравномерно нагретого диска переменной толщины с учетом пластичности материала см. [12], [41].

Решение задачи об упруго-пластическом состоянии вращающихся цилиндров см. [20].

Упругое и пластическое состояние вращающегося диска переменной толщины\*.

В этом расчете приняты следующие обозначения:  $\rho$  — плотность материала диска в  $\text{кг}\cdot\text{сек}^2/\text{см}^4$ ;  $E$  — модуль упругости материала в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала;  $\mu$  — коэффициент Пуассона, здесь принято  $\mu = 0,5$ ;  $\omega$  — угловая скорость вращения диска в  $\text{рад}/\text{сек}$ ;  $r$ ,  $R$  — независимые переменные, означающие радиальное расстояние, в  $\text{см}$ ;  $b$  — наружный радиус диска в  $\text{см}$ ;  $a$  — радиус центрального отверстия в  $\text{см}$ ;  $h$  — толщина диска на радиусе  $r$  в  $\text{см}$ ;  $T$  — температура диска на радиусе  $r$  в  $^\circ\text{C}$ ;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;  $\sigma_t$  — окружное напряжение в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;  $\sigma_{rb}$  — радиальное напряжение на радиусе  $b$ , вызванное силами инерции лопаток и замков, в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ;  $\sigma_{ra}$  — радиальное напряжение на радиусе  $a$ ;  $\sigma_{np}$  — приведенное напряжение в  $\text{кг}/\text{см}^2$  (см. гл. XIV).

Напряжения с учетом пластических деформаций определяются методом последовательных приближений. Напряжения  $n$ -го приближения определяются через напряжения  $n-1$ -го приближения по уравнениям

$$\sigma_{rn} = \frac{1}{h} \left\{ \int_a^R \frac{h}{r} K dr - \rho \omega^2 \int_a^R r h dr + \int_a^R \frac{h}{r} \left[ \frac{3E'}{4r^{3/2}} \int_a^r \frac{r^{1/2} \sigma_{rn-1}}{E'} dr - \frac{1}{2} \sigma_{rn-1} \right] dr + \int_a^R \frac{h}{r} \left[ \frac{3E'}{4r^{3/2}} \int_a^r \frac{r^{1/2} \sigma_{rn-1}}{E'} dr - \frac{1}{2} \sigma_{rn-1} \right] dr + h a \sigma_{ra} + A \int_a^R \frac{E' h}{r^{3/2}} dr \right\}; \quad (24)$$

\* Расчет изложен Р. С. Кинашвили.

$$\sigma_{tn} = \frac{1}{2} \sigma_{rn} + K +$$

$$+ \frac{3E'}{4r^{3/2}} \int_a^r \frac{r^{1/2} \sigma_{rn}}{E'} dr + A \frac{E'}{r^{3/2}}; \quad (25)$$

где

$$K = \frac{3E'}{2r^{3/2}} \int_a^r r^{1/2} \alpha T dr - E' \alpha T + a^{3/2} \alpha_a T a \frac{E'_a}{r^{3/2}}; \quad (26)$$

$$A = \frac{a^{3/2}}{E'_a} \left( \sigma_{ta} - \frac{1}{2} \sigma_{ra} \right);$$

$$E' = \frac{E}{1 + \psi}. \quad (27)$$

Модуль пластичности  $\psi$  определяется по диаграмме растяжения, полученной при соответствующей температуре:

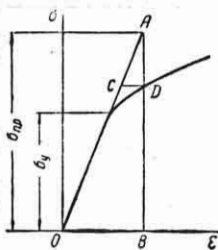
$$\psi = \frac{E \epsilon^p}{\sigma_{npn-1}} = \frac{E \epsilon^p}{\sqrt{\sigma_{rn-1}^2 + \sigma_{tn-1}^2 - \sigma_{rn-1} \sigma_{tn-1}}}, \quad (28)$$

где  $\epsilon^p$  — пластическая деформация, соответствующая напряжению  $\sigma_{npn-1}$ .

Если в расчетной точке радиуса напряжение ниже предела упругости, то для этой точки  $\psi = 0$ .

**Практические указания.** В качестве исходного приближения принимаются напряжения, вычисленные в предположении упругого состояния диска. Если для данной точки радиуса упругое приведенное напряжение  $\sigma_{np}$  выше предела упругости материала  $\sigma_y$  при данной температуре (фиг. 24), то отрезок  $CD$  будет нижней границей действительной пластической деформации

( $\varepsilon_{\text{млн}}^p$ ), а отрезок  $DB$  — нижней границей действительного эквивалентного напряжения ( $\sigma_{\text{пр млн}}$ ) в данной точке радиуса. Для установления



Фиг. 24.

верхней границы приведенного напряжения определяются модули пластичности для расчетных точек по уравнению

$$\psi = \frac{E \varepsilon_{\text{млн}}^p}{\sigma_{\text{пр млн}}}$$

и значения  $E'$  по уравнению (27). Затем определяют

ся напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  по уравнениям (24) и (25). В правые части этих уравнений подставляются значения упругих напряжений. Постоянные, входящие в эти уравнения, определяются из граничных условий, как показано в расчете упругого диска (стр. 262). По полученным значениям  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$  определяются приведенные напряжения  $\sigma_{\text{пр max}}$ , являющиеся верхними границами действительных напряжений для расчетных точек радиуса. Затем определяются средние напряжения:

$$\sigma_{\text{пр ср}} = \frac{\sigma_{\text{пр max}} + \sigma_{\text{пр млн}}}{2}$$

По диаграммам растяжения определяют новые значения  $\psi$ , соответствующие  $\sigma_{\text{пр ср}}$ , а затем и напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ , подставляя в уравнения (24) и (25) напряжения предыдущего приближения.

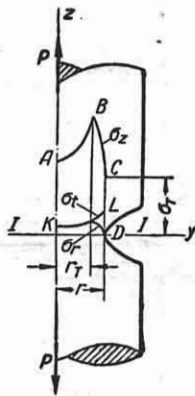
Новое приведенное напряжение может лежать между  $\sigma_{\text{ср}}$  и  $\sigma_{\text{max}}$ , или между  $\sigma_{\text{ср}}$  и  $\sigma_{\text{млн}}$  и, наконец, ниже  $\sigma_{\text{млн}}$ . В первом случае это напряжение будет новым верхним пределом, а  $\sigma_{\text{ср}}$  — новым нижним пределом. Во втором случае  $\sigma_{\text{ср}}$  станет новым верхним пределом, а полученное напряжение — новым нижним пределом. В третьем случае верхним пределом будет  $\sigma_{\text{ср}}$ , а нижним останется  $\sigma_{\text{млн}}$ . По пластической деформации, соответствующей новому среднему напряжению и напряжению, представляющему новую верхнюю границу, определяем следующее значение  $\psi$ , а затем напряжение. Процесс этот повторяется до тех пор, пока два последующих значения напряжений не совпадут.

### Концентрация напряжений в условиях пластичности

Подробно о концентрации напряжений при наличии пластических деформаций см. [13], [30], [36].

### Растяжение бруса с круговой выточкой

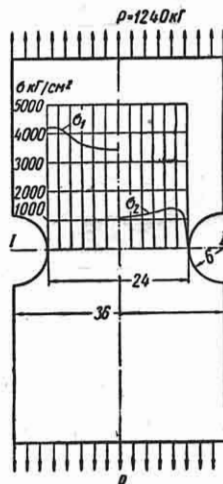
На фиг. 25 представлены эпюры осевых (линия  $ABCD$ ), радиальных (линия  $KD$ ) и окружных (линия  $KL$ ) напряжений в сечении  $I-I$  растянутого образца с круговой выточкой [36]: В сечении  $I-I$  упругая область представляет собой круг радиуса  $r_T$  и пластическая область — кольцо радиусов  $r_T$  и  $r$ . Развитие пластических деформаций при всестороннем неравномерном растяжении, создаваемом в цилиндрическом образце с выточкой, вызывает значительное повышение осевых напряжений.



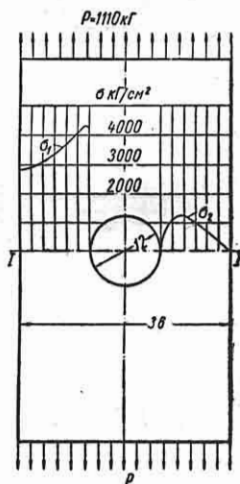
Фиг. 25.

### Растяжение пластинок с боковыми вырезами и отверстием

На фиг. 26 и 27 изображены эпюры продольных  $\sigma_1$  и поперечных  $\sigma_2$  напря-



Фиг. 26.



Фиг. 27.

жений, возникающих в сечениях I—I пластинок с боковыми вырезами и с отверстием при растяжении их за пределами упругости [13]. В этих случаях концентрация напряжений за пределами упругости выражена менее резко, чем в пределах упругих деформаций.

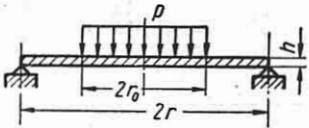
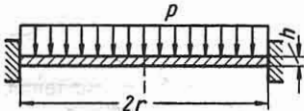
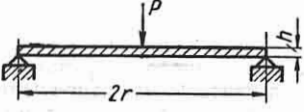
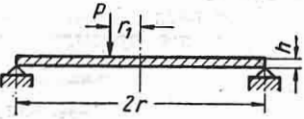
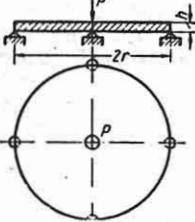
Степень концентрации напряжений с ростом пластических деформаций увеличивается в случае пластинок с отверстием и остается примерно постоянной в случае пластинок с боковыми вырезами [13].

### Несущая способность пластинок и оболочек

В табл. 3 приведены формулы для предельных нагрузок, при которых исчерпывается несущая способность пластинок и цилиндрических оболочек постоянной толщины, материал которых не обладает упрочнением [4], [5], [8], [28], [34].

Таблица 3

Формулы для определения предельных нагрузок на пластинки и оболочки

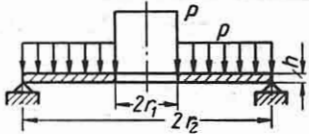
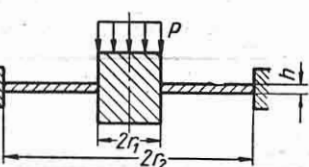
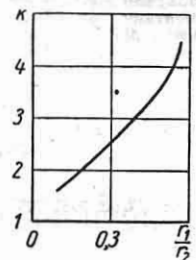
Круглые сплошные пластинки постоянной толщины $h$ , радиуса $r$	
Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
1. Пластика свободно опята по контуру. Нагрузка интенсивностью $p$ кг/см <sup>2</sup> равномерно распределена по площади круга радиуса $r_0$ [8]	$P_{пред} = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma_T h^2 r}{(3r - 2r_0) r_0^2}$ Если нагрузка равномерно распределена по всей пластинке ( $r_0 = r$ ), $P_{пред} = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma_T h^2}{r^2}$ 
2. Пластика защемлена по контуру. Нагрузка интенсивностью $p$ кг/см <sup>2</sup> равномерно распределена по всей пластинке [8]	$P_{пред} = 2,8 \frac{\sigma_T h^2}{r^2}$ 
3. Пластика свободно опята по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P$ , приложенной в центре [34]	$P_{пред} = \frac{\pi}{2} \sigma_T h^2$ 
4. Пластика свободно опята по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P$ на расстоянии $r_1$ от центра [28]	Если $r_1 < 0,707r$ , то $P_{пред} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sigma_T h^2 r}{\sqrt{r^2 - r_1^2}}$ 
5. Пластика опята в четырех точках и нагружена сосредоточенной силой $P$ , приложенной в центре [28]	$P_{пред} = \sqrt{2} \sigma_T h^2$ 

Продолжение табл. 3.



Продолжение табл. 3

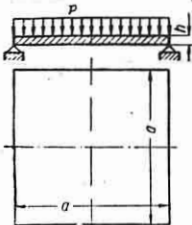
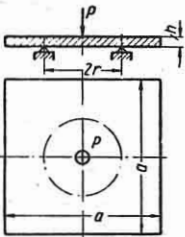
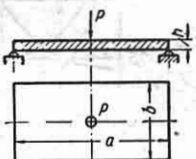
Продолжение табл. 3

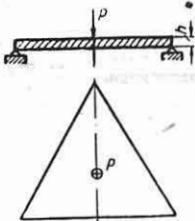
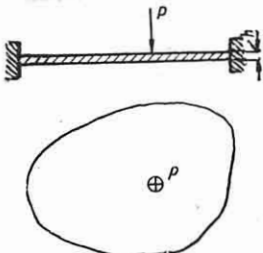
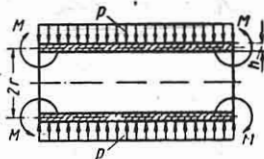
Кольцевые пластинки постоянной толщины $h$ , внутреннего радиуса $r_1$ , наружного радиуса $r_2$	
Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
<p>6. Пластика свободно опирается по наружному контуру и нагружена равномерно распределенной силой <math>P</math> кг/см<sup>2</sup> и силой <math>P</math> кг, равномерно распределенной по внутреннему контуру [5]</p> 	<p>Предельное соотношение между интенсивностью распределенной нагрузки <math>p</math> и силой <math>P</math></p> $\frac{1}{6} p r_2^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \times \left(1 + 2 \frac{r_1}{r_2}\right) + \frac{P}{2\pi} = \sigma_T \frac{h^2}{4}$
<p>7. Пластика зашлепена по наружному и внутреннему контурам и нагружена силой <math>P</math> кг, равномерно распределенной по внутреннему контуру [8]</p> 	<p><math>P_{пред} = \frac{\pi}{2} k \sigma_T h^2</math></p> <p>График зависимости коэффициента <math>k</math> от отношения <math>\frac{r_1}{r_2}</math> представлен на чертеже</p> 

Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
<p>8. Пластика зашлепена по внутреннему контуру и нагружена силой <math>P</math>, равномерно распределенной по наружному контуру [8]</p> 	<p><math>P_{пред} = \frac{\pi}{2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)} \sigma_T h^2</math></p>
<p>9. Пластика зашлепена по наружному контуру и нагружена равномерно распределенной силой <math>p</math> кг/см<sup>2</sup> и силой <math>P</math>, равномерно распределенной по внутреннему контуру [5]</p> 	<p>Предельное соотношение между интенсивностью распределенной нагрузки <math>p</math> и силой <math>P</math> дается диаграммой предельных нагрузок, состоящей из двух прямых <math>AB</math> и <math>BC</math>. Координаты трех точек <math>A</math>, <math>B</math> и <math>C</math> этой диаграммы в зависимости от отношения <math>\frac{r_1}{r_2}</math> приведены на чертеже</p> 

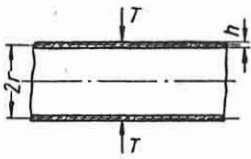
Продолжение табл. 3

Продолжение табл. 3

Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
<i>Пластинки различных очертаний, постоянной толщины <math>h</math></i>	
10. Квадратная пластинка со стороной $a$ , свободно опертая по контуру. Нагрузка интенсивностью $p$ кг/см <sup>2</sup> равномерно распределена по всей пластинке [8]	$P_{пред} = 6,60 \frac{\sigma_T h^2}{a^2}$
	
11. Квадратная пластинка со стороной $a$ свободно опертая по окружности радиуса $r$ , центр которой совпадает с центром пластинки, и нагружена сосредоточенной силой $P$ кг, приложенной в центре [28]	$P_{пред} = 0,881 \sigma_T h^2 \frac{a}{r}$
	
12. Прямоугольная пластинка со сторонами $a$ и $b$ свободно опертая по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P$ кг, приложенной в центре [28]	$P_{пред} = \sigma_T h^2 \times \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$
	

Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
13. Пластинка в форме равностороннего треугольника свободно опертая по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P$ , приложенной в центре тяжести треугольника [28]	$P_{пред} = 2,60 \sigma_T h^2$
	
14. Пластинка произвольной формы защемлена по контуру и нагружена сосредоточенной силой $P$ [28]	$P_{пред} = \pi \sigma_T h^2$
	
Цилиндрические оболочки, постоянной толщины $h$ , радиуса $r$	
15. Оболочка нагружена равномерно распределенной по поверхности оболочки нагрузкой $p$ кг/см <sup>2</sup> и равномерно распределенными по торцам оболочки моментами интенсивностью $M$ кг/см/см [8]	Предельное соотношение между интенсивностью распределенной нагрузки $p$ и интенсивностью моментов $M$ $p^2 + 12 \frac{M^2}{r^2 h^2} = \frac{\sigma^2_T h^4}{r^4}$
	

Продолжение табл. 3

Нагрузка пластинки или оболочки	Расчетные формулы
16. Оболочка бесконечной длины нагружена равномерно распределенной по окружности силой интенсивностью $T$ кг/см [8]	$T_{пред} = 1,91 \sigma_T h \times \sqrt{\frac{h}{r}}$
	

### Определение остаточных напряжений и деформаций

В результате нагружения детали, при котором появляются пластические деформации, и последующей разгрузки в ней возникают остаточные напряжения и деформации. Если напряженное состояние является однородным, возникают только остаточные деформации.

Остаточные напряжения и деформации определяются как разность напряжений и деформаций, возникающих при нагружении, и напряжений и деформаций разгрузки.

Последние на основании экспериментально установленного закона разгрузки находятся по формулам, вытекающим из закона Гука.

Например, если при чистом изгибе бруса моментом  $M > M_T$  эпюра напряжений имеет вид, представленный на фиг. 1, в, то эпюра остаточных напряжений (см. фиг. 1, д) получается вычитанием из эпюры напряжений, возникших при нагружении (см. фиг. 1, в), линейной эпюры разгрузки (см. фиг. 1, з), построенной по формуле

$$\sigma_{разг} = \frac{My}{J_x}$$

Остаточный радиус кривизны бруса  $\rho_{ост}$  определяется из выражения

$$\frac{1}{\rho_{ост}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M}{EJ_x}$$

где  $\rho$  — радиус кривизны бруса при нагружении.

### Уруго-пластические деформации деталей в связи с повышением их несущей способности

Если после изготовления деталь подвергается нагружению, при котором возникают пластические деформации, то в таком случае несущая способность детали в пределах упругости повышается. Это значит, что предварительно пластически деформированная (наклепанная) деталь может нагружаться в пределах упругости в большей степени, чем деталь, не прошедшая такой операции.

Например, если скручиваемый момент  $M$  брус предварительно нагрузить моментом  $M_1 > M_T$ , то момент  $M_1$  будет для него предельным, и запас прочности

$$n = \frac{M_1}{M}$$

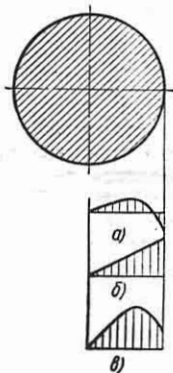
Для наклепанного бруса предельным моментом является момент  $M_T < M_1$ . Для бруса, предварительно нагруженного моментом  $M_1 > M_T$  и разгруженного при вторичном нагружении моментом  $M_2$ , эпюра напряжений (фиг. 28, в) складывается из эпюры остаточных напряжений, возникающих при предварительном нагружении (фиг. 28, а), и эпюры номинальных напряжений (фиг. 28, б), подсчитываемых по формуле

$$\tau = \frac{M_2 r}{J_p}$$

Из фиг. 28 следует, что за счет остаточных напряжений наиболее нагруженные точки поперечного сечения разгружаются.

Если  $M_2 = M_1$ , эпюра напряжений при вторичном нагружении такая же, как и при нагружении моментом  $M_1$ .

Если  $M_2 > M_1$ , эпюру напряжений в поперечном сечении можно получить, не учитывая остаточных напряжений, возникающих при первом нагружении, решая задачу заново, руководствуясь моментом  $M_2$ .



Фиг. 28.

В технологических процессах производства некоторых элементов конструкций предусмотрены специальные операции, создающие пластические деформации и остаточные напряжения, которые повышают несущую способность детали (заневоливание пружин, автоскрепление толстостенных труб, раскручивание дисков).

Заневоливание пружин см. т. 4, гл. XVIII.

Автоскрепление труб производится обычно путем нагружения трубы внутренним давлением либо в полупругом состоянии, когда в трубе имеются и упругая и пластическая области, либо в состоянии полной перегрузки, когда упругая область исчезает и интенсивность напряжений во всех точках трубы выше предела текучести  $\sigma_T$ .

Существуют два способа автоскрепления — с продольным растяжением и без продольного растяжения [6].

При расчете автоскрепления труб в полупругом состоянии задаются радиусом границы упругой и пластической областей  $r_T$  и так, как изложено ранее (см. стр. 279), определяют давление автоскрепления  $p_0$ . Величина  $r_T$  выбирается на основе наблюдения за эксплуатацией автоскрепленных труб.

Запас прочности трубы

$$n = \frac{p_0}{p},$$

где  $p$  — рабочее давление.

Изменение размеров трубы при автоскреплении определяется так, как было изложено выше (см. стр. 280).

О расчете автоскрепления труб в состоянии полной перегрузки см. [6].

**Пример.** Определить остаточные напряжения, возникающие при автоскреплении, и истинные напряжения при работе для трубы с внутренним диаметром  $2r_1 = 67$  мм, наружным диаметром  $2r_2 = 187$  мм. Рабочее давление  $p_{раб} = 4030$  кг/см<sup>2</sup>. Автоскрепление производится с продольным растяжением в полупругом состоянии  $\frac{r_T}{r_2} = 0,7$ . Диаграмма растяжений материала трубы может быть схематизирована в виде диаграммы с линейным упрочнением, без площадки текучести (см. стр. 18).

Основные параметры диаграммы растяжения:  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $E_T = 68\,500$  кг/см<sup>2</sup>;  $\sigma_T = 4760$  кг/см<sup>2</sup>.

В рассматриваемом случае коэффициент разупрочнения

$$\lambda = 1 - \frac{E_T}{E} = 0,966.$$

Используя заданную величину отношения  $\frac{r_T}{r_2} = 0,7$  и учитывая, что  $p_2 = 0$ , по формуле (16) находим давление автоскрепления:

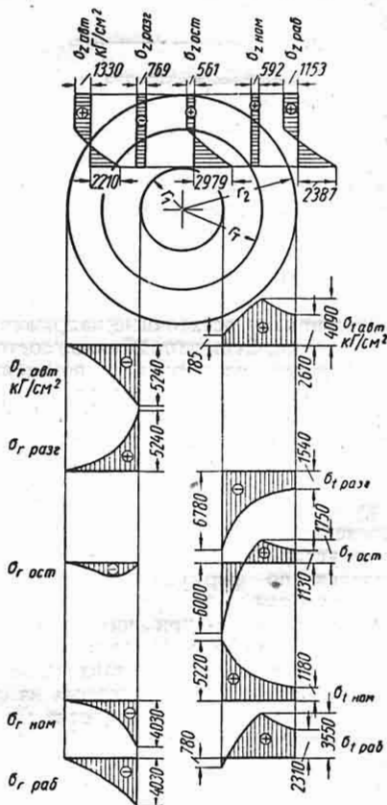
$$p = 1,16 p_T = 5240 \text{ кг/см}^2.$$

Отметим, что по формуле (17) можно определить величину давления, при котором в трубе возникает пластические деформации:

$$p_T = 0,503 \sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, путем автоскрепления удалось повысить предельное давление с  $p_T = 2400$  кг/см<sup>2</sup> до  $p = 5240$  кг/см<sup>2</sup>.

На фиг. 29 изображены эпюры радиальных, окружных и осевых напряжений, возникающих



Фиг. 29.

при автоскреплении, снимающихся при разгрузке, остаточных, а также номинальных и истинных.

Эпюры напряжений, возникающих при автоскреплении, построены по формулам (18) и (19) ( $p = 5240$  кг/см<sup>2</sup>). Эпюры напряжений, снимающихся при разгрузке, построены по формулам, выведенным в предположении справедливости закона Гука (см. стр. 219,  $p = 5240$  кг/см<sup>2</sup>). Эпюры остаточных напряжений получены вычитанием из напряжений, возникающих при автоскреплении, напряжений, снимающихся при разгрузке. Эпюры номинальных напряжений построены по фор-

мудам, вытекающим из закона Гука ( $p_{\text{раб}} = 4030 \text{ кг/см}^2$ ). Эпюры истинных напряжений получены сложением номинальных и остаточных напряжений.

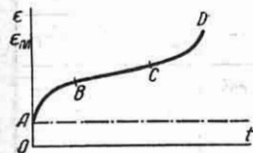
## РАСЧЕТЫ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

### Ползучесть при одноосном растяжении

#### Кривая ползучести

Кривой ползучести называется график зависимости от времени полных или пластических (возникших в результате ползучести) деформаций при постоянных напряжении и температуре. Характер кривой ползучести для определенного материала зависит от напряжения и температуры. Для сравнительно небольших температур и напряжений (например, для стали при температуре порядка  $400\text{--}500^\circ\text{C}$  и напряжении порядка  $500\text{--}1000 \text{ кг/см}^2$ ) график изображен на фиг. 30. При нагружении нагретого образца деформация весьма быстро возрастает от нуля до некоторой величины, изображенной на графике в масштабе отрезком  $OA$ .

В дальнейшем, после прекращения роста нагрузки, полная деформация нагретого образца будет постепенно увеличиваться во времени по закону, изображенному линией  $ABCD$ . Ординаты этой линии представляют собой величины деформаций  $\epsilon$  за определенный промежуток времени, считая от начала нагружения. Они складываются из деформации, возникшей при нагружении, и деформации, образовавшейся в результате ползучести (пластической деформации). Иногда на графике изображается зависимость от времени только пластической деформации, возникшей за счет



Фиг. 30.

ползучести  $\epsilon_{\text{пл}}$ , тогда ось абсцисс графика расположена так, как показано на фиг. 30 пунктиром. Тангенс угла наклона касательной к линии  $ABCD$  в некоторой точке с осью абсцисс в масштабе выражает скорость деформации для определенного значения времени:

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_{\text{пл}}}{dt}$$

Размерность скорости деформации  $1/\text{сутки}$ ,  $1/\text{час}$ ,  $1/\text{мин}$  или  $1/\text{сек}$  в зависимости от того, в каких единицах измеряется время.

Процесс ползучести можно разделить на три стадии (фиг. 30). В первой стадии ползучести ( $AB$ ) скорость деформации постепенно уменьшается. Во второй стадии ( $BC$ ) процесс ползучести протекает с постоянной во времени скоростью, которая зависит от напряжения и температуры.

При определенной температуре

$$\dot{\epsilon} = Q(\sigma),$$

где  $Q(\sigma)$  — некоторая функция напряжения.

Наиболее экспериментально проверенными являются:

а) степенная зависимость скорости пластической деформации от напряжения

$$\dot{\epsilon} = Q(\sigma) = k\sigma^n;$$

б) закон гиперболического синуса

$$\dot{\epsilon} = Q(\sigma) = a \operatorname{sh} \frac{\sigma}{b}.$$

В последних выражениях  $k$  и  $n$ ,  $a$  и  $b$  — постоянные для данного материала при определенной температуре.

Величины  $k$ ,  $n$  для некоторых материалов при повышенных температурах приведены в табл. 4.

В третьей стадии ( $CD$ ) скорость деформации непрерывно нарастает, пока не наступает разрушение образца (точка  $D$ ).

#### Гипотезы ползучести

Современные гипотезы ползучести можно разбить на три группы: 1) гипотеза упрочнения; 2) гипотеза старения; 3) гипотеза течения.

Согласно гипотезе упрочнения предполагается существование постоянной зависимости между пластической деформацией  $\epsilon_{\text{пл}}$ , скоростью пластической деформации  $\dot{\epsilon}_{\text{пл}}$  и напряжением  $\sigma$ :

$$\Phi(\epsilon_{\text{пл}}, \dot{\epsilon}_{\text{пл}}, \sigma) = 0.$$

Использование гипотезы упрочнения в расчетах элементов конструкций на ползучесть см. [38].

Таблица 4

## Основные характеристики ползучести некоторых материалов

Материал	Химический состав в %	Термическая обработка	Температура испытания в °С	$\frac{k}{\left(\frac{с.М^2}{кг}\right)^n}$ час	$n$
Углеродистая сталь	0,15 С; 0,50 Мн; 0,23 Si; 0,032 S; 0,025 P	Отжиг 844° С	427	$3,63 \cdot 10^{-27}$	6,24
То же	То же	То же	538	$1,30 \cdot 10^{-14}$	3,04
"	"	"	593	$2,04 \cdot 10^{-13}$	3,18
"	"	"	649	$8,45 \cdot 10^{-12}$	3,03
"	0,43 С; 0,68 Мн; 0,20 Si; 0,033 S; 0,035 P	"	427	$1,77 \cdot 10^{-25}$	6,01
"	То же	"	538	$3,63 \cdot 10^{-17}$	4,07
"	"	"	649	$1,39 \cdot 10^{-9}$	1,66
Молибденовая сталь	0,13 С; 0,49 Мн; 0,25 Si; 0,010 S; 0,011 P; 0,52 Мо	"	482	$3,27 \cdot 10^{-23}$	5,28
То же	То же	"	538	$2,82 \cdot 10^{-20}$	4,71
"	"	"	593	$8,44 \cdot 10^{-16}$	3,77
"	"	"	649	$1,44 \cdot 10^{-13}$	3,19
Хромомолибденовая сталь 60X15M2A	0,60 С; 0,28 Мн; 0,46 Si; 0,013 S; 0,030 P; 2,00 Мо; 16,9 Cr; 0,22 Ni	Закалка на воздухе с температуры 1050°С, отпуск при температу- ре 800—820° С	500	$1,24 \cdot 10^{-13}$	1,82
То же	То же	То же	550	$1,75 \cdot 10^{-13}$	2,12
"	"	"	575	$9,33 \cdot 10^{-13}$	2,02
"	"	"	600	$7,76 \cdot 10^{-14}$	2,59
Хромомолибдено- ванадиевая сталь ЭИ10	0,28 С; 0,58 Мн; 0,24 Si; 1,55 Cr; 0,38 Мо; 0,16 Va; 0,12 Ni	Закалка 900°С (масло). отпуск 650°С	450	$9,86 \cdot 10^{-18}$	2,99
То же	То же	То же	500	$5,00 \cdot 10^{-13}$	1,83
"	"	"	550	$8,12 \cdot 10^{-18}$	2,06

Продолжение табл. 4

Материал	Химический состав в %	Термическая обработка	Темпера- тура испы- тания °С	$\frac{k}{\left(\frac{CM^2}{KT}\right)^n}$ час	n
Хромоникелевая сталь	0,06 C; 0,50 Mn; 0,61 Si; 0,008 P; 17,75Cr; 9,25 Ni;	Закалка 1093° С	538	$1,87 \cdot 10^{-20}$	4,42
То же	То же	То же	593	$4,49 \cdot 10^{-19}$	4,15
"	"	"	649	$3,84 \cdot 10^{-17}$	3,79
"	"	"	816	$1,69 \cdot 10^{-16}$	4,30
Хромоникелемолибде- новая сталь	0,31 C; 0,54 Mn; 0,45 Mo; 0,83 Cr; 2,05 Ni	—	450	$3,94 \cdot 10^{-16}$	2,45
Хромоникелевольфра- мовая сталь ХНВМ12	0,48 C; 0,47 Mn; 0,68 Si; 0,012 P; 13,6 Cr; 14,5 Ni; 2,24 W; 0,54 Mo	Закалка 1100° С, охла- ждающая среда—воздух	500	$1,49 \cdot 10^{-32}$	7,76
То же	То же	То же	600	$1,67 \cdot 10^{-38}$	10,32
"	"	"	700	$1,52 \cdot 10^{-20}$	5,21
Хромоникелевольфра- мовая сталь ХНВМ16	0,13 C; 0,60 Mn; 0,67 Si; 0,023 P; 14,5 Cr; 14,0 Ni; 2,40 W; 0,45 Mo	Закалка 1090° С, охла- ждающая среда—воздух	500	$1,49 \cdot 10^{-32}$	7,76
То же	То же	То же	600	$5,68 \cdot 10^{-41}$	11,3
"	"	"	700	$1,67 \cdot 10^{-21}$	5,63
Хромоникелевольфра- мовая сталь ЭИ69	0,52 C; 0,82 Si; 13,51 Cr; 15,20 Ni; 2,01 W; 0,57 Mo	Отжиг при 820° С	800	$9,52 \cdot 10^{-15}$	4,00
Хромоникелевольфра- мовая сталь ЭИ122	0,52 C; 0,77 Mn; 2,05 Si; 16,4 Cr; 13,9 Ni; 2,55 W; 0,012 S; 0,04 P; 0,88 Ti	—	550	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63
То же	То же	—	650	$5,86 \cdot 10^{-17}$	3,63
Хромоникелевольфра- мовая сталь ЭИ123	0,15 C; 0,82 Mn; 1,66 Si; 15,4 Cr; 13,2 Ni; 2,28 W; 0,76 Ti; 0,028 S; 0,018 P	—	550	$1,24 \cdot 10^{-28}$	6,81
То же	То же	—	600	$8,58 \cdot 10^{-11}$	1,22
Хромоникелевольфра- мовая сталь ЭИ126	0,50 C; 0,84 Mn; 0,71 Si; 13,8 Cr; 40,9 Ni; 2,29 W; 0,005 S; 0,009 P	—	600	$7,59 \cdot 10^{-16}$	2,93
То же	То же	—	650	$4,12 \cdot 10^{-13}$	2,23

Согласно гипотезе старения предполагается существование постоянной зависимости между пластической деформацией, напряжением и временем:

$$\Phi_1(\epsilon_{п.л.}, \sigma, t) = 0. \quad (29)$$

Наиболее простая зависимость между пластической деформацией, напряжением и временем по гипотезе старения имеет вид

$$\epsilon_{п.л.} = \sigma^n \Omega(t), \quad (30)$$

где  $n > 1$  — постоянная для данного материала при определенной температуре;  $\Omega(t)$  — функция времени, определяемая при помощи кривых ползучести и соотношения (30).

Решение задач расчета на ползучесть при таком выборе гипотезы ползучести эквивалентно решению соответствующих пластических задач со степенным упрочнением.

По измененной гипотезе ползучести Н. М. Беляева [2], [18], [22] зависимость пластической деформации от напряжения и времени имеет вид

$$\epsilon_{п.л.} = \sigma \int_0^t \sigma^{n-1} B(t) dt,$$

где

$$B(t) = \frac{d\Omega(t)}{dt}.$$

Использование измененной гипотезы ползучести Н. Б. Беляева в расчетах элементов конструкций на ползучесть см. [18], [22].

Ю. Н. Работновым предложена измененная гипотеза старения [23], согласно которой зависимость между напряжением, деформацией и временем записывается в следующем виде:

$$\sigma = f(\epsilon, t),$$

где  $\epsilon$  — полная деформация.

Для расчетных целей кривые ползучести перестраиваются в координаты  $\epsilon$ ,  $\sigma$  для определенных значений времени. В случае расчета детали на ползучесть для определения напряжений и деформаций при заданном значении времени необходимо произвести расчет на прочность и жесткость детали при помощи известного графика зависимости напряжения от деформации. Расчеты на ползучесть по гипотезе старения Ю. Н. Работнова эквивалентны расчетам на прочность и жесткость при нелинейных за-

висимостях между напряжениями и деформациями.

Согласно гипотезе течения предполагается существование постоянной зависимости между скоростью пластической деформации, напряжением и временем:

$$\Phi_2(\dot{\epsilon}_{п.л.}, \sigma, t). \quad (31)$$

Наиболее простая зависимость между скоростью пластической деформации, напряжением и временем по гипотезе течения (31) имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{п.л.} = \sigma^n B(t). \quad (32)$$

Использование гипотезы течения на основе вариационных принципов для расчетов на ползучесть см. [11].

Ю. Н. Работновым создана новая теория ползучести, являющаяся развитием теории, описывающей деформацию в данный момент в зависимости от всех предыдущих условий деформирования [23], [24].

Экспериментальная проверка различных гипотез ползучести описана в работах [7], [17], [22].

### Релаксация напряжений

Релаксацией напряжений называется процесс изменения напряжений во времени, возникший в результате нарастания пластической деформации.

Если полная деформация растянутого стержня во времени не изменяется и начальное напряжение не превосходит предела пропорциональности материала, то

$$\frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_{п.л.} = \text{const},$$

где  $\sigma(0)$  — напряжение в начальный момент времени.

За счет увеличения пластической деформации напряжения будут непрерывно уменьшаться во времени.

График зависимости напряжения от времени называется кривой релаксации (фиг. 31). Зависимость напряжения от времени при постоянной деформации по измененной гипотезе Н. М. Беляева имеет вид [22]

$$\eta = (1 + n\kappa)^{-\frac{1}{n}}, \quad (33)$$

а по гипотезе течения [11]

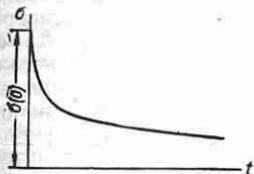
$$\eta = [1 + (n-1)\kappa]^{-\frac{1}{n-1}}, \quad (34)$$



где

$$\tau_1 = \frac{\sigma}{\sigma(0)}; \quad \chi = E\sigma^{n-1}(0) \Omega(t). \quad (35)$$

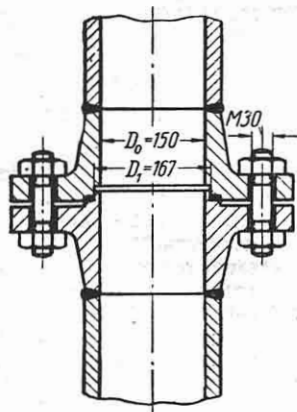
Располагая графиком функции  $\Omega(t)$  при помощи выражений (33) и (35) или (34) и (35), можно построить кривую релаксации в координатах  $\sigma - t$  (фиг. 31).



Фиг. 31.

Построение кривой релаксации по серии кривых ползучести при различных напряжениях на основе гипотез упрочнения, старения и течения см. [17], [22].

Пример. Определить, с какими напряжениями должны быть затянуты шпильки фланцевого соединения паропровода (фиг. 32) в начале эксплуатации, для того чтобы плотность соединения была



Фиг. 32.

обеспечена в течение 1 года. Паропровод пропускает пар под давлением  $p = 100$  атм при температуре  $\theta = 500^\circ \text{C}$ . Внутренний диаметр паропровода  $D_0 = 150$  мм, внутренний диаметр прокладки  $D_1 = 167$  мм, число шпилек  $z = 12$  (резьба М30), материал шпильки — хромомолибденованадиевая сталь ЭИ10.

Так как фланцы являются достаточно жесткими, пренебрежем деформацией их; не будем также учитывать ползучесть прокладки по сравнению с ползучестью шпилек. Эти предположения дают возможность считать деформацию шпилек в процессе эксплуатации паропровода постоянной.

Примем далее, что температура шпилек такая же, как и пара, т. е.  $500^\circ \text{C}$ . Это предположение повышает надежность расчета.

Показатель степени  $n$  в уравнении (33) для стали ЭИ10 при температуре  $500^\circ \text{C}$   $n = 1,83$  (см. табл. 4), а график функции  $\Omega(t)$  представлен на фиг. 33 [22]. Модуль продольной упругости для этой стали при температуре  $500^\circ \text{C}$   $E = 1,90 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Для обеспечения плотности соединения прокладка при эксплуатации должна быть сжата не какой силой  $P_n$ . Обозначим силу, разъединяющую фланцы, через  $P$ , а силу затяжки шпилек  $P_{ш}$ .

Очевидно, что

$$P = p \frac{\pi D_1^2}{4}; \quad (36)$$

$$P_{ш} = \sigma F_1 z, \quad (37)$$

где  $\sigma$  — напряжение в шпильке;  $F_1$  — площадь поперечного сечения шпильки по внутреннему диаметру,  $z$  — число шпилек.

Из условия равновесия имеем

$$P_{ш} = P + P_n. \quad (38)$$

Напряжение в поперечном сечении шпильки в течение времени уменьшается, и плотность соединения снижается, поэтому через некоторое время после начала эксплуатации паропровода может возникнуть пропаривание фланцевого соединения.

Будем предполагать, что пропаривание начнется в тот момент, когда сила, сжимающая прокладку, станет равной нулю, и, следовательно, на основании уравнения (38), когда сила затяжки шпилек станет равной силе, разъединяющей фланцы. В действительности пропаривание может начаться несколько раньше. Поэтому полученное в решении задачи напряжение, с которым должны быть затянуты шпильки в начале эксплуатации, следует несколько увеличить.

Приравняв правые части выражений (36) и (37), получаем величину напряжения в шпильке, при котором начинается пропаривание фланцев:

$$\sigma = \frac{p \pi D_1^2}{4 F_1 z}.$$

Подставляя в эту формулу численные значения входящих в нее величин, учитывая, что площадь поперечного сечения шпильки по внутреннему диаметру  $F_1 = 4,96$  см<sup>2</sup>, имеем  $\sigma = 368$  кг/см<sup>2</sup>.

Найдем теперь такую величину начального напряжения  $\sigma(0)$ , при котором за 1 год (8760 час.) напряжение снизилось бы до величины  $\sigma = 368$  кг/см<sup>2</sup>. Для этого воспользуемся зависимостью напряжения от времени по измененной гипотезе старения Н. М. Беляева [33].

Из уравнения (33), учитывая соотношение (35), легко получить

$$\nu^n - a \nu^{n-1} - 1 = 0$$

или

$$\nu^{n-1} = \frac{1}{\nu - a}. \quad (39)$$

где

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma(0)}{\sigma}; \quad a = n E \sigma^{n-1} \Omega(t). \quad (40)$$

Для решения уравнения (39) необходимо знать численное значение  $\nu$  и, следовательно, значение функции  $\Omega(t)$  при  $t = 8760$  час.

График функции  $\Omega(t)$  (фиг. 33) построен путем обработки кривых простого последования до  $t = 800$  час. Из графика функции  $\Omega(t)$  следует, что при  $t > 200$  час. зависимость  $\Omega(t)$  от  $t$  является линейной. Учитывая, что при  $t = 200$  час.  $\Omega(t) =$

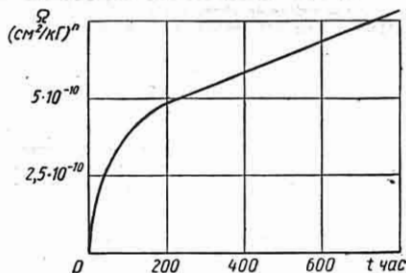
$= 0,485 \cdot 10^{-9} (\text{см}^2/\text{кг}) \nu^2$ , а при  $t = 700$  час.  $\Omega(t) = 0,735 \cdot 10^{-9} (\text{см}^2/\text{кг}) \nu^2$ , имеем следующее уравнение функции при  $t \geq 200$  час.:

$$\Omega(t) = 0,485 \cdot 10^{-9} + \frac{0,735 \cdot 10^{-9} - 0,485 \cdot 10^{-9}}{500} (t - 200)$$

или

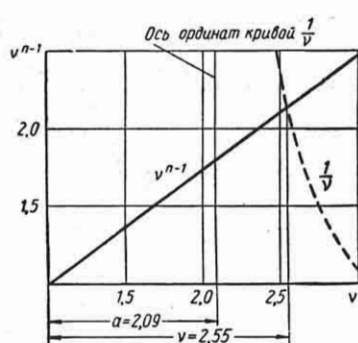
$$\Omega(t) = 0,485 \cdot 10^{-9} + 0,500 \cdot 10^{-12} (t - 200).$$

Полагая в данном уравнении  $t = 8760$  час (1 год), получаем  $\Omega(t) = 4,77 \cdot 10^{-9} (\text{см}^2/\text{кг}) \nu^2$ .

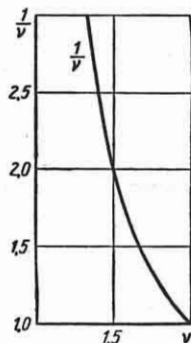


Фиг. 33.

Располагая этим значением, по второй формуле (40) определяем  $a = 2,09$ . Уравнение (39) решаем графически: строим на миллиметровойке график функции  $\nu^{n-1}$  (фиг. 34), а на кальке в том же масштабе наносим график функции  $\frac{1}{\nu}$  (равнобокая гиперболa) (фиг. 35). Накладываем кальку на миллиметровку, как это показано на фиг. 34 пунктиром. Ось ординат на кальке должна совпадать с вертикальной линией, уравнение которой в координатах фиг. 34  $\nu = a$ . Корень урав-



Фиг. 34.



Фиг. 35.

нения (39) равен в выбранном масштабе абсциссе точки пересечения наложенных кривых. В рассматриваемом случае  $\nu = 2,55$ , и, следовательно, согласно первой формуле (40)  $\alpha(0) = 937 \text{ кг/см}^2$ .

Таким образом, для обеспечения плотности соединения в течение 1 года шпильки в начале эксплуатации паропровода должны быть затянуты с напряжением  $\alpha(0) = 937 \text{ кг/см}^2$ .

## Ползучесть при неоднoсном напряженном состоянии

В случаях неоднoсного напряженного состояния обычно постулируется применимость к задачам ползучести теории малых упруго-пластических деформаций. Учитывая, что при высоких температурах коэффициент Пуассона близок к 0,5, можем считать материал несжимаемым. Зависимости компонентов напряжения от компонентов деформации приведены на стр. 17. Зависимость интенсивности напряжения  $\sigma_I$  от интенсивности деформации  $\epsilon_I$  получаем той или иной гипотезе ползучести заменой  $\sigma$  и  $\epsilon$  на  $\sigma_I$  и  $\epsilon_I$  соответственно.

Большинство задач расчета на ползучесть решено исходя из состояния установившейся ползучести (т. е. в предположении, что напряжения во времени не изменяются).

Это предположение равносильно пренебрежению скоростью упругой деформации по сравнению со скоростью пластической деформации. Расчеты на ползучесть без этого допущения см. [11], [18], [22], [23], [38].

В случае задач статически определенных, с точки зрения определения напряжения при постоянных во времени внешних силах, имеет место установившаяся ползучесть.

При установившейся ползучести гипотеза старения (30), измененная гипотеза Н. М. Беляева и гипотеза течения (32) приводят к одному результату. В этом случае зависимость интенсивности деформации от интенсивности напряжения (см. стр. 15) в предположении, что в начальный момент деформации упруги, имеет вид

$$\epsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} + \sigma_I^n \Omega(t),$$

где  $n$  — показатель степени в уравнениях (30) или (32).

Решение любой задачи установившейся ползучести эквивалентно решению чисто пластической задачи с произвольным упрочнением. Поэтому многочисленные результаты исследований отечественных ученых по теории пластичности [8], [9], [10], [34] могут быть использованы и для расчетов на ползучесть.

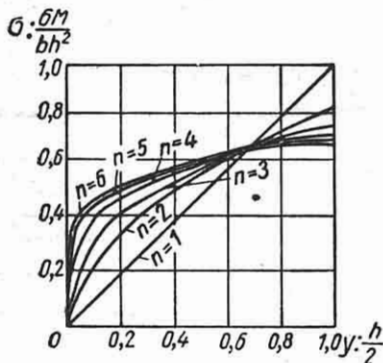
Далее рассматриваются расчеты на ползучесть равномерно нагретых деталей, выполненные в предположении установившейся ползучести.

### Установившаяся ползучесть бруса

#### Изгиб

**Определение напряжений.** Ниже приводятся формулы для расчетов на ползучесть изогнутого бруса с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии, одна из которых лежит в плоскости действия изгибающего момента [11], [22].

В случае поперечного изгиба используется гипотеза плоских сечений, а касательные напряжения в поперечном сечении в расчете не учитываются.



Фиг. 36.

Напряжения в поперечном сечении на расстоянии  $y$  от нейтральной оси  $x$  определяются по формуле

$$\sigma = \text{sign } y \frac{M}{J_{nx}} |y|^{\frac{1}{n}},$$

где  $M$  — изгибающий момент;  $J_{nx}$  — обобщенный момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси  $x$ , определяемый формулой

$$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{1+n}{n}} dF.$$

Максимальные нормальные напряжения в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M}{W_{nx}},$$

где  $W_{nx}$  — обобщенный момент сопротивления изгибу поперечного сечения.

Величины обобщенного момента инерции и обобщенного момента сопротивления изгибу для некоторых сечений приведены в табл. 5.

На фиг. 36 представлены эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении прямоугольной балки при установившейся ползучести для различных значений коэффициента  $n$ .

**Определение прогибов.** Кривизна  $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{nl}$  ( $\rho$  — радиус кривизны изогнутой оси бруса), образовавшаяся в результате ползучести материала за время  $t$ , определяется по формуле

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{nl} = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n \Omega(t).$$

В случае поперечного изгиба балок скорости изменения прогибов определяются интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n B(t).$$

Скорости изменения прогибов могут быть также определены по формуле

$$\dot{v} = \int_l \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n M_1 B(t) dz,$$

где  $M_1$  — изгибающий момент в текущем сечении от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения в той точке, перемещение которой определяется; интеграл берется по длине бруса.

Зависимость прогиба, образовавшегося в результате ползучести материала, от времени находится интегрированием по времени скорости изменения прогиба.

#### Кручение

Наибольшее касательное напряжение находится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_{nk}},$$

где  $M$  — крутящий момент;  $W_{nk}$  — обобщенный момент сопротивления кручению.

Относительный угол закручивания, образовавшийся в результате ползучести материала за время  $t$ , определяется по формуле

$$\theta_{nl} = \left(\frac{M}{J_{nk}}\right)^n \Omega(t),$$

где  $J_{nk}$  — обобщенная жесткость бруса при кручении.

Величины  $J_{nk}$  и  $W_{nk}$  для различных сечений приведены в табл. 6.

Таблица 5

## Формулы обобщенного момента инерции и обобщенного момента сопротивления изгибу

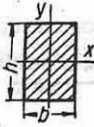
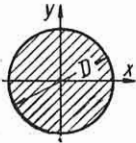
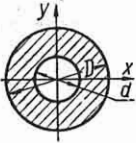
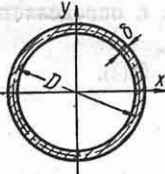
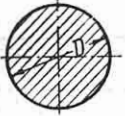
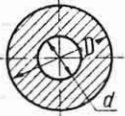


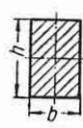
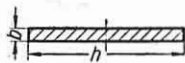
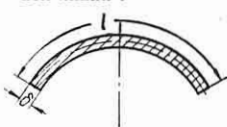
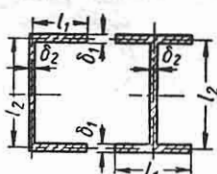
Форма сечения	Обобщенный момент инерции и обобщенный момент сопротивления изгибу													
1. Прямоугольное сечение со сторонами $b$ и $h$ 	$J_{nx} = \alpha_1 b h \frac{2n+1}{n}; \quad W_{nx} = \frac{n}{2(2n+1)} b h^2,$ где коэффициент $\alpha_1$ находится из приведенных ниже данных в зависимости от показателя степени $n$													
	$n$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\alpha_1$	0,0833	0,118	0,141	0,170	0,187	0,198	0,206	0,211	0,216	0,219	0,222	0,225	0,227
2. Круглое сплошное сечение диаметра $D$ 	$J_{nx} = \alpha_2 D \frac{3n+1}{n}; \quad W_{nx} = \frac{1}{2^n} \alpha_2 D^3,$ где коэффициент $\alpha_2$ находится из приведенных ниже данных в зависимости от показателя степени $n$													
	$n$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\alpha_2$	0,0491	0,0723	0,0883	0,108	0,120	0,128	0,134	0,138	0,141	0,144	0,146	0,148	0,149
3. Круглое полое сечение с наружным диаметром $D$ и внутренним диаметром $d$ 	$J_{nx} = \alpha_2 \left( D \frac{3n+1}{n} - d \frac{3n+1}{n} \right); \quad W_{nx} = 2 \frac{1}{n} \alpha_2 D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right],$ где коэффициент $\alpha_2$ в зависимости от показателя степени $n$ находится из приведенных выше данных для круглого сплошного сечения													
4. Сечение в виде тонкостенного кольца со средним диаметром $D$ и толщиной стенки $\delta$ 	$J_{nx} = \alpha_3 D \frac{2n+1}{n} \delta; \quad W_{nx} = 2 \frac{1}{n} \alpha_3 D^2 \delta,$ где коэффициент $\alpha_3$ находится из приведенных ниже данных в зависимости от показателя степени $n$													
	$n$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$\alpha_3$	0,393	0,530	0,618	0,722	0,788	0,821	0,849	0,869	0,884	0,895	0,905	0,913	0,920

Таблица 6

Формулы для обобщенной жесткости бруса при кручении и обобщенного момента сопротивления кручению

Форма сечения	Обобщенная жесткость бруса при кручении и обобщенный момент сопротивления кручению
<p>1. Круглое сплошное сечение диаметра <math>D</math></p> 	$J_{nk} = \frac{\pi}{3} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}}; \quad W_{nk} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{3n+1} D^3$
<p>2. Круглое полое сечение с наружным диаметром <math>D</math> и внутренним диаметром <math>d</math></p> 	$J_{nk} = \frac{\pi}{3} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{n}{3n+1} D^{\frac{3n+1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right];$ $W_{nk} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{3n+1} D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \right]$
<p>3. Сечение в виде тонкостенного кольца со средним диаметром <math>D</math> и толщиной стенки <math>\delta</math></p> 	$J_{nk} = \frac{\pi}{2} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2n+1}{2n} D^{\frac{2n+1}{n}} \delta; \quad W_{nk} = W_p = \frac{\pi D^3 \delta}{2}$
<p>4. Сечение в виде тонкостенного замкнутого профиля</p> 	$J_{nk} = \frac{2}{3} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n+1}{f} \cdot \frac{n+1}{2n} \left[ \oint \frac{ds}{\delta} \right]^{\frac{1}{n}}; \quad W_{nk} = 2f\delta_{\min}$ <p>где <math>f</math> — площадь, ограниченная средней линией профиля; <math>\delta</math> — текущая толщина стенки; <math>\delta_{\min}</math> — наименьшая толщина стенки</p>

Форма сечения	Обобщенная жесткость бруса при кручении и обобщенный момент сопротивления кручению																																																																
<p>5. Прямоугольное сечение со сторонами <math>b &lt; h</math></p> 	$J_{пк} = \beta b^n \frac{3n+1}{n}$ <p>где коэффициент <math>\beta</math> находится из приведенных ниже данных в зависимости от показателя степени <math>n</math> и отношения <math>\frac{h}{b}</math></p> <table border="1" data-bbox="321 344 984 768"> <thead> <tr> <th><math>\frac{h}{b}</math></th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>1,75</th> <th>2</th> <th>2,5</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\beta</math> для <math>n = 1</math></td> <td>0,0463</td> <td>0,0961</td> <td>0,122</td> <td>0,148</td> <td>0,199</td> <td>0,250</td> <td>0,349</td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math> „ <math>n = 3</math></td> <td>0,115</td> <td>0,207</td> <td>0,250</td> <td>0,290</td> <td>0,368</td> <td>0,444</td> <td>0,596</td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math> „ <math>n = 5</math></td> <td>0,134</td> <td>0,228</td> <td>0,269</td> <td>0,309</td> <td>0,388</td> <td>0,467</td> <td>0,623</td> </tr> <tr> <th><math>\frac{h}{b}</math></th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> <td></td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math> для <math>n = 1</math></td> <td>0,445</td> <td>0,540</td> <td>0,635</td> <td>0,729</td> <td>0,823</td> <td>0,917</td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math> „ <math>n = 3</math></td> <td>0,746</td> <td>0,895</td> <td>1,05</td> <td>1,19</td> <td>1,34</td> <td>1,49</td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math> „ <math>n = 5</math></td> <td>0,779</td> <td>0,935</td> <td>1,09</td> <td>1,25</td> <td>1,40</td> <td>1,56</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	$\beta$ для $n = 1$	0,0463	0,0961	0,122	0,148	0,199	0,250	0,349	$\beta$ „ $n = 3$	0,115	0,207	0,250	0,290	0,368	0,444	0,596	$\beta$ „ $n = 5$	0,134	0,228	0,269	0,309	0,388	0,467	0,623	$\frac{h}{b}$	5	6	7	8	9	10		$\beta$ для $n = 1$	0,445	0,540	0,635	0,729	0,823	0,917		$\beta$ „ $n = 3$	0,746	0,895	1,05	1,19	1,34	1,49		$\beta$ „ $n = 5$	0,779	0,935	1,09	1,25	1,40	1,56	
$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4																																																										
$\beta$ для $n = 1$	0,0463	0,0961	0,122	0,148	0,199	0,250	0,349																																																										
$\beta$ „ $n = 3$	0,115	0,207	0,250	0,290	0,368	0,444	0,596																																																										
$\beta$ „ $n = 5$	0,134	0,228	0,269	0,309	0,388	0,467	0,623																																																										
$\frac{h}{b}$	5	6	7	8	9	10																																																											
$\beta$ для $n = 1$	0,445	0,540	0,635	0,729	0,823	0,917																																																											
$\beta$ „ $n = 3$	0,746	0,895	1,05	1,19	1,34	1,49																																																											
$\beta$ „ $n = 5$	0,779	0,935	1,09	1,25	1,40	1,56																																																											
<p>6. Тонкая полоса со сторонами <math>b &lt; h</math></p> 	$J_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3 \frac{n+1}{2n}} hb \frac{2n+1}{n}; \quad W_{пк} = \frac{n}{2n+1} hb^2$																																																																
<p>7. Тонкостенный незамкнутый профиль с постоянной толщиной стенок <math>\delta</math> и длиной средней линии <math>l</math></p> 	$J_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3 \frac{n+1}{2n}} l \delta \frac{2n+1}{n}; \quad W_{пк} = \frac{n}{2n+1} l \delta^2$																																																																
<p>8. Тонкостенный открытый профиль, состоящий из нескольких полос</p> 	$J_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3 \frac{n+1}{2n}} \sum_{i=1}^m l_i \delta_i \frac{2n+1}{n};$ $W_{пк} = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\delta_{\max}^{\frac{n}{2n+1}}} \sum_{i=1}^m l_i \delta_i \frac{2n+1}{n},$ <p>где <math>m</math> — число полос в профиле; <math>\delta_{\max}</math> — наибольшая толщина полосы</p>																																																																

**Ползучесть тонкостенной трубки, нагруженной внутренним давлением, продольной силой и крутящим моментом**

Окружное, осевое и касательное напряжения определяются по формулам

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}; \quad \sigma_z = \frac{N}{\pi D\delta}; \quad \tau = \frac{2M}{\pi D\delta^2},$$

где  $D$  — средний диаметр трубки;  $\delta$  — толщина стенки;  $p$  — внутреннее давление;  $N$  — нормальная сила в поперечном сечении трубки;  $M$  — крутящий момент.

Деформации трубки, образовавшиеся в результате ползучести материала за время  $t$ , определяются по формулам [22]

$$\varepsilon_{t \text{ н.л.}} = (\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2)^{\frac{n-1}{2}} \times \left( \sigma_t - \frac{\sigma_z}{2} \right) \Omega(t);$$

$$\varepsilon_{z \text{ н.л.}} = (\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2)^{\frac{n-1}{2}} \times \left( \sigma_z - \frac{\sigma_t}{2} \right) \Omega(t);$$

$$\gamma_{\text{н.л.}} = 3 (\sigma_t^2 - \sigma_t \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2)^{\frac{n-1}{2}} \tau \Omega(t).$$

Зная деформации, можно определить перемещения, образовавшиеся в результате ползучести материала за время  $t$ .

Удлинение трубы длиной  $l$

$$\Delta l_{\text{н.л.}} = \varepsilon_{z \text{ н.л.}} l.$$

Приращение среднего диаметра

$$\Delta D_{\text{н.л.}} = \varepsilon_{t \text{ н.л.}} D.$$

Угол закручивания трубки при условии, что крутящий момент не меняется по длине,

$$\varphi = \frac{2\gamma_{\text{н.л.}} l}{D}.$$

**Установившаяся ползучесть годостенной трубы, нагруженной внутренним и внешним давлениями и осевой силой**

Обозначения размеров трубы, нагрузок, напряжений, перемещений те же, что на стр. 279. Если торцы трубы не могут смещаться в осевом направле-

нии или если осевая сила возникает только за счет внутреннего и внешнего давлений на днища, осевая деформация трубы равна нулю ( $\varepsilon_z = 0$ ).

В этом случае напряжения определяются по формулам [22]

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^{\frac{n}{2}} - p_2 r_2^{\frac{n}{2}}}{r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}}} -$$

$$- \frac{(p_1 - p_2) r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\frac{n}{2}}}{\left( r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}} \right) r^{\frac{n}{2}}};$$

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^{\frac{n}{2}} - p_2 r_2^{\frac{n}{2}}}{r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}}} +$$

$$+ \frac{2-n}{n} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\frac{n}{2}}}{\left( r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}} \right) r^{\frac{n}{2}}};$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 r_1^{\frac{n}{2}} - p_2 r_2^{\frac{n}{2}}}{r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}}} -$$

$$- \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\frac{n}{2}}}{\left( r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}} \right) r^{\frac{n}{2}}}.$$

Радиальное смещение точки на радиусе  $r$ , образовавшееся в результате ползучести материала за время  $t$ , определяется по формуле

$$u_{\text{н.л.}} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2} \text{sign}(p_1 - p_2) \frac{1}{n^n} \times$$

$$\times \frac{|p_1 - p_2|^{\frac{n}{2}}}{\left( r_2^{\frac{n}{2}} - r_1^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\frac{n}{2}}}{r} \Omega(t).$$

### Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластинок

Обозначения:  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и наружный радиусы пластинок соответственно;  $r$  — текущий радиус;  $\rho = \frac{r}{r_2}$  — безразмерный радиус;  $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$  — отношение внутреннего радиуса к наружному;  $h$  — толщина пластинки;  $z$  — расстояние от срединной плоскости пластинки до текущей точки;  $M_t$  и  $M_r$  в  $\text{кгсм/см}$  — интенсивности моментов в радиальном и окружном сечениях соответственно;  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  — окружное и радиальное напряжения соответственно;  $\vartheta_{n,t}$  — угол поворота нормали к срединной плоскости пластинки, образовавшийся в результате ползучести материала за время  $t$ ;  $\dot{\vartheta}_{n,t}$  — скорость изменения угла поворота;  $w_{n,t}$  — прогиб пластинки, образовавшийся в результате ползучести материала за время  $t$ .

В расчетах на ползучесть круглых симметрично нагруженных пластинок относительно характера напряженного состояния и деформации принимаются те же допущения, что и в упругом расчете пластин (см. стр. 190).

Окружное и радиальное напряжения определяются по формулам [19]

$$\sigma_t = 2^{m+1} (m+2) \operatorname{sign} z \frac{M_t |z|^m}{h^{m+2}};$$

$$\sigma_r = 2^{m+1} (m+2) \operatorname{sign} z \frac{M_r |z|^m}{h^{m+2}},$$

$$\text{где } m = \frac{1}{n}.$$

Наибольшие напряжения равны

$$\sigma_{t \max} = 2(m+1) \frac{M_t}{h^2};$$

$$\sigma_{r \max} = 2(m+1) \frac{M_r}{h^2}.$$

Величины интенсивностей окружного и радиального моментов, угла поворота нормали к срединной поверхности пластинки и прогиба определяются по формулам [19]

$$M_t = \frac{J_2}{J_1} r_2^2 \alpha^{m-1} \left( \frac{\vartheta_1}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\vartheta_1}{d\rho} \right);$$

$$M_r = \frac{J_2}{J_1} r_2^2 \alpha^{m-1} \left( \frac{d\vartheta_1}{d\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta_1}{\rho} \right);$$

$$\vartheta_{n,t} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}} (2n+1)^n r_2^{n+1}}{n^n h^{2n+1}} \times$$

$$\times \left( \frac{J_2}{J_1} \right)^n \Omega(t) \vartheta_1;$$

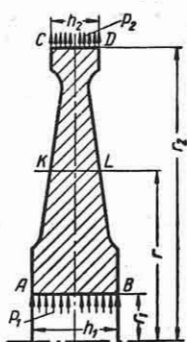
$$w_{n,t} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}} (2n+1)^n r_2^{n+2}}{n^n h^{2n+1}} \times$$

$$\times \left( \frac{J_2}{J_1} \right)^n \Omega(t) w_1.$$

Величины  $J_1$  и  $J_2$ , а также функции  $\vartheta_1$ ,  $\alpha_1$  и  $w_1$  для некоторых случаев круглых симметрично нагруженных пластинок приведены в табл. 7 [19].

### Установившаяся ползучесть вращающегося диска переменной толщины

Обозначения:  $r_1$  и  $r_2$  — внутренний и наружный радиусы диска;  $h$  — толщина диска на радиусе  $r$ ;  $h_1$  и  $h_2$  — толщины диска на внутреннем и наружном радиусах;  $\gamma$  — вес единицы объема материала диска;  $\omega$  — угловая скорость вращения диска;  $\sigma_t$  — окружное напряжение;  $\sigma_r$  — радиальное напряжение;  $p_1$  — равномерно распределенное давление по внутреннему контуру диска в  $\text{кг/см}^2$ ;  $p_2$  — интенсивность равномерно распределенной растягивающей нагрузки по наружному контуру в  $\text{кг/см}^2$  (фиг. 37).



Фиг. 37.

В расчетах дисков на ползучесть относительно характера напряженного состояния принимаются те же допущения, что и в упругом расчете диска [22].

Задача решается методом последовательных приближений [39].



## Диск с отверстием

В первом приближении напряжения определяются по формулам

$$\sigma_{tI} = \frac{p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{F};$$

$$\sigma_{rI} = \frac{1}{rh} \left[ -p_1 r_1 h_1 + \left( p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J \right) \frac{F(r)}{F} - \frac{\gamma \omega^2}{g} J(r) \right],$$

где

$$F(r) = \int_{r_1}^r h dr; \quad J(r) = \int_{r_1}^r hr^2 dr$$

площадь и момент инерции части радиального сечения диска *AKLB* (фиг. 37);

$$F = \int_{r_1}^{r_2} h dr; \quad J = \int_{r_1}^{r_2} hr^2 dr$$

площадь и момент инерции всего радиального сечения диска *ACDB* (фиг. 37).

Напряжения во втором приближении определяются по формулам

$$\sigma_{tII} = \frac{p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{\int_{r_1}^r h \zeta dr} \zeta; \quad (41)$$

$$\sigma_{rII} = \frac{1}{rh} \left[ -p_1 r_1 h_1 + \frac{p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{\int_{r_1}^r h \zeta dr} \int_{r_1}^r h \zeta dr - \frac{\gamma \omega^2}{g} J(r) \right], \quad (42)$$

где

$$\zeta = \left[ \frac{2e \int_{r_1}^{r_2} \beta \frac{dr}{r}}{r(1-\alpha + \alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} (2-\alpha)} \right]^{\frac{1}{n}}; \quad (43)$$

$$\beta = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha}; \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{rI}}{\sigma_{tI}}. \quad (45)$$

Для получения величин напряжений в третьем приближении необходимо воспользоваться формулами (41) и (42). В эти формулы подставляется функция  $\zeta$ , определенная при помощи выражений

(45), (44) и (43), причем при подсчете величины  $\alpha$  используются напряжения, найденные во втором приближении.

Аналогично могут быть построены четвертое и последующие приближения. Как показывают расчеты, изложенный метод имеет достаточно быструю схо-

димость и, как правило, можно ограничиться тремя приближениями.

Радиальное перемещение, образовавшееся в результате ползучести материала диска за время  $t$ , в некоторой точке диска на радиусе  $r_1$  определяется по формуле

$$u_{n,t} = \frac{1}{2} (\sigma_t^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_r^2)^{\frac{n-1}{2}} \times \\ \times (2\sigma_t - \sigma_r) r \Omega(t). \quad (46)$$

Порядок расчета диска. Диск разбивается на несколько участков, количество которых зависит от конфигурации диска. Для получения достаточной степени точности число участков

не должно быть менее 10. После этого определяются функции  $F(r)$  и  $J(r)$ , а затем окружные и радиальные напряжения в первом приближении.

Используя полученные величины напряжений, по формуле (45) подсчитывают функцию  $\alpha$ , а затем по формуле (44) функцию  $\beta$ . Далее производится численное интегрирование функции  $\frac{\beta}{r}$

и подсчитывается функция  $\int_{r_1}^r \beta \frac{dr}{r}$ . После чего по формуле (43) определяется функция  $\zeta$ .

Численное интегрирование выражения  $h\zeta$  позволяет определить функцию  $\int_0^r h\zeta dr$ .

Окружное и радиальное напряжения во втором приближении определяются по формулам (41) и (42). Для получения напряжений в третьем приближении по формуле (45) вновь подсчитывается функция  $\alpha$  на основе полученных величин напряжений во втором приближении, после чего расчет ведется по схеме, изложенной для второго приближения.

#### Диск без отверстия

В круге малого радиуса  $r_1$  окружное и радиальное напряжения предполагаются постоянными и равными между собой. В расчетах принимается  $r_1 = 0,1r_2$ .

В первом приближении:

для  $0 \leq r \leq r_2$

$$\sigma_{r1} = \frac{p_2 r_2 h_2 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{F + r_1 h_1};$$

для  $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\sigma_{r1} = \frac{1}{rh} \left\{ \frac{p_2 r_2 h_2 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{F + r_1 h_1} [F(r) + r_1 h_1] - \frac{\gamma \omega^2}{g} J(r) \right\},$$

причем  $F(r_1) = 0$  и  $J(r_1) = 0$ ; для

$r < r_1$   $\sigma_{r1} = \sigma_{t1}$ .

Во втором приближении:

для  $0 \leq r \leq r_1$

$$\sigma_{r11} = \sigma_{r11} = \frac{p_2 r_2 h_2 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{\frac{1}{2^n} r_1^n h_1 + \int_0^r h \zeta dr} \left( \frac{2}{r_1} \right)^{\frac{1}{n}};$$

для  $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\sigma_{r11} = \frac{p_2 r_2 h_2 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{\frac{1}{2^n} r_1^n h_1 + \int_0^r h \zeta dr} \zeta;$$

$$\sigma_{r11} = \frac{1}{rh} \left\{ \frac{p_2 r_2 h_2 + \frac{\gamma \omega^2}{g} J}{\frac{1}{2^n} r_1^n h_1 + \int_0^r h \zeta dr} \left[ \frac{1}{2^n} r_1^n h_1 + \int_0^r h \zeta dr \right] - \frac{\gamma \omega^2}{g} J(r) \right\}.$$

Функция  $\zeta$  определяется по формулам (43)–(45). Порядок расчета такой же, как и для диска с отверстием. Радиальные перемещения определяются по формуле (46).

*Пример.* Определить величины напряжений и зависимости радиального перемещения точек на наружном радиусе от времени для диска, изображенного на фиг. 38, а. Диск равномерно нагрет до температуры  $\vartheta = 450^\circ \text{C}$  и вращается с постоянным числом оборотов  $n = 12000$  в минуту. Давление на внутренней поверхности равно нулю, а на наружной поверхности диск нагружен равномерно распределенной растягивающей нагрузкой интенсивностью  $p_2 = 914 \text{ кг/см}^2$ . Материал диска — хромоникельмолибденовая сталь, график функции  $\Omega(t)$  для которой при температуре  $450^\circ \text{C}$  представлен на фиг. 39, показатель степени  $n = 2,47$  (см. табл. 4), а модуль продольной упругости при рассматриваемой температуре  $E = 1,66 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Вес единицы объема материала диска  $\gamma = 0,008 \text{ кг/см}^3$ .

Расчет диска произведен по схеме, изложенной выше. Результаты сведены в табл. 8–10. Эпюры окружных и радиальных напряжений в первом, втором и третьем приближениях представлены на фиг. 38, б. Как следует из этих эпюр, при подсчете напряжений можно ограничиться тремя приближениями. Третье приближение уже значительно отличается от второго.

Для определения зависимости радиального перемещения, возникающего в результате ползучести диска на наружном радиусе от времени, находим из табл. 10 величины напряжений на наружном контуре диска в третьем приближении. Они равны  $\sigma_{tr} = r_2 = 1640 \text{ кг/см}^2$ .

Подставляя эти величины в формулу (46), учитывая, что  $n = 2,47$  и  $r = r_2 = 15,5 \text{ см}$ , получаем

$$u_{плг} = r_2 = 6,653 \cdot 10^6 \Omega(t).$$

При помощи этого уравнения и графика функции  $\Omega(t)$  можно подсчитать величину радиального перемещения, развивающегося в результате ползучести, на наружном контуре диска для любого значения времени. Так, например, для  $t = 35000$  час. из графика на фиг. 39 находим

$$\Omega(t) = 21,4 \cdot 10^{-12} (\text{см}^2/\text{кг})^n$$

и, следовательно,

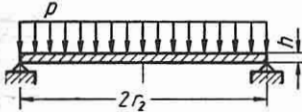
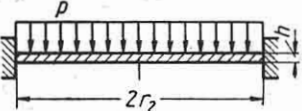
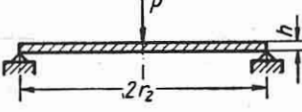
$$u_{плг} = r_2 = 0,0144 \text{ см} = 0,144 \text{ мм}.$$

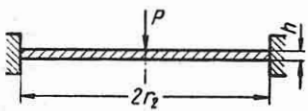
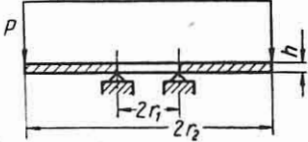
Расчет неравномерно нагретого вращающегося диска переменной толщины без использования предположения установившейся ползучести см. [14].

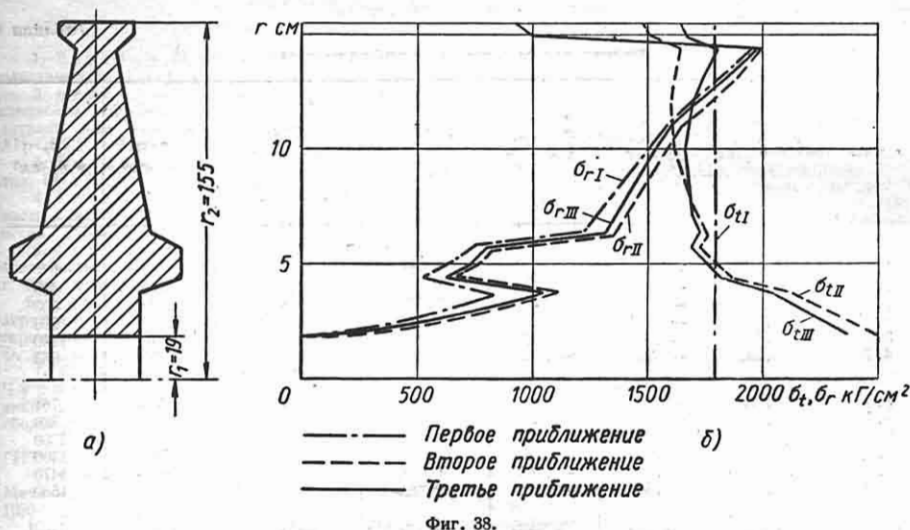
Расчет диска на ползучесть по методу Р. С. Кинасошвили сводится к описанному выше расчету диска с учетом

Таблица 7

Формулы для расчета круглых и кольцевых симметрично нагруженных пластинок на ползучесть

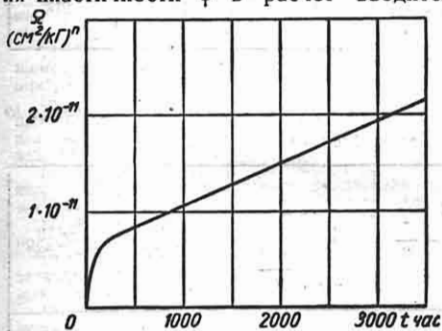
Нагрузка пластинки	Расчетные формулы						
<p>1. Круглая пластинка постоянной толщины <math>h</math>, радиуса <math>r_2</math> свободно оперта по контуру. Нагрузка интенсивностью <math>p</math> кг/см<sup>2</sup> равномерно распределена по всей пластинке</p> 	$\vartheta_1 = 7\rho - 3\rho^2; \quad x_1 = \sqrt{147 - 252\rho^2 + 117\rho^4};$ $w_1 = \frac{1}{4} (11 - 14\rho^2 + 3\rho^4); \quad J_2 = \frac{5}{8} p r_2$						
	$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$
	$J_1$	30,0	19,5	12,8	8,36	5,51	3,65
<p>2. Круглая пластинка постоянной толщины <math>h</math>, радиуса <math>r_2</math> защемлена по контуру. Нагрузка интенсивностью <math>p</math> кг/см<sup>2</sup> равномерно распределена по всей пластинке</p> 	$\vartheta_1 = \rho - \rho^2; \quad x_1 = \sqrt{3 - 12\rho^2 + 13\rho^4};$ $w_1 = \frac{1}{4} (1 - \rho^2)^2; \quad J_2 = \frac{p r_2}{24}$						
	$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$
	$J_1$	0,667	0,631	0,600	0,574	0,552	0,534
<p>3. Круглая пластинка постоянной толщины <math>h</math>, радиуса <math>r_2</math> свободно оперта по контуру и нагружена сосредоточенной силой <math>P</math> кг, приложенной в центре</p> 	$\vartheta_1 = \frac{2}{3} \rho - \rho \ln \rho; \quad x_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \ln \rho + 3 \ln^2 \rho};$ $w_1 = \frac{1}{12} (7 - 7\rho^2 + 6\rho^2 \ln \rho); \quad J_2 = \frac{7P}{24\pi r_2}$						
	$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$
	$J_1$	1,17	0,997	0,877	0,782	0,707	0,647

Нагрузка пластинки	Расчетные формулы																																								
<p>4. Круглая пластинка постоянной толщины <math>h</math>, радиуса <math>r_2</math> защемлена по контуру и нагружена сосредоточенной силой <math>P</math> кг, приложенной в центре</p> 	$\vartheta_1 = -\rho \ln \rho; \quad x_1 = \sqrt{1 + 3 \ln \rho + 3 \ln^2 \rho};$ $w_1 = \frac{1}{4} (1 - \rho^2 + 2\rho^2 \ln \rho); \quad J_2 = \frac{P}{8\pi r_2}$ <table border="1" data-bbox="435 470 984 619"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th>1,00</th> <th>1,25</th> <th>1,67</th> <th>2,5</th> <th>5,0</th> <th><math>\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>J_1</math></td> <td>0,500</td> <td>0,459</td> <td>0,442</td> <td>0,432</td> <td>0,429</td> <td>0,429</td> </tr> </tbody> </table>						$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$	$J_1$	0,500	0,459	0,442	0,432	0,429	0,429																					
$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$																																			
$J_1$	0,500	0,459	0,442	0,432	0,429	0,429																																			
<p>5. Кольцевая пластинка постоянной толщины <math>h</math>, внутреннего радиуса <math>r_1</math>, наружного радиуса <math>r_2</math> свободно опирается по внутреннему контуру и нагружена силой <math>P</math> кг, равномерно распределенной по наружному контуру</p> 	$\vartheta_1 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \left( \rho + \frac{3}{\rho} \right) \ln \alpha + \rho \ln \rho - \frac{2}{3} \rho;$ $x_1 = \sqrt{\alpha \ln^2 \rho + b \ln \rho + \frac{c}{\rho^4} + \frac{d}{\rho^2}} + f,$ <p>где</p> $a = 3; \quad b = \frac{6\alpha^2}{1 - \alpha^2} \ln \alpha - 1; \quad c = \frac{9\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2} \ln^2 \alpha;$ $d = -\frac{3\alpha^2}{1 - \alpha^2} \ln \alpha; \quad f = \frac{2\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2} \ln^2 \alpha - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \ln \alpha + \frac{1}{3};$ $w_1 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \left( \frac{\alpha^2 - \rho^2}{2} + 3 \ln \frac{\alpha}{\rho} \right) \ln \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{7}{12} (\alpha^2 - \rho^2);$ $J_2 = \left[ \frac{36\alpha^2}{1 - \alpha^2} \ln^2 \alpha + 7(1 - \alpha^2) \right] \frac{P}{24\pi r_2}.$ <table border="1" data-bbox="435 1160 984 1434"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th>1,00</th> <th>1,25</th> <th>1,67</th> <th>2,5</th> <th>5,0</th> <th><math>\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>J_1</math> для <math>\alpha = 0,2</math></td> <td>1,78</td> <td>1,47</td> <td>1,24</td> <td>1,06</td> <td>0,910</td> <td>0,796</td> </tr> <tr> <td><math>J_1</math> „ <math>\alpha = 0,4</math></td> <td>1,94</td> <td>1,63</td> <td>1,37</td> <td>1,16</td> <td>0,986</td> <td>0,843</td> </tr> <tr> <td><math>J_1</math> „ <math>\alpha = 0,6</math></td> <td>1,63</td> <td>1,37</td> <td>1,16</td> <td>0,980</td> <td>0,831</td> <td>0,705</td> </tr> <tr> <td><math>J_1</math> „ <math>\alpha = 0,8</math></td> <td>0,951</td> <td>0,804</td> <td>0,680</td> <td>0,575</td> <td>0,487</td> <td>0,412</td> </tr> </tbody> </table>						$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$	$J_1$ для $\alpha = 0,2$	1,78	1,47	1,24	1,06	0,910	0,796	$J_1$ „ $\alpha = 0,4$	1,94	1,63	1,37	1,16	0,986	0,843	$J_1$ „ $\alpha = 0,6$	1,63	1,37	1,16	0,980	0,831	0,705	$J_1$ „ $\alpha = 0,8$	0,951	0,804	0,680	0,575	0,487	0,412
$n$	1,00	1,25	1,67	2,5	5,0	$\infty$																																			
$J_1$ для $\alpha = 0,2$	1,78	1,47	1,24	1,06	0,910	0,796																																			
$J_1$ „ $\alpha = 0,4$	1,94	1,63	1,37	1,16	0,986	0,843																																			
$J_1$ „ $\alpha = 0,6$	1,63	1,37	1,16	0,980	0,831	0,705																																			
$J_1$ „ $\alpha = 0,8$	0,951	0,804	0,680	0,575	0,487	0,412																																			



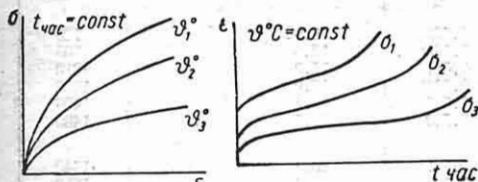
Фиг. 38.

пластических деформаций (стр. 282) с той только разницей, что вместо модуля пластичности  $\psi$  в расчет вводится

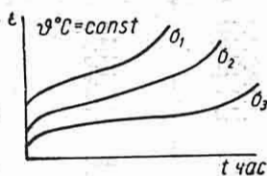


Фиг. 39.

модуль ползучести  $\varphi$ . Модуль ползучести определяется по кривым деформации



Фиг. 40.



Фиг. 41.

ции в координатах  $\sigma$ ,  $\epsilon$  для соответствующих температур и заданного значения времени (фиг. 40). Эти кривые

легко могут быть получены перестройкой обычных кривых ползучести (фиг. 41).

О профилировании неравномерно нагретого вращающегося диска переменной толщины в условиях ползучести по заданному закону изменения напряжений или деформаций по радиусу см. [15].

Таблица 8

Расчет диска (первое приближение)

$r$ в см	$h$ в см	$F(r)$ в $\text{см}^2$	$J(r)$ в $\text{см}^4$	$\sigma_{rI}$ в $\text{кг/см}^2$	$\sigma_{rII}$ в $\text{кг/см}^2$
1,90	3,80	0	0	1790	0
2,40	3,80	1,90	8,82	1790	359
2,90	3,80	3,80	22,2	1790	590
3,40	3,80	5,70	41,1	1790	746
3,80	3,80	7,22	60,8	1790	839
4,40	7,60	10,5	119	1790	522
5,00	7,60	15,2	220	1790	639
5,70	7,60	20,5	373	1790	735
6,40	4,80	24,9	530	1790	1220
7,00	4,60	27,7	657	1790	1270
8,00	4,20	32,1	904	1790	1360
9,00	3,80	36,1	1190	1790	1430
10,0	3,40	39,7	1520	1790	1510
11,0	3,00	42,9	1870	1790	1590
12,0	2,60	45,7	2240	1790	1690
13,0	2,20	48,1	2610	1790	1820
14,3	1,80	50,7	3100	1790	1970
14,9	3,30	52,2	3420	1790	999
15,5	3,30	54,2	3880	1790	914

Таблица 9

Расчет диска (второе приближение)

$r$ в см	$\alpha$	$\beta$	$\int_{r_1}^r \beta \frac{dr}{r}$	$\zeta - \frac{1}{n}$ в см	$\int_{r_1}^r \zeta h dr$ $\frac{2n-1}{n}$ в см	$\sigma_t$ II в кг/см <sup>2</sup>	$\sigma_r$ II в кг/см <sup>2</sup>
1,90	0	-0,500	0	0,769	0	2510	0
2,40	0,201	-0,332	-0,100	0,738	1,43	2410	499
2,90	0,330	-0,203	-0,153	0,704	2,80	2300	803
3,40	0,418	-0,104	-0,178	0,674	4,11	2200	996
3,80	0,470	-0,0395	-0,186	0,652	5,12	2130	1100
4,40	0,292	-0,243	-0,206	0,573	7,17	1870	653
5,00	0,358	-0,173	-0,233	0,552	9,73	1800	761
5,70	0,412	-0,111	-0,251	0,528	12,6	1720	838
6,40	0,685	0,281	-0,242	0,541	14,9	1760	1360
7,00	0,713	0,330	-0,215	0,530	16,4	1730	1400
8,00	0,760	0,420	-0,165	0,516	18,7	1680	1470
9,00	0,803	0,507	-0,111	0,505	20,8	1650	1530
10,0	0,845	0,597	-0,0529	0,498	22,6	1620	1590
11,0	0,891	0,705	0,00900	0,494	24,2	1610	1660
12,0	0,946	0,847	0,0763	0,493	25,6	1610	1750
13,0	1,02	1,07	0,153	0,497	26,7	1620	1870
14,3	1,10	1,34	0,267	0,505	28,0	1650	2000
14,9	0,560	0,0826	0,296	0,465	28,8	1520	1010
15,5	0,512	0,0161	0,298	0,453	29,7	1480	914

Таблица 10

Расчет диска (третье приближение)

$r$ в см	$\alpha$	$\beta$	$\int_{r_1}^r \beta \frac{dr}{r}$	$\zeta - \frac{1}{n}$ в см	$\int_{r_1}^r \zeta h dr$ $\frac{2n-1}{n}$ в см	$\sigma_t$ III в кг/см <sup>2</sup>	$\sigma_r$ III в кг/см <sup>2</sup>
1,90	0	-0,500	0	0,769	0	2370	0
2,40	0,207	-0,326	-0,0998	0,740	1,43	2280	471
2,90	0,350	-0,182	-0,150	0,711	2,81	2190	759
3,40	0,454	-0,0601	-0,170	0,684	4,14	2100	944
3,80	0,518	-0,0242	-0,172	0,665	5,16	2040	1050
4,40	0,350	-0,182	-0,182	0,592	7,27	1820	622
5,00	0,423	-0,0977	-0,200	0,571	9,92	1760	728
5,70	0,487	-0,0177	-0,208	0,550	12,9	1690	805
6,40	0,772	0,443	-0,185	0,561	15,3	1730	1310
7,00	0,811	0,524	-0,142	0,553	16,9	1700	1350
8,00	0,875	0,665	-0,0630	0,545	19,3	1680	1420
9,00	0,929	0,801	0,0231	0,542	21,5	1670	1480
10,0	0,979	0,939	0,115	0,541	23,4	1660	1540
11,0	1,03	1,09	0,211	0,545	25,2	1680	1610
12,0	1,09	1,28	0,314	0,553	26,7	1700	1710
13,0	1,16	1,56	0,427	0,565	28,0	1740	1840
14,3	1,22	1,83	0,588	0,587	29,5	1800	1980
14,9	0,667	0,250	0,632	0,546	30,4	1680	1000
15,5	0,619	0,173	0,640	0,534	31,5	1640	914

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Безухов Н. И., Теория упругости и пластичности, ГИТТЛ, 1953.
2. Беляев Н. М., Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах, "Известия АН СССР, ОТН" № 7, 1943.
3. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ГИТТЛ, 1953.
4. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, 1949.
5. Григорьев А. С., О несущей способности кольцевых пластин, "Инженерный сборник", т. XVI, изд. АН СССР, 1953.
6. Дроздов Н. Ф., Сопротивление артиллерийских орудий и их устройств, ч. III. Автокрепление, изд. Артиллерийской академии имени Ф. Э. Дзержинского, 1935.
7. Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С., Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести, "Инженерный сборник", т. XVII, изд. АН СССР, 1953.
8. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
9. Ишлинский А. Ю., Пластичность, Механика в СССР за тридцать лет, ГИТТЛ, 1950.
10. Качанов Л. М., Механика пластических сред, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
11. Качанов Л. М., Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, 1949.
12. Кинасошвили Р. С., Расчет на прочность дисков турбомашин, Оборонгиз, 1954.
13. Коданев А. И., Концентрация напряжений в пластической области, "Труды ВВИА", вып. 316, изд. ВВИА имени Жуковского, 1949.
14. Костюк А. Г., Напряжения во вращающемся диске при ползучести, "Инженерный сборник", т. XV, изд. АН СССР, 1953.
15. Костюк А. Г., Расчет профиля вращающегося диска для условий ползучести, "Прикладная математика и механика", т. XVII, вып. 5, изд. АН СССР, 1953.
16. Лурье А. И., Обобщение теоремы Кастиляно, "Труды Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина" № 1, 1946.
17. Малинин Н. Н., Основы расчетов на ползучесть, Машгиз, 1948.
18. Малинин Н. Н., Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести, "Инженерный сборник", т. X, изд. АН СССР, 1951.
19. Малинин Н. Н., Установившаяся ползучесть круглых симметрично нагруженных пластин, "Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций", сб. ст. МВТУ имени Н. Э. Баумана, Машгиз, 1953.
20. Надин А., Пластичность и разрушение твердых тел, изд-во иностранной литературы, 1954.
21. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении (Прочность при статической нагрузке), Машгиз, 1950.
22. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении (Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть), Машгиз, 1952.
23. Работнов Ю. Н., Расчет деталей машин на ползучесть, "Известия АН СССР, ОТН" № 6, 1948.
24. Работнов Ю. Н., Некоторые вопросы теории ползучести, "Вестник Московского университета" № 10, 1948.
25. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, изд. МГУ, 1950.
26. Радиг А. А., Расчет турбинного диска с учетом ползучести, "Прочность элементов паровых турбин", сб. ст., Машгиз, 1951.
27. Раковщик Ю. А., Определение несущей способности деталей при пластическом изгибе, "Вестник машиностроения" № 2, 1953.
28. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Стройиздат, 1954.
29. Розенблюм В. И., Расчет ползучести турбинных диафрагм ступеней высокого давления, "Инженерный сборник", т. XX, изд. АН СССР, 1954.
30. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, ГИТТЛ, 1951.
31. Серенсен С. В., Когаев В. П., Козлов Л. А., Шнейдерович Р. М., Несущая способность и расчет деталей машин на прочность, Машгиз, 1954.
32. Смирнов-Аляев Г. А., Теория автокрепления цилиндров, Оборонгиз, 1940.
33. Смирнов-Аляев Г. А., Сопротивление материалов пластическим деформациям, Машгиз, 1949.
34. Соколовский В. В., Теория пластичности, ГИТТЛ, 1950.
35. Теория пластичности, сб. ст. под ред. Ю. Н. Работнова, Государственное издательство иностранной литературы, М., 1948.
36. Ужик Г. В., Сопротивление отрыву и прочность металлов, изд. АН СССР, 1950.
37. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Олисов Б. А., Кудрявцев И. Н., Мальгинов Л. И., Курс сопротивления материалов, ч. I и II, ГИТТЛ, 1949.
38. Чуриков Ф. С., К вопросу о напряжениях и деформациях при высокой температуре, "Вестник Московского университета" № 2, 1949.
39. Bailey R. W., The Utilization of Creep Test Data in Engineering Design, The Institution of Mechanical Engineers, Proceedings, v. 131, 1935.
40. Davis E. A., Creep and Relaxation of Oxygen-Free Copper, "Journal of Applied Mechanics", June, v. 10, № 2, 1943.
41. Thompson A. S., Stresses in Rotating Disks of High Temperatures, "Journal of Applied Mechanics", March, v. 13, № 1, 1946.

## РАСЧЕТЫ НА СТАТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Повышение качества применяемых материалов и уточнение методов расчета являются основой для создания легких и рациональных конструкций современного машиностроения. Для облегченных конструкций характерно снижение запасов устойчивости, т. е. приближение их фактического напряженного состояния к критическому. Поэтому расчеты на устойчивость элементов современных конструкций (стержней, пластин и оболочек) приобретают весьма существенное значение во всех отраслях машиностроения.

Детально вопросы устойчивости напряженного состояния элементов конструкций рассмотрены в [5], [6], [7], [9], [10], [12], [15].

Изложение наиболее употребительных методов расчета на устойчивость дано в ряде курсов сопротивления материалов [2], [13], [14].

Систематизированный справочный материал по расчетам на устойчивость приведен в работах [4], [11].

### УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### (продольный изгиб)

Устойчивость или неустойчивость прямолинейной формы оси сжатого стержня существенно зависит от величины сжимающей силы. То значение нагрузки на стержень, при котором прямолинейная форма перестает быть формой устойчивого равновесия, носит название критического значения. При нагрузках, меньших критической, прямолинейная форма оси стержня устойчива. При нагрузках, больших критической, прямолинейная форма оси стержня становится неустойчивой, т. е. практически исчезает, и стержень переходит к

новой, криволинейной форме равновесия. Эта новая форма равновесия устойчива, но ее особенностью является весьма резкое нарастание прогибов при превышении нагрузки критического значения. Так, для однопролетного стержня постоянного сечения с шарнирно опертыми концами (фиг. 1) наибольший прогиб имеет место по середине длины стержня, и его величина в зависимости от нагрузки [10]

$$u_{\max} = \frac{4}{\pi} l \sqrt{\sqrt{\frac{P_{кр}}{P}} - \frac{P_{кр}}{P}}, \quad (1)$$

где  $P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$  — критическое значение нагрузки;  $P > P_{кр}$  — фактическое значение нагрузки;  $EJ$  — наименьшая жесткость изгиба стержня;  $l$  — его длина.

Если  $\frac{P}{P_{кр}} = 1,001$ , т. е. нагрузка превышает критическую только на 0,1%, то  $u_{\max} = 0,0282l$ , т. е. составляет приблизительно 3% длины стержня. При превышении критической нагрузки на 1% наибольший прогиб составляет уже около 9% длины  $l$ .

Переход к новой форме равновесия вызывает весьма резкое возрастание напряжений в стержне: к первоначальным напряжениям от сжатия добавляются напряжения от изгиба, во много раз превышающие первые.

*Пример.* Для стального стержня с шарнирно опертыми концами (фиг. 1) длиной  $l = 3$  м и поперечным сечением в виде прямоугольника с размерами  $b = 12$  см и  $h = 1$  см наименьший момент инерции сечения

$$J_{\min} = \frac{1}{12} b h^3 = 1 \text{ см}^4,$$

и, следовательно, критическое значение нагрузки

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{l^2} = 9,87 \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1}{300^2} = 219 \text{ кг},$$



а величина критического напряжения

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{219}{12} \approx 18 \text{ кг/см}^2.$$

При этом, конечно, предполагается, что стержень изготовлен точно прямым, нагрузка приложена строго по оси стержня и т. д. Представим себе, что фактическая нагрузка на стержень достигла  $P = 221 \text{ кг}$ , т. е. превысила критическую примерно на 1%, тогда максимальный прогиб составит

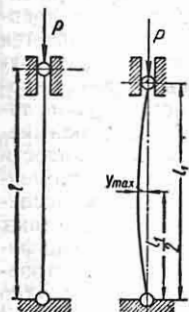
$$y_{\max} = \frac{4}{\pi} 300 \sqrt{\sqrt{\frac{219}{221}} - \frac{219}{221}} \approx 27 \text{ см},$$

изгибающий момент в соответствующем сечении стержня

$$M = P y_{\max} = 221 \cdot 27 \approx 6000 \text{ кг/см}$$

и дополнительные напряжения от изгиба

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M}{W} = \frac{6M}{bh^2} = \\ &= 3000 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$



Фиг. 1.

Таким образом, при превышении нагрузкой ее критического значения на 1% напряжения возрастают больше чем в 150 раз. Заметим, что в действительности благодаря неизбежному эксцентриситету приложения нагрузки, наличию малой начальной кривизны стержня (погиб стержня) и тому подобным обстоятельствам напряжения изгиба практически имеют место и при нагрузках, меньших критической.

Эти первоначальные напряжения изгиба значительно меньше напряжений, возникающих при нагрузках, больших критической.

Исключительно интенсивное возрастание напряжений при  $P > P_{кр}$  требует рассмотрения критической силы как предельной (разрушающей) нагрузки. Как правило, в конструкциях и сооружениях допускаются нагрузки только значительно меньшие критических. Отношение критического значения нагрузки к ее фактической величине носит название запаса устойчивости:

$$\frac{P_{кр}}{P} = n_y. \quad (2)$$

Рекомендуемые величины запаса устойчивости  $n_y$  существенно зависят от материала стержня:

Материал . . . . .	Сталь	Дерево	Чугун
$n_y$ . . . . .	1,5—3,0	2,5—3,5	4,5—5,5

На приведенные значения запаса устойчивости надо смотреть, как на ориентировочные величины.

Меньшие из указанных величин используются при более точных методах расчета, при достаточном соответствии между расчетной схемой и реальной конструкцией и т. д.

При расчете отдельных конструкций возможны значительные отклонения от приведенных значений запаса устойчивости (главным образом в сторону увеличения).

Итак, допускаемая сжимающая нагрузка из расчета на устойчивость

$$P = \frac{1}{n_y} P_{кр}, \quad (3)$$

где  $n_y$  — приведенные выше величины запаса устойчивости.

Ряд числовых примеров расчета на устойчивость дан ниже.

Основным методом точного определения критического значения нагрузки является непосредственное интегрирование дифференциального уравнения криволинейной формы равновесия. При использовании этого метода вычисление критической силы сводится к решению путем подбора достаточно сложных трансцендентных уравнений. Поэтому при практическом осуществлении расчетов на устойчивость большое значение приобретают таблицы корней этих уравнений, т. е. заранее вычисленные значения критических сил.

В общем случае сжатого монолитного стержня критическое значение нагрузки может быть выражено так:

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (4)$$

где  $E$  — модуль упругости первого рода;  $J = J_{\min}$  — наименьший из главных центральных моментов инерции сечения стержня;  $l$  — полная длина стержня;  $\eta$  — коэффициент критического значения нагрузки или коэффициент устойчивости;  $\mu$  — коэффициент приведенной длины; эти коэффициенты связаны между собой очевидным соотношением

$$\eta = \left( \frac{\pi}{\mu} \right)^2. \quad (5)$$

Величины коэффициентов  $\eta$  и  $\mu$  отражают следующие три фактора:

1) характер крепления торцевых и промежуточных сечений стержня (полное или частичное исключение линейных и угловых перемещений в месте крепления);

2) характер нагружения стержня продольными силами (сосредоточенные силы,

приложенные к торцевым или промежуточным сечениям, распределенные силы);

3) характер изменения сечения стержня по его длине (постоянное, ступенчатое, непрерывно переменное).

Соответствующие таблицы коэффициентов  $\eta$  и  $\mu$ , вычисленные для наиболее употребительных расчетных схем, приведены ниже.

Существенно отметить, что основная формула (4) для критического значения нагрузки справедлива только в пределах закона Гука, т. е. при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала стержня:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пл}. \quad (6)$$

### Однопролетные стойки постоянного сечения

Стойки, нагруженные продольными сжимающими силами, приложенными к их торцевым сечениям. Значения коэффициентов  $\eta$  и  $\mu$  для различных однопролетных стоек даны в табл. 1; у этих стоек:

1) абсолютно жесткие линейные и угловые связи наложены только на торцевые сечения;

2) продольные силы приложены только к торцевым сечениям;

3) поперечное сечение постоянно по длине стоек.

Нижние концы стоек I, IV, V и VII заделаны, а стоек II, III и VI опоры шарнирно.

Верхний конец стойки I свободен от связей.

В стойках II и IV верхние концы помещены в подвижную втулку, т. е. они

могут свободно перемещаться в направлении, перпендикулярном к оси стержня, но поворачиваться не могут (абсолютно жесткая угловая связь). В стойках III и V на верхние концы наложена абсолютно жесткая линейная связь (каток), т. е. концы могут свободно поворачиваться, но не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном к оси стержня. Верхние концы стоек VI и VII помещены в неподвижную втулку, т. е. они не могут ни поворачиваться, ни перемещаться в боковом направлении (комбинированная угловая и линейная связь) и могут лишь смещаться в продольном направлении.

Весьма существенно, что в ряде практически встречающихся случаев крепление концов стойки осуществляется наложением не абсолютно жестких связей, а связей, способных деформироваться. Теоретическое исследование таких стоек затрудняется некоторой неопределенностью степени податливости реальных связей. Имеющиеся рекомендации основаны на результатах экспериментального исследования конкретных конструкций и отражают их специфические особенности. Так, в станкостроении [1] принято определять характер опор ходовых винтов в зависимости от отношения длины опоры  $l_0$  к ее внутреннему диаметру  $d_0$ , именно при  $\frac{l_0}{d_0} < 1,5$  рекомендуется рассматривать

опору как шарнирную, а при  $\frac{l_0}{d_0} > 3$  — как совершенную (абсолютно жесткую) заделку. Для опор с промежуточным отношением длины к диаметру  $1,5 < \frac{l_0}{d_0} < 3$

Таблица 1

Схема и номер стойки							
	I	II	III	IV	V	VI	VII
$\eta$	$\frac{\pi^2}{4} = 2,467$	$\frac{\pi^2}{4} = 2,467$	$\pi^2 = 9,870$	$\pi^2 = 9,870$	20,19	20,19	$1/\pi^2 = 0,101$
$\mu$	2	2	1	1	0,699	0,699	0,5
$\eta^*$	7,87	—	18,5	18,9	52,5	29,6	73,6

заделка считается несовершенной и имеют место следующие рекомендации: если один конец винта заделан совершенно ( $\frac{l_0}{d_0} > 3$ ), а другой несовершенным, то коэффициент устойчивости и коэффициент приведенной длины соответственно принимаются равными

$$\eta_1 = 2,8\pi^2 = 27,6 \text{ и } \mu =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2,8}} = 0,60;$$

Таблица 2

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  для консольных стоек, нагруженных силой  $P_1$  в торцевом сечении и силой  $P_2$ , приложенной в некотором промежуточном сечении [см. фиг. 2 и формулу (8)]

$\frac{b}{l}$	$P_2 : P_1$										
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,714	2,961	3,701	4,935	7,402	14,80	27,14	51,82	125,8	249,2
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698	4,930	7,377	14,68	26,66	49,86	111,6	176,3
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679	4,880	7,207	13,78	23,19	36,33	50,96	56,48
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622	4,712	6,769	11,70	16,82	21,37	24,89	26,14
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525	4,470	6,074	9,187	11,57	13,29	14,52	14,97
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384	4,136	5,268	7,060	8,210	8,963	9,488	9,675
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211	3,759	4,497	5,504	6,048	6,434	6,674	6,764
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020	3,385	3,830	4,376	4,660	4,834	4,952	4,993
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821	3,040	3,280	3,551	3,685	3,765	3,818	3,836
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641	2,734	2,832	2,936	2,986	3,015	3,033	3,040
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

если оба конца заделаны несовершенно, то

$$\eta = 1,8\pi^2 = 17,8 \quad \text{и} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1,8}} = 0,75.$$

В результате экспериментов над винтами с целью учета влияния витков на жесткость винта получено следующее выражение для приведенного момента инерции, используемого при вычислении критического значения нагрузки:

$$J = \frac{\pi d_1^4}{64} \left[ 0,375 + 0,625 \frac{d_1}{d_2} \right], \quad (7)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — соответственно наружный и внутренний диаметры резьбы.

Для нормальной трапециoidalной резьбы по ОСТ 2410 при номинальном диаметре от 12 до 125 мм отношение  $d_1 : d_2$  колеблется в пределах между 1,40 и 1,15; оно тем больше, чем меньше диаметр резьбы. Следовательно, поправочный коэффициент в формуле (7) лежит в границах между 1,25 и 1,10. Запас устойчивости при расчете винтов принимается порядка  $n_y = 3 \div 4$ .

Меньшие значения  $n_y$  рекомендуются для расчета вертикальных винтов и большие — для винтов, расположенных горизонтально.

Стойки, нагруженные продольными силами, приложенными к промежуточному и торцевым сечениям. Консольная стойка, нагруженная двумя продольными силами: силой  $P_1$ ,

приложенной к торцевому сечению, и силой  $P_2$ , приложенной в некотором промежуточном сечении (фиг. 2).

Критическое значение нагрузки

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2} \cdot (8)$$

Коэффициенты устойчивости  $\eta$ , вычисленные для ряда значений величин  $\frac{P_2}{P_1}$  и  $\frac{b}{l}$ , сведены в табл. 2 [10].

Краткая таблица коэффициентов  $\eta$  для стойки с шарнирно опертыми концами дана ниже (см. «Однопролетные стойки переменного сечения», стр. 316).

Примерами применения в машиностроении сжатых стержней с осевыми нагрузками, приложенными к промежуточным сечениям, могут служить ходовые винты токарно-винторезных станков, сквозные штоки поршневых компрессоров и т. д.

Стойки, нагруженные продольными силами, распределенными по их длине. В этом случае дифференциальное уравнение упругой линии представляет собой уравнение с переменными коэффициентами. При продольных силах, равномерно распределенных по длине, и для целого ряда других случаев его общий интеграл может быть



Фиг. 2.

выражен через функции Бесселя дробных порядков.

Примером нагружения вертикальных стоек распределенными продольными силами может служить действие собственного веса.

Наиболее полное исследование расчета на устойчивость стоек, нагруженных распределенными продольными силами, дано в ряде работ А. Н. Динника; результаты этих работ изложены в его монографиях [5], [6], [7].

В табл. 1 (нижняя строка) приведены значения коэффициента  $\eta^*$  в выражении для критического значения сжимающей распределенной нагрузки:

$$(q l)_{кр} = \eta^* \frac{EJ}{l^2}, \quad (9)$$

где  $q$  — интенсивность продольных сил, равномерно распределенных по длине стойки (например, погонный вес стойки, т. е. вес единицы длины).

Стойки, одновременно нагруженные сосредоточенными и распределенными продольными силами. При одновременном действии сосредоточенных сил  $P$  и равномерно распределенной сжимающей нагрузки  $q$  критическое значение сосредоточенной силы

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}, \quad (10)$$

естественно, зависит от величины распределенной нагрузки.

В табл. 3 [5], [6] приведены значения коэффициента  $\eta$  для стоек I, III и IV (см. табл. 1) в зависимости от величины отношения веса стойки  $ql$  к Эйлерову значению сосредоточенной силы  $P$ . Это значение следующее:

для стойки I (нижний конец заделан, верхний свободен)

$$P_3 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ}{l^2} = 2,467 \frac{EJ}{l^2}$$

и для стоек IV (нижний конец заделан, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться) и III (оба конца оперты)

$$P_3 = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = 9,870 \frac{EJ}{l^2}.$$

Существенно отметить, что при достаточно большой величине собствен-

ного веса стойки потеря устойчивости происходит даже при растягивающем действии силы  $P$  (отрицательные значения коэффициента  $\eta$  в табл. 3).

Таблица 3

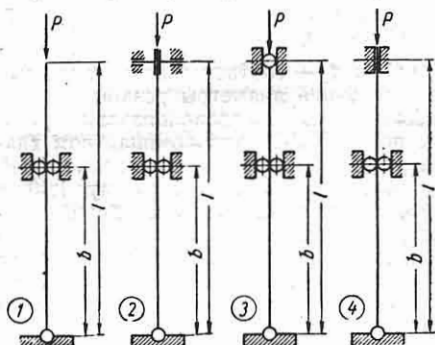
Таблица значений коэффициента устойчивости  $\eta$  при одновременном действии сосредоточенных и распределенных нагрузок

$\frac{ql}{P_3}$	Стойка I	Стойка III	Стойка IV
0	2,47	9,87	9,87
0,25	2,28	8,64	8,70
0,50	2,08	7,40	7,85
0,75	—	6,17	6,09
1,00	1,72	4,94	+4,75
1,92	—	—	0
2,00	0,96	0	-0,81
3,00	+0,15	-4,94	-5,91
3,18	0	-9,87	—
4,00	-0,69	-14,80	-11,50
5,00	-1,50	—	-17,37

Примечание. Схемы стоек I, III и IV см. табл. 1.

### Стойки постоянного сечения с промежуточными опорами

Наличие промежуточных опор весьма существенно отражается на величине критического значения нагрузки. Независимо от количества промежуточных опор и характера крепления торцевых



Фиг. 3.

сечений критическое значение нагрузки может быть выражено формулой (4), где  $l$  — длина всей стойки.

1. В табл. 4 [10] приведены значения коэффициента устойчивости  $\eta$  и коэффициента приведенной длины  $\mu$  для четырех стоек 1, 2, 3 и 4 (фиг. 3) с про-

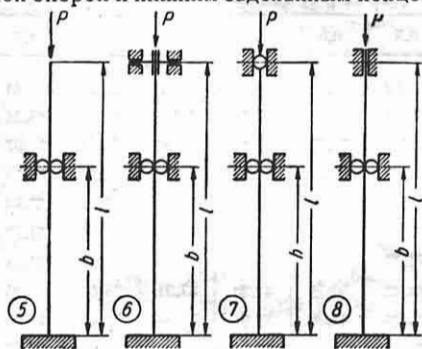
Таблица 4

Значения коэффициентов  $\eta$  и  $\mu$  для стоек с промежуточной опорой и нижним шарнирно опертым концом

№ стойки (по фиг. 3)	$\frac{b}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
		1	$\eta$	2,467	2,832	3,283	3,845	4,551	5,438	6,511	7,726	8,874
	$\mu$	2,00	1,87	1,73	1,60	1,47	1,35	1,23	1,13	1,06	1,01	1,00
2	$\eta$	9,870	11,33	13,11	15,26	17,72	20,19	21,88	22,14	21,40	20,55	20,19
	$\mu$	1,00	0,933	0,868	0,804	0,746	0,699	0,672	0,668	0,679	0,693	0,699
3	$\eta$	20,19	23,23	27,06	31,75	36,80	39,48	36,80	31,75	27,06	23,23	20,19
	$\mu$	0,699	0,652	0,604	0,558	0,518	0,500	0,518	0,558	0,604	0,652	0,699
4	$\eta$	39,48	45,27	51,97	58,92	58,84	51,12	41,68	33,96	28,09	23,63	20,19
	$\mu$	0,500	0,467	0,436	0,412	0,410	0,439	0,487	0,539	0,593	0,646	0,699

межуточной опорой и нижним шарнирно опертым концом в зависимости от положения промежуточной опоры.

2. Табл. 5 [10] дает значения  $\eta$  и  $\mu$  для стоек 5, 6, 7 и 8 (фиг. 4) с промежуточной опорой и нижним заделанным концом.



Фиг. 4.

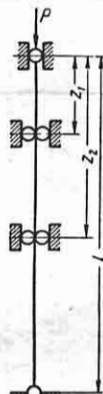
В стойках 1 и 5 верхний конец свободен (консольные стойки). На верхний конец стоек 2 и 6 наложена угловая связь, т. е. концы помещены в подвижную втулку, обеспечивающую отсутствие поворота торцевого сечения, но не запрещающую перемещение, перпендикулярное к оси стойки.

В стойках 3 и 7 на их верхний конец наложена линейная связь (каток), обеспечивающая отсутствие смещения конца в боковом направлении. На верхний конец стоек 4 и 8 одновременно наложены угловая и линейная связи, т. е. концы помещены в неподвижную втулку.

Необходимо отметить, что в стойках 1, 2, 3 и 4 при  $b=0$  имеет место заделка нижнего конца (две расположенные рядом шарнирные опоры обеспечивают отсутствие углового перемещения).

3. В табл. 6 [10] приведены значения коэффициента устойчивости  $\eta$  для трехпролетной стойки с шарнирно опертыми концами (фиг. 5). Коэффициенты  $\eta$  даны в зависимости от положения промежуточных опор. Наибольшее значение критической силы имеет место при равенстве длин всех трех пролетов:

$$P_{кр} = 9\pi^2 \frac{EJ}{l^2} = 88,83 \frac{EJ}{l^2}.$$



Фиг. 5.

Таблица 5

Значения коэффициентов  $\eta$  и  $\mu$  для стоек с промежуточной опорой и нижним заделанным концом

№ стойки (по фиг. 4)	$\frac{b}{l}$											
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
5	$\eta$	2,467	2,883	3,414	4,105	5,021	6,260	7,990	10,39	13,52	17,24	20,19
	$\mu$	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,26	1,11	0,975	0,852	0,757	0,699
6	$\eta$	9,870	11,53	13,65	16,37	19,90	24,42	29,82	35,10	38,41	39,40	39,48
	$\mu$	1,00	0,925	0,850	0,776	0,704	0,636	0,575	0,530	0,507	0,501	0,500
7	$\eta$	20,19	23,63	28,09	33,96	41,68	51,12	58,84	58,92	51,97	45,27	39,48
	$\mu$	0,699	0,646	0,593	0,539	0,487	0,439	0,410	0,412	0,436	0,467	0,500
8	$\eta$	39,48	46,13	54,48	64,56	75,22	80,76	75,22	64,56	54,45	46,13	39,48
	$\mu$	0,500	0,463	0,426	0,391	0,362	0,350	0,362	0,391	0,426	0,463	0,500

Таблица 6

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  для трехпролетной стойки с шарнирно опертыми концами (фиг. 5)

$\frac{z_1}{l}$	$\frac{z_1}{l}$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	20,19	23,63	28,09	33,95	41,68	51,12	58,83	58,16	51,97	45,28	39,48
0,1	23,63	24,92	29,46	35,61	43,98	54,91	65,92	67,77	60,68	52,41	45,28
0,2	28,09	29,46	31,54	37,91	46,89	59,23	73,51	78,75	70,90	60,68	51,97
0,3	33,95	35,61	37,91	41,20	50,75	64,42	81,27	87,51	78,75	67,77	58,16
0,4	41,68	43,98	46,89	50,75	56,07	71,15	85,60	81,27	73,51	65,92	58,83
0,5	51,12	54,91	59,23	64,42	71,15	80,75	71,15	64,42	59,23	54,91	51,12
0,6	58,83	65,92	73,51	81,27	85,60	71,15	56,07	50,75	46,89	43,98	41,68
0,7	58,16	67,77	78,75	87,51	81,27	64,42	50,75	41,20	37,91	35,61	33,95
0,8	51,97	60,68	70,90	78,75	73,51	59,23	46,89	37,91	31,54	29,46	28,09
0,9	45,28	52,41	60,68	67,77	65,92	54,91	43,98	35,61	29,46	24,92	23,63
1,0	39,48	45,28	51,97	58,16	58,83	51,12	41,68	33,95	28,09	23,63	20,19

При составлении табл. 4—6 предполагалось, что все связи, наложенные на стойку, абсолютно жесткие.

В действительности крепления концов стержня и его опертых промежуточных сечений под действием реактивных сил

и моментов в той или иной степени способны деформироваться. При достаточно большой величине податливости связей это обстоятельство существенным образом снижает величину критического значения нагрузки [5], [6], [9].



Интерполируя по данным табл. 7, имеем

$$\eta = 1,178 - (1,178 - 0,7462) \frac{2}{5} = 1,005,$$

и критическая сила в плоскости  $xz$

$$P_y = 1,005 \frac{EJ_z}{l^2} = 16,1 \frac{Ec^4}{l^2}.$$

Сравнение найденных критических сил показывает, что в рассматриваемом случае  $P_y < P_x$ , и, следовательно, практический интерес представляет критическая сила

$$P_{кр} = P_y = 16,1 \frac{Ec^4}{l^2}.$$

Второй вариант:  $\frac{b}{l} = 0,6$ .

При изгибе относительно оси  $x$  коэффициент устойчивости  $\eta = 2,235$  и критическая сила

$$P_x = 2,235 \frac{EJ_z}{l^2} = 20,1 \frac{Ec^4}{l^2}.$$

При изгибе относительно оси  $y$  коэффициент устойчивости

$$\eta = 1,531 - (1,531 - 1,052) \frac{2}{5} = 1,339$$

и критическая сила

$$P_y = 1,339 \frac{EJ_z}{l^2} = 21,4 \frac{Ec^4}{l^2}.$$

Таким образом, во втором варианте примера  $P_x < P_y$  и фактической критической силой будет

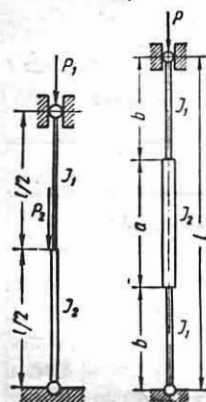
$$P_{кр} = P_x = 20,1 \frac{Ec^4}{l^2}.$$

Существенно отметить, что полученные результаты справедливы при критических напряжениях  $\sigma_{кр}$ , не превышающих предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$  материала стойки (так, например, для стали Ст. 3 предел пропорциональности  $\sigma_{пц} = 1900 \text{ кг/см}^2$ ).

2. Для двухступенчатой стойки с шарнирно опертыми концами (фиг. 8), нагруженной продольными силами  $P_1$  и  $P_2$ , критическое значение нагрузки

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \eta \frac{EJ_2}{l^2}. \quad (12)$$

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  сведены в табл. 8.



Фиг. 8.

Фиг. 9.

3. Для симметричной трехступенчатой стойки с шарнирно опертыми концами (фиг. 9) критическое значение нагрузки определяется формулой (11) и значения коэффициента устойчивости  $\eta$  сведены в табл. 9.

Таблица 8

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  в формуле (12) для двухступенчатой стойки с шарнирно опертыми концами по фиг. 8

$\frac{J_2}{J_1}$	$\frac{P_1 + P_2}{P_1}$				
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
1,00	9,87	10,9	11,9	12,6	13,0
1,25	8,79	9,77	10,5	11,2	11,8
1,50	7,87	8,79	9,49	10,1	10,7
1,75	7,09	8,01	8,62	9,13	9,77
2,00	6,42	7,33	7,87	8,46	8,40

Таблица 9

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  в формуле (11) для симметричной трехступенчатой стойки с шарнирно опертыми концами по фиг. 9

$\frac{J_1}{J_2}$	$\frac{a}{l}$			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,153	0,270	0,598	2,257
0,10	1,467	2,401	4,498	8,590
0,20	2,796	4,222	6,694	9,330
0,40	5,089	6,680	8,512	9,675
0,60	6,978	8,187	9,240	9,780
0,80	8,550	9,177	9,632	9,840

Стойки с непрерывным изменением поперечного сечения. Здесь дифференциальное уравнение упругой линии представляет собой уравнение с переменными коэффициентами. Только в отдельных случаях, например для конических стоек, эти уравнения интегрируются в элементарных функциях. Систематическое исследование устойчивости разнообразных стоек с непрерывным изменением сечения принадлежит А. Н. Диннику [5] — [7].

Критическая сила для симметричной трехступенчатой стойки (фиг. 10) с шарнирно опертыми концами может быть выражена формулой (11). Средняя часть стойки длиной  $a$  имеет постоянное сечение, а крайние участки — переменное сечение так, что момент инерции  $J$  изменяется по длине крайних участков по степенному закону (фиг. 11. а):

$$J = J_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^n = J_2 \left(\frac{z}{z_2}\right)^n. \quad (13)$$

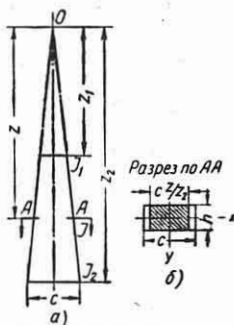
Значения коэффициента  $\eta$  для случаев  $n = 1, 2, 3$  и  $4$  сведены в табл. 10 [5] — [7].



Показатели  $n=1$  и  $n=3$  соответствуют тем случаям, когда крайние участки стойки имеют прямоугольное сечение постоянной толщины  $h$  и ширину,



Фиг. 10.



Фиг. 11.

меняющуюся по линейному закону  $c \frac{z}{z_2}$  (фиг. 11, б).

Если толщина  $h$  не превышает ширины  $c \frac{z_1}{z_2}$  наименьшего сечения ( $z = z_1$ ), то для всех сечений минимальным моментом инерции является момент инерции относительно оси  $x$ .

$$J_{\min} = J_x = \frac{1}{12} \left( c \frac{z}{z_2} \right) h^3 = \frac{ch^3}{12} \cdot \frac{z}{z_2} = J_2 \frac{z}{z_2},$$

показатель  $n=1$  и критическая сила

$$P_{кр} = P_x = \eta \frac{E}{l^2} \cdot \frac{ch^3}{12}. \quad (14)$$

Если же толщина стойки  $h$  больше ширины  $c$  наибольшего сечения ( $z = z_2$ ), то для всех сечений минимальным моментом инерции является момент инерции относительно оси  $y$

$$J_{\min} = J_y = \frac{1}{12} h \left( c \frac{z}{z_2} \right)^3 = \frac{hc^3}{12} \left( \frac{z}{z_2} \right)^3 = J_2 \left( \frac{z}{z_2} \right)^3,$$

показатель  $n=3$  и критическая сила

$$P_{кр} = P_y = \eta \frac{E}{l^2} \cdot \frac{hc^3}{12}. \quad (15)$$

Таблица 10

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  в формуле (11) для четырех случаев симметричной трехступенчатой стойки с непрерывным изменением сечения крайних участков и шарнирно опертыми концами (фиг. 10)

$\frac{J_1}{J_2}$	$n$	Величина отношения $\frac{a}{l}$				
		0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,1	1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82
	2	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79
	3	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77
	4	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77
0,2	1	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82
	2	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81
	3	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81
	4	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80
0,4	1	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84
	2	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84
	3	7,52	8,38	9,12	9,62	9,84
	4	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84
0,6	1	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85
	2	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85
	3	8,50	9,02	9,46	9,74	9,85
	4	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85
0,8	1	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86
	2	9,24	9,50	9,69	9,82	9,86
	3	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86
	4	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86

Для промежуточного случая, когда толщина  $h$  заключена в интервале

$$c \frac{z_1}{z_2} < h < c,$$

необходимо вычисление двух критических сил:  $P_x$  ( $n=1$ ) и  $P_y$  ( $n=3$ ). Практический интерес представляет меньшая из двух найденных сил.

Показатель  $n=2$  с некоторым приближением имеет место в том случае, когда крайние участки представляют собой пирамидальные решетчатые стойки, напоминающие по форме укосуину подъемного крана. Пусть средняя часть стойки, имеющая постоянное сечение, выполнена из четырех уголков, соединенных достаточно прочной решеткой, а обе крайние части пирамидальной формы состоят из тех же уголков, тогда площадь поперечного сечения стойки остается постоянной, момент инерции

приблизительно пропорционален квадрату расстояния центров тяжести уголков от осей симметрии поперечного сечения и изменяется по длине крайних участков по формуле (13) при  $n=2$ . Существенно отметить, что в случае решетчатых стоек деформация решеток несколько снижает критическое значение нагрузки по сравнению с результатами, даваемыми формулой (11) и табл. 10 (см. раздел „Составные решетчатые стойки“).

Показатель  $n=4$  соответствует случаю, когда крайние участки стойки являются коническими или пирамидальными сплошного сечения.

*Пример [6].* Определить запас устойчивости шатуна тихоходной паровой машины. Диаметр цилиндра  $D=107$  см; давление пара  $p=7$  атм; длина шатуна  $l=554$  см; к обоим концам шатуна суживается по конусу — наименьший диаметр  $d_1=18$  см и наибольший  $d_2=22$  см. Соответствующие моменты инерции  $J_1=5150$  см<sup>4</sup> и  $J_2=11500$  см<sup>4</sup>, т. е. их отношение  $\frac{J_1}{J_2}=0,45$ .

Интерполируя данные табл. 10 (для  $n=4$  и  $\frac{\alpha}{l}=0$ ), находим соответствующее значение коэффициента устойчивости  $\eta=7,75$  и, следовательно, критическое значение нагрузки

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ_2}{l^2} \approx 582 \text{ т.}$$

Фактическая нагрузка на шатун

$$P = p \frac{\pi D^2}{4} \approx 65 \text{ т}$$

и запас устойчивости

$$n_y = \frac{582}{65} \approx 6,5.$$

Критическое напряжение в самом узком месте шатуна равно

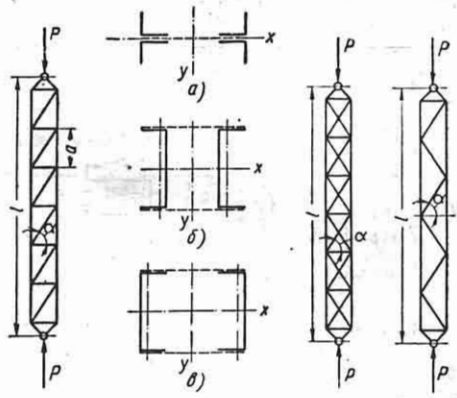
$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = 2280 \text{ кг/см}^2$$

и, таким образом, не превышает предела пропорциональности конструкционной стали.

### Составные решетчатые стойки

Решетчатые стойки образованы из двух ветвей (поясов), соединенных между собой решеткой из диагоналей и распорок (фиг. 12). Некоторые варианты поперечных сечений изображены на фиг. 13. Для таких стоек величина критической силы, соответствующая потере устойчивости в плоскости соединительной решетки, зависит не только от момента инерции поперечного сечения стержня, но также от размеров и системы ре-

шетки. Существенно, что эта критическая сила меньше, чем вычисленная по формуле Эйлера. Если длина отдельной панели  $a = \frac{l}{n}$  достаточно мала по сравнению с длиной стойки  $l$  (число панелей  $n$  не менее 4—5), то в случае шар-



Фиг. 12.

Фиг. 13.

Фиг. 14.

Фиг. 15.

нирного крепления концов стойки критическое значение нагрузки

$$P_{кр} = P_y = \psi \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad (16)$$

где коэффициент  $\psi < 1$  и определяется из выражения

$$\frac{1}{\psi} = 1 + \frac{\pi^2 J_y}{l^2} \times \left[ \frac{1}{F_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{1}{F_2 \operatorname{tg} \alpha} \right]. \quad (17)$$

Здесь  $J_y$  — момент инерции поперечного сечения стойки (четыре уголка или два швеллера) относительно оси  $y$ , перпендикулярной к плоскости решетки;  $F_1$  и  $F_2$  — соответственно площадь поперечного сечения одной диагонали и одной распорки (фиг. 13, а) или двух диагоналей и двух распорок (фиг. 13, б и в);  $\alpha$  — угол между распоркой и диагональю (фиг. 12).

При двойной системе диагоналей (фиг. 14)  $F_1$  — соответственно площадь сечения двух (фиг. 13, а) или четырех (фиг. 13, б и в) диагоналей.

При отсутствии распорок и зигзагообразном расположении диагоналей (фиг. 15)

$$\frac{1}{\psi} = 1 + \frac{\pi^2 J_y}{l^2} \cdot \frac{1}{F_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha}. \quad (18)$$

Величина критической силы соответствующей потери устойчивости в плоскости, перпендикулярной к плоскости соединительной решетки, определяется обычным образом:

$$P_{кр} = P_x = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2}, \quad (19)$$

где  $J_x$  — момент инерции поперечного сечения стойки (фиг. 13) относительно оси  $x$ .

### Эмпирические формулы для определения критической силы за пределами пропорциональности материала стоек

Примем следующие обозначения:

$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$  — радиус инерции сечения стойки;  $\mu l$  — приведенная длина стойки;  $\lambda = \frac{\mu l}{i}$  — гибкость стойки.

Критическое напряжение по Эйлеру

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (20)$$

Обозначим через  $\lambda_1$  гибкость стоек, для которых критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  равно пределу пропорциональности  $\sigma_{пц}$ :

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (21)$$

Для стоек, у которых гибкость  $\lambda > \lambda_1$ , критическое напряжение  $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$  и экспериментально найденные критические силы хорошо совпадают с вычисленными по формуле Эйлера.

Для стоек, у которых гибкость  $\lambda < \lambda_1$ , критическое напряжение  $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$  и эксперименты дают для критической силы значения значительно меньшие, чем формула Эйлера.

Обработка опытных данных показывает, что для стали и ряда других материалов критическая сила за пределами пропорциональности линейно зависит от гибкости:

$$P_{кр} = F(a - b\lambda), \quad (22)$$

где  $a$  и  $b$  — числовые коэффициенты, имеющие размерность напряжения;  $F$  — площадь сечения стойки.

Обозначим через  $\lambda_2$  гибкость стоек, для которых критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  равно пределу текучести  $\sigma_T$ :

$$\lambda_2 = \frac{1}{b}(a - \sigma_T).$$

Эмпирическая формула (22) используется для определения критической силы в случае стоек, гибкость которых заключена в интервале от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ .

Значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и значения гибкостей  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  для некоторых материалов даны в табл. 11.

Для конструкционных и легированных сталей при отсутствии непосредственных данных о величине коэффициентов  $a$  и  $b$  можно рекомендовать вычисление этих коэффициентов по формулам

$$a = \frac{\sigma_T \lambda_1 - \sigma_{пц} \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad b = \frac{\sigma_T - \sigma_{пц}}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad (23)$$

При этом гибкость  $\lambda_1$  определяется по формуле (21), а гибкость  $\lambda_2$  для качественных сталей назначается порядка 15—25.

Для стальных стоек, у которых гибкость  $\lambda < \lambda_2$ , предельное (критическое) напряжение принимают постоянным и равным пределу текучести  $\sigma_T$ . Другими словами, для достаточно коротких и толстых стоек расчет на устойчивость заменяется расчетом на прочность.

Таблица 11

Значения коэффициентов, входящих в эмпирическую формулу (22), для критической силы и пределы применимости этой формулы

Материал	$a$	$b$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
Углеродистая сталь [11]; $\sigma_g > 3800$ ; $\sigma_T = 2400$ (сталь Ст. 3)	3 100	11,4	105	61,4
Углеродистая сталь [11]; $\sigma_g > 4800$ ; $\sigma_T = 3120$ . . . . .	4 690	26,175	100	60
Кремнистая сталь [11]; $\sigma_g = 5200$ ; $\sigma_T = 3600$ . . . . .	5 890	38,175	100	60
Хромомолибденовая сталь [8] . . . . .	10 000	54	55	—
Дуралюмин [8] . . . . .	3 800	21,85	50	—
Дерево (сосна) [8] . . . . .	400	2,03	59	—

Обработка опытных данных для чугуна, в отличие от стали, дает квадратичную зависимость критической силы от гибкости

$$P_{кр} = F(7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2), \quad (24)$$

и значение верхней предельной гибкости  $\lambda_1 = 80$ . Нижний предел применимости формулы (24), т. е. значение гибкости  $\lambda_2$ , определяется пределом прочности чугуна на сжатие.

Эмпирические формулы типа (22) и (24) были предложены Ф. С. Ясинским.

Для расчета стержней на устойчивость наряду с формулами Эйлера и Ясинского используются также графики зависимости критического напряжения от гибкости (см., например, [16]).

Все сказанное относительно определения критического значения нагрузки за пределами пропорциональности относится к стойкам постоянного сечения, нагруженным торцевыми сжимающими силами. Для вычисления гибкости  $\lambda =$

$\frac{\mu l}{i}$ , входящей в формулы Ясинского, можно использовать данные выше таблицы значений коэффициента приведенной длины  $\mu$  или коэффициента устойчивости  $\eta = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2$ .

### Расчет на устойчивость по коэффициенту понижения $\varphi$ допускаемого напряжения на сжатие $[\sigma]_{сж}$

В строительной практике при проектировании металлических и деревянных сооружений узаконен расчет на устойчивость по коэффициенту понижения  $\varphi$  допускаемого напряжения на сжатие  $[\sigma]_{сж}$ . Здесь условие устойчивости сжатого стержня, по аналогии с условием прочности, представляется в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{уст}. \quad (25)$$

где допускаемое напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_{уст} = \varphi [\sigma]_{сж}. \quad (26)$$

Коэффициент понижения  $\varphi$  зависит от материала и гибкости стойки. Эта зависимость задается в табличной форме

(см. табл. 12) и охватывает для сталей интервал  $0 \leq \lambda \leq 200$ . Значения коэффициента  $\varphi$  время от времени пересматриваются и подвергаются изменениям.

Таблица 12

Значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от гибкости  $\lambda$  для различных материалов

Гибкость $\lambda$	Сталь марок Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4	Сталь Ст. 5	СПК *	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

\* Сталь повышенного качества с пределом текучести  $\sigma_T = 3200$ .

### Примеры расчетов на устойчивость сжатых стоек

**Пример 1.** Для изображенных на фиг. 16 двух стоек требуется:

- 1) определить запас устойчивости;
- 2) произвести поверочный расчет на устойчивость по коэффициенту понижения  $\varphi$  допускаемого напряжения на сжатие.

Нагрузка  $P = 40$  т. Сечение стойки круглое, диаметром  $d = 10$  см. Длина  $l = 3$  м. Материал сталь Ст. 3.

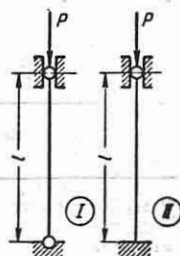
Основное допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma]_{сж} = 1400$  кг/см<sup>2</sup>.

Решение.  
Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2.$$

Момент инерции сечения

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 491 \text{ см}^4.$$



Фиг. 16.

Радиус инерции сечения

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{a}{4} = 2,5 \text{ см.}$$

### 1. Определение запаса устойчивости

**Стойка I** — шарнирное крепление концов.  
Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 300}{2,5} = 120 > 105.$$

Следовательно, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой при напряжении, меньшем предела пропорциональности, и для определения критической силы справедлива теоретическая формула Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 491}{300^2} = 113 \text{ т.}$$

Запас устойчивости для стойки

$$n_v = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{113}{40} = 2,8,$$

т. е. укладывается в рекомендуемый интервал  $1,5 \leq n_v \leq 3,0$  для стальных стоек.

**Стойка II** — нижний конец заделан, верхний шарнирно оперт.

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,5} = 84 < 105.$$

Следовательно, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой при напряжении, большем предела пропорциональности, и определение критической силы производится по эмпирической формуле Ясинского

$$P_{кр} = F(3100 - 11,4\lambda) = 78,5(3100 - 11,4 \cdot 84) = 168 \text{ т.}$$

Запас устойчивости

$$n_u = \frac{168}{40} = 4,2,$$

т. е. несколько превышает рекомендуемые значения для стальных стоек.

Заметим, что в случае неправильного применения формулы Эйлера, когда гибкость стойки превышает 105 (для стали Ст. 3), получаемая величина критической силы всегда больше действительного ее значения. Так, в нашем случае

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 491}{210^2} = 231 \text{ т} > 168 \text{ т.}$$

### 2. Поверочный расчет на устойчивости по коэффициенту $\varphi$

В отличие от предыдущего, здесь при любых значениях гибкости схема расчета остается одной и той же.

**Стойка I** — гибкость  $\lambda = 120$ .

По табл. 12 для стали Ст. 3 при гибкости  $\lambda = 120$  коэффициент понижения  $\varphi = 0,45$ .

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_{уст} = \varphi [\sigma]_{сж} = 0,45 \cdot 1400 = 630 \text{ кг/см}^2.$$

Величина фактического напряжения

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{40 \cdot 000}{78,5} = 510 < 630,$$

т. е. устойчивость стойки обеспечена.

**Стойка II** — гибкость  $\lambda = 84$ .

Интерполируя по данным табл. 12, находим, что при гибкости  $\lambda = 84$  коэффициент понижения

$$\varphi = 0,75 - \frac{84 - 80}{90 - 80} (0,75 - 0,69) = 0,75 - 0,4 \cdot 0,06 = 0,726.$$

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_{уст} = 0,726 \cdot 1400 = 1020 \text{ кг/см}^2.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = 510 < 1020,$$

т. е. устойчивость стойки обеспечена.

Из результатов расчета по табл. 12 следует, что нагрузка на рассматриваемые стойки может быть повышена до следующих допускаемых значений:

для стойки I

$$P_1 = F [\sigma]_{уст} = 78,5 \cdot 630 = 49,5 \text{ т.}$$

для стойки II

$$P_2 = F [\sigma]_{уст} = 78,5 \cdot 1020 = 80,1 \text{ т.}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае расчет по  $\varphi$  исходит из следующих допускаемых запасов устойчивости:

для стойки I

$$n_{u1} = \frac{P_{кр}}{P_1} = \frac{113}{49,5} = 2,08;$$

для стойки II

$$n_{u2} = \frac{P_{кр}}{P_2} = \frac{168}{80,1} = 2,10.$$

**Пример 2.** Для стойки с одним заделанным и другим свободным концами (консольная стойка) требуется подобрать, используя таблицу коэффициентов  $\varphi$ , номер двутаврового сечения и определить запас устойчивости.

Нагрузка на стойку  $P = 50 \text{ т}$ . Длина стойки  $l = 2 \text{ м}$ . Допускаемое напряжение на сжатие для материала стойки (сталь Ст. 3)  $[\sigma]_{сж} = 1400 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение**

1. В начале расчета произвольно задаемся величиной коэффициента  $\varphi$ . Заметим, что этот произвол в выборе начального значения  $\varphi$  не отражается на окончательном результате расчета, а только увеличивает или уменьшает количество необходимых вычислений. Пусть  $\varphi = 0,5$ , тогда допускаемое напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_{уст} = \varphi [\sigma]_{сж} = 0,5 \cdot 1400 = 700 \text{ кг/см}^2$$

и необходимая площадь сечения стойки

$$F = \frac{P}{[\sigma]_{уст}} = \frac{50 \cdot 000}{700} = 71,4 \text{ см}^2.$$

По ОСТ 10016-39 берем двутавр № 30с, имеющий площадь  $F = 73,4 \text{ см}^2$  и наименьший радиус инерции относительно центральной оси параллельной стенки двутавра  $i_y = 2,46 \text{ см}$ , тогда гибкость стойки будет

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 200}{2,46} = 163.$$

По табл. 12 для стали Ст. 3 при  $\lambda = 160$   $\varphi = 0,29$  и при  $\lambda = 170$   $\varphi = 0,26$ . Интерполируя, имеем, что при гибкости  $\lambda = 163$  коэффициент понижения

$$\varphi = 0,29 - \frac{163-160}{170-160} (0,29-0,26) = 0,281,$$

и, следовательно, допускаемое напряжение для стойки из двутавра № 30с

$$[\sigma]_{уст} = 0,281 \cdot 1400 = 393 \text{ кг/см}^2.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{50\,000}{73,4} = 681 > 393 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. необходим перерасчет.

2. В основу перерасчета кладем следующее значение коэффициента понижения:

$$\varphi = \frac{1}{2} [0,5 + 0,281] = 0,391,$$

и, следовательно,

$$[\sigma]_{уст} = 547 \text{ кг/см}^2 \text{ и } F = 91,4 \text{ см}^2.$$

По ОСТ 10016-39 берем двутавр № 40б с  $F = 94,1 \text{ см}^2$  и  $i_y = 2,71 \text{ см}$ , тогда гибкость стойки

$$\lambda = \frac{2 \cdot 200}{2,71} = 148.$$

Интерполируя по табл. 12, находим, что для гибкости  $\lambda = 148$  коэффициент понижения

$$\varphi = 0,36 - \frac{148-140}{150-140} (0,36-0,32) = 0,328,$$

и, следовательно, допускаемое напряжение для стойки из двутавра № 40б

$$[\sigma]_{уст} = 0,328 \cdot 1400 = 459 \text{ кг/см}^2.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{50\,000}{94,1} = 531 > 459,$$

т. е. необходим вторичный перерасчет.

3. Берем коэффициент понижения

$$\varphi = \frac{1}{2} [0,391 + 0,328] = 0,360,$$

и, следовательно,

$$[\sigma]_{уст} = 504 \text{ кг/см}^2 \text{ и } F = 99,4 \text{ см}^2.$$

По ОСТ 10016-39 берем двутавр № 45а с  $F = 102 \text{ см}^2$  и  $i_y = 2,89 \text{ см}$ . Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{2 \cdot 200}{2,89} = 138;$$

интерполируя по табл. 12, имеем

$$\varphi = 0,40 - \frac{138-130}{140-130} (0,40-0,36) = 0,368$$

и допускаемое напряжение

$$[\sigma]_{уст} = 0,368 \cdot 1400 = 515 \text{ кг/см}^2.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{50\,000}{102} = 490 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. меньше допускаемого напряжения на 5%. Это расхождение приемлемо, и стойка может быть выполнена из двутавра № 45 а.

4. Определение запаса устойчивости. Гибкость стойки

$$\lambda = 138 > 105.$$

Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu l)^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 855}{400^2} = 111 \text{ т}$$

и запас устойчивости

$$n_y = \frac{111}{50} = 2,22.$$

**Пример 3.** Расчет на устойчивость паровозного спарника. Паровозный спарник прямоугольного сечения ( $h = 8 \text{ см}$ ,  $b = 3,8 \text{ см}$ ) расположен большей стороной сечения вертикально и сжимается осевой силой  $P = 20 \text{ т}$ . Длина между центрами колес (длина спарника)  $l = 2,5 \text{ м}$ . Материал спарника — сталь Ст. 5.

**Решение.** Крепление спарника таково, что при изгибе в вертикальной плоскости (плоскость движения) его концы можно рассматривать опертными шарнирно, а при изгибе в горизонтальной плоскости — защемленными.

Главные центральные моменты инерции перпендикулярного сечения спарника

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = 162 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = 36,6 \text{ см}^4$$

и соответствующие радиусы инерции ( $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ )

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = 2,31 \text{ см}; \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 1,10 \text{ см}.$$

Гибкости спарника:

при изгибе в вертикальной плоскости ( $\mu = 1$ )

$$\lambda_x = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 250}{2,31} = 108;$$

при изгибе в горизонтальной плоскости ( $\mu = 0,5$ )

$$\lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0,5 \cdot 250}{1,10} = 111.$$

Обе гибкости превышают значение  $\lambda = 100$  (см. табл. 11), и, следовательно, определение критических сил производится по формуле Эйлера.

Критические значения нагрузки:

потеря устойчивости в вертикальной плоскости

$$P_x = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 162}{(1 \cdot 250)^2} = 53\,900 \text{ кг};$$

потеря устойчивости в горизонтальной плоскости

$$P_y = \frac{\pi^2 EJ_y}{(\mu l)^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 36,6}{(0,5 \cdot 250)^2} = 48\,400 \text{ кг}.$$

Сравнение найденных критических сил показывает, что более опасной ( $P_y < P_x$ ) является потеря устойчивости спарника в горизонтальной плоскости.

Соответствующее критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{P_y}{F} = \frac{48\,400}{8 \cdot 3,8} = 1590 \text{ кг/см}^2,$$

как и следовало ожидать ( $\lambda_y > 100$ ), меньше предела пропорциональности для стали Ст. 5.

Запас устойчивости спарника в горизонтальной плоскости

$$n_y = \frac{P_y}{P} = \frac{48,4}{20} = 2,42,$$

т. е. укладывается в рекомендуемые пределы (для стали от 1,5 до 3,0).

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ЕСТЕСТВЕННО ЗАВИТЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ [10]

Естественно завитым называется стержень, образованный движением плоской фигуры (поперечное сечение стержня), вращающейся с некоторой угловой скоростью, по мере того как центр тяжести этой фигуры движется вдоль оси стержня. При нагружении таких прямолинейных стержней осевыми сжимающими силами, что имеет место, например, в спиральных сверлах, возникает необходимость их расчета на устойчивость.

Естественная завитость стержня значительно повышает критическое значение сжимающей силы. Действительно, при наличии естественной завитости упругая линия стержня после потери устойчивости представляет собой пространственную кривую и критическая сила определяется двумя главными центральными моментами инерции сечения стержня.

Существенно отметить, что критическая сила резко возрастает при изменении полного угла естественной завитости стержня только в интервале от 0 до  $2\pi$  и остается примерно постоянной при дальнейшем увеличении угла завитости.

Наиболее просто критическая сила выражается для стержня с шарнирно опертными концами в предельном случае весьма большого значения полного угла завитости (практически при угле завитости, большем  $2\pi$ ):

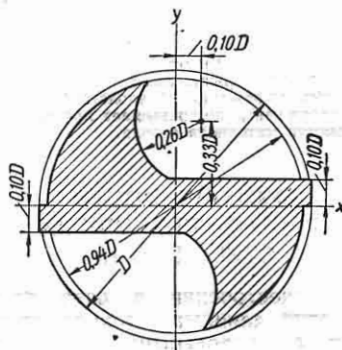
$$\begin{aligned} P_{кр} &= \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{E}{\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{J_x} + \frac{1}{J_y} \right]} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{J_y}{J_x}} \cdot \frac{\pi^2 E J_y}{l^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $J_y$  — наименьший и  $J_x$  — наибольший из главных центральных моментов инерции сечения стержня.

*Пример.* Расчет на устойчивость спиральных сверл. Спиральное сверло представляет собой естественно завитой стержень значительной длины по сравнению с размерами его поперечного сечения.

Так, для цилиндрических спиральных сверл (ГОСТ 888-41) отношение длины рабочей части к их диаметру изменяется от 8,5 до 26. Чем меньше диаметр сверла, тем относительно длиннее выполняется его рабочая часть. Поэтому расчет на устойчивость наиболее интересен для сверл малого диаметра.

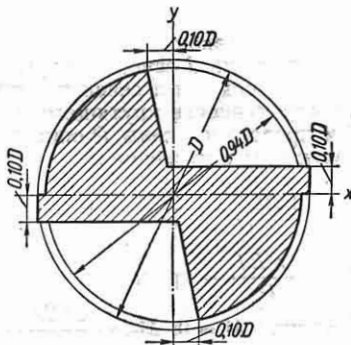
Сечение сверла изображено на фиг. 17. Сверла малого диаметра, как правило, имеют усиленное



Фиг. 17.

сечение (фиг. 18). Оба сечения несколько схематизированы для облегчения вычисления их моментов инерции.

Направим центральную ось  $x$  параллельно главной режущей кромке сверла. Главные центральные оси усиленного сечения повернуты относительно



Фиг. 18.

осей  $x$  и  $y$  по часовой стрелке на угол  $31^\circ 40'$ . Величины главных центральных моментов инерции:  $J_{\max} = 0,0358D^4$  и  $J_{\min} = 0,0062D^4$ .

Площадь усиленного сечения  $F = 0,40D^2$ . Для обыкновенных (не усиленных) сверл главные центральные моменты инерции поперечного сечения и его площадь следующие:  $J_{\max} = 0,0338D^4$ ;  $J_{\min} = 0,0039D^4$ ;  $F = 0,38D^2$ .

Затруднительность оценки степени защемления сверла в шпинделе делает здесь наиболее естественным использование, схемы стержня с

шарнирно опертыми концами. Таким образом, для усиленных сверл

$$P_{кр} = \frac{2}{1 + \frac{0,0062}{0,0358}} \cdot \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = 1,71 \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

и для обыкновенных (не усиленных) сверл

$$P_{кр} = \frac{2}{1 + \frac{0,0039}{0,0338}} \cdot \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = 1,79 \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

Таким образом, найденное значение критической силы для сверла значительно превышает критическую силу, вычисляемую по формуле Эйлера для незавитого стержня. Заметим, что применение полученных выражений предполагает, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала сверла.

### УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТО-СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ [10]

В машиностроении в ряде случаев достаточно длинные и тонкие стержни наряду с продольными сжимающими силами нагружаются также и скручивающими моментами. Примерами здесь могут служить гребные валы различных судов, борштанги глубокого сверления и тому подобные детали. Существенно, что наличие скручивающих моментов уменьшает критическое значение продольных сил.

Для стержня с шарнирно опертыми концами и одинаковыми главными моментами инерции  $J$  сечения (круг, квадрат и тому подобные сечения) критическая совокупность крутящего момента  $M$  и продольной силы  $P$  определяется следующим выражением:

$$\left(\frac{M}{M_0}\right)^2 + \frac{P}{P_0} = 1, \quad (28)$$

где  $P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  — критическое значение

силы  $P$  при  $M = 0$ ;  $M_0 = \frac{2\pi EJ}{l}$  — критическое значение момента  $M$  при  $P = 0$ .

Пусть, например,  $P = \frac{3}{4} P_0$ , т. е. фактически приложенная осевая сила составляет  $\frac{3}{4}$  эйлеровой силы, тогда стержень достигает критического состояния при крутящем моменте  $M = \frac{1}{2} M_0$ . Таким

образом,  $P = \frac{3}{4} P_0$  и  $M = \frac{1}{2} M_0$  при их совместном действии представляют

собой критическую совокупность сжимающей осевой силы и крутящего момента.

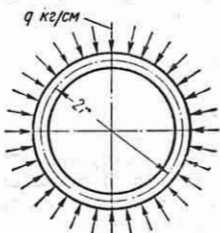
Выражение (28) справедливо только в пределах пропорциональности материала стержня. Поэтому после определения критической совокупности силы  $P$  и момента  $M$  необходимо вычислить наибольшую величину эквивалентного напряжения по той или иной из гипотез прочности и сравнить ее с пределом пропорциональности.

Примером применения теории может служить расчет устойчивости борштанги, т. е. длинного стержня трубчатого сечения, используемого для удлинения сверла при сверлении глубоких отверстий. Практическая необходимость исследования обусловлена тем, что потеря устойчивости прямолинейной формы борштанги может служить одной из причин увода сверла от геометрической оси изделия.

### УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ\*

Обозначим радиус оси кольца через  $r$  и интенсивность распределенных радиальных сил через  $q$  кг/см (фиг. 19).

Ограничим рассмотрение случая, когда одна из главных центральных осей (ось  $x$ ) поперечного сечения расположена в плоскости кризиса кольца. Другая главная ось (ось  $y$ ) перпендикулярна плоскости кольца.



Фиг. 19.

Различают две формы потери устойчивости кругового кольца: переход оси кольца в некоторую плоскую кривую и переход в пространственную кривую. Величина критического значения нагрузки существенно зависит от ее положения при искривлении кольца.

Выражения для критических значений интенсивности  $q_{кр}$  равномерно распределенных радиальных сил при различных вариантах изменения направления нагрузки сведены в табл. 13. Для рас-

\* Круговые кольца, нагруженные равномерно распределенными радиальными силами, направленными к центру кольца [10].



Таблица 13

Критические значения интенсивности  $q$  кг/см равномерно распределенной радиальной нагрузки на кольцо в зависимости от изменения направления нагрузки в процессе потери устойчивости круговой формы кольца

Форма потери устойчивости	Поведение нагрузки при искривлении кольца		
	Нагрузка нормальна к неискривленной оси кольца	Нагрузка нормальна к искривленной оси кольца	Нагрузка направлена к центру кольца
Плоская форма	$4,0 \frac{B_y}{r}$	$3,0 \frac{B_y}{r^2}$	$4,5 \frac{B_y}{r^2}$
Пространственная форма	$\frac{9}{4 + \frac{B_x}{C}} \cdot \frac{B_x}{r^2}$	$3,0 \frac{B_x}{r^2}$	$\frac{12}{4 + \frac{B_x}{C}} \cdot \frac{B_x}{r^2}$

Примечание.  $B_x = EJ_x$  — жесткость изгиба в плоскости, перпендикулярной к плоскости кольца;  $B_y = EJ_y$  — жесткость изгиба в плоскости кольца;  $C = GJ_k$  — жесткость кручения кольца, где  $J_k$  — геометрический фактор жесткости кручения.

чета на устойчивость используется меньшее из приведенных двух значений  $q_{кр}$  (при данном поведении нагрузки в процессе потери устойчивости).

Существенно отметить, что все приведенные в табл. 13 формулы справедливы только в пределах закона Гука, т. е. при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала кольца:

$$\sigma_{кр} = \frac{q_{кр} r}{F} \leq \sigma_{пц} \quad (29)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения кольца.

**Пример.** Определить критическое значение интенсивности нагрузки на стальное кольцо круглого сечения при условии, что в процессе потери устойчивости направление нагрузки остается без изменения (нагрузка нормальна к неискривленной оси кольца).

Для круглого сечения геометрический фактор  $J_k$  жесткости кручения  $C$  совпадает с полярным моментом инерции  $J_p$ . Таким образом, для круглого сечения диаметра  $d$  жесткость кручения

$$C = GJ_p = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi d^4}{32}$$

жесткости изгиба

$$B = B_x = B_y = E \frac{\pi d^4}{64}$$

и отношение

$$\frac{B}{C} = 1 + \mu = 1,23$$

(для стали).

По табл. 13 критическое значение нагрузки: для пространственной формы потери устойчивости

$$q_{кр} = \frac{9}{4 + \frac{B_x}{C}} \cdot \frac{B_x}{r^2} = 1,723 \frac{B_x}{r^2} = 0,08458 \frac{Ed^4}{r^2};$$

для плоской формы потери устойчивости

$$q_{кр} = 4 \frac{B_y}{r^2} = 0,1964 \frac{Ed^4}{r^2}.$$

Итак, если при искривлении оси кольца круглого сечения нагрузка остается нормальной к неискривленной оси кольца, то ее критическое значение, соответствующее пространственной форме потери устойчивости, значительно меньше нагрузки, при которой возникает плоская форма потери устойчивости. Таким образом, в рассматриваемом случае практический интерес представляет именно пространственная форма потери устойчивости.

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ И КРИВОЛИНЕЙНЫХ БАЛОК [10], [12]

При изгибе балки в одной из главных плоскостей в случае перемещений (прогибов) достаточно большой величины плоская форма изгиба перестает быть единственной формой равновесия, и может возникнуть новая изгибно-крутильная форма равновесия. Это явление перехода плоской формы изгиба в пространственную носит название опрокидывания. После опрокидывания балка, помимо первоначального изгиба в одной главной плоскости, скручивается и изгибается в другой главной плоскости.

В результате опрокидывания прочность балки резко снижается (аналогия с продольным изгибом).

Изучение опрокидывания практически наиболее интересно для сечений с резко различными главными моментами инерции (вытянутый прямоугольник, двутавр и т. п.), когда плоская форма изгиба соответствует плоскости наибольшей жесткости. С точки зрения прочности и жесткости подобного рода сечения для балок наиболее рациональны. Однако в этих случаях опрокидывание может возникнуть даже при весьма малых прогибах.

Детальное исследование основных случаев опрокидывания полос (балки вытянутого прямоугольного сечения) и двутавровых балок произведено в работах А. П. Коробова, А. Н. Динника и С. П. Тимошенко.

Общая теория опрокидывания прямолинейных балок из тонкостенных открытых профилей дана в книге В. З. Власова [3]. Опрокидывание криволинейных тонкостенных профилей рассмотрено В. З. Власовым в работе [12].

### Опрокидывание полос при чистом изгибе

Критическое значение момента  $M$ , при котором происходит опрокидывание полосы, следующее:

$$M_{кр} = \eta \frac{\sqrt{B_x C}}{l}, \quad (30)$$

где  $B_x = EJ_x = E \frac{hb^3}{12}$  — наименьшая жесткость изгиба;  $C = GJ_k = Gkbh^3$  — жесткость кручения полосы.

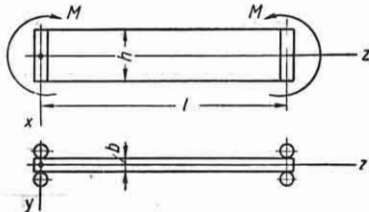
Коэффициент  $k$ , входящий в выражение для геометрического фактора  $J_k$  жесткости кручения, зависит от отношения большего размера сечения  $h$  к меньшему размеру  $b$  (см. раздел «Расчеты на кручение»). В предельном случае полосы весьма вытянутого сечения  $k = 1/3$ .

Коэффициент критического значения момента  $\eta$  зависит от характера крепления концов полосы.

Если концы полосы закреплены таким образом, что оба торцевых сечения могут свободно поворачиваться около своих главных центральных осей  $x$  и  $y$ , но не могут поворачиваться вокруг

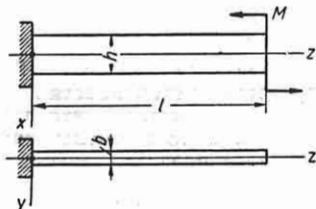
продольной оси  $z$  полосы (цилиндрические шарнирные опоры по фиг. 20), то коэффициент устойчивости  $\eta = \pi$ .

Критическое значение момента  $M$ , изгибающего консольную полосу



Фиг. 20.

(фиг. 21), существенно зависит от поведения нагрузки в процессе опрокидывания, т. е. от изменения положения момента при переходе полосы от одной формы к другой. Так, если при опрокидывании полосы вектор момента  $M$



Фиг. 21.

поворачивается вместе с торцевым сечением полосы вокруг неподвижной оси  $z$  и остается параллельным плоскости  $xu$  (следящее поведение момента), то коэффициент устойчивости  $\eta = \frac{1}{2} \pi$

Таким образом, консольная полоса при следящем поведении момента  $M$  совершенно аналогична половине полосы с цилиндрическими шарнирными опорами. Формула (30) для критического значения момента справедлива только при критическом напряжении, не превосходящем предела пропорциональности материала полосы:

$$\sigma_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_y} = \frac{6M_{кр}}{bh^2} \leq \sigma_{пн}. \quad (31)$$

*Пример.* Полоса нагружена двумя моментами  $M$ , приложенными к торцевым сечениям и изгибающими полосу в плоскости наибольшей жесткости (фиг. 20). По концам полосы расположены цилиндрические шарнирные опоры.

Размеры полосы:  $l = 2$  м;  $h = 10$  см;  $b = 1$  см. Материал — сталь Ст. 5. Допускаемое напряжение при расчете полосы на прочность было принято  $[\sigma] = 1200$  кг/см<sup>2</sup>.

Определить запас устойчивости полосы против опрокидывания.

Главные центральные моменты инерции сечения полосы:

$$J_x = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 1}{12} = 0,833 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 1000}{12} = 83,3 \text{ см}^4.$$

Наименьшая и наибольшая жесткости изгиба:

$$B_x = EJ_x = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,833 = 1,75 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2;$$

$$B_y = EJ_y = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 83,3 = 1,75 \cdot 10^8 \text{ кгсм}^2.$$

Модуль упругости второго рода

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2 \cdot 1,28} = 0,820 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Геометрический фактор жесткости кручения (при  $\frac{h}{b} = 10$  коэффициент  $k = 0,291$ )

$$J_k = khb^3 = 0,291 \cdot 10 \cdot 1 = 2,91 \text{ см}^4.$$

Жесткость кручения полосы

$$C = GJ_k = 0,820 \cdot 10^6 \cdot 2,91 = 2,39 \cdot 10^6 \text{ кгсм}^2.$$

Критическое значение изгибающих моментов

$$M_{кр} = \pi \sqrt{\frac{B_x C}{l}} = 3,14 \sqrt{\frac{1,75 \cdot 2,39 \cdot 10^6}{200}} = 3,21 \cdot 10^4 \text{ кгсм}$$

и соответствующее наибольшее напряжение (критическое напряжение)

$$\sigma_{кр} = \frac{6M_{кр}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 3,21 \cdot 10^4}{1 \cdot 100} = 1930 \text{ кг/см}^2.$$

Для стали Ст. 5 это напряжение не превышает предела пропорциональности и, следовательно, оправдано применение использованного выше выражения для критического значения момента.

Запас устойчивости полосы против опрокидывания

$$n_y = \frac{M_{кр}}{M} = \frac{\sigma_{кр}}{[\sigma]} = \frac{1930}{1200} = 1,61,$$

где  $M$  — фактическое значение изгибающих моментов, определяемое из расчета на прочность по величине допускаемого напряжения  $[\sigma]$ .

Рекомендуемые величины запасов устойчивости по опрокидыванию в основном те же, что и при расчетах на продольный изгиб.

### Опрокидывание полос при поперечном изгибе

Критическая сила может быть представлена формулой

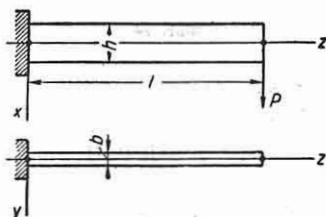
$$P_{кр} = \eta \sqrt{\frac{B_x C}{l^2}}, \quad (32)$$

где коэффициент устойчивости  $\eta$  зависит от расположения сил и от способа закрепления концов полосы; наименьшая жесткость изгиба  $B_x$  и жесткость

кручения  $C$  определяются так же, как и в разделе „Опрокидывание полосы при чистом изгибе“.

**Консольная полоса.** При нагружении консольной полосы сосредоточенной силой  $P$ , приложенной к центру тяжести торцевого сечения и изгибающей полосу в плоскости наибольшей жесткости (фиг. 22), коэффициент устойчивости  $\eta = 4,013$ .

Этот результат справедлив только в случае полосы очень узкого прямоуглового поперечного сечения.



Фиг. 22.

В более общем случае коэффициент  $\eta$  не является постоянной величиной, а зависит от отношения  $\frac{h}{b}$ :

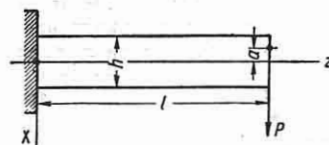
$\frac{h}{b}$ . . . . .	10	5	3
$\eta$ . . . . .	4,085	4,324	5,030

В дальнейшем ограничимся рассмотрением полосы весьма узкого прямоуглового сечения.

Перенесение точки приложения силы  $P$  выше или ниже центра тяжести торцевого сечения существенно отражается на величине коэффициента устойчивости  $\eta$ . Приближенная формула для величины  $\eta$  [11]

$$\eta = 4,013 \left[ 1 - \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B_x}{C}} \right], \quad (33)$$

где  $a$  — расстояние по вертикали точки приложения нагрузки над центром тяжести сечения (фиг. 23).

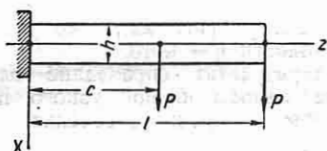


Фиг. 23.

Величина  $a > 0$  при смещении точки приложения силы  $P$  выше центра тяжести. Таким образом, приложение на-

грузки выше центра тяжести уменьшает ее критическое значение, а приложение нагрузки ниже центра тяжести увеличивает ее критическое значение.

При действии на консольную полосу двух одинаковых сосредоточенных сил  $P$ , приложенных к оси на расстоянии  $c$



Фиг. 24.

и  $l$  от заделки (фиг. 24), их критическое значение

$$(2P)_{кр} = \eta \frac{\sqrt{B_x C}}{l^2}. \quad (34)$$

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  при различных соотношениях между величинами  $c$  и  $l$  следующие:

$\frac{c}{l}$ . . . . .	0	0,25	0,50	0,75	1,00
$\eta$ . . . . .	8,026	7,889	6,776	5,220	4,013

При действии на консоль равномерно распределенных сил интенсивностью  $q$  кг/см, приложенных к оси балки, критическое значение нагрузки

$$(q l)_{кр} = \eta \frac{\sqrt{B_x C}}{l^2}, \quad (35)$$

где коэффициент устойчивости  $\eta = 12,85$ . Таким образом, критическое значение всей равномерно распределенной нагрузки приблизительно в 3 раза больше, чем критическое значение сосредоточенной нагрузки, приложенной на конце консоли.

Полосы с опертыми или защемленными концами. Если концы полосы узкого прямоугольного сечения закреплены так, что оба торцевых сечения могут свободно поворачиваться около своих главных центральных осей  $x$  и  $y$ , но не могут поворачиваться вокруг продольной оси  $z$  полосы и нагрузка  $P$  приложена в центре среднего поперечного сечения, то коэффициент устойчивости  $\eta = 16,93$ .

Если сила  $P$  приложена несколько выше ( $a > 0$ ) или ниже ( $a < 0$ ) центра среднего сечения полосы, то вели-

чина  $\eta$  приближенно определяется следующим выражением:

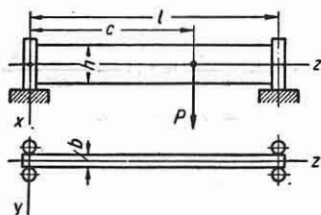
$$\eta = 16,94 \left[ 1 - 3,48 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{B_x}{C}} \right], \quad (36)$$

где  $a$ —расстояние по вертикали от центра среднего сечения до точки приложения силы  $P$ ;  $l$ —длина полосы между опорами.

Погрешность приближенных формул (33) и (36) при  $\frac{a}{l} = 0,1$  составляет

0,10%; при меньших  $\frac{a}{l}$  точность увеличивается. Приложение нагрузки выше центра тяжести поперечного сечения уменьшает ее критическое значение, а приложение ее ниже центра производит обратное действие.

Когда нагрузка  $P$  приложена не в середине пролета, а на расстоянии  $c$  от одной из опор (фиг. 25), то коэффици-



Фиг. 25.

ент устойчивости  $\eta$  является функцией отношения  $\frac{c}{l}$ . Величины  $\eta$  для ряда

значений  $\frac{c}{l}$  следующие:

$\frac{c}{l}$ . . . . .	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10
$\eta$ . . . . .	16,93	17,82	21,01	29,11	56,01

Критическая нагрузка увеличивается, когда точка ее приложения перемещается по направлению от середины пролета к одной из опор. Пока нагрузка остается в средней трети пролета, это увеличение сравнительно мало.

Критическое значение нагрузки, приложенной к оси полосы и равномерно распределенной по длине пролета, определяется формулой (35), где  $\eta = 28,3$ .

Защемление концов полосы увеличивает критическое значение нагрузки. Так, для полосы с защемленными концами, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре среднего сечения, коэффициент устойчивости

$\eta = 26,6$ , т. е. значительно больше коэффициента устойчивости для опертой полосы.

### Опрокидывание двутавровых балок

При рассмотрении устойчивости плоской формы изгиба открытых тонкостенных профилей, в частности двутаврового профиля, существенно, что их кручение при опрокидывании связано с искажением (депланацией) поперечных сечений. Величина крутящего момента и искажение сечений изменяются по длине балки, и, следовательно, здесь имеет место так называемое стесненное кручение.

Двутавровая балка нагружена моментами  $M$ , приложенными по торцам и действующими в плоскости наибольшей жесткости (чистый изгиб). Концы двутавра закреплены так, что оба торцевых сечения не могут поворачиваться вокруг продольной оси балки. Вместе с тем оба торцевых сечения могут свободно поворачиваться около своих главных центральных осей  $x$  (ось наименьшего момента инерции) и  $y$  (ось наибольшего момента инерции).

Критическое значение моментов  $M$ , вызывающее опрокидывание двутавра, определяется формулой (30), где коэффициент устойчивости

$$\eta = \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{D}{C}}. \quad (37)$$

Здесь  $C = GJ_k$  — жесткость при чистом кручении;  $D = EJ_\omega$  — жесткость при стесненном кручении.

Для тонкостенного двутаврового профиля геометрический фактор жесткости при чистом кручении

$$J_k = \frac{1}{3} (2bt^3 + ht_1^3)$$

и геометрический фактор жесткости при стесненном кручении

$$J_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 t,$$

где  $b$  и  $t$  — соответственно ширина и средняя толщина полки двутавра;  $h$  — высота балки (точнее, под величиной  $h$  в выражении для  $J_k$  надо понимать высоту стенки; а в выражении для  $J_\omega$  — расстояние между средними линиями полки);  $t_1$  — толщина стенки.

В случае достаточно длинных балок величина коэффициента устойчивости  $\eta$  по формуле (37) приближается к  $\pi$ , т. е. влияние стесненного кручения на критическую величину изгибающих моментов  $M$  становится сравнительно незначительным.

При поперечном изгибе двутавровых балок критическое значение нагрузки определяется формулой (32).

Для консольной балки двутаврового сечения, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре свободного конца, коэффициент устойчивости  $\eta$  определяется величиной отношения  $\frac{Cl^2}{D}$  (см. табл. 14). Для  $\frac{Cl^2}{D} > 40$  приближенное значение  $\eta$  дается формулой

$$\eta = \frac{4,01}{\left(1 - \frac{1}{l} \sqrt{\frac{D}{C}}\right)^2}. \quad (38)$$

Таблица 14

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  для консольной балки двутаврового сечения, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре свободного торца балки

$\frac{Cl^2}{D}$	0,1	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0
$\eta$	44,3	15,7	12,2	10,70	9,76	8,69	8,03
$\frac{Cl^2}{D}$	10	12	14	16	24	32	40
$\eta$	7,58	7,20	6,96	6,73	6,19	5,87	5,64
Примечание. $C$ — жесткость при чистом кручении; $D$ — жесткость при стесненном кручении; $l$ — длина балки.							

Двутавровая балка со свободно опертыми концами. Оба торца балки могут свободно вращаться относительно своих осей симметрии, но не могут поворачиваться вокруг продольной оси балки. Нагрузка  $P$  приложена в центре среднего поперечного сечения. Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  в зависимости от величины  $\frac{Cl^2}{D}$  сведены в табл. 15.

Все приведенные выше выражения для критических моментов и сил спра-

Таблица 15

Значения коэффициента устойчивости  $\eta$  для двухопорной балки двутаврового сечения, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в центре среднего поперечного сечения балки

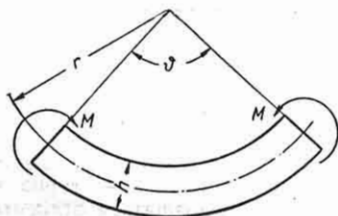
$\frac{Cr}{D}$	0,4	4,0	8,0	16	24	32	48
$\eta$	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,8
$\frac{Cr}{D}$	64	80	96	160	240	320	400
$\eta$	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2

Примечание.  $C$  — жесткость при чистом кручении;  $D$  — жесткость при стесненном кручении;  $l$  — длина балки.

ведливы только при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала полосы или двутавровой балки.

### Опрокидывание криволинейных полос

Полоса узкого прямоугольного сечения с круговой осью радиуса  $r$  и центральный угол  $\vartheta$  изгибается моментами в плоскости наибольшей жесткости (плоскость оси полосы) (фиг. 26). Креп-



Фиг. 26.

ления концов полосы таковы, что торцевые сечения могут свободно вращаться относительно своих главных центральных осей, но не могут поворачиваться относительно касательных к оси полосы, проведенных через центры торцевых сечений.

Критическое значение изгибающих моментов  $M$  определяется следующим выражением:

$$M_{кр} = \frac{B_x + C}{2r} \pm \sqrt{\left(\frac{B_x - C}{2r}\right)^2 + \frac{B_x C}{r^2} \left(\frac{\pi}{\vartheta}\right)^2}, \quad (39)$$

где  $B_x = EJ_x$  — наименьшая жесткость изгиба;  $C = GJ_k$  — жесткость кручения полосы (см. „Опрокидывание полос при чистом изгибе“ стр. 326).

В предельном случае выражение (39) переходит в формулу для критического значения моментов  $M$ , соответствующих опрокидыванию прямолинейной полосы с опертыми концами.

Действительно, подстановка  $r = \infty$  и  $\vartheta r = l$  дает

$$M_{кр} = \pm \pi \frac{\sqrt{B_x C}}{l}.$$

Очевидно, что независимо от направления момента его критическое значение для прямолинейной полосы одинаково.

Для криволинейной полосы критическое значение моментов зависит от их направления. Знак плюс в формуле (39) соответствует направлению моментов, показанному на фиг. 26, а минус — обратному направлению этих моментов. Таким образом, критическое значение моментов  $M$ , увеличивающих кривизну полосы, больше, чем критическое значение моментов  $M$ , уменьшающих кривизну полосы.

При  $\vartheta = \pi$  одно из двух значений момента, даваемых формулой (39), обращается в нуль. Этот результат соответствует свободному вращению полукруглой полосы вокруг диаметра, проходящего через центры торцевых сечений.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИТЫХ ПРУЖИН СЖАТИЯ [10]

В большинстве практически встречающихся цилиндрических витых пружин сжатия ось проволоки представляет собой винтовую линию с малым углом подъема (обычно менее  $10^\circ$ ). Это обстоятельство позволяет с достаточной степенью точности рассматривать пружину как совокупность плоских витков, т. е. витков проволоки в виде круговых колец, разре-

занных в одном месте и расположенных в плоскостях, перпендикулярных к недеформированной оси пружины.

Под термином „ось пружины“ понимается геометрическое место центров тяжести витков пружины. Пусть ось  $x$  — центральная ось поперечного сечения проволоки, перпендикулярная к оси пружины, и ось  $y$  — центральная ось, параллельная оси пружины. Ограничимся рассмотрением случая, когда указанные оси  $x$  и  $y$  являются главными осями сечения проволоки пружины.

Критическое значение осадки пружины  $\delta$ , т. е. то значение, при котором прямолинейная форма оси пружины становится неустойчивой, определяется следующим выражением:

$$\frac{\delta_{кр}}{H_0} = \xi_1 \left[ 1 - \sqrt{1 - \eta \xi_2 \left( \frac{D}{H_0} \right)^2} \right]. \quad (40)$$

Здесь  $D$  — диаметр витков пружины;  $H_0$  — высота пружины в свободном состоянии (нагрузка  $P = 0$ ); коэффициент устойчивости  $\eta$  определяется условиями крепления торцевых витков и может быть взят из табл. 1; коэффициенты  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяются выражениями

$$\xi_1 = \frac{1}{2 - \frac{C}{B_y}}; \quad \xi_2 = \frac{2 - \frac{C}{B_y}}{1 + \frac{C}{B_x}}. \quad (41)$$

т. е. зависят только от соотношений между жесткостями изгиба  $B_x = EJ_x$ ,  $B_y = EJ_y$  и кручения  $C$  проволоки пружины. Выражение для жесткости кручения  $C$  зависит от формы сечения (см. гл. II).

Формула (40) показывает, что для возможности потери устойчивости должна существовать определенная зависимость между размерами пружины. То значение  $\frac{H_0}{D}$ , при котором  $\delta_{кр}$  из действительной величины становится мнимой, называется предельным значением:

$$\left( \frac{H_0}{D} \right)_{пр} = \sqrt{\frac{2 - \frac{C}{B_y}}{\eta \left( 1 + \frac{C}{B_x} \right)}}. \quad (42)$$

При  $\frac{H_0}{D} > \left( \frac{H_0}{D} \right)_{пр}$  пружина может потерять устойчивость, а при  $\frac{H_0}{D} < \left( \frac{H_0}{D} \right)_{пр}$  потеря устойчивости невозможна. Это обстоятельство существенно отличает поведение сжатой пружины от поведения сжатого стержня.

Все приведенные выше формулы и соотношения справедливы для пружин из проволоки произвольного сечения, одна из главных центральных осей которого перпендикулярна оси пружины.

Для пружин из проволоки круглого сечения

$$B_x = B_y = EJ \text{ и } C = \frac{EJ}{1 + \mu},$$

где  $\mu$  — коэффициент поперечной деформации или коэффициент Пуассона материала проволоки.

Коэффициенты  $\xi_1$  и  $\xi_2$  принимают значения

$$\xi_1 = \frac{1 + \mu}{1 + 2\mu} \text{ и } \xi_2 = \frac{1 + 2\mu}{2 + \mu}.$$

В дальнейшем примем  $\mu = 0,30$ , и, следовательно,  $\xi_1 = 0,813$  и  $\xi_2 = 0,696$ .

Для пружин с подпертыми торцевыми витками (например, с креплением в виде прицепов) коэффициент устойчивости  $\eta = \pi^2 = 9,87$ , и формула (40) принимает вид

$$\frac{\delta_{кр}}{H_0} = 0,813 \left[ 1 - \sqrt{1 - 6,87 \left( \frac{D}{H_0} \right)^2} \right]. \quad (43)$$

Таким образом, для пружин из круглой проволоки при  $\mu = 0,30$  предельное значение

$$\left( \frac{H_0}{D} \right)_{пр} = \sqrt{6,87} = 2,62, \quad (44)$$

т. е. потеря устойчивости возможна только для пружин, высота которых в недеформированном состоянии больше чем в 2,62 раза превышает диаметр витков.

При  $\frac{H_0}{D} = 2,62$  критическая осадка равна  $\delta_{кр} = 0,813H_0$ .

Для пружин, у которых  $\frac{H_0}{D} > 2,62$ , потеря устойчивости происходит при

$\delta_{кр} < 0,813H_0$ , если же  $\frac{H_0}{D} < 2,62$ , то потеря устойчивости невозможна.

При достаточно больших значениях отношения  $\frac{H_0}{D}$  критическая осадка составляет только малую долю первоначальной

высоты пружины. Так, при  $\frac{H_0}{D} = 10$ , т. е. для пружин с первоначальной высотой в 10 раз большей диаметра витка, критическая осадка  $\delta_{кр}$  составляет всего около 3% первоначальной высоты пружины.

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Ачеркан Н. С., Расчет и конструирование металлорежущих станков, Машгиз, 1952.
2. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1951.
3. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания), Стройиздат, 1940.
4. Гольденблат И. И. и Сизов А. М., Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания. Стройиздат, 1952.
5. Динник А. Н., Устойчивость упругих систем, ОНТИ, 1935.
6. Динник А. Н., Продольный изгиб, 1939.
7. Динник А. Н., Устойчивость упругих систем, изд. АН СССР, 1950.
8. Кан С. Н. и Свердлов И. А., Расчет самолета на прочность, Оборонгиз, 1940, глава 5. Продольный изгиб стержней.
9. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч. 2-я, Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин, Судпромгиз, 1941.
10. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. 2. Расчеты при динамической нагрузке. Устойчивость. Ползучесть, Машгиз, 1952.
11. Справочник по технической механике, под ред. А. Н. Динника, Гостехиздат, 1949.
12. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, под ред. и с добавлением статьи В. З. Власова, Гостехиздат, 1946.
13. Тихомиров Е. Н., Курс сопротивления материалов, Гостехиздат, 1934.
14. Филоненко-Бородич М. М., Изюмов С. М., Олисов Б. А., Кудрявцев И. Н., Мальгинов Л. И., Курс сопротивления материалов, ч. 2-я, Гостехиздат, 1949.
15. Штаерман И. Я. и Пиковский А. А., Основы теории устойчивости строительных конструкций, Стройиздат, 1939.
16. Справочная книга по расчету самолета на прочность, Оборонгиз, 1954.



КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ\*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАВИСИМОСТИ

Методы расчета механических колебаний позволяют определять опасные для прочности машин колебания (вибрации) и указывают способы их устранения или ослабления.

Основной задачей расчета на колебания является устранение опасных колебательных состояний — *резонансов*, т. е. резкого увеличения амплитуды колебаний при совпадении частоты собственных колебаний с частотой изменения внешних сил. Расчет на колебания требуется во всех тех случаях, когда на машину или ее части действуют периодические силы.

Кинематика колебательного движения

Гармоническое движение описывается следующим выражением для перемещения  $x$ :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

где  $A$  — амплитуда гармонического колебания в см для поступательных и в радианах для угловых перемещений;  $\varphi$  — фазовый угол в радианах, определяемый начальными условиями движения или общим началом отсчета для ряда сопоставляемых движений;  $\omega$  — угловая частота колебаний в 1/сек;  $t$  — время в сек.

В графическом представлении (фиг. 1) перемещение  $x$  соответствует проекции вектора  $\vec{A}$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , на вертикальную ось. Началу движения ( $t = 0$ ) соответствует перемещение  $x_0$ .

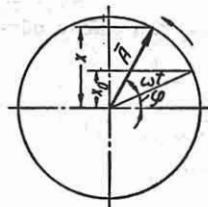
Частота колебаний выражается следующим образом:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} N; \quad (2)$$

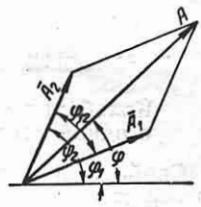
здесь  $\omega$  — угловая (круговая) частота

колебаний в 1/сек;  $f$  — частота в  $ци^*$ , т. е. число колебаний в секунду;  $T$  — период колебания в сек.;  $N$  — число колебаний в минуту.

Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты и одинакового направления дает гармоническое колебание



Фиг. 1. Векторная диаграмма гармонического колебания.



Фиг. 2. Сложение гармонических колебаний.

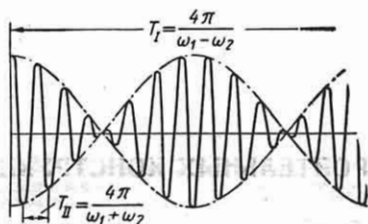
той же частоты. Амплитуда результирующего колебания равна векторной сумме амплитуд составляющих колебаний (пример сложения двух составляющих  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  показан на фиг. 2).

При сложении гармонических колебаний одного направления, но различных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в векторной диаграмме фиг. 2 следует положить, что векторы  $A_1$  и  $A_2$  вращаются с различными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  мало различаются между собой, то расхождение векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  происходит весьма медленно, и результирующее движение рассматривается как синусоидальное колебание с периодически изменяющейся амплитудой — *биение* (см. фиг. 3 для случая  $A_1 = A_2$ ).

При сложении нескольких гармонических колебаний различных частот полу-

\* Ниже выражение „частота“ иногда употребляется и для обозначения угловой частоты, а  $\omega$  и  $f$  распознаются по их буквенным обозначениям.

чается негармоническое периодическое движение, период которого является наименьшим кратным периодов составляющих гармонических колебаний.



Фиг. 3. Биение при сложении двух гармонических колебаний равных амплитуд.

Порядком гармонической составляющей (гармоники) называется отношение ее частоты к частоте, принимаемой за основную. Последней обычно служит частота, соответствующая периодичности исследуемого процесса или числу оборотов установки.

### Колебания упругих систем с одной степенью свободы

**Свободные колебания.** Системой с одной степенью свободы называется система, геометрическое положение которой определяется лишь одной величиной.

Схема простейшей колебательной системы приведена на фиг. 4. Здесь предполагается, что движение происходит только по вертикальной оси.

При отклонении массы  $m$  (фиг. 4) от положения равновесия упругий элемент создает восстанавливающую силу. В линейной системе масса  $m$  постоянна, а восстанавливающая сила  $Q$  пропорциональна деформации  $x$  упругого элемента:

$$Q = -Cx = -\frac{1}{e} x \kappa \Gamma, \quad (3)$$

т. е. упругий элемент линейной системы имеет постоянную жесткость  $C$  в  $\kappa \Gamma / \text{см}$  и податливость  $e$  в  $\text{см} / \kappa \Gamma$ .

Движение массы  $m$  (фиг. 4) при отсутствии рассеяния энергии (затухания) представляет гармоническое колебание:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = a \sin (\omega_0 t + \varphi), \quad (4)$$

где  $x_0$  — начальное перемещение в  $\text{см}$ ;  $v_0$  — начальная скорость в  $\text{см} / \text{сек}$ ;  $\omega_0$  — угловая частота собственных колебаний, при отсутствии затухания равная

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}} \text{ 1/сек.} \quad (5)$$

причем масса  $m$  — в  $\kappa \Gamma \text{сек}^2 / \text{см}$ ; амплитуда свободных колебаний

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}; \quad (6)$$

фазовый угол

$$\varphi = \text{arctg} \frac{x_0 \omega_0}{v_0}. \quad (7)$$

Запас энергии в системе  $W$  равен сумме потенциальной энергии  $V$  и кинетической энергии  $T$ , т. е.

$$W = V + T. \quad (8)$$

Энергия при колебаниях переходит из потенциальной в кинетическую и наоборот. При амплитудном отклонении от положения равновесия скорость системы и ее кинетическая энергия равны нулю. Запас потенциальной энергии составляет

$$V_{\text{max}} = \frac{Ca^2}{2}. \quad (9a)$$

При прохождении положения равновесия потенциальная энергия равна нулю, скорость равна  $v = \omega_0 a$ , запас кинетической энергии составляет

$$T_{\text{max}} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}. \quad (9b)$$

При свободных колебаниях без рассеяния энергии или подвода ее со стороны

$$W = V_{\text{max}} = T_{\text{max}}. \quad (10)$$

Подставив в формулу (10)  $V_{\text{max}}$  из формулы (9a) и  $T_{\text{max}}$  из формулы (9b), получим выражение для  $\omega_0$ , совпадающее с уравнением (5). В этом состоит основа энергетического метода определения частот собственных колебаний (см. ниже стр. 343).

Движение массы (фиг. 4) при наличии рассеяния энергии (силы сопротивления, пропорциональной скорости) пред-

ставляет собой затухающие колебания (фиг. 5) и выражается формулой

$$x = e^{-\alpha t} \left( x_0 \cos \omega_r t + \frac{v_0 + x_0 \alpha}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) = a_\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi_\alpha). \quad (11)$$

Угловая частота собственных колебаний с затуханием равна

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \text{ 1/сек,}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}; \quad \alpha = \frac{S}{2m};$$

здесь  $S$  — сила сопротивления, отнесенная к единице скорости, в  $\text{кгсек/см}$ .



Фиг. 5. Затухающие колебания,

При очень большом затухании  $\alpha \geq \omega_0$  движение теряет колебательный характер и становится аperiodическим.

Декремент затухания  $\delta$  представляет натуральный логарифм отношения амплитуд для двух следующих один за другим периодов и выражается так:

$$\delta = \ln e^{\alpha T} = \alpha T = \frac{\alpha}{f} = 2\pi \frac{\alpha}{\omega_r} = 2\pi \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (12)$$

При малых декрементах  $\delta \leq 0,3$  принимается, что  $\omega_r \approx \omega_0$ .

Рассеяние энергии за один период колебаний  $\Delta W$ , отнесенное к запасу энергии в начале данного периода  $W$ , составляет

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - e^{-2\delta}. \quad (13)$$

При малых значениях  $\delta$

$$\delta \approx \frac{\Delta W}{2W}. \quad (14)$$

Колебательные системы с вращательными перемещениями (крутильные колебания) и колебательные системы с поступательным перемещением (продоль-

ные и поперечные колебания) имеют сходные расчетные формулы. В табл. 1 показано взаимное соответствие величин. При замене в формулах для одного вида колебаний всех величин по табл. 1 соответствующими им величинами для другого вида колебаний получаются формулы для последнего\*.

Таблица 1

Соответствие величин в уравнениях колебаний

Крутильные колебания	Поперечные и продольные колебания
Угловое перемещение $\Phi$ в радианах	Линейное перемещение $x$ , у в см
Момент силы $M$ в $\text{кгсм}$	Сила $Q$ в $\text{кг}$
Момент инерции массы $\Theta$ в $\text{кгсм}^2$	Масса $t$ в $\text{кгсек}^2/\text{см}$
Жесткость $C_\kappa$ в $\text{кгсм}$	Жесткость $C_n$ в $\text{кг/см}$
Податливость $e_\kappa = \frac{1}{C_\kappa}$ в $1/\text{кгсм}$	Податливость $e = \frac{1}{C_n}$ в $\text{см/кг}$
Сопротивление, отнесенное к единичной угловой скорости, $S_\kappa$ в $\text{кгсмек}$	Сопротивление, отнесенное к единичной линейной скорости, $S_n$ в $\text{кгсек/см}$
Угловая частота собственных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_\kappa}{\Theta}}$ 1/сек	Угловая частота собственных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_n}{t}}$ 1/сек

Вынужденные колебания. Движение массы  $m$  (фиг. 4) под действием внешней силы, изменяющейся по периодическому закону  $Q \sin \omega t$  (гармонической силы), выражается формулой

$$x = a_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t + \varphi) + A \sin(\omega t - \psi). \quad (15)$$

где значения  $\omega_r$  и  $\alpha$  — те же, что и в формуле (11).

Первый член выражения (15) представляет затухающие свободные колебания, начальная амплитуда которых  $a_0$  и фазовый угол  $\varphi$  определяются начальными условиями движения.

Второй член выражения (15) представляет вынужденные колебания, имеющие частоту внешней силы. Вынужденные колебания продолжают в течение всего времени действия внешней силы, тогда как свободные колебания вследствие наличия затухания (сопротивления)

\* Ниже во всех случаях, когда это ясно, индекс в обозначении жесткости опускается, т. е. вместо  $C_\kappa$  и  $C_n$  пишется просто  $C$  (то же для сопротивления  $S$ , амплитуды  $A$  и т. д.).

быстро исчезают. При рассмотрении длительных колебаний принимается во внимание лишь второй член.

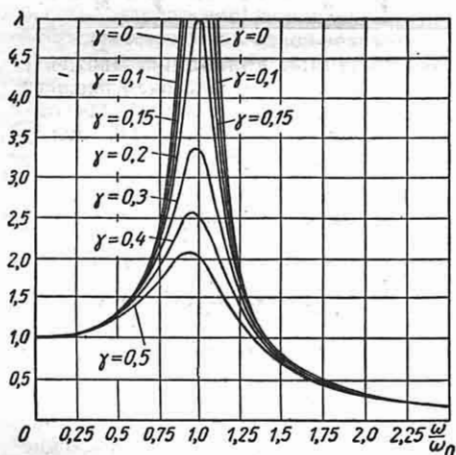
Амплитуда вынужденных колебаний определяется по формуле

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \lambda A_0, \quad (16)$$

Отношение  $\frac{A}{A_0} = \lambda$  называется *коэффициентом динамичности* или *коэффициентом динамического усиления*, где  $A_0$  — перемещение от статической силы, равной амплитуде гармонической силы  $Q$ , т. е.  $A_0 = \frac{Q}{C}$ ;  $\omega$  — угловая частота

вынужденных колебаний;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$ ;  $\gamma$  — коэффициент демпфирования (коэффициент затухания или коэффициент сопротивления).

На фиг. 6 представлены резонансные кривые, т. е. зависимость  $\lambda$  от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  для различных значений  $\gamma$ .



Фиг. 6. Зависимость коэффициента динамического усиления  $\lambda$  от отношения частоты возбуждения к собственной частоте.

Чем меньше  $\gamma$ , тем сильнее проявляется *резонанс*, т. е. резкое возрастание амплитуд вынужденных колебаний при определенных частотах, которые близки к частотам собственных колебаний.

Вблизи от резонанса величину амплитуды вынужденных колебаний ограничивает лишь затухание системы. Вдали от резонанса величина затухания почти не оказывает влияния на амплитуду колебаний.

Для предельных случаев расчета:

1) вынужденных нерезонансных колебаний и при отсутствии затухания

$$A = \frac{A_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}; \quad (17)$$

2) резонансных колебаний при данном затухании, пропорциональном скорости,

$$A_r = \frac{A_0}{\gamma}. \quad (18)$$

Коэффициент демпфирования равен

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{S}{\omega_0 m} = \frac{\vartheta}{\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^2}}. \quad (19)$$

При малых декрементах  $\vartheta$

$$\gamma \approx \frac{\vartheta}{\pi} = \frac{\Delta W}{2\pi W}. \quad (20)$$

Здесь  $W$  — запас энергии в системе при резонансе [см. формулы (9) и (10), где  $A$  заменяется резонансной амплитудой  $A_r$ ];

$$W = \frac{CA_r^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A_r^2}{2}; \quad (21)$$

$\Delta W$  — рассеяние энергии за один период, равное работе внешней силы за один период:

$$\Delta W = \pi S \omega_0 A_r^2 = \pi Q A_r. \quad (22)$$

Из экспериментально полученной резонансной кривой коэффициента демпфирования определяется по формуле

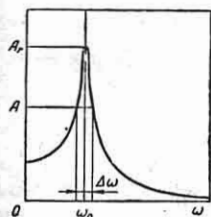
$$\gamma = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{A^2}{A_r^2 - A^2}} \quad (23)$$

(обозначения см. фиг. 7). Здесь  $A_r$  — амплитуда резонансных колебаний;  $A$  — какая-либо избранная амплитуда вынужденных колебаний;  $\Delta \omega$  — разность частот, соответствующих равным амплитудам  $A$  на обеих ветвях резонансной кривой. Чем уже, острее резонансный пик, тем меньше  $\gamma$ .

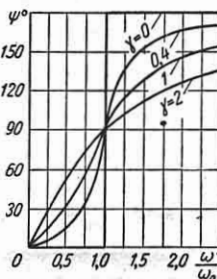
Сдвиг фаз между перемещением и приложенной силой при вынужденных колебаниях

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{2\omega\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (24)$$

При отсутствии затухания и частотах, меньших резонансной, внешняя сила и перемещение совпадают по фазе, а при



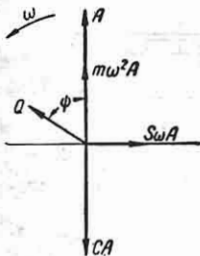
Фиг. 7. Определение коэффициента демпфирования из резонансной кривой.



Фиг. 8. Зависимость сдвига фаз от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  при различных  $\gamma$ .

частотах, больших резонансной, они сдвинуты на  $180^\circ$ ,

т. е. при резонансе получается скачок фазы.



Фиг. 9. Векторная диаграмма.

Зависимость сдвига фаз  $\psi$  от  $\frac{\omega}{\omega_0}$  при различных значениях  $\gamma$  представлена на фиг. 8.

На фиг. 9 приведена векторная диаграмма, показывающая сдвиг фаз между силами при колебаниях. Вектор перемещения  $A$  отложен на диаграмме вертикально вверх. С ним совпадает вектор силы инерции  $m\omega^2 A$ . Вектор упругой силы  $CA$  сдвинут на  $180^\circ$ , а силы сопротивления  $S\omega A$  — на  $90^\circ$ . Уравновешивающая их внешняя сила  $Q$  сдвинута по отношению к перемещению на фазовый угол  $\psi$ .

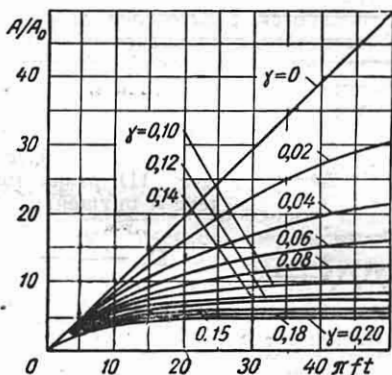
При очень малом демпфировании составляющую свободных колебаний в формуле (15) следует учитывать.

Если частота внешней силы  $\omega$  близка к частоте собственных колебаний  $\omega_0$ , в этом случае получаются колебания типа биения, а при совпадении частот  $\omega$  и  $\omega_0$  имеют место условия резонанса.

При этом перемещении (для начальных условий  $x_0 = 0; v_0 = 0$ ) равно:

$$x = \frac{A_0 \omega_0 t}{2} \cos \omega_0 t, \quad (25)$$

т. е. при продолжительном воздействии периодической внешней силы амплитуда колебаний со временем будет неограниченно возрастать, пока ход явления не нарушится из-за приводящих обстоятельств, вызывающих ограничение перемещений. В системах с демпфированием нарастание амплитуд при резонансе также происходит не сразу. На фиг. 10



Фиг. 10. Нарастание амплитуд вынужденных колебаний при различном демпфировании.

показан график нарастания амплитуд вынужденных колебаний при различном демпфировании. По оси абсцисс отложено  $\pi ft$  (где  $f$  — частота,  $t$  — время) — число колебаний, прошедших от начала движения, умноженное на  $\pi$ ; по оси ординат — отношение  $\frac{A}{A_0}$ .

**Динамическая жесткость.** Динамической жесткостью называется отношение амплитуды гармонической силы в точке (сечении) системы к амплитуде динамического перемещения этой точки.

„Динамическая жесткость“ установлена по аналогии со статической жесткостью и имеет ту же размерность, а именно:

для линейной деформации

$$D_{c_n} = \frac{Q}{A_n} \text{ кг/см}; \quad (26a)$$

для угловой деформации (вала)

$$D_{c_k} = \frac{M}{A_x} \text{ кгсм}. \quad (26b)$$

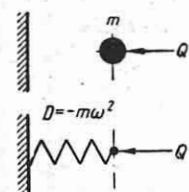
где  $Q$  — амплитуда гармонической (синусоидально изменяющейся) силы,  $M$  — момента;  $A$  — амплитуда динамического (синусоидально изменяющегося) перемещения. Индекс  $n$  указывает на линейные, а  $\kappa$  — на угловые деформации. Ниже, в тех случаях, когда это очевидно, индексы  $n$  и  $\kappa$  опущены.

Для упругого элемента — пружины, стержня или участка вала (без учета их массы) — динамическая жесткость  $D$  и жесткость  $C$  совпадают:

$$D = C. \quad (27)$$

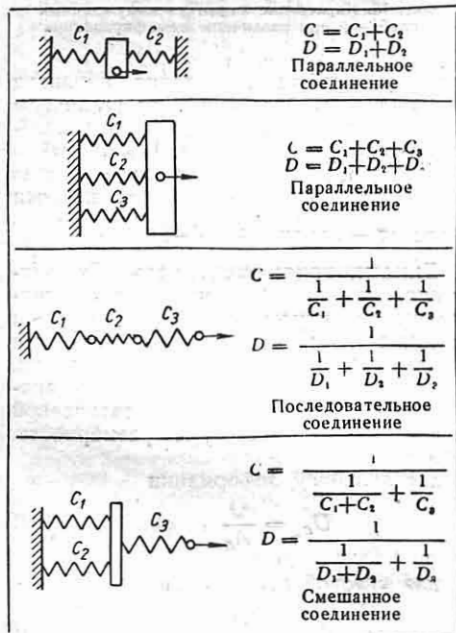
Инерционные элементы (массы) также представляются с помощью динамической жесткости, являющейся как бы характеристикой некоторой фиктивной пружины.

Динамическая жесткость колебаний свободной массы (или стойкости массы) (фиг. 11) равна (индекс  $n$  опущен)



$$D_m = \frac{Q}{A} = \frac{-Am\omega^2}{A} = -m\omega^2. \quad (28)$$

Фиг. 11. Динамическая жесткость элемента массы.



Фиг. 12. Соединение упругих элементов.

Динамические жесткости складываются по правилам соединения упругих элементов для статики (фиг. 12). При этом получается динамическая жесткость всей системы или какой-либо ее части (называемая также стойкостью системы).

Условию резонанса системы без затухания (потерь) соответствует значение ее динамической жесткости, равное нулю, так как приложение конечной силы вызывает неограниченное возрастание амплитуды колебаний.

Пример. Простейшая колебательная система (фиг. 13, а) представлена в виде параллельного соединения двух элементов динамической жесткости (фиг. 13, б):

$$D_c = C; \quad D_m = -m\omega^2.$$

Суммарная жесткость  $D = D_c + D_m = C - m\omega^2$ .

При резонансе

$$D = 0, \text{ т. е. } \omega_0^2 = \frac{C}{m}.$$

Из формулы (16), представленной в виде

$$A = \frac{Q}{\sqrt{(C - m\omega^2)^2 + (S\omega)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{(D_c + D_m)^2 + D_s^2}} = \frac{Q}{D}, \quad (29)$$

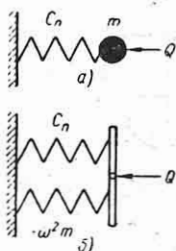
следует, что динамическая жесткость  $D_s$ , характеризующая демпфирование, складывается с  $D_m$  и  $D_c$  геометрически.

Механическим импеданцем  $Z_{мех}$  называется отношение амплитуды силы к амплитуде скорости гармонического движения, т. е.

$$Z_{мех} = \frac{Q}{\omega A} = \frac{D}{\omega}. \quad (30)$$

Простейшие колебательные системы. Стержни (брусья). Частота собственных колебаний стержней с сосредоточенной массой определяется по формуле (5), если распределенной массой стержня можно пренебречь по сравнению с сосредоточенной массой.

Для стержня, несущего одну массу (фиг. 14), в формулу (5) входит  $m$  — масса в кг/сек<sup>2</sup>/см, сосредоточенная в точке  $x_1$ , и  $C$  — жесткость в кг/см, которая находится как отношение силы, приложенной в точке  $x_1$ , к вызываемому

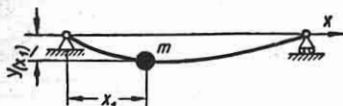


Фиг. 13. Динамическая жесткость системы с одной степенью свободы.

ею в этой точке статическому перемещению.

Определение жесткости стержней при различных условиях закрепления, а также жесткости пружин и других упругих элементов дано ниже, на стр. 353, в разделе „Определение расчетных параметров“.

Если жесткости стержня, работающего на изгиб, не одинаковы в направлении главных осей, то и частоты собственных колебаний в направлении этих осей



Фиг. 14. Невесомый стержень с сосредоточенной массой  $m$  в точке  $x_1$ .

различны. При свободных колебаниях точки стержня участвуют в двух взаимно перпендикулярных колебаниях различных частот. При вынужденных колебаниях точки стержня участвуют во взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих с частотой внешней силы. Амплитуды колебаний в направлении главных осей равны -

$$A_y = Q_y \lambda_y; \quad A_z = Q_z \lambda_z, \quad (31)$$

где  $Q_y$  и  $Q_z$  — составляющие внешней силы в направлении главных осей;  $\lambda_y$  и  $\lambda_z$  — коэффициенты динамического усиления [см. уравнение (16)] для колебаний вдоль соответствующих осей.

Таким образом, если в стержне возбуждаются поперечные колебания *косоуго изгиба*, то при постепенном повышении частоты внешней силы явление протекает следующим образом. Сначала при определенной более низкой частоте возбуждятся резонансные колебания в плоскости наименьшей жесткости. При более высокой частоте возникнет резонанс в плоскости наибольшей жесткости. Если главные жесткости стержня значительно различаются между собой, то при каждом из указанных резонансов колебания вдоль другой из главных осей будут незначительны.

Конструкции, приведенные к одной степени свободы. Формула (5) иногда применяется для приближенного (прикидочного) расчета частот собственных колебаний различных конструкций. Задача расчетчика состоит в приведении реальной конструк-

ции к системе с одной степенью свободы, для чего требуется выделить основную массу, нагружающую конструкцию, и определить расчетным или экспериментальным путем жесткость конструкции как статическую силу, вызывающую единичное перемещение этой массы. При этом удобнее определять статическую деформацию конструкции, т. е. статическое перемещение массы конструкции под действием ее веса.

Частота собственных колебаний системы с одной сосредоточенной массой выражается через статическую деформацию от ее веса следующим образом:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{m} = \frac{y_{cm}}{G} = \frac{g}{y_{cm}}, \quad (32)$$

где  $G$  — вес сосредоточенной массы  $m$  в  $\kappa\Gamma$ ;  $g$  — ускорение свободного падения;  $y_{cm}$  — статическое перемещение в  $cm$  точки расположения сосредоточенной массы под действием ее веса.

Число собственных колебаний в минуту составляет

$$N = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} \approx \frac{300}{\sqrt{y_{cm}}}. \quad (33)$$

Маятники. Для малых отклонений математического маятника, т. е. сосредоточенной точечной массы, подвешенной на нерастяжимой и невесомой нити (фиг. 15),

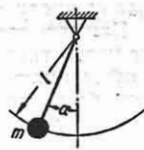
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ 1/сек}, \quad (34)$$

где  $\omega_0$  — частота собственных колебаний;  $g$  — ускорение свободного падения в  $cm/сек^2$ ;  $l$  — длина маятника в  $cm$ .

Для физического маятника, представляющего твердое тело, совершающее колебания вокруг оси подвеса, в формулу (34) подставляется приведенная длина

$$l = \frac{\theta}{mh}, \quad (35)$$

где  $\theta$  — момент инерции массы маятника относительно оси подвеса;  $m$  — масса тела;  $h$  — расстояние от центра тяжести до оси подвеса.



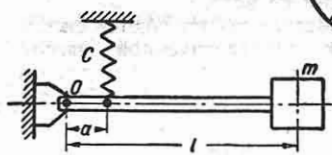
Фиг. 15. Маятник.

Для рычажного маятника (фиг. 16)

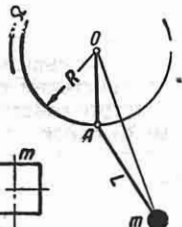
$$\omega_0 = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{C}{m}} \text{ 1/сек.} \quad (36)$$

Для маятника (фиг. 17), точка подвеса которого  $A$  вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $O$ ,

$$\omega_0 = \Omega \sqrt{\frac{R}{L}} \text{ 1/сек.} \quad (37)$$



Фиг. 16. Рычажный маятник.



Фиг. 17. Вращающийся маятник.

стью  $\Omega$  вокруг оси  $O$ ,

### Колебания упругих систем со многими степенями свободы

**Частота и форма колебаний.** Упругой системой с  $n$  степенями свободы называется система, геометрическое положение масс которой в каждый момент времени определяется значениями  $n$  независимых координат. Число частот собственных колебаний такой системы равно числу ее степеней свободы.

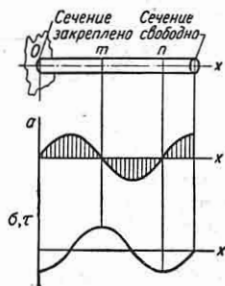
Каждая сосредоточенная масса — абсолютно твердое тело — в общем случае может иметь шесть степеней свободы: три поступательных перемещения в направлении его главных осей и три вращательных перемещения вокруг них. Упругая система с конечным числом степеней свободы представляется как совокупность сосредоточенных масс, связанных между собой упругими элементами (связями), лишенными массы.

Системы с распределенной массой (стержни, пластинки и т. д.) обладают бесконечно большим числом степеней свободы и при отсутствии затухания имеют бесконечное число частот собственных колебаний.

Наименьшая из частот собственных колебаний (но не равная нулю) называется *нижней* или *основной*. Другие частоты собственных колебаний называются *вышшими* или *обертонными*. Частоты собственных колебаний распола-

гаются в порядке возрастания, и каждой из них присваивается порядковый номер (*порядок частоты*).

Каждой частоте собственных колебаний соответствует определенная *форма колебаний*, т. е. распределение отклонений масс от положения равновесия. На фиг. 18, *a* показана одна из форм продольных колебаний стержня с распределенной массой. Амплитуды продольных колебаний  $a$ , совершаемых точками стержня вдоль оси  $x$ , отложены на фиг. 18 для удобства изображения по оси ординат. Аналогично изображаются и формы крутильных колебаний, причем ординаты фиг. 18 представляют углы закрутки отдельных сечений стержня. Точки стержня, не отклоняющиеся при колебаниях от положения равновесия, называются узлами колебаний (точки  $o, m, n$  на фиг. 18). С повышением порядка частоты колебаний на единицу в форме колебаний прибавляется еще один узел. Точки, отклоняющиеся от положения равновесия, образуют пучности колебаний. В стержне на фиг. 18 участки, наиболее отклоняющиеся от положения равновесия, имеют наименьшие деформации и напряжения, а узловые участки являются наиболее напряженными. На фиг. 18 показано, что при продольных или крутильных колебаниях стержня узлу колебаний соответствует пучность напряжения ( $\sigma, \tau$ ), а пучности колебаний — узел напряжения.



Фиг. 18. Форма продольных или крутильных колебаний стержня:  $a$  — перемещение;  $\sigma, \tau$  — напряжения.

Одна из форм поперечных колебаний стержня — его упругая линия — изображена на фиг. 19. По оси ординат здесь отложены амплитуды прогибов. В отличие от предыдущего случая продольных колебаний узловые участки стержня могут иметь угловые перемещения.

В пластинках и дисках из узловых точек образуются узловые линии. На фиг. 20 показаны типичные формы колебаний консольной пластинки переменного сечения — турбинной лопатки. Фиг. 20, *a* показывает расположение узловых линий на поверхности лопатки при одной из изгибных форм колебаний.





По методу перемещений из коэффициентов (чисел) влияния для перемещений  $C_{ik}$  составляется уравнение частот (43).

Коэффициент  $C_{ik}$  равен реакции в точке  $i$  при единичном перемещении точки  $k$  в направлении колебаний и условии, что остальные  $n-1$  точки размещения масс системы закреплены

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega_0^2 m_1 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} - \omega_0^2 m_2 & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} - \omega_0^2 m_n \end{vmatrix} = 0. \quad (43)$$

Решение уравнений частот—см. способы численного решения алгебраических уравнений (т. I, стр. 110).

**Стержни с распределенной массой.** Уравнение свободных крутильных или продольных колебаний стержня постоянного сечения с равномерно распределенной массой имеет вид

$$\Delta(x, t) = K \left( \frac{x}{l} \right) \cos \omega t, \quad (44)$$

где  $\Delta(x, t)$  — перемещение точки стержня — угловое при крутильных и линейное при продольных колебаниях;

$K \left( \frac{x}{l} \right)$  — функция формы колебаний стержня;  $l$  — длина стержня;  $x$  — координата точки стержня ( $l > x > 0$ );  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний.

При крутильных колебаниях

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{GJ_k}{\theta l}}, \quad (44a)$$

причем  $GJ_k$  — жесткость на кручение;  $\theta$  — погонный момент инерции массы стержня. В случае круглого сечения  $J_k = J_p$  (см. гл. II).

При продольных колебаниях:

$$\omega = \beta \sqrt{\frac{EF}{\rho l}}, \quad (44b)$$

причем  $EF$  — жесткость на растяжение;  $\rho$  — погонная масса стержня.

Функция формы колебаний стержня:

$$K \left( \frac{x}{l} \right) = A \cos \beta \frac{x}{l} + B \sin \beta \frac{x}{l}. \quad (45)$$

$A$  и  $B$  — постоянные, определяемые из граничных условий. Значения  $\beta$  определяются из уравнения частот, которое составляют исключением постоянных из (45).

*Пример.* Стержень с одним закрепленным и другим свободным концом имеет следующие условия на концах:

$$\text{при } \frac{x}{l} = 0:$$

$$K(0) = 0;$$

$$\text{при } \frac{x}{l} = 1:$$

$$\frac{d \left[ K \left( \frac{x}{l} \right) \right]}{d \left( \frac{x}{l} \right)} = 0.$$

При подстановке в формулу (45) эти условия дают

$$A = 0;$$

$$-A \sin \beta + B \cos \beta = 0,$$

откуда

$$B \cos \beta = 0.$$

Условие существования ненулевых значений для  $B$  соответствует уравнение частот

$$\cos \beta = 0. \quad (46)$$

Корни уравнения (46), требующиеся для определения частот собственных колебаний, из (44a), (44b) равны

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2} \pi.$$

Формулы расчета частот для различных случаев приведены ниже, на стр. 365.

Уравнение свободных поперечных колебаний стержня постоянного сечения с равномерно распределенной массой имеет вид

$$y(x, t) = Y \left( \frac{x}{l} \right) \cos \omega t, \quad (47)$$

где  $y(x, t)$  — прогиб стержня;  $l$  — длина стержня;  $x$  — координата точки стержня ( $l > x > 0$ );  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний;

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho l^4}}, \quad (48)$$

причем  $EJ$  — жесткость стержня на изгиб;  $\rho$  — погонная масса стержня;

$Y \left( \frac{x}{l} \right)$  — функция формы изгибных колебаний стержня:

$$Y \left( \frac{x}{l} \right) = AS \left( \lambda \frac{x}{l} \right) + BT \left( \lambda \frac{x}{l} \right) + CU \left( \lambda \frac{x}{l} \right) + DV \left( \lambda \frac{x}{l} \right). \quad (49)$$

причем  $A, B, C, D$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

а  $S\left(\lambda \frac{x}{l}\right); T\left(\lambda \frac{x}{l}\right); U\left(\lambda \frac{x}{l}\right); V\left(\lambda \frac{x}{l}\right)$  представляют гипертригонометрические функции А. Н. Крылова:

$$S(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda); \quad (49a)$$

$$T(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda); \quad (49б)$$

$$U(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda); \quad (49в)$$

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda). \quad (49г)$$

Производные функций А. Н. Крылова обладают свойством круговой перестановки:

$$\left. \begin{array}{ccccc} F(\lambda) & F'(\lambda) & F''(\lambda) & F'''(\lambda) & F^{(IV)}(\lambda) \\ S(\lambda) & V(\lambda) & U(\lambda) & T(\lambda) & S(\lambda) \\ T(\lambda) & S(\lambda) & V(\lambda) & U(\lambda) & T(\lambda) \\ U(\lambda) & T(\lambda) & S(\lambda) & V(\lambda) & U(\lambda) \\ V(\lambda) & U(\lambda) & T(\lambda) & S(\lambda) & V(\lambda) \end{array} \right\} (50)$$

Значения  $\lambda$  определяются из уравнений частот, которые составляют исключением постоянных  $A, B, C, D$  из уравнений, выражающих граничные условия.

Пример. Для стержня с защемленными концами крайние условия выражают отсутствие перемещений и углов поворота:

$$\text{при } \frac{x}{l} = 0 \text{ и при } \frac{x}{l} = 1$$

$$r\left(\frac{x}{l}\right) = 0; \quad \frac{d}{d\frac{x}{l}} \left[ r\left(\frac{x}{l}\right) \right] = 0. \quad (51a)$$

При подстановке (49) в условия (51a) и учитывая, что

$$S(0) = 1; \quad T(0) = 0; \quad U(0) = 0; \quad V(0) = 0, \quad (51б)$$

получим

$$\left. \begin{array}{l} A = 0; \\ B = 0; \\ CU(\lambda) + DV(\lambda) = 0; \\ CT(\lambda) + DU(\lambda) = 0. \end{array} \right\} (51в)$$

Для существования ненулевых решений требуется обращение в нуль определителя системы уравнений (51в):

$$\begin{vmatrix} U(\lambda) & V(\lambda) \\ T(\lambda) & U(\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (51г)$$

откуда получаем уравнение частот стержня с заданными условиями на концах:

$$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 1 = 0. \quad (51д)$$

Для различных случаев граничных условий уравнения частот изгибных колебаний стержня приведены ниже, на стр. 368.

**Приближенные методы определения частот собственных колебаний.** Приближенными методами являются энергетический метод и метод последовательных приближений. Эти методы рассмотрены ниже в применении к задачам изгиба.

Энергетический метод. Энергетический метод основан на том, что запасы кинетической и потенциальной энергии системы при колебаниях без затухания равны между собой:

$$I_{\max} = V_{\max} \quad (52)$$

(см. стр. 334).

Задавшись, приближенно, формой упругой линии  $y(x)$  (кривой наибольших прогибов), определяют запас кинетической энергии.

При изгибных колебаниях

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho(x) y^2(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n m_l y^2(x_l) = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\gamma}{g} \int_0^l F y^2(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n m_l y^2(x_l) = \omega^2 H, \quad (53) \end{aligned}$$

где  $\rho(x) = \frac{\gamma F}{g}$  — погонная масса стержня в  $\text{кг сек}^2/\text{см}^2$ ,  $\gamma$  — удельный вес материала стержня;  $F$  — сечение;  $g$  — ускорение свободного падения;  $y(x_l)$  — ордината упругой линии для точек, в которых расположены сосредоточенные массы  $m_l$ .

Величина наибольшей потенциальной энергии изгиба составляет

$$V_{\max} = \int_0^l \frac{M d\beta}{2} = \frac{1}{2} E \int_0^l J y''^2(x) dx, \quad (54a)$$

где  $M = y''(x)EJ$  — изгибающий момент в сечении стержня;  $E$  — модуль упругости материала;  $J$  — момент инерции поперечного сечения;  $\beta$  — угол наклона касательной к кривой прогибов.

Значения  $y''(x)$  получают графически или аналитически по заданной функции  $(x)$ .

При использовании в качестве  $y(x)$  кривой прогибов стержня под действием распределенной нагрузки  $p(x)$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l p(x) y(x) dx. \quad (54b)$$

Форма упругой линии, при которой получается наименьшее значение основной частоты собственных колебаний, ближе всего совпадает с действительной формой упругой линии при колебаниях. Однако даже сравнительно большое отклонение в форме упругой линии из числа удовлетворяющих граничным условиям дает значения основной частоты собственных колебаний, мало отличающиеся от действительных.

Применение энергетического метода показано ниже, на стр. 369.

Метод последовательных приближений. Определение первой частоты собственных колебаний производится следующим образом. Задают исходную форму упругой линии  $y_{10}(x)$  и определяют упругую линию  $y_{11}(x)$  для инерционной нагрузки  $p(x) y_{10}(x)$ , где  $p(x)$  — распределенная масса стержня или вала (частота колебаний  $\omega_1 = 1$ ). Затем для нагрузки  $p(x) y_{11}(x)$  определяют  $y_{12}(x)$  и т. д. до тех пор, пока упругие линии  $y_{1n}(x)$  и  $y_{1(n+1)}(x)$  совпадут по форме, т. е. будут отличаться лишь постоянным множителем. Полученные таким образом упругие линии и соответствуют первой форме собственных колебаний, причем

$$\omega_1^2 \approx \frac{y_{1n}(x_i)}{y_{1(n+1)}(x_i)}, \quad (55)$$

где  $y_{1n}(x_i)$  и  $y_{1(n+1)}(x_i)$  — ординаты для одной и той же точки  $i$ .

Процесс последовательных приближений является сходящимся. Можно представить, что первоначально заданная форма упругой линии является результатом наложения на первую форму собственных колебаний  $Y_1(x)$  составляющих упругих линий высших форм, т. е.

$$y_{10}(x) = Y_1(x) + Y_{II}(x) + Y_{III}(x) + \dots + Y_n(x). \quad (56)$$

В результате последовательных приближений составляющие высших форм постепенно уменьшаются по сравнению с первой формой колебаний, так что после  $n$  приближений

$$y_{1n}(x) = \frac{1}{\omega_1^{2n}} \left[ Y_1(x) + \left( \frac{\omega_1}{\omega_{II}} \right)^{2n} \times Y_{II}(x) + \left( \frac{\omega_1}{\omega_{III}} \right)^{2n} Y_{III}(x) + \dots \right], \quad (57)$$

где  $\omega_1 < \omega_{II} < \omega_{III}$ , т. е. процесс последовательных приближений приводит к уточнению упругой линии, соответствующей первой форме собственных колебаний:

$$y_{1n}(x) \approx \frac{1}{\omega_1^{2n}} Y_1(x).$$

Применение метода последовательных приближений см. стр. 371.

При использовании метода последовательных приближений для определения второй частоты собственных колебаний  $\omega_{II}$  в первоначально заданных упругих линиях  $y_{110}(x)$ ,  $y_{111}(x)$ , ...,  $y_{11n}(x)$  необходимо исключить составляющую первой формы колебаний. Тогда процесс последовательных приближений, при котором все высшие формы уменьшаются быстрее, чем вторая, приведет ко второй форме колебаний.

Исключение составляющей первой формы колебаний из исходной кривой  $y_{110}(x)$ , заданной для определения второй формы, производится по формуле

$$y_{110}^*(x) = y_{110}(x) - \frac{\int_0^l y_{110}(x) Y_1(x) p(x) dx}{\int_0^l [Y_1(x)]^2 p(x) dx} Y_1(x). \quad (58)$$

Затем исправленная кривая  $y_{II0}^*(x)$  принимается для задания инерционной нагрузки  $\rho(x)$   $y_{II0}^*(x)$ , для которой определяется, как и в предыдущем случае расчета первой частоты собственных колебаний, упругая линия  $y_{III}(x)$ . Последняя очищается от составляющей первой формы колебаний:

$$y_{III}^*(x) = y_{III}(x) - \frac{\int_0^l y_{III}(x) \Gamma_1(x) \rho(x) dx}{\int_0^l [\Gamma_1(x)]^2 \rho(x) dx} \Gamma_1(x). \quad (59)$$

Кривая  $y_{III}^*$  принимается в качестве нагрузочной и т. д. При такой последовательности операций, называемой *ортогонализацией*, искомая упругая линия поочередно освобождается от составляющих низших форм колебаний [по формуле (59)] и от составляющих высших форм (при последующем приближении).

В общем случае при определении высшей формы порядка  $k$  после приближения  $n$  низшие формы колебаний исключаются по формуле

$$y_{kII}^*(x) = y_{kII}(x) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\int_0^l y_{kII}(x) \Gamma_i(x) \rho(x) dx}{\int_0^l [\Gamma_i(x)]^2 \rho(x) dx} \Gamma_i(x). \quad (60)$$

Частота колебаний порядка  $k$  составляет [см. формулу (55)]

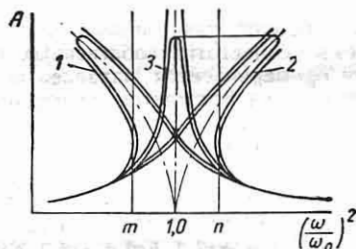
$$\omega_k^2 = \frac{y_{kII}(x_i)}{y_{k(n+1)}(x_i)}. \quad (61)$$

**Колебания нелинейных систем и систем с переменными параметрами**

**Колебания нелинейных систем.** *Псевдогармоническими* называются колебания систем, у которых упругий элемент имеет нелинейную зависимость между восстанавливающей силой и перемещением.

Резонансные кривые псевдогармонических колебаний изображены на фиг. 21. Здесь кривые 1 соответствуют мягкой характеристике упругого элемента, т. е.

уменьшению жесткости при увеличении амплитуды, а кривые 2 — жесткой характеристике, т. е. увеличению жесткости при увеличении амплитуды. Кривые 3 соответствуют линейной характеристике, т. е. постоянной жесткости системы. За пределами интервала, ограниченного на фиг. 21 ординатами  $m$  и  $n$ , каждой данной частоте соответствуют три различных значения амплитуды; среднее из этих значений неустойчиво и совершенно не проявляется, что касается



Фиг. 21. Резонансные кривые при псевдогармонических колебаниях.

относительной устойчивости двух других значений амплитуды, то обычно происходит срыв колебаний с больших амплитуд на малые. При очень плавном изменении частоты возбуждающей силы может наблюдаться „затягивание“ на большие амплитуды.

Между формой нелинейных характеристик упругого элемента и формой резонансных кривых имеется определенная связь. Для приближенного построения резонансной кривой псевдогармонических колебаний системы с одной степенью свободы задаются значениями амплитуды  $A$  и находят соответствующие им значения  $\frac{\omega}{\omega_0}$  из выражения

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + F(A) \pm \frac{A_{0c}}{A}, \quad (62)$$

где  $A_{0c}$  — деформация, соответствующая статически приложенной амплитуде внешней силы при постоянной жесткости  $C$ ;  $\omega_0$  — угловая частота резонансных колебаний при жесткости  $C$ ;  $F(A)$  — функция амплитуды, определяющаяся формой нелинейной характеристики.

Для линейной системы  $F(A) = 0$  построение резонансной кривой по формуле (62) представляется следующим образом. Проводят вертикаль

ную „скелетную“ ось, соответствующую  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$ , и для разных величин амплитуды  $A$  откладывают по обе стороны от этой „скелетной“ оси значения  $\frac{A_{0c}}{A}$  из выражения (62). Для нелинейной системы порядок построения сохраняется, но скелетная ось искривляется в соответствии с зависимостью

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + F(A), \quad (63)$$

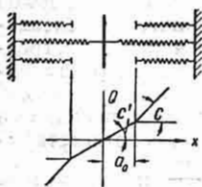
т. е. резонансная кривая линейной системы с частотой собственных колебаний  $\omega_0$  переносится параллельно оси абсцисс и располагается относительно искривленной скелетной оси [уравнение (63)]. Построение достаточно точно, если нелинейность мала.

Для параболических характеристик упругого элемента вида

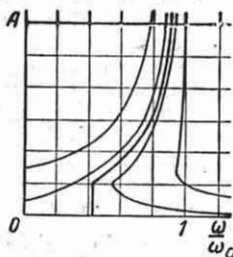
$$f(x) = C(x + ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + fx^7 + \dots);$$

$$F(A) = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} bA^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \times \times d \cdot A^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} fA^6 + \dots \right]. \quad (64)$$

Для ломаных характеристик упругого элемента (фиг. 22) резонансные кривые изображены на



Фиг. 22. Ломаные характеристики упругих элементов.



Фиг. 23. Резонансные кривые при ломаных характеристиках.

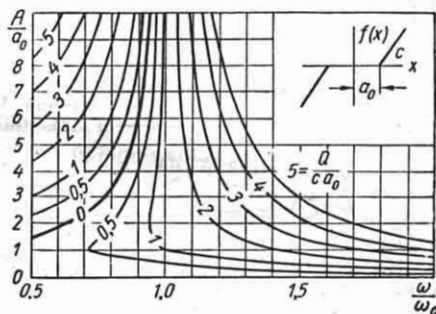
фиг. 23, причем уравнение скелетной оси имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 &= 1 + \frac{2}{\pi} \frac{(C' - C)}{C} \times \\ &\times \left[ \arcsin \frac{a_0}{A} + \frac{a_0}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{A}\right)^2} \right] \approx \\ &\approx 1 + \frac{4}{\pi} \frac{C' - C}{C} \cdot \frac{a_0}{A}. \quad (65) \end{aligned}$$

где  $C$  и  $C'$  — жесткости участков лома-

ной характеристики (фиг. 23),  $a_0$  — полная деформация первого линейного участка ( $A > a_0$ );  $\omega_0 = \frac{C}{m}$ ;  $m$  — масса системы.

На фиг. 24 изображены резонансные кривые колебаний массы при наличии зазора между упругими ограничителями.



Фиг. 24. Резонансные кривые при наличии зазора (А. И. Лурье и А. И. Чекмарев).

**Автоколебаниями** называются колебания систем, происходящие при отсутствии внешних периодических сил. Поддерживающие автоколебания периодические силы возникают в процессе самих колебаний. Возникновение автоколебаний упругой системы рассматривается как процесс свободных колебаний с отрицательным затуханием, которое приводит к нарастанию амплитуды колебаний до установившейся величины, определяющейся нелинейными свойствами системы. Такие условия получаются, например, при колебании тела, увлекаемого в движении силами трения, которые увеличиваются при малых скоростях и уменьшаются при больших.

Автоколебания такого рода проявляются в виде вибраций реза, в тормозных устройствах и т. д.

Специальные случаи возникновения автоколебаний связаны с наличием аэродинамических и гидродинамических сил (флаттер и т. д. [18]).

**Квазигармонические колебания** квазигармоническими называются колебания систем, параметры которых — масса или жесткость — являются периодическими функциями времени.

К ним относятся, например, поперечные колебания стержня под действием периодической продольной силы, колебания вращающихся валов некруглого

сечения и роторов переменной (в зависимости от угла поворота) жесткости, а также крутильные колебания кривошипно-шатунных механизмов, имеющих переменной по обороту момент инерции массы.

В таких системах возникают условия параметрического возбуждения колебаний — параметрического резонанса при определенных частотах изменения параметра:

$$\omega_{\kappa} = 2 \frac{\omega_0}{\kappa}, \quad (66)$$

где  $\kappa = 1, 2, 3 \dots$ ;  $\omega_0$  — средняя частота собственных колебаний системы.

Для валов, у которых главные моменты инерции поперечного сечения различны,

$$\omega_0^2 = \frac{C_{cp}}{m}$$

$C_{cp} = \frac{C_{max} + C_{min}}{2}$  — среднее значение изгибной жесткости вала или ротора в  $\kappa\Gamma/см$ ;  $m$  — масса ротора в  $\kappa\Gamma сек^2/см$ .

Одному обороту вала соответствуют два цикла изменения жесткости. Основное значение на практике имеют критические состояния, возникающие при условии, что угловая скорость вала равна его угловой частоте собственных колебаний и вдвое меньше нее (для горизонтальных валов).

### Возбуждение и гашение вынужденных колебаний

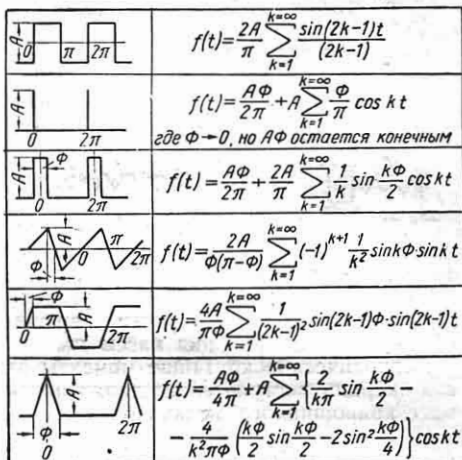
Действие полигармонической силы. На упругую систему могут воздействовать периодические силы гармонические, т. е. изменяющиеся по синусоиде, и полигармонические, состоящие из ряда гармонических составляющих.

Методы гармонического анализа приведены в т. I, стр. 312.

Результаты гармонического анализа некоторых периодических кривых даны на фиг. 25.

Если на линейную систему действует периодическая сила полигармонического состава, то общее перемещение получается в результате сложения перемещений от действия всех гармонических составляющих данной силы, рассматриваемых в отдельности. Гармонические составляющие воспринимаются колебательной системой по-разному, так как

каждая имеет свой определенный, соответствующий ей коэффициент динамического усиления (см. стр. 336). Величина коэффициента усиления в системе с одной степенью свободы для каждой из гармонических составляющих определяется по формуле (16) в зависимости от соотно-



Фиг. 25. Гармонические составляющие некоторых периодических функций.

шения  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , т. е. частоты данной гармонической составляющей и частоты собственных колебаний системы. Основной динамический эффект обычно дают те гармонические составляющие периодической силы, частоты которых близки к резонансным, т. е. так называемые околорезонансные гармонические, если только величина их не слишком мала по сравнению с другими гармоническими составляющими силы.

Таким образом, кривая динамического перемещения во времени может значительно отличаться от кривой изменения вызывающей его динамической силы.

**Силы возбуждения.** 1. Периодическое возбуждение создается под действием сил инерции движущихся частей механизмов, как, например, показано на фиг. 26, а, где при вращении неуравновешенной массы  $m_0$  реакция в точке закрепления  $O$  периодически изменяет свое направление и дает изменяющуюся по синусоиде составляющую в направлении колебаний.

Подобные условия возбуждения имеют место при наличии неуравновешенных

вращающихся частей машин. Такое возбуждение используется также в инерционных вибраторах для искусственного возбуждения колебаний при испытаниях и в технологическом оборудовании. Амплитуда возбуждающей силы изменяется пропорционально квадрату частоты и равна (обозначения см. на фиг. 26, а)

$$Q = m_0 r_0 \omega^2, \quad (67)$$

причем  $\omega$  — угловая частота изменения силы в 1/сек, равная угловой скорости вращения массы  $m_0$ .

Фиг. 26. Способы приложения периодических возбуждающих сил.

Периодические крутящие моменты от сил инерции поступательно движущихся масс кривошипного механизма

$$M_I = mR^2 \Omega^2 \sum (P_\nu \sin \nu \Omega t) \text{ кгсм.} \quad (68)$$

где  $P_\nu$  — гармонические коэффициенты сил инерции;  $m$  — масса поступательно движущихся частей в  $\text{кгсек}^2/\text{см}$ , т. е. поршня и части шатуна;  $m = m_{ш2} + m_n$  [см. формулу (121)];  $R$  — радиус кривошипа в см;  $\Omega$  — угловая скорость вращения вала в 1/сек;  $\nu$  — порядок гармонической составляющей ( $\nu = \frac{\omega}{\Omega}$ , причем  $\omega$  — частота данной гармонической составляющей).

Основной период крутящего момента от сил инерции равен времени одного оборота вала.

Значения гармонических коэффициентов ( $\nu = 1, 2, 3, 4$ ) следующие:

$$P_1 = 0,25 \frac{R}{l}; \quad (69)$$

$$P_2 = -0,50; \quad (70)$$

$$P_3 = -0,75 \frac{R}{l}; \quad (71)$$

$$P_4 = -0,25 \left( \frac{R}{l} \right)^2 \quad (72)$$

( $l$  — длина шатуна).

2. Периодическое возбуждение создается под действием давления газов

или паров (фиг. 26, б), как это в сочетании с силами инерции имеет место в поршневых двигателях и компрессорах, где такое возбуждение является причиной возникновения крутильных и изгибных колебаний валов двигателей.

В табл. 2 приведены примерные данные гармонического анализа сил давления газов различных типов двигателей. Значения амплитуд гармонических

Таблица 2

Гармонические составляющие сил давления газов в двигателях

Порядок гармонической составляющей $\nu$	Гармонические коэффициенты $c_\nu$					
	Двигатели внутреннего сгорания					
	четырёхтактные		двухтактные			
	простого действия	двойного действия	однопоршневые	с противоположными поршнями	двойного действия	Поршневые машины
0,5	40	55	—	—	—	—
1	40	6	80	160	12	15
1,5	40	55	—	—	—	—
2	35	70	70	140	140	75
2,5	30	40	—	—	—	—
3	25	10	50	100	20	12
3,5	20	25	—	—	—	—
4	15	30	30	60	60	9
4,5	10	15	—	—	—	—
5	8	7	16	32	14	4
5,5	6	9	—	—	—	—
6	4,5	9	9	18	18	3
6,5	3,5	5,2	—	—	—	—
7	3,0	2,0	6	12	4	1,5
7,5	2,5	3,7	—	—	—	—
8	2,0	4,0	4	8	8	1,0
8,5	1,5	2,2	—	—	—	—
9	1,0	1,0	2	4	2	—
9,5	0,8	1,2	—	—	—	—
10	0,7	1,4	1,4	2,8	2,8	—
10,5	0,6	0,9	—	—	—	—
11	0,5	0,5	1,0	2,0	1,0	—
11,5	0,4	0,6	—	—	—	—
12	0,3	0,6	0,6	1,2	1,2	—

составляющих порядков  $\nu$  выражены в виде гармонических коэффициентов  $c_\nu$  в процентах от среднего индикаторного давления  $p_I$ . Амплитуды крутящих моментов

$$M_\nu = \frac{c_\nu p_I}{100} \cdot \frac{\pi D^2}{4} R \text{ кгсм,} \quad (73)$$

где  $D$  — диаметр поршня в см,  $R$  — радиус кривошипа в см. В четырехтактных двигателях основной период колебаний



равен времени двух оборотов вала, так что  $\nu = 1/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$  и т. д.

3. Периодическое возбуждение может быть вызвано электромагнитным воздействием (фиг. 26, в). При прохождении переменного тока через обмотку электромагнита возникает сила, пропорциональная квадрату силы тока, имеющая периодическую составляющую двойной частоты по сравнению с частотой переменного тока.

Если на магнитное поле переменного тока наложено значительно более сильное постоянное магнитное поле, создаваемое дополнительной обмоткой постоянного тока, т. е. создана поляризация, то периодическое возбуждение в этом случае приблизительно пропорционально силе переменного тока и имеет одинаковую с ним частоту.

4. Возбуждающая сила передается через упругую связь (фиг. 26, з), т. е. колебания возбуждаются путем периодического принудительного перемещения закрепленного конца упругого элемента системы.

Если перемещение конца упругого элемента происходит по закону  $x = a \sin \omega t$ , то получается такое абсолютное перемещение массы  $m$  в пространстве, какое вызвала бы приложенная к ней внешняя сила

$$Q = Ca \sin \omega t \quad (74a)$$

при неподвижном закреплении конца упругого элемента  $C$ .

Внешняя сила, создающая при неподвижном закреплении такую же динамическую деформацию упругого элемента, какая имеет место в рассматриваемой системе, равна

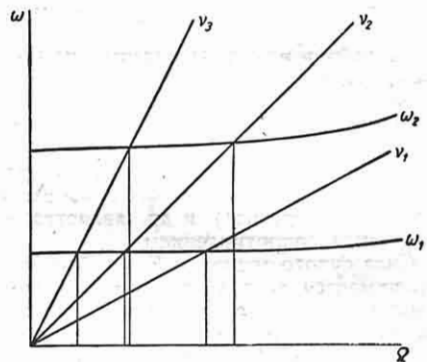
$$Q = ma \omega^2 \sin \omega t. \quad (74б)$$

Возбуждение колебаний путем перемещения закрепленного конца упругого элемента практически имеет место для сравнительно малых деталей, прикрепленных к вибрирующим объектам. Такой вид возбуждения рассматривается и при определении условий виброизоляции машин и приборов от действия внешних вибраций.

**Диаграммы возбуждения колебаний** В тех случаях, когда частоты периодических сил или моментов, возбуждающих колебания, связаны с числом оборотов машины, для определения резонансных чисел оборотов пользуются

*частотной диаграммой* или *диаграммой возбуждения колебаний*, изображенной на фиг. 27. Здесь по оси абсцисс отложено число оборотов (или угловая скорость) машины, а по оси ординат — числа (или круговые частоты) собственных колебаний исследуемой детали или конструкции.

Если частоты собственных колебаний исследуемой детали не изменяются с числом оборотов машины, то каждой собственной частоте и форме колебаний



Фиг. 27. Определение скоростей, опасных вследствие резонансов турболопаток.

на диаграмме соответствует горизонтальная прямая линия. В некоторых случаях вследствие действия центробежных сил частоты собственных колебаний деталей (например, турбинных лопаток) с изменением числа оборотов машины также изменяются, и на диаграмме фиг. 27 линии, соответствующие определенным формам колебаний, приобретают вид кривых.

Частота каждой из гармонических составляющих сил возбуждения изменяется пропорционально числу оборотов, причем коэффициентом пропорциональности является число  $\nu$ , указывающее порядок гармонической составляющей. Гармонические составляющие сил возбуждения на диаграмме фиг. 27 представляются семейством наклонных лучей. Пересечение этих лучей, выходящих из начала координат, с линиями, соответствующими определенным формам колебаний, дают на оси абсцисс резонансные числа оборотов для этих форм.

Для устранения вибраций следует избегать совпадения рабочих чисел оборотов машины с резонансными. Вблизи резонансных чисел оборотов создают

„запретные зоны“, ширина которых зависит от интенсивности резонансных колебаний и точности поддержания режима работы данной машины. Из формулы (16) видно, как, отойдя от резонанса по числу оборотов, можно уменьшить динамическую нагрузку.

Не все из полученных резонансных чисел оборотов являются одинаково опасными в отношении динамической прочности. Для решения этого вопроса требуется определение амплитуд колебаний и соответствующих напряжений расчетным или экспериментальным путем.

**Демпфирование (гашение) колебаний.** Вязкое трение жидкой и газообразной среды является линейным, т. е. пропорциональным скорости сопротивления (см. стр. 334).

*Сопротивление сухого трения, рассеяние энергии в материале* („механический гистерезис“) и др. является нелинейным сопротивлением.

Сила сухого трения  $\pm F_0$  приближенно принимается постоянной по величине и направленной всегда в сторону, противоположную движению.

Потеря энергии за один период равна

$$\Delta W = 4F_0 a, \quad (75)$$

где  $a$  — амплитуда перемещения.

Рассеяние энергии в материале за один период при переменном деформировании является функцией амплитуды деформации  $a$  вида

$$\Delta W = \rho a^m \kappa \Gamma c m, \quad (76)$$

где параметры  $\rho$  и  $m$  характеризуют материал при однородном деформировании

Декремент затухания

$$\delta \approx \frac{\Delta W}{2W} = \frac{\rho}{C} a^{m-2} \neq \text{const} \quad (77)$$

[см. формулы (9), (10), (14)].

Убывание амплитуды при свободных колебаниях происходит пропорционально  $m-1$  степени ее абсолютной величины:

$$\Delta a = \delta a = \frac{\rho}{C} a^{m-1}, \quad (78)$$

Значение  $m$  для различных металлов находится в пределах от 2 до 3,5. Для упрощения математического анализа обычно рассматриваются случаи  $m=2$  и  $m=3$ .

При однородном растяжении — сжатии упругая энергия для единицы объема составляет

$$W_p = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (79)$$

где  $\sigma$  — напряжение  $\kappa \Gamma / \text{см}^2$ ;  $E$  — модуль упругости  $\kappa \Gamma / \text{см}^2$ .

Потеря энергии на внутреннее трение для единицы объема выражается как

$$\Delta W_p = c \sigma^m, \quad (80)$$

где  $c$  — коэффициент, характеризующий материал, откуда

$$\delta = c \sigma^{m-2} E \quad (81)$$

при  $m=3$ :

$$\delta = c \sigma E, \quad (81a)$$

т. е. на оценку демпфирующих свойств материала оказывает влияние модуль упругости  $E$ .

При неоднородном распределении деформаций, для рассматриваемой детали в целом, потеря энергии  $\Delta W$  является величиной, интегрально зависящей от распределения напряжений в детали при колебаниях, так же как и величина ее общего запаса энергии, т. е.

$$\Delta W = \int_V c \sigma^m dv \quad (82a)$$

для переменных нормальных напряжений  $\sigma$  или

$$\Delta W = \int_V c_\tau \tau^m dv \quad (82b)$$

для переменных касательных напряжений  $\tau$ .

*Пример.* Определение рассеяния энергии в материале сплошного вала при крутильных колебаниях (радиус вала  $R$ , длина  $l$ ):

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_V c_\tau \tau^m dv = 2\pi \int_0^R c_\tau \tau^m l r dr = \\ &= 2\pi \int_0^R c_\tau \left( \tau_{\max} \frac{r}{R} \right)^m l r ar = \frac{2\pi}{2+m} c_\tau \tau_{\max}^m l R^2 = \\ &= \frac{2\pi}{2+m} c_\tau \left( \frac{GRa}{l} \right)^m l R^2 = \\ &= \frac{2\pi}{2+m} c_\tau \frac{G^m R^{m+2}}{l^{m-1}} a^m. \end{aligned}$$

где  $G$  — модуль сдвига;  $a$  — амплитуда закрутки вала в радианах.

В табл. 3 для некоторых материалов указаны приближенные значения  $\frac{\Delta W_p}{\sigma^3}$ , где  $\Delta W_p$  — удельное рассеяние энергии (в  $\kappa \Gamma \text{см} / \text{см}^3$ ) при напряжении  $\sigma$   $\kappa \Gamma / \text{см}^2$

Таблица 3

Рассеяние энергии в различных материалах при колебаниях

Наименована мате- риала	$\frac{\Delta W}{\sigma^3}$	$\tau$ в кг/см <sup>2</sup>
Малоуглеродистая сталь (0,25% С)	0,1·10 <sup>-10</sup>	650—2100
Хромоникелевая сталь (40% Ni, 13% Cr) нор- мализованная . . . . .	0,085·10 <sup>-10</sup>	550—3200
Монель-металл (27% Ni, 30% Cu, 1,4% Fe, 1% Mn) . . . . .	0,08·10 <sup>-10</sup>	600—3500
Магнийевый сплав (6,5% Al, 1% Zn 0,2% Mn) . . . . .	1,1·10 <sup>-10</sup>	150—650
Магний-марганцевый сплав (1,5% Mn)	2·10 <sup>-10</sup>	130—300
Фанера . . . . .	32·10 <sup>-10</sup>	30—350
Пластмасса на основе бакелитизированной бумаги . . . . .	130·10 <sup>-10</sup>	20—200
Пластмасса на основе эпихлоридных смол	780·10 <sup>-10</sup>	30—130

(растяжение — сжатие). В следующей графе таблицы указаны пределы напряжений, для которых значения  $\Delta W_p$  получены.

Для кручения данные табл. 3 следует увеличить приблизительно в  $n = 6 \div 9$  раз, т. е.

$$\frac{\Delta W_{kp}}{\tau^3} \approx \frac{nW_p}{\sigma^3}$$

В табл. 4 даны основные формулы для расчета колебаний системы с одной степенью свободы при наличии различных видов сопротивления. Указанные формулы составлены в предположении, что декременты затухания невелики ( $\delta < 0,3$ ).

Принятые здесь обозначения соответствуют формулам (75), (77) и (16).

**Способы устранения или уменьшения вибраций.** Основное средство уменьшения амплитуд колебаний состоит в „частотной отстройке“ системы. Ослабление вибраций достигается при этом путем изменения масс, жесткостей и условий возбуждения. При изменении параметров системы, попавшей в резонанс, изменяется ее частота собственных колебаний, и система выводится из резонанса. Аналогичные результаты получаются при изменении частоты возбуждения, например, путем изменения рабочего числа оборотов, если частота возбуждения с ним связана. Уменьшение колебаний может быть также получено

Таблица 4

Формулы расчета колебаний при различных видах сопротивления

Вид сопротивления	Вязкое трение	Сухое трение	Рассеяние энергии в материале
Потери энергии за один период	$\Delta W = \pi S_0 a \omega_0$	$\Delta W = 4F_0 a$	$\Delta W = \rho_0 a^2$
Декремент затухания	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{2\pi a}{\omega_0} = \pi \tau$	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{4F_0}{Ca} + \text{const}$	$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{\rho_0}{C} a + \text{const}$
Амплитуда вынужденных колебаний	$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{S_0 \omega}{C}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \tau^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{4F_0}{\pi A_0 C}\right)^2}} = \pm \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{4F_0}{\pi A_0 C}\right)^2}}$	$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\rho_0 A}{\pi C}\right)^2}}$

уменьшением или устранением возбуждающих сил. Так, например, тщательная балансировка приводит к уменьшению возбуждения, создаваемого вращающимися неуравновешенными массами. Уменьшение амплитуд резонансных колебаний достигается также введением значительного демпфирования.

Устройствами, специально предназначенными для уменьшения амплитуд колебаний, являются *демпферы* и *анти-вибраторы* (гасители). Демпферы устанавливаются в точках системы, имеющих наибольшие амплитуды колебаний, или в точках, в которых помещение демпфера изолирует систему от действия возбуждающих сил.

Демпфер (гаситель) с трением основан на введении сил трения в колебательную систему.

В ряде конструкций гасителей используются сухое трение и рассеяние энергии в материале (резиновые гасители). Применяются и гасители вязкого трения, в которых при колебаниях жидкость (масло) продавливается из одной полости в другую через отверстия.

Динамический антивибратор (гаситель) представляет собой колебательную систему малых размеров, имеющую частоту собственных колебаний, равную частоте возбуждающей силы и присоединяемому к основной системе для устранения вибраций.

В качестве динамических гасителей для крутильных (а также и поперечных) колебаний вращающегося вала широко применение получили маятниковые гасители (антивибраторы).

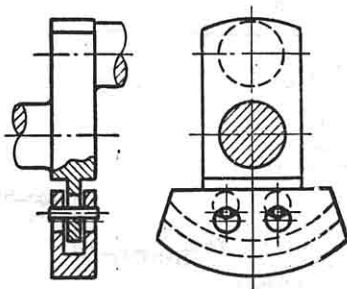
Маятниковый гаситель обладает тем свойством, что его частота собственных колебаний изменяется прямо пропорционально изменению числа оборотов, и он, таким образом, гасит заданную гармоническую составляющую возбуждения во всем диапазоне рабочих оборотов. Частота собственных колебаний маятникового гасителя равна

$$\omega_0 = \Omega \sqrt{\frac{R_0 - L}{L}} \text{ 1/сек,} \quad (83)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения вала в 1/сек;  $R_0$  — расстояние от оси вала до центра тяжести маятника в см;  $L$  — приведенная длина маятника в см.

Примером маятникового гасителя является конструкция (фиг. 28), в которой использованы подвижные противовесы коленчатого вала. Вследствие двой-

ного (бифилярного) подвеса здесь удается получить весьма малую приведенную длину маятников. Порядок гармонической составляющей, на которую настроен



Фиг. 28. Маятниковый демпфер.

бифилярный маятниковый гаситель, т. е. отношение круговой частоты его собственных колебаний к угловой скорости вала, составляет

$$\nu = \frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{\frac{R - (d_1 - d_2)}{d_1 - d_2}}, \quad (84)$$

где  $R$  — расстояние от оси вала до центра тяжести маятника;  $d_1$  — диаметр отверстий в противовесе;  $d_2$  — диаметр валikov. Траектория противовеса представляет дугу окружности радиуса  $d_1 - d_2$ .

Виброизоляция. Требования к *виброизоляции* состоят в получении весьма малой жесткости подвески какой-либо установки или прибора при достаточной прочности этой подвески, так как последняя должна выдержать статическую нагрузку виброизолируемого объекта и возможные перегрузки. Для этой цели применяются различные амортизаторы, а именно: стальные пружины в сочетании с демпфирующими устройствами или пластинчатые стальные рессоры, в которых энергия вибраций поглощается работой трения между пластинами. Большое распространение получили вибропрокладки из различных органических материалов (резина, пробка, прессованные прокладки), в том числе блоки из резиновых прокладок, соединенных в одно целое с металлическими обкладками путем вулканизации.

Условие виброизоляции заключается в том, что частота собственных колебаний изолируемого объекта на амортизаторах должна быть весьма мала по

сравнению с частотой воздействующих на него вибраций, т. е.

$$\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \ll 1. \quad (85)$$

Практически желательно иметь  $\lambda \leq 1/8$ . Коэффициент динамического усиления  $\lambda$  характеризует здесь отношение амплитуды перемещения виброизолируемого тела к амплитуде вибраций воздействующей на него системы и называется коэффициентом передачи перемещения или степенью изоляции.

### РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА КОЛЕБАНИЯ

#### Определение расчетных параметров.

Определение упругих коэффициентов и поведение масс для продольных и поперечных колебаний. Для продольных колебаний ниже указаны значения жесткости элементов, определенные как отношение продольной силы, приложенной к незакрепленному концу элемента (стержня, пружины), к деформации элемента.



Фиг. 29. Стержень постоянного сечения.

Для поперечных колебаний жесткость ниже дана как отношение поперечной силы, приложенной в точке, в которой находится сосредоточенная масса, к вызываемому этой силой перемещению указанной точки.

1. Жесткость стержня постоянного сечения при растяжении и сжатии (фиг. 29)

$$C = \frac{EF}{l} \text{ кг/см}, \quad (86)$$

где  $F$  — поперечное сечение в  $\text{см}^2$ ;  $l$  — длина в  $\text{см}$ .

2. Жесткость стержней постоянного сечения, работающих на изгиб при различных условиях закрепления, приведена на фиг. 30;  $E$  — модуль упругости;  $J$  — момент инерции сечения.

Влияние расположения очень гибкого стержня в поле земного тяготения на расчетную жесткость показано на фиг. 31. Здесь  $m$  — масса;  $g$  — ускорение свободного падения.

Призматический стержень может иметь различную жесткость на изгиб

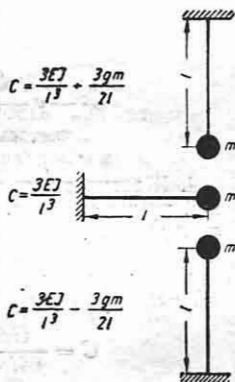
	$C = EJ \frac{3(a+b)}{a^2 b^2}$
	$C = EJ \frac{(a+b)^3}{a^3 b^3}$
	$C = EJ \frac{3}{a^3}$
	$C = EJ \frac{12(a+b)^3}{a^3 b^2 (3a+4b)}$
	$C = EJ \frac{12}{b^2 (3a+4b)}$
	$C = EJ \frac{3}{(a+b)b^2}$

Фиг. 30. Формулы расчета поперечной жесткости стержня с сосредоточенной массой.

в направлении главных осей. При закрутке стержня различие в жесткостях уменьшается, а многократно закрученный стержень имеет во всех направлениях одинаковую изгибную жесткость.

Предельная жесткость многократно закрученного стержня связана с изгибными жесткостями в направлении главных осей сечения стержня  $C_z$  и  $C_y$  следующей зависимостью:

$$\frac{1}{C_{cp}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C_z} + \frac{1}{C_y} \right) \quad (87)$$

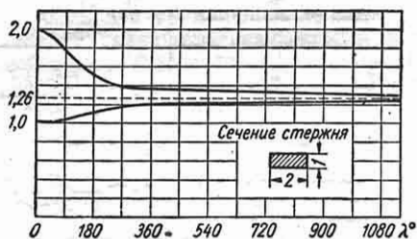


Фиг. 31. Влияние поля тяготения.

Если  $C_z \ll C_y$ , то  $C_{cp} = 2C_z$ , т. е. в пределе многократное закручивание стержня повышает его жесткость (минимальную) вдвое. Частоты собственных колебаний [см. формулу (5)] изменяются при этом, как корни квадратные из жесткостей.

Фиг. 32 в относительных величинах показывает сближение частот колебаний закрученного консольного стержня указанного на фигуре сечения с массой на конце. По оси абсцисс здесь отложены углы закрутки стержня  $\lambda$  в градусах [46].

При закрутке стержня низшая частота его колебаний, таким образом, возрастает, что следует иметь в виду при



Фиг. 32. Частоты колебаний закрученной консоли.

рассмотрении естественно закрученных стержней, например лопастей центробежных компрессоров.

3. Жесткость натянутой струны для поперечных перемещений (фиг. 33)

$$C = T \frac{a+b}{ab} \text{ кг/см}, \quad (88)$$

где  $T$  — начальное натяжение струны в кг.



Фиг. 33. Струна.

4. Жесткость цилиндрической винтовой пружины (фиг. 34, а и б) (ниже рассмотрены лишь простейшие случаи. Подробнее см. т. 4, гл. XVIII):

а) с круглым поперечным сечением прутка (проволоки)

$$C = \frac{Gd^4}{64iR^3} \text{ кг/см}, \quad (89)$$

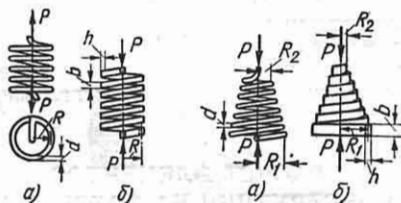
где  $G$  — модуль сдвига в кг/см<sup>2</sup>;  $d$  — диаметр прутка в см;  $R$  — радиус витка в см;  $i$  — рабочее число витков;  $i = i_{св} + 0,5$ , где  $i_{св}$  — число свободных (т. е. не находящихся в соприкосновении с опорными поверхностями) витков;

б) с прямоугольным поперечным сечением прутка

$$C = \frac{\eta h b^3 G}{2\pi i R^3} \text{ кг/см}. \quad (90)$$

Значения $\eta$				
$\frac{h}{b}$ . . . . .	1	1,5	2	3
$\eta$ . . . . .	0,141	0,196	0,229	0,263
$\frac{h}{b}$ . . . . .	4	6	8	10
$\eta$ . . . . .	0,281	0,299	0,307	0,312
$\eta$ . . . . .				0,333

$b$  и  $h$  — размеры прутка;  $h > b$ . Остальные обозначения см. формулу (89).



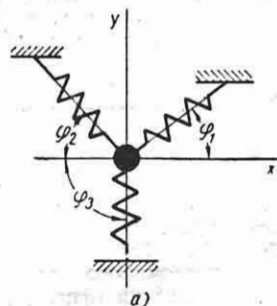
Фиг. 34. Цилиндрические пружины.

Фиг. 35. Конические пружины.

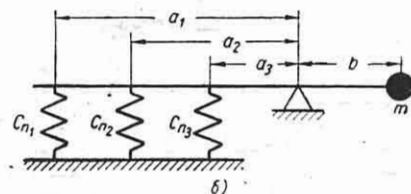
5. Жесткость конической винтовой пружины (фиг. 35, а и б):

а) с круглым сечением прутка (проволока)

$$C = \frac{Gd^4}{16i(R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1)} \text{ кг/см}; \quad (91)$$



а)



б)

б) с прямоугольным поперечным сечением (фиг. 35, б)

$$C = \frac{2\eta h b^3 G}{\pi i (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1)} \text{ кг/см}, \quad (92)$$

где  $\eta$  берется из предыдущей таблицы.

6. Расчет общей жесткости при различных способах соединения упругих элементов показан на фиг. 12. Жесткость сложных элементов приходится часто определять экспериментально (см. ниже стр. 358).

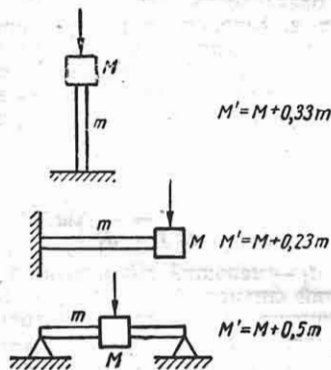
7. Для системы пружин (фиг. 36, а)

$$C_x = \sum C_i \cos^2 \varphi_i; C_y = \sum C_i \sin^2 \varphi_i. \quad (93)$$

Жесткость рычажной системы (фиг. 36, б) при абсолютно жестком рычаге равна

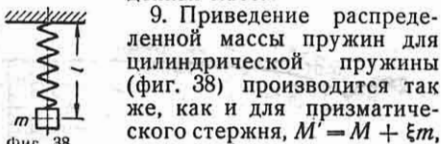
$$C = \frac{\sum_1^n C_i a_i^2}{b^2} \kappa \Gamma / \text{см}. \quad (94)$$

8. Приведение распределенной массы стержня постоянного сечения к сосредоточенной при определении основной частоты собственных колебаний дано на фиг. 37.



Фиг. 37. Приведение распределенной массы.

Здесь  $M$  — сосредоточенная масса;  $m$  — масса стержня;  $M'$  — общая приведенная масса.



Фиг. 38.

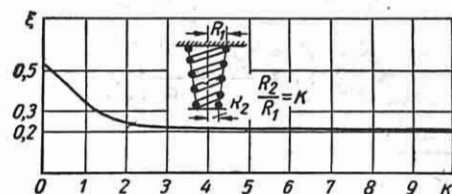
9. Приведение распределенной массы пружин для цилиндрической пружины (фиг. 38) производится так же, как и для призматического стержня,  $M' = M + \xi m$ ,

где  $\xi = \frac{1}{3}$ . Коэффициент приведенной массы конической пружины зависит от соотношения радиусов пружины у места закрепления  $R_1$  и у сосредоточенной массы  $R_2$ .

По Пономареву и Шершевскому

$$\xi = \frac{3k^{10} - 10k^6 + 15k^2 - 8}{15(k^2 - 1)(k^4 - 1)^2}, \quad (95)$$

где  $k = \frac{R_2}{R_1}$ . Зависимость  $\xi = f(k)$  показана на фиг. 39.



Фиг. 39. Приведенная масса конической пружины.

### Определение параметров системы для крутильных колебаний.

Определение податливости элементов вала. При расчете крутильных колебаний жесткость вала  $C$  в  $\kappa \Gamma / \text{см}$  определяется из обратной величины — податливости вала  $e$  в  $\kappa \Gamma^{-1} \text{см}^{-1}$ :

$$C = e^{-1}. \quad (96)$$

Общая податливость вала находится суммированием податливостей элементов, на которые разбивается данный вал:

$$e = \sum e_i. \quad (97)$$

1. Податливость участка вала

$$e = \frac{32}{\pi G} K_l \frac{l}{d^4} \text{ л/кгсм}, \quad (98)$$

где  $G$  — модуль упругости при сдвиге в  $\kappa \Gamma / \text{см}^2$ ;  $l$  — длина участка вала в  $\text{см}$ ;  $d$  — диаметр участка вала в  $\text{см}$ ;  $K_l$  — коэффициент, имеющий следующие значения:

а) для сплошного цилиндрического вала

$$K_c = 1; \quad (99a)$$

б) для полого цилиндрического вала

$$K_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}, \quad (99b)$$

где  $d_1$  — диаметр сверления в  $\text{см}$ ;

в) для сплошного конического вала

$$K_k = \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{d_1} \times \left(1 + \frac{d}{d_1} + \frac{d^2}{d_1^2}\right) \right], \quad (100)$$

если в формулу (98) подставляется больший диаметр конического участка, и

$$K_{к1} = \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left[ \frac{1}{3} \frac{d_1}{d} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{d_1}{d} + \frac{d_1^2}{d^2}\right) \right], \quad (101)$$

если в формулу (98) подставляется меньший диаметр конического участка; здесь  $d$  — больший диаметр конического участка в  $см$ ;  $d_1$  — меньший диаметр конического участка в  $см$ ;  $a$  — поправочный коэффициент, учитывающий

д) для вала, ослабленного шпоночными канавками,

$$K_{ш} = \frac{1}{\left(1 - \frac{nh}{d}\right)^4} \approx \frac{1}{1 - \frac{4nh}{d}}, \quad (103)$$

где  $h$  — глубина шпоночной канавки в  $см$ ;  $n$  — коэффициент, зависящий от числа и расположения шпонок и имеющий следующие значения: для одной врезной шпонки  $n = 0,5$ ; для двух шпонок на лыске, расположенных под углом  $90^\circ$ ,  $n = 1,0$ ; для двух шпонок на лыске, расположенных под углом  $180^\circ$ ,  $n = 1,2$ ; для двух тангенциальных шпонок под углом  $120^\circ$   $n = 0,4$ .

2. Податливость фланцевого соединения принимается равной податливости цилиндрического вала, длина которого равна суммарной толщине фланцев, а диаметр равен диаметру осевой окружности фланцевых болтов.

3. Податливость ступенчатого перехода, т. е. дополнительная податливость в месте изменения диаметра вала (на которую должна быть увеличена сумма податливостей обоих сопряженных участков вала), определяется формулой

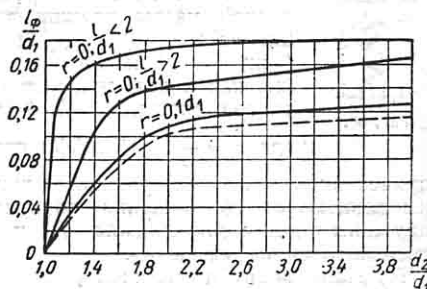
$$e = \frac{32}{\pi G} \chi \frac{1}{\kappa \Gamma \text{ см}}, \quad (104)$$

$$\chi = \lambda \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4} \right) = \frac{l_\phi}{d_1^4} \text{ см}^{-3}, \quad (105)$$

здесь  $d_1$  — меньший диаметр в  $см$ ;  $d_2$  — больший диаметр в  $см$ ;  $\lambda$  — фиктивное приращение длины вала диаметром  $d_1$  и укорочение вала диаметром  $d_2$ ;  $l_\phi$  — фиктивная длина вала диаметром  $d_1$ , эквивалентная податливости перехода.

На фиг. 41 изображены найденные опытным путем зависимости

$$\frac{l_\phi}{d_1} = f \left( \frac{d_2}{d_1} \right).$$



Фиг. 41. Кривые податливости ступенчатых переходов (по данным С. Зимаенко и В. Житомирского).

Фиг. 40. Номограмма для определения поправочного коэффициента  $a$  в  $\%$  (по данным С. Зимаенко и В. Житомирского).

Пример  $\frac{l}{d_1} = 0,8$ ;  $\frac{d}{d_1} = 1,18$ ;  $a = -6\%$ .

влияние отношений  $\frac{l}{d_1}$  и  $\frac{d}{d_1}$  на податливость конического перехода; коэффициент  $a$  определяется с помощью номограммы (фиг. 40);

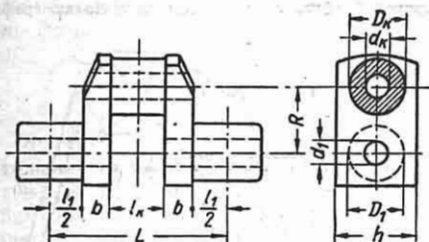
г) для конического полого вала (с цилиндрическим отверстием)

$$K_{кп} \approx K_{к} K_{н}, \quad (102)$$

где  $K_{к}$  — коэффициент для сплошного конического вала тех же размеров;  $K_{н}$  — коэффициент для полого цилиндрического вала с наружным диаметром, равным меньшему диаметру конического вала ( $d_1$ );



Нижняя кривая относится к переходам с закруглениями, радиус которых  $r \leq 0,1d_1$ . Пунктирная кривая построена по данным опытов при  $r \leq 0,1d_1$ .



Фиг. 42. Эскиз колена вала.

4. Податливость перехода от вала к ступице определяется, как и в предыдущем случае. Значение отношения  $\frac{\lambda}{d}$ , где  $d$  — диаметр вала, принимается в пределах от 0,25 до 0,33 (меньшие значения соответствуют пресовой посадке).

5. Податливость колена вала.  
По С. С. Зиманенко

$$e = \frac{32}{\pi G} \left( \frac{l_1 + 0,6b}{D_1^4 - d_1^4} + \frac{0,8l_k + 0,2 \frac{h}{R} D_1}{D_k^4 - d_k^4} + \frac{R}{\Phi} \cdot \frac{1}{bh^3} \right) \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}, \quad (106)$$

где все линейные размеры в см указаны на фиг. 42;  $G$  — модуль упругости при сдвиге в  $\kappa \Gamma / \text{см}^2$ ;  $\Phi = \sqrt{\frac{D_k}{R}}$  — фактор формы, учитывающий перекрытие шеек.  
По Картеру

$$e = \frac{32}{\pi G} \left[ \frac{l_1 + 0,8b}{D_1^4 - d_1^4} + \frac{0,75l_k}{D_k^4 - d_k^4} + 1,5 \frac{R}{bh^3} \right] \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (107)$$

Обозначения те же, что и выше.

По Тимошенко:

при свободном поперечном перемещении шеек

$$e_c = \frac{32}{\pi G} \left[ \frac{l_1 + 0,9b}{D_1^4 - d_1^4} + \frac{l_k + 0,9b}{D_k^4 - d_k^4} + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{R}{bh^3} \right] \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}; \quad (108)$$

при полном поперечном защемлении шеек

$$e_s = \frac{32}{\pi G} \left[ \frac{l_1 + 0,9b}{D_1^4 - d_1^4} + \left( \frac{l_k + 0,9b}{D_k^4 - d_k^4} \right) \left( 1 - \frac{R}{q} \right) + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{R}{bh^3} \right] \times \left( 1 - \frac{R}{2q} \right) \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (109)$$

Здесь

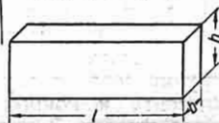
$$q = \frac{0,9(l_k + b)^2(h^2 + b^2)R}{h^3 b^3 G} + \frac{16l_k R}{\pi G(D_k^4 - d_k^4)} + \frac{6R^2}{bh^3 E} + \frac{16l_k R^2}{\pi G(D_k^4 - d_k^4)} + \frac{8l_k^3}{3\pi E(D_k^4 - d_k^4)} + \frac{16l_k R}{\pi G(D_k^4 - d_k^4)} + \frac{6R^2}{bh^3 E} + \frac{4R^3}{bh^3 E} + \frac{1,2}{G} \left[ \frac{2l_k}{\pi(D_k^2 - d_k^2)} + \frac{R}{bh} \right] + \frac{16l_k R}{\pi G(D_k^4 - d_k^4)} + \frac{6R^2}{bh^3 E} \quad (110)$$

Обозначения те же, что и выше.  $E$  — модуль продольной упругости в  $\kappa \Gamma / \text{см}^2$ . Если обозначить действительную податливость через  $e$ , то  $e_s < e < e_c$ .

6. Податливость призматического стержня (фиг. 43)

$$e = \frac{l}{\eta G h b^3} \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}, \quad (111)$$

где  $h > b$ ;  $\eta$  берется из таблицы к формуле (90).



Фиг. 43. Кручение призматического стержня.

7. Податливость на кручение цилиндрической винтовой пружины с круглым сечением прутка

$$e = \frac{128lR}{Ed^4} \kappa \Gamma^{-1} \text{ см}^{-1}. \quad (112)$$

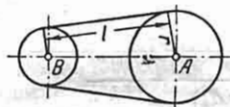
Обозначения см. формулу (89).

8. Податливость ременной передачи (фиг. 44), приведенная к валу А (т. е. выраженная как отношение угла закрутки

к моменту на валу А), составит

$$e = \frac{l}{2r_A^2 FE} \kappa \Gamma^{-1} \text{ с.м.}^{-1}, \quad (113)$$

где  $r_A$  — радиус шкива А в см;  $F$  — площадь сечения ремня в см<sup>2</sup>;  $l$  — длина ведущей части в см;  $E$  — модуль упругости ремня в кг/см<sup>2</sup>.



Фиг. 44. Ременная передача.

ляется построение силы от деформации  $Q = f(x)$  или момента от угла закрутки  $M = f(\varphi)$  при нагрузке и разгрузке детали ступенями. Построение выполняется по нескольким экспериментально полученным точкам, так как даже при заведомо линейной характеристике, но при наличии некоторого зазора единичный опыт дал бы существенную ошибку. Податливость находят, проводя среднюю линию между кривыми прямого и обратного хода, что исключает влияние трения.

Схема опыта определяется видом детали и располагаемыми средствами. Используются лабораторные машины для испытания материалов и специальные стенды. При малой жесткости на нагрузку создают грузами. Для получения момента к концам детали прикрепляются рычаги. Замеры перемещений производят обычно индикаторами часового или рычажного типа. Угловые измерения производятся также с помощью зеркала.

### Определение моментов инерции масс

1. Момент инерции массы цилиндрического участка вала

$$\Theta = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi}{32} d^4 l = \frac{m d^2}{8} \kappa \Gamma \text{ с.м.сек}^2, \quad (114)$$

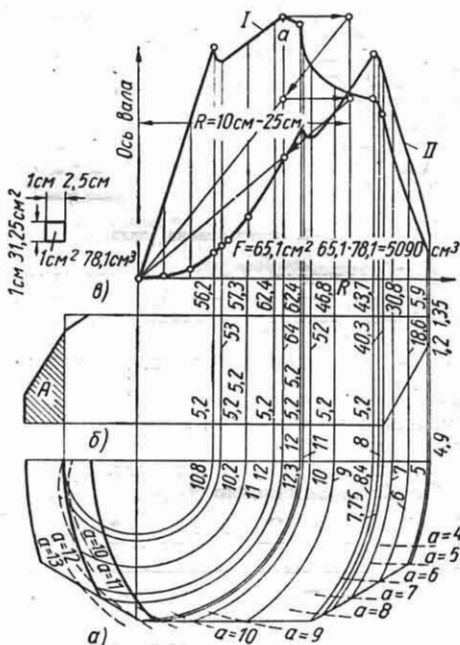
где  $\gamma$  — удельный вес в кг/см<sup>3</sup>;  $g$  — ускорение свободного падения в см/сек<sup>2</sup>;  $l$  — длина участка вала в см;  $d$  — диаметр участка вала в см;  $m$  — масса вала в кг/с.м.<sup>-1</sup>сек<sup>2</sup>.

2. Моменты инерции некоторых правильных геометрических тел приведены в т. I, стр. 394, табл. 8.

3. Моменты инерции неправильных тел определяются графическими методами.

Пример. Определение момента инерции щеки колена вала поршневого двигателя.

Из центра вала проводят (фиг. 45, а и б) ряд цилиндрических сечений и подсчитывают их площади. Полученные значения площадей откладывают для соответствующих радиусов в виде кривой I (фиг. 45, в). Затем производят графи-



Фиг. 45. Графическое определение момента инерции половины щеки коленчатого вала [41]. Порядок построения показан стрелками для точки а.

ческое умножение ординат этой кривой I на квадрат отношения соответствующих им радиусов к какому-либо выбранному радиусу R и получают кривую II. Порядок графического умножения для точки а показан на фиг. 45, в стрелками. Измерив площадь F, ограниченную кривой II и осью абсцисс, находят, с учетом масштаба чертежа, значение момента инерции по формуле

$$\Theta = \frac{1}{g} R^2 F. \quad (115)$$

4. Опытное определение моментов инерции масс

а) Метод крутильных колебаний. Для определения момента инерции  $\Theta_x$  относительно оси x, проходящей через центр тяжести, тело подвешивают при помощи тросов так, чтобы ось x была вертикальна, сообщают ему малые крутильные колебания вокруг этой оси и определяют период колебаний  $T_1$ , затем к испытываемому телу симметрично

прикрепляются две равные дополнительные массы, величина которых  $m$  и расстояние до оси вращения  $R$  известны, и определяют период колебаний  $T_2$ . Момент инерции массы подсчитывается по формуле

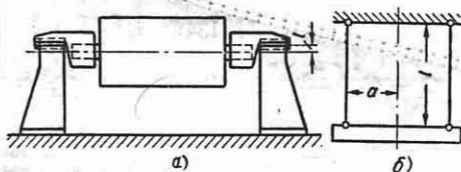
$$\Theta_x = \frac{2mR^2T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \text{ кгсмсек}^2. \quad (116)$$

б) Метод качаний. Предварительно находится положение центра тяжести тела, затем тело подвешивается или опирается на призмы так, чтобы оно могло свободно колебаться, как физический маятник. При этом измеряются расстояние  $l$  от оси качаний до центра тяжести, вес тела  $G$  и период колебаний  $T$ .

Момент инерции определяется по формуле

$$\Theta_x = \frac{T^2 l G}{4\pi^2} - \frac{G}{g} l^2 \text{ кгсмсек}^2. \quad (117)$$

Если центр тяжести тела совпадает с осью вращения, как, например, у роторов электрических машин, на шейки вала ротора надеваются подвески, снабженные опорными призмами, опорные грани которых соответственно сдвинуты для получения расстояния  $l$  относительно оси вала (фиг. 46, а).



Фиг. 46. а — экспериментальное определение момента инерции ротора с помощью ножевых опор; б — экспериментальное определение момента инерции с помощью двойного подвеса.

в) Метод параллельного подвешивания. Тело подвешивается на двух или трех тросах одинаковой длины, размещаемых симметрично относительно вертикальной оси колебаний, проходящей через центр тяжести тела, положение которого предварительно определяется (фиг. 46, б). Период крутильных колебаний такой системы относительно вертикальной оси равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{IK^2}{ga^2}} \text{ сек.}, \quad (118a)$$

где  $l$  — длина троса;  $a$  — расстояние от каждого из тросов до оси вращения;

$g$  — ускорение свободного падения;  $K$  — радиус инерции тела.

$$\Theta_x = \frac{G}{g} K^2 \text{ кгсмсек}^2. \quad (118б)$$

5. Среднее значение момента инерции масс кривошипно-шатунного механизма за один оборот составляет

$$\Theta = \Theta_k + \left[ m_{ш1} + \frac{1}{2} (m_{ш2} + m_n) \times \left( 1 + \frac{R^2}{4l^2} \right) \right] R^2, \quad (119)$$

где  $\Theta_k$  — момент инерции колена в кгсмсек<sup>2</sup>;  $m_{ш1}$  — часть массы шатуна, отнесенная к цапфе кривошипа, в кгсек<sup>2</sup>/см;  $m_{ш2}$  — часть массы шатуна, отнесенная к центру пальца или крейцкопфа;  $m_n$  — масса поршня;  $R$  — радиус колена в см;  $l$  — длина шатуна (между центрами цапф) в см:

$$m_{ш1} = \frac{\Theta_{ш}}{l^2}; \quad (120)$$

$$m_{ш2} = m_{ш} - \frac{\Theta_{ш}}{l^2}, \quad (121)$$

где  $m_{ш}$  — масса шатуна;  $\Theta_{ш}$  — момент инерции шатуна относительно центра пальца поршня или крейцкопфа. При  $\frac{s}{l} = 0,35$ ,  $m_{ш1} = 0,6m_{ш}$  и  $m_{ш2} = 0,4m_{ш}$ ;

при  $\frac{s}{l} = 0,5$ ,  $m_{ш1} = \frac{1}{3} m_{ш}$  и  $m_{ш2} = \frac{2}{3} m_{ш}$ , где  $s$  — расстояние от центра тяжести шатуна до цапфы кривошипа;  $l$  — длина шатуна.

Так как  $R^2 \ll 4l^2$ , то обычно

$$\Theta = \Theta_k + 0,5R^2 \times \left( \frac{G_n}{g} + \frac{G_{ш}}{g} + \frac{\Theta_{ш}}{l^2} \right) \text{ кгсмсек}^2, \quad (122)$$

где  $G_n$  — вес поршня в кг;  $G_{ш}$  — вес шатуна в кг;  $g$  — ускорение свободного падения в см/сек<sup>2</sup>.

6. Момент инерции гребного винта

$$\Theta = k \frac{GK^2}{g} \text{ кгсмсек}^2. \quad (123)$$

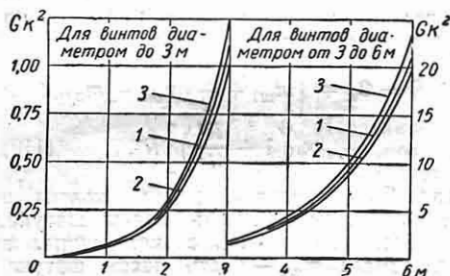
Формула (123) отличается от формулы (118б) наличием поправочного коэффициента  $k$ , учитывающего массу увлекательной винтом воды.

Значения  $k$  для различных винтов (по В. К. Житомирскому)

Стальной четырехлопастный винг	1,35
Бронзовый	1,30
Стальной трехлопастный	1,45
Бронзовый	1,40

На фиг. 47 показаны кривые значений  $GK^2$  в  $тм^2$  для гребных винтов в зависимости от диаметра винта в  $м$ .

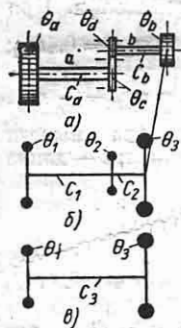
7. Момент инерции распределенной массы участка вала заменяется двумя



Фиг. 47. Значение  $GK^2$  в  $тм^2$  в зависимости от диаметра в  $м$  [56]: 1 — стальные винты; 2 — бронзовые винты; 3 — винты с бронзовыми лопастями и стальными втулками.

сосредоточенными моментами инерции половинной величины, приложенными на концах.

Приведение моментов инерции распределенных масс очень длинных участков валопровода (например, гребных валов) приближенно производится следующим образом.



Фиг. 48. Расчетные схемы систем с зубчатыми передачами.

К сосредоточенным массам, ограничивающим рассматриваемый участок, прибавляется одна треть момента инерции части его, расположенной между данной массой и узлом колебаний. Расположение узла на участке определяется предварительно из расчета упрощенной схемы рассматриваемой системы. При определении высших частот собственных колебаний длинного вала указанный способ приведения не всегда применим [см. формулу (158)].

8. Приведение систем с зубчатыми передачами (фиг. 48, а и б):

1) системе по фиг. 48, а соответствующая эквивалентная схема фиг. 48, б, приведенная к валу с числом оборотов  $n_a$ , в которой

$$\theta_1 = \theta_a; \quad (124)$$

$$\theta_2 = \theta_c + \theta_d \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2; \quad (125)$$

$$\theta_3 = \theta_b \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2; \quad (126)$$

$$C_1 = C_a; \quad (127)$$

$$C_2 = C_b \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2, \quad (128)$$

где  $\theta_i$  и  $C_i$  — моменты инерции и жесткости в соответствии с обозначениями на чертеже;  $n_a$  и  $n_b$  — числа оборотов в минуту валов  $a$  и  $b$ ; при  $\theta_2 = 0$  получается схема по фиг. 48, в, где

$$C_3 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}; \quad (129)$$

2) системе по фиг. 49, а соответствующая схема по фиг. 49, б, приведенная к валу  $a$  с числом оборотов  $n_a$ , в которой

$$\theta_1 = \theta_a; \quad (130)$$

$$\theta_2 = \theta_d + \theta_e \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2 + \theta_f \left( \frac{n_c}{n_a} \right)^2; \quad (131)$$

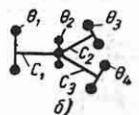
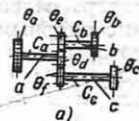
$$\theta_3 = \theta_b \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2; \quad (132)$$

$$\theta_4 = \theta_c \left( \frac{n_c}{n_a} \right)^2; \quad (133)$$

$$C_1 = C_a; \quad (134)$$

$$C_2 = C_b \left( \frac{n_b}{n_a} \right)^2; \quad (135)$$

$$C_3 = C_c \left( \frac{n_c}{n_a} \right)^2. \quad (136)$$

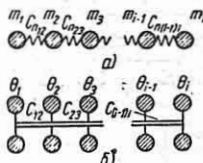


Фиг. 49. Расчетные схемы систем с зубчатыми передачами.

### Определение частот собственных колебаний

**Крутильные колебания валов с сосредоточенными массами.** При расчете реальная конструкция приводится к динамической схеме, составленной из сосредоточенных масс, соединенных упругими связями.

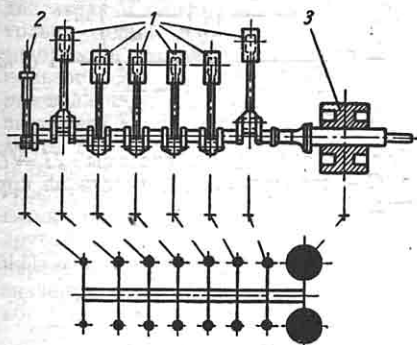
На фиг. 50 показаны динамические схемы стержней (фиг. 50, а) и валов (фиг. 50, б) для продольных и крутильных колебаний.



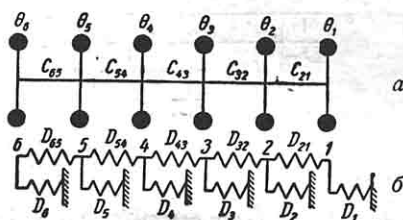
Фиг. 50. Динамические схемы продольных и крутильных колебаний.

баний. К таким схемам приводится, например, вал поршневого двигателя (фиг. 51).

динамической жесткости (см. стр. 337) системы, данной на фиг. 53, а, производится путем последовательного и парал-



Фиг. 51. Эскиз и расчетная схема вала дизель-генераторной установки: 1 — поршневая группа; 2 — компрессор; 3 — масса маховика и генератора.



Фиг. 53. Динамические жесткости.

лельного соединения элементов схемы (фиг. 53, б).

	$m_2 \quad C \quad m_1$	$\omega_0^2 = \frac{C_n (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$
	$m_2 \quad m_1$ $C_{23} \quad C_{12}$	$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{n12}}{m_1} + \frac{C_{n12} + C_{n23}}{m_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{C_{n12}}{m_1} + \frac{C_{n12} + C_{n23}}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{C_{n12} C_{n23}}{m_1 m_2}}$
	$m_3 \quad m_2 \quad m_1$ $C_{n23} \quad C_{n12}$	$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{n12}}{m_1} + \frac{C_{n23}}{m_3} + \frac{C_{n12} + C_{n23}}{m_2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{C_{n12}}{m_1} + \frac{C_{n23}}{m_3} + \frac{C_{n12} + C_{n23}}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{C_{n12} C_{n23}}{m_1 m_2 m_3} (m_1 + m_2 + m_3)}$

Фиг. 52. Частоты собственных колебаний простых систем.

В обозначениях фиг. 50, принятых при расчете крутильных колебаний, уравнение частот (см. стр. 342) для вала имеет вид

$$\begin{vmatrix} C_{12} - \omega_0^2 \theta_1 & -C_{12} & 0 & \dots \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} - \omega_0^2 \theta_2 & -C_{23} & \dots \\ 0 & -C_{23} & C_{23} + C_{34} - \omega_0^2 \theta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (137)$$

На фиг. 52 указаны формулы для определения частот собственных колебаний систем с двумя и тремя массами.

Соответствие величин для продольных и крутильных колебаний см. табл. 1.

Уравнение Терских. Уравнение Терских ниже получено методом динамических жесткостей. Определение

Последовательное сложение динамических жесткостей  $D_1$  и  $D_{21}$  дает

$$\frac{1}{\frac{1}{D_{21}} + \frac{1}{D_1}}. \quad (138)$$

К полученной жесткости параллельно прибавляется  $D_2$ :

$$D_2 + \frac{1}{\frac{1}{D_{21}} + \frac{1}{D_1}}. \quad (139)$$

Жесткость по формуле (139) складывается последовательно с  $D_{32}$ :

$$\frac{1}{\frac{1}{D_{32}} + \frac{1}{D_2 + \frac{1}{\frac{1}{D_{21}} + \frac{1}{D_1}}}}. \quad (140)$$

и т. д.

В результате для всей системы получается выражение динамической жесткости в виде цепной дроби

$$D = D_6 + \frac{1}{\frac{1}{D_{65}} + \frac{1}{D_5 + \frac{1}{\frac{1}{D_{54}} + \frac{1}{D_4 + \dots}}}} \quad (141)$$

Если в формулу (141) подставить значения

$$D_i = -\theta_i \omega^2; \quad (142)$$

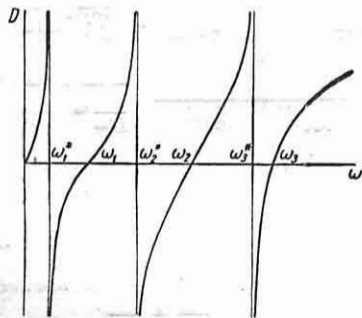
$$\frac{1}{D_{(i+1)i}} = e_{(i+1)i} \quad (143)$$

и для условий резонанса приравнять нулю общую динамическую жесткость  $D=0$ , получится уравнение частот, предложенное В. П. Терских:

$$D = 0 = -\theta_6 \omega^2 + \frac{1}{e_{65} + \frac{1}{-\theta_5 \omega^2 + \frac{1}{e_{54} \dots}}} \quad (144)$$

Определение частот собственных крутильных колебаний из уравнений частот Терских (144) производится пробными подстановками значений  $\omega$ . Расчеты упрощаются благодаря разработанным им таблицам [41].

Выражение (144) для динамической жесткости системы со многими степе-



Фиг. 54. Вид функции динамической жесткости.

нями свободы представляет функцию частоты  $\omega$ , у которой значения  $D=0$  и  $D=\infty$  (нули и полюсы) чередуются, как показано на фиг. 54 [получение  $D=f(\omega)$  см. также стр. 364].

Динамическая жесткость выражается также в виде

$$D = H \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) \dots}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^{*2}}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^{*2}}\right) \dots} \quad (145)$$

Для закрепленной системы  $H=C$ , где  $C$  — статическая жесткость на кручение,

$$C = \frac{1}{\sum_1^n e_{(i+1)i}} \quad (146)$$

Для свободной системы (вал)

$$H = - \sum \theta_i \omega^2 \quad (147)$$

Частоты  $\omega_i$  (в числителе) являются резонансными ( $D=0$ ), частоты  $\omega_i^*$  (в знаменателе) — антирезонансными ( $D=\infty$ ). При антирезонансных частотах в точке, для которой была определена динамическая жесткость, образуется узел колебаний. Антирезонансные частоты равны резонансным частотам рассматриваемой системы, закрепленной в данной точке.

*Пример.* Определение динамической жесткости системы (фиг. 55) относительно точки I и точки 2:

$$D_I = D_1 + \frac{1}{\frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_2}} = -m_1 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} - \frac{1}{m_2 \omega^2}};$$

$$D_{II} = D_2 + \frac{1}{\frac{1}{D_{12}} + \frac{1}{D_1}} = -m_2 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} - \frac{1}{m_1 \omega^2}}.$$

Резонансные частоты:

$$D_I = 0; \quad D_{II} = 0;$$

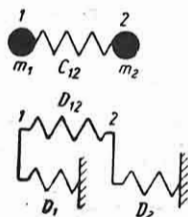
$$\frac{1}{m_1 \omega_1^2} + \frac{1}{m_2 \omega_1^2} = \frac{1}{C_{12}};$$

$$\omega_1^2 = C_{12} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

Антирезонансные частоты:

$$D_I = \infty; \quad \omega_1^{*2} = \frac{C_{12}}{m_2};$$

$$D_{II} = \infty; \quad \omega_{II}^{*2} = \frac{C_{12}}{m_1}.$$



Фиг. 55.

Для систем со значительным числом степеней свободы, в особенности если система, частоты собственных колебаний

которой требуется определить, состоит из двух сопрягаемых вместе разнородных частей (например, вала авиационного двигателя и винта), причем параметры только одной из частей варьируются (например, винта), целесообразно воспользоваться *методом пересечения характеристик*; по этому методу строится кривая значений динамической жесткости  $D_I = f(\omega)$  одной части системы (например, вала двигателя) и на том же графике, но с обратными знаками наносятся кривые динамической жесткости другой части системы (винта  $D_{II}$ ). Точки пересечения этих кривых соответствуют значению суммарной динамической жесткости:

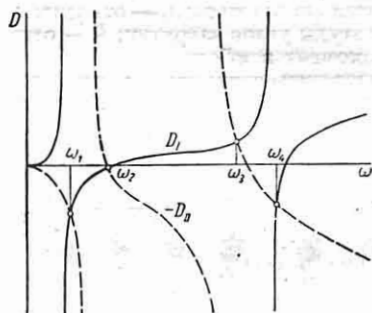
$$D_I + D_{II} = D = 0, \quad (148)$$

т. е. резонансным частотам объединенной системы (фиг. 56).

Метод остатка основан на том, что при частотах собственных колеба-

ний системы остаточный момент за последней массой равен нулю.

Расчет системы (фиг. 57, а) сведен в табл. 5.



Фиг. 56. Определение частот собственных колебаний системы вал — винт по кривым динамической жесткости вала (сплошная) и винта (пунктир).

Расчет методом остатка

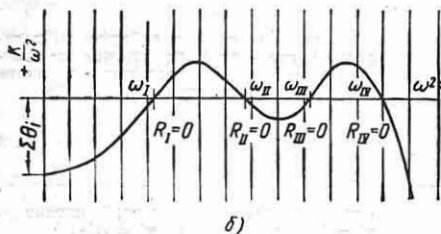
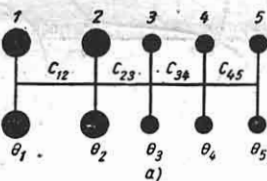
Таблица 5

№ строки	Параметры системы		0-е приближение $\omega^2 = 1,7 \cdot 10^4$		1-е приближение $\omega^2 = 2,4 \cdot 10^4$		2-е приближение $\omega^2 = 2,1 \cdot 10^4$	
	$l$	$\frac{\theta_l}{\text{в } \kappa\Gamma\text{смсек}^2}$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$
1)	$l$	$\frac{\theta_l}{\text{в } \kappa\Gamma\text{смсек}^2}$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$	$a_l$	$-a_l \theta_l \omega^2$
2)	$i(i+1)$	$\frac{1}{C_i(i+1)}$ в $1/\kappa\Gamma\text{см}$	$\frac{a_{i+1} - a_i}{-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2} = \frac{1}{C_i(i+1)}$	$-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2$	$\frac{a_{i+1} - a_i}{-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2} = \frac{1}{C_i(i+1)}$	$-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2$	$\frac{a_{i+1} - a_i}{-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2} = \frac{1}{C_i(i+1)}$	$-\sum_1^i a_i \theta_i \omega^2$
1	1	15	1,0 →	$-25,5 \cdot 10^4$	1,0	$-36,0 \cdot 10^4$	1,0	$-31,5 \cdot 10^4$
2	1,2	$5 \cdot 10^{-6}$	$-1,275 \leftarrow$	$-25,5 \cdot 10^4$	-1,80	$-36,0 \cdot 10^4$	-1,575	$-31,5 \cdot 10^4$
3	2	10	$-0,275 \rightarrow$	$4,68 \cdot 10^4$	-0,80	$19,2 \cdot 10^4$	-0,575	$12,07 \cdot 10^4$
4	2,3	$3,03 \cdot 10^{-6}$	$-0,631 \leftarrow$	$-20,82 \cdot 10^4$	-0,51	$-16,8 \cdot 10^4$	-0,588	$-19,43 \cdot 10^4$
5	3	2	$-0,906 \rightarrow$	$3,08 \cdot 10^4$	-0,31	$6,29 \cdot 10^4$	-1,163	$4,78 \cdot 10^4$
6	3,4	$4 \cdot 10^{-6}$	$-0,710 \leftarrow$	$-17,74 \cdot 10^4$	-0,42	$-10,51 \cdot 10^4$	-0,586	$-14,65 \cdot 10^4$
7	4	2	$-1,616 \rightarrow$	$5,50 \cdot 10^4$	-1,73	$8,30 \cdot 10^4$	-1,749	$7,34 \cdot 10^4$
8	4,5	$4 \cdot 10^{-6}$	$-0,490 \leftarrow$	$-12,24 \cdot 10^4$	-0,088	$-2,21 \cdot 10^4$	-0,292	$-7,34 \cdot 10^4$
9	5	2	$-2,106 \rightarrow$	$7,16 \cdot 10^4$	-1,818	$8,72 \cdot 10^4$	-2,041	$8,57 \cdot 10^4$
				$R = -5,07 \cdot 10^4$		$R = 6,51 \cdot 10^4$		$R = 1,27 \cdot 10^4$

Примечания: 1) — обозначения величин для нечетных строк таблицы; 2) — обозначения величин для четных строк таблицы. Последовательность вычислений показана стрелками.

Здесь  $i$  — порядковый номер массы;  $\theta_i$  — моменты инерции масс системы в  $\kappa\Gamma\text{смек}^2$ ;  $C_i$  ( $i+1$ ) — жесткости участков в  $\kappa\Gamma/\text{см}$ ;  $\omega$  — частота крутильных колебаний в 1/сек, которой необходимо предварительно задаться;  $a_i$  — относительные амплитуды углов закрутки;  $R$  — остаточный момент в  $\kappa\Gamma\text{см}$ .

Задавшись единичной амплитудой закрутки первой массы  $a_1 = 1$ , определяют



Фиг. 57. а — расчетная схема системы из пяти масс; б — диаграмма остаточных моментов.

последовательно по ходу стрелок табл. 5 значения величин в строках, соответствующих первой массе и первому участку вала, и получают относительную амплитуду второй массы  $a_2$ . Исходя из последней, находят значения  $a_3$  и т. д.

В конце расчета получают значение  $R$  — остаточного момента сил инерции; последнее при  $\omega$ , равном частоте собственных колебаний, должно быть равно нулю.

Значение  $R \neq 0$  означает, что в табл. 5 необходимо изменить величину  $\omega$  и повторить расчет. Расчет, таким образом, повторяется для ряда пробных значений частоты  $\omega$ .

Для нахождения точных значений частот собственных колебаний производится интерполяция с помощью построения диаграммы остаточных моментов, которая представляет зависимость  $\frac{R}{\omega^2} = f(\omega^2)$ .

Подобная диаграмма схематически изображена на фиг. 57, б. Как видно из чертежа, кривая имеет ряд пересечений с осью абсцисс, соответствующих зна-

чениям частот собственных колебаний. Для выяснения вида кривой вычисления ведутся с помощью логарифмической линейки, а вблизи значений искомого частот более точно — на арифмометре.

При расчете по методу остатка в качестве пробных значений  $\omega$  нужно задаваться приближенными значениями частоты собственных колебаний, для чего используются решения упрощенных схем (см. фиг. 52). Приближенное значение основной частоты собственных колебаний системы (фиг. 57, а) получено объединением элементов  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  и  $\theta_5$  в один  $\theta_0$ , приложенный в их общем центре массы.

Для системы из двух масс

$$\omega_0^2 = \frac{C_{01}(\theta_0 + \theta_1)}{\theta_0\theta_1} = 1,70 \cdot 10^4.$$

Последовательные приближения можно получить и чисто аналитическим путем. При этом последующее приближение находится по формуле

$$\omega_0^2 = \frac{\sum_1^n C_{(i-1)i}(a_i - a_{i-1})^2}{\sum_1^n \theta_i a_i^2}, \quad (149)$$

в которую подставляются данные из расчета для предыдущего приближения.

Для приводимого примера (фиг. 57) получается

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{6,38 \cdot 10^5}{26,8} = 2,38 \cdot 10^4 \approx 2,4 \cdot 10^4;$$

$$\omega_{(2)}^2 = \frac{7,78 \cdot 10^5}{37,42} = 2,08 \cdot 10^4 \approx 2,1 \cdot 10^4;$$

$$\omega_{(3)}^2 = \frac{7,17 \cdot 10^5}{35,47} = 2,02 \cdot 10^4;$$

$$\omega_{(2)} \approx \omega_{(3)}.$$

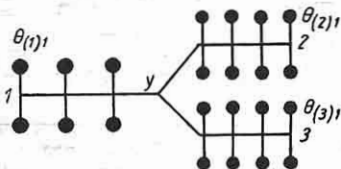
Между остаточным моментом  $R$  и динамической жесткостью для конца системы  $D_n$  имеет место соотношение

$$D_n = \frac{R}{a_n}, \quad (150)$$

где  $a_n$  — амплитуда перемещения последней массы, так что значения  $R_1$ , полученные при различных частотах, можно использовать для построения зависимостей  $D = f(\omega)$ , требующихся при расчете по методу пересечения характеристик (см. фиг. 56).



Расчет разветвленных систем по методу остатка. Для определения частоты собственных колебаний разветвленной системы (фиг. 58), имеющей  $n$  ветвей, сопряженных в точке  $y$ , расчет для каждой из ветвей системы (1), (2), (3), ..., (n) ведется в табличной форме, причем необходимо задаться единичными



Фиг. 58. Расчетная схема системы с зубчатой передачей.

относительными амплитудами углов закрутки для крайних масс ( $\theta_{(1)1}$ ,  $\theta_{(2)1}$ ,  $\theta_{(3)1}$ , ...,  $\theta_{(n)1}$ ):

$$a_{(1)1} = a_{(2)1} = a_{(3)1} = \dots = a_{(n)1} = 1. \quad (151)$$

В результате для принятой расчетной частоты  $\omega$  получаются значения относительных амплитуд в точке сопряжения ( $a_{(1)y}$ ,  $a_{(2)y}$ ,  $a_{(3)y}$ , ...,  $a_{(n)y}$ ) и значения остаточных моментов ( $R_{(1)}$ ,  $R_{(2)}$ ,  $R_{(3)}$ , ...,  $R_{(n)}$ ). Принятая частота  $\omega$  будет равна частоте собственных колебаний системы в том случае, если выполнено условие

$$\sum_1^n \frac{R_{(i)}}{a_{(i)y}} = \sum_1^n D_{(i)} = 0. \quad (152)$$

**Продольные и крутильные колебания стержней постоянного сечения с распределенной массой.** Продольные колебания. Уравнение колебаний стержня постоянного сечения было рассмотрено на стр. 342.

Частоты собственных продольных колебаний призматического стержня определяются по формуле

$$\omega_k = \frac{\beta}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \text{ сек}^{-1}, \quad (153)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости материала стержня в  $\text{кг/см}^2$ ;  $g$  — ускорение свободного падения в  $\text{см/сек}^2$ ;  $\gamma$  — удельный вес материала стержня в  $\text{кг/см}^3$ ;  $l$  — длина стержня в  $\text{см}$ ;  $\beta$  — корни уравнения частот.

Для стержня (фиг. 59), заделанного одним концом и несущего на другом конце сосредоточенную массу,

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\alpha}, \quad (154)$$

где  $\alpha$  — отношение массы, сосредоточенной на конце стержня, к массе стержня.

Решение уравнения (154) производится графическим путем.

Значения наименьшего корня уравнения (154) —  $\beta_1$ , соответствующего основной частоте колебаний системы, даны в табл. 6.



Фиг. 59.

Таблица 6

Значения наименьшего корня уравнения (154)

$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$	$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$	$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$	$\frac{1}{\alpha}$	$\beta_1$
0,01	0,10	0,60	0,70	2,0	1,11	8,0	1,40
0,05	0,22	0,70	0,75	3,0	1,20	9,0	1,41
0,10	0,32	0,80	0,79	4,0	1,27	10,0	1,42
0,20	0,43	0,90	0,82	5,0	1,32	15,0	1,47
0,30	0,52	1,00	0,86	6,0	1,37	20,0	1,53
0,40	0,59	1,50	0,98	7,0	1,39	$\infty$	1,57
0,50	0,65						

В общем случае стержня, несущего на концах сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$ , частоты собственных продольных колебаний определяются по формуле (153), причем значения  $\beta$  находятся из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \beta}{\alpha_1 \alpha_2 \beta^2 - 1}, \quad (155)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — соответственно отношения сосредоточенных масс  $m_1$  и  $m_2$  к распределенной массе стержня.

Определение частот собственных продольных колебаний призматического стержня, без сосредоточенных масс, производится в зависимости от условий закрепления концов по следующим формулам:

для стержня, имеющего оба конца свободными или жестко закрепленными,

$$\omega_k = \frac{\pi k}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}; \quad (156)$$

для стержня с одним свободным и другим закрепленным концом

$$\omega_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad (157)$$

где  $k$  — целое число, указывающее порядок частоты собственных колебаний, остальные обозначения те же, что и в формуле (153).

**Крутильные колебания.** Определение собственных частот крутильных колебаний длинного стержня или вала при различных условиях закрепления его концов и различных соотношениях моментов инерции масс, сосредоточенных на его концах, производится аналогично определению частот собственных продольных колебаний по формулам (153), (156) и (157). При этом формула (153) соответствует формула

$$\omega_k = \frac{\beta}{l} \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}} \text{ сек}^{-1}, \quad (158)$$

где  $G$  — модуль упругости материала вала при сдвиге в  $\text{кг/см}^2$ ;  $l$  — длина вала в  $\text{см}$ ;  $\beta$  — корень уравнения частот, определяемый из уравнений (154), (155) в зависимости от условий на концах вала.

В этих уравнениях  $\alpha$  для данного случая — отношение моментов инерции массы, сосредоточенной на конце вала, к моменту инерции массы вала.

**Поперечные колебания стержней и критические скорости валов.** Определение частот собственных поперечных колебаний стержней и критических скоростей валов производится по одинаковым формулам. Некоторое различие, связанное с действием гироскопических моментов, показано ниже, при рассмотрении влияния различных факторов (стр. 374).

**Критическими** называются скорости, при которых движение вала становится неустойчивым и возникают большие поперечные отклонения от положения равновесия, как при резонансе. Такие состояния получаются при совпадении угловой скорости вала с угловыми частотами его собственных поперечных колебаний.

Критическая скорость вала с насаженным на него неуравновешенным диском определяется из условий равновесия центробежной силы, под действием которой прогиб вала  $u$  будет увеличи-

ваться, и восстанавливающей силы упругого вала, т. е.

$$m(y + \epsilon)\Omega^2 = Cy, \quad (159)$$

откуда

$$y = \frac{\epsilon\Omega^2}{\omega_{кр}^2 - \Omega^2}, \quad (159a)$$

где  $\epsilon$  — эксцентриситет диска,

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{C}{m}}, \quad (160)$$

т. е. критическая скорость равна частоте собственных колебаний вала.

Движение оси вала на критических скоростях можно представить как результат сложения двух поперечных колебаний этого вала, взаимно перпендикулярных в пространстве и сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ . При скоростях выше критической движение вала становится устойчивым, и при больших скоростях гибкий вал с вращающимся ротором самоцентрируется, т. е. вращается вокруг оси, проходящей через его центр тяжести.

Для устойчивой работы вала между его рабочей угловой скоростью  $\Omega$  и критической скоростью  $\omega_{кр}$  должны быть выдержаны определенные соотношения, а именно:

1) при работе в докритической зоне  $\omega_1 \geq 1,3\Omega$ ;

2) при работе в надкритической зоне  $1,4\omega_1 < \Omega < 0,7\omega_{11}$ .

В однодисковых роторах с гибким самоцентрирующимся валом принимается  $\Omega = (5 \div 7)\omega_1$ .

Работа вала при скоростях выше критической требует обеспечения перехода через критическую скорость. Для этого используются различные меры, например увеличение скорости прохождения зоны критических оборотов при разгоне вала. Такой метод обычно применяют лишь к малым агрегатам с точно отбалансированными роторами. Наиболее общим методом является введение демпфирования в систему вала.

Основным источником демпфирования валов являются подшипники. Демпфирование в шарикоподшипниках значительно меньше, чем в подшипниках скольжения, где источником потерь энергии является работа выдавливания масла. Применение шарикоподшипников для быстроходных валов требует более тщательной балансировки или установки

подшипника на упруго-фрикционной опоре, поглощающей энергию при колебаниях вала.

**Определение частот поперечных колебаний стержней.** Определение частот собственных колебаний невесомых стержней с одной сосредоточенной массой производится по формулам (5), (32) и (33). Значения жесткостей для стержней постоянного сечения при различных условиях закрепления приведены на фиг. 30.

Для невесомого стержня или вала, несущего несколько сосредоточенных масс, низшая угловая частота собственных колебаний может быть приближенно найдена по формуле Дункерля

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots, \quad (161)$$

где  $\omega_i$  — угловые частоты собственных колебаний стержня, несущего только одну массу  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ), или

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\sum y_{cmi}}, \quad (162)$$

где  $y_{cmi}$  — статический прогиб в точке нахождения массы  $m_i$  под действием ее веса для стержня, несущего только одну указанную массу.

Применение формул (161) и (162) для определения низшей частоты собственных колебаний стержня или вала с несколькими сосредоточенными массами приводит к правильным результатам при условии, что формы упругих линий при колебаниях для каждой из составляющих систем с одной массой близки к форме упругой линии колебаний заданной системы.

Частоты собственных колебаний невесомой двухопорной балки, нагруженной равными массами на равных расстояниях одна от другой, определяются по формуле [47]

$$\omega_k^2 = \frac{EJ}{ml^3} \cdot \frac{12 \left( \cos \frac{k\pi}{n+1} - 1 \right)^2}{\left( 2 + \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)}, \quad (163)$$

где  $n$  — количество масс;  $l$  — расстояние между массами в см;  $k$  — порядок частоты колебаний;  $m$  — сосредоточенная масса.

Уравнение поперечных колебаний стержня постоянного сечения рассмотрено выше, на стр. 342.

Частоты собственных поперечных колебаний для стержней постоянного сечения с равномерно распределенной массой определяются по формуле

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \text{ сек}^{-1}, \quad (164)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости в кг/см<sup>2</sup>;  $J$  — момент инерции поперечного сечения стержня в см<sup>4</sup>;  $l$  — длина стержня в см;  $\rho$  — масса единицы длины стержня в кг/сек<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>;  $\lambda_k$  — постоянная для собственных колебаний порядка  $k$ .

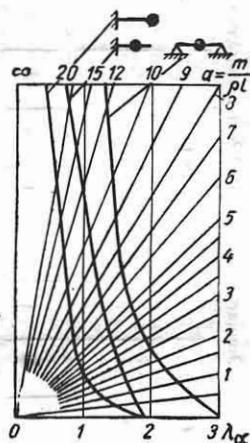
Значения постоянной  $\lambda$  и уравнения частот  $f(\lambda) = 0$  для разных случаев закрепления приведены в табл. 7.

Для жестко зашпеленных консолей с сосредоточенной массой  $m$  на конце и с сосредоточенной массой посередине зависимости  $\lambda_\alpha = f(\alpha)$ , где  $\alpha = \frac{m}{\rho l}$ ,

приведены на фиг. 60 для низшей частоты собственных колебаний. Там же приведена зависимость  $\lambda_\alpha = f(\alpha)$  для двухопорной балки с сосредоточенной массой по середине пролета. Кривые отмечены соответствующими им схематическими изображениями стержней.

Значения  $\lambda_1$  для низшей частоты некоторых многоопорных балок и валов постоянного сечения могут быть получены из фиг. 61, на которой изображены кривые значений  $\lambda_1^2$  для различных соотношений размеров пролетов  $l_1$  и  $l_2$ . Здесь  $\lambda_1$  приведено к длине  $l_1$ , т. е.





$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \text{ сек}^{-1}. \quad (165)$$



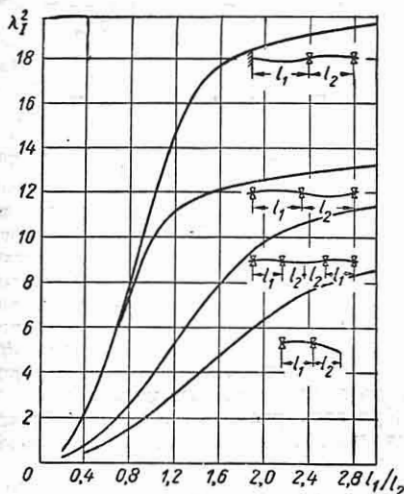
Фиг. 60. Зависимость  $\lambda$  от  $\alpha$  для консоли с сосредоточенной массой на конце, консоли с сосредоточенной массой посередине и двухопорной балки с массой посередине. Значения  $\lambda$  отложены по горизонтали, а значения  $\alpha$  отсчитываются с помощью лучей.

Таблица 7

Значения постоянной  $\lambda$  и уравнения частот

Род закрепления	Зашемленный	Скользкий	Шарнирный	Свободный
Конец стержня $x=1$				
Конец стержня $x=0$	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
Свободный	1,875 4,694 7,855 10,966 14,137	2,362 5,498 8,64 11,79 14,93	3,927 7,069 10,21 13,35 16,49	4,730 7,853 10,996 14,15 17,28
	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 = 0$	$\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda = 0$	$\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda = 0$	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 = 0$
Шарнирный	3,927 7,069 10,21 13,35 16,49	$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{2}$ $\frac{9\pi}{2}$	$\pi$ $2\pi$ $3\pi$ $4\pi$ $5\pi$	
	$\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda = 0$	$\cos \lambda = 0$	$\sin \lambda = 0$	
Скользкий	2,362 5,438 8,64 11,79 14,93	$\pi$ $2\pi$ $3\pi$ $4\pi$ $5\pi$		
	$\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda = 0$	$\sin \lambda = 0$		
Зашемленный	4,730 7,853 10,996 14,15 17,28			
	$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 = 0$			

Методы расчета частот собственных колебаний стержневых систем приведены в работах [1], [5], [6], [10], [47] и др.



Фиг. 61. Зависимость  $\lambda_1^2 = \omega_1 l_1^2 \sqrt{\frac{\rho}{EJ}}$  от  $\frac{l_1}{l_2}$  для двухпролетных балок постоянного сечения.

Поперечные колебания стержней и критические скорости валов переменного сечения. Для определения частот собственных колебаний стержней и критических скоростей валов переменного сечения применяется энергетический метод и методы последовательных приближений.

Существо указанных методов рассмотрено выше, стр. 343.

Энергетический метод. В качестве расчетной упругой линии задается упругая линия, полученная статическим нагружением рассматриваемой системы.

Основная частота собственных колебаний стержней или валов переменного сечения определяется по формуле

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\int_0^l p(x) u(x) dx}{\int_0^l p(x) u^2(x) dx}}, \quad (166)$$

где  $u(x)$  — ординаты прогибов упругой линии стержня в см под действием статически приложенной распределенной

нагрузки  $p(x)$  в кг/см;  $\rho(x)$  — погонная масса стержня в кгсек<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>.

Приближение по приведенной выше формуле будет получаться тем большим, чем ближе совпадает форма принятой статической упругой линии изгиба с формой упругой линии собственных колебаний. Хорошее совпадение для определения основной частоты собственных колебаний дает упругая линия от равномерно распределенной нагрузки  $p(x) = \text{const}$  или от нагрузки собственного веса. Можно исходить также из упругой линии изгиба от сосредоточенных сил. Точность расчета в этом случае будет зависеть от выбора места расположения сосредоточенных сил. Если последние приложены в конце консольных и в середине двухпролетных пролетов, ошибка в определении первой частоты собственных колебаний не превышает обычно 2—3%.

При определении исходной упругой линии для многоопорных балок необходимо в смежных пролетах изменять знак распределенной нагрузки или сосредоточенных сил.

Если, кроме распределенной массы, имеется также ряд сосредоточенных масс  $m_i$ , то в знаменателе формулы (166) прибавляется под корнем член

$$\sum_1^n u^2(x_i) m_i, \quad \text{где } u(x_i) \text{ — ординаты уп-}$$

ругой линии для точек, в которых расположены соответствующие массы  $m_i$ .

Пример. Расчетная формула для определения первой частоты собственных колебаний консоли при использовании упругой линии от сосредоточенной силы на конце имеет следующий вид:

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{P(l) u(l)}{\int_0^l p(x) u^2(x) dx}}, \quad (167)$$

где  $P(l)$  и  $u(l)$  — соответственно статическая сила и прогиб на конце консоли.

Для консоли с сосредоточенной массой  $m(l)$  на конце

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{P(l) u(l)}{\int_0^l p(x) u^2(x) dx + m(l) u^2(l)}}, \quad (168)$$

Пример. Определение основной частоты собственных колебаний консольного стержня переменного сечения (например, турбинной лопатки) по формулам (166), (167).

Данные расчета стержня приведены в табл. 8, причем  $\frac{J(0)}{J(x)}$  — отношение момента инерции сечения в месте заделки ( $x=0$ ) к моменту инер-

Таблица 8

$x/l$	$\frac{\rho(x)}{\rho(0)}$	$\frac{J(x)}{J(0)}$	$D_p$	$\frac{\rho(x) D_p^2}{\rho(0)}$	$D_p$	$\frac{\rho(x) D_p^2}{\rho(0)}$
0,0	1,000	1,000	0,000	0,0000	0,000	0,0000
0,1	0,950	1,115	0,005	0,0000	0,002	0,0000
0,2	0,895	1,250	0,020	0,0004	0,009	0,0001
0,3	0,841	1,412	0,045	0,0017	0,020	0,0003
0,4	0,790	1,608	0,080	0,0051	0,035	0,0010
0,5	0,735	1,847	0,124	0,0113	0,051	0,0019
0,6	0,683	2,143	0,178	0,0216	0,071	0,0035
0,7	0,630	2,516	0,241	0,0366	0,093	0,0055
0,8	0,578	2,996	0,310	0,0555	0,115	0,0077
0,9	0,525	3,626	0,386	0,0782	0,138	0,0100
1,0	0,473	4,477	0,465	0,1024	0,162	0,0124

ции сечения  $x$ ;  $l$  — длина консольного стержня;  $\frac{\rho(x)}{\rho(0)}$  — отношение погонной массы стержня для сечения  $x$  к погонной массе в месте заделки.  $D_p(x) = \frac{EJ(0)}{P l^3} y_p(x)$ , где  $y_p(x)$  — ординаты статической упругой линии от сосредоточенной силы;  $D_p(x) = \frac{EJ(0)}{P l^4} y_p(x)$ , где  $y_p(x)$  — ординаты статической упругой линии от равномерно распределенной нагрузки.

Определение интегралов в формулах (167) и (168) произведено численным путем по формуле трапеций. В данном примере при 10 участках

$$\int_0^l \frac{\rho(x)}{\rho(0)} D^2(x) dx = \frac{l}{10} \left[ \frac{D^2(0)}{2} + \frac{\rho(0,1)}{\rho(0)} D^2(0,1) + \frac{\rho(0,2)}{\rho(0)} D^2(0,2) + \dots + \frac{\rho(0,9)}{\rho(0)} D^2(0,9) + \frac{\rho(1)}{\rho(0)} \cdot \frac{D^2(1)}{2} \right] = lA; \quad (169a)$$

аналогично

$$\int_0^l D(x) dx = lB. \quad (169b)$$

Из табл. 8 следует:  $lA_p = 0,02616$ ;  $lB_p = 0,0615$ ;  $lA_p = 0,00362$ .

В случае применения упругой линии от сосредоточенной силы, приложенной на конце,

$$\begin{aligned} \omega_1 &< \sqrt{\frac{P \frac{P l^3}{EJ(0)} D_p(l)}{\rho(0) \left( \frac{P l^4}{EJ(0)} \right)^2 l A_p}} = \\ &= \sqrt{\frac{D_p(l)}{A_p} \cdot \frac{l}{l^2} \sqrt{\frac{EJ(0)}{\rho(0)}}} = \\ &= \frac{4,21}{l^2} \sqrt{\frac{EJ(0)}{\rho(0)}}. \quad (169b) \end{aligned}$$

Близкий результат получается и в случае использования для того же примера упругой линии от равномерно распределенной нагрузки:

$$\begin{aligned} \omega_1 &< \sqrt{\frac{P^2 l^4}{EJ(0)} \frac{l B_p}{\rho(0) \left( \frac{P l^4}{EJ(0)} \right)^2 l A_p}} = \\ &= \sqrt{\frac{B_p}{A_p} \cdot \frac{l}{l^2} \sqrt{\frac{EJ(0)}{\rho(0)}}} = \\ &= \frac{4,12}{l^2} \sqrt{\frac{EJ(0)}{\rho(0)}}. \quad (169r) \end{aligned}$$

Другой вариант энергетического метода используется в тех случаях, когда нет заранее определенной статической упругой линии, а известна форма собственных колебаний для системы, аналогичной рассматриваемой по условиям закрепления и сопряжений, но имеющей стержень постоянного сечения и равномерно распределенную массу.

При этом угловая частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_1 \leq \sqrt{\frac{\int_0^l EJ(x) y''^2(x) dx}{\int_0^l \rho(x) y^2(x) dx + \sum_1^n m_i y^2(x_i)}}. \quad (170)$$

где  $E$  — модуль упругости в  $\text{кг/см}^2$ ;  $J(x)$  — момент инерции сечения в  $\text{см}^4$ ;  $y(x)$  — ордината упругой линии колебаний аналогичного стержня постоянного сечения с равномерно распределенной массой.

Пример. Формы колебаний двухпорной балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой представляют собой синусоиды

$$y_k(x) = y_{\max} \sin k\pi \frac{x}{l}, \quad (171)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , или, если принять  $y_{\max} = 1$ ,

$$y_k(x) = \sin k\pi \frac{x}{l}. \quad (172)$$

При учете осевых центробежных сил для колебаний вращающегося стержня

$$T_{\max} = V_{\max} + W_{uc};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{V_{\max} + W_{uc}}{H}}, \quad (173)$$

где  $H$  — см. формулу (53);  $V_{\max}$  — см. формулу (54);  $W_{uc}$  — работа центробежных

сил при перемещении стержня от среднего в крайнее положение:

$$W_{цс} = \int_0^l \rho(x) r \omega^2 \Delta_0 dx; \quad (174)$$

$\rho(x)$  — погонная масса стержня;  $r = r_0 + x$  — расстояние сечения от оси вращения;  $\Delta_0 = \Delta - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{r}$ ;  $\Delta$  — перемещение точки приложения центробежной силы по ее направлению;

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^x y'^2 dx. \quad (175)$$

Метод последовательных приближений (см. выше, стр. 344). Расчет критической скорости (или частоты собственных колебаний) вала переменного сечения, несущего ряд масс, производится следующим образом.

Прежде всего строится статическая упругая линия вала от действия сил веса, для чего обычно пользуются графическим методом веревочного многоугольника. Затем, задавшись какой-нибудь угловой скоростью вращения вала (или частотой)  $\Omega_0$ , определяют центробежные силы (силы инерции) масс системы, исходя из прогибов от сил веса.

Для массы  $i$  центробежная сила будет равна

$$F_i = m_i y_i \Omega_0^2 \text{ кг}, \quad (176)$$

где  $m_i$  — масса в  $\text{кгсек}^2/\text{см}$ ;  $y$  — ордината упругой линии изгиба от веса в  $\text{см}$ ;  $\Omega$  — угловая скорость вала, задаваемая обычно  $\Omega_0 = 1 \text{ сек}^{-1}$  или числом, кратным 10.

После этого строят упругую линию от центробежных сил с ординатами  $y_\omega$ . Если форма полученной таким образом упругой линии близка к форме упругой линии от сил веса, то первую критическую скорость определяют по формуле

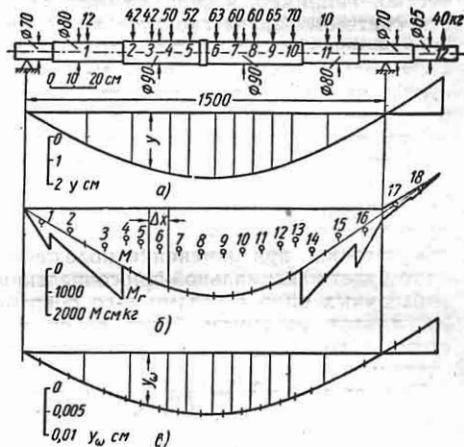
$$\omega_1 = \Omega_0 \sqrt{\left(\frac{y}{y_\omega}\right)_{cp}}, \quad (177)$$

где  $\left(\frac{y}{y_\omega}\right)_{cp}$  — среднее значение из близких между собой отношений ординат упругих линий  $y$  и  $y_\omega$  для ряда точек вала.

Таблица 9

№ массы	$G$ в кг	$m$ в $\frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}}$	$l$ в см	$y$ в см	$F_i$ в кг	$y_\omega$ в см	$\frac{y}{y_\omega}$	Отклонение в % от $\left(\frac{y}{y_\omega}\right)_{cp}$
1	12	0,0122	201	1,42	1,73	0,00675	210,5	0,5
2	42	0,0429	322	2,14	9,2	0,0103	208	-0,7
3	42	0,0429	322	2,35	10,1	0,0114	208	-1,6
4	50	0,0510	322	2,52	12,85	0,0122	206,3	-1,5
5	52	0,0530	322	2,63	13,9	0,0127	207	-1,2
6	63	0,0642	322	2,65	17,0	0,0128	207	-1,2
7	60	0,0612	322	2,60	15,9	0,0124	209,2	0
8	60	0,0612	322	2,47	15,1	0,0118	209,2	0
9	65	0,0662	322	2,27	15,1	0,0108	210	0
10	70	0,0714	322	2,00	14,3	0,00945	212	1
11	10	0,0102	201	1,35	1,4	0,0063	214	2
12	40	0,0408	87,6	-1,56	6,3	0,0072	215	2,5

Пример. Как видно из табл. 9, для примера вала фиг. 62 среднее значение отношений  $\left(\frac{y}{y_\omega}\right)$  равно 209,5, причем отклонение от него для от-



Фиг. 62. К примеру расчета первой критической скорости двухопорного вала: а — статическая упругая линия; б — эпюра изгибающих моментов; в — упругая линия от центробежных сил.

дельных точек не превышает 2,5%. В приведенном примере принято  $\Omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$ . Таким образом, здесь

$$\omega_1 = 10 \sqrt{209,5} = 144,5 \text{ 1/сек.}$$

Если расхождение между заданной и полученной упругими линиями получается значительным, то следует, приняв полученную упругую линию в качестве исходной, повторить расчет в описанной

выше последовательности. Уточненное значение для частоты собственных колебаний или критической скорости по данным предыдущего приближения дает формула

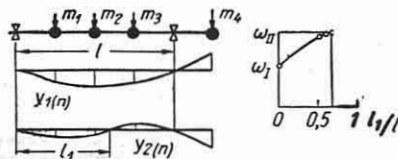
$$\omega_{(n)}^2 \leq \omega_{(n-1)}^2 \frac{\sum m_i y_{i(n-1)} y_{i(n)}}{\sum m_i y_{i(n)}^2}, \quad (178)$$

где  $m_i$  — массы системы в  $\text{кгсек}^2/\text{см}$ ;  $y_{i(n-1)}$  — ординаты упругой линии, которая предварительно задается для первого приближения или получается из расчета предыдущего приближения, в  $\text{см}$ ;  $y_{i(n)}$  — ординаты упругой линии, полученной от центробежных сил или сил инерции при угловой частоте или угловой скорости вращения вала  $\omega_{(n-1)}$ .

**Определение высших частот поперечных колебаний.** Если положение узлов колебаний, т. е. точек, неподвижных при данной форме колебаний, известно, например, в силу симметричности системы, задача сводится к определению основной частоты или первой критической скорости измененной системы, имеющей дополнительные опоры в узловых точках.

При неизвестном заранее положении узловых точек необходимо им задаться, руководствуясь правилом, что если к системе присоединить  $n$  добавочных опор, то основная частота такой видоизмененной системы при изменении положения опор будет максимальной при совпадении добавочных опор с узлами  $n$ -го обертона, а этот максимум будет равен частоте  $n$ -го обертона первоначальной системы.

При расположении на валу постоянного сечения (фиг. 63) дополнительной



Фиг. 63. Изменение частоты собственных колебаний вала постоянного сечения в зависимости от положения дополнительной опоры.

опоры непосредственно у левой основной опоры ( $l_1 = 0$ ) первая частота собственных колебаний вала будет  $\omega_1$ , а форма

колебаний будет иметь вид кривой  $y_1(n)$ . При различных положениях дополнительной опоры между основными опорами первая частота собственных колебаний вала будет изменяться в зависимости от отношения  $\frac{l_1}{l}$ , причем при уве-

личении этого отношения от нуля частота собственных колебаний увеличивается до некоторого максимума, после чего начинает уменьшаться. Максимальная величина частоты соответствует первому обертому или второй критической скорости вала, а величина  $l_1$ , при которой она получается, соответствует расположению узла колебаний. Как видно из фиг. 63, небольшая ошибка в оценке места расположения узла приводит лишь к незначительной погрешности в определении частоты или критической скорости, причем эта ошибка всегда будет в сторону преуменьшения.

Для того чтобы выбрать положение дополнительной опоры возможно ближе к узлу колебаний, следует руководствоваться тем соображением, что опорная реакция в ней должна быть равна нулю. Для простоты стержень или вал нагружается равномерно распределенной нагрузкой, претерпевающей разрыв и меняющей направление в месте установки дополнительной опоры.

Высшие частоты собственных колебаний стержней переменного сечения приближенно определяются по формуле

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{\left( \int_0^l \sqrt[4]{\frac{\rho(x)}{EJ}} dx \right)^2}, \quad (179)$$

где  $\lambda_k$  определяется для стержня постоянного сечения, аналогичного рассматриваемому по условиям закрепления и сопряжения (см. табл. 7).

**Влияние различных факторов на частоты поперечных колебаний стержней и критические скорости валов.** Влияние податливости опор. Выше принималось, что опоры являются абсолютно жесткими. Податливость опор приводит к понижению частот собственных колебаний.

*Пример.* Если для системы, изображенной на фиг. 64, жесткости обеих опор в плоскости колебаний не равны между собой и составляют каждая  $C_a$  и  $C_b$ , а жесткость стержня, опреде-



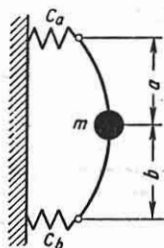
ленная в соответствии с фиг. 30, составляет  $C_{\delta}$ , то общая жесткость системы равна

$$\frac{1}{\frac{1}{C_{\delta}} + \frac{1}{C_0}}, \quad (180a)$$

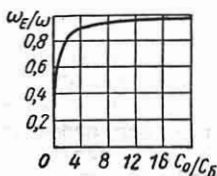
где

$$\frac{1}{C_0} = \frac{a^2}{C_b} + \frac{b^2}{C_a}. \quad (180b)$$

Отношение частоты собственных колебаний стержня, определенной с учетом податливости



Фиг. 64. Схема к примеру учета жесткости опор.



Фиг. 65. Поправка на жесткость опор.

опор, к частоте собственных колебаний, определенной без учета этой податливости, составляет

$$\frac{\omega_E}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{C_{\delta}}{C_0}}}. \quad (181)$$

Зависимость (181) изображена на фиг. 65.

Влияние заделки. На величину частоты собственных колебаний консольного стержня значительное влияние оказывает неполная жесткость заделки. Для очень коротких лопаток паровых турбин снижение частоты собственных колебаний из-за неполного защемления достигает 40–50%.

В расчет обычно вводится дополнительная фиктивная длина  $\Delta l$ , учитывающая заделку:

$$\Delta l = (0,15 \div 0,4) b, \quad (182)$$

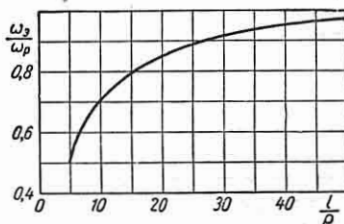
где  $b$  — ширина лопатки.

На фиг. 66 показана экспериментально полученная А. З. Шемтовым для одного из типов заделок турболопаток зависи-

мость  $\frac{\omega_{\partial}}{\omega_p} = f\left(\frac{l}{\rho}\right)$ . Здесь  $\frac{\omega_{\partial}}{\omega_p}$  — отношение частоты собственных колебаний, полученной экспериментальным путем, к расчетному значению для абсолютно жесткой заделки;  $\frac{l}{\rho}$  — величина, характеризующая гибкость стержня — отно-

шение свободной длины к радиусу инерции его сечения.

Если турболопатки соединены в пакет с помощью бандажа или связной проволоки, то жесткость заделки бандажа (или проволока) повышает частоту ко-

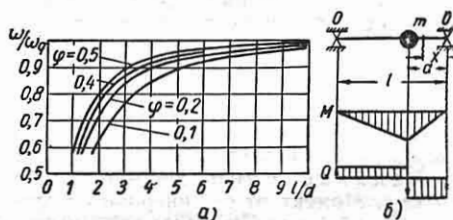


Фиг. 66. Влияние жесткости заделки.

лебаний, а масса бандажа снижает ее. Расчет пакета см. [23] и [49].

Влияние поперечных сил. Учет влияния поперечных сил имеет значение для коротких стержней, а для стержней, у которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной, — только при определении частот собственных колебаний высших порядков, когда между узловыми поперечными сечениями заключаются сравнительно небольшие участки.

Пример. Влияние поперечных сил для круглого вала постоянного сечения показано на фиг. 67, а. Здесь представлена зависимость  $\frac{\omega}{\omega_q} = f\left(\frac{l}{d}\right)$  при различных значениях  $\varphi$ , где  $\frac{\omega}{\omega_q}$  — отношение частоты собственных колебаний, определенной без



Фиг. 67. а — поправка на влияние поперечных сил; б — схема к примеру учета влияния поперечных сил.

учета поперечных сил, к частоте, определенной с учетом этих сил;  $\frac{l}{d}$  — отношение длины к диаметру вала;  $\varphi = \frac{a}{l}$  — отношение размеров по фиг. 67, б.

Влияние статически приложенной продольной силы. Для

нижней частоты собственных колебаний это влияние учитывается формулой

$$\omega_{np} = \omega \sqrt{1 \pm N_p} \quad (183)$$

где  $\omega_{np}$  — частота собственных колебаний при наличии продольной силы;  $\omega$  — частота собственных колебаний при отсутствии продольной силы;  $N = \frac{P}{P_{кр}}$  — отношение продольной силы к критической

силе для продольного изгиба в плоскости колебаний. При растягивающей силе под корнем берется знак плюс, при сжимающей — знак минус.

Для высших частот собственных колебаний влияние продольной силы уменьшается:

$$\omega_{кп} = \omega \sqrt{1 \pm \frac{N}{\kappa^2}} \quad (184)$$

где  $\kappa$  — порядок частоты.

Частота собственных колебаний вращающегося стержня (например, лопатки турбины или компрессора) возрастает вследствие растяжения от центробежных сил, а именно:

$$\omega_{вп} = \omega \sqrt{1 + B \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2} \quad (185)$$

где  $\omega_{вп}$  — частота во вращающемся, а  $\omega$  — в неподвижном состоянии;  $\Omega$  — угловая скорость вращения;  $B$  — коэффициент.

По Л. А. Шубенко, для основных колебаний лопаток постоянного сечения

$$B = 0,8 \frac{D_{ср}}{l} - 0,85, \quad (186)$$

где  $D_{ср}$  — средний диаметр диска;  $l$  — длина рабочей части лопатки.

Влияние инерции поворота массы  $i$ . Момент от сил инерции поворота какой-либо массы системы, возникающий вследствие поворота сечений при поперечных колебаниях, равен

$$M_i = -\Theta_i \omega^2 \beta_i \quad (187)$$

где  $\Theta_i$  — экваториальный момент инерции массы  $i$  вокруг оси поворота в  $\kappa \Gamma \text{см} \text{сек}^2$ ;  $\omega$  — угловая частота колебаний в  $1/\text{сек}$ ;  $\beta_i$  — амплитуда угла поворота.

Момент от сил инерции поворота масс увеличивает изгиб, т. е. повышает частоту собственных колебаний.

Отношение частоты собственных колебаний с учетом инерции поворота к частоте собственных колебаний, определенной без учета инерции поворота, равно

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{1}{\int_0^l \rho(x) y^2(x) dx + \sum_1^n m_i y^2(x_i)} \left( \int_0^l \theta(x) y'^2(x) dx + \sum_1^n \Theta_i y'^2(x_i) \right)} \quad (188)$$

где, кроме обозначений, приведенных на стр. 369,  $\Theta_i$  — моменты инерции сосредоточенных масс относительно оси поворота в  $\kappa \Gamma \text{см} \text{сек}^2$ ;  $\theta(x)$  — момент инерции распределенной массы стержня относительно оси поворота на единицу длины в  $\kappa \Gamma \text{сек}^2$ ; величина  $y'(x)$  для малых колебаний принимается равной амплитуде угла поворота.

Так как в формулу (188) входят значения не только ординат упругой линии, но и углов поворота, то для правильного учета влияния инерции поворота необходимо, чтобы принятая упругая линия хорошо совпадала с формой собственных колебаний.

Влияние гироскопических моментов масс. Гироскопический момент массы диска, вращающегося вместе с валом, возникающий при отклонении оси вращения, равен

$$M_i = (\Theta_{pi} \Omega - \Theta_i \omega_v) \omega_0 \beta_i = \Theta_i (q_i h - 1) \omega_0^2 \beta_i \quad (189)$$

где  $\Theta_{pi}$  — полярный момент инерции массы  $i$  вокруг оси вращения в  $\kappa \Gamma \text{см} \text{сек}^2$ ;  $q_i = \frac{\Theta_{pi}}{\Theta_i}$ ;  $\omega_0$  — угловая скорость прецессии, т. е. вращения плоскости изогнутой оси вала;  $\Omega$  — угловая скорость вращения вала;  $h = \frac{\Omega}{\omega_0}$  [ср. с формулой (187)].

Основное практическое значение имеет положительная синхронная прецессия  $h = 1$ , т. е. когда угловая скорость плоскости изогнутого вала равна по величине и совпадает по направлению с угловой скоростью вала. Гироскопический момент в этом случае уменьшает изгиб вала, т. е. повышает критическую скорость. При наличии возбуждающих сил соответствующей частоты возможна

также отрицательная синхронная прецессия, т. е. вращение плоскости изогнутого вала с угловой скоростью, равной по величине и противоположной по направлению угловой скорости вала. При этом гироскопический момент какой-либо массы будет равен

$$M_l = -\Theta_l(q_l + 1)\omega_0^2\beta. \quad (190)$$

В этом случае гироскопический эффект понижает критическую скорость вала. В некоторых случаях проявляются и не-синхронные прецессии  $h \neq 1$ , вызываемые гидродинамическими силами, трением, а также внешними вибрациями.

Отношение критической скорости вала с учетом гироскопического эффекта к критической скорости, определенной без его учета, равно:

при положительной синхронной прецессии

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\int_0^l \theta(x) y'^2(x) dx + \sum_1^n \Theta_l(q_l - 1) y'^2(x_l)}{\int_0^l \rho(x) y^2(x) dx + \sum_1^n m_l y^2(x_l)}}}}; \quad (191)$$

при отрицательной синхронной прецессии

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3 \int_0^l \theta(x) y'^2(x) dx + \sum_1^n \Theta_l(q_l + 1) y'^2(x_l)}{\int_0^l \rho(x) y^2(x) dx + \sum_1^n m_l y^2(x_l)}}}}. \quad (192)$$

Обозначения в уравнениях (191) и (192) те же, что и в (188), (189).

**Колебания мембран, колец, пластинок и быстро вращающихся дисков**

Мембраны. Частота собственных колебаний мембраны (т. е. идеально гибкой безмоментной пластинки, равномерно натянутой по контуру) равна

$$\omega = a \sqrt{\frac{p}{m}} \text{ 1/сек,} \quad (193)$$

где  $p$  — натяжение на единицу периметра в  $\kappa\Gamma/\text{см}$ ;  $m$  — масса мембраны в  $\kappa\Gamma\text{сек}^2/\text{см}$ .

Значения постоянной  $a$  для круглой мембраны приведены в табл. 10, где  $n$  — число узловых диаметров, а  $s$  — число концентрических окружностей, которые являются узловыми линиями при данной форме колебаний (включая контур заделки).

Таблица 10

Значения  $a$

Число узловых окружностей $s$	Число узловых диаметров $n$			
	0	1	2	3
1	4,261	6,792	9,102	11,306
2	9,784	12,436	14,919	17,299
3	15,339	18,031	20,596	23,072
4	20,901	23,614	26,225	28,756

Для основной частоты собственных колебаний мембран других конфигураций значения  $a$  следующие:

Конфигурация мембраны	$a$
Квадрат	4,443
Квадрант (четверть круга)	4,551
Сектор $60^\circ$	4,616
Равносторонний треугольник	4,774
Полукруг	4,803
Прямоугольник с отношением сторон 3:2	4,624
То же 2:1	4,967
"   3:1	5,736

Пластинки. Частота собственных колебаний пластинки при малых перемещениях равна

$$\omega = A \sqrt{\frac{D}{\rho f}} \text{ 1/сек,} \quad (194)$$

где  $\rho_f$  — масса единицы площади в  $\text{кг/сек}^2/\text{см}^2$ ;  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ кгсм}, \quad (195)$$

где  $E$  — модуль упругости в  $\text{кг/см}^2$ ;  $h$  — толщина пластинки в  $\text{см}$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона (в табл. 11 и 12 принято  $\mu = 0,3$ ).

Для круглой пластинки радиусом  $r$  см

$$A = \frac{\alpha}{r^2}. \quad (196)$$

Для пластинки, жестко закрепленной по контуру, значения  $\alpha$  даны в табл. 11.

Таблица 11  
Значения  $\alpha$

Число узловых окружностей $s$	Число узловых диаметров $n$		
	0	1	2
1	10,21	21,22	34,84
2	39,78	—	—
3	88,90	—	—

Для свободной круглой пластинки значения  $\alpha$  даны в табл. 12.

Таблица 12  
Значения  $\alpha$

Число узловых окружностей $s$	Число узловых диаметров $n$			
	0	1	2	3
1	—	—	5,251	12,23
2	9,076	20,52	35,24	52,91
3	38,52	59,86	—	—

Для прямоугольной пластинки с опертыми краями (по всему контуру)

$$A = \pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right), \quad (197)$$

где  $a$  и  $b$  — размеры пластинки в  $\text{см}$ ;  $i$  и  $j$  — целые числа, характеризующие форму колебаний (для основной частоты  $i = j = 1$ ).

Для основной частоты прямоугольной пластинки [39] величина  $A$  имеет следующие значения, приведенные ниже.

Пластинка, защемленная по всему контуру:

$$A = 22,373 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{0,605}{a^2b^2}}. \quad (198)$$

Пластинка, защемленная по сторонам  $a$  и опертая по сторонам  $b$ :

$$A = \pi^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{5,138}{b^4} + \frac{2,566}{a^2b^2}}. \quad (199)$$

Пластинка, защемленная по двум смежным сторонам ( $a$  и  $b$ ) и опертая по двум другим ( $a$  и  $b$ ):

$$A = 15,421 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{2,441}{b^4} + \frac{1,115}{a^2b^2}}. \quad (200)$$

Пластинка, защемленная по одной стороне  $a$  и опертая по трем остальным:

$$A = \pi^2 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{2,441}{b^4} + \frac{2,333}{a^2b^2}}. \quad (201)$$

Пластинка, защемленная по трем сторонам и опертая по одной стороне  $a$ :

$$A = 22,373 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{2,441}{b^4} + \frac{2,908}{a^2b^2}}. \quad (202)$$

Для круглой невесомой пластинки, нагруженной в центре массой  $m$ :

а) свободно опертой по контуру

$$\omega = \sqrt{\frac{16\pi D}{mr^2} \cdot \frac{(1+\mu)}{(3+\mu)}} \text{ 1/сек}; \quad (203)$$

б) жестко закрепленной по контуру

$$\omega = \sqrt{\frac{16\pi D}{mr^2}} \text{ 1/сек}, \quad (204)$$

где  $r$  — радиус пластинки.

Оболочки. Колебания пологой оболочки, имеющей в плане контур прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  и опирающейся на контур, рассмотрены В. З. Власовым [9].

Для пологой оболочки, свободно подпертой по контуру и не испытывающей начальных напряжений,

$$\omega_{ij}^2 = \frac{Eh^3\pi^4}{12(1-\mu^2)\rho_f} \left[ \left( \frac{i}{a} \right)^2 + \left( \frac{j}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh \left[ k_2 \left( \frac{i}{a} \right)^2 + k_1 \left( \frac{j}{b} \right)^2 \right]}{\rho_f \left[ \left( \frac{i}{a} \right)^2 + \left( \frac{j}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad (205)$$

где обозначения те же, что и в формулах (194), (195), (197);

$$k_1 = \frac{1}{R_1}; \quad k_2 = \frac{1}{R_2}; \quad (206)$$

$k_1$  — кривизна поверхности для сечения, параллельного стороне  $a$ ,  $k_2$  — для сечения, параллельного  $b$ .

Для оболочки, очерченной по части сферической поверхности,

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}; \quad (207)$$

$$\omega_{ij}^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)\rho_f} \times \left[ \left( \frac{i\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{j\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R^2\rho_f}. \quad (208)$$

Диски. Для диска постоянной толщины, т. е. круглой пластинки, жестко закрепленной в центре, если формы колебаний связаны с образованием узловых диаметров, частоты собственных колебаний определяются по формуле (194), а величины  $\alpha$  имеют такие же значения, как и при соответствующих им формах колебаний свободной пластинки (табл. 12). Низшей форме колебаний диска (без узловых диаметров — зонтичной:  $s = 0$ ;  $n = 0$ ) соответствует  $\alpha = 3,75$ .

Частота собственных колебаний вращающегося диска  $\omega_{вп}$  возрастает вследствие действия центробежных сил:

$$\omega_{вп} = \sqrt{\omega^2 + B\Omega^2} \quad 1/\text{сек}. \quad (209)$$

где  $\omega$  — угловая частота собственных колебаний диска из формулы (194);  $\Omega$  — угловая скорость вращения диска в 1/сек; значения  $B$  для диска постоянной толщины:

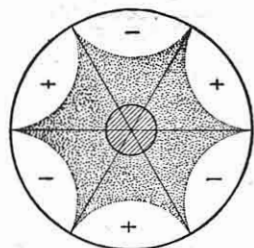
$n$	.....	1	2	3
$B$	.....	1	2,35	4,05

Наибольшее значение имеют формы колебаний дисков с двумя, тремя, реже с четырьмя-пятью узловыми диаметрами (фиг. 68). Они возникают от действия постоянной, сосредоточенной, неподвижной в пространстве силы давления струи газа или пара, направленной перпендикулярно диску на перемещающийся относительно нее диск, который вращается с числом оборотов в минуту

$$N = \frac{30\omega_{вп}}{\pi n}, \quad (210)$$

где  $\omega_{вп}$  — частота собственных колебаний диска в  $\text{сек}^{-1}$ ;  $n$  — число узловых диаметров.

Частота собственных колебаний диска переменного сечения, определенная



Фиг. 68. Колебания диска.

энергетическим методом (см. стр. 343), равна

$$\omega = \sqrt{\frac{V_{\max}}{H}}. \quad (211)$$

Потенциальная энергия деформации

$$V_{\max} = \int_{R_1}^{R_2} F_1(r) dr. \quad (212)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — внутренний и наружный радиусы диска;

$$F_1(r) = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \frac{\pi}{4n} \times [A^2 - 2(1-\mu)(B-C)] r, \quad (213)$$

где  $h$  — толщина диска;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;

$$A = \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df(r)}{dr} - \frac{n^2f(r)}{r^2}; \quad (214)$$

$$B = \frac{d^2f(r)}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{df(r)}{dr} - \frac{n^2f(r)}{r^2} \right); \quad (215)$$

$$C = n^2 \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{df(r)}{dr} - \frac{f(r)}{r^2} \right)^2. \quad (216)$$

Прогиб  $w$  точки диска

$$w = f(r) \sin n\varphi;$$

$f(r)$  — прогиб по биссектрисе между смежными узловыми радиусами;  $n$  — число узловых диаметров;  $r$ ,  $\varphi$  — полярные координаты точек диска.

Кинетическая энергия

$$T_{\max} = \omega^2 H = \omega^2 \int_{R_1}^{R_2} F_K(r) dr, \quad (217)$$

$$F_K(r) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{h}{n} [f(r)]^2 r; \quad (218)$$

$$V_{\max} = T_{\max} = \omega^2 H.$$

Укажем кратко ход расчета. Определение интегралов (212) и (217) производится приближенным суммированием. Кривая прогиба диска задается в виде

$$f(r) = ar^s, \quad (219)$$

при этом показателю степени  $s$  придаются разные значения, например  $s = -2$ ;  $s = -3$ ;  $s = 4$ .

После определения частот собственных колебаний для различных значений  $s$  строится зависимость  $\omega = f(s)$ , причем истинной частоте собственных колебаний диска будет соответствовать минимум частоты, а значение  $s$  для минимума частоты дает наилучшее приближение к истинной кривой прогиба при колебаниях.

Если приближенно разбить профиль диска на участки постоянной толщины, то для определения потенциальной энергии требуется найти величину

$$\sum h_m^3 (r_{am}^{2(s-1)} - r_{im}^{2(s-1)}), \quad (220a)$$

где  $h_m$  — толщина элемента диска  $m$ ;  $r_{am}$  — внутренний радиус элемента  $m$ ;  $r_{im}$  — внешний радиус элемента  $m$ .

При определении кинетической энергии по кривой прогиба требуется предварительно найти величину

$$\sum h_m (r_{am}^{2(s+1)} - r_{im}^{2(s+1)}). \quad (220b)$$

Нахождение указанных величин производится в табличной форме.

Учет эффекта центробежных сил может быть и в данном случае приближенно произведен по формуле (208).

Кольца. Частота изгибных колебаний однородного кольца в его плоскости равна

$$\omega = \frac{i(i^2 - 1)}{\sqrt{1 + i^2}} \sqrt{\frac{EJ}{\rho R^4}} \text{сек}^{-1}, \quad (221)$$

где  $i$  — целое число, характеризующее форму колебаний (основной частоте соответствует  $i = 2$ );  $R$  — радиус кольца в см;  $\rho$  — масса единицы длины кольца в  $\kappa\Gamma\text{сек}^2/\text{см}^2$ ;  $EJ$  — жесткость на изгиб в  $\kappa\Gamma\text{см}^2$ .

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

### Методы динамических исследований

В современных условиях при конструировании машин расчет на колебания сочетается с экспериментальным исследованием колебаний. Результаты расчета и эксперимента взаимно дополняют друг друга.

Ниже даются краткие сведения о методах постановки экспериментального исследования колебаний. Описание основных типов аппаратуры для динамических измерений (электрических тензометров, вибрографов и т. д.) дано в главе XV.

Методы измерения частот колебаний. Технические методы измерения частот колебаний в большинстве основаны на принципе механического резонанса. Простейший тип частотомера (на десятки и сотни герц) состоит из набора консольных пружинных пластинок, из которых каждая последующая настроена на частоту собственных колебаний несколько большую, чем предыдущая. При установке частотомера на вибрирующей конструкции в наиболее интенсивное движение приходят те пластинки, которые попадают в резонанс. По частоте колебаний резонирующих пластинок определяется частота собственных колебаний испытываемой конструкции. Другой тип частотомера представляет пружинную консольную полосу переменной длины. Изменением свободной длины консоли полоска приводится в резонанс, причем резонансная частота отсчитывается по нанесенной на консоли шкале.

Для точного измерения частоты используется принцип подсчета числа циклов за строго определенный интервал времени. Точные импульсные приборы строятся на частоты от 0,01 до 1000  $\text{гц}$ .

Частота колебаний определяется также из записи процесса колебаний во времени (см. также стр. 382). Запись линейных перемещений называется *вибrogramмой*, а крутильных колебаний — *торсиограммой*. Для определения частоты запись колебаний должна сопровождаться на той же ленте или пленке параллельной записью масштаба времени и отметки оборотов (если колебания связаны с вращением).

Для масштаба времени используется запись колебаний известной и стабильной частоты (камертон, зуммер с камертоном, ток стабилизированной частоты, а иногда электрическая сеть 50 гц). Отметки оборотов, дающие возможность установить гармонические порядки колебаний, производятся замыканием вращающегося контакта.

Механические колебания можно преобразовать в электрический сигнал и применить для измерения частоты осциллографическую запись колебаний, а также различные типы электрических (электронных) частотомеров.

Часто пользуются также методом определения частот синусоидальных колебаний по *фигурам Лиссажу* на экране катодного осциллографа. При этом на одну пару отклоняющих пластин подается переменное напряжение исследуемой частоты, на другую пару пластин — напряжение от отградуированного электронно-лампового генератора, позволяющего плавно изменять частоту колебаний в широком диапазоне. При совпадении исследуемой частоты и частоты генератора на экране осциллографа получается фигура в виде эллипса. Эта частота и отсчитывается по шкале генератора.

В вибротехнике получили применение электрические анализаторы частот, определяющие и записывающие в виде диаграммы весь спектр гармонических составляющих несинусоидального колебания.

Для определения частот механических колебаний может быть использован стробоскоп — прибор, дающий короткие периодические вспышки света; тело, совершающее быстрое периодическое колебательное или вращательное движение и освещенное периодическими вспышками света, будет казаться медленно движущимся или неподвижным, если частота вспышек совпадет с частотой колебаний. По частоте вспышек, дающих неподвижное изображение, можно судить о частоте колебаний системы. В электрических стробоскопах применяются малоинерционные источники света типа газосветных ламп. В некоторых устройствах используется свечение искрового разряда. Электрические стробоскопы применяются при частотах порядка сотен, а иногда и тысяч герц.

При низких частотах может быть применен механический ручной стробоскоп, при помощи которого колеблющаяся

система рассматривается в окуляр через отверстие в перфорированном диске, приводимом во вращение от часового механизма или мотора, причем число оборотов диска плавно регулируется. Частота перекрытий окуляра, пропорциональная скорости диска и числу отверстий в нем, отсчитывается по соответственно отградуированному указателю числа оборотов. Диапазон частот колебаний, исследуемых таким образом, составляет от 5 до 200 гц.

Методы измерения динамических перемещений и деформаций. При пользовании механическими методами измерения вибраций динамическое перемещение передается указательной стрелке, записывающему перу или штифту с помощью рычажной системы. Такой способ применим при частотах колебаний до 200 гц, причем увеличение отсчета по сравнению с измеряемой величиной обычно доводится до 20—30-кратного. Запись вибраций чернилами на бумажной ленте применяется лишь при весьма малых частотах и значительных амплитудах. Более удобный способ механической записи состоит в том, что твердое острие прорезает тонкий слой воска или специального лака, покрывающий ленту из цветной бумаги. При этом запись, представляющая след острия, получается в виде цветной линии на светлом фоне. Для длительного хранения записей вибраций на вошеной бумаге их покрывают прозрачным лаком.

Другой способ механической записи заключается в том, что острый штифт, непосредственно связанный с вибрирующим телом, продавливает канавку в мягкой целлулоидной ленте, фиксируя на ней диаграмму движения. Нанесенная запись рассматривается в микроскоп. При этом получается увеличение в несколько десятков раз, величина которого ограничивается толщиной записи, а также необходимостью расположить в поле микроскопа полный цикл колебаний.

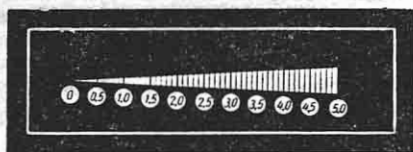
При оптических методах измерения вибраций наблюдается или фотографируется перемещение светового луча, идущего от исследуемой точки системы. Оптические методы применимы во всем диапазоне частот механических колебаний и дают увеличение отсчета, достигающее  $10^8$  раз (а в комбинации с механическим увеличением и больше).

Значительное увеличение дает зеркальный метод измерения вибраций, основанный на том, что при вибрации изменяется угол поворота зеркала, отражающего световой луч на удаленный экран.

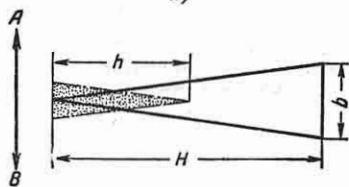
При малых амплитудах вибрирующее тело рассматривается в микроскоп. Если на исследуемом объекте укреплен кусочек наждачной бумаги, то ее зерна дают в микроскопе при соответствующем освещении яркие движущиеся точки. Для наблюдений и регистрации вибраций используется также световой блик, образующийся на поверхности полированного шарика при его освещении.

При стробоскопическом методе исследования, как уже указывалось, вибрирующая система рассматривается в стробоскопическом освещении с помощью оптических приборов. Выбирая частоту вспышек так, чтобы движение тела казалось очень медленным, можно наблюдать форму упругой линии вибрирующего тела.

На стробоскопическом эффекте основано также одно из простейших устройств для измерения амплитуд колебаний, а именно *мерный клин*. Как показано на фиг. 69, а, мерный клин



а)



б)

Фиг. 69. Мерный клин.

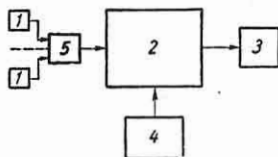
имеет графленое белое поле на черном фоне. Он изготовляется из бумаги или жести и помещается на вибрирующей детали так, чтобы направление колебаний совпадало с направлением *AB*, указанным на фиг. 69, б. При частоте более 8—10 гц наблюдается появление темного треугольника на светлом фоне. Измерение высоты этого треугольника

и дает возможность определить амплитуду вибраций по формуле

$$a = \frac{b}{2H} h; \quad (222)$$

обозначения приведены на фиг. 69, б.

Электрические приборы для измерения динамических перемещений основаны на превращении в воспринимающих элементах приборов (так называемых *датчиках*) механических величин в электрические, т. е. перемещения, скорости или силы в напряжение или ток. Последние в конечном счете измеряются различными типами стрелочных электрических приборов или регистрируются с помощью вибраторных (шлейфных)



Фиг. 70. Скелетная схема электрической аппаратуры.

и электронных (катодных) осциллографов общего назначения. При электрических методах динамических измерений относительное увеличение, т. е. отношение перемещения указателя по шкале прибора к измеряемому динамическому перемещению, получается до  $10^6$  раз.

Электрические приборы для измерения механических величин основаны на следующих принципах: 1) изменения параметра электрической цепи (омического сопротивления, индуктивности, емкости) в процессе механических колебаний; 2) генерации электрических напряжений и токов.

Электрическая аппаратура состоит из следующих элементов, соответственно обозначенных на схеме фиг. 70:

1) воспринимающего (чувствительного) элемента *датчика*, служащего для превращения измеряемой неэлектрической величины в электрическую;

2) электрической (чаще всего электронно-ламповой) схемы для преобразования одних электрических величин в другие, а именно сигнала от датчика в напряжение или ток стрелочного электроизмерительного прибора или осциллографа;

3) электрического измерительного прибора со стрелочным отсчетом по



шкале для указания амплитудных значений измеряемых механических величин или осциллографа для регистрации процесса во времени;

4) устройств питания электрической (электронно-ламповой) схемы;

5) коммутационной аппаратуры — многоточечных переключателей, токоисточников.

Датчик должен иметь достаточную чувствительность при возможно меньших размерах и весе, допускать надежное и быстрое крепление, не реагировать на посторонние влияния, наконец, иметь достаточную прочность.

Датчик должен быть приспособлен к конкретным условиям проводимого измерения. Остальные элементы аппаратуры могут иметь более общее применение. В более простых случаях измерений требуются не все из перечисленных элементов аппаратуры, а как минимум лишь датчик и электроизмерительный прибор.

Наибольшее практическое применение при исследовании колебаний получили провололочные тензодатчики.

Приборы для измерения динамических перемещений рассматриваются в гл. XV.

Измерение динамических перемещений производится путем определения относительного перемещения двух частей прибора — виброметра (вибрографа), одна из которых прикрепляется к исследуемому элементу колеблющегося тела, а другая — к телу, неподвижному в пространстве. В качестве последнего служит так называемая *сейсмическая масса*.

Сейсмической массой называется масса, упруго связанная с колеблющейся системой так, что частота собственных колебаний этой массы в несколько раз меньше частоты измеряемых колебаний. Как видно из формулы (85), если частота собственных колебаний системы подвески сейсмической массы в 3—4 раза ниже наименьшей измеряемой частоты, то при этом сейсмическая масса практически не участвует в колебательном движении, т. е. не вносит существенной ошибки в измерение колебаний.

Для того чтобы приблизить нижнюю границу диапазона измеряемых частот к частоте подвески сейсмической массы, необходимо создать в вибрографе оптимальное демпфирование. Схема виброметра с механическим индикатором для измерения вертикальных колебаний по-

казана на фиг. 71. Здесь  $m$  — сейсмическая масса. Вместо механического индикатора в меньших габаритах может быть помещен электрический датчик. Так как пружины виброметров должны быть весьма мягкими, при вертикальном расположении виброметра сейсмическая масса получает значительную статическую осадку под действием ее веса, что учитывается в конструкции виброметра. Поэтому при измерениях горизонтальных и вертикальных перемещений применяются датчики виброметров и вибрографов, отличающиеся подвеской сейсмической массы.

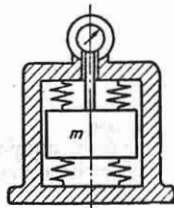
Для измерения крутильных колебаний вращающихся валов применяются *торсионграфы*, основанные также на использовании сейсмической массы в виде равномерно вращающегося маховичка, увлекаемого валом.

Измерение динамических деформаций производится путем определения относительного перемещения двух точек на поверхности деформируемого тела. Расстояние между точками измерения называется *базой* прибора. В машиностроении производится измерение динамических деформаций на небольших базах от 2 до 20 мм, для чего в настоящее время применяются исключительно электрические (главным образом провололочные) тензометры, рассматриваемые в гл. XV.

**Эксплуатационные и лабораторные испытания.** Динамические испытания проводятся в рабочих условиях и в условиях лабораторного исследования узлов и деталей. Экспериментальные исследования вибраций в рабочих условиях служат для оценки прочности и надежности конструкции, являются средством выяснения причин имевших место поломок и аварий и представляют наиболее надежный метод определения динамических характеристик.

Последнюю задачу ставят перед собой и лабораторные испытания, имеющие целью определение частот, форм собственных колебаний и характеристик демпфирования.

Для проведения лабораторных динамических испытаний требуется искусственное возбуждение колебаний и



Фиг. 71. Схема виброметра.

измерение возникающих при этом перемещений и деформаций.

В рабочих условиях измерения производятся для характерных режимов работы машины. Поддержание заданного режима (например, числа оборотов машины или двигателя) должно производиться по возможности точнее, особенно для получения устойчивых резонансов при наличии острых резонансных пиков.

Основными видами испытаний в рабочих условиях являются вибрографирование, торсиографирование и тензометрирование. Тензометрирование обычно проводится с помощью проволочных датчиков.

Датчики вибрографов и торсиографов следует помещать в таких местах, где амплитуды колебаний элементов конструкции велики, т. е. подальше от узлов колебаний. Если вибрографы установить на опоры вала, то по интенсивности вибраций подшипников можно определять критические скорости вращающихся валов. Датчики торсиографов обычно располагаются на концах вала из условий удобства крепления и тока съема. При тензометрировании датчики тензометров следует наклеивать на наиболее напряженных волокнах. Если до производства испытаний были выявлены случаи усталостных поломок исследуемой детали, то датчик тензометра должен быть расположен на ней в месте образования трещины, перпендикулярно ее направлению.

Практически не всегда удается установить датчики в области наибольших напряжений. Место установки датчика приходится часто выбирать, сообразуясь с температурными условиями, значениями центробежных сил (для вращающихся деталей), возможностью расположения подводных проводов и т. д. Кроме того, напряженные точки для одной формы колебаний не являются уже таковыми для другой формы. Однако и в таких случаях датчики дают ценные сведения о резонансах, источниках возбуждения, сравнительной эффективности различных мероприятий. Если затем в лабораторных условиях получить распределение напряжений для соответствующих форм колебаний исследуемой детали, то, пересчитав показания датчиков, можно получить данные о значениях напряжений и в наиболее опасных точках.

Для каждого исследуемого режима (числа оборотов машины) необходимо

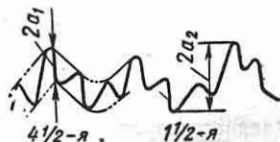
получить для обработки достаточно длинную запись вибраций, содержащую несколько десятков периодов колебаний.

Обработка записей колебаний (виброграмм и торсиограмм) производится обмером двойных амплитуд (размахов) колебаний по записи. Часто запись вибраций не получается ровной, расположенной вдоль прямой оси, а медленно отклоняется по извилистой линии, что происходит вследствие некоторой неустойчивости чисел оборотов на исследуемых режимах и колебаний сейсмической массы. В таких случаях двойная амплитуда вибраций измеряется как расстояние между огибающими к записи, проведенными на фиг. 72. Если



Фиг. 72. Определение амплитуды вибрации.

в самой записи вибраций появляются две гармонические составляющие  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , где  $\nu_1$  — порядок гармонической составляющей, то для их выявления также проводятся отгибающие, как показано на фиг. 73. Здесь  $2a_1$  соответствует вы-



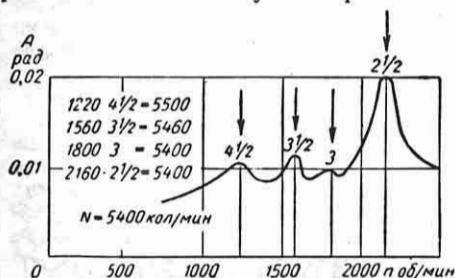
Фиг. 73. Разделение высокочастотной и низкочастотной составляющих вибрации.

сокочастотной гармонической составляющей записи ( $\nu = 4,5$ ), а  $2a_2$  — сумме низкочастотной составляющей вибрации ( $\nu = 1,5$ ) и высокочастотной ( $\nu = 4,5$ ).

Частота колебаний находится по виброграмме подсчетом числа периодов за отрезок времени, определенный по отметкам времени на записи колебаний.

Пусть, например, отметкой времени служит запись напряжения промышленной частоты 50 гц. Если за время  $n$  периодов 50 гц укладывается  $m$  периодов исследуемых колебаний, то частота последних составляет  $f = 50 \frac{m}{n}$  гц.

По данным обмера амплитуд колебаний при различных числах оборотов установки строятся резонансные кривые, показанные на фиг. 74. Стрелками отмечены резонансы соответствующих гармонических составляющих сил возбуждения. С точностью проведения эксперимента во всех случаях резонанса



Фиг. 74. Резонансные кривые крутильных колебаний, полученные экспериментально.

получено число собственных колебаний системы. В данном примере  $N \approx 5400$  кол/мин.

**Определение собственных частот, форм колебаний и коэффициентов демпфирования.** Методы измерения частот колебаний изложены на стр. 378. Ниже рассматриваются особенности определения частот *собственных* колебаний и коэффициентов демпфирования.

Первый способ заключается в том, что к системе прикладывается гармоническая возбуждающая сила, частота которой известна. Изменением частоты возбуждающей силы добиваются установления резонансных состояний и измеряют соответствующие им частоты собственных колебаний. По величине резонансных амплитуд и форме резонансных кривых [см формулы (16) и (23)] определяют коэффициенты усиления в *резонансе* и обратные им коэффициенты демпфирования. По распределению амплитуд получают формы колебаний.

Для нахождения резонансных состояний чаще всего пользуются тензодатчиками. Резонансные пики хорошо улавливаются, если в качестве индикатора используется при этом катодный осциллограф.

Отметим также, что наступление резонансов при изменении частоты возбуждения можно довольно точно определять и с помощью весьма простых средств, которые дают возможность также проследить узловые линии и установить формы колебаний.

Касаая различных точек вибрирующей детали легкой проволокой с шариком (диаметром 1—2 мм) на конце, можно по интенсивности движения шарика, звенящему звуку и ощущению руки легко заметить резонанс и проследить расположение пучностей и узловых линий при колебаниях. Последней цели служат и так называемые *песочные фигуры*, которые получаются при посыпании вибрирующей детали мелким песком или каким-либо другим порошком. При вибрациях песок располагается вдоль узловых линий (см. фиг. 20 и 68). Если поверхность исследуемой детали изогнута, то для получения песочных фигур необходимо с помощью специального приспособления поворачивать вибрирующую деталь так, чтобы различные части ее поверхности ставились в горизонтальное положение. Чтобы песок не осыпался, полезно слегка смочить поверхность изогнутой детали керосином.

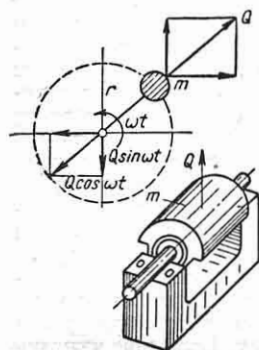
При слабых резонансах легкое нажатие на вибрирующую деталь сильно уменьшает ее колебания. Отсюда вытекает метод определения узловых линий путем торможения колебаний детали в различных точках с контролем амплитуды колебаний по катодному осциллографу или другому индикатору. Если при нажатии в определенной точке амплитуда колебаний вибрирующей детали резко падает, это означает, что в данной точке имеется пучность, а если амплитуда не падает, то данная точка находится на узловой линии.

Второй способ определения частот собственных колебаний (обычно низшей частоты) заключается в том, что в исследуемой системе возбуждаются свободные колебания, по записи которых устанавливаются их частоты. Декремент системы определяется по убыванию амплитуды последующих циклов. Свободные колебания могут быть возбуждены посредством удара или внезапной разгрузки. Однако вследствие недостаточной определенности в задании начальных условий при ударе начальная часть процесса затухания свободных колебаний обычно искажается. Целесообразнее поэтому при измерении декрементов возбуждать свободные колебания следующим образом. Система вводится в резонанс с помощью внешней гармонической силы, а затем возбуждение отключается. Начальные условия при этом могут быть получены строго определенными, и запись свободных колебаний легко поддается анализу.

## Возбуждение колебаний

Возбудители колебаний — *вибраторы* основаны на механических, пневматических и электрических принципах. Область применения первых двух типов вибраторов ограничивается главным образом низкими частотами. Электрические вибраторы дают возможность возбуждения колебаний частотой порядка сотен и тысяч герц.

**Механические вибраторы.** Простейшими механическими возбудителями колебаний являются *центробежные* (эксцентровые) вибраторы, в которых



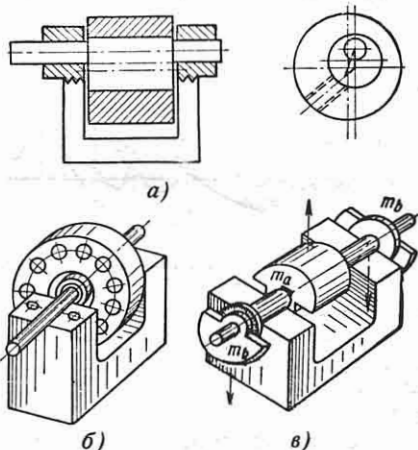
Фиг. 75. Центробежный вибратор.

получение гармонических сил или моментов основано на использовании центробежных сил неуравновешенных вращающихся масс. Если неуравновешенная масса  $m$ , центр тяжести которой расположен на расстоянии  $r$  от оси (фиг. 75), вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция силы инерции на вертикальную ось равна  $mr\omega^2 \sin \omega t$ , а на горизонтальную ось  $mr\omega^2 \cos \omega t$ . Конструкция, на которой установлен подобный вибратор, испытывает гармоническое возбуждение одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Такой вибратор называется *ненаправленным*.

На фиг. 76 изображены три способа регулировки неуравновешенной массы вибратора: фиг. 76, а — вибратор с эксцентриковой регулировкой массы, фиг. 76, б — вибратор с регулировкой неуравновешенной массы путем удаления стержней, вставленных в отверстия диска, и фиг. 76, в — вибратор с регулировкой путем взаимного поворота неуравновешенных масс  $m_a$  и  $m_b$ .

Для создания возбуждающей силы, действующей только в одном направлении соединяются два одинаковых вибратора указанного выше типа, вращающиеся в противоположные стороны (с одинаковой скоростью и фазовым углом). Такое соединение осуществляется при помощи зубчатого зацепле-

ния. Совпадающие составляющие суммируются и создают пульсирующую силу двойной амплитуды, а противофазные составляющие уравниваются. При сдвиге положений грузов, вращающихся в одну сторону, на  $180^\circ$  возбудитель развивает вибромомент, не нагружая



Фиг. 76. Способы регулировки неуравновешенной массы вибратора.

конструкцию поперечными силами. Передача вращения центробежным вибраторам производится от электромотора при помощи гибкого вала или ременной передачи, податливость которых должна во много раз превосходить податливость элементов исследуемой системы.

Известны и другие типы механических вибраторов. К ним относятся *гипоциклические вибраторы*, в которых обойма с сателлитом вращается внутри неподвижного зубчатого колеса двойного диаметра, причем закрепленная на сателлите неуравновешенная масса при равномерном вращении обоймы совершает гармоническое прямолинейное движение по диаметру колеса.

В механических вибраторах создаются значительные радиальные нагрузки подшипников, что ограничивает область применения таких вибраторов амплитудами сил до  $500 \text{ кг}$  и частотами обычно не выше  $400 \text{ гц}$ .

Имеется механический метод возбуждения резонансных колебаний сравнительно высоких частот, при котором используются силы трения. Система, например лопасть или диск, приводится в резонанс, подобно тому как с помощью смычка вызывается звучание струн, а

именно о край лопасти (диска) трется вращающийся фибровый диск.

**Пневматические вибраторы.** Получение переменных давлений при пневматическом возбуждении достигается тем, что струю сжатого воздуха пересекает вращающийся перфорированный диск. При значительном числе отверстий и большой скорости диска может быть получена весьма высокая частота колебаний давления. Однако с увеличением скорости сильно падает амплитуда переменного давления.

Другой метод пневматического возбуждения состоит в том, что колеблющееся тело само регулирует подачу воздуха, воздействуя на золотник или клапан или изменяя проходные сечения воздухопровода при колебаниях. В простейшей конструкции упругая пластинка, перекрывающая с малым зазором отверстие воздухопровода, приходит в резонансные колебания, так как при ее перемещении зазор изменяется и давление воздуха пульсирует с частотой колебаний пластинки.

**Электрические вибраторы.** Простейшим электрическим вибратором является электромагнит, якорь которого прикреплен к исследуемой детали. Деталь, выполненная из ферромагнитного материала, может сама служить якорем электромагнита.

Если электромагнит имеет лишь одну обмотку переменного тока, механическая сила будет пропорциональна квадрату силы протекающего в ней тока, т. е. периодическое возбуждение будет иметь двойную частоту по сравнению с частотой переменного тока.

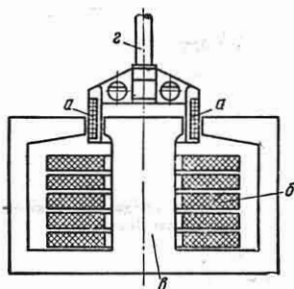
Если на переменное магнитное поле наложить сильное постоянное магнитное поле при помощи дополнительной обмотки постоянного тока, т. е. создать *поляризацию*, то возбуждающая сила будет иметь частоту переменного тока. Электромагнитное возбуждение колебаний обычно применяется при более низких частотах.

Для работы на более высоких частотах большое распространение получили *электродинамические вибраторы*, которые действуют по принципу одноименных с ними электроакустических репродукторов-динамиков. Схема такого вибратора изображена на фиг. 77. Здесь *a* — подвижная тяговая (звуковая) катушка, питаемая переменным током, *b* — обмотка постоянного тока подмагничивания, *в* — магнитопровод. Развиваемая сила,

пропорциональная ампервиткам тяговой катушки и индукции поля подмагничивания, передается штоком *г*.

Обычно электродинамические вибраторы служат для получения переменных сил до  $100 \text{ кг}$  в диапазоне частот до нескольких тысяч герц.

Наиболее эффективные типы электродинамических вибраторов (для работы при повышенных частотах) имеют подвижную систему, выполненную в виде короткозамкнутого витка, являющегося вторичной обмоткой трансформатора, первичная обмотка которого неподвижна.

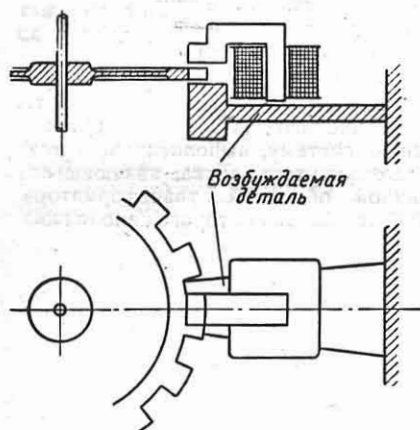


Фиг. 77. Схема электродинамического вибратора.

В качестве источников питания различных электрических вибраторов используются электронно-ламповые генераторы и электромашинные генераторы. Изменение частоты электрического тока дает возможность исследовать поведение механической системы в широком диапазоне частот. Для плавного изменения частоты целесообразнее всего использовать лабораторные электронно-ламповые генераторы звуковой частоты, имеющие отградуированную шкалу частот. Такие генераторы присоединяются к вибраторам через усилители мощности, которые большей частью могут быть заимствованы из стандартных звуковоспроизводящих и трансляционных установок.

Укажем также на электромагнитный способ возбуждения вынужденных колебаний изменяемой частоты, не требующий электронной аппаратуры. Этот способ состоит в использовании вращающегося зубчатого железного диска, изображенного на фиг. 78. Прохождение зубцов диска между ярмом и якорем электромагнита постоянного тока создает пульсацию магнитного поля, приводящую к появлению переменной составляющей

силы притяжения электромагнита, частота которой соответствует произведению числа зубцов на число оборотов



Фиг. 78. Возбуждение колебаний с помощью зубчатого диска.

диска и может быть получена достаточно высокой.

**Учет массы вибратора при испытаниях.** Частота собственных колебаний возбуждаемой системы может несколько измениться вследствие наличия дополнительной массы вибратора. Для правильного экспериментального определения частоты собственных колебаний в том случае, если дополнительная масса оказывается соизмеримой с массой системы, можно воспользоваться методом Смрчека, состоящим в следующем. Если к массе системы  $m_1$  прибавится масса вибратора  $m_2$ , то для сохранения частоты соб-

ственных колебаний системы  $\omega = \sqrt{\frac{C_1}{m_1}}$  (где  $C_1$  — жесткость системы) необходимо параллельно к  $C_1$  добавить дополнительную жесткость  $C_2$  так, чтобы

$$\frac{C_1}{m_1} = \frac{C_1 + C_2}{m_1 + m_2}, \text{ т. е. } \frac{C_1}{m_1} = \frac{C_2}{m_2}. \quad (223)$$

Практически подбор дополнительной жесткости производится экспериментально методом последовательных приближений. Укрепив массу вибратора  $m_2$  на упругом элементе  $C_2$ , определяем частоту такой системы  $\omega_0$ . Затем прикрепляем массу вибратора  $m_2$  с пружиной  $C_2$  к испытуемому объекту  $m_1$ . Если частота такой системы также составила бы  $\omega_0$ , то она и была бы истинной ча-

стотой системы. В общем случае получится некоторая другая частота  $\omega_1$ . Изменяя жесткость  $C_2$ , настраиваем систему вибратора на частоту  $\omega_1$ . Если эту систему снова присоединить к исследуемой, получим частоту совместной системы  $\omega_2$ , более близкую к истинной. Далее, система вибратора изменением жесткости  $C_2$  или массы  $m_2$  настраивается на частоту  $\omega_2$  и снова присоединяется к основной системе и т. д., пока частоты системы вибратора и совместной системы не совпадут.

Чем меньше размеры возбуждаемой детали, тем большими могут оказаться искажения от присоединенной массы вибратора. Если малая деталь выполнена из магнитного материала, то ее целесообразно использовать в качестве якоря электромагнита, возбуждая в ней колебания без присоединения дополнительных масс.

Возможность получения значительных переменных сил с помощью электродинамических вибраторов открывает путь исследования частот и форм колебаний малых деталей, заключающийся в том, что динамическая сила вибратора прикладывается к исследуемой детали не влучности колебаний, а недалеко от заделки (вблизи узловых точек) или деталь получает возбуждение вследствие перемещения ее заделки. В последнем случае заделкой детали служит массивный металлический блок который приводится в колебания от вибратора. Здесь требуется приложение сравнительно большой динамической силы, зато имеется возможность определения частот и форм колебаний деталей из немагнитных материалов без искажений, привносимых вибратором. Величина возбуждающей силы может быть уменьшена при увеличении чувствительности устройств, предназначенных для измерения вибраций.

#### Исследование колебаний на моделях

Расчет распределения усилий и деформаций часто оказывается практически невыполнимым или весьма трудоемким, в особенности при необходимости сопоставления многих вариантов. В таких случаях применяется моделирование, при котором вычисления заменяются измерениями в моделях. Различают: 1) модели, геометрически подобные исходной конструкции, и 2) модели, воспроизводящие

расчетную схему конструкции, последние могут быть механическими и электрическими. Электрические модели применяются для динамических задач в связи с преимуществами использования электрической аппаратуры для исследования процессов, протекающих во времени.

В моделях второго типа каждому элементу конструкции соответствует определенный изображающий его эквивалент. В электрических моделях эти эквиваленты представляют собой цепи из индуктивностей и емкостей, величина которых устанавливается в соответствии с требуемыми значениями масс и жесткостей [44], [43], [32].

**Механические модели.** Условия подобия стержневых систем см. в табл. 13.

Таблица 13

Условия статического подобия

Наименование величин	Исходная система	Модель
Изгибающий момент	$M_l$	$M'_l = \alpha\beta M_l$
Продольная жесткость ( $E$ —модуль упругости, $F_l$ —площадь)	$\frac{EF_l}{l_l}$	$\frac{E'F'_l}{l'_l} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{EF_l}{l_l}$
Изгибная жесткость ( $J$ —момент инерции сечения)	$\frac{EJ_l}{l_l^3}$	$\frac{E'J'_l}{l'^3_l} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{EJ_l}{l_l^3}$
Радиус инерции сечения	$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$	$i' = \sqrt{\frac{J'}{F'}} = -\frac{i}{\alpha}$

Масштаб геометрического подобия  $\alpha$  равен отношению размеров сходственных элементов в модели и в натуре. Масштаб силового подобия  $\beta$  равен отношению величин сил в модели к величинам сил в натуре. При соблюдении полного подобия и применении для модели того же материала, что и для натуре ( $E' = E$ ), масштабы силового и геометриче-

ского подобия связаны зависимостью  $\alpha^2 = \beta$ .

Динамическое подобие. Частоты собственных колебаний модели  $\omega'_k$ , геометрически подобной исходной системе и выполненной из того же материала, относятся к частотам собственных колебаний исходной системы  $\omega_k$  обратно пропорционально линейным размерам модели  $l'_i$  и исходной системы  $l_i$ :

$$\frac{\omega'_k}{\omega_k} = \frac{l_i}{l'_i} = \frac{1}{\alpha}. \quad (224)$$

При  $\alpha < 1$  (модель меньше натуре) частоты собственных колебаний модели получаются более высокими, чем в исходной системе, что может оказаться невыгодным для проведения измерений. Если желательно в механической модели получить частоты, равные или меньшие, чем в натуре, то приходится отказаться от геометрического подобия.

При осуществлении модели динамической системы, воспроизводящей расчетную схему с конечным числом степеней свободы, необходимо обеспечить одинаковые соотношения между соответственными массами и жесткостями, а именно:

1) массы (или моменты инерции масс) модели должны относиться между собой, как соответствующие величины исходной системы:

$$m'_1 : m'_2 : m'_3 : \dots = m_1 : m_2 : m_3 : \dots \quad (225)$$

$$m'_i = \alpha m_i;$$

2) коэффициенты влияния или жесткости элементов\* модели должны относиться между собой, как соответствующие им коэффициенты влияния или жесткости исходной системы:

$$\delta'_1 : \delta'_2 : \delta'_3 : \dots = \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \dots$$

$$\delta'_i = b \delta_i \quad (226)$$

или

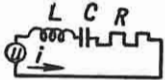
$$C'_1 : C'_2 : C'_3 : \dots = C_1 : C_2 : C_3 : \dots \quad (227)$$

$$C'_i = \frac{1}{b} C_i$$

Соотношение частот собственных колебаний модели и исходной системы

$$\omega'_k = \frac{\omega_k}{\sqrt{ab}} \quad (228)$$

Сопоставление механических и электрических величин

Механические величины	Электрические величины	
	Первая система аналогий	Вторая система аналогий
Перемещение $x$ Скорость $v = \frac{dx}{dt}$ Сила $Q$ Масса $m$ Податливость $e$ Сопротивление потерь $S$ Гармоническое колебание ( $x = A \sin \omega t$ ): $v = \omega A \cos \omega t = v_m \cos \omega t$ $Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi)$	Электрический заряд $q$ Ток $i = \frac{dq}{dt}$ Напряжение $u$ Индуктивность $L$ Емкость $C$ Омическое сопротивление $R$ Переменный ток: $i = I \cos \omega t$ ; $u = U \cos(\omega t + \varphi)$	Магнитное потокоцепление $\Phi$ Напряжение $u = \frac{d\Phi}{dt}$ Ток $i$ Емкость $C$ Индуктивность $L$ Омическая проводимость $\frac{1}{R}$ Переменный ток: $u = U \cos \omega t$ ; $i = I \cos(\omega t + \varphi)$
Механический импеданс $Z_m = \frac{Q}{v}$ Динамическая жесткость (стойкость) $D = \omega Z_m = \frac{Q}{A}$ Механическая система 	Электрический импеданс (полное или кажущееся сопротивление) $Z = \frac{U}{I}$ $\omega Z$ Электрические модели 	Электрический адмиттанс (полная или кажущаяся проводимость) $Y = \frac{1}{Z}$ $\omega Y$ 
$m \frac{dv}{dt} + Sv + \frac{1}{e} \int v dt = Q(t)$	$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U(t)$	$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \int u dt = i(t)$

При моделировании вынужденных колебаний необходимо, кроме того, соблюдение равенства коэффициентов усиления в резонансе для природы и модели.

**Электрические модели.** Две системы электромеханических аналогий: первая — энергия магнитного поля соответствует кинетической энергии, а энергия электрического поля — потенциальной; вторая — энергия магнитного поля соответствует потенциальной энергии, а энергия электрического поля — кинетической. Сопоставление механических и электрических величин приведено в табл. 14.

Для обеспечения подобия всех форм колебаний механической и электрической систем необходимо задать одинаковые соотношения между соответственными элементами в динамической схеме меха-

нической системы и электрической модели, а при моделировании вынужденных колебаний также одинаковые коэффициенты усиления в резонансе. Если при первой системе аналогий принять определенный механический масштаб электрических напряжений, соответствующих внешним возбуждающим силам, то в этом же масштабе получаются значения динамических сил в элементах системы. Подобные же зависимости для токов имеют место при второй системе аналогий.

Теория электрического моделирования изгибных и крутильных колебаний, а также описание электрических моделирующих устройств для исследования колебаний систем со многими степенями свободы при полигармоническом возбуждении см. [43], [44].

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Ананьев И. В., Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, ОГИЗ, 1946
2. Ананьев И. В. и Беляев М. М., Техника измерения колебаний, БНТ, М. 1947.

3. Андронов А. А. и Хайкин С. Х., Теория колебаний, ч. 1-я, ГТТИ, 1937.
4. Баркан Д. Д., Динамика оснований и фундаментов, Стройвоенмориздат, 1948.



5. Безухов Н. И., Динамика сооружений в примерах и задачах, Стройиздат, 1947.
6. Бернштейн С. А., Основы динамики сооружений, Стройиздат, 1941.
7. Бицено К. Б. и Граммель Р., Техническая динамика, т. II, ГТТИ, 1952.
8. Булгаков Б. В., Колебания, т. I, ГТТИ, 1949.
9. Власов В. З., Общая теория оболочек и ее приложение в технике, ГТТИ, М. — Л. 1949.
10. Гогенемзер К. и Прагер В., Динамика сооружений, ОНТИ, 1936.
11. Гопп Ю. А., Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей, ГНТИ, 1938.
12. Горелик Г. С., Колебания и волны, ГТТИ, 1950.
13. Гроссман Е. П., Пановко Я. Г., Упругие колебания частей самолета, изд. ЛКВВИА, 1947.
14. Ден-Гартог Дж. П., Теория колебаний, Гостехиздат, 1942.
15. Житомирский В. К., Крутильные колебания авиационных двигателей, Оборонгиз, 1952.
16. Иорш Ю. И., Защита самолетного оборудования от вибрации, Оборонгиз, 1949.
17. Карман Т. и Био М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, 1946.
18. Келдыш М. В., Гроссман Е. П. и Марин Н. И., Вибрации на самолете, 1942.
19. Крылов А. Н., Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехтеоретиздат, 1934.
20. Крылов А. Н., Об определении критических скоростей вращающегося вала, 1932.
21. Крылов А. Н., Вибрация судов, ОНТИ, 1936.
22. Крылов А. Н. и Боголюбов Н. Н., Новые методы нелинейной механики, ОНТИ, 1934.
23. Левин А. В. и Ривош У. Е., Рабочие лопатки паровых турбин, ГЭИ, 1941.
24. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Теоретическая механика, т. III, Л. 1934.
25. Лунц Е. Б., О поперечных колебаниях валов, 1935.
26. Лурье А. И., Операционное исчисление, ГТТИ, 1950.
27. Лурье А. И., Методы динамического расчета сооружений. Справочник инженера-проектировщика, т. II, Промстройпроект, 1933.
28. Лурье А. И., Крутильные колебания в дизельных установках, ГТТИ, 1940.
29. Мэнли Р., Анализ и обработка записей колебаний, Машгиз, 1948.
30. Нейман И. Ш., Динамика авиационных двигателей, Оборонгиз, 1940.
31. Николай Е. Л., Теория гироскопов, ГТТИ, 1948.
32. Ольсон Т., Динамические аналогии, ГИИЛ, М. 1947.
33. Пономарев С. Д., Расчет и конструкция витых пружин, ОНТИ, 1938.
34. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. II, Машгиз, 1952.
35. Рабинович И. М., Основы динамического расчета сооружений на действие мгновенных или кратковременных сил, Стройиздат, 1945.
36. Релей Дж. В., Теория звука, Гостехиздат, т. I, 1940, т. II, 1944.
37. Серебренников М. Г., Гармонический анализ, Гостехиздат, 1948.
38. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М. и Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроении, Машгиз, 1945.
39. Сорокин Е. С., Динамика междуэтажных перекрытий, Стройиздат, 1941.
40. Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, ГТТИ, 1950.
41. Терских В. П., Расчеты крутильных колебаний силовых установок (Справочное пособие), Машгиз, т. I, 1953, т. II, 1954.
42. Тетельбаум И. М., Механические колебания. Энциклопедический справочник „Машиностроение“, т. I, кн. 2-я, Машгиз, 1946.
43. Тетельбаум И. М., Исследование крутильных колебаний валов поршневых двигателей путем электрического моделирования. БНТ МАП, М. 1948.
44. Тетельбаум И. М., Электрическое моделирование изгибных колебаний и метод динамических жесткостей, Оборонгиз, М. 1949.
45. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, Гостехтеоретиздат, 1934.
46. Тумаркин С. А., Равновесие и колебания закрученных стержней, ГТТИ, 1937.
47. Филипов А. П., Методы расчета сооружений на колебания, Стройиздат, 1941.
48. Шиманский Ю. А., Динамический расчет судовых конструкций, Судпромгиз, 1948.
49. Яновский М. И., Конструирование и расчет на прочность деталей паровых турбин, изд. АН СССР, 1947.
50. Авиационные поршневые двигатели. Кинематика, динамика и расчет на прочность. Пособие для инженеров, Оборонгиз, М. 1950.
51. АН СССР, Институт машиноведения, Динамика и прочность коленчатых валов (сборник статей), изд. АН СССР, М., сб. I, 1948, сб. II, 1950.
52. АН СССР, Институт машиноведения, Повышение прочности деталей машин, изд. АН СССР, 1949.
53. АН СССР, Институт машиноведения, Поперечные колебания и критические скорости, изд. АН СССР, сб. I, 1951, сб. II, 1952.
54. Промстройпроект, Справочник проектировщика промышленных сооружений, т. IV, ч. III, разд. V — XII (фундаменты под машины), 1934.
55. Holba T., Berechnungsverfahren zur Bestimmung der Kritischen Drehzahlen von geraden Wellen, Berlin 1930.
56. Ker-Wilson W., Practical solution of torsional vibration problems, London, v. I, 1940, v. II, 1941.

РАСЧЕТ НА УДАРНЫЕ НАГРУЗКИ

ВВЕДЕНИЕ

При ударе в упругих системах возникают колебания, причем напряжения и деформации могут достигнуть опасных для прочности значений.

Расчет максимальных перемещений точек системы при ударе, а также соответствующих деформаций и напряжений выполняется с помощью аппарата теории колебаний.

Задача осложняется, однако, тем, что силы, действующие на упругую систему в процессе удара, заранее неизвестны.

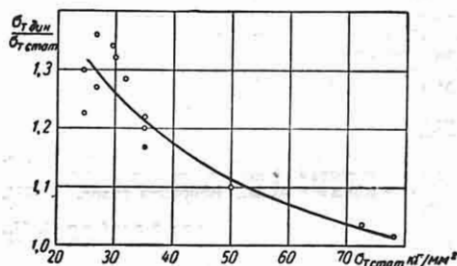
Эти силы могут быть найдены лишь из совместного решения уравнений движения упругой системы и ударяющего груза.

Такое решение является, как правило, чрезвычайно сложным и лишь в простейших случаях может быть доведено до расчетных формул. Поэтому в большинстве случаев практики пользуются приближенными методами расчета, позволяющими лишь грубо оценить порядок возникающих при ударе напряжений и деформаций.

Основным методом приближенного расчета удара является так называемый метод приведения массы, который дает возможность расчет сложной упругой системы свести к расчету системы с одной степенью свободы.

Механические характеристики материала при больших скоростях деформации, имеющих место при ударе, недостаточно изучены. Установлено, что для металлов упругие характеристики (модуль упругости, коэффициент Пуассона) не зависят от скорости нагружения. Предел текучести увеличивается с увеличением скорости нагружения, приближаясь к пределу прочности. Предел прочности мало изменяется в зависимости от скорости нагружения.

На фиг. 1 представлено отношение динамического предела текучести  $\sigma_{T \text{дин}}$  к статическому для сталей с различными значениями  $\sigma_T$  при статической нагрузке. Данные получены при возрастании на-



Фиг. 1. Динамический предел текучести для стали в зависимости от статического предела текучести (время возрастания нагрузки  $9 \cdot 10^{-3}$  сек.).

грузки от нуля до максимума в течение около  $9 \cdot 10^{-3}$  сек. При больших скоростях возрастания нагрузки (время достижения максимума порядка  $10^{-5}$  сек.) отмечалось двукратное повышение предела текучести мягкой стали.

СОУДАРЕНИЕ МАССИВНЫХ ТЕЛ

При расчете соударения массивных тел (например, шаров), общими деформациями которых можно пренебречь по сравнению с местными их деформациями вблизи зоны контакта, полагают, что между контактной силой  $P$  и сближением центров инерции соударяющихся тел  $\alpha$  имеется такая же зависимость, как и при статическом сжатии тел. При прямом ударе в случае, если начальный контакт тел осуществляется в точке, причем расстояние между телами вблизи этой точки может быть представлено

уравнением второго порядка [8], эта зависимость имеет вид

$$P = k\alpha^{\frac{3}{2}},$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от кривизны поверхностей тел в точке контакта и от упругих свойств материала.

При соударении двух тел, имеющих вблизи точки первоначального касания выпуклые сферические поверхности с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , коэффициент  $k$  определяется по формуле

$$k = \frac{4}{3\eta} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2},$$

$\mu_1$ ,  $E_1$ ,  $\mu_2$  и  $E_2$  — коэффициенты Пуассона и модули упругости для материалов соударяющихся тел.

Если поверхность одного из тел вогнутая, соответствующий радиус кривизны вносится в формулу со знаком минус. При плоской поверхности одного из тел ( $R_2 = \infty$ ) коэффициент  $k$  равен

$$k = \frac{4}{3\eta} \sqrt{R_1}.$$

При более сложной геометрии соударяющихся деталей значения коэффициента  $k$  могут быть получены из формул табл. 6 гл. XIII.

Уравнение движения тел в процессе удара имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{m} P(\alpha),$$

где обозначено

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

( $m_1$  и  $m_2$  — массы соударяющихся тел).

Решение этого уравнения при подстановке зависимости  $P(\alpha)$  позволяет найти максимальное сближение тел

$$\alpha_{\max} = \left[ \frac{5}{4} \cdot \frac{m v_0^2}{k} \right]^{\frac{2}{3}},$$

максимальную контактную силу

$$P_{\max} = k \alpha_{\max}^{\frac{3}{2}} = k \left[ \frac{5}{4} \cdot \frac{m v_0^2}{k} \right]^{\frac{1}{2}}$$

и время соударения

$$T = 2,9432 \left( \frac{5m}{4k} \right)^{\frac{1}{2}} v_0^{-\frac{1}{5}},$$

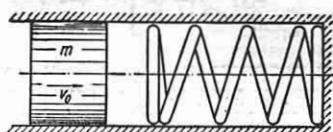
где  $v_0$  — скорость сближения тел до соударения.

Приведенные формулы справедливы, если в процессе удара не возникают пластические деформации.

Вычисление напряжений в соударяющихся телах, обусловленных контактной силой  $P_{\max}$ , см. гл. XIII, а также [1].

## УДАР ЖЕСТКОГО ГРУЗА ПО УПРУГОЙ СИСТЕМЕ С ВЕСЬМА МАЛОЙ СОБСТВЕННОЙ МАССОЙ

При горизонтальном ударе (фиг. 2) после соприкосновения груза с упругой системой он совершает в контакте с ней



Фиг. 2. Удар по системе с малой собственной массой.

половину полного колебания в течение времени

$$t = \pi \sqrt{m\delta},$$

где  $m$  — масса груза;  $\delta$  — податливость системы, т. е. перемещение точки удара, вызываемое силой в 1 кг.

Максимальный динамический прогиб упругой системы равен

$$f_{\max} = \sqrt{m v_0^2 \delta} = \sqrt{2 W_0 \delta},$$

где  $v_0$  — начальная скорость удара;  $W_0$  — кинетическая энергия груза.

Формулу для максимального динамического прогиба можно также представить в виде

$$f_{\max} = \sqrt{f_{cm} \frac{v_0^2}{g}},$$

где  $f_{cm} = mg\delta$  — статический прогиб под действием силы веса груза, если эта сила действует в направлении удара;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Максимальная сила взаимодействия между грузом и упругой системой равна

$$P_{\max} = \frac{1}{\delta} f_{\max} = \sqrt{\frac{2W_0}{\delta}} = \sqrt{Q \frac{v_0^2}{g\delta}},$$

где  $Q = mg$  — вес груза.

При вертикальном ударе, если в момент соприкосновения с упругой системой груз имеет скорость  $v_0$ , максимальный прогиб системы равен

$$f_{\max} = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + f_{cm} \frac{v_0^2}{g}},$$

или

$$f_{\max} = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + 2W_0\delta}.$$

Соответствующее максимальное усилие составляет

$$P_{\max} = \frac{f_{\max}}{\delta} = Q + \sqrt{Q^2 + Q \frac{v_0^2}{g\delta}}.$$

Если скорость  $v_0$  груза в момент соударения с упругой системой обусловлена его свободным падением с высоты  $h$ , то

$$v_0 = \sqrt{2gh},$$

и формулы для максимального прогиба и максимальной силы удара приводятся к виду

$$f_{\max} = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + 2hf_{cm}};$$

$$P_{\max} = Q + \sqrt{Q^2 + 2\frac{h}{\delta}Q}.$$

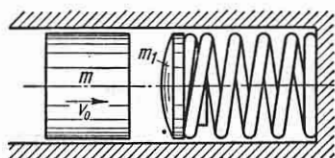
Как видно из сопоставления приведенных формул, при вертикальном ударе максимальный прогиб и ударное усилие больше, чем при горизонтальном (при одинаковой скорости соударения). Это объясняется тем, что при вертикальном ударе сила тяжести совершает дополнительную работу при деформации системы.

### УДАР ПО БУФЕРУ

В случае удара жесткого груза по буферу, т. е. по другому грузу, подпертому пружиной, собственная масса которой незначительна (фиг. 3), процесс сводится к ряду коротких соударений между грузами. В промежутках между

соударениями ударивший груз движется по инерции, а масса буфера совершает свободные колебания на пружине.

Если местные деформации груза и буфера при соударениях не представляют существенного интереса, то эти



Фиг. 3. Удар по буферу.

соударения можно рассматривать как мгновенные, характеризуемые определенным коэффициентом  $\eta$  восстановления скорости. При соударении стальных деталей  $\eta = 0,5 \div 0,8$  (в зависимости от типа стали, геометрии мест соударения, скорости удара).

Скорости груза и буфера после соударения определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} v'' &= v' \frac{1 - \eta\mu}{1 + \mu} + v_1' \mu \frac{1 + \eta}{1 + \mu}; \\ v_1'' &= v' \frac{1 + \eta}{1 + \mu} + v_1' \frac{\mu - \eta}{1 + \mu}. \end{aligned} \right\} (a)$$

где  $v'$  и  $v_1'$  — скорости ударяющего груза и буфера до соударения;  $v''$  и  $v_1''$  — их скорости после соударения;  $\mu$  — отношение массы  $m_1$  буфера к массе  $m$  груза.

С помощью формул (a) и используя графический метод построения зависимости пути грузов  $m$  и  $m_1$  от времени, можно проанализировать весь процесс удара.

Рассмотрим пример такого анализа для случая  $\mu = \frac{m_1}{m} = 1$  и  $\eta = 0,5$ . При этих значениях формулы (a) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v'' &= 0,25v' + 0,75v_1'; \\ v_1'' &= 0,75v' + 0,25v_1'. \end{aligned} \right\} (b)$$

После первого соударения груз  $m$ , двигавшийся до удара со скоростью  $v_0$ , получает скорость, равную  $0,25v_0$ , а буфер получает скорость, равную  $0,75v_0$ .

Поскольку скорость буфера больше, чем скорость груза, они далее движутся независимо один от другого: груз движется по инерции равномерно со скоростью  $0,25v_0$ , а буфер на пружине совершает свободное колебание с начальной скоростью  $0,75v_0$ .



К такой схеме приводится, например, удар о буфер подвижных частей орудия, закрепленного на упругом лафете, удар болванки о форштосс прокатного стана, удар в ковочном молоте и др.

Расчет в этом случае проводится с помощью аппарата теории колебаний для системы с двумя степенями свободы (см. гл. XI). В момент  $t = 0$ , когда груз  $m_1$  касается пружины I, смещения обоих грузов равны нулю, скорость груза  $m_1$  равна начальной скорости удара  $v_0$ , а скорость груза  $m_2$  — нулю. Решение дифференциальных уравнений движения системы, состоящей из двух грузов и двух пружин, при этих начальных условиях позволяет определить перемещения грузов и усилия в пружинах. Это решение справедливо только до тех пор, пока груз  $m_1$  находится в контакте с пружиной I. Как только груз  $m_1$  отрывается от пружины, он продолжает движение по инерции, а груз  $m_2$  совершает свободные колебания на пружине II. Вслед за этим может иметь место новое касание груза  $m_1$  с пружиной I, после чего система снова движется совместно, как система с двумя степенями свободы. Движение ее в этом периоде рассчитывается по тем же общим формулам, причем в качестве начальных условий принимаются те скорости и смещения грузов, которые имеют место к моменту контакта.

Таким же образом производится расчет и дальше, если в процессе удара имеют место еще отрывы груза  $m_1$  от пружины I.

В качестве примера на фиг. 6 приводится график движения грузов при одинаковых грузах и одинаковых пружинах. По горизонтали отложена величина  $\rho_0 t$ ,

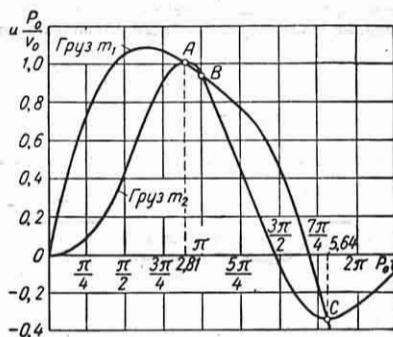
где  $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{m_2 \delta}}$  — частота колебаний

груза на одной пружине, а по вертикали — смещения грузов, отнесенные к величине  $\frac{v_0}{\rho_0}$ , где  $v_0$  — начальная скорость удара.

Как видно из графика, груз  $m_2$  начинает двигаться не сразу, а с некоторым запозданием, и смещения его достигают максимума тогда, когда груз  $m_1$  уже движется в обратном направлении. На участке AB груз  $m_1$  не касается пружины I и движется по инерции.

В точке B происходит новое касание груза о пружину, а в точке C — окончательный отрыв его.

Рассмотренный пример позволяет установить основные особенности удара по упругой системе с несколькими степе-



Фиг. 6. Зависимость от времени смещений грузов в системе с двумя степенями свободы ( $m_1 = m_2$ ;  $\delta_1 = \delta_2$ ;  $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$ ).

ниями свободы: неодновременность движения различных частей системы и наличие повторных соударений.

## ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО СТЕРЖНЯМ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

Явление продольного удара по стержням носит волновой характер, причем деформации растяжения — сжатия распространяются вдоль стержней со скоростью

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где  $E$  — модуль упругости материала;  $\rho$  — его плотность.

Для стали  $a \approx 5000$  м/сек.

Движение сечений стержня можно рассматривать как результат наложения двух волн, движущихся по стержню слева направо и справа налево, причем форма каждой волны, определяемая начальными и граничными условиями, остается неизменной в процессе ее распространения.

Соответствующее выражение для осевого смещения  $u$  произвольного сечения стержня, начальное положение кото-

рого определяется абсциссой  $x$ , имеет вид

$$u(x, t) = f(at - x) + \varphi(at + x),$$

где  $f(at - x)$  представляет собой волну деформации, движущуюся в положительном направлении оси  $x$ ;  $\varphi(at + x)$  — волну, движущуюся в направлении, обратном оси  $x$ .

Как уже указывалось выше, вид функций  $f$  и  $\varphi$  зависит от начальных и граничных условий.

Относительное удлинение  $\epsilon$  и скорость движения  $v$  произвольного сечения стержня определяются уравнениями

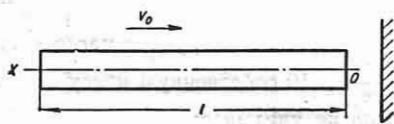
$$\epsilon = \frac{du}{dx} = -f'(at - x) + \varphi'(at + x);$$

$$v = \frac{du}{dt} = a[f'(at - x) + \varphi'(at + x)],$$

где штрихами обозначены производные функций  $f$  и  $\varphi$  по аргументу.

Ниже приводятся выражения  $\epsilon$  и  $v$  для двух частных задач\*.

1. Удар стержня постоянного сечения о неподвижную преграду (фиг. 7). Мест-



Фиг. 7. Удар стержня о неподвижную преграду.

ные деформации не учитываются. В момент соприкосновения стержня с опорой принимается  $t = 0$ .

Пока ударная волна, распространяющаяся от точки контакта, не достигла еще рассматриваемого сечения, т. е. при  $at < x$ ,

$$v = -v_0; \quad \epsilon = 0$$

(знак минус при  $v_0$  объясняется тем, что начальная скорость направлена против оси  $x$ ).

Когда ударная волна, распространяющаяся от точки удара, достигла сечения, но волна, отраженная от свободного

конца стержня, еще не дошла до него, т. е. при  $x < at < 2l - x$ ,

$$v = 0; \quad \epsilon = -\frac{v_0}{a}.$$

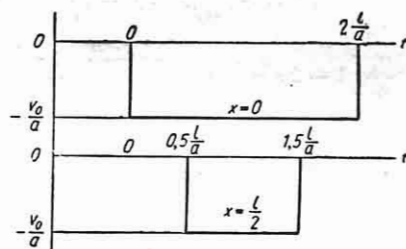
После того как до сечения доходит и отраженная волна, т. е. при  $at > 2l - x$ ,

$$v = v_0; \quad \epsilon = 0.$$

Таким образом, в результате удара стержень отскакивает от опоры со скоростью, равной начальной скорости удара.

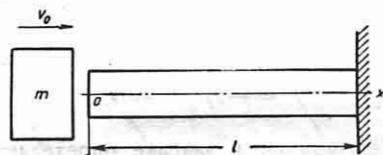
Максимальная деформация, испытываемая стержнем, равна отношению скорости удара к скорости распространения волн. Изменение деформации в сечениях

$x = 0$  и  $x = \frac{l}{2}$  представлено на фиг. 8.



Фиг. 8. Изменение деформаций в сечениях стержня  $x = 0$  и  $x = \frac{l}{2}$  при ударе о неподвижную преграду.

2. Удар жесткого груза массы  $m$  по стержню с заделанным концом (фиг. 9).



Фиг. 9. Удар жесткого груза по стержню.

В этом случае скорость и деформация в произвольном сечении определяются выражениями

$$v = a[f'(at - x) - f'(at + x - 2l)];$$

$$\epsilon = -[f'(at - x) + f'(at + x - 2l)].$$

\* В общем случае продольного удара для определения деформаций и скоростей с успехом может быть использован графический метод характеристик, изложенный в работе [1].

Функция  $f'(z)$  для различных значений аргумента  $z$  задана следующими формулами:

$$z < 0$$

$$f'(z) = 0;$$

$$0 < z < 2l$$

$$f'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\chi \frac{z}{l}};$$

$$2l < z < 4l$$

$$f'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\chi \frac{z}{l}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\chi \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\chi \frac{z-2l}{l}};$$

$$4l < z < 6l$$

$$f'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\chi \frac{z}{l}} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\chi \frac{z-2l}{l}\right) e^{-\chi \frac{z-2l}{l}} + \frac{v_0}{a} \times \left[1 - 2\chi \frac{z-4l}{l} \times \left(2 - \chi \frac{z-4l}{l}\right)\right] e^{-\chi \frac{z-4l}{l}}.$$

В приведенных формулах  $v_0$  — начальная скорость удара;  $\chi$  — отношение собственной массы стержня к массе груза.

Графики функции  $f'(z)$  для значений  $\chi = 1; 1/2; 1/4; 1/8$  представлены на фиг. 10, а соответствующие графики для деформаций стержня в точке удара ( $x=0$ ) — на фиг. 11.

Деформация стержня в заделке ( $x=l$ ) равна

$$\epsilon = -[f'(at-l) + f'(at+l-2l)] = -2f'(at-l).$$

Деформации в заделке определяются удвоенным значением функции  $f'$ . При различных значениях  $\chi$  максимальные деформации в заделке равны соответственно

$\chi$ . . . . .	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$
$ \epsilon_{\max}  \frac{a}{v_0}$ . . . . .	2,27	2,74	3,21	3,50

При малых значениях  $\chi$  (отношение собственной массы стержня к массе

груза  $\chi < 0,2$ ) максимальная испытываемая стержнем деформация определяется приближенной формулой

$$\epsilon_{\max} = \frac{v_0}{a} \left( \sqrt{\frac{1}{\chi}} + 1 \right).$$

Элементарный расчет, не учитывающий вовсе влияния собственной массы стержня (см. стр. 391), дает относительную ошибку в величине максимальной деформации порядка  $\sqrt{\chi}$

$$\frac{\epsilon_{\text{волн}} - \epsilon_{\text{прибл}}}{\epsilon_{\text{прибл}}} \approx \sqrt{\frac{m_1}{m}},$$

где  $m_1$  — собственная масса стержня;  $m$  — масса груза.

Эта ошибка очень велика, если масса стержня того же порядка, что и масса груза.

При больших отношениях  $\frac{m}{m_1}$  ошибка элементарного расчета убывает значительно быстрее, чем это следует из приведенной формулы, так как в действительности вследствие затухания и местных деформаций величины пиков напряжений при каждом следующем отражении волн убывают. Поэтому при отношении массы груза к массе стержня  $\frac{m}{m_1} \geq 10$  собственную массу стержня можно не учитывать.

Рассмотренные примеры позволяют выявить основные особенности волновых процессов при продольном ударе: распространение волны деформации со скоростью, зависящей от модуля упругости и плотности материала, разрывной характер изменения деформаций и скоростей в сечениях стержня, наличие определенного соотношения между скоростью удара и деформацией, возникающей в первый момент удара.

Деформация  $\epsilon_0$ , возникающая в первый момент удара жестким грузом, движущимся со скоростью  $v_0$ , равна

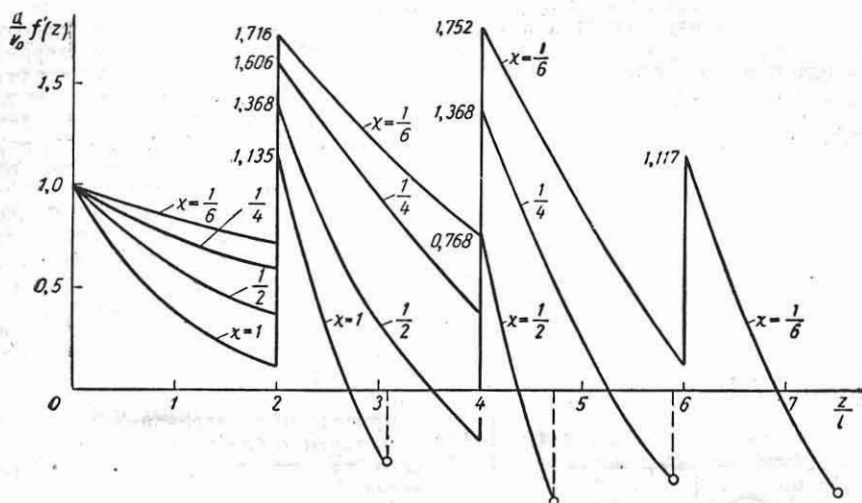
$$\epsilon_0 = \frac{v_0}{a},$$

а соответствующее напряжение

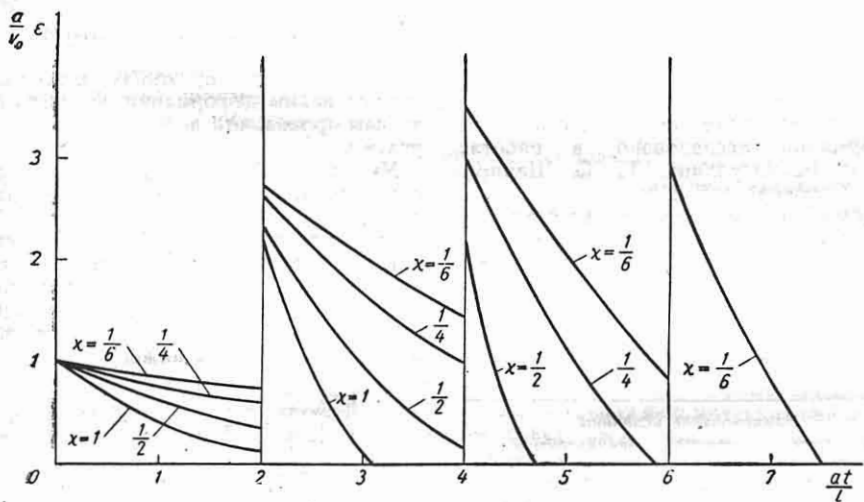
$$\sigma_0 = E\epsilon_0 = v_0 \sqrt{E\rho}.$$

Для стали получаем  $\sigma_0 = 400 v_0$ , где  $\sigma_0$  — в  $\text{кг/см}^2$ ,  $v_0$  — в  $\text{м/сек}$ .





Фиг. 10. Значения функции  $f'(z)$  при различных отношениях  $\chi$  массы стержня к массе груза ( $v_0$ —начальная скорость удара;  $a$ —скорость распространения деформаций).



Фиг. 11. Изменение деформаций стержня в точке удара при различных отношениях  $\chi$  массы стержня к массе груза.



В приведенных формулах обозначено:  $C = GJ_K$  — крутильная жесткость сечения проволоки (значения  $J_K$  для различных форм сечения см. табл. 4 гл. II);  $s$  — шаг пружины;  $D$  — средний диаметр витка;  $F$  — площадь сечения витка;  $i$  — число рабочих витков;  $\rho$  — плотность материала в  $\text{кг/сек}^2/\text{см}^4$ .

Расчет процесса удара груза по пружине выполняется точно так же, как и для удара по стержню (см. стр. 394). При этом под  $\chi$  понимается отношение собственной массы пружины к массе груза. Усилие  $P$ , сжимающее пружину, связано с деформацией ее  $\epsilon$  выражением

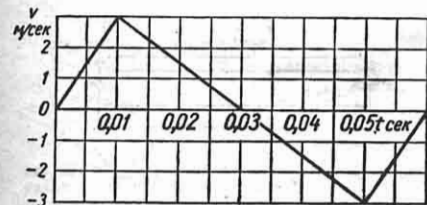
$$P = \epsilon (EF)_{\text{экв.}}$$

а напряжения в витках пружин найдутся через усилие по обычным формулам статического расчета пружин (см. т. 4, гл. XVIII).

При заданном законе движения конца пружины (например, клапанные пружины) расчет удобно выполняется графическим методом [1].

В качестве примера приведем результат расчета клапанной пружины тяжелого дизеля, имеющей следующие параметры: диаметр проволоки  $d = 9,5 \text{ мм}$ ; средний диаметр пружины  $D = 82 \text{ мм}$ ; число рабочих витков  $i = 9,5$ ; предварительное поджатие  $f_0 = 40,5 \text{ мм}$ ; усилие предварительного поджатия  $P_0 = 63 \text{ кг}$ ; свободная длина  $H_0 = 210 \text{ мм}$ ; шаг навивки  $s = 19,2 \text{ мм}$ ; модуль сдвига материала  $G_1 = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ; плотность материала  $\rho = 7,9 \cdot 10^{-6} \text{ кг/сек}^2/\text{см}^4$ .

Один конец пружины оперт, другой связан с клапаном, приводимым от параболического кулачка. Закон движения клапана (график скорости) представлен на фиг. 13. На фиг. 14 приве-



Фиг. 13. График изменения скорости клапана.

дены полученные в результате расчета графики изменения усилий в первом

( $x = 0$ ) и последнем ( $x = l$ ) витках пружины. Пунктиром нанесены значения усилий, полученных из статического расчета. Максимальное динамическое усилие, возникающее на неподвижном конце



Фиг. 14. Изменение усилий в витках клапанной пружины при движении ее конца по закону, представленному на фиг. 13.

пружины через  $37,5 \cdot 10^{-8}$  сек. после начала движения, равно  $80 \text{ кг}$ . Полное усилие с учетом предварительной затяжки составит в этот момент  $P_{\text{max}} = 63 + 80 = 143 \text{ кг}$ . Оно на 17% выше, чем усилие, найденное статическим расчетом.

## УПРОЩЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НА УДАР

Пренебрежение собственной массой упругой системы по сравнению с массой ударяющего груза — наиболее простой прием, позволяющий использовать для расчета простые уравнения удара по системе с одной степенью свободы (см. стр. 391).

Этот прием дает удовлетворительные результаты в том случае, если масса груза превышает собственную массу системы более чем в 5—10 раз. В противном случае ошибка может быть очень значительной.

Вследствие пренебрежения собственной массой системы величины максимальных динамических перемещений системы получаются завышенными. Ошибка в величине динамических напряжений может быть как в сторону их завышения, так и в сторону их занижения.

Метод введения массы является наиболее распространенным приближенным методом расчета на ударную нагрузку. Этот метод позволяет более точно, чем при полном пренебрежении собственной массой системы, оценить динамические перемещения. Для напряжений существенного уточнения не получается. При точном расчете

по данным начальным условиям определяется движение системы в процессе удара.

При использовании метода приведения массы закон движения системы задается на основе тех или иных соображений и вычисляется лишь величина максимальных динамических перемещений и напряжений. При этом приближенный расчет дает лишь ориентировочные значения динамических напряжений и усилий и относительно точные значения динамических перемещений.

Для расчета упругая система с распределенной и сосредоточенными в различных точках ее массами заменяется невесомой системой с одной сосредоточенной в точке удара массой (приведенной).

Величина приведенной массы определяется по формуле

$$m_{np} = \sum m_i \left( \frac{u_i}{u_0} \right)^2 + \int \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 dm,$$

где  $m_i$  — сосредоточенные массы системы;  $dm$  — элементы распределенной массы;  $\frac{u_i}{u_0}$ ,  $\frac{u}{u_0}$  — отношения перемещений соответственно  $i$ -й сосредоточенной массы  $m_i$  и элемента  $dm$  распределенной массы к перемещению  $u_0$  точки удара при заданном законе движения системы.

Суммирование в приведенной формуле выполняется по всем сосредоточенным, а интегрирование — по всем распределенным массам системы.

При вычислении величины приведенной массы принимают обычно, что соотношения между перемещениями точек системы при ударе таковы же, как и при собственных ее колебаниях основного тона или (чаще) при деформации системы статической нагрузкой, приложенной в точке удара. Коэффициентом  $k_{np}$  приведения массы называется отношение приведенной массы системы  $m_{np}$  к полной ее массе:

$$k_{np} = \frac{m_{np}}{m}.$$

Ниже даются некоторые примеры определения приведенной массы.

1. Приведенная масса стержня постоянного сечения при продольном ударе по его концу (фиг. 15, а).

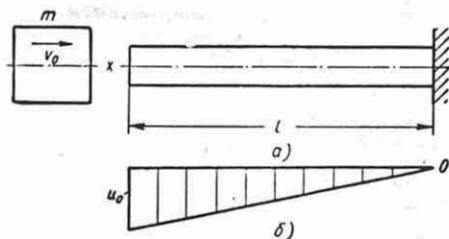
Предположим, что перемещения вдоль оси стержня изменяются так же, как и при статическом сжатии его по треугольнику (фиг. 15, б):

$$u = u_0 \frac{x}{l}.$$

Находим приведенную массу:

$$m_{np} = \int_0^l \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 dm = \int_0^l \left( \frac{x}{l} \right)^2 q dx = \frac{1}{3} ql.$$

Эта масса составляет  $\frac{1}{3}$  полной массы стержня  $ql$ , и таким образом коэффициент приведения в данном случае равен  $\frac{1}{3}$ .



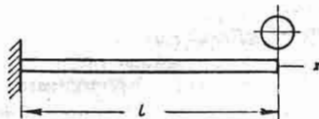
Фиг. 15. К определению приведенной массы стержня при продольном ударе.

2. Приведенная масса консольной балки постоянного сечения при ударе по ее концу (фиг. 16)

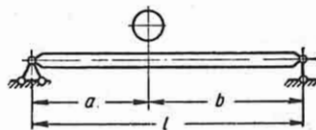
$$m_{np} = \frac{33}{140} ql.$$

Коэффициент приведения массы  $k_{np} = \frac{33}{140}$ .

3. Приведенная масса двухопорной балки постоянного сечения длины  $l$  при ударе в произвольной точке на расстоянии  $a$  от опоры (фиг. 17).



Фиг. 16. К определению приведенной массы консольной балки.



Фиг. 17. К определению приведенной массы двухопорной балки.

Проще всего получить результат, предположив, что упругая линия балки — синусоида:

$$u = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Прогиб в точке удара равен тогда

$$u_0 = f \sin \frac{\pi a}{l}$$

и приведенная масса

$$m_{np} = \int_0^l \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 q dx = \\ = \frac{q}{\sin^2 \frac{\pi a}{l}} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{ql}{2 \sin^2 \frac{\pi a}{l}}$$

Коэффициент приведения

$$k_{np} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi a}{l}}$$

Если принять для расчета упругую линию, соответствующую нагружению балки сосредоточенной силой в точке удара, для коэффициента приведения получается формула

$$k_{np} = \frac{1}{420 a^2 b^2 l} [15 (a^3 + b^3) + 35 a^2 (l + b)^2 + \\ + 35 b^3 (l + a)^2 - 42 a^4 (l + b) - 42 b^4 (l + a)].$$

При ударе в средней точке балки обе формулы дают почти одинаковые результаты  $\left( k_{np} = \frac{1}{2} \right)$

и  $k_{np} = \frac{17}{35}$ . При расположении точки удара ближе к опорам значения  $k_{np}$  по второй формуле несколько меньше, чем по первой. Так, например, при расположении точки удара на одной четверти длины балки первая формула дает  $k_{np} = 1$ , а вторая  $k_{np} = \frac{731}{945} = 0,775$ .

Расчет удара по системе с сосредоточенной в точке удара приведенной массой выполняется в предположении неупругого удара.

Максимальный динамический прогиб определяется по формулам:

для горизонтального удара

$$f_{\max} = \sqrt{\frac{2W_0 \delta}{1 + \frac{m_{np}}{m}}}$$

для вертикального удара

$$f_{\max} = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + \frac{2W_0 \delta}{1 + \frac{m_{np}}{m}}}$$

где  $W_0$  — кинетическая энергия груза в момент удара;  $m$  — его масса;  $\delta$  — податливость упругой системы (т. е. прогиб под действием единичной силы, приложенной в точке удара);  $f_{cm}$  — статический прогиб системы под действием веса груза.

Динамическая нагрузка на систему определяется по формуле

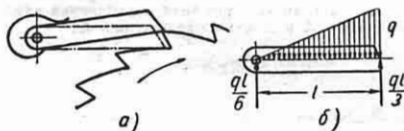
$$P_{\max} = \frac{f_{\max}}{\delta}$$

## УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ УДАРА УПРУГОГО ТЕЛА О НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ ИЛИ СОУДАРЕНИЯ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ

Для расчета обычно задают распределение инерционных усилий в частях системы и затем определяют величину максимальных усилий, приравнивая потенциальную энергию деформации величине кинетической энергии, потерянной при соударении. Точность результата зависит, понятно, от того, насколько удачно будет задано распределение усилий.

Ниже рассматриваются примеры таких расчетов.

*Пример 1.* Определить контактную силу и напряжения в собачке храпового механизма (фиг. 18, а) при соскоке ее с зуба храповика.



Фиг. 18. К расчету усилия удара собачки.

Кинетическая энергия собачки в момент удара  $W_0$  равна работе пружины, прижимающей собачку, и работе силы тяжести собачки на пути, соответствующем свободному движению собачки от момента срыва ее с зуба до контакта со следующим зубом (пунктир на фиг. 18, а).

Предполагается, что эта энергия полностью превращается в потенциальную энергию деформации собачки (местные деформации не учитываются). Упругая линия собачки, которая может рассматриваться как балка постоянного сечения, принимается такой же, как при воздействии на нее нагрузки, распределенной по треугольнику (фиг. 18, б), т. е. в соответствии с распределением инерционных сил при движении собачки как жесткого тела.

Изгибающий момент, вызываемый этой нагрузкой в сечении на расстоянии  $x$  от шарнира, равен

$$M = \frac{ql}{6} x - \frac{q}{6l} x^3 = \frac{q}{6l} (lx - x^3).$$

Потенциальная энергия деформации определяется интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{q^2 l^3}{945 EJ}.$$

Приравнявая эту величину кинетической энергии удара  $W_0$ , находим эквивалентную интенсивность нагрузки:

$$q = \sqrt{\frac{945 EJ}{l^3} W_0}.$$

Динамическая контактная сила при ударе собачки о зуб храповика составит

$$P = \frac{ql}{3} = \sqrt{\frac{105EJ}{l^3}} W_0.$$

Максимальный изгибающий момент в сечении собачки  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$  равен

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{35}{9} \cdot \frac{EJ}{l}} W_0.$$

**Пример 2.** Определить усилие при ударе детали  $A$  (фиг. 19, а), движущейся поступательно со скоростью  $v_0$ , о деталь  $B$ , закрепленную на оси  $C$  и подпертую мягкой пружиной.

Поскольку детали  $A$  и  $B$  являются жесткими по сравнению с пружиной, влиянием последней на соударение можно пренебречь.

В момент наибольшего сжатия детали  $A$  и  $B$  движутся совместно — деталь  $A$  со скоростью  $v_1$ , а деталь  $B$  с угловой скоростью  $\omega = \frac{v_1}{h}$ .

Величину скорости  $v_1$  можно определить из условия постоянства момента количества движения деталей  $A$  и  $B$  относительно оси  $C$ :

$$mvh = mv_1h + J \frac{v_1}{h},$$

где  $m$  — масса детали  $A$ ;  $J$  — момент инерции массы детали  $B$  относительно точки  $C$ .

Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{J}{mh^2}}.$$

Найдем разницу  $W_0$  между начальной кинетической энергией детали  $A$  и кинетической энергией системы в момент наибольшего сжатия:

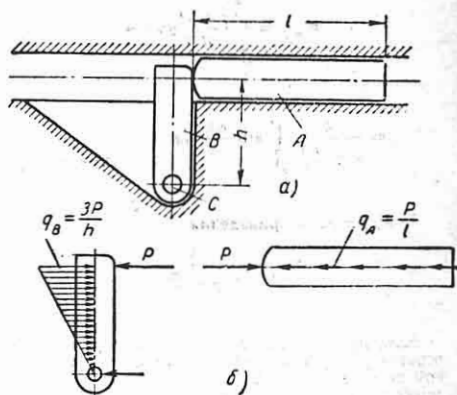
$$W_0 = \frac{mv^2}{2} - \left( \frac{mv_1^2}{2} + \frac{J \left( \frac{v_1}{h} \right)^2}{2} \right) = \frac{J}{1 + \frac{J}{mh^2}} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Именно эта часть энергии превращается в потенциальную энергию деформации деталей  $A$  и  $B$ . Для того чтобы определить деформации деталей, нужно задать схему распределения сил в них.

Предположим, что контактная сила  $P$  на стыке между деталями уравнивается приложенными к деталям массовыми силами, пропорциональными ускорениям соответствующих точек при движении деталей как жестких тел.

Для детали  $A$  ускорения всех точек одинаковы, для детали  $B$  — распределены по треугольнику.

В простейшем случае, когда обе детали представляют собой стержни постоянного сечения, это приводит к распределению нагрузок на них, показанному на фиг. 19, б.



Фиг. 19. К расчету процесса удара в сложной системе.

Соответствующая этим нагрузкам потенциальная энергия деформации равна:

$$U_A = \frac{q_A l^3}{6EF} = \frac{P^2 l}{6EF};$$

для детали  $B$  (см. пример 1)

$$U_B = \frac{q_B^2 h^3}{945EJ} = \frac{P^2 h^3}{105EJ}.$$

Приравняв суммарную энергию деформации найденной выше потере кинетической энергии  $W_0$ , определим контактную силу  $P$  из равенства

$$P^2 \left( \frac{l}{6EF} + \frac{h^3}{105EJ} \right) = W_0.$$

Вслед за этим определяются динамические напряжения в деталях.

#### ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

- Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Расчеты при динамической нагрузке, устойчивость, ползучесть, гл. VIII, Машгиз, 1952.
- Доброгурский С. О., К вопросу о напряжениях и усилиях при ударе, сб. «Вопросы расчета и конструирования деталей машин», изд. АН СССР, 1942.
- Кильчевский Н. А., Теория соударения упругих тел, ГТИ, 1949.
- Шапиро Г. С., Продольные колебания стержней, «Прикладная математика и механика», т. X, вып. 5—6, 1946.

- Ильющин А. А., Пластичность, гл. VII ГТИ, 1948.
- Рахматуллин Х. А., О распространении волн разгрузки, «Прикладная математика и механика», т. IX, вып. 1, 1945.
- Соколовский В. В., Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях, ПММ, т. XII, вып. 3, 1948.
- Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
- Петерссон С., Исследование волн напряжения в цилиндрических стальных стержнях с помощью проволочных датчиков, «Transactions of the Royal Institute of Technology», № 62, 1953, перев. в сб. «Механика» № 3, Инноиздат, 1954.

МЕСТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Концентрацией напряжений называется местное увеличение напряжений, вызванное резким изменением очертания детали, как-то: наличием надреза, отверстия, резьбы, сопряжения детали. От этих мест могут развиваться трещины усталости, а также статические поломки деталей из хрупкого материала.

Величина наибольшего напряжения в зоне концентрации (пик напряжения) выражается как произведение номинального напряжения  $\sigma_n$  или  $\tau_n$  на коэффициент концентрации  $\alpha_\sigma$  или  $\alpha_\tau$ :

$$\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \sigma_n; \quad \tau_{\max} = \alpha_\tau \tau_n. \quad (1)$$

Коэффициентом концентрации называется отношение наибольшего напряжения в зоне концентрации к номинальному напряжению:

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}; \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n}. \quad (2)$$

Номинальное напряжение  $\sigma_n$  или  $\tau_n$  определяется по формулам сопротивления материалов, не учитывающим концентрации напряжений (см. гл. II и III).

Для прямого бруса: при центральном растяжении или сжатии

$$\sigma_n = \frac{P}{F}; \quad (3a)$$

при поперечном изгибе

$$\sigma_n = \frac{M}{W}; \quad (3б)$$

при кручении вала круглого сечения

$$\tau_n = \frac{M_k}{W_p}. \quad (3в)$$

Здесь  $P$ ,  $M$ ,  $M_k$  — продольная сила, изгибающий и скручивающий моменты;

$F$ ,  $W$  и  $W_p$  — площадь и моменты сопротивления, обычно по сечению нетто.

Концентрацию напряжений в пластинках и оболочках можно определять при помощи соответствующих данных по концентрации напряжений в бруссе; определение номинальных напряжений для пластин и оболочек см. гл. V и VI.

Влияние концентрации напряжений на усталостную прочность характеризуется эффективными коэффициентами концентрации  $k_\sigma$  и  $k_\tau$ ; величины  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  меньше или приближаются к величинам  $\alpha_\sigma$  и  $\alpha_\tau$  в зависимости от характера распределения напряжений, материала и абсолютных размеров детали (см. гл. XIV). В деталях из пластичного материала благодаря перераспределению напряжений концентрация напряжений обычно не снижает прочности при статической нагрузке.

Градиент напряжения находится как отношение приращения величины напряжения в двух соседних точках к расстоянию между этими точками. Например, градиент напряжений  $\sigma_x$  в поперечном сечении растягиваемой полосы с отверстием (см. фиг. 2) равен тангенсу угла между касательной к кривой  $\sigma_x$  и осью  $y$ ; наибольший градиент напряжений  $\sigma_x$  для указанного случая, как видно из эпюры, получается на контуре отверстия. При данных конфигурации детали и нагрузке с увеличением размеров детали градиент напряжения падает, а с уменьшением — увеличивается.

Для распределения напряжений в зонах концентрации характерно следующее: 1) резкое повышение напряжений в зоне концентрации сопровождается уменьшением напряжений вблизи зоны концентрации; 2) появление дополнительной компоненты напряжения; 3) коэффициент концентрации напряжений для выточки (или надреза) при данных глубине ее и

размерах детали зависит главным образом от кривизны поверхности по дну выточки.

В местах концентрации нормальных напряжений имеет место также концентрация касательных напряжений; на распределении касательных напряжений сказывается объемность напряженного состояния в зоне концентрации.

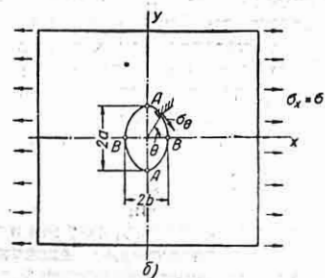
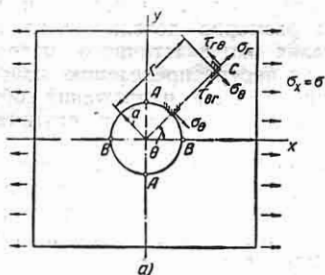
*Коэффициенты концентрации напряжений при упруго-пластическом деформировании см. гл. IX.*

*Эффективные коэффициенты концентрации см. гл. XIV.*

Величины коэффициентов концентрации  $\alpha_\sigma$  и  $\alpha_\tau$ , приведенные в этой главе, даны для деформаций в пределах упругости и получены по методам теории упругости или экспериментально на упругих моделях (поляризационно-оптическим методом, тензометрированием, по методу аналогий — см. гл. XV).

### Формулы для подсчета коэффициентов концентрации

*Пластинка с круглым отверстием растягиваемая в одном направлении*



Фиг. 1.

(Фиг. 1, а); ширина пластинки более чем в 5 раз превосходит диаметр отверстия.

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = 3\sigma; \quad \sigma_B = -\sigma. \quad (4)$$

По контуру отверстия

$$\sigma_\theta = (1 - 2 \cos 2\theta) \sigma. \quad (5)$$

В точке С пластинки

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [(1 - \rho^2) + (1 - 4\rho^2 + 3\rho^4) \cos 2\theta] \frac{\sigma}{2}; \\ \sigma_\theta &= [(1 + \rho^2) - (1 + 3\rho^4) \cos 2\theta] \frac{\sigma}{2}; \\ \tau_{r\theta} &= [(1 + 2\rho^2 - 3\rho^4) \sin 2\theta] \frac{\sigma}{2}, \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\text{где } \rho = \frac{a}{r}.$$

Для точек  $\rho \leq 0,2$  напряжения можно рассчитывать как в пластинке, не имеющей отверстия.

*Пластинка с эллиптическим отверстием растягивается в направлении оси b эллипса (фиг. 1, б); ширина пластинки более чем в 5 раз превосходит наибольший размер отверстия.*

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_A = \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) \sigma; \\ \sigma_B &= -\sigma. \end{aligned} \right\} (7)$$

По контуру отверстия

$$\sigma_\theta = \frac{\sin^2 \theta + 2 \frac{a}{b} \sin^2 \theta - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos^2 \theta} \sigma. \quad (8)$$

*Полоса ограниченной ширины с центральным круговым отверстием, растягиваемая по оси (фиг. 2, а).*

Величина напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия и  $\sigma_x$  — по поперечному сечению через центр отверстия определяется по формуле

$$\sigma_\theta = k\sigma \quad \text{и} \quad \sigma_x = k_1\sigma, \quad (9)$$

где  $\sigma = \frac{P}{bH}$ ;  $b$  — толщина полосы;  $k$  — по табл. 1 (контур) в зависимости от  $\theta$ ;

$k_1$  — по табл. 2 в зависимости от  $\frac{r}{H/2}$

(поперечное сечение);  $\lambda = \frac{d}{H}$  и  $\frac{r}{H/2}$ .

Эпюры напряжений при  $\lambda = 0,5$  даны для основных точек на фиг. 2, б. При  $\lambda \leq 0,2$  напряжения не отличаются более чем на 6% от напряжений в бесконечно широкой пластинке.



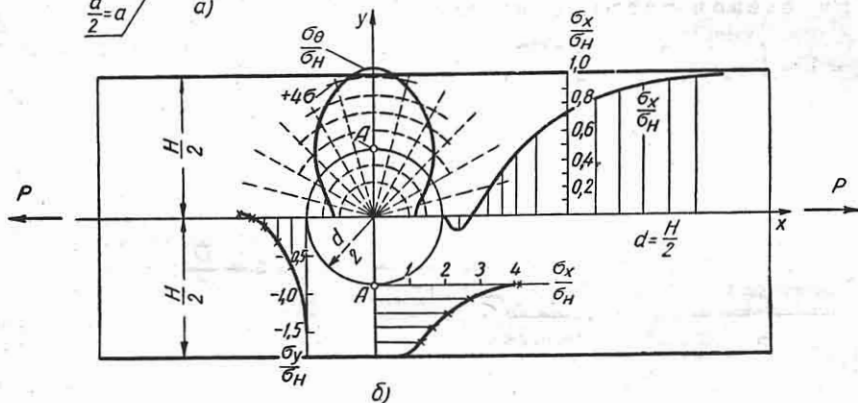
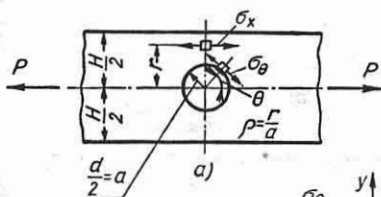
Таблица 1

Значения  $k$  для определения напряжений на контуре отверстия в растягиваемой полосе

$\lambda$	$\theta$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	-1,00	-1,03	-1,11	-1,26	-1,44	-1,58
15	-0,73	-0,74	-0,82	-0,95	-1,12	-1,32
30	0,00	-0,01	-0,06	-0,15	-0,30	-0,51
45	+1,00	+1,00	+1,00	+0,98	+0,91	+0,77
60	+2,00	+2,01	+2,07	+2,15	+2,25	+2,32
75	+2,73	+2,74	+2,85	+3,03	+3,32	+3,72
90	+3,00	+3,03	+3,14	+3,36	+3,74	+4,32

Наибольшее напряжение, получаемое в точке  $A$  (фиг. 2),

$$\sigma_{\max} = \alpha_0 \sigma_H,$$



Фиг. 2.

где приблизительно

$$\alpha_0 = \frac{3}{1 + \lambda} \text{ при } \sigma_H = \frac{P}{(H-d)b}.$$

График для  $\alpha_0$  при  $\sigma_H = \frac{P}{bH}$  — см.

фиг. 9.

Балка прямоугольного сечения при чистом изгибе, имеющая круглое отверстие с центром на оси (фиг. 3).

При  $\frac{d}{H} > 0,5$  наибольшее напряжение  $\sigma_{\max}$  на контуре отверстия (точка  $A$ )

$$\sigma_{\max} = \alpha_0 \sigma_H,$$

где  $\alpha_0 \approx \frac{2d}{H}$ ;  $\sigma_H = \frac{6MH}{b(H^3 - d^3)}$ . (10)

Таблица 2

Значения  $k$ , для определения напряжений по поперечному сечению в растягиваемой полосе с отверстием

$\frac{r}{H/2}$	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$
0,1	3,03	—	—	—	—
0,2	1,23	3,14	—	—	—
0,3	1,08	1,57	3,36	—	—
0,4	1,04	1,26	1,93	3,74	—
0,5	1,03	1,16	1,47	2,30	4,32
0,6	1,02	1,11	1,28	1,75	2,75
0,7	1,01	1,07	1,17	1,48	2,04
0,8	1,01	1,05	1,07	1,28	1,61
0,9	1,01	1,01	0,96	1,08	1,22
1,0	0,99	0,97	0,89	0,81	0,73

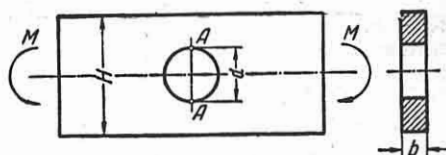
При  $\frac{d}{H} \leq 0,5$  концентрацию напряжений можно не учитывать.

Брус прямоугольного сечения шириной  $b$  с двусторонним вырезом (фиг. 4, а) [12].

При осевом растяжении силой  $P$  при

$$1,01 \leq \frac{H}{h} \leq 5 \text{ и } 0,05 \leq \frac{t}{r} \leq 50$$

$$\alpha_0 = 1 + \left[ \frac{\Delta - 1}{2,6(1,2\Delta - 1)} \cdot \frac{h}{r} \right]^n, \quad (11)$$



Фиг. 3.

где

$$\Delta = \frac{H}{h}; n = \frac{(\Delta - 1) + 0,5 \sqrt{\frac{t}{r}}}{(\Delta - 1) + \sqrt{\frac{t}{r}}};$$

$$\sigma_n = \frac{P}{bh}.$$

При чистом изгибе моментом  $M$  при  $1,05 \leq \frac{H}{h} \leq 5$  и  $0,05 \leq \frac{t}{r} \leq 7$

$$\alpha_o = 1 + \left[ \frac{\Delta - 1}{8(1,07\Delta - 1)} \cdot \frac{h}{r} \right]^{0,85};$$

$$\sigma_n = \frac{6M}{bh^2}.$$

Графики для  $\alpha_o$  см. фиг. 16—18.

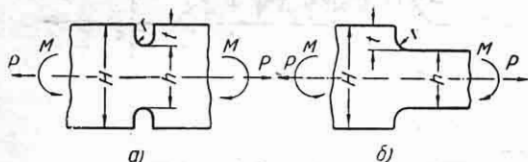
Брус прямоугольного сечения ступенчатый с круговой галтелью (фиг. 4, б) [12].

При осевом растяжении силой  $P$

$$\alpha_o = 1 + \left[ \frac{\Delta - 1}{4(1,4\Delta - 1)} \cdot \frac{h}{r} \right]^{0,65}, \quad (13)$$

где

$$\Delta = \frac{H}{h}; \sigma_n = \frac{P}{bh}.$$



Фиг. 4.

При чистом изгибе моментом  $M$

$$\alpha_o = 1 + \left[ \frac{\Delta - 1}{9,6(1,12\Delta - 1)} \cdot \frac{h}{r} \right]^{0,85}. \quad (14)$$

Графики для  $\alpha_o$  см. фиг. 20—22.

Брус прямоугольного сечения с двусторонними вырезами и ступенчатый с круговой галтелью (фиг. 4) при наклоне боковых граней на угол  $\beta$  (фиг. 5, а, б, в) [12].

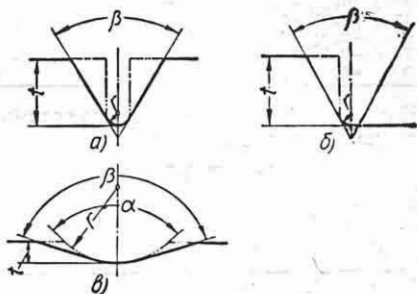
Коэффициент концентрации

$$\alpha_{o(\beta)} = 1 + (\alpha_o - 1) \times \left[ 1 - \left( \frac{\beta^\circ}{180} \right)^{1+2,4\sqrt{\frac{r}{t}}} \right] \quad (15)$$

(при  $r < t$ );

$$\alpha_{o(\beta)} = 1 + (\alpha_o - 1) \times \left[ 1 - \left( \frac{\beta - \alpha}{180 - \alpha} \right)^{1+2,4\sqrt{\frac{r}{t}}} \right]$$

(при  $r > t$ ), где  $\alpha_o$  — коэффициент концентрации при параллельных боковых



Фиг. 5.

гранях, получаемый по формулам (11) — (14) или графикам фиг. 16—22.

Вал круглого сечения ступенчатый с круговой галтелью радиуса  $r$ .

При кручении моментом  $M_K$

$$\alpha_\tau = 1 + \frac{d}{12r} \left[ 1 - \frac{1 + 2\frac{r}{d}}{\Delta \left( 1 + 6\frac{r}{d} \right)} \right], \quad (16)$$

где

$$\Delta = \frac{D}{d}; \tau_n = \frac{M_K}{0,2d^3}.$$

При  $\Delta < 1,2$  следует применять формулу

$$\alpha_\tau = 1 + \frac{1}{3 \left( 1 + 6\frac{r}{d} \right)}. \quad (16a)$$

График для  $\alpha_\tau$  см. фиг. 32.

Вал круглого сечения диаметром  $d$  с кольцевой канавкой глубиной  $t$  и радиусом  $r$  по дну.

Зависимость между коэффициентом концентрации  $\alpha_o$  на изгиб и  $\alpha_\tau$  на кручение

$$\alpha_o = \alpha_\tau \frac{1 + 2\sqrt{\frac{t}{r}}}{1 + \sqrt{\frac{t}{r}}} \quad (17)$$

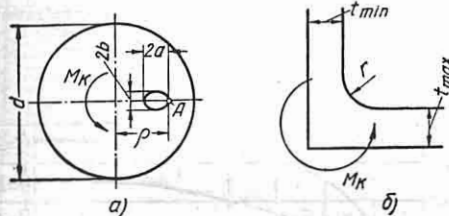
(формула Гриффитса); величина  $\alpha_\tau$  или  $\alpha_o$  может находиться по соответствующим

шему графику, приведенному ниже.  
При неглубокой выточке

$$\alpha_o = 1 + 2\sqrt{\frac{t}{r}}; \quad \alpha_\tau = 1 + \sqrt{\frac{t}{r}}. \quad (18)$$

Более точные значения  $\alpha_o$  и  $\alpha_\tau$  могут быть найдены по графикам коэффициентов концентрации для гиперболической формы надреза — см. стр. 414.

*Продольное круглое или эллиптическое отверстие малого размера в скручиваемом стержне* (фиг. 6, а).



Фиг. 6.

Коэффициент концентрации

$$\alpha_\tau = 1 + \frac{a}{b}; \quad \tau_H = \frac{M_k}{0,1d^4} \rho. \quad (19)$$

*Входящий угол тонкостенного профиля, воспринимающего момент кручения  $M_k$*  (фиг. 6, б).

Коэффициент концентрации

$$\alpha_\tau = 1,74\sqrt{\frac{t_{max}}{r}}. \quad (20)$$

(формула Треффца). Уточнения формулы (20) см. [6].

Наибольшее напряжение

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_H,$$

где  $\tau_H$  — наибольшее напряжение в удаленной от угла точке более толстой стенки, определяемое по формуле для данного профиля (см. гл. II).

*Отверстие радиуса а в стенке кругового тонкостенного цилиндра радиуса R.*

При  $\frac{a}{R} \ll \sqrt{\frac{h}{R}}$  коэффициент концентрации

$$\alpha_o = 3 + 1,3 \frac{a^2}{hR} \quad (21)$$

(при равномерном растяжении стенки цилиндра по образующей);

$$\alpha_o = 3 + 6,9 \frac{a^2}{hR} \quad (21a)$$

(при внутреннем давлении в цилиндре); здесь  $h$  — толщина стенки цилиндра.

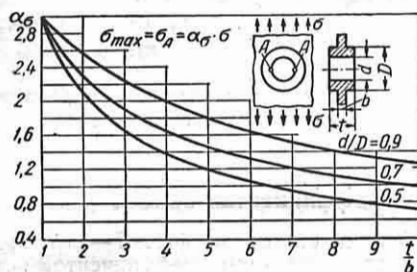
### Графики для определения коэффициентов концентрации

В приведенных на фиг. 7—35 графиках даны величины коэффициентов концентрации  $\alpha_o$  и  $\alpha_\tau$  в зависимости от формы, соотношения размеров и способа нагружения детали; формулы для подсчета номинальных напряжений  $\sigma_H$  и  $\tau_H$  даны на графиках; наибольшее напряжение  $\sigma_{max} = \alpha_o \cdot \sigma_H$  или  $\tau_{max} = \alpha_\tau \cdot \tau_H$ .

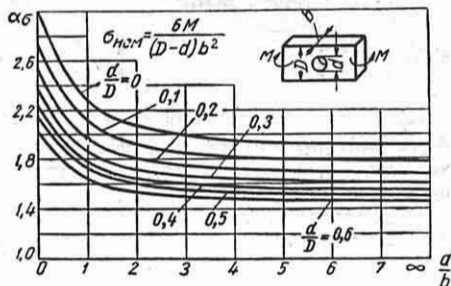
На фиг. 7—35 даны графики коэффициентов концентрации для следующих случаев:

- а) растягиваемая пластина с одним или несколькими отверстиями — фиг. 7 и 8;
- б) изгибаемая полоса с отверстием — фиг. 10, 11;
- в) растягиваемый брус круглого, квадратного и прямоугольного сечений с поперечным отверстием — фиг. 12;
- г) вал круглого сечения с поперечным отверстием — фиг. 13;
- д) растягиваемая и изгибаемая полоса (брус) с симметричными выступами и надрезами — фиг. 14—19;
- е) растягиваемая и изгибаемая полоса (брус) со ступенчатым изменением высоты сечения — фиг. 20—24;
- ж) сопряжение полос под прямым углом и угольник с нагрузками по полкам — фиг. 25—26;
- з) хвостовое крепление растягиваемой полосы — фиг. 27;
- и) нарезка на растягиваемом и изгибаемом стержне круглого сечения — фиг. 28;
- к) изгибаемый вал с напрессовкой — фиг. 29;
- л) вал круглого сечения со шпоночным вырезом, работающий на кручение — фиг. 30;
- м) ступенчатый вал круглого сечения — фиг. 31—33.

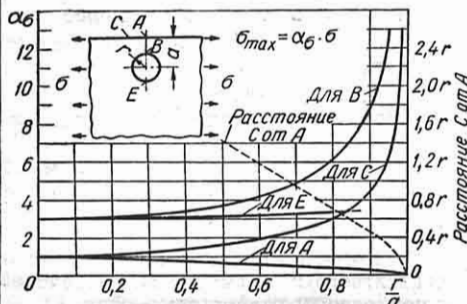
Графики фиг. 34 и 35 построены на основании теоретического решения Нейбера [5] для гиперболической формы надреза и эллиптической формы отверстия.



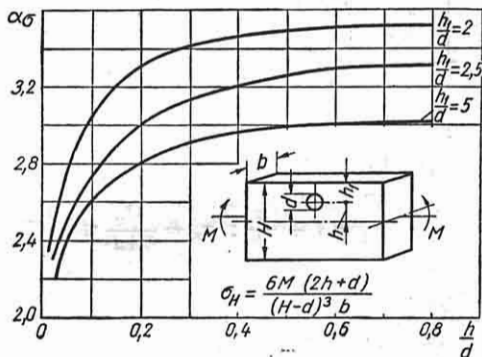
Фиг. 7. Пластина неограниченных размеров в обоих направлениях с круговым отверстием, подкрепленным кольцевым утолщением.



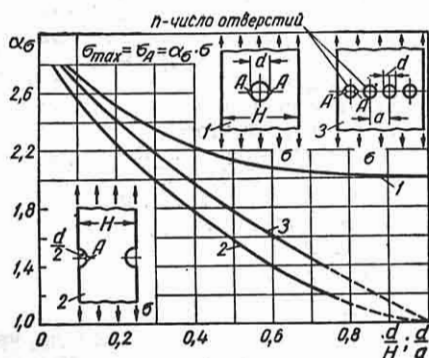
Фиг. 10. Брус прямоугольного сечения, изгибаемый в плоскости поперечного отверстия.



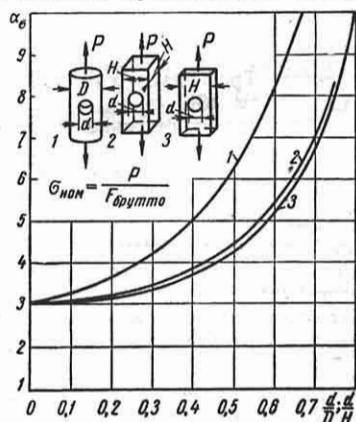
Фиг. 8. Равномерно растягиваемая пластина с отверстием у края; точка С — место наибольших напряжений на прямом контуре.



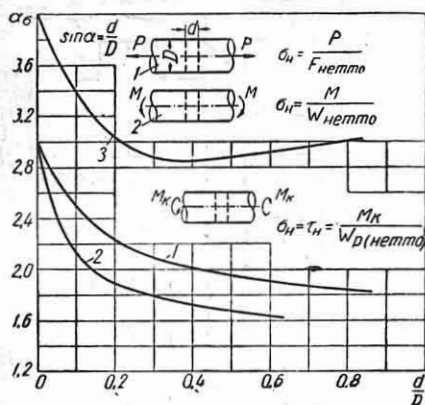
Фиг. 11. Брус прямоугольного сечения, изгибаемый в плоскости, перпендикулярной к отверстию.



Фиг. 9. Растягиваемая пластина ограниченной ширины  $H$  с центральным круговым отверстием (1) и боковыми вырезами по полуокружностям (2) и полоса или цилиндрическая растягиваемая по оси труба с равномерно расположенными отверстиями (3).



Фиг. 12. Растягиваемые по оси брус круглого (1) и квадратного (2) сечения и полоса (3) с центральным круглым отверстием.

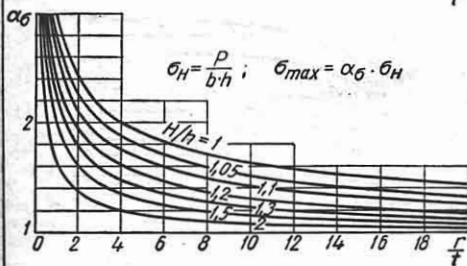
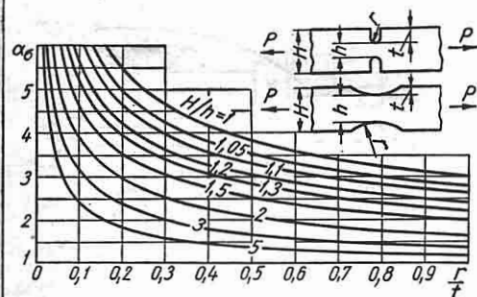


Фиг. 13. Вал с поперечным отверстием;

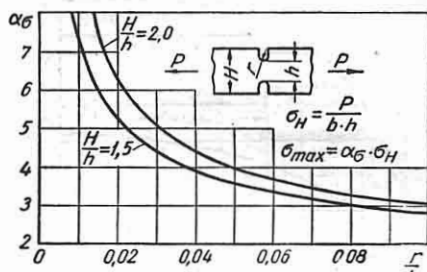
$$F_{\text{нетт}} = \frac{\pi - 2\alpha - \sin^2 \alpha}{4} D^2;$$

$$W_{\text{нетт}} = \frac{(3\pi - 16 \frac{d}{D}) D^3}{16};$$

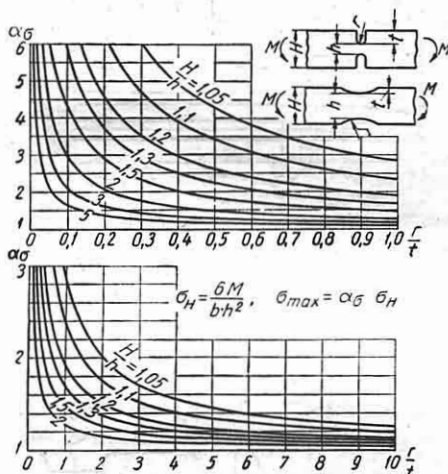
$$W_p(\text{нетт}) = \frac{\pi - 12\alpha - 9 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{16} D^3.$$



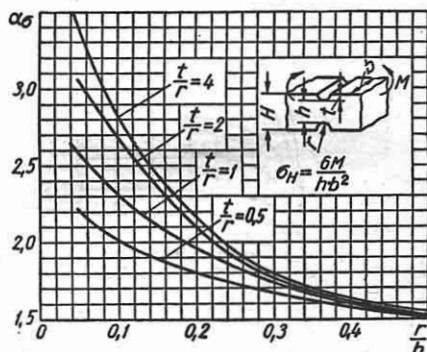
Фиг. 14. Растягиваемая полоса с двусторонним надрезом.



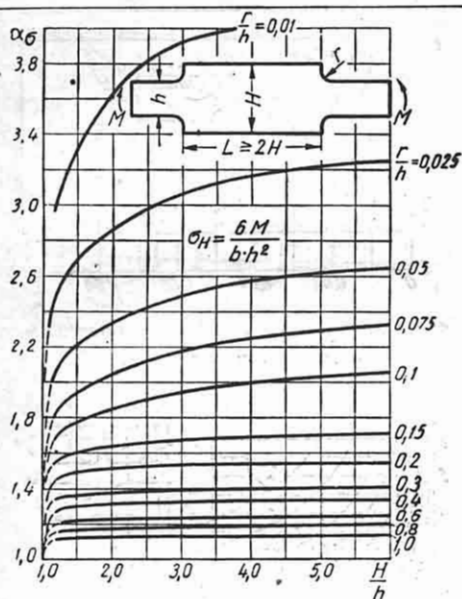
Фиг. 15. Растягиваемая полоса с двусторонним надрезом при малом  $\frac{l}{h}$ .



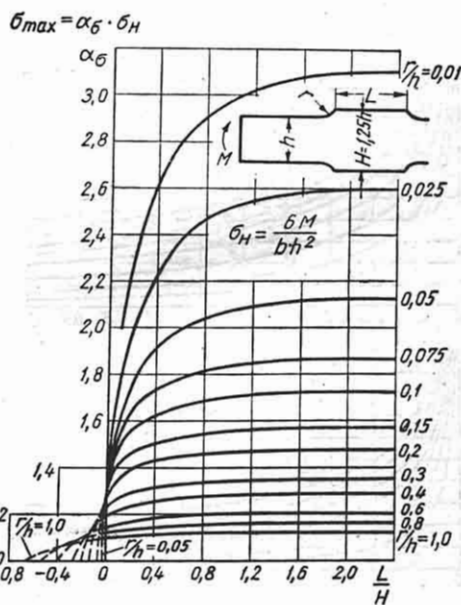
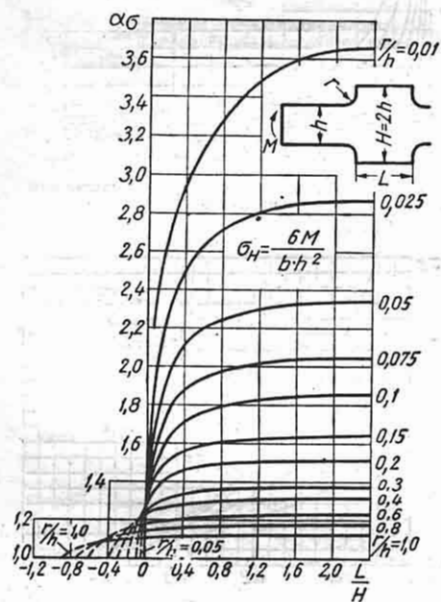
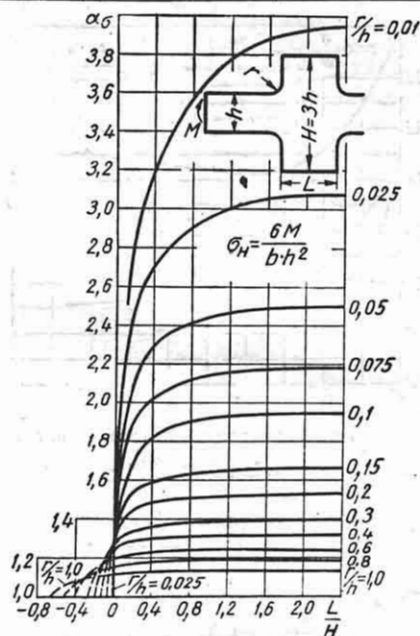
Фиг. 16. Изгибаемая полоса с двусторонним надрезом.



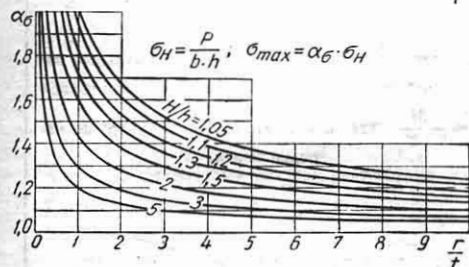
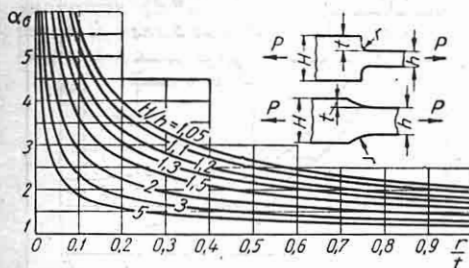
Фиг. 17. Брус прямоугольного сечения, изгибаемый в плоскости, параллельной двустороннему надрезу.



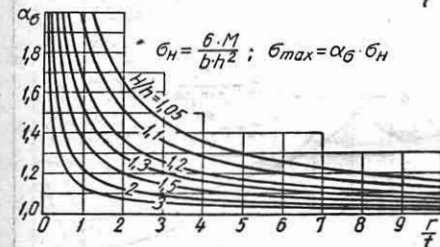
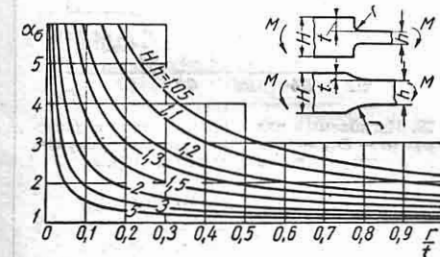
Фиг. 18. Изгибаемая полоса с двусторонними выступами при  $L \geq 2H$ .



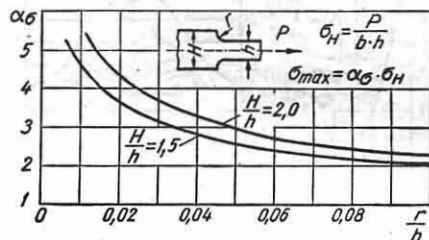
Фиг. 19. Изгибаемая полоса с двусторонними выступами при  $\frac{H}{h} = 3,0; 2,0; 1,25$ .



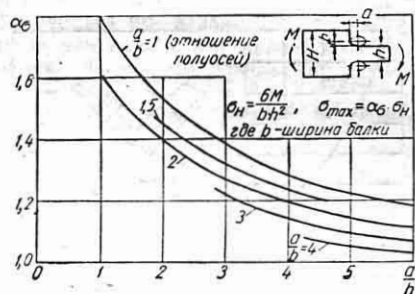
Фиг. 20. Растягиваемая полоса с двусторонними выступами.



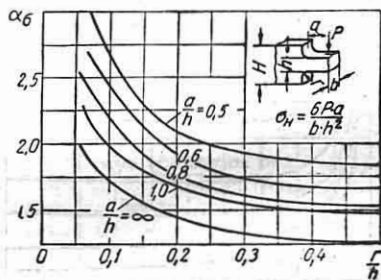
Фиг. 22. Изгибаемая полоса с двусторонними выступами. Графики построены для прямого выступа (верхняя фигура); при наклонной грани ступени — см. формулы (15).



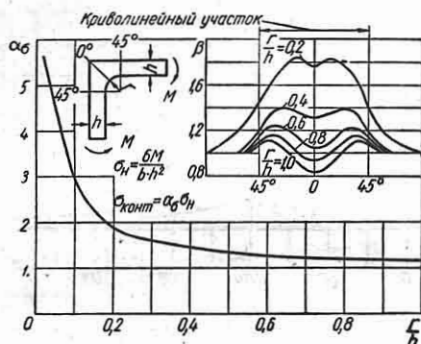
Фиг. 21. Растягиваемая полоса с двусторонними выступами при малом  $\frac{r}{h}$ .



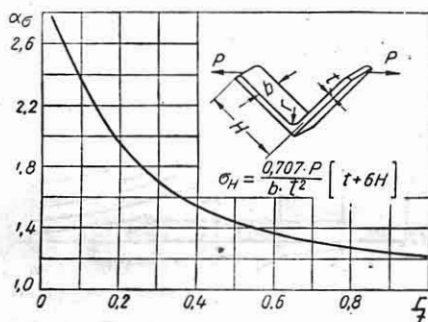
Фиг. 23. Изгибаемая полоса с двусторонними выступами и эллиптическими галтелями при  $\frac{H}{h} \approx 3$ .



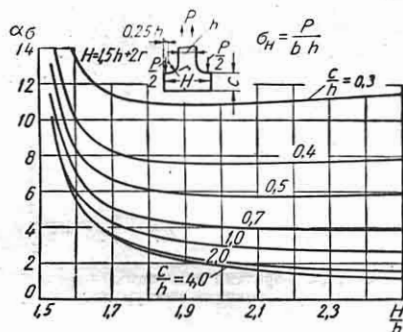
Фиг. 24. Короткий изгибаемый брусок с двусторонними выступами.



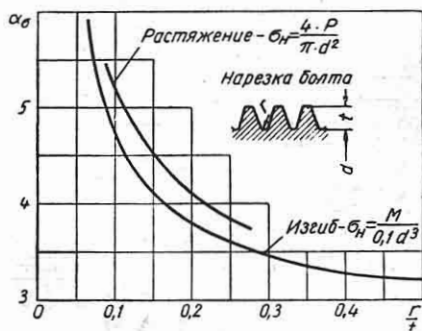
Фиг. 25. Сопряжение полос под прямым углом при чистом изгибе.  $\beta$  — отношение напряжений на криволинейном участке контура к номинальному напряжению.



Фиг. 26. Угольник с нагрузкой, дающей растяжение и изгиб.

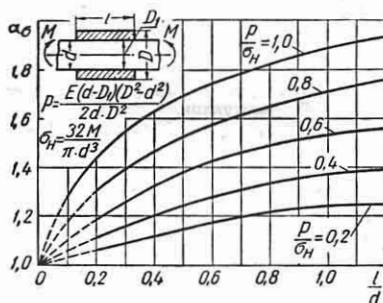


Фиг. 27. Хвостовое крепление растягиваемой полосы.

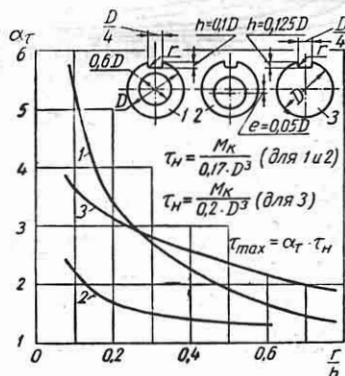


Фиг. 28. Нарезка на растягиваемом или изгибаемом стержне круглого сечения. Номинальные напряжения при растяжении  $\sigma_H = \frac{4P}{\pi d^2}$  и при изгибе

$\sigma_H = \frac{M}{0,1 d^3}$ , где  $d$  — внутренний диаметр по нарезке болта.



Фиг. 29. Изгибаемый вал с напрессовкой с давлением  $p$ ;  $(d - D_1)$  — натяг (по данным, полученным на плоских моделях [12]).



Фиг. 30. Скручиваемый вал со шпоночным вырезом.



Следует отметить, что теоретическое решение, полученное методами теории упругости для мелких и глубоких надрезов и выточек, распространяется на надрезы и выточки средней глубины с

помощью приближенной интерполяционной формулы

$$\frac{1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha' - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha'' - 1)^2} \quad (22)$$

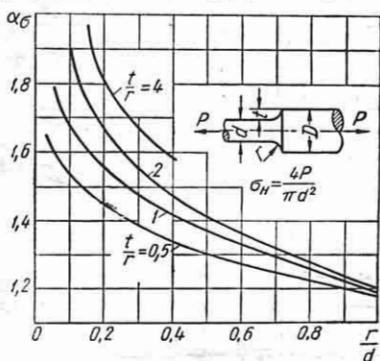
здесь  $\alpha$ ,  $\alpha'$  и  $\alpha''$  — величины коэффициентов концентрации соответственно для средней, мелкой и глубокой выточки или надреза. Приводимые ниже графики фиг. 34 и 35 построены с использованием этой зависимости.

Для определения коэффициентов концентрации при круговой форме надреза приближенно при использовании графиков фиг. 34 и 35 круговая форма заменяется гиперболической с тем же радиусом по дну надреза.

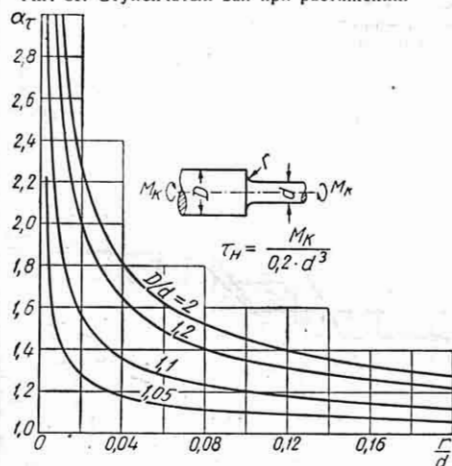
При пользовании графиками фиг. 34 и 35 по левой графе табл. 3 выбирается заданный тип надреза и по второй графе берется по заданному усилию формула для подсчета номинального напряжения. В правой графе табл. 3 буква

указывает шкалу величин  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$  в левой части фиг. 34, которой надо пользоваться в рассматриваемой задаче; первая цифра дает номер кривой в правой части фиг. 34 и вторая цифра — номер кривой на фиг. 35. Как пояснено в приведенных ниже примерах 2 и 3, коэффициенты концентрации для типов надрезов, указанных в табл. 3 под номерами 1—4, 7 и 8, находятся по графику фиг. 34; для типов надрезов, указанных в табл. 3 под номерами 5 и 6 (валы с осевым отверстием), применяются оба графика фиг. 34 и 35.

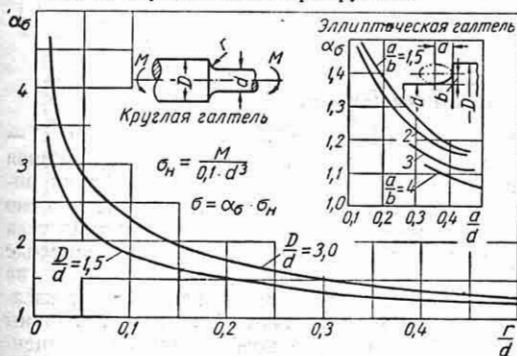
В приведенных выше графиках даны теоретические коэффициенты концентрации, полученные исходя из допущений теории упругости. Допущение о бесконечно малых размерах частиц материала, из которого выполнена деталь, приводит к ошибкам в случае малой абсолютной величины радиуса закругления по дну концентратора (острый надрез), соизмеримой с размерами частиц реального материала. Поэтому при малой абсолютной величине радиуса по дну концентратора (при коэффициентах концентрации, больших 3—4) необходимо учитывать: а) структуру материала, определяющую чувствительность материала к концентрации напряжений; б) наличие значительной относительной деформации в зоне концентрации.



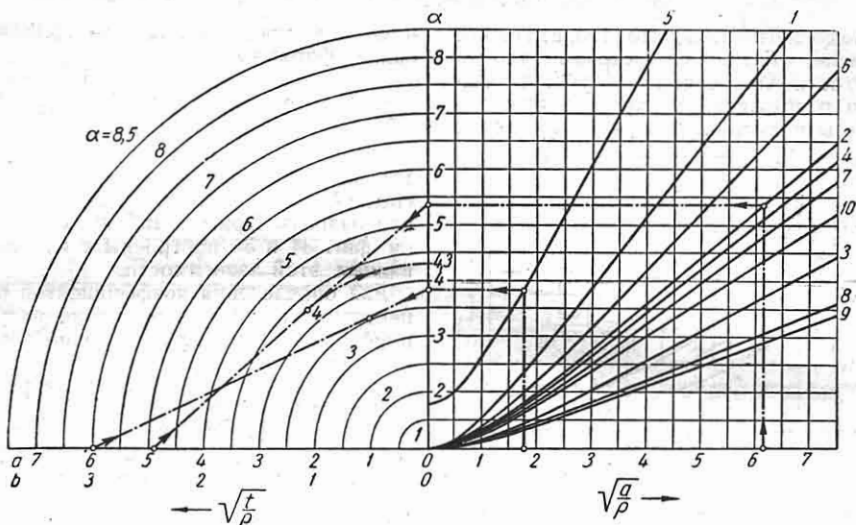
Фиг. 31. Ступенчатый вал при растяжении.



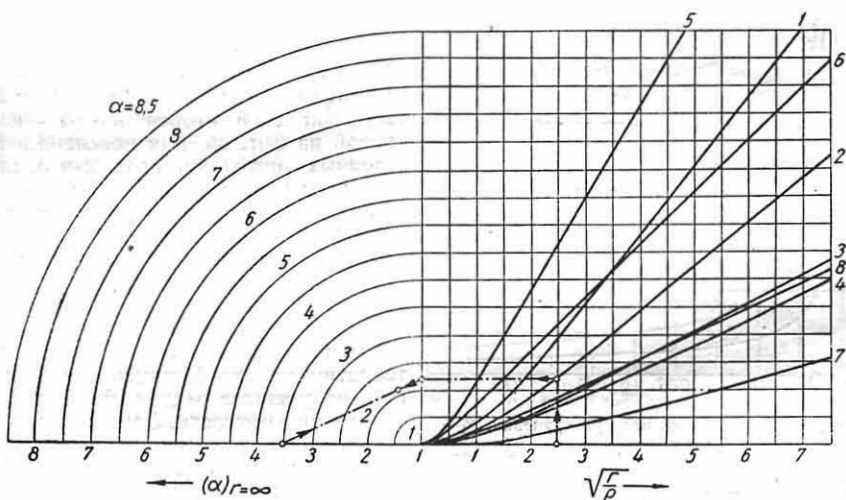
Фиг. 32. Ступенчатый вал при кручении.



Фиг. 33. Ступенчатый вал при изгибе с круговой (левые кривые) и эллиптической (правые кривые) галтелью.



Фиг. 34. Графики коэффициентов в концентрации для гиперболической формы надреза и эллиптической формы выреза (по Нейберу).



Фиг. 35. Графики коэффициентов в концентрации для гиперболической формы надреза и эллиптической формы выреза (по Нейберу).

В соответствии с этим при малом радиусе  $\rho$  по дну надреза приближенно расчетный коэффициент концентрации может [5] оцениваться введением поправки с помощью формулы

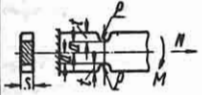
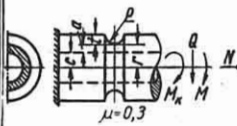
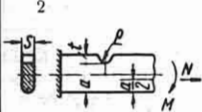
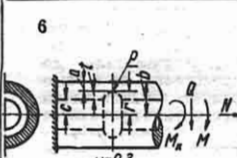
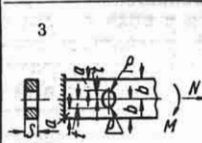
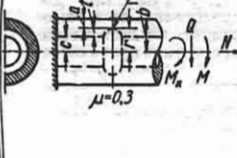
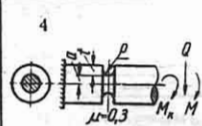
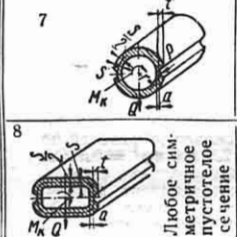
$$\alpha_{\text{при малом } \rho} = 1 + \frac{\alpha - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}}, \quad (23)$$

где  $\alpha$  — теоретический коэффициент концентрации, определяемый по приведен-

ным выше графикам и формулам;  $\rho'$  — характеристика материала, выраженная в виде линейного размера, которая может для стали приниматься приближенно равной  $\rho' \approx 0,5$  мм;  $\omega$  — величина угла в радианах, на который при переходе через концентратор, находящийся на контуре, отклоняется направление касательной к контуру (фиг. 36). Величины эффективных коэффициентов концентрации, определяемые испытанием на усталость образцов и деталей, см. гл. XIV

Таблица 3

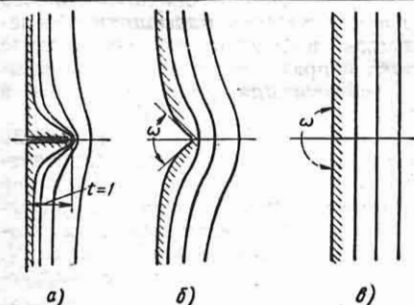
Типы надрезов. формулы для номинальных напряжений и шкалы и кривые по фиг. 34 и 35 для определения коэффициентов концентрации

Тип надреза	Формула для номинальных напряжений	Шкала и № кривой *	Тип надреза	Формула для номинальных напряжений	Шкала и № кривой *
	$\frac{N}{2sa}$	b   1		$\frac{N}{\pi(r^2 - c^2)}$	b   5; 1
	$\frac{3M}{2sa^2}$	b   2		$\frac{4Mr}{\pi(r^4 - c^4)}$	b   5; 2
	$\frac{N}{sa}$	b   3		$\frac{(1,23r^2 + 2,77c^2) Q}{\pi(r^4 - c^4)}$	a   10; 3
	$\frac{6M}{sa^2}$	b   4		$\frac{2M_k r}{\pi(r^4 - c^4)}$	a   10; 4
	$\frac{N}{2sa}$	b   5		$\frac{N}{\pi(b^2 - r^2)}$	b   5; 5
	$\frac{3Mt}{2s(b^2 - r^2)}$	a   5		$\frac{4Mr}{\pi(b^4 - r^4)}$	b   5; 6
	$\frac{N}{\pi a^2}$	b   6		$\frac{4Mr}{\pi(b^4 - r^4)}$	a   10; 7
	$\frac{4M}{\pi a^2}$	b   7		$\frac{2M_k r}{\pi(b^4 - r^4)}$	a   10; 8
	$\frac{1,23 Q}{\pi a^2}$	a   8		$\frac{Q}{\pi a r}$	a   10
	$\frac{2M_k}{\pi a^2}$	a   9		$\frac{M_k}{2\pi a r}$	a   10
				$\frac{QS^{**}}{2aJ}$	a   10
				$\frac{M_k}{2aF^{***}}$	a   01

\* Шкала для  $\sqrt{\frac{t}{\rho}}$  (мелкий надрез) обозначена буквой; кривые в графиках обозначены соответственно первой (для фиг. 34) и второй (для фиг. 35) цифрами в этой графе.

\*\* S — статический момент верхней части сечения по отношению к нейтральной линии; J — момент инерции всего поперечного сечения по отношению к нейтральной линии.

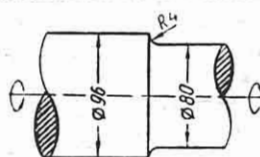
\*\*\* F — площадь, ограниченная средней линией стенки, обозначенной пунктиром.



Фиг. 36. Случаи отклонения касательной к контуру при переходе через концентратор: a — угол  $\omega = 0$ ; b — угол  $\omega = \pi$ .

Примеры определения коэффициентов концентраций

Пример 1. Определить коэффициент концентрации для скручиваемого ступенчатого вала (фиг. 37)



Фиг. 37.

с сопряжением по круговой галтели. Диаметры участков  $D = 96$  мм,  $d = 80$  мм и радиус галтели  $r = 4$  мм.

По кривой фиг. 32 для  $\frac{D^*}{d} = \frac{96}{80} = 1,2$  и  $\frac{r}{d} = \frac{4}{80} = 0,05$  находим  $\alpha_z = 1,54$ .

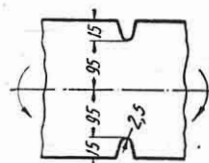
Наибольшее напряжение при деформации в пределах упругости

$$\tau_{\max} = 1,54 \frac{M_K}{0,2(8,0)^3},$$

где  $M_K$  — момент кручения в кгсм.

**Пример 2.** Плоский брус (фиг. 38) с симметричным надрезом при чистом изгибе. Надрез рассматривается как очерченный по гиперболе (табл. 3, тип 1). Размеры:  $a = 95$  мм,  $t = 15$  мм,  $r = 2,5$  мм. Отсюда  $\sqrt{\frac{t}{r}} = 2,45$ ;  $\sqrt{\frac{a}{r}} = 6,16$ .

Надрезу этого типа и заданному случаю нагрузки (чистый изгиб) соответствует шкала  $b$  и кривая 2 номограммы фиг. 34. На этой номограмме от значения 6,16 проводится вертикальная линия до пересечения с кривой 2 и, далее, горизонталь до пересечения ее с осью ординат. От этой точки пересечения проводится

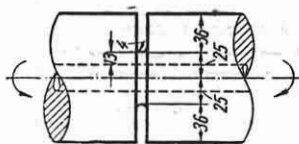


Фиг. 38.

прямая через  $\sqrt{\frac{t}{r}} = 2,45$  на шкале в левой части номограммы (нижняя шкала  $b$ ). Расстояние от начала координат до этой прямой (в данном примере до точки, обозначенной кружком), отложенное по вертикальной оси, дает искомый коэффициент концентрации  $\alpha_0 = 4,3$ .

Учитывая реальные свойства материала (сталь), величину полученного коэффициента концентрации следует считать преувеличенной. Коэффициент концентрации с учетом неоднородности материала может быть приблизительно определен по формуле (23). Принимая  $r = 2,5$  мм и  $r^t = 0,5$  мм, получаем  $\alpha = 2,6$ .

**Пример 3.** Определить коэффициент концентрации для полого вала (фиг. 39) круглого поперечного сечения при чистом изгибе, имеющего



Фиг. 39.

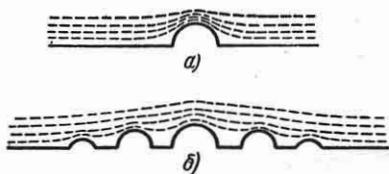
выточку по форме типа 5, указанной в табл. 3. Размеры:  $r = 25$  мм,  $a = 13$  мм,  $t = 36$  мм,  $r = 4$  мм. Подсчитывается  $\sqrt{\frac{t}{r}} = 3,00$ ;  $\sqrt{\frac{a}{r}} = 1,80$ ;  $\sqrt{\frac{r}{r_0}} = 2,50$ .

Указанным форме надреза и случаю нагрузки (чистый изгиб) соответствуют шкала  $b$  и кривая 5 номограммы фиг. 34. На номограмме фиг. 34 делаются те же построения, что и в предыдущем примере, для  $\sqrt{\frac{a}{r}} = 1,80$  и  $\sqrt{\frac{t}{r}} = 3,00$ .

Радиус окружности с центром  $O$ , касательной к

наклонной прямой, дает величину вспомогательного коэффициента  $\alpha = 3,6$ , соответствующего  $r = \infty$  (плоская деталь). В номограмме фиг. 35 шкала этих коэффициентов нанесена по оси абсцисс влево. По ней от точки  $\sqrt{\frac{r}{r_0}} = 2,50$  проводится вертикаль до пересечения с кривой 2 и от точки пересечения проводится горизонталь до пересечения с осью ординат. Последняя точка пересечения соединяется прямой с точкой  $\alpha_0 (r = \infty) = 3,6$  на левой части оси абсцисс. Радиус окружности, касательной к этой наклонной прямой, дает величину искомого коэффициента  $\alpha_0 = 2,1$ .

*Качественное представление о концентрации напряжений* составляется на основании гидродинамической аналогии. Контур детали рассматривается как край плоского сосуда, по которому протекает жидкость; линия тока жидкости у края сосуда совпадает с траекториями напряжений. Более плавный переход с большим радиусом дает уменьшение скорости движения жидкости у края сосуда и соответственно с этим уменьшает концентрацию напряжений у контура детали. Действие разгружающих выточек в детали аналогично уменьшению скорости движения жидкости возле врезывающегося в поток выступа, показанного на фиг. 40,  $a$ , которое достигается с помо-



Фиг. 40.

стью устройства нескольких уменьшающихся выступов (фиг. 40,  $b$ ).

*Форма сопряжения для ступенчатого вала и для плоской пластинки*, обеспечивающая получение по всей длине контура напряжений, равных номинальным (обтекаемая галтель), дана в табл. 4.

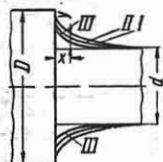
Для упрощения обтекаемая галтель может быть выполнена в виде эллиптической или по двум радиусам.

*Данные по концентрации напряжений для зуба шестерни, шлицевых соединений и других деталей* см. т. IV.

*Методы экспериментального определения коэффициентов концентрации и распределения напряжений* см. гл. XV.

Таблица 4

Размеры сопряжения для ступенчатого вала, позволяющие получить на контуре напряжения, близкие к номинальным (обтекаемая галтель)



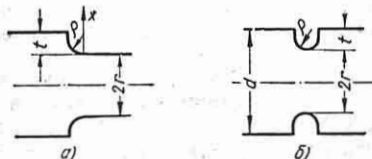
I — растяжение или сжатие;  
II — изгиб;  
III — кручение [12].

$\frac{x}{d}$	$\frac{y}{d}$			$\frac{x}{d}$	$\frac{y}{d}$		
	I	II	III		I	II	III
0	0,308	0,232	0,203	0,20	0,120	0,036	0,038
0,005	0,287	0,183	0,157	0,30	0,083	0,021	0,018
0,01	0,276	0,163	0,139	0,40	0,057	0,012	0,010
0,02	0,259	0,138	0,119	0,50	0,038	0,008	0,006
0,04	0,231	0,110	0,100	0,60	0,025	0,005	0,004
0,06	0,210	0,091	0,088	0,70	0,015	0,004	0,003
0,08	0,192	0,078	0,077	0,80	0,008	0,002	0,002
0,10	0,177	0,067	0,069	0,90	0,003	0,001	0,001
0,15	0,145	0,048	0,052	1,00	0	0	0

При ограниченных размерах для галтели величины  $x$  и  $y$  должны быть пропорционально уменьшены; при  $\frac{D}{d} < 1,0$  используется соответствующая часть галтели. Для полога вала вместо  $d$  принимается толщина стенки.

Приближенные методы расчета коэффициентов концентрации

1. Метод Н. Н. Афанасьева [1]. Предполагается гиперболический закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению детали



Фиг. 41.

в зоне концентрации. По соотношениям размеров и коэффициенту концентрации  $\alpha_\sigma$  (раст. пл) для плоской растягиваемой детали (находится с помощью фиг. 14, 15, 20 и 21) метод позволяет приблизительно подсчитать коэффициенты концентрации  $\alpha_\sigma$  (изг. пл),  $\alpha_\sigma$  (раст. круг) и  $\alpha_\sigma$  (изг. круг) при изгибе плоской и при

растяжении и изгибе детали круглого сечения с тем же продольным контуром (фиг. 41):

$$\frac{\alpha_\sigma(\text{раст. пл})}{\alpha_\sigma(\text{изг. пл})} = 1 + e/f_1; \quad (24a)$$

$$\frac{\alpha_\sigma(\text{раст. пл})}{\alpha_\sigma(\text{раст. круг})} = 1 + ef_2; \quad (24б)$$

$$\frac{\alpha_\sigma(\text{раст. пл})}{\alpha_\sigma(\text{изг. круг})} = 1 + ef_3. \quad (24в)$$

В приведенных формулах коэффициент  $e$ , зависящий от формы надреза.

$$e = (\alpha_\sigma(\text{раст. пл}) - 1) \frac{2a}{1 - 2\varepsilon}.$$

Величины  $f_1, f_2, f_3$  и  $\frac{2a}{1 - 2\varepsilon}$  берутся по графику фиг. 42 в зависимости от отношения радиуса выточки к радиусу ослабленного сечения  $\alpha = \frac{r}{r_0}$ .

Для определения  $\alpha_\sigma$  (круг) по  $\alpha_\sigma$  (пл) применяется также приближенная формула:

$$\alpha_\sigma(\text{круг}) = 0,75\alpha_\sigma(\text{пл}) + 0,25. \quad (25)$$

Пример. Изгиб вала круглого сечения с выточкой:  $\alpha = \frac{r}{r_0} = 0,10$  и  $\varphi = \frac{t}{r} \approx \infty$ . Коэффициент концентрации для растягиваемой плоской модели с тем же контуром на основании графика фиг. 14 соответственно для  $\frac{H}{h} = 2,0$  и

$$\frac{r}{t} = 0,10$$

$$\alpha_\sigma(\text{раст. пл}) = 3,9.$$

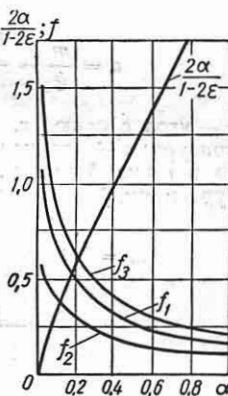
По графику фиг. 42 величины  $\frac{2a}{1 - 2\varepsilon} = 0,3$  и  $f_3 = 0,85$ , откуда

$$e = (\alpha_\sigma(\text{раст. пл}) - 1) \times 0,3 = 0,87.$$

Отсюда коэффициент концентрации для заданного случая

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma(\text{изг. круг}) &= \frac{\alpha_\sigma(\text{раст. пл})}{1 + ef_3} = \\ &= \frac{3,9}{1 + 0,87 \cdot 0,85} = 2,2 \end{aligned}$$

(по графику фиг. 34 имеем  $\varepsilon_0 = 2,5$ ).

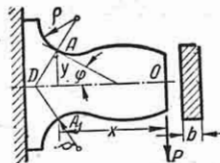


Фиг. 42.

2. Метод А. В. Верховского [4]. Приближенно принимается линейный закон распределения абсолютных продольных деформаций для отрезков волокон,

заключенных между находящимися на бесконечно малом расстоянии двумя сечениями, нормальными к контуру (*гипотеза ломаных сечений*). Это допущение приводит к гиперболическому закону распределения напряжений. Метод позволяет произвести расчет напряжений в бруске, ограниченном криволинейным контуром.

Изгиб балки постоянной ширины  $b$  с прямой осью. Нормальные напряжения на контуре в точке  $A$  ломаного сечения  $ADA_1$  (фиг.43), действующие вдоль контура,



Фиг. 43.

Здесь  $M$  — изгибающий момент для сечения, проходящего через точку  $D$ ;

$$B = \frac{1}{2 \left[ \frac{1}{2n} - \frac{a}{n^2} + \frac{a^2}{n^3} \ln \frac{a+n}{a} \right] (a+n)^3};$$

$$n = \frac{q^2 - m}{q} = \pm \frac{y}{\cos^2 \varphi};$$

$$a = \frac{m}{q} = \frac{\cos \varphi \pm \frac{y}{\rho}}{\cos^2 \varphi}; \quad (26a)$$

$\varphi$  — угол с осью  $x$ , касательной в  $A$  к контуру;  $\rho$  — радиус искривления контура в точке  $A$  (плюс для вогнутого контура и минус для выпуклого);

$$m = 1 + y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

и

$$q = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

для точки  $A$ ;  $y = f(x)$  — уравнение контура балки.

Коэффициент концентрации для надреза  $\alpha_0$  при номинальном напряжении  $\sigma_n = \frac{M}{W}$  для поперечного сечения по месту концентрации.

Коэффициент концентрации

$$\alpha_0 = \frac{1}{-3 \left[ \frac{1}{2c} + \frac{1+c}{c^2} + \frac{(1+c)^2}{c^3} \ln \left( \frac{1}{1+c} \right) \right]}. \quad (27)$$

В формуле для  $\alpha_0$  величина  $c = \frac{h}{2\rho}$ ;  $\rho$  — радиус в основании;  $h$  — размер сечения по ослаблению.

Для  $\frac{\rho}{h}$  от 0,1 до 0,5 формула (27) дает при надрезе, симметричном относительно оси балок, ошибку в пределах 2—30%. Формулы (26) и (27) неприменимы в следующих случаях: а) для выпуклой части контура, когда центр кривизны контура лежит по одну сторону от оси балки с самим контуром; б) нормаль к контуру сечения в рассматриваемой точке не пересекается с осью бруса; в) ломаные сечения на рассматриваемом участке балки между собой пересекаются.

*Пример.* Для балки фиг. 43  $P = 1000$  кг,  $x = 9,3$  см,  $y = 2$  см,  $\rho = 2$  см,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $b = 5$  см. Плечо силы  $P$  для ломаного сечения  $ADA_1$  равно  $x + y \operatorname{tg} \varphi = 10$  см;  $M = 10000$  кгсм. По приведенной выше формуле находим  $B = 1,62$ . Отсюда в точке  $A$

$$\sigma = \frac{MB}{by^2} = \frac{10000 \cdot 1,62}{5 \cdot 2^2} = 810 \text{ кг/см}^2.$$

Номинальное напряжение  $\sigma_n = 690$  кг/см<sup>2</sup>; коэффициент концентрации  $\alpha_0 = \frac{810}{690} = 1,2$ .

Гипотеза ломаных сечений применима к балкам с кривой осью и к прямому брусу с несимметричными относительно оси ослаблениями. Для вала переменного сечения гипотеза ломаных сечений переходит в гипотезу конических сечений. Применение гипотезы ломаных сечений к другим случаям расчета см. [4].

3. Метод Ю. А. Шиманского дает расчет концентрации напряжений в местах выступов на контуре детали и возле отверстий в растягиваемой или изгибаемой полосе в зависимости от формы и радиусов закруглений вырезов и от размеров подкрепляющих утолщений [10].

## КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Приводимые ниже для контакта деталей зависимости получены при следующих допущениях: а) материал соприкасающихся деталей в зонах контакта следует закону Гука, однороден и изотропен; б) линейные размеры площадки контакта

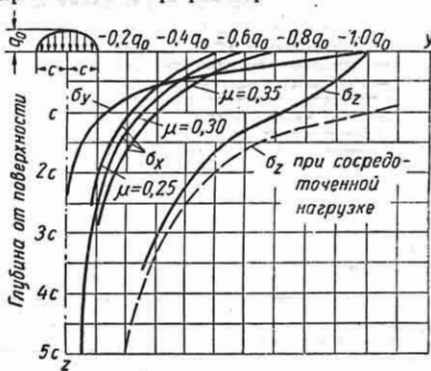
малы по сравнению с радиусами кривизны и размерами соприкасающихся поверхностей (допущения, принятые в теории Герца—Белиева).

При принятии указанных допущений площадка контакта под нагрузкой имеет форму эллипса (в частности, круга) в случае первоначального касания в точке или прямоугольника в случае первоначального касания по прямой; распределение и величины давлений по площадке контакта см. табл. 5 и 6.

Размеры площадки контакта, величины наибольшего давления и перемещения в различных случаях контакта, а также напряжения при приложении нагрузки к поверхности детали приведены в табл. 6.

Напряжения в зоне контакта при нормальном давлении определяются по формулам, приведенным в табл. 8, или с помощью коэффициентов табл. 7 и 9 после определения по формулам табл. 6 размеров площадки контакта и наибольшего давления  $q_0$  на площадке контакта. Значения нормальных напряжений на линии давления для различных точек по глубине при контакте цилиндров даны

на графике фиг. 44 (для  $\mu = 0,25; 0,30; 0,35$ ) и, соответственно, касательных напряжений на графике фиг. 45.



Фиг. 44.

Характер изменения напряжений  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ , относительных деформаций  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_t$ , перемещений  $u$  вдоль радиуса и  $w$  по нормали к поверхности для точек круговой площадки контакта показан на графиках фиг. 46.

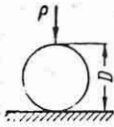
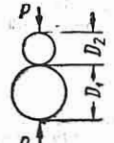
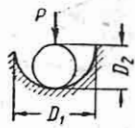
Таблица 5

Распределение давлений по площадке контакта двух деталей в зависимости от формы поверхностей контакта

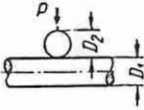
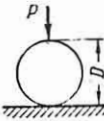
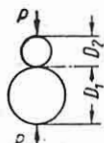
Первоначальное касание		
в точке	в точке	по линии
Общий случай поверхностей двоякой кривизны, когда одна или обе поверхности не сферические	Поверхности с общей осью симметрии*. Поверхности, не имеющие оси симметрии при частных соотношениях радиусов кривизны**	Цилиндры или катки с параллельными осями. Плоскость и тор. Первоначальное касание по линии
<i>Площадка контакта</i>		
Эллипс с полуосями $a$ и $b$ $q(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} q_0$ (ординаты поверхности половины эллипсоида)	Круг радиуса $c$ $q(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c}\right)^2} q_0$ (ординаты поверхности половины эллипсоида вращения)	Полоска шириной $2c$ и длиной, равной длине линии первоначального касания $q(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2} q_0$ (ординаты поверхности половины эллиптического цилиндра)
* Например, сферическая поверхность и плоскость, две сферические поверхности.		
** Например, цилиндры одного радиуса с перпендикулярными осями.		

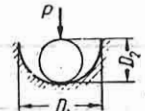
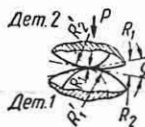
Формулы для наибольших напряжений и перемещений при контакте деталей или при приложении нагрузки к поверхности детали [13]

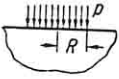
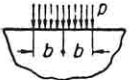
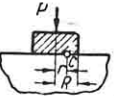
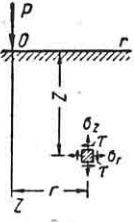
Обозначения:  $P$  — полное давление в кг;  $p$  — нагрузка на единицу длины цилиндра или единицу длины пластинки в кг/см;  $q$  — среднее давление на единицу площади контакта в кг/см<sup>2</sup>;  $q_0$  — наибольшее давление по площадке контакта, равное наибольшему сжимающему напряжению, в кг/см<sup>2</sup>;  $\tau_{\max}$  — наибольшее касательное напряжение;  $\sigma_{\max}$  — наибольшее растягивающее напряжение;  $c$  — радиус площадки контакта по кругу или половина ширины прямоугольной площадки контакта;  $a$  и  $b$  — наибольшая и наименьшая полуоси эллиптической площадки контакта;  $w$  — величина сближения по линии давления точек обеих деталей, удаленных от зоны контакта, из-за деформации в зоне контакта (или величина перемещения в направлении, параллельном давлению по отношению к неподвижной удаленной точке);  $E$  — модуль продольной упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона; 1 и 2 — индексы, соответствующие первой и второй деталям.

Случай контакта или нагрузки	Формулы для размеров площадки контакта, напряжений и перемещений
<p>1. Цилиндр и деталь, ограниченная плоскостью. Площадка контакта — прямоугольник</p> 	$c = 1,6 \sqrt{pD \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}; q_0 = 0,798 \sqrt{\frac{p}{D \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}}$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то <math>c = 2,16 \sqrt{\frac{pD}{E}}</math> и <math>q_0 = 0,591 \sqrt{\frac{pE}{D}}</math>;</p> <p>на глубине от поверхности контакта, равной <math>0,393c</math>, наибольшее напряжение <math>\tau_{\max} = 250 \sqrt{\frac{p}{D}}</math> (при <math>E = 2 \cdot 10^6</math> кг/см<sup>2</sup> и <math>\mu = 0,25</math>).</p> <p>Уменьшение размера диаметра цилиндра между двумя сжимающими его грами (с учетом контактных и общих деформаций цилиндра):</p> $\Delta D = 4p \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \left( 0,41 + \ln \frac{2D}{c} \right)$
<p>2. Цилиндры с параллельными осями. Площадка контакта — прямоугольник</p> 	$c = 1,6 \sqrt{p \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \left[ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right]}$ $q_0 = 0,798 \sqrt{\frac{p \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то <math>c = 2,16 \sqrt{\frac{p}{E} \cdot \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}}</math>.</p> <p>Сближение центров с учетом контактных и общих деформаций цилиндров</p> $w = \frac{2(1 - \mu^2)}{E} \cdot \frac{p}{\pi} \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{4D_1 D_2}{C^2} \right)$
<p>3. Цилиндр и деталь с цилиндрической канавкой. Площадка контакта — прямоугольник</p> 	$c = 1,6 \sqrt{p \frac{D_1 D_2}{D_1 - D_2} \left[ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right]}$ $q_0 = 0,798 \sqrt{\frac{p \frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то</p> $c = 2,16 \sqrt{\frac{p}{E} \cdot \frac{D_1 D_2}{D_1 - D_2}}; q_0 = 0,591 \sqrt{pE \frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2}}$



Случай контакта или нагрузки	Формулы для размеров площадки контакта, напряжений и перемещений																																							
<p>4. Цилиндры, пересекающиеся под прямым углом. Площадка контакта — эллипс</p> 	$a = \alpha \sqrt[3]{P \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}; \quad b = \beta \cdot a; \quad q_0 = \frac{1,5 \cdot P}{\pi \cdot a b}$ $w = \lambda \sqrt[3]{\frac{P^2}{\left( \frac{E_1}{1 - \mu_1^2} + \frac{E_2}{1 - \mu_2^2} \right)^2} \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2}}$ <p><math>\alpha, \beta</math> и <math>\lambda</math> зависят от отношения <math>\frac{D_1}{D_2}</math> и даны в таблице:</p> <table border="1" data-bbox="270 471 988 624"> <thead> <tr> <th><math>\frac{D_1}{D_2}</math></th> <th>1</th> <th>1,5</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>0,908</td> <td>1,045</td> <td>1,158</td> <td>1,350</td> <td>1,505</td> <td>1,767</td> <td>2,175</td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math></td> <td>1</td> <td>0,765</td> <td>0,632</td> <td>0,482</td> <td>0,400</td> <td>0,308</td> <td>0,221</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td>2,080</td> <td>2,060</td> <td>2,025</td> <td>1,950</td> <td>1,875</td> <td>1,770</td> <td>1,613</td> </tr> </tbody> </table> <p>Если <math>E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2</math>, <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,25</math>, то <math>\alpha = 0,0097 \alpha \sqrt[3]{P \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}}</math>;                  для этих значений <math>E</math> и <math>\mu</math> при <math>\frac{D_1}{D_2}</math> от 1 до 8</p> $\max \tau = \frac{3180}{\left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{0,271}} \sqrt[3]{\frac{P}{D_1}}$								$\frac{D_1}{D_2}$	1	1,5	2	3	4	6	10	$\alpha$	0,908	1,045	1,158	1,350	1,505	1,767	2,175	$\beta$	1	0,765	0,632	0,482	0,400	0,308	0,221	$\lambda$	2,080	2,060	2,025	1,950	1,875	1,770	1,613
$\frac{D_1}{D_2}$	1	1,5	2	3	4	6	10																																	
$\alpha$	0,908	1,045	1,158	1,350	1,505	1,767	2,175																																	
$\beta$	1	0,765	0,632	0,482	0,400	0,308	0,221																																	
$\lambda$	2,080	2,060	2,025	1,950	1,875	1,770	1,613																																	
<p>5. Деталь, ограниченная сферической поверхностью, и деталь, ограниченная плоскостью. Площадка контакта — круг</p> 	$c = 0,721 \sqrt[3]{P \cdot D \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}; \quad q_0 = 0,918 \sqrt[3]{\frac{P}{D^2 \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то</p> $c = 0,881 \sqrt[3]{\frac{P D}{E}}; \quad q_0 = 0,616 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{D^2}}$ $\max \sigma = 0,133 \cdot q_0; \quad w = 1,55 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 D}}; \quad \max \tau = \frac{1}{3} q_0$																																							
<p>6. Обе детали ограничены выпуклыми сферическими поверхностями. Площадка контакта — круг</p> 	$c = 0,721 \sqrt[3]{P \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}; \quad q_0 = 0,918 \sqrt[3]{\frac{(D_1 + D_2)^2}{P \frac{D_1 D_2}{\left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}}$ $w = 1,04 \sqrt[3]{P^2 \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то</p> $c = 0,881 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2}}; \quad q_0 = 0,616 \sqrt[3]{P E^2 \left( \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2} \right)^2}$ $\max \tau = \frac{1}{3} q_0; \quad \max \sigma = 0,133 q_0; \quad w = 1,55 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2}}$																																							

Случай контакта или нагрузки	Формулы для размеров площадки контакта, напряжений и перемещений																																																																				
<p>7. Деталь, ограниченная выпуклой сферической поверхностью, и деталь, имеющая сферическое углубление. Площадка контакта — круг</p> 	$c = 0,721 \sqrt[3]{P \frac{D_1 D_2}{D_1 - D_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)};$ $q_0 = 0,918 \sqrt[3]{P \frac{\sqrt{(D_1 - D_2)^2}}{D_1 D_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}.$ <p>Если <math>E_1 = E_2 = E</math> и <math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, то</p> $c = 0,881 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{D_1 D_2}{D_1 - D_2}};$ $q_0 = 0,616 \sqrt[3]{P E^2 \left( \frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2} \right)^2}; \quad \max \tau = \frac{1}{3} q_0; \quad \max \sigma = 0,133 q_0;$ $w = 1,55 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{D_1 - D_2}{D_1 D_2}}.$																																																																				
<p>8. Общий случай контакта двух деталей. Площадка контакта — эллипс</p> 	<p>В точке контакта наибольшие и наименьшие радиусы кривизны <math>R_1</math> и <math>R_1'</math> — в детали 1 и <math>R_2</math> и <math>R_2'</math> — в детали 2. Плоскость кривизны <math>\frac{1}{R_1}</math> с плоскостью кривизны <math>\frac{1}{R_2}</math> образует угол <math>\varphi</math>. Тогда</p> $q_0 = \frac{1,5P}{\tau ab}; \quad a = \alpha \sqrt[3]{\frac{P \delta}{k}}; \quad b = \beta \sqrt[3]{\frac{P \delta}{k}};$ $w = \gamma \sqrt[3]{\frac{P^2}{k^2 \delta}},$ <p>где</p> $\delta = \frac{4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}}$ <p>и</p> $k = \frac{8}{3} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_2 (1 - \mu_1^2) + E_1 (1 - \mu_2^2)};$ <p>значения <math>\alpha, \beta, \gamma</math> даны в таблице, где</p> $\theta = \arccos \frac{1}{4} \delta \times$ $\times \sqrt{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \cos 2\varphi}$																																																																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\theta</math></th> <th>0°</th> <th>10°</th> <th>20°</th> <th>30°</th> <th>35°</th> <th>40°</th> <th>45°</th> <th>50°</th> <th>55°</th> <th>60°</th> <th>65°</th> <th>70°</th> <th>75°</th> <th>80°</th> <th>85°</th> <th>90°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td><math>\infty</math></td> <td>6,612</td> <td>3,778</td> <td>2,731</td> <td>2,397</td> <td>2,136</td> <td>1,926</td> <td>1,754</td> <td>1,611</td> <td>1,486</td> <td>1,378</td> <td>1,284</td> <td>1,202</td> <td>1,128</td> <td>1,061</td> <td>1,00</td> </tr> <tr> <td><math>\beta</math></td> <td>0</td> <td>0,319</td> <td>0,408</td> <td>0,493</td> <td>0,530</td> <td>0,567</td> <td>0,604</td> <td>0,641</td> <td>0,678</td> <td>0,717</td> <td>0,759</td> <td>0,802</td> <td>0,846</td> <td>0,893</td> <td>0,944</td> <td>1,00</td> </tr> <tr> <td><math>\lambda</math></td> <td>—</td> <td>0,851</td> <td>1,220</td> <td>1,453</td> <td>1,550</td> <td>1,637</td> <td>1,709</td> <td>1,772</td> <td>1,828</td> <td>1,875</td> <td>1,912</td> <td>1,944</td> <td>1,967</td> <td>1,985</td> <td>1,996</td> <td>2,00</td> </tr> </tbody> </table>	$\theta$	0°	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	$\alpha$	$\infty$	6,612	3,778	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,00	$\beta$	0	0,319	0,408	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,00	$\lambda$	—	0,851	1,220	1,453	1,550	1,637	1,709	1,772	1,828	1,875	1,912	1,944	1,967	1,985	1,996	2,00	
$\theta$	0°	10°	20°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°																																																					
$\alpha$	$\infty$	6,612	3,778	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1,00																																																					
$\beta$	0	0,319	0,408	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1,00																																																					
$\lambda$	—	0,851	1,220	1,453	1,550	1,637	1,709	1,772	1,828	1,875	1,912	1,944	1,967	1,985	1,996	2,00																																																					

Случай контакта или нагрузки	Формулы для размеров площадки контакта, напряжений и перемещений
<p>9. Равномерное давление <math>p</math> в <math>\text{кг/см}^2</math> по площади круга радиуса <math>R</math>; деталь, ограниченная плоскостью (упругое полупространство)</p> 	<p>Величина перемещения точек плоскости, ограничивающей полупространство, в направлении давления</p> $\max w = \frac{2pR(1-\mu^2)}{E} \quad (\text{в центре});$ $w = \frac{4pR(1-\mu^2)}{\pi E} \quad (\text{у края}).$ <p>Наибольшее касательное напряжение <math>\max \tau = 0,33p</math> (в точке упругой детали под центром площадки контакта на глубине, равной <math>0,638R</math>)</p>
<p>10. Равномерное давление <math>p</math> в <math>\text{кг/см}^2</math> по квадратной площадке; деталь, ограниченная плоскостью (упругое полупространство)</p> 	<p>Величина перемещения точек плоскости, ограничивающей полупространство, в направлении давления</p> $\max w = \frac{2,24pb(1-\mu^2)}{E} \quad (\text{в центре});$ $w = \frac{1,22pb(1-\mu^2)}{E} \quad (\text{в углах})$
<p>11. Жесткий цилиндрический штамп радиуса <math>R</math>, передающий нагрузку <math>P</math>, и деталь, ограниченная плоскостью (упругое полупространство)</p> 	<p>Величина перемещения штампа в направлении давления</p> $w = \frac{P(1-\mu^2)}{2RE}$ <p>В точке <math>C</math> на поверхности контакта</p> $q_0 = \frac{P}{2\pi R\sqrt{R^2-r^2}}$ $\max q_0 = \infty \quad (\text{у края}); \quad \min q_0 = \frac{P}{2\pi R^2} \quad (\text{в центре})$
<p>12. Сосредоточенная сила <math>P</math>; деталь, ограниченная плоскостью (упругое полупространство)</p> 	<p>В точках с координатами <math>r, \varphi, z</math> (за исключением области вблизи точки приложения силы)</p> $\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{(1-2\mu)(R-z)}{r^2 R} - \frac{3zr^2}{R^5} \right]; \quad \sigma_z = -1,5 \frac{P}{\pi} \frac{z^2}{R^5};$ $\sigma_\varphi = \frac{P}{2\pi} (1-2\mu) \left[ \frac{z}{R^3} - \frac{R-z}{r^2 R} \right]; \quad \tau = -1,5 \frac{P}{\pi} \frac{z^2 r}{R^5}.$ <p>Расстояние <math>R = \sqrt{r^2 + z^2}</math>; <math>\varphi</math> — угол в плоскости, перпендикулярной к оси <math>z</math>.</p> <p>Перемещение относительно точки, весьма удаленной от места приложения силы <math>P</math>: по оси <math>z</math></p> $w = \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right];$ <p>по оси <math>r</math></p> $u = \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{rz}{R^3} - (1-2\mu) \frac{R-z}{rR} \right]$

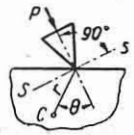
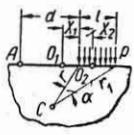
Случай контакта или нагрузки	Формулы для размеров площадки контакта, напряжений и перемещений
<p>13. Нагрузка, приложенная по линии, нормальной к плоскости пластинки</p> 	<p>В любой точке С (исключая точки контакта) <math>\sigma = \frac{2p \cos \theta}{\pi r}</math> (радиальное напряжение).</p> <p>Точки, лежащие на одной окружности диаметра <math>d</math> (круг Буссинеска), касательной в точке контакта к прямой <math>SS'</math>, имеют одно и то же радиальное сжимающее напряжение</p> $\sigma_z = \frac{2p}{\pi} \frac{1}{d} = \text{const}$
<p>14. Равномерное давление по краю пластинки на участке длиной <math>l</math></p> 	<p>Напряжения в точке С:</p> $\sigma = 0,318p (\alpha + \sin \alpha) \text{ (сжатие);}$ $\tau = 0,318p \sin \alpha.$ <p>Величины перемещения:</p> <p>точки <math>O_1</math>,</p> $w = \frac{2p}{\pi E} \left[ (l + x_1) \ln \frac{d}{l + x_1} - x_1 \ln \frac{d}{x_1} \right] + pl \frac{1 - \mu}{\pi E};$ <p>точки <math>O_2</math>,</p> $w = \frac{2p}{\pi E} \left[ (l - x_2) \ln \frac{d}{l - x_2} + x_2 \ln \frac{d}{x_2} \right] + pl \frac{1 - \mu}{\pi E};$ <p><math>w</math> — вертикальное перемещение точки <math>O_1</math> или <math>O_2</math> по отношению к удаленной точке <math>A</math></p>

Таблица 7

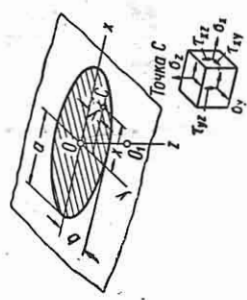
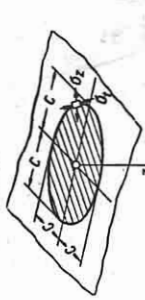
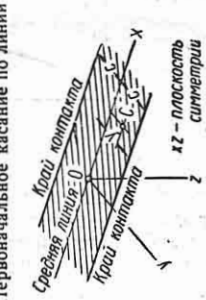
Главные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  для точек центральной оси  $z$  при эллиптической площадке контакта

Отношение полуосей эллипса  $\frac{a}{b}$ . Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$

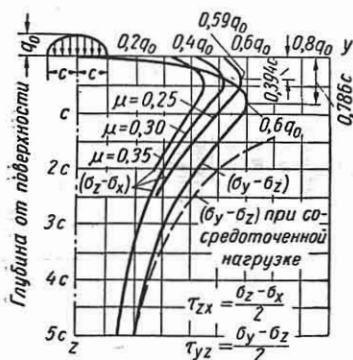
$\frac{z}{a}$	$\frac{\sigma_x}{-q_0} = \frac{\sigma_y}{-q_0}$	$\frac{\sigma_z}{-q_0}$	$\frac{\sigma_x}{-q_0}$	$\frac{\sigma_y}{-q_0}$	$\frac{\sigma_z}{-q_0}$	$\frac{\sigma_x}{-q_0}$	$\frac{\sigma_y}{-q_0}$	$\frac{\sigma_z}{-q_0}$	$\frac{\sigma_\tau}{-q_0}$	$\frac{\sigma_y}{-q_0}$	$\frac{\sigma_z}{-q_0}$
0	0,800	1,000	0,772	0,828	1,000	0,733	0,857	1,000	0,680	0,920	1,000
0,1	0,614	0,990	0,574	0,591	0,986	0,527	0,532	0,976	0,419	0,355	0,923
0,2	0,462	0,962	0,427	0,410	0,948	0,370	0,310	0,911	0,258	0,123	0,766
0,3	0,342	0,917	0,310	0,247	0,889	0,257	0,173	0,822	0,163	0,036	0,613
0,4	0,250	0,862	0,221	0,189	0,819	0,176	0,100	0,725	0,105	0,006	0,492
0,5	0,180	0,800	0,156	0,119	0,744	0,120	0,047	0,633	0,069	-0,007	0,400
0,6	0,129	0,735	0,105	0,077	0,670	0,082	0,021	0,549	0,045	-0,010	0,330
0,7	0,091	0,671	0,076	0,047	0,599	0,055	0,007	0,476	0,029	-0,012	0,275
0,8	0,063	0,610	0,052	0,028	0,534	0,037	-0,001	0,414	0,020	-0,012	0,233
0,9	0,043	0,552	0,036	0,015	0,476	0,025	-0,006	0,361	0,013	-0,010	0,199
1,0	0,029	0,500	0,023	0,006	0,424	0,016	-0,007	0,316	0,009	-0,009	0,171
	$\frac{b}{a} = 1,00$ (круг)		$\frac{b}{a} = 0,75$			$\frac{b}{a} = 0,50$			$\frac{b}{a} = 0,25$		

Таблица 9

Главные нормальные и наибольшие касательные напряжения в точках зоны контакта при нормальном давлении  $q_0$  ( $\mu/\Gamma c \cdot \text{м}^2$ ) — наибольшее давление в середине площадки контакта;  $\mu$  — коэффициент Пуассона материала детали, в которой определяются напряжения

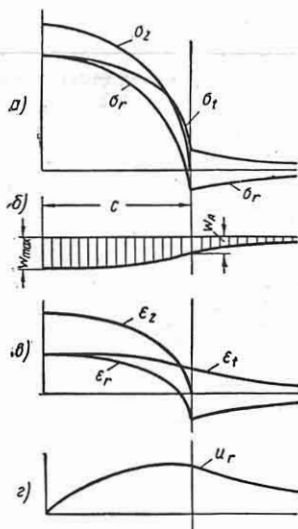
Форма площадки контакта	В точке наибольших сжимающих напряжений	В точке наибольших растягивающих напряжений	В точке наибольших касательных напряжений
<p>Эллипс, <math>a</math> и <math>b</math> — большая и малая полуоси, <math>e = \sqrt{1 - \beta^2}</math> — эксцентриситет эллипса; <math>\beta = \frac{b}{a}</math></p> 	<p>Центр площадки контакта: <math>\sigma_x = -q_0</math> (по нормали к плоскости контакта); <math>\sigma_z = - \left[ 2\mu - (1 - 2\mu) \frac{b}{a + b} \right] q_0</math> (в направлении большей оси эллипса); <math>\sigma_1 = - \left[ 2\mu - (1 - 2\mu) \frac{a}{a + b} \right] q_0</math> (в направлении меньшей оси эллипса)</p>	<p>На конце большой полуоси эллипса в точках площадки контакта: <math>\sigma_1 = (1 - 2\mu) \frac{\beta}{e^2} \left[ 1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arctg} e \right] q_0</math> (по касательной к эллипсу); <math>\sigma_2 = 0</math> (по нормали к плоскости контакта); <math>\sigma_3 = -q_0</math> (по оси эллипса)</p>	<p>В точке центральной оси на глубине <math>z_0</math> <math>\tau_{\max} = c q_0</math> (в плоскости малой оси эллипса). Значения <math>c</math> и положение точки в зависимости от <math>\beta = \frac{a}{b}</math>:</p> <p><math>\beta = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00</math> <math>c = 0,322; 0,325; 0,317; 0,310</math> <math>\frac{z_0}{a} = 0,18; 0,31; 0,41; 0,48</math></p> <p>Наибольшее напряжение <math>\tau_{\max}</math> в точках площадки контакта — на конце большой полуоси (при <math>e &lt; 0,89</math>) или в центре площадки контакта (при <math>e &gt; 0,89</math>) и не превосходит величины <math>0,2 q_0</math></p>
<p>Круг: <math>c</math> — радиус</p> 	<p>Центр площадки контакта: <math>\sigma_x = -q_0</math> (по нормали к площадке контакта); <math>\sigma_1 = \sigma_2 = - \left[ 1 + \frac{2\mu}{2} \right] q_0</math></p>	<p>В точках контура <math>\sigma_1 = \frac{1 - 2\mu}{3} q_0</math> (по радиусу к контуру); <math>\sigma_2 = 0</math> (по нормали и площадке контакта); <math>\sigma_3 = -q_0</math> (по касательной к контуру)</p>	<p>В точке центральной оси <math>z</math> на глубине <math>z_0 = 0,48 c</math> <math>\tau_{\max} = 0,310 q_0</math> Главные напряжения для этой точки: <math>\sigma_3 = \sigma_2 = -0,800 q_0</math> <math>\sigma_1 = \sigma_1 = -0,18 q_0</math></p>
<p>Полоска шириной <math>2c</math>. Первоначальное касание по линии</p> 	<p>Средняя линия контакта: <math>\sigma_x = \sigma_1 = -q_0</math> (по нормали к площадке контакта и в направлении, перпендикулярном к средней линии); <math>\sigma_2 = -2\mu q_0</math> (в направлении средней линии)</p>	<p>В точках осей <math>z</math> (в плоскости симметрии) на глубине <math>z_0 = 0,79 c</math> <math>\tau_{\max} = 0,600 q_0</math></p>	<p>В точках осей <math>z</math> на глубине <math>z_0 = 0,48 c</math> <math>\tau_{\max} = 0,310 q_0</math> Главные напряжения для этой точки: <math>\sigma_3 = \sigma_2 = -0,800 q_0</math> <math>\sigma_1 = \sigma_1 = -0,18 q_0</math></p>

При перекачивании цилиндра по детали с цилиндрической или плоской поверхностью происходит изменение напряжений.



Фиг. 45.

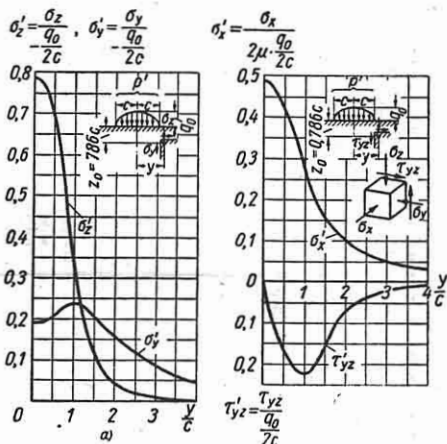
На фиг. 47, а и 47, б даны в зависимости от  $y$  изменения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и соответственно  $\tau_{xy}$ , получаемых в точке, имеющей наибольшее касательные напряжения (для  $z = 0,786c$ ) при



Фиг. 46.

расположении цилиндра над этой точкой. Здесь  $y$  — горизонтальное расстояние рассматриваемой точки до плоскости действия нагрузки, передаваемой от катка. Эти графики могут рассматриваться как линии влияния для напряжений в ука-

занной точке  $z = 0,786c$  при распределении давления по ширине полоски контакта по закону эллипса.



Фиг. 47.

Для сжатия двух цилиндров, сумма кривизны которых весьма мала (например, в случае передачи давления от цапфы на подшипник), все приведенные выше формулы неприменимы; решение этой задачи см. [11].

Таблица 9

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  в точках плоскости симметрии при площади контакта в виде полосы шириной  $2c$

Наибольшее давление в середине полосы контакта  $q_0$  кг/см<sup>2</sup>. Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$

$\frac{z}{c}$	$\frac{\sigma_x}{-q_0}$	$\frac{\sigma_y}{-q_0}$	$\frac{\sigma_z}{-q_0}$
0	0,600	1,000	1,000
0,1	0,543	0,815	0,995
0,2	0,492	0,659	0,981
0,3	0,446	0,530	0,958
0,4	0,406	0,426	0,928
0,5	0,371	0,342	0,894
0,6	0,340	0,275	0,857
0,7	0,312	0,222	0,819
0,8	0,288	0,180	0,781
0,9	0,267	0,147	0,743
1,0	0,249	0,121	0,707
1,1	0,232	0,101	0,673
1,2	0,217	0,084	0,640
1,3	0,204	0,071	0,610
1,4	0,192	0,060	0,581
1,5	0,182	0,051	0,555
1,6	0,172	0,044	0,530
1,7	0,163	0,038	0,507
1,8	0,155	0,033	0,486
1,9	0,147	0,028	0,466
2,0	0,142	0,025	0,447

Напряжения в зоне контакта, вызываемые действием касательной нагрузки, распределенной по линии или по площадке касания, подробнее см. [8].

В случае посадок и напрессовок деталей при определении напряжений и деформаций необходим учет конструкции деталей, условий натяга, состояния поверхности и пр. Решение ряда задач

см. [3]. Напряжения и деформации при напрессовке см. фиг. 29, а также гл. VII и т. IV. Экспериментальные методы определения контактных напряжений см. гл. XV.

*Данные о допускаемых напряжениях при расчете на контактную прочность* см. гл. XIV, а также [8].

**ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ**

1. Афанасьев Н. Н., Статистическая теория усталостной прочности металлов, изд. АН УССР, 1953.
2. Беляев Н. М., Местные напряжения при сжатии упругих тел, сб. "Инженерные сооружения и строительная механика", изд. "Путь", 1924.
3. Вайнберг Д. В., Напряженное состояние составных дисков и пластин, изд. АН УССР, 1952.
4. Верховский А. В., Новый способ определения напряжений в двигателях сложной формы, "Труды Горьковского политехнического института", т. XI, вып. 1, 1951.
5. Нейбер Г., Концентрация напряжений, Гостехиздат, 1947.
6. Лоповок Б. Н., Применение разностного метода для расчета прокатного уголка на кручение, Труды Московского авиационного института, № 17, 1952.

7. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. I, Машгиз, 1950.
8. Саверин М. М., Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальных и касательных нагрузок, Машгиз, 1946.
9. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, Гостехиздат, 1951.
10. Шиманский Ю. А., Проектирование прерывистых связей судового корпуса, Судпромгиз, 1949.
11. Штаерман И. М., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
12. Ne wood R., Design by Photoelasticity, N.-Y. 1953.
13. Roark R., Formulas for stress and strain, N.-Y. 1943.

## ГЛАВА XIV

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

#### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Прочностью детали называется ее способность сопротивляться действию нагрузок, т. е. сопротивляться разрушению или возникновению недопустимых деформаций и перемещений. Сопротивление деформациям характеризует жесткость деталей.

Прочность детали зависит от механических свойств материала, типа напряженного состояния, его изменения во времени и других конструктивных и технологических факторов.

В зависимости от свойств материала и типа напряженного состояния (линейное, плоское, объемное), его неоднородности и изменения во времени условия прочности могут определяться либо сопротивлением статическому или усталостному разрушению, либо сопротивлением пластическим деформациям. Характер напряженного состояния зависит, в свою очередь, от действующих на деталь нагрузок и ее очертаний.

#### Типы нагрузок

Действующие на деталь нагрузки различаются по условиям приложения и характеру изменения во времени.

По условиям приложения нагрузками могут быть:

а) объемные силы, распределенные равномерно или неравномерно по всему объему детали; их интенсивность измеряется в  $\text{кг/см}^3$ ; они возникают в связи с влиянием веса, инерции масс, магнитными воздействиями;

б) поверхностные силы, распределенные по поверхности: давление жидкости, газа, сыпучих тел на стенки сосудов, труб, на поверхность обтекаемых узлов; контактные давления от посадки детали

на деталь с натягом и т. д.; интенсивность этих сил измеряется в  $\text{кг/см}^2$ ; для удлиненных деталей эти силы могут приниматься распределенными вдоль детали, интенсивность их измеряется в  $\text{кг/см}$ ;

в) нагрузки, распределенные по весьма малым площадкам на поверхности детали или на малом участке длины детали, могут быть представлены в расчете как сосредоточенные в одной точке; эти силы измеряются в  $\text{кг}$ .

По характеру изменения во времени различают нагрузки статические, повторные и малой продолжительности.

Статические нагрузки нарастают постепенно и в ряде случаев длительно действуют на деталь или конструкцию; таковы, например, действие сил веса, центробежных сил при равномерном вращении, сил упругости, вызванных начальной затяжкой, и т. п. Статические силы могут быть постоянными (вес) и временно приложенными.

Повторные нагрузки установившихся режимов изменяются по последовательно повторяющимся циклам. В пределах каждого цикла нагрузка изменяется по определенной кривой во времени. Она характеризуется обычно наибольшими и наименьшими значениями  $P_{\text{max}}$  и  $P_{\text{min}}$ . Число полных циклов изменения нагрузки за единицу времени является ее частотой.

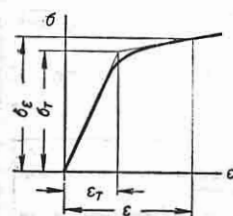
Повторные нагрузки неустановившихся режимов многократно повторяются, причем амплитуда, период и фаза цикла меняются с течением времени, подчиняясь во многих случаях статистическим закономерностям.

Нагрузки малой продолжительности, обычно называемые ударными, за короткий промежуток времени проходят весь цикл изменения, носящий характер быстрого протекающего импульса.



**Прочность материала** [1], [4], [8], [14], [18], [19], [20], [26], [33], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [45]

При действии статических напряжений сопротивление материала малым пластическим деформациям характеризуется пределами текучести при растяжении  $\sigma_T$  и сдвиге  $\tau_T$ , а также соответствующими диаграммами деформирования (см. гл. 1), полученными при однородном напряженном состоянии (рас-



Фиг. 1. Схематизированная диаграмма деформирования.

тяжение, кручение тонкостенной трубы). Для большинства материалов начальный участок диаграммы деформирования схематизируется (фиг. 1) в виде двух прямых. Ордината точки перелома диаграммы является пределом текучести  $\sigma_T$ , величина

которого для большинства конструкционных сталей (кроме сталей высокой прочности  $\sigma_{вр} > 80 \text{ кг/мм}^2$ ) соответствует пределу текучести, определяемому по допуску пластической деформации (0,20% остаточной деформации при растяжении). Величина напряжения  $\sigma_\epsilon$ , соответствующая деформации  $\epsilon$ , по схематизированной диаграмме, отнесенная к  $\sigma_T$ , равна

$$\frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_T} = \frac{\epsilon}{\epsilon_T} \cdot \frac{E_T}{E} + \left(1 - \frac{E_T}{E}\right),$$

где  $\epsilon_T$  — полная относительная деформация, соответствующая пределу текучести;  $E_T$  — модуль упрочнения, равный тангенсу угла наклона правого линейного участка диаграммы к оси  $\epsilon$ .

Левый линейный участок диаграммы для  $\epsilon \leq \epsilon_T$  соответствует упругим деформациям, правый для  $\epsilon > \epsilon_T$  — упруго-пластическим.

Схематизированная диаграмма для целей расчета за пределами упругости составляется до  $\frac{\epsilon}{\epsilon_T} = 3 \div 4$ ; в этой области  $E_T$  отличается от модуля упрочнения  $E_T'$  в области больших деформаций (правая ветвь истинной кривой деформирования):

$$E_T' = \frac{S_{\kappa} - \sigma_T}{\epsilon_{\kappa}},$$

где  $S_{\kappa}$  — истинное сопротивление разрыву;  $\epsilon_{\kappa}$  — истинное относительное удлинение при разрыве.

Значения  $\sigma_T$  и  $\frac{E_T}{E}$  для ряда конструкционных сталей и легких сплавов даны в табл. 1.

Таблица 1  
Пределы текучести и отношения  $\frac{E_T}{E}$  для некоторых сталей и легких сплавов

Материал	Термическая обработка	$\sigma_T$ в $\text{кг/мм}^2$	$\frac{E_T}{E}$
Сталь 20	—	24	0
• 45	—	36	0
• Ж2	Закалка 1050° С, отпуск 650° С	64	0,1
37ХНЗА	Закалка 830° С, отпуск 450° С	82	0,25
30ХГСА	Закалка 890° С, отпуск 510° С	90	0,1
Д1	$\sigma_b = 42$ , закалка 500° С	22	0,1
Д16	$\sigma_b = 55$ , закалка 500° С	40	0,1
АЛ-8	$\sigma_b = 30$ , закалка 430° С	15	0,1

Сопротивление материала большим пластическим деформациям и разрушению характеризуется пределами прочности (временным сопротивлением)

Таблица 2  
Характеристики механической прочности углеродистой стали

Марка стали	$\sigma_{вр}$ в $\text{кг/мм}^2$	$\sigma_{0,2}$ в $\text{кг/мм}^2$	$\sigma_{-1}$ в $\text{кг/мм}^2$	$\tau_{-1}$ в $\text{кг/мм}^2$	$\sigma_{-1р}$ в $\text{кг/мм}^2$
10	32—42	18	16—22	8—12	12—15
20	40—50	24	17—22	10—13	12—16
30	48—60	28	20—27	11—14	17—21
35	52—65	30	22—30	13—18	17—22
40	57—70	32	23—32	14—19	18—24
45	60—75	34	25—34	15—20	19—25
50	63—80	35	27—35	16—21	20—26
60	65—90	37	31—38	18—22	22—28
30Г	56—70	29	22—32	—	—
50Г	65—85	37	29—36	—	—
45Г2	70—90	41	31—40	18—22	—

Примечание. Данные приведены для сталей в нормализованном состоянии, получены на образцах  $a = 6 \div 12 \text{ мм}$  с полированной поверхностью. База испытаний  $N = 10^3$  циклов; значения пределов текучести соответствуют нижнему пределу.

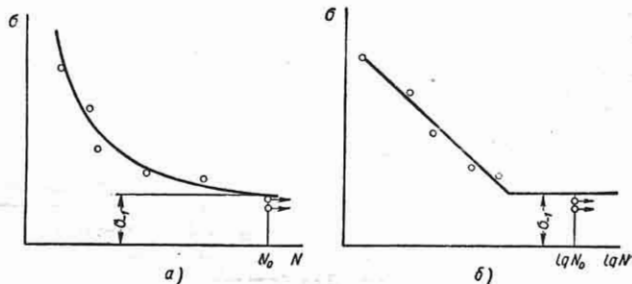
Стали — по ГОСТ 1050-52; при использовании сталей по ГОСТ 380-50 необходимо иметь в виду следующее соответствие марок: Сталь Ст. 3 соответствует стали 20, сталь Ст. 5 — стали 35, сталь Ст. 6 — стали 45.

при растяжении  $\sigma_{вр}$ , при сжатии  $\sigma_{всж}$ , при изгибе (для малопластичных и хрупких материалов)  $\sigma_{виз}$  и при срезе  $\tau_{в}$ .

Величины пределов текучести  $\sigma_{0,2}$  и пределов прочности  $\sigma_{в}$  для конструкционных материалов приведены в табл. 2—7.

При действии переменных напряжений сопротивление материала усталостному разрушению характеризуется кривой усталости (фиг. 2), получае-

мой при различных напряженных состояниях с симметричным циклом (пе-



Фиг. 2. Кривые усталости по результатам испытаний образцов.

Характеристики механической прочности легированной стали

Таблица 3

Марка стали	$\sigma_{вр}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{0,2}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\tau_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1p}$ в кг/мм <sup>2</sup>
20X	72—85	40—60	31—38	17—23	—
40X	73—105	65—90	32—48	21—26	24—34
45X	85—105	70—95	40—50	—	—
40XН	100—145	80—130	46—60	—	31—42
40XНМА	100—170	85—160	50—70	27—38	—
40XФ	90—125	80—95	38—49	—	—
50XФ	115—140	90—120	55—63	—	—
12XНЗА	95—140	70—110	42—64	22—30	—
20XНЗА	95—145	85—110	43—65	24—31	—
37XНЗА	115—160	100—140	52—70	32—40	—
18XНВА	115—140	85—120	54—62	30—31	—
25XНВА	110	95	50	—	—
30XГСА	110—170	85—150	48—70	28—40	—

Примечание. Данные по механическим свойствам приведены по ГОСТ 4543-48 для сталей в улучшенном состоянии. Пределы выносливости получены на полированных образцах диаметром 6—12 мм. База испытаний  $5 \cdot 10^6 + 10^7$  циклов.

При отсутствии в таблице данных по пределам выносливости они могут приблизительно определяться на основании следующих соотношений:  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{в}} = 0,45 + 0,55$ ;  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} = 0,5 + 0,65$ ;

$$\frac{\sigma_{-1p}}{\sigma_{-1}} = 0,7 + 0,9.$$

Характеристики механической прочности чугуна

Таблица 4

Механические характеристики	Марка					
	СЧ 21-40	СЧ 22-44	СЧ 28-48	СЧ 32-52	СЧ 35-56	СЧ 38-60
Предел прочности в кг/мм <sup>2</sup> : при растяжении $\sigma_{вр}$	21	24	28	32	35	38
„ сжатии $\sigma_{всж}$	95	100	110	120	120	140
„ изгибе $\sigma_{виз}$	40	44	48	52	56	60
„ кручении $\tau_{в}$	28	30	35	39	40	46
Твердость по Бринеллю $H_B$	180—207	187—217	170—241	170—241	197—255	197—255
Предел выносливости $\sigma_{-1}$ при изгибе на гладком образце в кг/мм <sup>2</sup>	10	12	14	14	15	15
То же при кручении $\tau_{-1}$	8	10	11	11	11,5	11,5

Таблица 5

Характеристики механической прочности алюминиевых сплавов в термически обработанном состоянии

Тип или марка сплава	$\sigma_{вр}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{0,2}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup> ; $N = (2 \dots 5) 10^7$
[Al + Si]	13—25,5	7—15	4—8,5
[Al + Mg]	14—33	8—18	6,5—11
[Al + Cu]	17—25	11—15	4,2—8
[Al + Cu + Si]	13—24	6—17	4,5—6
АЛ-1	15—31,5	12—25	5,6—11
АС-1	16—20	6—14	4,5—6
Д1	21—42	11—24	7,5—10,5
ДЗП	34	21	10
Д16	47	33	11,5
Д18	30	17	9,5
АК2	42	28	10
АК3	49	38	11,5—13
АМЦ	10—19	3,5—17,6	4,9—7,0
АМ2	18,6—27,4	9,8—25,3	11,9—14,5

ременный изгиб, переменное растяжение — сжатие, переменное кручение) и дающей зависимость между амплитудой напряжения  $\sigma$  и числом циклов его повторения  $N$ . При нанесении в логарифмических координатах левая ветвь кривой оказывается прямой, наклоненной к оси  $N$ , а правая обычно горизонтальна и соответствующая ордината является пределом выносливости при переменном изгибе  $\sigma_{-1}$ , при переменном растяжении ( $\sigma_{-1}$ )<sub>p</sub>, при переменном кручении  $\tau_{-1}$ . Для левой ветви величины амплитуд напряжений ( $\sigma_{-1}$ )<sub>N</sub>, приводящие к разрушению после повторения  $N$  циклов, являются ограниченными пределами выносливости. Между величиной ( $\sigma_{-1}$ )<sub>N</sub> и  $N$  для этой ветви используется зависимость

$$(\sigma_{-1})_N^m N = A,$$

где  $m$  — показатель степени уравнения кривой усталости, зависящий от материала при данном напряженном состоянии;  $A$  — коэффициент, зависящий от материала.

Для ряда материалов и условий испытания (коррозионная среда, повышенная температура) кривая усталости может и не иметь горизонтального участка, в этом случае величина предела выносливости сопровождается указанием числа циклов (базы).

Величины пределов выносливости для конструкционных материалов даны в табл. 2—7.

При повышенных температурах и действии статических напряжений, кроме характеристик  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{вр}$ ,  $s_k$ , определяемых как

Таблица 6

Характеристики механической прочности магниевых сплавов в термически обработанном состоянии

Марка по ГОСТ 2856-45	$\sigma_{вр}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{0,2}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup> ; $N = (2 \dots 5) 10^7$
Мл3	17—18	5,5	5,5
Мл4	19—26	9—12	6—8
Мл5	15—27	8—12	4—10
Мл6	14—24	8—10	6—8
МА1	21—30	12—20	7,5
МА2	26—27	16—18	11
МА3	30—34	22	13—15
МА5	30—34	19	13

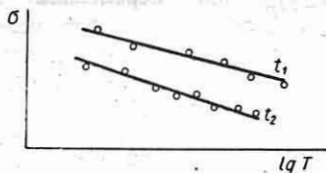
Таблица 7

Характеристики механической прочности неметаллических материалов

Материал	Марка	Удельный вес	$\sigma_{вр}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{в сж}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{в из}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$E$ в кг/мм <sup>2</sup>	$G$ в кг/мм <sup>2</sup>	$H_B$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup>
Волокнит	—	1,35—1,45	3—3,5	12	5	—	—	25	—
Гетинакс	Б	1,3—1,4	10	16	13—15	1000—1800	260	25	2—4
Текстолит	ПТК	1,3—1,4	8—10	15—25	14—16	600—1000	250	30	2
Дельта-древесина	ДСП-10	1,25—1,45	22—30	15—18	28	3000	170	18—20	4—6
Вулканизированная фибра	—	—	15—12	30	8—13	—	—	—	—
Целлулоид	—	—	6	—	6	—	—	—	—
Плексиглас	—	—	7,5	—	7—10	—	—	—	2—2,5
Стекло	—	—	3—9	—	40—120	—	—	—	—

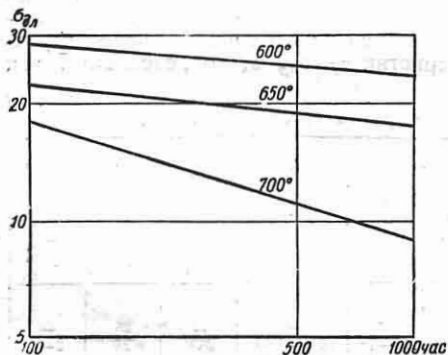
и при нормальных температурах испытанием на разрыв, сопротивление малым пластическим деформациям ползучести, развивающимся во времени, характеризуется диаграммами ползучести.

Сопротивление длительному статическому разрушению характеризуется кривой длительной прочности (фиг. 3), получаемой обычно при растяжении и дающей зависимость между величиной напряжения  $\sigma$  и временем  $T$ , необходимым



Фиг. 3. Кривая длительной прочности.

для разрушения. При нанесении в логарифмических ( $\lg \sigma$ ,  $\lg T$ ) и полулогарифмических ( $\sigma$ ,  $\lg T$ ) координатах кривая приближается к прямой, могущей иметь переломы, возникающие по истечении некоторого времени, в связи с изменениями состояния сплава, происходящими благодаря напряжениям и повышенным температурам. Каждой температуре соответствует своя кривая длительной прочности. Пределом длительной статической прочности ( $\sigma_{дл}$ ) $_T$  называется напряжение, которое вызывает разрушение после  $T$  час. непрерывного действия. В качестве примера на фиг. 4 представлены кривые длительной

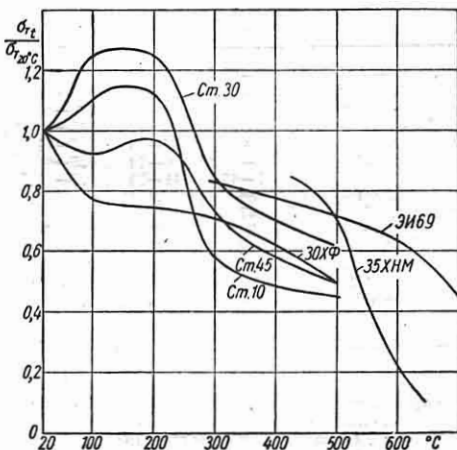


Фиг. 4. Изменение предела длительной прочности во времени в зависимости от температуры для стали ЭИ69.

прочности стали ЭИ69. С увеличением температуры длительная прочность для

одной и той же длительности действия напряжения уменьшается.

Данные по изменению пределов текучести и пределов прочности с температурой при испытании на растяжение сталей даны на фиг. 5 и 6 в виде отношения этих пределов при



Фиг. 5. Изменение предела текучести в зависимости от температуры.

данной температуре ( $\sigma_{Т}$ ) $_t$  и ( $\sigma_{вР}$ ) $_t$  к значениям этих пределов при нормальной температуре ( $\sigma_{Т}$ ) $_{20^{\circ}\text{C}}$  и ( $\sigma_{вР}$ ) $_{20^{\circ}\text{C}}$ . Значения  $\sigma_{Т}$  и  $\sigma_{вР}$  при нормальной температуре для углеродистых сталей даны в табл. 2, а для некоторых типов конструкционных и жаропрочных сталей — в табл. 8.

Таблица 8

Механические характеристики сталей при нормальной температуре

Марка стали	$\sigma_{вР} 20^{\circ}\text{C}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{Т} 20^{\circ}\text{C}$ в кг/мм <sup>2</sup>
30XФ	70—90	63—78
35XHM	60—100	40—90
X18H9	56—65	20—30
ЭИ69	60—80	45—50

Данные по пределам ползучести для углеродистых, конструкционных и жаропрочных сталей даны в табл. 9. Данные по пределам длительной прочности для некоторых жаропрочных сталей приведены в табл. 10.

При повышенных температурах и действии переменных напряжений сопротивление усталости характеризуется кривыми усталости, которые в этом случае

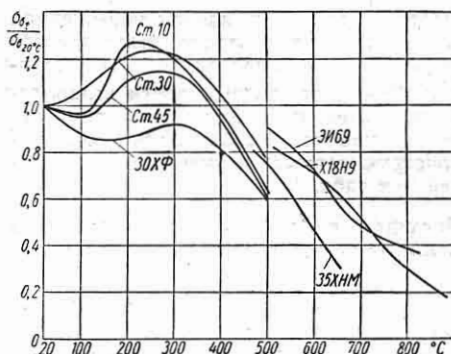
Таблица 9  
Пределы ползучести в кг/мм<sup>2</sup> по допустимой скорости деформации

Марка стали	Скорость деформации 10 <sup>-7</sup> 1/час							
	400° С	450° С	500° С	550° С	600° С	650° С	700° С	750° С
10	7,7	4,7	2,7	1,3	—	—	—	—
30	—	5,4	2,2	1,3	—	—	—	—
45	8,3	4,4	2,8	1,8	0,8	—	—	—
30ХФ	—	5—6	3,4	1,0—1,2	—	—	—	—
15М	—	—	6,1	2,8	—	—	—	—
20М	—	—	6,1	2,8	—	—	—	—
15ХМ	—	—	6,5	3,5	—	—	—	—
35ХМ	—	10,5	5,0	2,5	—	—	—	—
35ХНМ	—	14,7	8,7	3,8	1,1	—	—	—
X13	—	—	—	6,1	3,0,1,2	—	—	—
X18Н9	—	—	—	10,0	3,5,3,8,2,4,1,4	—	—	—

Марка стали	Скорость деформации 10 <sup>-6</sup> 1/час							
	400° С	450° С	500° С	550° С	600° С	650° С	700° С	750° С
10	11,0	7,0	4,2	2,3	—	—	—	—
45	11,3	7,6	4,1	2,4	—	—	—	—
30ХФ	—	—	8,0—8,4	2,7—3,3	1,2	—	—	—
35ХМ	—	16	8,5	5,0	—	—	—	—
35ХНМ	—	28	15	7,4	2,0	—	—	—
X13	—	—	—	7,6	3,2,1,5	—	—	—

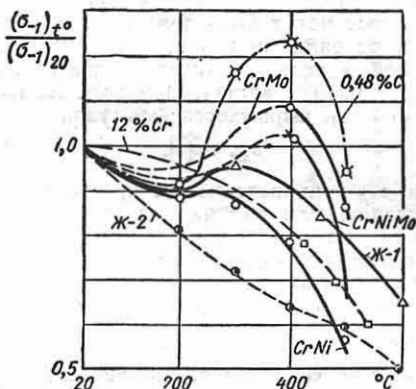
Примечание. Пределы ползучести соответствуют только установившейся стадии ползучести.



Фиг. 6. Изменение предела прочности от температуры.

Таблица 10  
Таблица пределов длительной прочности

Материал	t в °С	в час.		
		100	500	1000
Сталь ЭИ69	600	29,0	25,0	24,0
	650	22,0	19,0	17,0
	700	17,0	12,0	8,0
" ЭИ257	550	34,0	28,0	26,0
	600	28,0	23,0	21,0
	650	19,0	17,5	16,0
" 18-8	700	9,0	7,5	6,4
	815	4,5	3,2	2,8



Фиг. 7. Изменение пределов усталости с температурой.

не имеют горизонтального участка, и пределами выносливости (ограниченными), соответствующими определенному числу циклов повторения напряжений. Данные по величине этих пределов даны на фиг. 7 в виде отношения предела

Таблица 11  
Пределы выносливости при нормальной температуре для сталей (база испытания 1-10')

Материал	Марка материала	$\sigma_{-1} 20^\circ \text{C}$ в кг/мм <sup>2</sup>	Примечание
Сталь 0,48% С, 0,78% Mn	50Г	35—40	В состоянии поставки Улучшенная Закалка 980° С, воздух; отпуск 650° С, воздух
" Cr—Mo . . . . .	35ХНЗМ	50	
" Cr—Ni—Mo . . . . .	X13 (с 0,4% Mo)	54	
" 12% Cr . . . . .		44—48	
Ж-1 . . . . .	X13	30—32	Закалка 1000° С, воздух; отпуск 650° С, воздух
Ж-2 . . . . .	2X13	40—42	
Сталь Cr—Ni . . . . .	35ХН4М		То же Закалка 850° С в масле, отпуск 550° С в воду

выносливости при данной повышенной температуре к пределу выносливости  $(\sigma_{-1})_{20^\circ \text{C}}$  при температуре  $20^\circ \text{C}$ . Величины пределов выносливости углеродистых сталей при нормальной температуре приведены в табл. 2, для некоторых конструкционных и жаропрочных сталей — в табл. 11.

### Несущая способность, допускаемые напряжения и запасы прочности [4], [6], [10], [28], [33], [35], [44]

При предварительном расчете в качестве характеристики прочности обычно используются представления о допускаемых напряжениях. *Допускаемыми напряжениями*  $[\sigma]$  называются максимальные значения расчетных напряжений, которые могут быть допущены в опасном сечении, при обеспечении необходимой в условиях эксплуатации надежности работы детали. При этом условие прочности выражается формулой

$$\sigma_{np} < [\sigma],$$

где  $\sigma_{np}$  — приведенное к простому растяжению или сжатию расчетное напряжение по гипотезе прочности, соответствующей данному состоянию материала (пластичному или хрупкому). Формулы для приведенных напряжений см. табл. 12 и 13.

На последующих этапах расчета, в процессе конструирования детали, обычно производится определение запасов прочности, которые вычисляются по нагрузкам, соответствующим пределу несущей способности.

*Несущая способность* характеризуется нагрузками, соответствующими предельным состояниям детали по прочности, сопротивлению пластическим деформациям, по жесткости и устойчивости. Эти нагрузки  $Q$  могут быть силами  $P$ , моментами  $M$ , давлениями  $q$  (и т. д.); они связаны с усилиями, возникающими при их действии в отдельных сечениях детали.

Запасом прочности называется отношение предельной нагрузки  $Q_{пред}$ , соответствующей предельному состоянию детали, к действующей на деталь нагрузке:

$$n = \frac{Q_{пред}}{Q}$$

Как предельная по несущей способности, так и действующая нагрузки могут либо вычисляться, либо определяться экспериментально.

Таблица 12

Приведенные напряжения при расчете на сопротивление пластическим деформациям

В главных напряжениях $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$	По гипотезе		октаэдрических напряжений
	наибольших касательных напряжений	предельных напряженных состояний (Мора)	
	$\sigma_{np} = \sigma_1 - \sigma_3$	$\sigma_{np} = \frac{1}{1+\lambda} (\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda} (\sigma_1 + \sigma_3)$ $\lambda = 2 \frac{T}{\sigma_T} - 1$	$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$
В общем случае плоского напряженного состояния	Главные напряжения $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	По вычисленным двум значениям $\sigma_1$ устанавливаются экстремальные величины главных напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (одно из трех главных напряжений равно нулю). Полученные экстремальные значения $\sigma_1$ и $\sigma_3$ подставляются в приведенные выше формулы	$\sigma_{np} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$
В случае совместного кручения и изгиба или растяжения	$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{np} = \frac{1}{1+\lambda} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sigma$	$\sigma_{np} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

Таблица 13

Приведенные напряжения при расчете на прочность (в хрупком состоянии или при ограниченной пластичности \*)

По гипотезе				
	наибольших нормальных напряжений	наибольших удлинений	П. П. Баладинна	
	наибольших нормальных напряжений		Мора	
В главных напряжениях $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$	В условиях растяжения $\sigma_{np} = \sigma_1$ В условиях сжатия $\sigma_{np} = \sigma_3$	$\sigma_{np} = \sigma_1 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)$	$\sigma_{np} = \frac{1-\nu}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\nu)^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 4\nu\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]}$	$\sigma_{np} = \frac{1}{1+\lambda}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\sigma_1 + \sigma_2)$ $\lambda = 2 \frac{\sigma_g}{\sigma_{gp}} - 1$
Общий случай плоского напряженного состояния	$\sigma_{np} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\sigma_{np} = (1-\mu) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + (1+\mu) \times \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$	$\sigma_{np} = \frac{1-\nu}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\nu)^2(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\nu\left[\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau^2\right]}$	Определение значений главных напряжений, подставляемых в приведенную выше формулу, производится согласно указанию табл. 12
В случае совместного кручения и изгиба или растяжения	$\sigma_{np} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$	$\sigma_{np} = (1-\mu) \frac{\sigma}{2} + (1+\mu) \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$	$\sigma_{np} = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\nu)^2\sigma^2 + 4\nu(\sigma^2 + 3\tau^2)}$ где $\nu = \frac{\sigma_{gp}}{\sigma_g} \text{ с.ж.}$	$\sigma_{np} = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\sigma$

\* При ограниченной пластичности вместо пределов прочности  $\sigma_{gp}$ ,  $\sigma_g$  с.ж.,  $\tau_g$  должны быть по возможности подставлены характеристики сопротивления разрушению в истинных напряжениях ( $s_k$  и  $t_k$ ).

Расчет на прочность производится по формуле  $\sigma_{np} = \frac{\sigma_{пред}}{n} = |\sigma|$ , где для растягивающих приведенных напряжений  $\sigma_{пред} = \sigma_{gp}$  для сжимающих  $\sigma_{пред} = \sigma_g$  с.ж.;  $n$  — запас прочности (см. стр. 484).

В ряде расчетных случаев (хрупкое статическое состояние, усталость, сопротивление начальной стадии пластической деформации, потеря устойчивости в пределах упругости) предельные нагрузки пропорциональны напряжениям.

Если нагрузки пропорциональны напряжениям, то запас прочности представляет собой также отношение предельных напряжений  $\sigma_{пред}$  к действующим максимальным приведенным напряжениям  $\sigma_{пр}$ :

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{пр}}$$

Предельные нагрузки  $Q_{пред}$ , выдерживаемые деталью, т. е. ее несущая способность, определяются аналитически и экспериментально в зависимости от характера действующих сил и свойств материала. Несущая способность деталей в связи с этим может определяться по началу образования пластических деформаций, по предельным усилиям, могущим быть воспринятыми деталями в условиях пластического деформирования, по предельным разрушающим усилиям статическим, переменным или ударным.

## ПРОЧНОСТЬ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ [6], [11], [17], [21], [25], [28], [33], [34], [39], [40], [44]

### Прочность материала в связи с типом напряженного состояния

Приведенные в табл. 2—7 характеристики статической прочности используются непосредственно при определении допускаемых напряжений и запасов прочности для одноосного (линейного) напряженного состояния (см. гл. II).

При плоском и объемном напряженном состоянии механические характеристики сопоставляются с приведенными напряжениями, определяемыми на основе гипотез пластичности и прочности.

Прочность при этом характеризуется сопротивлением пластическим деформациям или сопротивлением разрушению.

Сопротивление пластическим деформациям определяется либо началом текучести в том случае, когда материал не обладает выраженным упрочнением (мягкая сталь), либо образованием пластических деформаций определенной величины (допуска деформации), когда материал обладает выра-

женным упрочнением при переходе в пластическую область.

При различных типах напряженных состояний сопротивление образованию пластических деформаций определяется механическими свойствами и условиями пластичности.

Для материалов с выраженной пластичностью используется гипотеза наибольших касательных и гипотеза октаэдрических напряжений. По гипотезе наибольших касательных напряжений

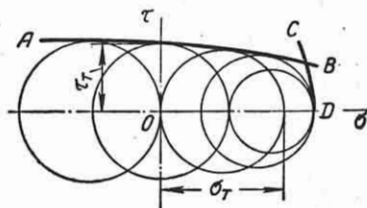
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T = 2\tau_T,$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  — наибольшее и наименьшее главные напряжения;  $\sigma_T$  — предел текучести при растяжении;  $\tau_T$  — предел текучести при сдвиге.

По гипотезе октаэдрических напряжений

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Для материалов с ограниченной пластичностью условия пластичности могут определяться согласно гипотезе Мора по кривой, огибающей круги напряжений для предельных напряженных состояний, соответствующих началу образования пластических деформаций. Характер



Фиг. 8. Огибающая предельных кругов напряжений по сопротивлению пластическим деформациям.

такой кривой представлен на фиг. 8. Замена огибающей в ее средней части прямой приводит к условию

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T - \left(2 \frac{\tau_T}{\sigma_T} - 1\right) (\sigma_1 + \sigma_3).$$

В соответствии с этими гипотезами определяется величина приведенных напряжений в формулах для расчета на прочность (табл. I2).

Расчет на прочность по сопротивлению пластическим деформациям производится согласно формуле

$$\sigma_{пр} = \frac{\sigma_T}{n_T} = [\sigma],$$

где  $n_T$  — запас прочности (см. стр. 484)



Сопротивление разрушению при различных типах напряженных состояний определяется механическими свойствами и условиями прочности в зависимости от возможного характера разрушения. При этом следует различать два основных вида разрушения: 1) хрупкое, протекающее без значительных пластических деформаций, и 2) вязкое, сопровождающееся пластическими деформациями. Один и тот же материал в зависимости от типа напряженного состояния (степени его объемности) и условий деформирования (температура, скорость нагружения, агрессивная среда) может давать хрупкое и вязкое разрушение [21], [40].

Сопротивление разрушению в хрупком состоянии определяется: 1) гипотезой наибольших нормальных напряжений, которая лучше соответствует весьма хрупким материалам (например, стали инструментального типа, керамика), 2) соответствующими механическими характеристиками.

По этой гипотезе

$$\sigma_1 = \sigma_B$$

или

$$\sigma_3 = \sigma_B \text{ сж.}$$

Для ряда хрупких материалов условия прочности лучше соответствуют гипотезе наибольших удлинений (легированный чугун, высокопрочные стали после низкого отпуска):

$$\sigma_{np} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_B.$$

Сопротивление разрушению в хрупком состоянии для материалов с выраженной разницей сопротивлений растяжению и сжатию согласно гипотезе П. П. Баландина [40] характеризуется условием

$$\frac{1-\nu}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{(1-\nu)^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 4\nu (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3)} = \sigma_B,$$

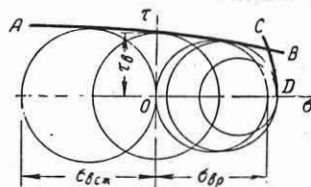
$$\text{где } \nu = \frac{\sigma_{вд}}{\sigma_{всж}}.$$

Для напряженных состояний всестороннего сжатия приведенные гипотезы неприменимы.

В более общей форме через три характеристики сопротивления разруше-

нию условия прочности предложены Ю. И. Ягн [46].

Сопротивление разрушению для материалов с разным сопротивлением растяжению и сжатию определяется также согласно гипотезе Мора по огибающей кругов предельных по прочности напряженных состояний. Характер такой кривой представлен на фиг. 9, ее полагают состоящей из двух ветвей.



Фиг. 9. Огибающая предельных кругов напряжений по сопротивлению разрушению.

Ветвь *AB* огибает круги, характеризующие разрушение от среза, при преимущественном влиянии касательных напряжений. Ветвь *CD* касается кругов, характеризующих разрушение от отрыва, при преимущественном влиянии нормальных напряжений и приближенно соответствует гипотезе наибольших нормальных напряжений.

Для случая разрушения от среза при замене огибающей *AB* прямой условие прочности выразится так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_B - \left( \frac{2\tau_B}{\sigma_B} - 1 \right) (\sigma_1 + \sigma_3).$$

Сопротивление разрушению в вязком состоянии определяется приближенно гипотезой наибольших касательных напряжений и соответствующими механическими свойствами.

По этим гипотезам определяются величины приведенных напряжений в формулах для расчета на прочность (табл. 13).

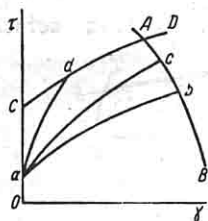
При весьма неравномерном распределении напряжений в деталях в процессе

возрастания нагрузки происходит перераспределение напряжений, после которого наступает хрупкое или вязкое разрушение [8], [39], [40].

Переход от вязкого к хрупкому разрушению зависит от типа напряженного состояния, свойств материала и условий его работы. Для качественной характеристики типа разрушения исполь-

зуются: а) схема условий разрушения по Н. Н. Давиденкову и диаграмма механического состояния Я. Б. Фридмана; б) характер огибающих предельных (по прочности) кругов напряжений.

Тип разрушения в связи с диаграммой деформирования дается схемой, предложенной Н. Н. Давиденковым (фиг. 10) [8].



Фиг. 10. Кривые деформирования и условия разрушения.

На схеме наносится семейство истинных кривых деформирования (см. гл. 1), для различных напряженных состояний ( $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ ). Концевые точки кривых (соответствующие разрушению) располагаются на ветви  $CD$  хрупких разрушений и ветви  $AB$  вязких разрушений.

Переход от вязкого к хрупкому разрушению в связи с типом напряженного



Фиг. 11. Диаграмма механического состояния.

состояния характеризуется диаграммой механического состояния (фиг. 11) [40].

На диаграмме по оси абсцисс наносится наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_{\max}$  (или приведенное нормальное напряжение по гипотезе наибольших удлинений), по оси ординат наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$ , действующее каждое по своей площадке.

На диаграмме наносятся механические характеристики материала: истинное сопротивление разрушению при растяжении  $S_K$ , сопротивление срезу  $t_K$ , предел текучести  $\sigma_T$  и истинный сдвиг  $g_{\max}$  в процентах.

Лучи, проведенные через начало координат, соответствуют определенному напряженному состоянию, например  $\frac{t_{\max}}{\sigma_{\max}}$  равняется при растяжении  $1/2$ , при

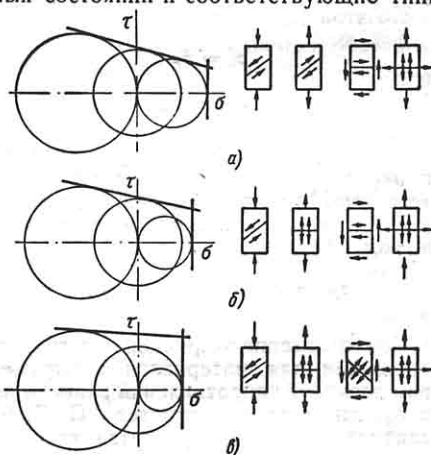
кручении 1, при контактных напряжениях — больше единицы.

В качестве примера на фиг. 11 приведена диаграмма механического состояния для бронзы Бр.С20. При растяжении этого материала наблюдается отрыв, при сжатии — срез, при кручении — промежуточное разрушение.

Если луч данного напряженного состояния пересекает раньше линию отрыва, то разрушение будет иметь хрупкий характер, и для расчета должны быть использованы гипотезы наибольших нормальных напряжений или наибольших удлинений.

Если луч данного напряженного состояния пересекает сначала линию среза, то разрушение будет иметь вязкий (в некоторых случаях хрупкий) характер, и для расчета должны быть использованы гипотезы наибольших касательных напряжений.

На фиг. 12 представлены схемы огибающих кругов предельных напряженных состояний и соответствующие типы



Фиг. 12. Схематизированные типы предельных кривых и характер разрушений: а — пластичный материал; б — материал пониженной пластичности; в — хрупкий материал.

разрушений для основных случаев нагрузки. Слабо наклоненные к оси ветви огибающих соответствуют разрушению от среза, вертикальные ветви соответствуют разрушению от отрыва. Если предельный круг напряжений, соответствующий данному напряженному состоянию, касается слабо наклоненной ветви, то разрушение будет происходить от среза, при касании к вертикальной ветви — от отрыва.

Характеристики прочности и пластичности зависят от изменений свойств материала, связанных со структурными процессами, происходящими при деформировании. Это также отражается на переходе от вязкого к хрупкому состоянию и типах разрушения [26].

### Несущая способность при статических напряжениях [6], [10], [11], [17], [21], [25], [28], [33], [34] \*

Несущая способность деталей при действии статических напряжений соответствует тем значениям нагрузок, при которых либо возникают перемещения, превышающие предельно допустимые (несущая способность по перемещениям), либо резко увеличиваются относительные деформации линейные или угловые при незначительном увеличении нагрузки (несущая способность по деформации), либо возникает разрушение детали (несущая способность по разрушению).

Предельно допустимые значения перемещений детали связаны в основном с условиями работы ее в узле, т. е. совместно с другими деталями (например, предельное перемещение внешнего контура вращающегося диска ограничивается предельной величиной зазора между лопатками и корпусом, перемещение внутреннего контура — ослаблением натяга посадки диска на валу; жесткость валов привода может диктоваться условиями работы связанных с ними шестерен и подшипников, причем предельные величины прогибов и углов поворота вала определяются предельно допустимыми углами перекося в подшипниках, степенью неравномерности распределения нагрузки по зубьям шестерен). Предельно допустимые перемещения некоторых деталей могут определяться также требованиями технологических операций (например, точностью получаемых на станке изделий, чистой поверхностью и т. д.).

Расчет деталей в условиях статического нагружения сводится к определению предельных нагрузок (по разрушению, по перемещениям или по деформациям) и к вычислению запаса прочности:

$$n = \frac{Q_{пред}}{Q}$$

\* Раздел составлен при участии Р. М. Шнейдеровича.

где  $Q_{пред}$  — предельная нагрузка;  $Q$  — допустимая нагрузка.

Предельные нагрузки по деформациям, соответствующие резкому возрастанию деформаций при малых изменениях нагрузки, также определяются при наличии зависимости между нагрузками на деталь и ее деформациями, из которых можно установить область резкого увеличения деформаций.

Для деталей из материалов весьма пластичных (без упрочнения) несущая способность детали определяется нагрузкой, которая соответствует предельно возможному распространению зоны пластических деформаций по наиболее напряженным сечениям детали; эта нагрузка и является предельной.

Предельные нагрузки по перемещениям, соответствующие достижению в детали предельно допустимых перемещений, определяются на основании зависимости между нагрузками на деталь и возникающими при ее действии перемещениями. Для выбранного предельного перемещения по такой зависимости устанавливается предельная нагрузка.

Предельные нагрузки по разрушению детали определяются по зависимости между напряжениями, при которых происходит разрушение, и соответствующими нагрузками с учетом возможного перераспределения напряжений в детали за счет пластического деформирования ее.

В зависимости от условий эксплуатации деталей, механических свойств материала их и типа напряженного состояния предельные нагрузки для них по разрушению, перемещениям или деформациям могут иметь различную величину. Для определения запаса прочности принимается наименьшая из нагрузок.

При работе детали в условиях высокой температуры предельные нагрузки определяются условиями перемещений (ползучести) и условиями длительной прочности детали. Предельные нагрузки по перемещениям (из условий ползучести детали) зависят от времени; при большем времени деформирования для образования заданной деформации или перемещения требуется меньшая предельная нагрузка.

Предельные нагрузки по сопротивлению длительному статическому разрушению изменяются во времени как за счет перераспределения напряжений, так и за счет уменьшения сопротивления длительному статическому разру-

шению во времени. Таким образом, при расчете деталей, работающих в условиях высоких температур, следует соответственно определять два запаса прочности, каждый из которых зависит от времени службы детали.

**Несущая способность деталей из материалов в пластичном состоянии.** Несущая способность деталей из пластических материалов (конструкционные высокоотпущенные стали) с удлинением при разрыве не менее 150%, обладающих способностью претерпевать перед разрушением значительные пластические деформации, как правило, определяется предельными нагрузками по перемещениям или, если величина перемещений на работе детали существенно не сказывается, — предельными нагрузками по деформациям. В соответствии с этим при обычных для деталей машин напряженных состояниях и условиях работы для деталей из пластических материалов нет необходимости определять запас прочности по разрушению.

Если несущая способность детали ограничивается по перемещениям или деформациям, запас прочности равен

$$n_s = \frac{Q_{np}}{Q_T} \cdot \frac{Q_T}{Q} = k_{np} n_T.$$

В этом выражении  $Q_T$  — нагрузка, соответствующая достижению в наиболее напряженных точках детали напряжения, равного пределу текучести;  $Q$  — действующая на деталь нагрузка;  $k_e = \frac{Q_T}{Q}$  — коэффициент сопротивления в пластической области, характеризующий превышение предельной нагрузки над нагрузкой, соответствующей началу образования пластической деформации;  $n_T$  — запас прочности по пределу текучести.

Запас прочности по пределу текучести характеризует запас по достижению наибольшими напряжениями предела текучести. Расчет ведется в пределах упругости по формулам, изложенным в гл. II. Благодаря пропорциональности между нагрузками и напряжениями в упругой области запас по пределу текучести можно записать в виде выражения

$$n_T = \frac{Q_T}{Q} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{np}},$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести;  $\sigma_{np}$  — введенные напряжения, соответствующие действующим на деталь нагрузкам.

Предел текучести в связи с расчетом определяется как ордината перелома схематизированной диаграммы растяжения или сдвига.

Схематизированная диаграмма составляется для начального участка истинной кривой деформирования, соответствующей упругим и началу пластических деформаций до  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} = 3 \div 4$ .

Первый линейный участок диаграммы соответствует упругим деформациям ( $\varepsilon \leq \varepsilon_T$ ), второй — упруго-пластическим.

При определении несущей способности необходимо использовать значения  $\sigma_T$  и  $\frac{E_T}{E}$ , получаемые по истинной диаграмме заменой ее схематизированной, состоящей из двух прямых, согласно фиг. 1. Значения  $\sigma_T$  и  $\frac{E_T}{E}$  для некоторых конструкционных сталей и легких сплавов приведены в табл. 1.

Коэффициент сопротивления в пластической области  $k_e = \frac{Q_{np}}{Q_T}$  характеризует также влияние на несущую способность деталей при статической нагрузке ограничений по жесткости, налагаемых в соответствии с условиями эксплуатации конструкции. В случае, когда пластическая или остаточная деформация в детали не может быть допущена,  $Q_{np} = Q_T$  и  $k_e = 1$ . Если предельно допустимые значения деформаций детали выше значений деформаций, соответствующих достижению предела текучести, то коэффициент сопротивления  $K_e$  характеризует возрастание несущей способности благодаря упруго-пластическому перераспределению напряжений в процессе деформирования. Это возрастание может быть использовано в соответствии с допустимыми перемещениями, уже превышающими упругие. Коэффициент  $k_e$  зависит от распределения напряжений за пределами упругости и параметров диаграммы деформирования. Определение предельных нагрузок и по ним величин коэффициента сопротивления  $k_e = \frac{M}{M_T}$  рассмотрено подробно в гл. IX.

Формулы для определения предельных усилий допускаемых напряжений и запасов прочности приведены в табл. 11. Предельная несущая способность для

Несущая способность по сопротивлению пластическим деформациям

Вид нагрузки	В пределах упругости			В упруго-пластической области		
	Усилие, соответствующее началу пластической деформации	Запас прочности	Допускаемые напряжения	Усилие, соответствующее деформации в предельном упругом состоянии	Запас прочности	Допускаемые напряжения
Растяжение	$P_T = F\sigma_T$	$n_T = \frac{P_T}{P}$	$[\sigma] = \frac{P_T}{Fn_T}$	$P_E = P_T \frac{E_T}{E} + P_T \left(1 - \frac{E_T}{E}\right)$	$n_E = \frac{P_E}{P}$	$P_E = \frac{P_E}{Fn_E}$
Кручение тонкостенного профиля *	$M_{KT} = 2Ft^2 T$	$n_T = \frac{M_{KT}}{M_K}$	$[\tau] = \frac{M_{KT}}{2Ftn_T T}$	$M_{KE} = M_{KT} \frac{G_T}{G} + M_{KT} \left(1 - \frac{G_T}{G}\right)$	$n_E = \frac{M_{KE}}{M_K}$	$M_{KE} = \frac{M_{KE}}{2Ftn_E}$
Тонкостенная труба под давлением	$q_T = \frac{\sigma_T t}{r}$	$n_T = \frac{q_T}{q}$	$[\sigma] = \frac{q_T r}{tn_T}$	$q_E = q_T \frac{E_T}{E} + q_T \left(1 - \frac{E_T}{E}\right)$	$n_E = \frac{q_E}{q}$	$q_E r = \frac{q_E r}{tn_E}$
Изгиб	$M_T = W\sigma_T$	$n_T = \frac{M_T}{M}$	$[\sigma] = \frac{M_T}{Wn_T}$	$M_E = k_E M_T$	$n_E = \frac{M_E}{M}$	$M_E = \frac{M_E}{Wn_E}$
Кручение	$M_{KT} = W_K^2 T$	$n_T = \frac{M_{KT}}{M_K}$	$[\tau] = \frac{M_{KT}}{W_K n_T}$	$M_{KE} = k_E M_{KT}$	$n_E = \frac{M_{KE}}{M_K}$	$M_{KE} = \frac{M_{KE}}{W_K n_E}$
Кручение с растяжением **	$M_{KT} = \frac{\beta}{\sqrt{3\beta+1}} W_K^2 T$	$n_T = \frac{M_{KT}}{M_K}$	$[\sigma] = \frac{M_{KT} \sqrt{3\beta+1}}{W_K \beta n_T}$	$M_{KE} = k_E M_{KT}$	$n_E = \frac{M_{KE} P_E}{M_K}$	$M_{KE} = \frac{M_{KE}}{W_K n_E}$
Толстостенная труба под давлением ***	$(p_1 - p_0)T = \frac{1 - \alpha^2}{\sqrt{3}} \sigma_T$	$n_T = \frac{(p_1 - p_0)T}{(p_1 - p_0)}$	$[\sigma] = \frac{(p_1 - p_0)T \sqrt{3}}{(1 - \alpha^2) n_T}$	$(p_1 - p_0)_E = k_E (p_1 - p_0)T$	$n_E = \frac{(p_1 - p_0)_E}{(p_1 - p_0)}$	$(p_1 - p_0)T \sqrt{3} = \frac{(p_1 - p_0)T \sqrt{3}}{n_E (1 - \alpha^2)}$

\* F — площадь, ограниченная средней линией стенки; t — толщина стенки.

\*\*  $\beta = \frac{\tau}{\sigma}$ , где  $\tau = \frac{M}{W_K}$ ;  $\sigma = \frac{F}{A}$ .

\*\*\*  $a = \frac{R_0}{R_1}$ , где  $R_0$  — внутренний;  $R_1$  — внешний радиус трубы.

деталей из материалов без упрочнения и выражения для предельных нагрузок в этом случае приведены в гл. IX.

Увеличение несущей способности в процессе развития пластических деформаций зависит от двух причин: 1) за счет перераспределения напряжений по сечению детали за пределами упругости; 2) за счет упрочнения материала детали при пластическом деформировании.

Наиболее интенсивно процесс увеличения несущей способности протекает в начальной стадии пластического деформирования, когда более интенсивно происходит перераспределение напряжений по сечению.

Чем более неравномерно распределены напряжения в упругой области, тем больше эффективность использования материала за счет перераспределения напряжений в пластической области. Для случая  $\frac{E_T}{E} = 0$  несущая способность в пластической области может повышаться лишь за счет перераспределения напряжений при неоднородном напряженном состоянии; соответствующие значения предельных усилий для ряда расчетных случаев приведены в гл. IX.

По мере роста пластических деформаций (начиная со значения  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} = 2 \div 3$ ) процесс пере-




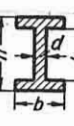


распределения напряжений ослабевает, несущая способность повышается значительно медленнее и в основном за счет упрочнения материала.

Начиная с некоторых величин деформаций, несущая способность повышается медленно, и в этой области используются детали за пределами упругости нецеле-

сообразно. Необходимо отметить, что при упрочнении, характеризуемом  $\frac{E_T}{E} = 0,0 \div 0,1$ , несущая способность детали оказывается практически исчерпанной уже при величине остаточной деформации  $\delta = 0,2\%$ , обычно принятой при определении предела текучести;

при увеличении упрочнения  $\frac{E_T}{E} = 0,15 \div 0,30$  некоторое повышение несущей способности дает увеличение остаточной деформации до  $\delta = 0,3 \div 0,5\%$ . Пре-

Таблица 15  
Несущая способность при хрупком состоянии  
(по разрушающим нагрузкам)

Случай нагрузки	Сечение	Площадь, момент сопротивления	Предельные усилия	Запас прочности	Допускаемые напряжения
Растяжение	Любое	$F$	$P_p = F \sigma_{вп}$	$n = \frac{P_p}{P}$	$[\sigma] = \frac{\sigma_{вп}}{n}$
Изгиб		$W = \frac{bh^2}{6}$	$M_p = W \sigma_{вп}$	$n = \frac{M_p}{M}$	$[\sigma] = \frac{\sigma_{вп}}{n}$
		$W = \frac{\pi R^3}{4} = 0,1 D^3$	$M_p = W \sigma_{вп}$		
		$W_R = \frac{\pi R^3}{4} = 0,1 D^3$ ;	$M_p = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4) \sigma_{вп}$ $c = \frac{d}{D}$		
		$W_h = \frac{bh^2}{6}$	$M_p = \left[ \frac{bh^2 - (b-d)h_0^3}{6h} \right] \sigma_{вп}$		
Кручение		$W_k = \frac{\pi R^3}{2}$	$M_p = W_k \tau_{вп}$	$n = \frac{M_p}{M}$	$[\tau] = \frac{\tau_{вп}}{n}$
		$W_R = \frac{\pi R^3}{2}$	$M_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \tau_{вп}$ $c = \frac{d}{D}$		

дельные нагрузки с увеличением деформации могут существенно возрастать в области, соответствующей указанным величинам остаточных деформаций.

При расчете предельных усилий, запасов прочности и допускаемых напряжений должно быть учтено влияние абсолютных размеров деталей на механические свойства металла, которые



Фиг. 13. Уменьшение предела текучести с увеличением размеров сечения.

снижаются с ростом размеров. Это уменьшение характеризуется для  $\sigma_T$  коэффициентом

$$\epsilon_T = \frac{(\sigma_T)_d}{(\sigma_T)_{10}},$$

т. е. отношением предела текучести металла  $(\sigma_T)_d$  для детали размером сечения  $d$  к пределу текучести при сечении размером 10 мм (пределы текучести определяются на образцах одного сечения, взятых из поковок деталей различных размеров). На фиг. 13 дан график  $\epsilon_T$  в зависимости от  $d$ .

Несущая способность деталей из материалов малопластичных и склонных к хрупкому разрушению. Напряженное состояние для деталей из материалов, склонных к хрупкому разрушению вплоть до разрушения, обычно остается в пределах упругости. Если модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков, то запас прочности определяется по напряжениям

$$n = \frac{\sigma_g}{\sigma} \quad \text{или} \quad n = \frac{\tau_g}{\tau},$$

где  $\sigma_g$  и  $\tau_g$  — пределы прочности.

При различных величинах модулей упругости при растяжении  $E_p$  и сжатии  $E_{сж}$  наибольшие растягивающие  $\sigma_{\max}$  и наибольшие сжимающие  $\sigma_{\min}$  напря-

жения определяются по формулам (при изгибе)

$$\sigma_{\max} = \frac{M h_p E_p}{J E_{np}}; \quad \sigma_{\min} = \frac{M h_{сж} E_{сж}}{J E_{np}},$$

где  $h_p$  — расстояние от нейтральной линии до растянутого волокна;  $E_{np} =$

$$= \frac{4 E_p E_{сж}}{(\sqrt{E_p} + \sqrt{E_{сж}})^2}; \quad h_{сж} \text{ — то же для}$$

сжатого волокна.

Для прямоугольного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_p}{E_{сж}}} \right)^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_{сж}}{E_p}} \right)^2.$$

В зависимости от формы поперечного сечения и отношения  $\frac{E_{сж}}{E_p}$  расчет на прочность должен производиться либо по наиболее растянутому, либо по наиболее сжатому волокнам.

Для чугунов и некоторых легких сплавов линейная зависимость между напряжениями и деформациями не имеет места. В этом случае для определения напряженного состояния и разрушающего усилия необходимо использовать экспериментально полученную зависимость между напряжениями и деформациями или получить из эксперимента разрушающее усилие для данного напряженного состояния.

При использовании для расчета на изгиб обычных формул сопротивления материалов в них условно вводится предел прочности при изгибе

$$\sigma_{из} = \frac{M_{раз}}{W} \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Для серых чугунов при круглом сечении  $\beta = 1$ , при прямоугольном  $\beta = 0,83$ , при двутавровом  $\beta = 0,7$ .

Если несущая способность детали ограничивается по разрушению, как это имеет место для хрупкого материала, запас прочности равен

$$n_g = \frac{Q_{раз}}{Q};$$

здесь  $Q_{раз}$  — разрушающее усилие определяется по наиболее нагруженному сечению.

Для малопластичных материалов характерно некоторое пластическое деформирование перед разрушением, в про-

цессе которого перемещения могут достигать предельных значений. При этом за счет пластического деформирования в детали происходит перераспределение напряжений, так что к моменту разрушения напряжения могут отличаться от напряжений, соответствующих упругому состоянию. В зависимости от условий работы конструкции несущая способность деталей из малопластичных материалов может ограничиваться как по перемещениям, так и по разрушению. За счет перераспределения напряжений в сечении, происходящего при пластических деформациях материала детали, может происходить некоторое увеличение несущей способности детали.

Если считать, что разрушение детали вызывают напряжения, достигающие в опасном сечении предела прочности  $\sigma_B$  (или истинного сопротивления разрыва  $S_K$ ), то следует искать зависимость предельных нагрузок от наибольших напряжений. В этом случае вводится коэффициент сопротивления разрушению

$K_B = \frac{Q_{разр}}{Q}$ . Коэффициент сопротивления разрушению  $K_B$  характеризует влияние на несущую способность детали возможного перераспределения напряжений за счет пластических деформаций, возникающих в малопластичном материале перед разрушением. Он получается в зависимости от  $\frac{\sigma_B}{\sigma_T}$  или  $\frac{S_K}{\sigma_T}$ .

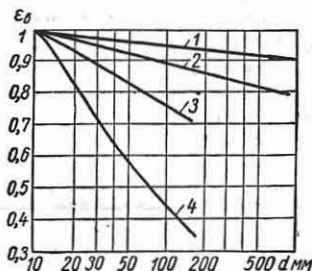
Коэффициент  $K_B$  выражается через коэффициент сопротивления в пластической области  $k_\epsilon$ .

Для этого в выражении для  $k_\epsilon$  величину  $\epsilon$  следует принять равной той, которая соответствует разрушению:

$$\epsilon = \epsilon_T \left[ \frac{\sigma_{nред}}{\sigma_T} \cdot \frac{E}{E_T} + \left( 1 - \frac{E}{E_T} \right) \right].$$

Если несущая способность детали может ограничиваться и по перемещениям, и по разрушению, как это может иметь место для малопластичных материалов, следует вычислять два запаса прочности (по перемещениям  $n_\epsilon = k_\epsilon n_T$  и по разрушению  $n_B = \frac{Q_{разр}}{Q}$ ) и оба сравнивать с соответствующим минимально допустимым значением (см. стр. 484).

При определении предельных нагрузок, запасов прочности и допускаемых напряжений для хрупких материалов должно быть принято во внимание влияние абсолютных размеров и концентрации напряжений на условия разрушения.



Фиг. 14. Коэффициент уменьшения предела прочности при растяжении в зависимости от размеров сечения: 1 — углеродистая сталь; 2 — легированная сталь; 3 — модифицированный чугун; 4 — серый чугун.

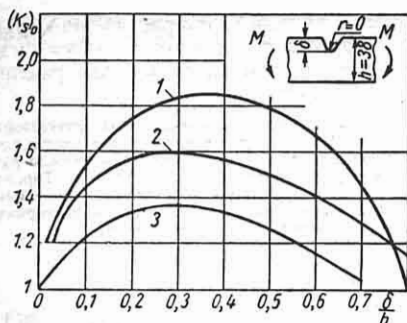
Зависимость предела прочности при растяжении от размеров сечения характеризуется коэффициентом  $\epsilon_B = \frac{(\sigma_B)d}{(\sigma_B)_{10}}$ , значение которого представлено на фиг. 14.

Влияние концентрации напряжений на статическую прочность при растяжении характеризуется величинами коэффициентов  $k_s = \frac{\sigma_{вр}}{(\sigma_{вр})_k}$ , где  $(\sigma_{вр})_k$  — предел прочности при растяжении при наличии концентрации в номинальных напряжениях.

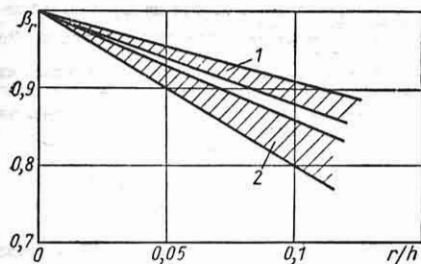
Влияние концентрации напряжений на статическую прочность при изгибе характеризуется полным коэффициентом концентрации  $k_s = (k_s)_0 \beta_r \beta_h$ , где  $k_s = \frac{(\sigma_{вр})_u}{(\sigma_{вр})_{ик}}$ , причем  $(\sigma_{вр})_{ик}$  — предел прочности для изгиба при наличии концентрации в номинальных напряжениях;  $\beta_r$  — коэффициент, характеризующий влияние радиуса закругления;  $\beta_h$  — коэффициент, характеризующий влияние высоты сечения.

На фиг. 15 даны величины  $(k_s)_0$  при изгибе в зависимости от величины надрезов для различных материалов. На фиг. 16 дана диаграмма коэффициента  $\beta_r$ , а на фиг. 17 — диаграмма  $\beta_h = \frac{k_{sh}}{k_{s'8}}$ . Здесь  $k_{sh}$  — коэффициент  $k_s$  при заданном значении размера  $h$ ;  $k_{s'8}$  — коэффициент  $k_s$  при  $h = 38$  мм.

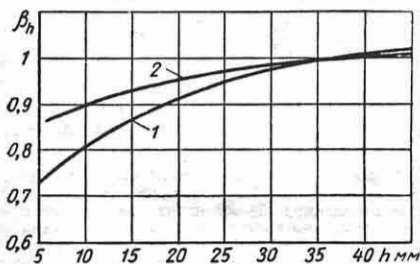




Фиг. 15. Коэффициенты концентрации ( $k_{s0}$ ) при треугольном остром надрезе в плоском образце при изгибе: 1 — алюминиевый сплав 7% Cu, 1,7% Zn, 1,2% Fe,  $\sigma_B = 16 \text{ кг/мм}^2$ ; 2 — серый и никелевый чугун; 3 — вольфрамовый чугун.



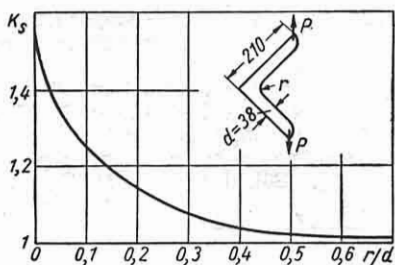
Фиг. 16. Коэффициент  $\beta_r$ , характеризующий влияние кривизны надреза: 1 — алюминиевый сплав; 2 — чугун.



Фиг. 17. Коэффициент  $\beta_h$ , характеризующий влияние высоты сечения при изгибе: 1 — алюминиевый сплав; 2 — чугун.

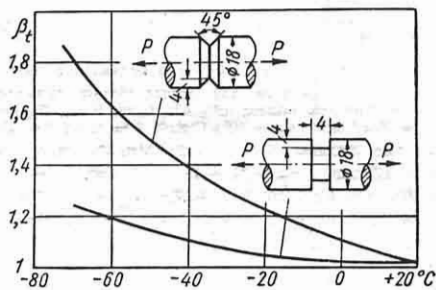
На фиг. 18 приведены значения  $k_s$  для изгиба чугунного уголка.

Усиление влияния концентрации напряжений на статическую прочность наблюдается также со снижением температуры. Такое усиление характеризуется



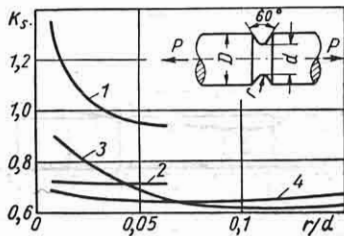
Фиг. 18. Коэффициент концентрации ( $k_s$ ) для изгиба чугунного уголка.

графиком коэффициента  $\beta_t = \frac{k_{st}}{k_{s20}}$ , приведенным на фиг. 19 для углеродистой стали.



Фиг. 19. Коэффициент  $\beta_t$ , характеризующий повышение эффективности концентрации с понижением температуры (углеродистая сталь, 0,6% C,  $\sigma_{BP} = 85 \text{ кг/мм}^2$ ).

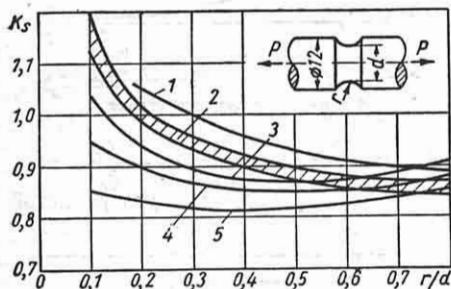
При растяжении и кручении деталей из материалов, пластичных или обладающих ограниченной пластичностью.



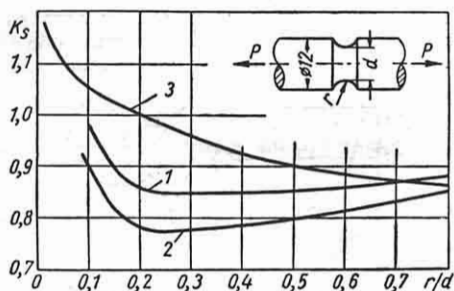
Фиг. 20. Коэффициент  $k_s$  для кольцевой выточки при растяжении для сталей: 1 — сталь 40ХНМА, отпуск 200° C,  $\sigma_{BP} = 190 \text{ кг/мм}^2$ ; 2 — сталь 40ХНМА, отпуск 500° C,  $\sigma_{BP} = 117 \text{ кг/мм}^2$ ; 3 — сталь 30ХГСА, отпуск 200° C,  $\sigma_{BP} = 170 \text{ кг/мм}^2$ ; 4 — сталь 30ХГСА, отпуск 500° C,  $\sigma_{BP} = 120 \text{ кг/мм}^2$ ; для  $r/d < 0,6$  сталь 18ХНВА, отпуск 500° C,  $\sigma_{BP} = 120 \text{ кг/мм}^2$ .

наблюдается увеличение сопротивления разрушению при наличии концентрации напряжений.

При весьма ограниченной способности к пластическим деформациям ( $\delta \leq 30\%$ ) концентрация напряжений может вызвать снижение прочности и хрупкое разрушение [8], [26]. На фиг. 20—22 даны



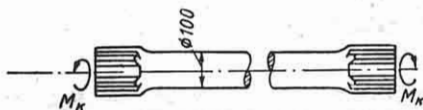
Фиг. 21. Коэффициент  $k_s$  для кольцевых выточек при растяжении для литых легких сплавов: 1 — магниевый сплав: 6% Al, 0,2% Mn, 3% Zn,  $\sigma_B = 28 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 10 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 12\%$ ; 2 — магниевые сплавы: 9% Al, 0,2% Mn, 2% Zn,  $\sigma_{BR} = 28 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 11 + 15 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 2 + 10\%$ ; 6% Al, 0,2% Mn, 3% Zn,  $\sigma_{BR} = 28 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 13,3 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 5\%$ ; 3 — алюминиевый сплав: 7% Si, 0,3% Mg,  $\sigma_{BR} = 22,4 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 15,4 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 4\%$ ; 4 — алюминиевый сплав: 4% Cu, Al — остальное,  $\sigma_{BR} = 25 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 17 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 5\%$ ; 5 — алюминиевый сплав: 10% Mg, Al — остальное,  $\sigma_{BR} = 31,5 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 17,5 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 14\%$ .



Фиг. 22. Коэффициент  $k_s$  для кольцевых выточек при растяжении деформируемых легких сплавов: 1 — магниевые сплавы: 1,5% Mn, Mg — остальное,  $\sigma_B = 24 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\delta = 9 + 17\%$ ; 6% Al, 0,2% Mn, 1% Zn,  $\sigma_B = 33 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 9 + 16\%$ ; 2 — магниевый сплав: 3% Al, 0,3% Mn, 1% Zn,  $\sigma_{BR} = 30 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 11 + 21\%$ ; алюминиевый сплав: 4,5% Cu, 1,5% Mg, Al — остальное,  $\sigma_{BR} = 48 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_T = 19 \text{ кг/мм}^2$ ; 3 — магниевый сплав: 8,5% Al, 0,2% Mn, 0,5% Zn,  $\sigma_{BR} = 36 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\delta = 9\%$ .

кривые значений  $k_s$  при растяжении круглого стержня с надрезом в зависимости от величины концентрации для различных материалов.

*Пример 1.* Рассчитать предельно допустимый крутящий момент для торсиона редуктора конвейерного привода, конструкция и основные размеры которого представлены на фиг. 23. Торсион служит для выравнивания распределения усилий между одновременно зацепляющимися шестернями и передает только крутящий момент.



Фиг. 23. Конструкция торсиона к редуктору.

Материал — улучшенная сталь 30ХГСА, обладающая следующими механическими свойствами:  $\tau_T = 54 \text{ кг/мм}^2$ ;  $G = 0,7 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$ .

Расчет производится исходя из предельной деформации  $\frac{\gamma}{\gamma_T} = 1,4$  по условиям жесткости. По табл. 14 находим допустимое напряжение на кручение: приняв запас прочности  $n_k = 2,5$  в связи с ответственностью и значительными размерами конструкции, получим

$$[\tau] = k_k \frac{M_{KT}}{n_k W_K} = \frac{\tau_T k_k}{n_k} = \frac{54}{2,5} k_k.$$

Коэффициент  $k_k = \frac{M}{M_T}$ , отражающий влияние неоднородности напряженного состояния, определяется для  $\frac{\gamma}{\gamma_T} = 1,4$  и  $\frac{G_T}{G} = \frac{E_T}{E} = 0,1$  (см. табл. 1) по графику гл. IX и равен 1,22.

Допускаемое напряжение составит

$$[\tau] = \frac{54}{2,5} \cdot 1,22 = 26,5 \text{ кг/мм}^2.$$

Допускаемый момент составит

$$M_{Kk} = [\tau] W_K = 0,2 \cdot 100^3 \cdot 26,5 \cdot 10^{-3} = 5300 \text{ кг/м}.$$

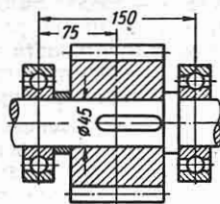
*Пример 2.* Рассчитать радиальную толщину  $t$  поршневого кольца быстрого двигателя с диаметром цилиндра 155 мм исходя из условий прочности в рабочем состоянии. Кольцо изготавливается из чугуна СЧ 38-60, имеющего предел прочности на изгиб  $\sigma_{ви} = 60 \text{ кг/мм}^2$  (см. табл. 4). Напряжения, возникающие в кольце в рабочем состоянии, определяются в зависимости от зазора  $A$  в замке в свободном состоянии.

Принимая  $A = 24,4 \text{ мм}$ , определяем  $t$  из условий прочности в рабочем состоянии, предпологая равномерное по окружности распределение давлений.

Напряжение определяем по формуле для расчета поршневых колец:

$$\sigma = 0,4E \frac{A}{t} \left( \frac{D}{t} - 1 \right)^2 \leq [\sigma].$$

Допускаемое напряжение на изгиб для чугуна СЧ 38-60 находим с учетом поправки для прямо-

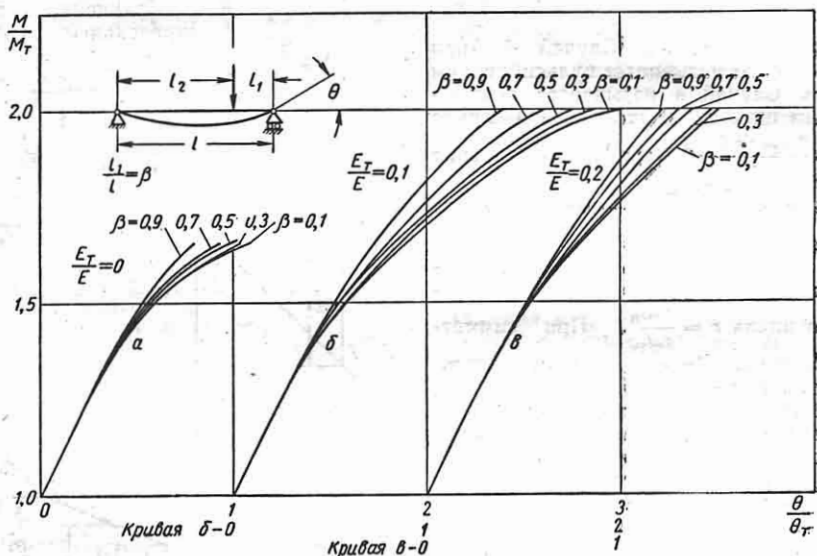


Фиг. 24. Конструкция вала паразитной шестерни.

угольного сечения (стр. 443). Приняв запас прочности  $n = 3$ , получим

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{вн}}}{n} = \frac{60}{3} \cdot 0,83 = 16,6 \text{ кг/мм}^2.$$

Модуль упругости принимаем  $E = 10^4 \text{ кг/мм}^2$ .



Фиг. 25. Графики коэффициентов сопротивления по угловым перемещениям.

После подстановки числовых значений в приведенную выше формулу получим  $t = 4 \text{ мм}$ .

**Пример 3.** Определить запас прочности для вала паразитной шестерни, конструкция и основные размеры которого представлены на фиг. 24. Нагрузка, действующая на вал, составляет  $P = 7500 \text{ кг}$ , предельная нагрузка соответствует предельно допустимому углу поворота перекоса вала в подшипнике  $\theta = 0,005$ , при котором происходит защемление шариков.

Материал вала — сталь 45 нормализованная, предел текучести  $\sigma_T = 34 \text{ кг/мм}^2$ , модуль упру-

$$\text{чения } \frac{E_T}{E} = 0.$$

Усилие, соответствующее достижению предела текучести в наиболее напряженном сечении,

$$P_T = \frac{\sigma_T W}{l_2 \beta} = \frac{34 \cdot 0,1 \cdot 45^3}{75 \cdot 0,5} = 8250 \text{ кг};$$

$$\beta = \frac{l_1}{l} = 0,5.$$

Угол поворота оси балки на опоре, соответствующий достижению предела текучести,

$$\theta_T = \frac{P_T l_1 l_2 (2 - \beta)}{6 E J} = \frac{8250 \cdot 7,5 \cdot 7,5 \cdot 1,5^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,05 \cdot 4,5^4} = 0,0028$$

( $l_1$  и  $l_2$  см. фиг. 25).

Для  $\frac{\theta}{\theta_T} = \frac{0,005}{0,0028} = 1,78$  по графику фиг 25, построенному так же, как графики, приведенные в гл. IX, находим  $\beta = 0,5$  значение коэффициента  $\frac{M}{M_T} = k_e = 1,6$ .

Запас прочности

$$n_e = k_e \cdot n_T = 1,6 \frac{8250}{7500} = 1,76.$$

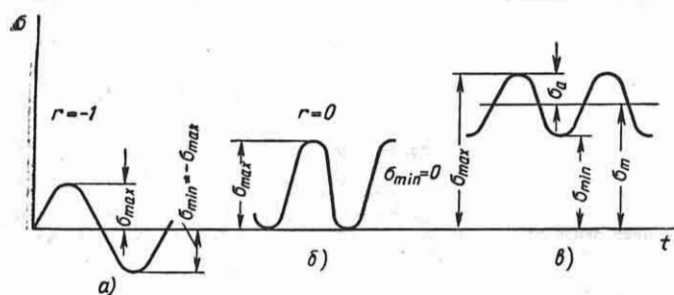
## ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

**Прочность материала в связи с типом напряженного состояния** [2], [19], [21], [30], [36], [40], [44]\*

Характер зависимости переменных напряжений от времени может соответствовать одному из трех случаев, представленных на фиг. 26 (при установив-

\* Раздел составлен при участии В. П. Когаева.

шемся режиме изменения напряжений во времени). Случай *a* — действия знакопеременных напряжений при  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ; цикл изменения напряжений называется симметричным циклом пере-



Фиг. 26. Схема изменения напряжений во времени:

*a* — симметричный цикл; *б* — пульсирующий цикл; *в* — асимметричный цикл.

менных напряжений. Случай *б* — при  $\sigma_{\min} = 0$  цикл называется пульсирующим циклом. Случай *в* называется асимметричным циклом. В этом общем случае  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  (среднее напряжение цикла),  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$  — амплитуда напряжений цикла.

Для характеристики степени асимметрии цикла вводится коэффициент асимметрии цикла  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ . При симметричном цикле  $r = -1$ , при пульсирующем цикле  $r = 0$  (поэтому величинам, соответствующим симметричному и пульсирующему циклам, приписываются индексы —1 и 0, соответственно).

Для определения предела выносливости металла, т. е. того наибольшего значения максимальных знакопеременных напряжений, превышение которого приводит к усталостному разрушению, производится испытание на усталость с наложением переменных напряжений на статические, и кривая усталости строится по максимальным напряжениям цикла или по амплитудным.

Прочность при асимметричном цикле изменения напряжений характеризуется схематизированной диаграммой предельных напряжений согласно фиг. 27, *a* для пластичных материалов и фиг. 27, *б* для хрупких.

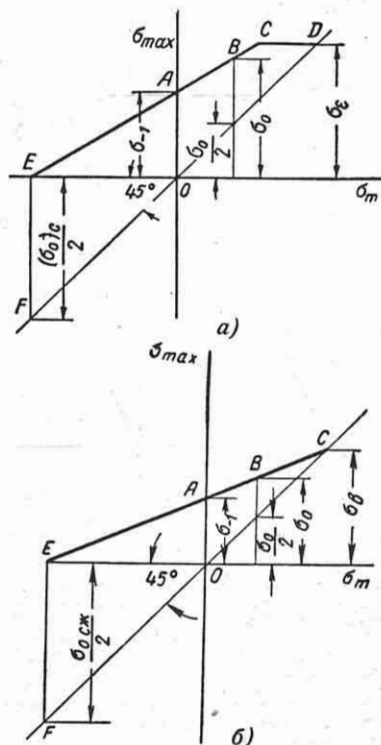
На диаграмме обозначены:  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение цикла;  $\sigma_m$  — соот-

ветствующее среднее напряжение цикла;  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости при симметричном цикле;  $\sigma_0$  — предел выносливости при пульсирующем цикле растяжения;  $(\sigma_0)_{сж}$  — предел выносливости при пульсирующем цикле сжатия;

$\sigma_s$  — предельное напряжение, соответствующее допустимой деформации;  $\sigma_B$  — предел прочности.

Линия *ABC* ограничивает максимальные напряжения цикла, соответствующие пределам выносливости; отрезки ординат между этой линией и прямой под углом  $45^\circ$  являются амплитудами цикла.

Уравнение линии предельных напря-



Фиг. 27. *a* — диаграмма предельных напряжений при асимметричных циклах для пластичного материала; *б* — диаграмма предельных напряжений при асимметричных циклах для хрупкого материала.

жений при асимметричном цикле имеет вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_{\sigma}) \sigma_m;$$

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + (1 - \psi_{\tau}) \tau_m.$$

где

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}.$$

В области сжимающих напряжений  $\sigma_m$

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{-1} - (1 - \psi'_{\sigma}) \sigma_m.$$

Значение  $\psi_{\sigma}$  и  $\psi_{\tau}$ , а также значения пределов выносливости для сталей представлены в табл. 16.

Таблица 16

Характеристики диаграммы предельных напряжений для сталей

$\sigma_{вр}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$(\sigma_{-1})_p$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\sigma_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup>	$\tau_{-1}$ в кг/мм <sup>2</sup>	Растяжение, сжатие, изгиб $\psi_{\sigma}$	Кручение $\psi_{\tau}$
32—42	12—15	16—22	8—12	0	0
40—50	12—16	17—22	10—13	0	0
48—60	17—21	20—27	11—14	0,05	—
60—75	19—25	25—34	15—20	0,10	0,05
70—85	—	31—38	17—23	0,15	0,10
85—105	—	40—45	21—26	0,20	—
105—125	—	45—50	25—30	—	—
125—145	—	50—60	28—35	—	—

Приведенные выражения для  $\sigma_{\max}$  обычно используются в расчете до значения  $\sigma_{\max} = \sigma_e$ , при больших значениях напряжений цикла они также могут быть использованы для определения запаса прочности по усталости, но при их действии будет возникать деформация, превышающая заданную  $\epsilon$ .

Прочность при линейном (одноосном) напряженном состоянии с асимметричным циклом рассматривается в двух областях:

а) для пластичного состояния при  $\sigma_{\max} < \sigma_e$ , для хрупкого состояния при  $\sigma_{\max} < \sigma_b$  условие достижения максимальными напряжениями цикла предельных значений при растягивающих средних напряжениях выражается так:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_{\sigma}) \sigma_m;$$

при сжимающих средних напряжениях

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{-1} - (1 - \psi'_{\sigma}) \sigma_m;$$

б) в остальной области для пластичного состояния  $\sigma_{\max} = \sigma_e$ ; для хрупкого состояния  $\sigma_{\max} = \sigma_{вр}$  для растяжения;  $\sigma_{\min} = \sigma_e$  и  $\sigma_{\min} = \sigma_{вж}$  для сжатия.

При переменном кручении с асимметричным циклом условия достижения напряжениями предельных значений: при  $\tau_{\max} < \tau_e$  или  $\tau_{\max} < \tau_b$ .

Сопrotивление усталостному разрушению при плоском и объемном напряженном состоянии для пластичных материалов определяется главным образом величиной переменных касательных напряжений; условия достижения предельного напряженного состояния для симметричного цикла с соблюдением синхронности и синфазности напряжений формулируются по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}$$

и гипотезе октаэдрических напряжений

$$[(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 + [(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2;$$

$(\sigma_1)_a, (\sigma_2)_a, (\sigma_3)_a$  — амплитудные значения главных напряжений.

Для случая совместного действия растяжения и кручения или изгиба и кручения с поправкой на соотношение величин пределов выносливости при изгибе и кручении условия достижения предельного напряженного состояния выражаются так:

$$\sqrt{(\sigma_a)^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}.$$

Для материалов малопластичных и хрупких на сопротивление усталостному разрушению оказывают влияние не только касательные, но также нормальные напряжения; условия достижения предельного напряженного состояния формулируются по наибольшему касательным напряжениям с отображением влияния нормальных напряжений [30]:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1} - \left(2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1\right) \times [(\sigma_1)_a + (\sigma_3)_a].$$

При заданных амплитудах напряжений плоского напряженного состояния  $(\sigma_x)_a$ ,  $(\sigma_y)_a$ ,  $(\tau_{xy})_a$ , а также для случая одновременного действия кручения и растяжения или кручения и изгиба  $(\sigma_a, \tau_a)$  выражения для приведенных напряжений для симметричного цикла даны в табл. 17.

Расчет на усталость при симметричном цикле производится по формуле

$$\sigma_{np} = \frac{\sigma_{-1}}{n} = [\sigma]_{-1},$$

где  $n$  — запас прочности (см. стр. 483);  $[\sigma_{-1}]$  — допускаемое напряжение при симметричном цикле.

Для материалов в пластическом состоянии должны использоваться гипотезы наибольших касательных и октаэдрических напряжений, при наличии более полных данных о пределах усталости — гипотеза, вытекающая из эллиптической предельной кривой, и гипотеза предельных напряженных состояний (Мора), которая также используется для материалов в хрупком состоянии.

Для напряженных состояний с асимметричными циклами переменных напряжений условия прочности характеризуются либо сопротивлением усталости, либо сопротивлением пластическому деформации или статическому разрушению. Для выяснения того, какой из критериев должен быть использован в конкретном расчетном случае, сопоставляются соответствующие запасы прочности. Для определения запаса прочности по сопротивлению усталости напряжения асимметричного цикла приводятся к эквивалентным напряжениям с симметричным циклом по формулам

$$(\sigma_a)_\varepsilon = \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m;$$

$$(\tau_a)_\varepsilon = \tau_a + \psi_\tau \tau_m.$$

Запас прочности определяется по формуле

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

где

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_a)_\varepsilon}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_a)_\varepsilon}.$$

Для определения запаса прочности по сопротивлению пластическому деформа-

Таблица 17

Приведенные напряжения при расчете на усталость при симметричном цикле

	наибольших касательных напряжений	предельных напряженных состояний (Мора)	эллиптической предельной кривой	октаэдрических напряжений
В главных напряженных $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$	$\sigma_{npa} = \sigma_1 a - \sigma_2 a$	$\sigma_{npa} = \frac{1}{1+\lambda} (\sigma_1 a - \sigma_3 a) + \frac{\lambda}{1+\lambda} (\sigma_1 a + \sigma_3 a)$ , где $\lambda = 2 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - 1$	$\sigma_{npa} = \sqrt{(\sigma_1 a + \sigma_3 a)^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 + (\sigma_1 a - \sigma_3 a)^2}$	$\sigma_{npa} = \sqrt{\sigma_1^2 a^2 + \sigma_2^2 a^2 + \sigma_3^2 a^2 - \sigma_1 \sigma_2 a^2 - \sigma_2 \sigma_3 a^2 - \sigma_3 \sigma_1 a^2}$
В общем случае плоского напряженного состояния	Главные напряжения $\sigma_{1a}$ устанавливаются экстремальные значения $\sigma_{1a} > \sigma_{2a} > \sigma_{3a}$ (одно из трех главных напряжений равно нулю). Полученные экстремальные значения $\sigma_{1a}$ и $\sigma_{3a}$	$\sigma_{1a} = \frac{\sigma_x a + \sigma_y a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x a - \sigma_y a}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ . По вычисленным двум значениям $\sigma_{1a}$ устанавливаются экстремальные величины главных напряжений $\sigma_{1a} > \sigma_{2a} > \sigma_{3a}$ (одно из трех главных напряжений равно нулю). Полученные экстремальные значения $\sigma_{1a}$ и $\sigma_{3a}$ подставляются в приведенные выше формулы		$\sigma_{npa} = \sqrt{\sigma_x^2 a^2 + \sigma_y^2 a^2 - \sigma_x \sigma_y a^2 + 3 \tau_{xy}^2}$
В случае совместно кручения и изгиба или растяжения	$\sigma_{npa} = \sqrt{\frac{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}{2}}$	$\sigma_{npa} = \frac{1}{1+\lambda} \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sigma_a$		$\sigma_{npa} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$

циям определяются эквивалентные статические напряжения:

$$(\sigma_m)_s = \sigma_a + \sigma_m; \quad (\tau_m)_s = \tau_a + \tau_m.$$

Запас прочности  $n$  определяется по той же формуле, причем

$$n_\sigma = \frac{\sigma_s}{(\sigma_m)_s}; \quad n_\tau = \frac{\tau_s}{(\tau_m)_s}.$$

При расчете на сопротивление статическому разрушению вместо  $\sigma_s$  и  $\tau_s$  подставляются соответствующие пределы прочности  $\sigma_B$  и  $\tau_B$ .

Из полученных запасов по усталости и статической прочности принимается во внимание для расчета меньший (см. также стр. 484).

### Несущая способность при переменных напряжениях

[4], [5], [10], [12], [13], [19], [21], [32], [33], [36]

Несущая способность деталей при действии переменных напряжений соответствует тем наибольшим значениям нагрузок, вызывающих переменные напряжения, которые не приводят деталь к усталостному разрушению после весьма значительного числа циклов повторения напряжений.

Нагрузки и напряжения, соответствующие несущей способности детали, зависят от сопротивления материала усталости, а также от ряда факторов конструктивного, технологического и эксплуатационного характера. К этим факторам прежде всего относятся: а) неравномерность распределения напряжений (неоднородность напряженного состояния) и их концентрация; б) абсолютные размеры сечений детали; в) свойства и состояние поверхностного слоя детали.

При действии переменных напряжений вплоть до начала образования усталостной трещины напряженное состояние остается обычно в пределах упругости, и несущая способность определяется из условий возникновения усталостного разрушения в наиболее напряженных объемах детали.

Действительное снижение пределов выносливости вследствие концентрации напряжений характеризуется эффективными коэффициентами концентрации напряжений

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_K} \quad \text{и} \quad k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_{-1})_K},$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  — пределы выносливости при отсутствии концентрации;  $(\sigma_{-1})_K$  и  $(\tau_{-1})_K$  — при ее наличии.

Снижение пределов выносливости с ростом абсолютных размеров сечения характеризуется коэффициентами влияния абсолютных размеров сечения

$$\epsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}, \quad \epsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_{d_0}},$$

где  $(\sigma_{-1})_d$  и  $(\tau_{-1})_d$  — пределы выносливости образцов диаметром  $d$ ;  $(\sigma_{-1})_{d_0}$  и  $(\tau_{-1})_{d_0}$  — то же для диаметров  $d_0 = 7 \div 10$  мм без концентрации напряжений.

Влияние качества обработки поверхности, состояния поверхностного слоя и эксплуатационных условий характеризуется

коэффициентом  $\beta = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}'}$ , где

$\sigma_{-1}'$  — предел выносливости при данном состоянии поверхности;  $\sigma_{-1}$  — то же для тщательно полированного образца.

Сочетание влияний всех перечисленных факторов отражается в расчете коэффициентом  $(k_\sigma)_D$ :

$$(k_\sigma)_D = \frac{(\sigma_{-1})_{d_1}}{(\sigma_{-1})_{Kd}} = \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma \beta},$$

где  $(\sigma_{-1})_{d_1}$  — предел выносливости лабораторного полированного образца диаметром  $d_0 = 7 \div 10$  мм, данные в табл. 2—7;  $(\sigma_{-1})_{Kd}$  — предел выносливости детали натуральных размеров, выраженный в номинальных напряжениях.

Предельное усилие по сечению детали, соответствующее ее несущей способности, при симметричном цикле составляет:

при растяжении — сжатии

$$Q_{nред} = \frac{(\sigma_{-1})_p F}{(k_\sigma)_D},$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения;  $Q_{nред}$  — амплитуда осевой силы; при изгибе

$$Q_{nред} = \frac{\sigma_{-1} W_u}{(k_\sigma)_D},$$

где  $W_u$  — момент сопротивления при изгибе;  $Q_{nред}$  — амплитуда изгибающего момента;  
при кручении

$$Q_{nред} = \frac{\tau_{-1} W_k}{(k_{\tau})_D}$$

где  $W_k$  — момент сопротивления при кручении;  $Q_{nред}$  — амплитуда крутящего момента.

Запас прочности при расчете на усталость равен:

при симметричном цикле растяжения—сжатия

$$n_o = \frac{Q_{nред}}{Q} = \frac{(\sigma_{-1})_p F}{(k_{\sigma})_D \cdot Q}$$

где  $Q$  — амплитуда действующей силы;  
при симметричном цикле изгиба

$$n_o = \frac{Q_{nред}}{Q} = \frac{\sigma_{-1} W_u}{(k_{\sigma})_D Q}$$

где  $Q$  — амплитуда действующего изгибающего момента;  
при симметричном цикле кручения

$$n_{\tau} = \frac{Q_{nред}}{Q} = \frac{\tau_{-1} W_k}{(k_{\tau})_D Q}$$

где  $Q$  — амплитуда действующего крутящего момента.

Величины  $(k_{\sigma})_D$  и  $(k_{\tau})_D$  отражают влияние неравномерности распределения напряжений, абсолютных размеров и свойств поверхностного слоя при соответствующих напряженных состояниях (см. стр. 454).

Допускаемые напряжения (амплитудные значения):

при растяжении—сжатии

$$[\sigma_a]_p = \frac{(\sigma_{-1})_p}{(k_{\sigma})_D n_o};$$

при изгибе

$$[\sigma_a] = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_D n_o}$$

при кручении

$$[\tau_a] = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_D n_{\tau}}$$

При одновременном действии переменных и статических напряжений, а также при сложном напряженном со-

стоянии различается простое и сложное нагружение.

При простом нагружении компоненты напряженного состояния изменяются, оставаясь по величине пропорциональными и в одной фазе.

При сложном нагружении компоненты напряженного состояния изменяются либо независимо друг от друга, либо так, что соотношения между их величинами и фазы меняются.

Определение несущей способности для простого нагружения при сложных напряженных состояниях (асимметричный цикл, плоское и объемное напряженное состояние) осуществляется на основе условий прочности и учета влияния основных конструктивных и технологических факторов.

При линейном (одноосном) напряженном состоянии с асимметричным циклом, заданным амплитудой напряжений  $\sigma_a$  и средним напряжением цикла  $\sigma_m$ , запас прочности определяется по формуле

$$n_o = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_a)_s},$$

где  $(\sigma_a)_s = (k_{\sigma})_D \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m$  — напряжения симметричного цикла, эквивалентные заданному напряжению с асимметричным циклом и отражающие влияние конструктивных и технологических факторов на сопротивление усталости.

При кручении с асимметричным циклом

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_a)_s},$$

где

$$(\tau_a)_s = (k_{\tau})_D \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m.$$

В случае совместного действия нормальных и касательных напряжений с асимметричными циклами запас прочности по усталости вычисляется по формуле

$$n = \frac{n_o n_{\tau}}{\sqrt{n_o^2 + n_{\tau}^2}},$$

где

$$n_o = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_D \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m};$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_D \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

При определении запасов прочности деталей с незначительной концентрацией



напряжений или деталей больших размеров, особенно из хрупких материалов, должны приниматься во внимание максимальные величины статической составляющей напряжений.

Помимо удовлетворения условий прочности по усталости необходимо обеспечить, чтобы максимальные напряжения цикла не превышали допустимых значений, вытекающих из условий статической прочности. Поэтому наряду с запасом прочности по усталости следует во всех случаях действия асимметричных циклов вычислять также запас прочности по условию статической несущей способности по формуле

$$n = \frac{n_u n_\tau}{\sqrt{n_u^2 + n_\tau^2}},$$

где

$$n_u = \left( \frac{Q_{n пред}}{Q_{max}} \right)_\sigma = \frac{\sigma_e}{\sigma_{max}};$$

$n_\tau = \left( \frac{Q_{n пред}}{Q_{max}} \right)_\tau = \frac{\tau_e}{\tau_{max}}$  — предельно допустимые по условиям статической прочности напряжения.

Каждый из полученных запасов прочности  $n$  сопоставляется с минимально допустимыми значениями.

Если имеются опытные данные по испытанию детали в условиях одновременного нагружения, например кручением и изгибом (или растяжением), которые изображаются графиком зависимости между моментами изгибающими  $M_{n пред}$  и крутящими  $(M_k)_{n пред}$ , соответствующими пределу выносливости, то в расчете следует использовать эти данные. Подобный график представлен на фиг. 28. Точка  $M$  соответствует действующим в детали нагрузкам  $M$  и  $M_k$ . Луч, проведенный через начало координат, характеризует условия простого нагружения (когда все компоненты напряжений изменяются пропорционально друг другу) и точка  $N$  на кривой соответствует пределу прочности детали. Запас прочности равен

$$n = \frac{ON}{OM}.$$

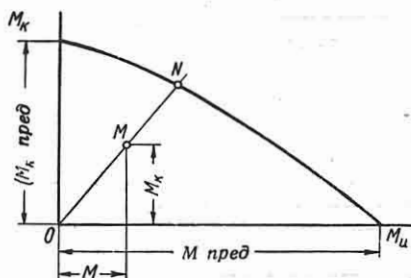
В зависимости от формы экспериментально устанавливаемой предельной кривой предельных нагрузок запас прочности выразится для эллиптической или приближающейся к ней кривой

$$n = \frac{n_u n_k}{\sqrt{n_u^2 + n_k^2}},$$

где

$$n_u = \frac{M_{n пред}}{M}; \quad n_k = \frac{(M_k)_{n пред}}{M_k},$$

причем  $M_{n пред}$  — предельный момент при испытании только на изгиб;  $(M_k)_{n пред}$  — то же при испытании только на кручение



Фиг. 28. Предельная кривая усилий при комбинированном нагружении.

Для случая, когда предельное напряжение ограничивается прямой линией,

$$n = \frac{n_u n_k}{n_u + n_k}.$$

При сложном нагружении для определения запасов должны быть использованы экспериментальные предельные кривые, полученные при соответствующих условиях.

Запасы прочности для плоского напряженного состояния (простое нагружение). Напряженное состояние характеризуется компонентами номинальных напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{max} &= (\sigma_x)_m + (\sigma_x)_a; \\ (\sigma_y)_{max} &= (\sigma_y)_m + (\sigma_y)_a; \\ (\tau_{xy})_{max} &= (\tau_{xy})_m + (\tau_{xy})_a. \end{aligned}$$

Запасы прочности по усталости выражаются через эквивалентные напряжения согласно стр. 450

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{[(\sigma_x)_{a\sigma} - (\sigma_y)_{a\sigma}]^2 + k^2 (\tau_{xy})_{a\sigma}^2}},$$

где

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{a\sigma} &= \sigma_{xa} + \psi_\sigma \sigma_{xm}; \\ (\sigma_y)_{a\sigma} &= \sigma_{ya} + \psi_\sigma \sigma_{ym}; \\ (\tau_{xy})_{a\sigma} &= (\tau_{xy})_a + \psi_\tau (\tau_{xy})_m; \end{aligned}$$

$$k = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}$$

(по гипотезе наибольших касательных напряжений  $k = 2$ ).

Запасы прочности по сопротивлению пластическим деформациям выражаются через максимальные напряжения цикла каждого из компонентов. Запас прочности составит

$$n = \frac{\sigma_T}{\sqrt{[(\sigma_x)_{\max} - (\sigma_y)_{\max}]^2 + k^2 (\tau_{xy})_{\max}^2}}$$

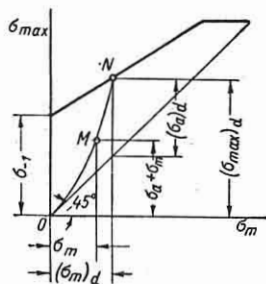
$$\text{где } k = \frac{\sigma_T}{\tau_T}$$

Определение несущей способности для сложного нагружения растяжением — сжатием, изгибом или кручением, т. е. при произвольном возрастании статических и переменных напряжений в детали. Запас прочности определяется по статической  $\sigma_m$  и переменной  $\sigma_a$  составляющим напряжений цикла и по максимальному напряжению  $\sigma_{\max}$  [5], [13]:

$$n_a = \frac{(\sigma_a)d}{\sigma_a}; \quad n_m = \frac{(\sigma_m)d}{\sigma_m}; \quad n = \frac{(\sigma_{\max})d}{\sigma_{\max}}$$

где  $(\sigma_m)d$ ,  $(\sigma_a)d$ ,  $(\sigma_{\max})d$  — предельные напряжения при заданных условиях возрастания напряженности.

Приближенно эти величины определяются по диаграмме пределов прочности при асимметричном цикле, как показано на фиг. 29, на которую наносятся кривая  $OMN$  возрастания напряжений.



Фиг. 29. Схема сложного нагружения.

Точка  $M$  соответствует действующим в детали напряжениям, точка  $N$  — предельному состоянию (при заданном возрастании напряжений), ее координаты  $(\sigma_m)d$  и  $(\sigma_{\max})d = (\sigma_m)d + (\sigma_a)d$ . Когда основным фактором увеличения напряженности является переменное напря-

жение (например, от возникновения упругих колебаний), то прочность детали характеризуется сочетанием значений  $n_a$  и  $n$ . Когда основным фактором увеличения напряженности является постоянное напряжение (например, от монтажных натягов), то прочность характеризуется сочетанием значений  $n_m$  и  $n$ .

При кручении выражения для запасов прочности имеют вид

$$n_a = \frac{(\tau_a)d}{\tau_a}; \quad n_m = \frac{(\tau_m)d}{\tau_m};$$

$$n = \frac{(\tau_{\max})d}{\tau_{\max}}$$

Следует иметь в виду, что в зависимости от условий возрастания напряжений расположение кривых предельных напряжений при асимметричном цикле изменяется. Использование таких кривых, полученных при испытании с неизменной амплитудой напряжений (такие кривые и параметры для них приведены выше), приводит к погрешностям, которые могут быть устранены использованием данных испытаний, поставленных при сложном нагружении, соответствующем условиям работы детали.

О расчете при неустановившихся режимах переменных напряжений см. стр. 474.

Величины коэффициентов  $(k_\sigma)_D$  и  $(k_\tau)_D$  характеризуют разницу несущей способности деталей определенной конструкции и изготовленных по определенной технологии по сравнению с характеристиками прочности при переменных напряжениях, получаемых испытанием гладких лабораторных образцов, т. е. пределами выносливости (см. табл. 2—7).

Для определения  $(k_\sigma)_D$  и  $(k_\tau)_D$  используются экспериментальные данные по отдельным величинам, входящим в этот коэффициент:

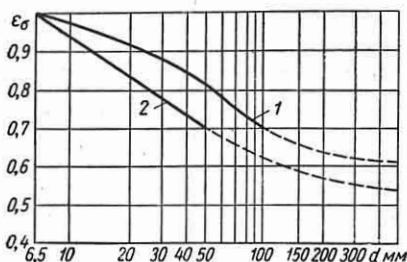
$$(k_\sigma)_D = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}; \quad (k_\tau)_D = \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta_\tau}$$

**Эффективные коэффициенты концентрации и влияние абсолютных размеров [19], [21], [32], [33], [44]**

**Стальные детали.** На фиг. 30 представлен график для определения коэффициентов влияния абсолютных разме-

ров сечения. Можно приближенно принять, что  $\epsilon_r = \epsilon_\sigma$ .

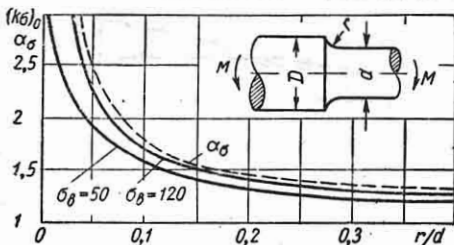
Кривая 1 на фиг. 30 соответствует мягким углеродистым сталям с пределом прочности  $\sigma_{вр} = 40 \div 50 \text{ кг/мм}^2$ , кривая 2 — высокопрочным легированным сталям  $\sigma_{вр} = 120 \div 140 \text{ кг/мм}^2$ . При про-



Фиг. 30. Коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения  $\epsilon_\sigma$ : 1 — углеродистая сталь; 2 — легированная сталь.

межточечных значениях предела прочности следует производить интерполяцию между указанными кривыми.

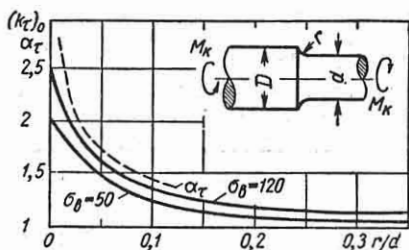
Значения эффективных коэффициентов концентрации  $k_\sigma$  для ступенчатого вала с галтелями представлены следующими диаграммами: для изгиба — фиг. 31, для



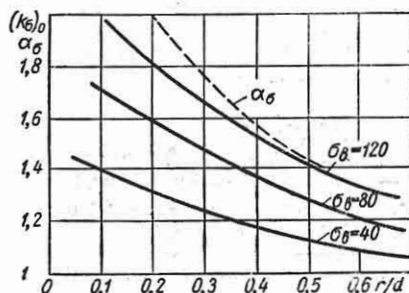
Фиг. 31. Эффективные коэффициенты концентрации для ступенчатых валов при изгибе с отношением  $\frac{D}{d} = 2$  при  $d = 30 \div 50 \text{ мм}$ .

кручения — фиг. 32, для растяжения — сжатия — фиг. 33. Диаграммы, показанные на фиг. 31—33, относятся к случаю  $\frac{D}{d} = 2$ .

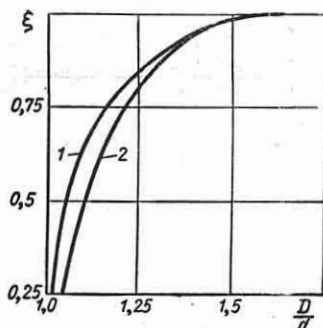
Для определения эффективных коэффициентов концентрации для образцов с отношением диаметров  $\frac{D}{d} < 2$  следует воспользоваться поправочными коэффициентами  $\xi$ , представленными на фиг. 34,



Фиг. 32. Эффективные коэффициенты концентрации для ступенчатых валов при кручении с отношением  $\frac{D}{d} = 2$  при  $d = 30 \div 50 \text{ мм}$ .



Фиг. 33. Эффективные коэффициенты концентрации для ступенчатых валов при растяжении — сжатии с отношением  $\frac{D}{d} = 2$  при  $d = 30 \div 50 \text{ мм}$ .



Фиг. 34. Поправочный коэффициент на отношении  $\frac{D}{d}$  к фиг. 31 и 32: 1 — изгиб; 2 — кручение;

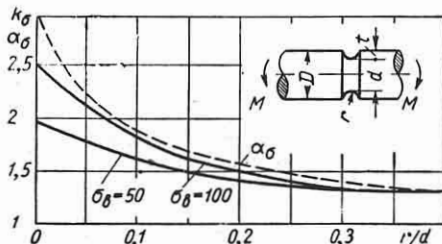
$$\xi = \frac{k - 1}{k_0 - 1}$$

и определять  $k$ , для  $\frac{D}{d} < 2$  по формуле

$$k_\sigma = 1 + \xi[(k_\sigma)_0 - 1],$$

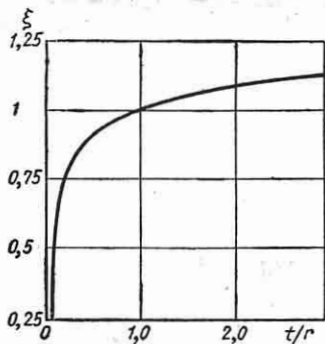
где  $(k_\sigma)_0$  — эффективный коэффициент

концентрации, соответствующий отношению  $\frac{D}{d} = 2$ , т. е. по фиг. 31—33;  $\xi$  — поправочный коэффициент по фиг. 34 (аналогично для кручения).



Фиг. 35. Эффективные коэффициенты концентрации для валов с кольцевой выточкой при изгибе;  $\frac{t}{r} = 1$ ;  $d = 30 + 50$  мм.

Кривые на фиг. 31 и 32 соответствуют  $\sigma_{вр} = 50$  и  $120$  кг/мм<sup>2</sup> и на фиг. 33  $\sigma_{вр} = 40$  кг/мм<sup>2</sup>; кривые  $\sigma_{вр} = 80$  и  $\sigma_{вр} = 120$  кг/мм<sup>2</sup> на фиг. 33 приведены предположительно и являются ориентировочными. При значениях  $\sigma_{вр}$ , отличных от указанных, следует производить линейную интерполяцию между соответствующими кривыми на фиг. 31—33.



Фиг. 36. Поправочный коэффициент на отношение  $\frac{t}{r}$  к фиг. 35.

Значения  $k_0$  для случая изгиба валов с полукруглыми канавками  $\frac{t}{r} = 1$  представлены на фиг. 35. Значения  $k_0$  для отношений  $\frac{t}{r} \neq 1$  вычисляются по формуле

$$k_0 = 1 + \xi[(k_0)_0 - 1],$$

где  $(k_0)_0$  — эффективные коэффициенты концентрации для  $\frac{t}{r} = 1$ ;  $\xi$  — поправочный коэффициент, определяемый по фиг. 36, учитывающий влияние отношения  $\frac{t}{r}$  на величину  $k_0$ .

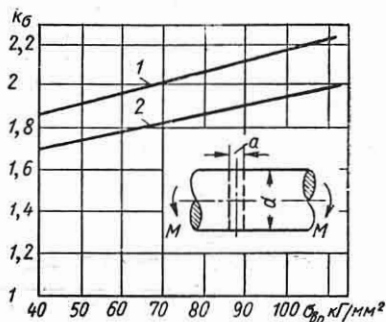
На фиг. 35 представлены кривые для  $\sigma_{вр} = 50$  и  $\sigma_{вр} = 120$  кг/мм<sup>2</sup>. Для других значений  $\sigma_{вр}$  следует производить линейную интерполяцию.

Из-за отсутствия достаточного количества экспериментальных данных можно принимать, что значения  $k_0$  для валов с кольцевой канавкой при растяжении — сжатии равны значениям  $k_0$  при изгибе. Значения  $k_t$  (при кручении) для валов с кольцевой канавкой можно приближенно определить по формуле

$$k_t = 1 + 0,6 [(k_0) - 1],$$

где  $k_0$  — коэффициент концентрации при изгибе.

Значения эффективных коэффициентов концентрации для валов с поперечными отверстиями представлены на фиг. 37

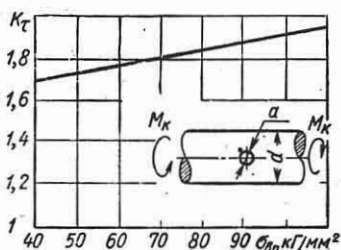


Фиг. 37. Эффективные коэффициенты концентрации для валов с поперечным отверстием при изгибе: кривая 1 —  $\frac{a}{d} = 0,05 + 0,1$ ; кривая 2 —  $\frac{a}{d} = 0,15 + 0,25$  при  $d = 30 + 50$  мм;  $\sigma_H = \frac{M}{W_{нетто}}$ .

для изгиба и на фиг. 38 для кручения. Для растяжения — сжатия можно, как и выше, принять  $(k_0)_p = k_0$ .

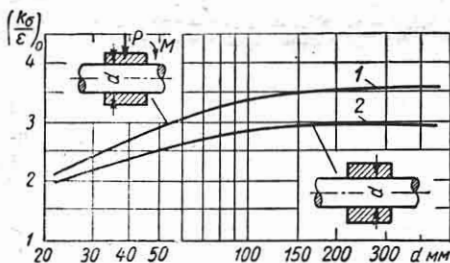
Коэффициенты, характеризующие влияние концентрации и абсолютных размеров ( $\frac{k_0}{\epsilon_0}$ ) для валов с напрессованными деталями при изгибе, представлены на

фиг. 39. Эти кривые соответствуют  $\sigma_{вр} = 50 \text{ кг/мм}^2$  и давлению посадки

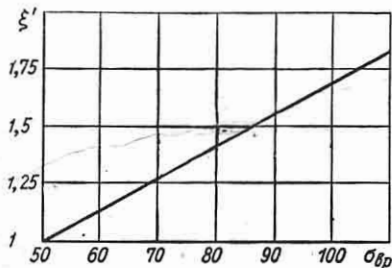


Фиг. 38. Эффективные коэффициенты концентрации для валов с поперечным отверстием при

кручении;  $\left(\frac{a}{d} = 0,05 \div 0,25\right) \tau_K = \frac{M_K}{W_K}$   
при  $d = 30 \div 50 \text{ мм.}$



Фиг. 39. Значение отношения коэффициентов  $\left(\frac{k_2}{\epsilon}\right)_0$  для валов с напрессованными деталями при изгибе:  $\sigma_{вр} = 50 \text{ кг/мм}^2$ ,  $P > 3 \text{ кг/мм}^2$ ; 1 — через напрессованную деталь передается сила или момент; 2 — через напрессованную деталь не передается усилий.



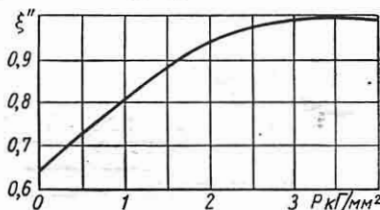
Фиг. 40. Поправочный коэффициент  $\xi'$  на предел прочности  $\sigma_{вр}$  к фиг. 39.

$p > 3 \text{ кг/мм}^2$ . При  $\sigma_{вр} > 50 \text{ кг/мм}^2$  и  $p > 3 \text{ кг/мм}^2$  следует учитывать соответствующие поправки  $\xi'$  и  $\xi''$  по фиг. 40

и 41 и определять значения  $\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}$  по формуле

$$\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma} = \left(\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}\right)_0 \xi' \xi''$$

где  $\left(\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}\right)_0$  берется по фиг. 39 и соответствует случаю  $\sigma_{вр} = 50 \text{ кг/мм}^2$ ,  $p > 3 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\xi'$  — поправка, учитывающая влияние предела прочности, определяемая по фиг. 40;  $\xi''$  — поправка, учитывающая влияние давления посадки, определяемая по фиг. 41.



Фиг. 41. Поправочный коэффициент  $\xi''$  на давление напрессовки  $P$  к фиг. 39.

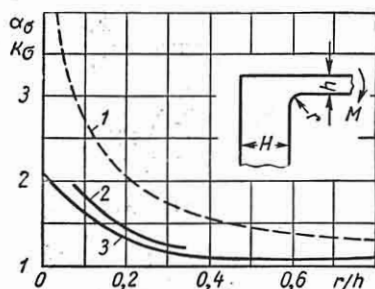
Указанные величины коэффициентов концентрации и влияния абсолютных размеров для валов с напрессовками соответствуют разрушающим напряжениям в детали. Коэффициенты  $\frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}$  для

этого случая, соответствующие началу образования трещин, будут в  $1,5 \div 2,5$  раза выше приведенных на фиг. 39. В расчет вводятся коэффициенты по разрушающим напряжениям или по напряжениям, соответствующим началу образования трещины в зависимости от ответственности и условий эксплуатации деталей.

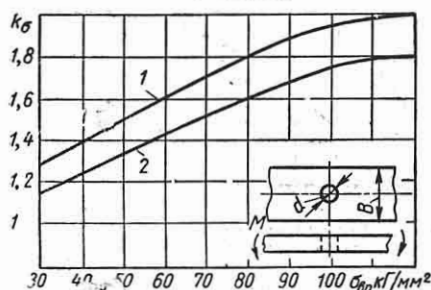
На фиг. 42 представлены значения  $k_\sigma$  для входящего угла при изгибе. При определении  $k_\sigma$  в этом случае для  $\sigma_{вр} > 90 \text{ кг/мм}^2$  интерполяцию следует производить между линиями  $\sigma_{вр} = 90 \text{ кг/мм}^2$  и линией  $\sigma_\sigma$ , к которой можно ориентировочно отнести случай  $\sigma_\sigma = 140 \div 160 \text{ кг/мм}^2$ .

На фиг. 43 представлены значения  $k_\sigma$  для прямоугольной полосы с поперечным отверстием при растяжении — сжатии или изгибе.

Для тех очертаний и форм деталей, для которых нет соответствующих



Фиг. 42. Значения коэффициентов  $\alpha_\sigma$  и  $k_\sigma$  для входящего угла: 1 —  $\alpha_\sigma$ ; 2 — легированная сталь,  $\sigma_{\text{впр}} = 90 \text{ кг/мм}^2$ ; 3 — углеродистая сталь;  $\sigma_{\text{впр}} = 50 \div 70 \text{ кг/мм}^2$ .



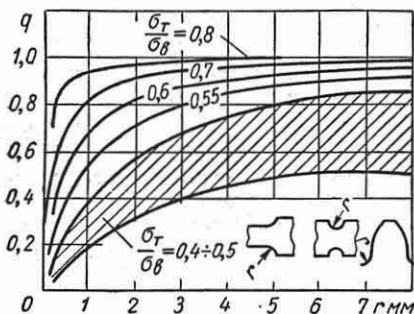
Фиг. 43. Значения  $k_\sigma$  при растяжении — сжатии и изгибе прямоугольной пластины с отверстием (кривые 1 и 2).

экспериментальных данных, значения  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  можно приближенно вычислять по формулам

$$k_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1);$$

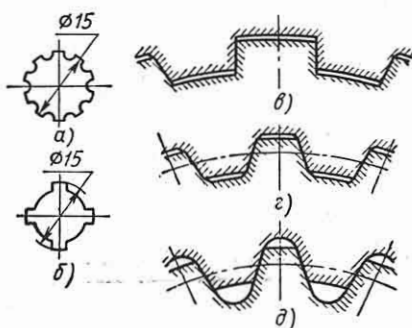
$$k_\tau = 1 + q(\alpha_\tau - 1),$$

где  $q$  — коэффициент чувствительности металла к концентрации напряжений (зависящий также от распределения напряжений), значения которого представлены на фиг. 44.



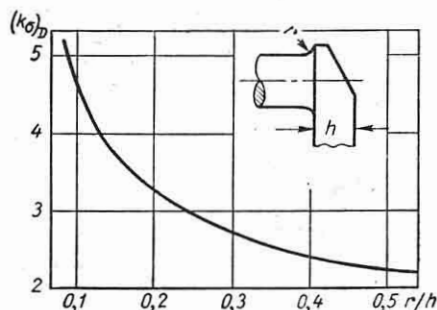
Фиг. 44. Значения коэффициента чувствительности металла к концентрации напряжений.

Коэффициенты концентрации для свободных шлицевых валов представлены на фиг. 45.



Фиг. 45. Значения  $k_\tau$  и  $\alpha_\tau$  для шлицевых соединений: а — сталь,  $\sigma_{0.2} = 80 \text{ кг/мм}^2$ ,  $k_\tau = 1,09$ ; б — сталь,  $\sigma_{0.2} = 30 \text{ кг/мм}^2$ ,  $k_\tau = 1,92$ ; в —  $\alpha_\tau = 2,5 \div 3,2$ ; г — эвольвентный профиль,  $\alpha_\tau = 1,2 \div 1,5$ .

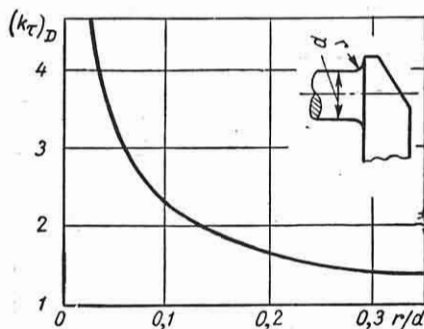
Значения  $(k_\tau)_D$  для галтели у шейки коленчатого вала при изгибе представлены на фиг. 46, значения  $(k_\sigma)_D$  для



Фиг. 46. Значение  $(k_\sigma)_D = \frac{k_\sigma}{\epsilon_\sigma}$  для случая изгиба шейки коленчатого вала при  $d = 40 \div 70 \text{ мм}$ .

галтели коленчатого вала при кручении шейки — на фиг. 47.

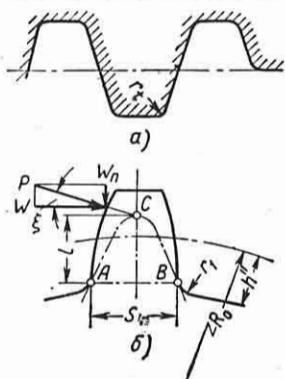
Обозначения размеров зуба шестерни представлены на фиг. 48, на которой обозначено: а — инструментальная рейка; б — зуб шестерни; А и В — точки касания параболы равного сопротивления АСВ с точками контура зуба шестерни; С — точка пересечения линии действия силы с осью симметрии зуба;  $S = AB$  — толщина основания зуба в опасном сечении;  $l$  — расстояние от точки С до линии АВ



Фиг. 47. Значение  $(k_t)_D = \frac{k_t}{\epsilon_t}$  для случая кручения шейки коленчатого вала при  $d = 40 + 70$  мм.

(плечо действия изгибающей силы);  $r_f$  — радиус закругления вершины зуба инструмента;  $m$  — модуль зацепления;  $z$  — число зубьев шестерни.

Значения  $\alpha_\sigma$  для некорригированных стандартных шестерен эвольвентного профиля с углом зацепления  $\alpha = 20^\circ$  при расчете по напряжениям на стороне



Фиг. 18. Обозначения размеров зуба шестерни.

растяжения и при приложении нагрузки к вершине зуба можно вычислять по формулам:

а) при обработке методом обкатывания — по формуле Цехновича

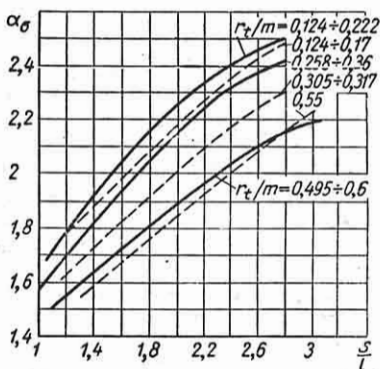
$$\alpha_\sigma = 1,65 - \frac{2,5}{z};$$

б) при обработке методом копирования — по формуле Тимошенко

$$\alpha_\sigma = 1 + 0,15 \frac{S}{r_f},$$

где  $r_f$  — минимальный радиус кривизны выкружки зуба, который можно принять равным  $r_f$ .

На фиг. 49 представлены значения  $\alpha_\sigma$  для шестерен эвольвентного профиля в зависимости от отношения  $\frac{S}{l}$  для различных  $\frac{r_f}{m}$  (по данным поляризационно-оптических измерений); указанные коэффициенты  $\alpha_\sigma$  относятся к на-



Фиг. 49. Значения  $\alpha_\sigma$  при изгибе зуба шестерни:  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\tau = 20 + 80$ .

пряжениям на стороне растяжения, вычислены с учетом напряжений сжатия от радиальной составляющей силы и соответствуют различным точкам приложения силы по высоте зуба (т. е. различным отношениям  $\frac{S}{l}$ ).

Эффективные коэффициенты концентрации  $k_\sigma$  подсчитываются по коэффициенту чувствительности металла к концентрации напряжений, значения которого для стали следует выбирать по фиг. 44.

Значения эффективных коэффициентов концентрации для валов со шпоночными пазами представлены в табл. 18 для изгиба и в табл. 19 — для кручения. При использовании значений  $k_\sigma$  и  $k_\tau$ , приведенных в табл. 18 и 19, номинальные напряжения следует вычислять по нетто-сечению. Данные таблицы относятся как к валам с одной шпонкой, так и к валам с двумя шпонками.

При наличии детали, напрессованной на вал со шпонкой, следует вычислять номинальные напряжения по нетто-се-

Таблица 18

Значения  $k_\sigma$  для валов с двумя или одним шпоночным пазом

$\sigma_{\sigma p}$ в $\text{кг/мм}^2$	50	75	100
$k_\sigma$	1,5	1,75	2,0

Таблица 19

Значения  $k_\tau$  для валов с двумя или одним шпоночным пазом

$\sigma_{\tau p}$ в $\text{кг/мм}^2$	60	70	80	90	100
$k_\tau$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

чению, а за коэффициент концентрации брать  $k_\sigma$  для напрессовки или для шпонки в зависимости от того, какой коэффициент больше.

В табл. 20 приведены значения коэффициентов концентрации  $k_\sigma$  для болтовых соединений при растяжении — сжатии в зависимости от предела прочности.

Таблица 20

Значения  $k_\sigma$  для болтовых соединений при растяжении — сжатии для  $d = 12 \text{ мм}$

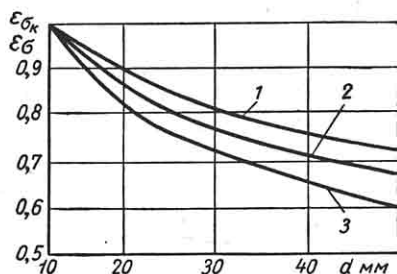
$\sigma_{\sigma p}$ в $\text{кг/мм}^2$	Метрическая резьба	Дюймовая резьба
40	3,0	2,2
60	3,9	2,9
80	4,8	3,5
100	5,2	3,8

**Чугунные детали.** Значения коэффициентов, характеризующих влияние абсолютных размеров при изгибе и кручении для чугуна, представлены на фиг. 50 и 51.

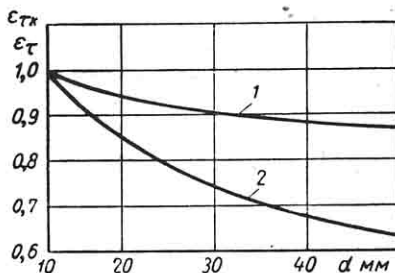
Эффективные коэффициенты концентрации напряжений для чугунных валов с поперечным отверстием при знакопеременном изгибе определяются по фиг. 52, поправочный коэффициент в зависимости от предела прочности дан на фиг. 53 и при знакопеременном кручении — по фиг. 54. Эти значения отнесены к пределам выносливости на гладких валах соответствующего диаметра.

Значения  $k_\sigma$  при изгибе для валов с кольцевой канавкой определяются по

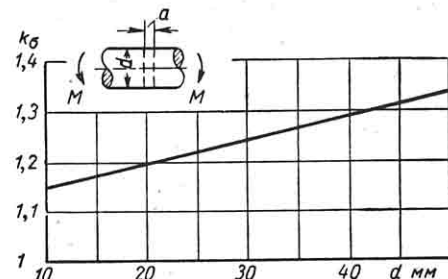
фиг. 55, с учетом поправки на отношение  $\frac{D-d}{D}$  — по фиг. 56 и для сопряжения стенок под углом — по фиг. 57.



Фиг. 50. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров сечения  $\epsilon_\sigma$  и  $\epsilon_{\sigma k}$  для чугунных валов при изгибе: 1 — вал без концентрации напряжений; 2 — вал с небольшой концентрацией ( $k_\sigma \leq 1,2$ ); 3 — вал с резкой концентрацией ( $k_\sigma > 1,2$ ).

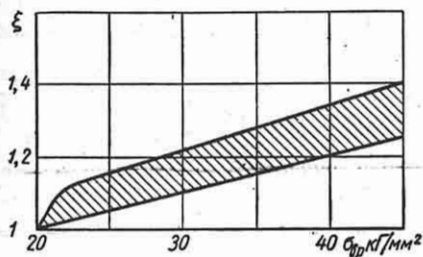


Фиг. 51. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров сечения  $\epsilon_\tau$  и  $\epsilon_{\tau k}$  для чугунных валов при кручении: 1 — вал без концентрации напряжений; 2 — вал с концентрацией напряжений.

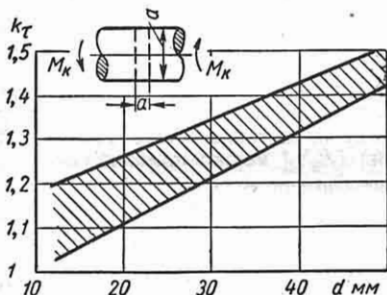


Фиг. 52. Значение  $k_\sigma$  для чугунных валов с поперечным отверстием при изгибе:  $k_\sigma = \frac{M}{W_{\text{нетто}}}$ ; материал — серый чугун;  $\sigma_{\sigma p} = 20 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\frac{a}{d} = 0,1 + 0,15$ .



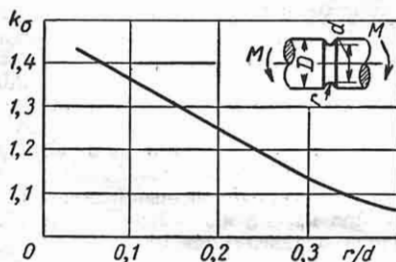


Фиг. 53. Поправочный коэффициент на пределе прочности к фиг. 52. Верхняя граница соответствует высоколегированному чугунам, нижняя — малолегированным чугунам.



Фиг. 54. Значения  $k_{\tau}$  для чугунных валов с поперечным отверстием при кручении:  $\tau_n = \frac{M_K}{W_{р\text{нетто}}}$ ;

серый чугун;  $\sigma_{sp} = 22 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\frac{a}{d} = 0,1$ .



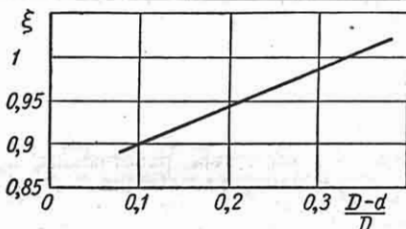
Фиг. 55. Значения  $k_{\sigma}$  для чугунных валов с кольцевой выточкой при изгибе:  $\frac{D-d}{D} = 0,33$ ,  $a = 8 \text{ мм}$ , серый чугун,  $\sigma_{sp} = 29 \text{ кг/мм}^2$ .

Значения эффективных коэффициентов концентрации для некоторых конструктивных форм при различных схемах приложения переменной нагрузки для чугуна представлены в табл. 21.

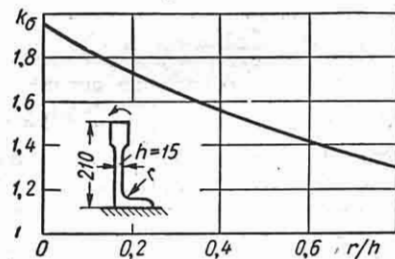
Таблица 21  
Значения  $k_{\sigma}$  для деталей из чугуна

Форма и размеры детали	Схема нагружения	$k_{\sigma}$	
	Обработка способом обкатки	Изгиб	1,2
	Обработка способом копания		1,3
	Коленчатый вал автомобильного двигателя	Изгиб	2—2,5*
		Кручение	2—3*
	Изгиб	$d = 12 \text{ мм}$	1,15
		$d = 50 \text{ мм}$	1,25
	Растяжение — сжатие	1,1—1,4*	

\* Меньшие значения  $k_{\sigma}$  из указанных интервалов соответствуют серым чугунам, большие значения — легированным чугунам.

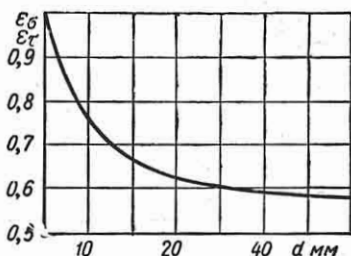


Фиг. 56. Поправочный коэффициент  $\xi$  на отношение  $\frac{D-d}{D}$  к фиг. 55:  $k'_{\sigma} = \xi k_{\sigma}$ ;  $k'_{\sigma}$  — коэффициент концентрации при заданном отношении  $\frac{D-d}{D}$ ;  $k_{\sigma}$  — коэффициент концентрации при  $\frac{D-d}{D} = 0,33$ .



Фиг. 57. Значения  $k_{\sigma}$  для входящего угла при изгибе. Чугун,  $\sigma_{sp} = 29 \text{ кг/мм}^2$ .

Детали из легких сплавов. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров при изгибе и кручении для легких сплавов представлены на фиг. 58. Значения  $\epsilon_0$  при отсутствии и при наличии концентрации можно полагать одинаковыми. Значения эффективных коэффициентов концентрации  $k_0$  и коэффициентов чувствительности  $q$  для



Фиг. 58. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров сечения при изгибе и кручении образцов без концентрации напряжений  $\epsilon_\sigma$ ,  $\epsilon_\tau$  и при ее наличии  $\epsilon_{\sigma K}$ ,  $\epsilon_{\tau K}$  для легких сплавов.

легких сплавов при знакопеременном изгибе и растяжении — сжатии для некоторых конструктивных форм приведены в табл. 22.

Эффективные коэффициенты концентрации при растяжении — сжатии, приведенные в таблице, определялись путем испытания образцов, работающих при асимметричном растяжении ( $r > 0$ ), и вычислялись по отношению амплитуд напряжения циклов с равными коэффициентами асимметрии. В табл. 22 приняты следующие обозначения:

для нагрузок: I — знакопеременный изгиб; II — растяжение;

для материалов: А — магниевые литейные сплавы: сплав типа МЛ4, а также сплав с 9% Al, 0,1% Mn;  $\sigma_{вр} = 14 \div 27$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,32 \div 0,42$  (редко

0,5) (указанное отношение определено на базе 100 млн. циклов);  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,2 \div 0,3$

(редко 0,4 — база 500 млн. циклов); Б — магниевые деформируемые сплавы типа МА2, МА3, МА5;  $\sigma_{вр} = 21 \div 35$  кг/мм<sup>2</sup>;

$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,28 \div 0,48$  — база 100 млн. циклов; В — алюминиевые литейные сплавы типа АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9;  $\sigma_{вр} = 14 \div$

$\div 36$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,17 \div 0,38$  — база

100 млн. циклов; Г — алюминиевый литейный сплав с 10% Cu, 1,2% Fe, 0,2% Mg;  $\sigma_{вр} = 19$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,3 \div 0,38$  — база

100 млн. циклов; Д — алюминиевые деформируемые сплавы типа Д16, АК2, АК8;  $\sigma_{вр} = 21 \div 48$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} =$

$= 0,2 \div 0,4$  — база 100—500 млн. циклов.

Меньшие значения коэффициентов чувствительности и эффективных коэффициентов концентрации  $k_0$  из интервалов, представленных в табл. 22, соответствуют обычно меньшим значениям отношения  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}}$ . Исключение из этого правила составляют 10—20% случаев.

Для случаев концентрации напряжений, не представленных в табл. 22, значения  $(k_0)_{d_0}$  можно приблизительно определить по формуле

$$(k_0)_{d_0} = 1 + q(\alpha_0 - 1),$$

где  $(k_0)_{d_0}$  — эффективный коэффициент концентрации для образца диаметром  $d_0$ ;  $\alpha_0$  — коэффициент концентрации при упругом напряженном состоянии (см. гл. XIII);  $q$  — коэффициент чувствительности металла к концентрации напряжений.

При выборе величины  $q$  в этом случае следует использовать значения, представленные в табл. 22, выбирая из таблицы случай, аналогичный заданному. Основными условиями близости сравниваемых случаев являются подобие силовой схемы, конфигурации образца, близость абсолютных размеров и коэффициентов концентрации при упругом напряженном состоянии.

Значения пределов выносливости детали при изгибе и кручении для легких сплавов определяются по формулам

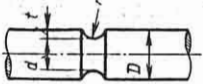
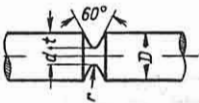
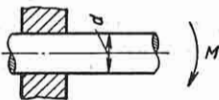
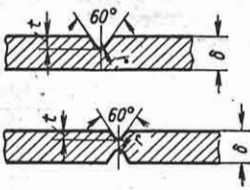
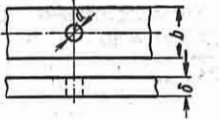
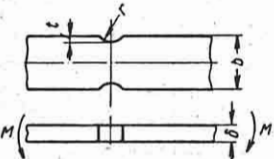
$$(\sigma_{-1}, \kappa)_D = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(k_0)_D} = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0} \epsilon_{\sigma K}}{(k_0)_{d_0}};$$

$$(\tau_{-1}, \kappa)_D = \frac{(\tau_{-1})_{d_0}}{(k_\tau)_D} = \frac{(\tau_{-1})_{d_0} \epsilon_{\tau K}}{(k_\tau)_{d_0}}.$$

Для примера определим эффективный коэффициент концентрации напряжений  $(k_0)_D$  у края отверстия во фланце

Таблица 22

Значения  $q$  и  $k_\sigma$  для образцов из легких сплавов

Эскизы образцов	Размеры образцов	Тип нагрузки	$\alpha_\sigma$	Материал	$q$	$k_\sigma$
	$d = 8 \text{ мм}$ $\frac{D}{d} = 1,25 \div 1,5$	I	$\sim 2$	А Б В Г Д	0,4–1 0,7–1 0–0,3 0,8–0,9 0,7–1	1,4–2 1,7–2 1–1,3 1,8–1,9 1,5–2
	$\frac{r}{d} = 0,1 \div 0,12$	II	$\sim 2$	А Б В Д	0,4–0,8 0,7–1 0,3–0,8 0,6–0,8	1,4–1,8 1,7–2 1,3–1,8 1,6–1,8
	$d = 8 \text{ мм}$ $\frac{D}{d} = 1,02 \div 1,6$ $r = 0,05 \text{ мм}$ $\frac{r}{d} = 0,006$ $\frac{t}{r} = 4 \div 4,5$	I	4,5–6	А Б В Д	0,2–0,6 0,3–0,6 0–0,1 0,05–0,4	1,8–4,3 1,9–2,5 1–1,4 1,1–2,6
	$d = 70 \text{ мм}$	I	—	Б	—	2,3–3
	$r = 0,02 \div 0,05 \text{ мм}$ $\frac{t}{r} = 3 \div 15$ $\frac{r}{\delta} = 20$	I и II	4–7	Б, Д	0–0,2	1,2
	$b = 40 \text{ мм}$ $d = 1 \div 6 \text{ мм}$ $\delta = 1,5 \div 5 \text{ мм}$	I	1,6–2,5	Б, Д	0,2–0,5	1,3–1,8
		II	2,5–3	Б, Д	0,1–0,1	1,2–1,8
	$b = 12 \text{ мм}$ $r = 1,6 \text{ мм}$ $\delta = 0,5 \text{ мм}$	I	2	Б, Д	0,5–1	1,5–2

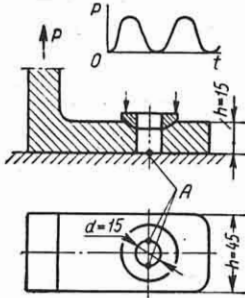
(точка А), подверженном пульсирующему изгибу (фиг. 59). Материал фланца — сплав АК2.

Аналогичный случай, соответствующий типу нагрузки 1 см. табл. 22.

Для сплава АК2 среднее значение отношения  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,24$ . Считаем, что  $q =$

$= 0,2$  соответствует отношению  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,2$ ,

а  $q = 0,5$  — отношению  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,4$ .



Фиг. 59.

Интерполируя значение  $q$  для  $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{вр}} = 0,24$  в указанных пределах, находим  $q = 0,26$ .

Теоретический коэффициент концентрации  $\alpha_0$  для данного случая можно определить по данным гл. XIII (стр. 407—412) для  $\frac{d}{b} = \frac{15}{45} = 0,33$  и  $\frac{b}{h} = \frac{45}{16} \approx 3$ ; имеем  $\alpha_0 = 1,7$ .

Эффективный коэффициент концентрации  $(k_0)_{d_0}$  определяем по формуле

$$(k_0)_{d_0} = 1 + q(\alpha_0 - 1) = 1 + 0,20(1,7 - 1) = 1,18.$$

Для учета влияния абсолютных размеров сечения можно воспользоваться фиг. 58, полагая зависимость для плоских образцов аналогичной зависимости для круглых (из-за отсутствия иных данных). По фиг. 58 для  $h = 15$  мм находим  $\epsilon_{ок} = 0,66$ .

Эффективный коэффициент концентрации с учетом влияния абсолютных размеров  $(k_0)_D$  определяем для данного случая по формуле

$$(k_0)_D = \frac{(k_0)_{d_0}}{\epsilon_{ок}} = \frac{1,18}{0,66} = 1,8.$$

Примечание. Использовать представленные выше данные для чугунов и легких сплавов можно лишь в приближенных, предварительных расчетах, так как эффективные коэффициенты концентрации для чугунов и легких сплавов в сильной степени зависят от большого количества факторов, не учтенных приведенными графиками и таблицами (химический состав, особенности термической обработки, технологии изготовления, однородность металла и т. д.).

### Влияние состояния поверхности и поверхностного слоя на выносливость деталей

[15], [16], [19], [22], [23], [32], [33], [38], [40], [44]

Данные о влиянии состояния поверхности и свойств поверхностного слоя на предел выносливости выражены коэффициентом  $\beta$ , равным отношению предела выносливости при наличии каких-либо факторов, связанных с состоянием слоя, к пределу выносливости при их отсутствии.

Предел выносливости с учетом указанных факторов определяется по формуле

$$(\sigma_{-1})'_d = (\sigma_{-1})_d \beta,$$

где  $(\sigma_{-1})'_d$  — предел выносливости детали, определенный с учетом абсолютных размеров, состояния поверхности, влияния коррозии и поверхностного упрочнения;  $(\sigma_{-1})_d$  — предел выносливости детали, определенный с учетом только абсолютных размеров;  $\beta$  — коэффициент, учитывающий влияние состояния поверхности, коррозии и поверхностного упрочнения деталей машин.

При определении величины коэффициента  $\beta$  следует использовать данные тех экспериментов, условия проведения которых соответствуют заданному случаю. При этом особенно важными параметрами являются абсолютные размеры и конфигурация детали, уровень концентрации напряжения, свойства материала, параметры технологии.

Приведенные данные могут быть использованы лишь для предварительной приближенной оценки возможного повышения предела выносливости в случае применения поверхностного упрочнения.

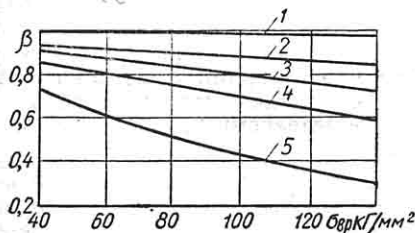
Для определения оптимальных параметров технологии упрочнения и соответствующих характеристик выносливости следует производить специальные эксперименты, так как известны случаи, когда неправильная технология вызывает

не повышение, а понижение прочности. Например, выход незакаленной сердцевины на поверхность детали в зоне повышенных напряжений при поверхностной закалке или цементации, наличие остаточного аустенита или цементитной сетки в поверхностном слое после цементации, дефекты шлифования после цементации (ожоги, шлифовальные трещины и т. п.) могут вызвать понижение предела выносливости до 50% (т. е.  $\beta = 0,5$ ).

При использовании приведенных данных следует также учесть, что с ростом абсолютных размеров деталей эффект упрочнения понижается, поэтому как наиболее надежные рекомендуется использовать данные, полученные на образцах большего размера или на деталях натуральной величины.

### Влияние обработки поверхности на предел выносливости металлов

Коэффициенты  $\beta$ , равные отношению предела выносливости при данной обработке поверхности к пределу выносливости при тщательном полировании для гладких стальных образцов, представлены (в зависимости от предела прочности) на фиг. 60.



Фиг. 60. Влияние качества обработки поверхности на предел выносливости стальных образцов при изгибе с вращением: 1 — зеркальное полирование; 2 — грубое полирование или тонкое шлифование; 3 — тонкая обточка; 4 — грубое шлифование или грубая обточка; 5 — наличие окалины.

При наличии концентрации напряжений, влияние которой на предел выносливости характеризуется эффективным коэффициентом концентрации  $k_{\sigma}$ , совместное влияние концентрации и качества обработки поверхности оценивается по формуле

$$(k_{\sigma})'_D = (k_{\sigma})'_D + (k_n - 1), \text{ где } k_n = \frac{1}{\beta};$$

$(k_{\sigma})'_D$  — эффективный коэффициент концентрации, не учитывающий влияния качества поверхности.

Предел выносливости в связи с влиянием концентрации напряжений и качества поверхности составит

$$(\sigma_{-1})_{k,n} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_D}$$

При обезуглероживании поверхности стальных образцов в среднем  $\beta = 0,6$  при  $\sigma_{вр} = 90 \text{ кг/мм}^2$  и  $\beta = 0,3$  при  $\sigma_{вр} = 150 \text{ кг/мм}^2$ .

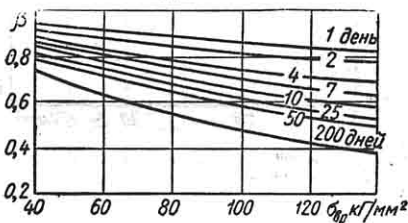
Для лабораторных образцов, выточенных из дуралюмина, коэффициент  $\beta = 0,85 \div 0,9$ ; для образцов, выточенных из магниевых сплавов,  $\beta = 0,7 \div 0,8$ ; для деталей из легких сплавов, содержащих на поверхности литейную корку, окалину и другие дефекты от прессования или прокатки,  $\beta = 0,5 \div 0,75$ ; при обдувке песком или шабровке литейной или прокатной корки  $\beta = 0,8 \div 1$ ; при травлении корки после обдувки песком или шабровки  $\beta = 0,85 \div 1$ .

Некоторые виды маркировки резко снижают выносливость деталей машин. Например, маркировка клейменном образцов толщиной 4 мм из дуралюмина  $\sigma_{вр} = 47 \text{ кг/мм}^2$  или из электрона  $\sigma_{вр} = 28 \text{ кг/мм}^2$  снижает их предел выносливости на 30%.

При написании цифр электрокарандашом коэффициент  $\beta$  для стали, дуралюмина и электрона соответственно составит 0,88, 0,8 и 0,57. Вытравливание цифр не снижает предела выносливости образцов из указанных выше материалов.

### Влияние коррозии на предел выносливости металлов

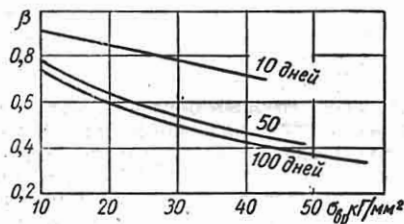
Коэффициенты  $\beta$ , характеризующие понижение предела выносливости от воздействия коррозии до испытания,



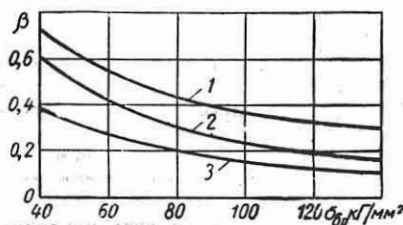
Фиг. 61. Влияние коррозии, имевшей место до испытания на усталость, на предел выносливости стальных образцов.

в зависимости от предела прочности  $\sigma_{вр}$  представлены на фиг. 61 для стали и на фиг. 62 для алюминиевых сплавов.

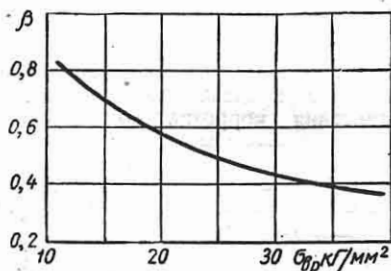
Цифры на кривых показывают количество дней, в течение которых образец подвергался воздействию коррозионной среды до испытания на выносливость. Кривые на фиг. 62 и 63 построены по испытаниям при изгибе с вращением



Фиг. 62. Влияние коррозии, имевшей место до испытания на усталость, на предел выносливости образцов из алюминиевых сплавов.



Фиг. 63. Влияние коррозии в процессе испытания на предел выносливости стальных образцов при изгибе с вращением: 1 — пресная вода, наличие концентрации напряжений; 2 — пресная вода, отсутствие концентрации, морская вода, наличие концентрации; 3 — морская вода, отсутствие концентрации.



Фиг. 64. Влияние коррозии в пресной воде, имеющей место во время испытаний, на предел выносливости чугунных образцов при изгибе и при кручении.

на базе 10 млн. циклов при коррозии в воде.

Коэффициенты  $\beta$ , характеризующие понижение предела выносливости от воздействия коррозионной среды в процессе испытания, в зависимости от пре-

дела прочности представлены на фиг. 63 для стали и на фиг. 64 для чугуна.

Кривые на фиг. 61—64 построены по результатам испытаний лабораторных образцов малого диаметра ( $d = 7 \div 10$  мм). С увеличением абсолютных размеров сечений следует ожидать еще большего снижения выносливости вследствие коррозии.

При коррозии образцов малого диаметра из легких сплавов, происходящей в процессе испытания на выносливость, коэффициент  $\beta = 0,3 \div 0,5$  (база  $N = 5 \cdot 10^7$  циклов,  $n = 2000 \div 3000$  об/мин).

### Влияние поверхностной обработки на предел выносливости, определяемый в условиях коррозии

Коэффициенты  $\beta$ , равные отношению предела выносливости образца, подвергнутого поверхностной обработке и испытанного затем в коррозионной среде, к пределу выносливости образца, не подвергнутого поверхностной обработке и испытанного при отсутствии воздействия коррозии, представлены в табл. 23 для различного рода электролитических покрытий и для других способов поверхностной обработки (азотирование, металлизация алюминием, обкатка роликом и т. д.).

### Влияние поверхностных покрытий на предел выносливости, определяемый на воздухе

Значения  $\beta$  для образцов, подвергнутых электролитическому покрытию никелем и хромом, оксидированию, металлизации алюминием и диффузионному цинкованию, представлены в табл. 24.

### Влияние упрочнения поверхностного слоя на сопротивление усталости

Применение упрочнения поверхностного слоя дает значительное повышение сопротивления усталости.

Методы упрочнения:

- наклеп поверхностного слоя путем накатки роликом, обдужки дробью и т. п.;
- химико-термические методы — азотирование, цементация, цианирование;
- термический — поверхностная закалка токами высокой частоты или газовым пламенем.

Упрочняющее влияние указанных обработок связано с увеличением прочности поверхностного слоя и созданием

Таблица 23

Влияние методов антикоррозионной защиты на предел выносливости, определяемый в условиях коррозии \*

Материал	Метод антикоррозионной защиты	База испытания, число оборотов в минуту	Коэффициент $\beta$	Примечание
Углеродистые стали 0,3—0,5% С	Гальваническое покрытие	$N = 10^7$ ; $n = 1500$ об/мин	0,25—0,45	Толщина слоя 5—15 мк
		$N = 10^7$ ; $n = 1500$ об/мин	0,8—0,95	Толщина слоя 15—30 мк
То же	Металлизация	$N = 2 \cdot 10^7$ ; $n = 2200$ об/мин	0,8	Толщина слоя 50 мк
.	Обкатка роликом	$N = 10^7$ ; $n = 1500$ об/мин	1,0 **	—
Азотируемые стали CrNiMo, $\sigma_{вр} = 70 + 20 \text{ кг/мм}^2$	Азотирование	$N = 10^7 + 10^8$	1,2—1,4 **	—
	Гальваническое покрытие + лак	$N = 5 \cdot 10^7$ ; $n = 2000$ об/мин	0,65—0,60	—
Дуралюмин	Плакировка алюминием	$N = 5 \cdot 10^7$ ; $n = 2000$ об/мин	0,55	Толщина слоя 75 мк
	Анодное оксидирование + лак из синтетической резины	$N = 5 \cdot 10^7$ ; $n = 2000$ об/мин	1,0	—
	Покрyтие ланолином	$N = 5 \cdot 10^7$ ; $n = 2000$ об/мин	0,5	—

\* Данные, приведенные в таблице, получены на образцах диаметром 8—10 мм без концентрации напряжений, нагружаемых изгибом с вращением.  
 \*\* Цифры соответствуют испытанию в пресной воде, цифры без звездочек — испытанию в 3%ном растворе NaCl.

Таблица 24

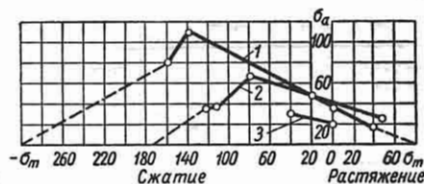
Влияние поверхностных покрытий на предел выносливости \*

Металл	Тип покрытия	Металл слоя покрытия	Толщина слоя в мм	$\beta$
Углеродистые и малолегированные конструкционные стали; $\sigma_{вр} = 60 + 100 \text{ кг/мм}^2$	Гальваническое	Ni Cr	0,03—0,1 0,03—0,2	0,65—1 0,65—0,90
Магниеые деформируемые и литейные сплавы $\sigma_{вр} = 12 + 28 \text{ кг/мм}^2$	.	Cr	—	0,6—0,75
Среднеуглеродистая сталь	Оксидирование	—	—	1
	Металлизация	Al	0,051	1
	Диффузионное насыщение	Zn	0,013	0,9

\* Данные, приведенные в таблице, соответствуют случаю изгиба с вращением. Величины  $\beta$  определялись на гладких образцах с надрезом диаметром от 8 до 18 мм.

в нем значительных остаточных напряжений сжатия.

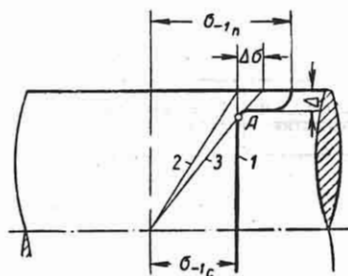
Предельная амплитуда напряжений при наличии средних напряжений сжатия, как правило, выше предела выносливости при симметричном цикле, что вытекает из характера диаграмм предельных напряжений при асимметричном цикле, представленных на фиг. 65.



Фиг. 65. Диаграмма пределов выносливости при растяжении — сжатии: 1 — азотированный слой; 2 — улучшенная хромоникелевая сталь; 3 — нормализованная сталь 25.

Повышение прочности поверхностного слоя и влияние остаточных сжимающих напряжений приводят к повышению предельных амплитуд напряжений металла (соответствующих пределам выносливости) в поверхностных слоях. Это повышение следует рассматривать в связи с распределением напряжений и характеристиками прочности в зонах возможного разрушения [23], [33].

Распределение предельных амплитуд напряжений (пределов выносливости) по сечению представлено на фиг. 66



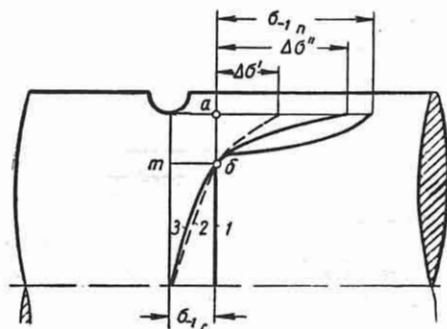
Фиг. 66. Схема, поясняющая повышение выносливости при поверхностном упрочнении.

кривой 1, где  $(\sigma_{-1})_n$  — предел выносливости металла поверхностного слоя (с учетом положительного влияния остаточных сжимающих напряжений в нем);  $(\sigma_{-1})_c$  — предел выносливости металла сердцевин (с учетом ослабляющего

влияния остаточных, растягивающих напряжений в сердцевине).

При отсутствии упрочнения зарождение усталостной трещины началось бы у поверхности при максимальных напряжениях, равных  $(\sigma_{-1})_c$ . Кривая 2 на фиг. 66 представляет собой эпюру напряжений от внешней нагрузки при изгибе, соответствующую случаю отсутствия упрочнения.

При наличии упрочнения зарождение усталостной трещины произойдет в точке, в которой эпюра рабочих напряжений (кривая 3) пересечется с пределом выносливости (кривой 1), т. е. у точки А. Максимальные напряжения на поверхности при этом оказываются повышенными по сравнению с пределом выносливости сердцевин на величину  $\Delta\sigma$ , определяющую эффект упрочнения.



Фиг. 67. Схема, поясняющая влияние уровня концентрации и градиента напряжений на эффект поверхностного упрочнения.

В связи с тем, что зарождение усталостной трещины может быть при этом перенесено в подслоиную область, вредное влияние дефектов поверхности может быть устранено.

Увеличение глубины упрочненного слоя  $\Delta$  приводит к повышению эффекта упрочнения до того момента, когда величина  $\Delta\sigma$  становится равной  $(\sigma_{-1})_n - (\sigma_{-1})_c$ , после чего разрушение вновь переходит на поверхность.

При наличии концентрации напряжений помимо глубины слоя и абсолютных размеров существенное влияние на эффект упрочнения оказывает уровень концентрации напряжений и градиент напряжений у поверхности. На фиг. 67 дано сравнение эффекта упрочнения для образцов с двумя уровнями концентрации и градиентами напряжений. Кри-



вая 1 характеризует распределение предельных амплитуд напряжений (пределов выносливости) по сечению; кривая 2 является эпюрой рабочих напряжений для образца с меньшим коэффициентом концентрации напряжений и меньшим градиентом и кривая 3 — для образца с большим уровнем концентрации и большим градиентом.

При данном расположении кривых зарождение усталостной трещины происходит в подложной области у точки б. Из фиг. 67 видно, что эффект упрочнения при большем коэффициенте концентрации, определяемый величиной  $\Delta\sigma''$ , оказывается более высоким, чем величина  $\Delta\sigma'$ , соответствующая меньшему уровню концентрации и градиенту напряжений.

В приведенных далее графиках и таблицах даны коэффициенты  $\beta$ , равные отношению предела выносливости упрочненного образца к пределу выносливости неупрочненного, полированного или тщательно шлифованного образца, имеющего те же размеры и ту же конфигурацию. При использовании коэффициентов упрочнения влияние состояния поверхности не учитывается, так как оно учтено в коэффициенте упрочнения. В табл. 25 представлены значения  $\beta$  для образцов, подвергнутых поверхностной закалке токами высокой частоты (испытания при изгибе с вращением).

В табл. 26 представлены значения коэффициентов  $\beta$  для азотированных, цементованных и цианированных образцов и деталей.

Таблица 25

Влияние поверхностной закалки токами высокой частоты на предел выносливости \*

Материал	Тип образцов	Диаметр образца $d$ в мм	$\beta$
Углеродистые и легированные конструкционные стали	Без концентрации напряжений	7—20	1,3—1,6
		30—40	1,2—1,5
	С концентрацией напряжений	7—20	1,6—2,8
		30—40	1,5—2,5
Чугун	Гладкие образцы с концентрацией напряжений	18	1,15

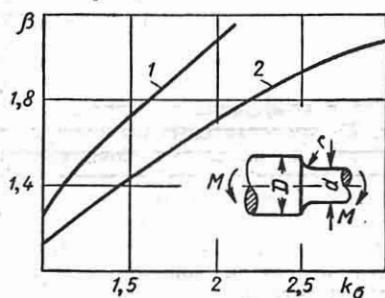
\* Данные, приведенные в таблице, соответствуют случаю изгиба с вращением. Толщина закаленного слоя 0,9—1,5 мм.

Таблица 26

Влияние химико-термической обработки на предел выносливости

Наименование процесса химико-термической обработки	Тип образца	Диаметр образца $d$ в мм	$\beta$
Азотирование при глубине слоя 0,1—0,4 мм, твердость слоя $H_R = 730 + 970$	Без концентрации напряжений	8—15	1,15—1,25
		30—15	1,10—1,15
	С концентрацией напряжений (поперечное отверстие, надрез)	8—15	1,9—3
		30—40	1,3—2
Цементация при толщине слоя 0,2—0,6 мм	Без концентрации напряжений	8—15	1,2—2,1
		30—40	1,10—1,5
	При наличии концентрации напряжений	8—15	1,5—2,5
		30—40	1,2—2
Цианирование при толщине слоя 0,2 мм	Без концентрации напряжений	10	1,8

На фиг. 68 представлены значения коэффициентов  $\beta$  для азотированных стальных образцов в зависимости от эффективного коэффициента концентрации напряжений, соответствующего неупрочненным образцам.

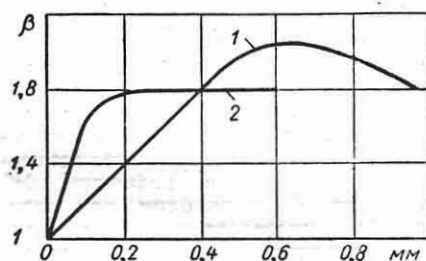


Фиг. 68. Влияние азотирования на предел выносливости ступенчатых образцов с галтелью при изгибе: 1 — глубина азотированного слоя 0,35 мм,  $d = 12,7$  мм, сталь химического состава 0,31% С, 3,25% Cr, 0,55% Mo,  $\sigma_{вр} = 100$  кг/мм<sup>2</sup>; 2 — глубина азотированного слоя 0,4—0,45 мм, диаметр образца  $d = 40$  мм, сталь ЭИ275,  $\sigma_{вр} = 120$  кг/мм<sup>2</sup>.

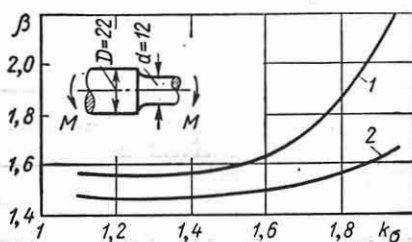
На фиг. 69 представлены значения коэффициентов  $\beta$  для цементованных и цианированных образцов в зависимости от глубины упрочненного слоя.

Значения  $\beta$  для обкатанных и наклепанных дробью валов представлены в табл. 27 (изгиб с вращением). Для наклепанных дробью пружин из нержавеющей или специальной пружинной стали (диаметр проволоки пружин  $d = 4$  мм) коэффициент  $\beta = 1,4 \div 1,6$ .

На фиг. 70 представлены значения  $\beta$  для наклепанных дробью образцов со ступенчатым изменением диаметра в зависимости от эффективного коэффициента концентрации, соответствующего неупрочненным образцам. В случае нагрева



Фиг. 69. Влияние глубины слоя на эффект упрочнения при цементации (кривая 1) и цианировании (кривая 2).



Фиг. 70. Влияние облудки дробью на предел выносливости ступенчатых образцов при изгибе с вращением; сталь 45ХН;  $\sigma_{вр} = 155$  кг/мм<sup>2</sup>: 1 — расход дробы  $Q = 10$  кг/мин, число оборотов ротора машины  $n = 3500$  в минуту; 2 —  $Q = 20$  кг/мин,  $n = 2100$  об/мин.

Таблица 27

Влияние поверхностного наклепа на предел выносливости

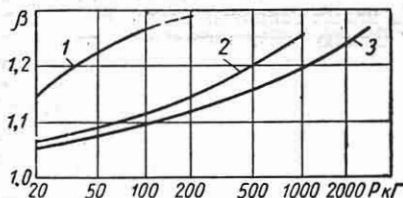
Тип стали или легкого сплава	Способ обработки	Тип образца	Диаметр образца $d$ в мм	$\beta$
Углеродистые и легированные конструкционные стали	Обкатка роликом	Без концентрации напряжений	7—20	1,2—1,4
			30—40	1,1—1,25
		С концентрацией напряжений	7—20	1,5—2,2
			30—40	1,3—1,8
	Облудка дробью	Без концентрации напряжений	7—20	1,1—1,3
			30—40	1,1—1,2
С концентрацией напряжений	7—20	1,4—2,5		
	30—40	1,1—1,5		
Алюминиевые и магниевые сплавы	То же	Без концентрации напряжений	8	1,05—1,15

детали после наклепа дробью до 200—250°С положительное влияние его почти полностью исчезает.

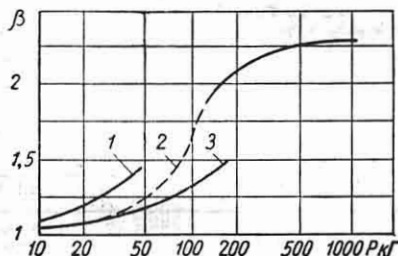
Предел выносливости образцов, подвергнутых дробеструйному наклепу, почти не зависит от предшествующей механической обработки (полирование или обточка). Поэтому в первом приближении коэффициенты табл. 27, относящиеся к полированным образцам, могут быть использованы и в том случае, когда наклеп дробью производится сразу после тонкой обточки.

### Обкатка роликом

Значения  $\beta$  для обкатанных роликом гладких валов представлены на фиг. 71, а для валов с обкатанной подступичной частью, на которую напрессована деталь, — на фиг. 72.



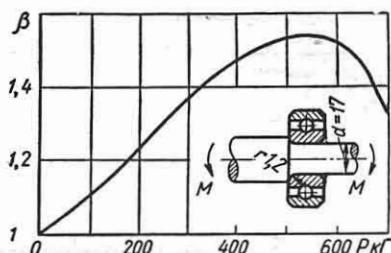
Фиг. 71. Влияние накатки роликом на предел выносливости стальных образцов без концентрации напряжений при изгибе с вращением: 1 — диаметр образца  $d = 18$  мм; 2 —  $d = 25$  мм; 3 —  $d = 50$  мм.



Фиг. 72. Влияние накатки роликом подступичной части на предел выносливости образцов с напрессовкой: 1 — сталь 40,  $d = 18$  мм; 2 — сталь 45 и сталь с 2,7% Ni,  $\sigma_{вр} = 77$  кг/мм<sup>2</sup>,  $d = 50$  мм; 3 — углеродистая сталь 0,42% С,  $\sigma_{вр} = 52$  кг/мм<sup>2</sup>,  $d = 40$  мм.

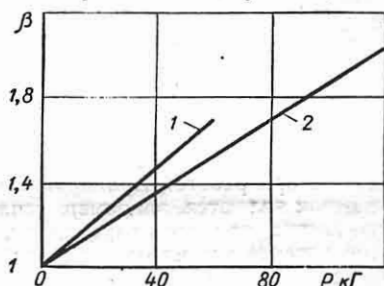
Значения  $\beta$ , указанные на фиг. 72, определены по разрушающим напряжениям. Значения  $\beta$ , определяемые по пределам выносливости, соответствующим началу образования трещины, могут быть выше.

На фиг. 73 даны значения  $\beta$  для ступенчатого вала с напрессованным подшипником качения, галтель и подступичная часть которого обкатаны роликом.

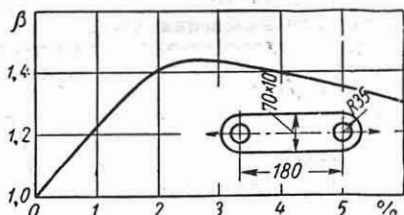


Фиг. 73. Влияние обкатки роликом галтели ступенчатого образца с напрессованным подшипником на предел выносливости; сталь химического состава 0,36% С; 0,55% Mn, 0,32% Si, 0,19% Cr;  $\sigma_{вр} = 60$  кг/мм<sup>2</sup>;  $p$  — давление на ролик при обкатке галтели и цилиндрической части; случай изгиба с вращением.

На фиг. 74 даны значения  $\beta$  для стержня из магниевого сплава (лопасть пропеллера) с напрессованной деталью с обкатанной роликом подступичной частью.

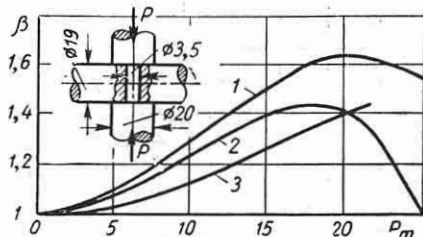


Фиг. 74. Влияние обкатки роликом подступичной части оси из магниевого сплава на ее предел выносливости. Магнийевый сплав,  $\sigma_{-1} = 12$  кг/мм<sup>2</sup>. Круглая ось  $d = 70$  мм с напрессовкой, через которую передаются сила и изгибающий момент: 1 — без прокладки; 2 — с фибровой прокладкой толщиной 8 мм.



Фиг. 75. Влияние развальцовки отверстий на предел выносливости полосы с отверстиями при растяжении — сжатии по пульсирующему циклу: сталь,  $\sigma_{вр} = 70$  кг/мм<sup>2</sup>.

На фиг. 75 представлены значения  $\beta$  для плоской полосы с развальцованным отверстием, подвергнутой пульсирующему растяжению, в зависимости от увеличения диаметра при развальцовке, в процентах.



Фиг. 76. Влияние обжима пуансоном краев отверстия на предел выносливости вала с отверстием: 1 — сталь,  $\sigma_{вр} = 55 \text{ кг/мм}^2$ , изгиб с вращением; 2 — сталь,  $\sigma_{вр} = 40 \text{ кг/мм}^2$ , изгиб с вращением; 3 — сталь,  $\sigma_{вр} = 40 \text{ кг/мм}^2$ , кручение.

На фиг. 76 представлены значения  $\beta$  для круглого образца с отверстием, обжатым плоским пуансоном.

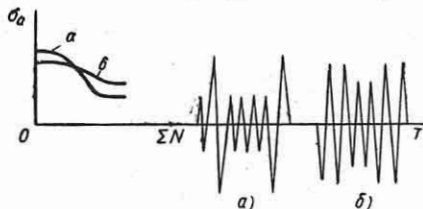
### ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОВТОРНЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯХ

[24], [27], [33], [44]\*

Повторные перенапряжения являются следствием перегрузок, возникающих в машине при работе. Примером таких перегрузок являются, например, усилия, возникающие при кратковременном, но повторяющемся увеличении сопротивлений движению машины (возрастание усилий резания в металлообрабатывающих станках, усилий при штамповке в прессах, усилий на ходовую часть автомашин и тракторов при преодолении препятствий), повторные повышенные усилия, возникающие от упругих колебаний благодаря прохождению резонансов (при изменении числа оборотов двигателей, скорости движения подвижного состава), усилия от повторных ударов и в ряде других случаев.

Переменная напряженность, возникающая в связи с повторными перегрузками, характеризуется изменяющейся по времени амплитудой. Перегрузки, вызванные случайными причинами, и соответствующие им напряжения характеризуются статистическими кривыми

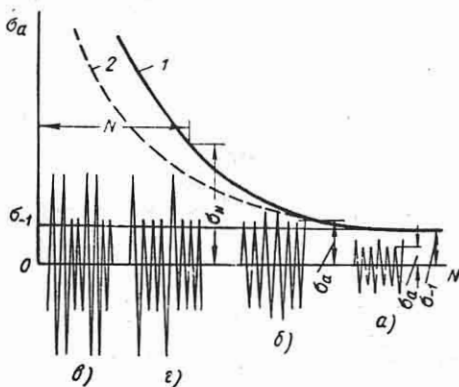
суммарной частоты. На этих кривых (фиг. 77) по оси ординат откладывается амплитуда или максимальное значение напряжений цикла, по оси абсцисс — количество повторений напряжений данной величины или больших ее. Типичными кривыми перегрузочных напряже-



Фиг. 77. Суммарные статистические кривые частоты.

ний являются кривые, соответствующие случаю действия больших перегрузок при малых основных нагрузках (схема а) и случаю незначительных перегрузок при больших основных нагрузках (схема б). На форме кривых суммарной частоты сказывается повторяемость перегрузок: чем чаще они возникают, тем больше спадание кривой в правой ее части (кривая б на фиг. 77).

Условия прочности рассматриваются применительно к четырем типичным случаям (фиг. 78, а — г).



Фиг. 78. Случай действия переменных напряжений: 1 — кривая усталости; 2 — кривая опасных перегрузок.

а) Основные переменные напряжения  $\sigma_a$  ниже предела выносливости  $\sigma_{-1}$ , повторные перенапряжения  $(\sigma_a)_{\max}$  незначительны (10—20%). Если эти перенапряжения не превышают предела вы-

\* Раздел составлен при участии Л. А. Козлова.

носливости детали, то они не снижают прочности под основными напряжениями, и определение запаса прочности производится по пределу выносливости  $n =$

$$= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}$$

В некоторых случаях допустимы перегрузки, несколько превышающие предел выносливости (на 10—20%), если они вызывают в материале наиболее напряженных мест детали эффект тренировки (увеличение сопротивления усталости). Это допущение должно основываться на данных соответствующих лабораторных испытаний при перегрузках. При наличии концентрации напряжений расчет производится с учетом ее влияния.

б) Основные переменные напряжения  $\sigma_a$  выше предела выносливости, повторные перенапряжения, превышающие  $\sigma_a$ , незначительны (10—20%). Если эти перенапряжения действуют относительно редко, то расчет таких деталей производится по ограниченному пределу выносливости  $\sigma_N$ , который соответствует необходимой долговечности (числу циклов  $N$ ):

$$n = \frac{\sigma_N}{\sigma_a}$$

Влияние концентрации напряжений учитывается так же, как в предыдущем случае.

в) Основные переменные напряжения ниже или выше предела выносливости, повторные, часто повторяющиеся перенапряжения значительны и превышают

предел выносливости. Для расчета на прочность определяется коэффициент долговечности по Д. Н. Решетову [27]

$$K = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum n_i \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_{\max}} \right)^m}$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальное значение напряжения;  $N_0$  — число циклов, соответствующее перелому кривой усталости, либо база испытаний (при отсутствии перелома);  $\sigma_i$  — перегрузочное напряжение больше предела выносливости;  $n_i$  — общее число циклов действия этого перегрузочного напряжения;  $m$  — показатель степени наклонной ветви кривой усталости.

Значения  $m$  и  $N_0$  приведены в табл. 28 для изгиба.

При наличии экспериментальных данных для деталей или подобных им моделей  $m$  следует определять непосредственно по опытным кривым усталости.

По коэффициенту долговечности вычисляется напряжение с эквивалентной постоянной амплитудой  $(\sigma_a)_g = K \sigma_{\max}$ .

По напряжению  $(\sigma_a)_g$  делается расчет на усталость, так же как и в случае „а“:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_a)_g} = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\frac{1}{N_0} \sum n_i \sigma_i^m}}$$

г) Основные переменные напряжения ниже или выше предела выносливости, редко действующие повторные перенапряжения значительны и превышают

Таблица 28

Значения показателя  $m$  и абсциссы  $N_0$  при изгибе для конструкционных сталей ( $N_0$  — число циклов, соответствующее перелому кривой усталости)

Характеристика условий испытания	$m$	$N_0$
Образцы без концентрации напряжений, полированные	9—18	1—4·10 <sup>6</sup>
Образцы с концентрацией напряжений, полированные	6—10	1—4·10 <sup>6</sup>
Вал или ось с напрессовкой	6—10	6—10·10 <sup>6</sup>
При наличии поверхностного упрочнения	18—20	1—5·10 <sup>6</sup>

Примечания: 1. Поверхностное упрочнение детали (обдувка дробью, обкатка роликами) увеличивает значение  $m$ .

2. Повышение концентрации напряжений снижает значение показателя  $m$ .

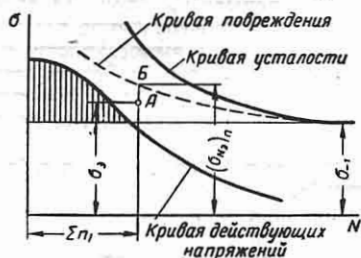
3. При отсутствии данных по значениям показателя  $m$  при кручении можно принимать в случае кручения значения, приведенные для изгиба.

4. Для контактных напряжений при касании по линии  $m' = \frac{m}{2}$  и при касании в точке

$$m' = \frac{m}{3}$$

При наличии экспериментальных данных для деталей или подобных им моделей величины  $m$  и  $N_0$  следует определять непосредственно по экспериментально полученным кривым усталости.

предел выносливости. Расчет может вестись по кривой повреждения, которая проходит левее кривой усталости и определяется перегрузочными испытаниями деталей, моделей или материала. Ординаты этой кривой, зависящие от числа циклов, обозначены  $(\sigma_N)_n$ . Суммарная кривая статистической частоты действующих напряжений наносится на график кривой повреждения (фиг. 79).



Фиг. 79.

Вычисляется значение эквивалентного перегрузочного напряжения для напряжений, превышающих предел выносливости  $\sigma_{-1}$  (заштрихованная область), по формуле

$$\sigma_3 = \sqrt[m]{\frac{\sum \sigma_i^m n_i}{N_3}}$$

действующее с числом циклов

$$N_3 = \sum n_i$$

Соответствующая точка А нанесена на фиг. 79, ее координаты позволяют определить запас прочности:

$$n = \frac{(\sigma_{N_3})_n}{\sigma_3}$$

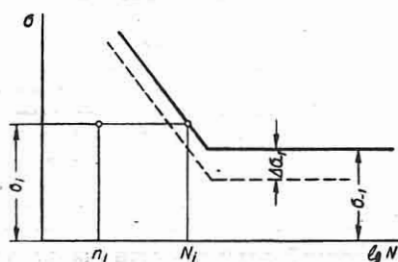
где  $(\sigma_{N_3})_n$  — ординаты кривой повреждения, соответствующие числу циклов повторения перенапряжений, превышающих предел выносливости.

В тех случаях, когда перегрузочные напряжения характеризуются статистическими кривыми распределения их вероятности  $\Phi(\sigma_i)$ , вычисление запаса прочности производится по формуле

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt[m]{\frac{N_{сум}}{N_0} \int_{\sigma_{-1}}^{\sigma_{max}} \sigma_i^m \Phi'(\sigma_i) d(\sigma_i)}}$$

где  $N_{сум}$  — общее число циклов изменения перегрузочных напряжений;  $\Phi'(\sigma_i)$  — функция плотности распределения вероятности;  $m$  и  $N_0$  — параметры кривой усталости (см. выше).

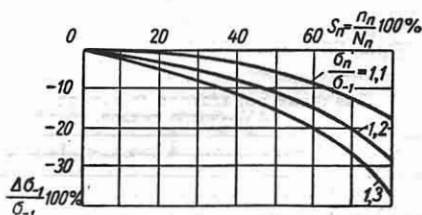
д) В тех случаях, когда основные переменные напряжения  $\sigma_a$  меньше предела выносливости, но по величине приближаются к его значению, а перегрузки выше предела выносливости, следует учитывать в расчете снижение предела выносливости от перегрузочных напряжений. Схема изменения кривой усталости в результате перегрузок представлена на фиг. 80. Предел выно-



Фиг. 80.

сливости снижается на величину  $\Delta\sigma_{-1}$  в результате действия перегрузочных напряжений.

По ряду экспериментальных данных это снижение представлено на фиг. 81.



Фиг. 81.

Предел выносливости материала, ослабленного перегрузками, составляет

$$\sigma'_{-1} = \sigma_{-1} - \Delta\sigma_{-1}$$

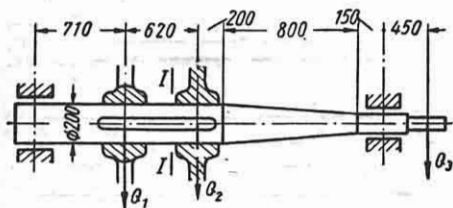
Запас прочности по основным переменным напряжениям с амплитудой  $\sigma_a$  составит

$$n = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_a}$$

**Примеры расчета деталей машин на усталость \***

**Пример 1.** Расчет приставного вала дизельной установки.

На фиг. 82 дана схема приставного вала. На него посажены маховик, ротор генератора и ротор возбuditеля.



Фиг. 82. Приставной вал дизельной установки.

Вес маховика  $Q_1 = 4500$  кг, вес ротора генератора  $Q_2 = 3180$  кг и вес ротора возбuditеля  $Q_3 = 250$  кг

Мощность дизеля 600 л. с., угловая скорость вращения приставного вала  $n = 300$  об/мин. Вал выполнен из стали 45.

Определение реакций опор, изгибающих и крутящего моментов:

опорная реакция  

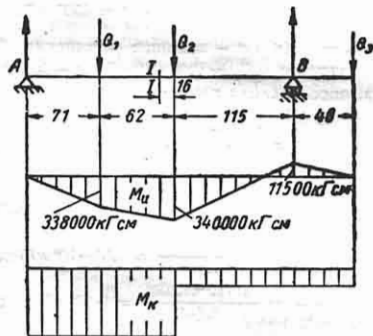
$$A = \frac{4500 \cdot 177 + 3180 \cdot 115 - 250 \cdot 45}{248} = 4650 \text{ кг};$$

изгибающие моменты под силой  $Q_1$

$$M_1 = 4650 \cdot 71 = 330\,000 \text{ кгсм};$$

под силой  $Q_2$

$$M_2 = 4650 \cdot 433 - 4500 \cdot 62 = 340\,000 \text{ кгсм};$$



Фиг. 83. Эпюра изгибающего и крутящего моментов для приставного вала дизельной установки.

под опорой B

$$M_3 = 250 \cdot 45 = 11\,500 \text{ кгсм};$$

крутящий момент

$$M_K = 71\,620 \frac{N}{\pi} = 71\,620 \frac{600}{300} = 143\,200 \text{ кгсм}.$$

На фиг. 83, на которой даны эпюры изгибающих и крутящего моментов, видно, что опасным сече-

\* В примерах эпюра изгибающих моментов отложена со стороны растянутого волокна (в отличие от правила, принятого в гл. II).

нием является сечение I—I, где существует концентрация напряжений от напесковки втулки (влияние которой больше, чем влияние шпонки) и значительный крутящий и изгибающий моменты.

Изгибающий момент

$$M = 4650 \cdot 117 - 4500 \cdot 16 = 338\,000 \text{ кгсм}.$$

Номинальное напряжение (амплитуда) от изгиба

$$\sigma_a = \frac{M}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{338000 \cdot 32}{3,14 \cdot 200^3} = 430 \text{ кг/см}^2.$$

Коэффициент концентрации от напесковки (см. фиг. 39 и 40) при изгибе для диаметра 200 мм при  $\sigma_{вр} = 65$  кг/мм<sup>2</sup> составит (кривая I)

$$(k_\sigma)_D = 3,5 \cdot 1,17 = 4,1.$$

Крутящий момент (постоянный) дает напряжение

$$\tau_m = \frac{M_K}{W_K} = \frac{143200}{1572} = 91 \text{ кг/см}^2.$$

При торсиографировании вала было установлено, что в опасном сечении от крутильных колебаний возникают касательные напряжения  $\tau_a = 250$  кг/см<sup>2</sup>.

Коэффициент концентрации напряжений принимаем по графикам стр. 455.

$$(k_\tau)_D = 0,6 (k_\sigma)_D + 0,4 = 0,6 \cdot 4,1 + 0,4 = 2,86.$$

Определение запасов прочности. Для стали 45 из табл. 2  $\sigma_{-1} = 28$  кг/мм<sup>2</sup>; из табл. 16  $\psi_\sigma = 0,05$ ;  $\tau_{-1} = 16$  кг/мм<sup>2</sup>.

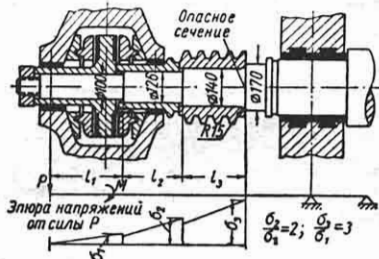
По условию подобия циклов

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{2800}{4,1 \cdot 430} = 1,6;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_D \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{1600}{2,86 \cdot 250} = 2,24;$$

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1,6 \cdot 2,24}{\sqrt{1,6^2 + 2,24^2}} = 1,3.$$

**Пример 2.** Расчет конца вала паровой турбины. На фиг. 84 приведен схематический чертеж конца вала паровой турбины. Этот конец вала не должен воспринимать никаких нагрузок, однако за счет



Фиг. 84. Конец вала паровой турбины.

касания вала о баббитовую заливку пояса возникает сила P, которая может привести к поломке конца вала. Передний конец вала за счет термической деформации корпуса подшипника и всплывания вала в масляном клине деформируется при касании о корпус подшипника. Поскольку силовые

факторы точно не определены, следует определить допустимую деформацию вала из условий его прочности, которая, в свою очередь, определит предельную разницу между величиной зазора и величиной смещения вала.

Определение прогиба конца вала производится путем суммирования перемещений, возникающих в результате деформации участков вала протяженности  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  с моментами инерции сечений соответственно  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$ . Длины отрезков вала составляют  $l_1 = 125$  мм,  $l_2 = 265$  мм,  $l_3 = 360$  мм; величины, обратные моментам инерции, составляют

$$\frac{1}{J_1} = 0,0012; \quad \frac{1}{J_2} = 0,000080; \quad \frac{1}{J_3} = 0,00052.$$

При введении обозначений

$$\alpha_1 = \frac{l_2}{l_1} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{l_3}{l_1}$$

выражение для прогиба конца вала:

$$f = \frac{P l_1^3}{2E} \left\{ \frac{1}{J_1} + \frac{\alpha_1}{J_2} [\alpha_1^2 + 3\alpha_1 + 3] + \frac{\alpha_2}{J_3} [\alpha_2^2 + 3(1 + \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1 + 1)] \right\} = \frac{P l_1^3}{3E} k,$$

отсюда

$$P = \frac{3E f}{k \cdot l_1^3}.$$

В результате подстановки численных значений величин вычислено:

$$k = 0,0685.$$

Напряжение в опасном сечении  $\sigma_s$  определяется в зависимости от прогиба  $f$  по формуле

$$\sigma = \frac{M}{W_s} = \frac{P(l_1 + l_2 + l_3)}{W_s} = \frac{3E(l_1 + l_2 + l_3)f}{k l_1^3 W_s}.$$

Материал вала — сталь 45,  $\sigma_b = 60$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_{-1} = 25$  кг/мм<sup>2</sup>.

Коэффициент концентрации в галтели при  $\frac{r}{d} = \frac{15}{140} = 0,107$ ;  $\sigma_b = 55$  кг/мм<sup>2</sup>; при  $\frac{D}{d} = 2$  равен

$$(k_\sigma)' = 1,52 \text{ (см. фиг. 31)}.$$

В нашем случае  $\frac{D}{d} = \frac{170}{140} = 1,22$ , следовательно, по фиг. 34 находим поправочный коэффициент  $\xi = 0,82$ . С учетом поправки на отношение  $\frac{D}{d}$  коэффициент концентрации составит

$$(k_\sigma)_{d_1} = 1 + 0,82(1,52 - 1) = 1,43.$$

По фиг. 30 учитываем масштабный фактор  $(\sigma_\sigma)_d \approx 0,65$ , и общий коэффициент концентрации составит

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_{d_1}}{(\sigma_\sigma)_d} = \frac{1,43}{0,65} = 2,2.$$

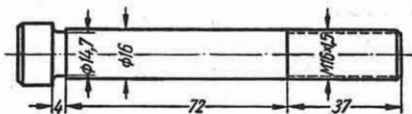
Запас прочности принимаем  $n = 1,8$ . Цикл на пружинный следует полагать симметричным, тогда допускаемое напряжение составит

$$[\sigma] - 1\mu = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_D n} = \frac{2500}{2,2 \cdot 1,8} \approx 630 \text{ кг/см}^2.$$

Этому напряжению соответствует допускаемый прогиб

$$f_{\text{доп}} = \frac{[\sigma] - 1\mu l_1^2 k W_s}{3E(1 + \alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{630 \cdot 12,5^2 \cdot 0,0685 \cdot 275}{3 \cdot 10^4 \cdot 2(1 + 1,72 + 2,90)} = 0,055 \text{ см.}$$

Пример 3. Расчет шатунного болта двигателя СТЗ-НАТИ. Размеры болта указаны на фиг. 85. Удлинение болта при затяжке  $\Delta l_\sigma = 0,18$  мм.



Фиг. 85. Эскиз болта.

Материал болта — сталь 40ХН с такими механическими характеристиками:  $\sigma_{\sigma p} = 100$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\sigma_T = 75$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\tau_T = 39$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\sigma_{-1 p} = 29$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\psi_\sigma = 0,1$ .

Резьба М16×1,5;  $d_0 = 16$  — наружный диаметр резьбы;  $d_{cp} = 15,03$  мм — средний диаметр резьбы;  $d_1 = 13,92$  мм — внутренний диаметр резьбы.

Номинальные напряжения в опасных сечениях детали. По действующим внешним нагрузкам (силы инерции масс, поступающие движущихся и вращающихся) и удлинению при затяжке  $\Delta l_\sigma$  определяются  $P = 1020$  кг — максимальная инерционная сила, действующая на болт;  $T = 6500$  кг — сила предварительной затяжки, определяемая по формуле

$$T = \Delta l_\sigma C_\sigma = 0,018 \cdot 0,36 \cdot 10^6 = 6500 \text{ кг},$$

где  $\Delta l_\sigma = 0,018$  см — заданное удлинение болта при затяжке;  $C_\sigma = 0,36 \cdot 10^6$  кг/см — жесткость болта, определяемая по формуле

$$\frac{1}{C_\sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

где  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — жесткости участков болта:

$$C_1 = \frac{E f_1}{l_1} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \pi \cdot 1,47^2}{0,4 \cdot 4} = 8,93 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$C_2 = \frac{E f_2}{l_2} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \pi \cdot 1,6^2}{7,2 \cdot 4} = 0,588 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$C_3 = \frac{E f_3}{l_3} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \pi \cdot 1,503^2}{3,7 \cdot 4} = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$\frac{1}{C_\sigma} = \left( \frac{1}{8,93} + \frac{1}{0,588} + 1 \right) 10^{-6} =$$

$$= 2,81 \cdot 10^{-6} \text{ см/кг};$$

$$C_\sigma = 0,36 \cdot 10^6 \text{ кг/см}.$$

Опасным сечением является сечение, где имеет место концентрация напряжений в резьбе и действуют силы  $P = 1020$  кг — максимальная инерционная сила;  $T = 6500$  кг — сила предварительной затяжки;  $M_k = 490$  кгсм — постоянный крутящий момент;

$$M_k = \frac{\mu T d_{cp}}{2} = \frac{0,1 \cdot 6500 \cdot 1,503}{2} \approx 490 \text{ кгсм},$$

где  $\mu = 0,1$  — коэффициент трения в резьбе.



Номинальные напряжения цикла:  
нормальные напряжения

$$T + \frac{1}{C_m} P$$

$$1 + \frac{C_m}{C_\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{F} =$$

$$= \frac{6500 + \frac{1}{1+3} 1020}{\frac{\pi \cdot 1,392^2}{4}} \approx 4420 \text{ кг/см}^2;$$

при отсутствии опытных данных о жесткости соединяемых частей  $C_m$  рекомендуется принимать

$$\frac{C_m}{C_\sigma} = 3;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{T}{F} = \frac{6500}{\frac{\pi \cdot 1,392^2}{4}} \approx 4250 \text{ кг/см}^2;$$

касательное напряжение (постоянное)

$$\tau = \frac{M_k}{W_{k \text{ нетто}}} = \frac{490}{0,2 \cdot 1,392^3} \approx 910 \text{ кг/см}^2.$$

Средние напряжения и амплитуда цикла

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{4420 + 4250}{2} = 4335 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{4420 - 4250}{2} = 85 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_m = \tau = 910 \text{ кг/см}^2; \quad \tau_a = 0.$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений по опытным данным при растяжении  $(k_\sigma)_D = 5,0 \rightarrow 5,2$  (см. стр. 460).

Запас прочности при условии простого нагружения

$$n_\sigma = \frac{\sigma - 1\rho}{\psi_\sigma \sigma_m + (k_\sigma)_D \sigma_a} =$$

$$= \frac{2900}{0,1 \cdot 335 + 5,0 \cdot 85} = 3,4;$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{7500}{4335 + 85} = 1,7.$$

$n_\sigma$  по сопротивлению пластическим деформациям меньше, чем по сопротивлению усталости, поэтому принимается

$$n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_m} = \frac{3900}{910} = 4,28.$$

Запас прочности

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1,7 \cdot 4,28}{\sqrt{1,7^2 + 4,28^2}} = 1,57.$$

**Пример 4.** Расчет клапанной пружины тракторного двигателя СТЗ НАТИ. Основные данные пружины: средний диаметр  $D = 36$  мм, диаметр проволоки  $a = 4,5$  мм, число рабочих витков

$i = 9,25$ , рабочая длина  $l = 75,5$  мм, рабочая осадка  $f_p = 12$  мм. Пружина изготовлена из кремнемарганцевой стали.

Минимальное и максимальное напряжения в пружине определяются по соответствующим усилиям

$$P_{\min} = 14,5 \text{ кг}$$

(минимальное усилие предварительной затяжки);

$$P_{\max} = \frac{f_{\max} G d^4}{8 D^3 i}$$

(максимальное усилие при полном открытии клапана).

По минимальному усилию определяется осадка от предварительной затяжки:

$$f_{\min} = \frac{P_{\min} 8 D^3 i}{G d^4} =$$

$$= \frac{14,5 \cdot 8 \cdot 36^3 \cdot 9,25}{7,5 \cdot 10^8 \cdot 4,5^4} = 16,2 \text{ мм}.$$

Значение модуля упругости при кручении для пружинной стали принято  $7,5 \cdot 10^8$  кг/мм<sup>2</sup>.

Максимальная осадка пружины

$$f_{\max} = f_{\min} + f_p = 28,2 \text{ мм}.$$

Значение максимального усилия

$$P_{\max} = \frac{28,2 \cdot 7,5 \cdot 10^8 \cdot 4,5^4}{8 \cdot 36^3 \cdot 9,25} = 25,2 \text{ кг}.$$

По значениям максимального и минимального усилий определяются соответствующие напряжения по формулам

$$\tau_{\max} = \frac{8 P_{\max} D}{\pi a^3} = \frac{25,2 \cdot 36 \cdot 8}{\pi \cdot 4,5^3} = 25,3 \text{ кг/мм}^2;$$

$$\tau_{\min} = \frac{8 P_{\min} D}{\pi a^3} = \frac{14,5 \cdot 36 \cdot 8}{\pi \cdot 4,5^3} = 14,5 \text{ кг/мм}^2.$$

По значениям максимального и минимального напряжений определяем средние напряжения и амплитуду:  $\tau_m = 19,9$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\tau_a = 5,4$  кг/мм<sup>2</sup>.

Поправочный коэффициент  $k_\sigma$ , учитывающий влияние кривизны проволоки и перерезывающей силы для  $C = \frac{D}{a} = 8$ ;  $k_\sigma = 1,185$ .

Для кремнемарганцевой стали предел выносливости при пульсирующем цикле для пружины. На основании имеющихся эквивалентных данных следует принять:

$$\tau_0 = 50 \text{ кг/мм}^2; \quad \frac{\tau - 1}{\tau_0} = \xi = 0,6; \quad \psi = 0,2.$$

По подобию циклов

$$n = \frac{\xi - 1 \tau_0}{k_\sigma \cdot \tau_a + \psi \cdot \tau_m} = \frac{0,6 \cdot 5000}{1,185 \cdot 540 + 0,2 \cdot 1990} = 2,82.$$

**Пример 5.** В примерах 1–4 расчет на усталость производился по подобному циклу, т. е. в предположении пропорционального возрастания переменной и статической напряженности при переходе к предельному по прочности состоянию детали.

Если нагружение детали в процессе возрастания нагрузки является сложным, то запас прочности может определяться по переменным и статическим напряжениям (см. стр. 454) раздельно. Для этой цели используются также представления об эффективных нагрузках [13].

а) Допустим, что в валу примера 1 разрушение может происходить за счет увеличения напря-

жений от крутильных колебаний, т. е. закон изменения напряжений такой:  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ ,  $r_m$  постоянны,  $\tau_a$  возрастает; запас прочности следует относить к напряжениям  $\tau_a$ .

$$\sigma_{-1} = \sqrt{[(k_a)D\sigma_a + \psi\sigma_m]^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 [(k_\tau)Dn\tau_a + \psi\sigma_m]^2}$$

Используя выражения для запаса прочности, приведенные в примере 1, получаем

$$n = \frac{\sqrt{\sigma_{-1}^2 - [(k_a)D\sigma_a]^2}}{\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} (k_\tau)D\tau_a} = 1,73.$$

Полученный запас должен сравниваться со значениями запасов прочности для данного типа машин, устанавливаемыми на основе статистической обработки расчетов по данной схеме.

б) В болте примера 3 в процессе работы или сборки могут непропорционально меняться как статическая, так и переменная составляющие напряжений. Поэтому в данном случае расчет по подобному циклу должен быть дополнен вычислением запасов прочности по переменным  $n_a$  и максимальным напряжением  $n$ .

Из усталостных испытаний болтов известно, что линия предельных напряжений для болта в координатах  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_m$  может быть выражена уравнением

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{-1}p}{(k_a)D} + \sigma_m.$$

В этом случае будем иметь [33]

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}p}{(k_a)D\sigma_a} \quad \text{и} \quad n = \frac{\frac{2\sigma_{-1}}{k_a} + \sigma_m \ln}{\sigma_{\max}}$$

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}p}{(k_a)D\sigma_a} = \frac{2900}{6,0 \cdot 85} = 5,4;$$

$$n = \frac{\frac{2 \cdot 2900}{6} + 4250}{4420} = 1,16.$$

Полученные значения следует сопоставлять со статистическими данными о запасах прочности (см. стр. 483—485).

в) Допустим, что в примере 4 при расчете по эффективным нагрузкам  $\tau_{\min} = \text{const}$ .

Полагаем, что в процессе работы клапанной пружины затяжка ее остается постоянной, меняются только амплитуда напряжения.

Запас прочности следует относить к амплитуде

$$\tau_{\max} = \tau'_{-1} + (1 - \psi') (n\tau_a + \tau_{\min}),$$

где

$$\tau_{\max} = 2n\tau_a + \tau_{\min};$$

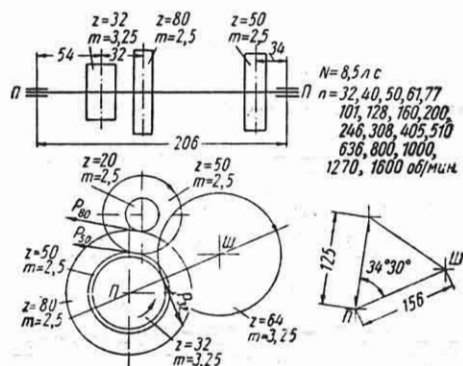
$$\tau'_{-1} = \frac{\tau_{-1}}{K_\sigma}; \quad \psi' = \frac{\psi}{K_\sigma}; \quad \tau'_{-1} = \xi_{-1} \frac{\tau_0}{K_\sigma};$$

$$\tau = 5000 \frac{0,6}{1,185} = 0,507 \cdot 5000;$$

$$\psi' = \frac{0,2}{1,185} = 0,18;$$

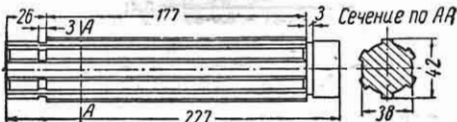
$$n = \frac{\tau'_{-1} - \psi'\tau_{\min}}{(1 + \psi')\tau_a} = \frac{0,507 \cdot 5000 - 0,18 \cdot 1450}{1,18 \cdot 540} = 3,42.$$

Пример 6. Расчет на долговечность предшпиндельного шлицевого валика станка. На фиг. 86 представлена схема нагружения предшпиндельного валика, чертеж которого дан на фиг. 87.



Фиг. 86. Схема нагружения предшпиндельного валика.

Вращение предшпиндельного валика осуществляется через шестерню  $z = 80$ , что соответствует числу оборотов  $n = 32; 40; 50; 61; 77; 101; 128; 160; 200; 246; 308$  и  $405$  в минуту, или через шестерню  $z = 50$ , что соответствует числам оборотов валика  $n = 510; 636; 800; 1000; 1270$  и  $1600$  в минуту. Время работы на каждом режиме  $T_i = 100$  час.

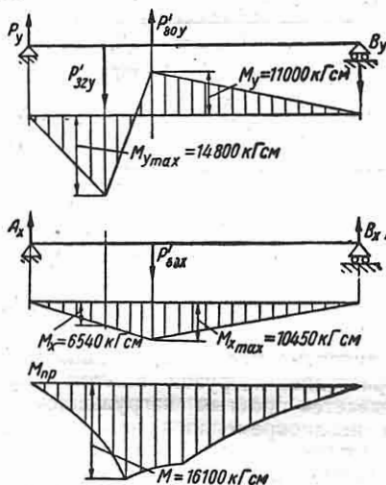


Фиг. 87. Предшпиндельный валик.

Максимальная мощность на шпинделе  $N = 8,65$  л. с., половину времени шпиндель передает  $\frac{1}{2} N$ .

Определение изгибающих и крутящих моментов. Передача мощности может происходить через шестерню  $z = 80$  и шестерню  $z = 50$ . Усилия, действующие на вал, не лежат в одной плоскости, и изгибающие моменты определяются отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а затем определяются суммарные моменты  $M_{\text{пр}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .

На фиг. 88 в качестве примера приведены эпюры изгибающих моментов для числа оборотов  $n = 32$ . Опасным сечением является сечение под шестерней  $z = 32$ , это же сечение является опасным для всех других комбинаций передачи мощностей.



Фиг. 88. Эпюры изгибающих моментов.

В опасном сечении действует также крутящий момент  $M_k = 71\,620 \frac{N}{n}$ .

Максимальные напряжения в опасном сечении от изгиба

$$\sigma_a = \frac{M_{np}}{W} = \frac{16100 \cdot 32}{3,14 \cdot 3,8^3} = 2930 \text{ кг/см}^2;$$

от кручения

$$\tau_m = \frac{M_k}{W_p} = \frac{19400 \cdot 16}{3,14 \cdot 3,8^3} = 1770 \text{ кг/см}^2.$$

Материал валика — сталь 40X (см. табл. 3);  $\sigma_{вр} = 85 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_T = 67 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{-1} = 38 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\tau_T = 40 \text{ кг/мм}^2$ .

Для максимальных значений напряжений определяем запас прочности:

$$n_2 = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_a)_{\max} \frac{1}{\epsilon}} = \frac{3800}{2930 \frac{1}{0,74}} = 0,96;$$

$$\epsilon = 0,74;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_m} = \frac{4000}{1770} = 2,26;$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_\tau}; \quad n = 0,81.$$

Так как значение запаса прочности меньше допустимого, производим уточненный расчет на долговечность. Расчет ведется для напряжений, превышающих предел выносливости (с учетом необходимого запаса прочности  $n = 1,4$ ). В соответствии с этим расчет ведется для значений на-

пряжений  $1 \geq \frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\max}} > \frac{0,81}{1,4} = 0,58$  при числе циклов  $N_i$  на соответствующем режиме  $N_i = 607 n_1$ .

В формуле для  $K_{доля}$  на стр. 473 число циклов обозначено  $n_1$ , в данном расчете это обозначение заменено на  $N_i$ .

Расчетные напряжения в опасном сечении и соответствующие им числа циклов приведены ниже:

$\frac{n}{\text{в об/мин}}$	32	40	50	61
$\sigma_{a1}$	2930	2340	1870	1530
$\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a \max}}$	1	0,8	0,64	0,523
$\tau_m$	1770	1430	1150	935
$N_i$	$2 \cdot 10^8$	$2,4 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	—
$\frac{N_i}{N_0}$	0,02	0,024	0,03	—

Коэффициент долговечности

$$K_{доля} = \sqrt[m]{\frac{1}{N_i} \sum N_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_1}\right)^m},$$

где для случая изгиба принимаем  $m = 9$ ;  $N_0$  — база, составляет  $10^7$ ;  $\sigma_1$  — максимальное напряжение  $\sigma_1 = (\sigma_a)_{\max}$ .

$$K_{доля} = \sqrt[9]{0,02 \cdot 1 + 0,024 \cdot 0,8^9 + 0,3 \cdot 0,64^9} = 0,65.$$

Приведенное напряжение

$$\sigma_{пр} = (\sigma)_{\max} K_{доля} = 2930 \cdot 0,65 = 1900 \text{ кг/см}^2.$$

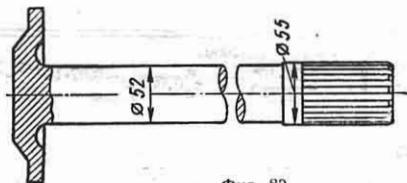
Запас прочности определяется в предположении полубытия циклов:

$$n_0 = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{1}{\epsilon}} = \frac{3800}{1900 \frac{1}{0,74}} = 1,35;$$

$$\epsilon = 0,74; \quad n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_m} = \frac{4000}{1770} = 2,26;$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_\tau}; \quad n = 1,15.$$

Пример 7. Расчет полуоси моста ведущих колес самоходного зернового комбайна С-4.



Фиг. 89.

Полуось (фиг. 89) изготовлена из стали 40X со следующими механическими характеристиками:  $\sigma_{вр} = 90 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{0,2} = 75 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\sigma_{-1} = 42 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\tau_{-1} = 21 \text{ кг/мм}^2$ ;  $\psi_\tau = 0$ .

Влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров выражается коэффициентами  $K_\sigma = 2,2$  и  $\epsilon_\tau = 0,26$ .

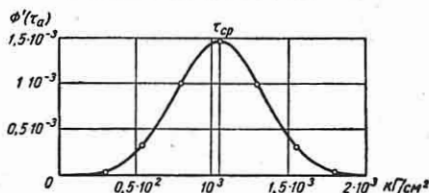
Средняя повторяемость перегрузочных напряжений по данным измерений (тензометрирование) в эксплуатационных условиях составляет 70 в минуту. Полагая, что комбайн работает 500 час. во время одного уборочного сезона и принимая срок его работы 5 лет, определим общее число изменений крутящего момента, действующего на полуюсь за время работы комбайна:

$$n_{\text{сум}} = 70 \cdot 60 \cdot 500 \cdot 5 = 10,5 \cdot 10^6.$$

В результате статистической обработки данных измерения перегрузочных напряжений установлено, что последние изменяются по следующему нормальному закону распределения:

$$\Phi'(\tau) = 0,0014e^{-0,62 \cdot 10^{-5}(\tau - 1050)^2},$$

т. е. на среднее напряжение кручения  $\tau_{\text{ср}} = 1050 \text{ кг/см}^2$  накладывается переменное напряжение с амплитудой, изменяющейся по нормальному закону с мерой точности  $h = 0,25 \cdot 10^{-2}$ . На фиг. 90 приведено распределение касательных напряжений, действующих в полуоси моста.



Фиг. 90.

Разность абсцисс точек кривой распределения, лежащих на одной ординате, представляет собой размах в изменении величин напряжений. Поэтому, беря половины размахов, т. е. амплитуды, и принимая во внимание, что повторяемость знакопеременных напряжений в 2 раза меньше, чем повторяемость экстремальных значений, получим суммарное число перемен амплитуд

$$(n_{\text{сум}})_a = \frac{n_{\text{сум}}}{2} = \frac{10,5 \cdot 10^6}{2} = 5,25 \cdot 10^6.$$

Запас прочности определится по зависимости

$$n = \frac{(\tau - 1)D}{\sqrt[m]{\frac{(n_{\text{сум}})_a}{N_0} \int_{(\tau - 1)D}^{(\tau_a)_{\text{max}}} (\tau_a)_{\text{нр}}^m \Phi'(\tau_a)_{\text{нр}} d(\tau_a)_{\text{нр}}}} = 1,8,$$

$$= \frac{6}{\sqrt[6]{\frac{5,25 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^6} \int_{730}^{1000} \tau_a^6 0,0014e^{-0,62 \cdot 10^{-5} \tau_a^2} d\tau_a}}$$

где

$$(\tau - 1)D = \frac{\tau - 1}{K_\tau} = \frac{2100 - 0,76}{2,2} = 730 \text{ кг/см}^2;$$

$$(\tau_a)_{\text{нр}} = \tau_a + \psi_{\text{ср}} \tau_m = \tau_a;$$

параметры кривой усталости при кручении приняты  $m = 6$ ;  $N_0 = 3 \cdot 10^6$ ; значение

$$0,0014 \int_{730}^{1000} \tau_a^6 e^{-0,62 \cdot 10^{-5} \tau_a^2} d\tau_a$$

вычисляется приближенно по формуле Симпсона, интегрирование осуществляется от величины предела выносливости до предельной величины,  $r = 1000 \text{ кг/см}^2$ , наблюдавшейся при измерениях.

Определяя запас прочности по максимальной амплитуде касательных напряжений, получим

$$n = \frac{(\tau - 1)D}{\psi_{\text{ср}} \tau_m + (\tau_a)_{\text{max}}} = \frac{730}{1000} = 0,73$$

и по среднему (постоянному) напряжению

$$n = \frac{\tau_{0,2}}{\tau_{\text{ср}}} = \frac{\sigma_{0,2}}{\sqrt{3} \tau_{\text{ср}}} = \frac{7500}{\sqrt{3} \cdot 1050} = 4,1.$$

Величина запаса прочности существенно зависит от метода расчета; расчет, отражающий режим действующих нагрузок в соответствии с данными измерений в эксплуатационных условиях и основанный на статистических закономерностях, позволяет судить о прочности детали более правильно.

### Несущая способность при действии нескольких нагрузок

Одновременное и пропорциональное возрастание нагрузок в этом случае называется простым нагружением; случай неодновременного или непропорционального возрастания нагрузок [11] называется сложным нагружением.

Несущая способность при простом нагружении. Когда действуют две одновременно возникающие и пропорционально возрастающие нагрузки  $Q_1$  и  $Q_2$ , одна из которых вызывает в наиболее опасных точках нормальные напряжения (осевая сила, изгибающий момент), а другая — касательные напряжения (крутящий момент, перерезывающая сила), запас прочности может определяться в первом приближении из выражения

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{Q_1}^2} + \frac{1}{n_{Q_2}^2},$$

где

$$n_{Q_1} = \frac{(Q_1)_{\text{нред}}}{Q_1}; \quad n_{Q_2} = \frac{(Q_2)_{\text{нред}}}{Q_2};$$

$(Q_1)_{\text{нред}}$  — предельная нагрузка при действии только  $Q_1$ ;  $(Q_2)_{\text{нред}}$  — предельная нагрузка при действии только  $Q_2$ .

Если напряжения являются пропорциональными усилиями, то вычисление запаса прочности осуществляется также через напряжения

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

где

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{\text{нред}}}{\sigma}; \quad n_\tau = \frac{\tau_{\text{нред}}}{\tau}.$$

$\sigma_{пред}$  и  $T_{пред}$  — предельные напряжения по сопротивлению, разрушению или пластическим деформациям.

Несущая способность при сложном нагружении определяется по экспериментальным данным о прочности, полученным в соответствующих условиях нагружения (см. стр. 453).

### ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

В тех случаях, когда сопротивление разрушению зависит от числа циклов повторения напряжений (усталость) или от времени (прочность при повышенных температурах), кроме представлений о прочности, используются представления о долговечности. Запасом долговечности называется отношение числа циклов  $N_{пред}$  или времени  $T_{пред}$  до разрушения к числу циклов  $N$  или времени  $T$ , которое соответствует общему ресурсу использования детали:

$$n_d = \frac{N_{пред}}{N} \quad \text{или} \quad n_d = \frac{T_{пред}}{T}.$$

При действии меняющихся по величине переменных напряжений вычисленные прочности и долговечности сводятся к определению приведенных напряжений  $\sigma_p$  и чисел циклов  $N_p$ , по которым устанавливаются запасы прочности и долговечности.

В связи со значительным рассеянием величин чисел циклов  $N_{пред}$  и времен  $T_{пред}$ , необходимых для разрушения, при данной нагруженности этим величинам свойственна определенная вероятность. Этой же вероятностью характеризуется и величина запаса долговечности.

### ПРОЧНОСТЬ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ [7], [8], [9], [21]

Действующие усилия и напряжения, возникающие в детали при ударе, могут быть определены умножением соответствующих усилий и напряжений при статическом приложении нагрузки на коэффициент динамичности  $n_d$ . Этот коэффициент в большинстве случаев может быть определен лишь на основании эксперимента или опыта эксплуатации, а в простейших случаях и расчетным путем (см. гл. XII).

При быстро протекающей от удара деформации возникает вязкое или хрупкое разрушение. Для деталей из метал-

лов хладноломких и ограниченной хладноломкости важнейшим фактором возможности хрупкого разрушения, особенно опасного в условиях эксплуатации, является снижение температуры.

Критическая температура хрупкости  $T_{кр}$  соответствует резкому уменьшению ударной вязкости с понижением температуры или некоторому условному ее снижению (например, на 40%).

Температурный запас вязкости определяется по формуле Н. Н. Давиденкова [9]

$$n_m = \frac{T_0 - T_{кр}}{T_0},$$

где  $T_0$  — температура условий службы.

Во избежание хрупкого разрушения детали необходимо, чтобы температура эксплуатации ее  $T_{пр}$  была выше  $T_{кр}$ , в этом случае  $0 < n_m < 1$ .

Если могут быть определены максимальные напряжения при ударе, запас прочности при вязком разрушении  $n = \frac{\sigma_T}{\sigma}$ ; в случае хрупкого разрушения

$$\text{запас прочности } n = \frac{s_k}{\sigma}.$$

Величины  $\sigma_T$  и  $s_k$  принимаются в первом приближении такими же, как и при статическом действии нагрузки (с повышением скорости деформации  $\sigma_T$  увеличивается [21]).

### ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ [29]

При статическом контакте по линии прижатых поверхностей приведенное напряжение одноосного сжатия  $\sigma_{пр}$  может определяться из формулы

$$\frac{\sigma_{пр}}{p_0} = 0,56 \sqrt{K},$$

где  $p_0$  — максимальное контактное давление на площадке соприкосновения; при расчете на сопротивление пластическим деформациям  $K = \frac{(\sigma_T)_p}{(\sigma_T)_{сж}}$ ; при расчете на сопротивление разрушению

$$K = \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{всж}}.$$

Допускаемое максимальное контактное давление на площадке соприкосновения

$$(p_0)_{доп} = \frac{\sigma_{всж}}{0,56 \sqrt{K}}.$$

В табл. 29 приведены значения  $(\rho_0)_{\text{доп}}$  для некоторых материалов.

Таблица 29

Допускаемые контактные давления при статической нагрузке

Марка металла	$\sigma_{\text{вр}}$ в $\text{кг/мм}^2$	Твердость НВ	Допускаемое максимальное давление на площадке соприкосновения $(\rho_0)_{\text{доп}}$ в $\text{кг/см}^2$
Сталь			
30	48—60	180	8 500—10 500
43	57—70	200	10 000—13 500
50	63—80	230	10 500—14 000
50Г	65—85	240	11 000—14 500
15Х	62—75	240	10 500—13 000
20Х	70—85	240	12 000—14 500
15ХФ	160—180	240	13 500—16 000
ШХ15			38 000
Чугун	$\sigma$ в $\text{сж}$		
СЧ 21-40	95	180—207	8 000—9 000
СЧ 22-44	100	187—217	9 000—10 000
СЧ 28-48	110	170—241	10 000—11 000
СЧ 32-52	120	170—241	11 000—12 000
СЧ 35-56	130	197—255	12 000—13 000
СЧ 38-60	140	197—255	13 000—14 000

При перекачивании контактирующих тел при наличии нормального и касательных усилий (зубчатые и червячные передачи, подшипники качения и т. д.) приведенные напряжения зависят от соотношения указанных усилий, от смазки и микрогеометрии поверхностей и т. д.

Для контакта в точке величины  $(\rho_0)_{\text{доп}}$  увеличиваются в 1,3—1,4 раза.

## ВЕЛИЧИНЫ ЗАПАСОВ ПРОЧНОСТИ И ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ [4], [10], [20], [27], [28], [33], [35], [44].

Величины запасов прочности  $n$  тесно связаны с методикой расчета той или иной детали. От этой методики зависит степень соответствия расчетных предположений о схеме действующих сил и о распределении напряжений действительным условиям работы. Запасы прочности также связаны с возможными отклонениями механических свойств материала и технологии обработки деталей от нормативных.

Современные методы расчета отражают влияние динамичности нагрузок, формы и жесткости деталей, типа напряженного состояния, пластичности, усталости, пол-

зучести и ряда других факторов на несущую способность, поддающихся расчетному или экспериментальному определению. Ряд факторов не поддается таким определениям, и их влияние должно быть отражено в запасе прочности на основании наблюдений за работой деталей и узлов, статистического анализа данных эксплуатации и испытания машин. Н. С. Стрелецким [35] и А. Р. Ржаницыным [28] на основании статистических кривых распределения возникающих усилий и отклонений механических свойств, а также анализа основных факторов отклонения между действительными и расчетными усилиями, обоснована каноническая структура запаса прочности  $n$  в виде произведения минимального числа сомножителей  $n = n_1 n_2 n_3$ , каждый из которых отражает важнейшие факторы отклонения между рассчитываемой и фактической несущей способностью детали или конструкции.

К одной группе факторов относятся: а) разница в величине нагрузок, вводимых в расчет, и нагрузок действительных (определение последних в ряде случаев затруднительно, например, нагрузки, развиваемые при горячей и холодной обработке металлов, нагрузки на ходовую часть автомобилей, динамические усилия на лопатки турбин и т. д.), разница в величине усилий, определяемых при раскрытии статической неопределенности расчетом и действительным значением этих усилий, благодаря отклонениям расчетной схемы от фактической, отклонениям в величинах монтажных натягов, жесткостей и т. д.; б) разница в величине рассчитываемых и действительных напряжений благодаря несоответствию напряжений, даваемых формулами сопротивления материалов, фактическому их распределению, недостаточное соответствие данных о концентрации действительным очертаниям рассчитываемых деталей, а также вследствие влияния остаточных напряжений, напряжений от колебаний и ударов, часто не учитываемых в расчете.

Эти отклонения в нагрузках, усилиях и напряжениях характеризуются сомножителем  $n_1$ , величина которого при использовании более достоверных методов определения усилий и напряжений (теоретических и экспериментальных) должна находиться в пределах 1,2—1,5, при менее достоверных способах определения напряженности, при повышенных

требованиях к жесткости величина  $n_1$  может достигать значений 2—3 и более.

Лишь при повышенной точности определения напряжения в отдельных случаях величина может быть уменьшена до 1,0.

К другой группе факторов относятся: а) отклонения механических характеристик от нормативных благодаря нарушениям в условиях изготовления,ковки, термической обработки; б) повышенная чувствительность к недостаткам механической обработки; в) неоднородность свойств благодаря структурным особенностям материалов, малой пластичности, повышенной остаточной напряженности и т. д.

Эти отклонения в данных о механической прочности характеризуются множителем  $n_2$ , величина которого при применении более высококачественных материалов и совершенной технологии при расчете на сопротивление пластическим деформациям составляет 1,3—2,0 в зависимости от степени пластичности; при расчете на усталость  $n_2$  составляет 1,5—1,7, увеличиваясь для менее однородных материалов (литье) и деталей больших размеров и сложных форм ( $n_2 = 3$  и более).

В отдельных случаях при весьма совершенной технологии изготовления величина  $n_2$  может быть уменьшена до 1,1—1,2.

В зависимости от ответственности детали, обеспечения длительной ее службы, необходимости иметь повышенную надежность в условиях эксплуатации может предусматриваться дополнительное повышение запаса прочности введением множителя  $n_3$ , величина которого находится в пределах 1,0—1,5.

Смножители  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  отражают возможные отклонения величин усилий, напряжений, характеристик прочности и других величин, от которых зависит несущая способность деталей и конструкций. При установлении приближенных величин запаса прочности для большой совокупности деталей различных конструкций, изготавливаемых из различных материалов и работающих в различных условиях, эти отклонения характеризуются статистически, подчиняясь вероятностным закономерностям. Величинам общего коэффициента запаса  $n$  также свойственно вероятностное распределение как результирующее распределение произведения множителей  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ . Величина  $n$  должна быть

меньше, чем произведение максимальных значений  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ . Благодаря отсутствию в большинстве случаев данных о вероятностном распределении величин  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  их значения намечаются на основании опыта конструирования, доводки и эксплуатации машин и узлов.

Более достоверные величины запасов прочности определяются по данным натурных испытаний деталей и измерениям возникающих в них усилий и напряжений при работе машины.

И. А. Одингом предложена система сомножителей, входящих в общий коэффициент запаса прочности, число которых доведено до 10. В эти сомножители включаются также коэффициенты, отражающие влияние концентрации напряжений абсолютных размеров типа напряженного состояния, которые в приведенных выше данных учитываются расчетом (и не входят в величину  $n$ ). Кроме того, вводятся коэффициенты, учитывающие отклонения в механических свойствах материала благодаря: а) понижению свойств против нормативных в связи с условиями приемки материалов и изделий; б) понижению прочности из-за качества поверхности; в) влиянию остаточных напряжений. Предусматривается также коэффициент, характеризующий ответственность детали, для которой устанавливается запас прочности. Ряд данных по значениям коэффициентов приведен в [20].

Величины запасов прочности при упрощенном расчете по пределу прочности  $\sigma_s$  без учета типа напряженного состояния, концентрации, абсолютных размеров и т. д. по Н. М. Беляеву [4] для статической нагрузки при пластичном состоянии материала составляют 2,5—2,7; то же при хрупком состоянии 3,0—9,0; для ударной и внезапной нагрузки при пластичном состоянии 2,8—5,0; для переменной нагрузки при пластичном состоянии 5,0—15,0.

В ряде случаев размеры деталей, а в связи с этим запасы прочности и допускаемые напряжения определяются из условий обеспечения необходимой жесткости деталей и узлов, из условий сопротивления вибрационным воздействиям, из соображений износостойкости, коррозионной стойкости и т. д. Далее приводятся более подробные данные о коэффициентах  $n_T$ ,  $n_K$ ,  $n_D$ , соответствующих  $n_2$ , связанных главным образом с особенностями механических свойств и технологии изготовления деталей.

При расчете на сопротивление пластическим деформациям обычно допускают более низкие запасы прочности в связи с тем, что образование остаточных деформаций еще не приводит к конструкции к окончательному разрушению. При расчете на сопротивление хрупкому статическому разрушению запасы прочности должны быть повышены в силу опасности таких разрушений из-за возможного влияния высоких остаточных напряжений, неоднородности материала и т. д. При расчете на устойчивость запас прочности выбирается в зависимости от достоверности определения усилий и напряжений, уровня технологии изготовления деталей и т. д.

Величины запасов прочности  $n_T$  при расчете на сопротивление пластическим деформациям принимаются в зависимости от степени пластичности материала, которая оценивается отношением  $\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$ :

$\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$	0,45—0,55	0,55—0,7	0,7—0,9*
$n_T$	1,2—1,5	1,4—1,8	1,7—2,2

Величины запасов прочности  $n_K$  при расчете по усилиям, соответствующим пределу несущей способности, принимаются  $n_K = 1,7 \div 2,5$ ; большие значения  $n_K$  соответствуют большим значениям  $\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$ .

Величины запасов прочности  $n_B$  при расчете на сопротивление статическому разрушению принимаются в зависимости от однородности материала детали, нагруженности остаточными напряжениями и степени хрупкости (последнюю принято оценивать по величине ударной вязкости  $a_K$ , см. т. 6, гл. III). Величины запасов прочности  $n_B$  представлены в табл. 30.

Величины запасов прочности при переменных напряжениях могут выбираться следующим образом.

Для обычного уровня технологии производства и ограниченной однородности материала  $n_2 = 1,5 \div 2,0$ .

Для пониженной однородности материала (особенно для литья) и деталей больших размеров  $n_2 = 2,0 \div 3,0$ .

При повышенной однородности материала и высоком качестве технологии изготовления в отдельных случаях  $n_2$  может быть снижено до 1,3.

Таблица 30  
Величины запасов прочности для малопластичных и хрупких материалов

Характер материалов	Запас прочности
Малопластичные (высокопрочные стали при низком отпуске), $a_H < 2 \text{ кг/мм}^2$ . . . . .	2—3
Хрупкие, $a_H < 0,5 \text{ кг/мм}^2$ , однородные и умеренно нагруженные остаточными напряжениями . . . . .	3—4
Весьма хрупкие, неоднородные и остаточно перенапряженные (керамика, пористое, хрупкое, литье) . . . . .	4—6

### Величины допускаемых напряжений

Допускаемые напряжения определяются исходя из характеристик механической прочности материала  $\sigma_m$ , влияния распределения напряжений ( $K$ ) и абсолютных размеров ( $\epsilon$ ), а также принимая во внимание необходимый запас прочности  $n$ :

$$[\sigma] = \frac{\epsilon \sigma_m}{K n}$$

Допускаемые напряжения, так определенные, используются как приближительные, когда не имеется более специализированных данных применительно к типам рассматриваемых деталей.

Допускаемые напряжения при статических нагрузках. Величины допускаемых напряжений при растяжении  $[\sigma]_p$  и при кручении тонкостенных сечений  $[\tau]_k$  для сталей определяются из формул

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_T}{n}; \quad [\tau]_k = \frac{\tau_T}{n}$$

Величины допускаемых напряжений при изгибе и кручении деталей со сплошным сечением определяются по значениям напряжений  $\sigma_s$  и  $\tau_s$ , соответствующим определенным допускам пластической деформации и приведенным на стр. 274—275, в их зависимости от формы сечения.

Величины допускаемых напряжений для литья (чугун, легкие сплавы) при растяжении, сжатии, изгибе и кручении определяются по пределам прочности  $\sigma_B$  из формул

$$[\sigma]_p = \frac{\epsilon_B \sigma_{Bp}}{k_s n}; \quad [\sigma]_{сж} = \frac{\epsilon_B \sigma_{Bсж}}{k_s n};$$

$$[\sigma]_u = \frac{\epsilon_B \sigma_{Bu}}{k_s n}; \quad [\tau]_k = \frac{\epsilon_B \tau_B}{k_s n}$$

\* Без учета абсолютных размеров.



В связи с влиянием формы сечения эти величины должны умножаться на поправочные коэффициенты, приведенные на стр. 443, если расчет на прочность ведется по обычным формулам сопротивления материалов (без учета разницы модулей упругости на растяжение и сжатие).

Коэффициенты  $k_s$  и  $\epsilon_b$  находятся из приведенных ранее графиков (стр. 445).

При наличии литевой корки на деталях величины допускаемых напряжений при изгибе и кручении должны быть снижены на 15—25%.

**Допускаемые напряжения при расчете на выносливость** Величины допускаемых напряжений при симметричном цикле изменения напряжений определяются с учетом влияния размеров  $\epsilon_\sigma$ , концентрации напряжений  $k_\sigma$  и состояния поверхностного слоя  $\beta$  из формул:

$$[\sigma_{-1}]_p = \frac{(\sigma_{-1})_p \epsilon_\sigma \beta}{k_s n}$$

где  $(\sigma_{-1})_p$  — предел выносливости при растяжении — сжатии; для изгиба

$$[\sigma_{-1}]_u = \frac{\sigma_{-1} \epsilon_\sigma}{k_\sigma n} \beta;$$

для кручения

$$[\tau_{-1}]_k = \frac{\tau_{-1} \epsilon_\tau}{k_\tau n} \beta;$$

$k_\sigma$  и  $k_\tau$  — коэффициенты концентрации;  $\epsilon$  — коэффициент, характеризующий влияние абсолютных размеров;  $\beta$  — коэффициент, характеризующий влияние состояния поверхностного слоя и его упрочнения.

**Допускаемые напряжения при асимметричных циклах** для случая простого нагружения (подобие циклов) определяются путем линейной интерполяции в зависимости от  $\frac{\sigma_m}{\sigma_a}$  между значениями  $[\sigma_{-1}]$  и

$$[\sigma_0] = \frac{2[\sigma_{-1}]}{1 + \psi},$$

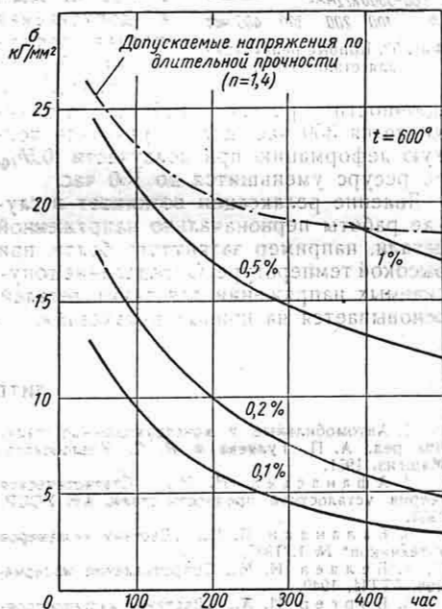
где  $[\sigma_{-1}]$  — допускаемое напряжение при симметричном цикле;  $[\sigma_0]$  — допускаемое напряжение при пульсирующем цикле;  $\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$  — коэффициент,

характеризующий форму диаграммы предельных напряжений.

Значения  $\psi$  представлены в табл. 16. **Запас прочности и допускаемые напряжения при повышенных температурах.** Запас прочности и допускаемые напряжения в зависимости от температуры и времени работы определяются по характеристикам кратковременных испытаний  $\sigma_T$ ,  $\sigma_b$  и характеристикам в условиях длительной работы ( $\sigma_{л.р.}$ ,  $\sigma_{д.л.}$ ,  $\sigma_{-1}$ ).

При статическом длительном нагружении допускаемые напряжения определяются из кривых длительной прочности и полной деформации ползучести. В зависимости от соотношения пределов ползучести и пределов длительной прочности для определения допускаемых напряжений выбирается меньшая для заданного времени работы величина. При этом запас прочности по напряжениям (для длительной прочности) принимается  $n = 1,4 \div 1,6$ .

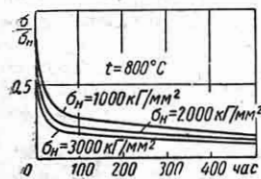
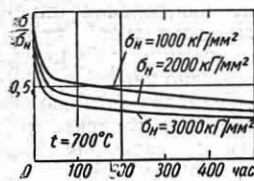
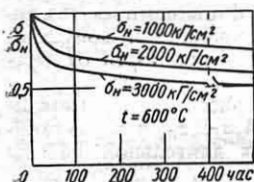
График допускаемых напряжений при повышенных температурах составляется в зависимости от общей длительности



Фиг. 91. График допускаемых напряжений для стали ЭИ69 при температуре 600°С.

работы детали и ее температуры на основе кривых длительной прочности

и кривых полной деформации ползучести. Для этого ординаты кривой длительной прочности уменьшаются в соответствии с запасом прочности, а кривые напряжений, соответствующих полным деформациям  $\sigma_v$ , наносятся в зависимости от принятого допуска полной деформации при ползучести  $\epsilon = 0,1; 0,2; 0,5$  и  $1,0\%$ .



Фиг. 92. Кривые релаксации для стали ЭИ69.

прочности ресурс работы ограничивается 350 час. Если ограничить полную деформацию при ползучести  $0,50\%$ , то ресурс уменьшится до 150 час.

Явление релаксации возникает в случае работы первоначально напряженной детали, например затянутого болта, при высокой температуре. Определение допускаемых напряжений для таких деталей основывается на кривых релаксации.

На фиг. 91 приведен в качестве примера график допускаемых напряжений для стали ЭИ69 при  $t = 600^\circ\text{C}$ . Если напряжения в лопатке турбины составляют  $\sigma = 19 \text{ кг/мм}^2$ , а допускаемая полная деформация  $1\%$ , то по длительной

полной деформации при ползучести  $\epsilon = 0,1; 0,2; 0,5$  и  $1,0\%$

На фиг. 92 представлены кривые релаксации для стали ЭИ69 при различных температурах. По этим кривым при заданном напряжении после заданного времени работы детали можно определить допускаемое первоначальное напряжение. Например, для болтового соединения из стали ЭИ69 при  $600^\circ\text{C}$  начальный натяг соединения  $3000 \text{ кг/см}^2$  после 500 час. работы снижается до  $\sigma = 1500 \text{ кг/см}^2$ .

При переменном нагружении с симметричным циклом допускаемые напряжения определяются из кривых выносливости в зависимости от числа циклов, возникающих во время работы детали, по соответствующему ограниченному пределу выносливости  $(\sigma_{-1})_N$ ;  $n = \frac{(\sigma_{-1})_N}{\sigma_a}$ ,

где  $\sigma_a$  — амплитуда действующих напряжений.

Запас прочности для конструкции, в которой длительно действуют статические  $\sigma_m$  и переменные  $\sigma_a$  напряжения с амплитудой может определяться:

а) пределом длительной прочности

$$n_{\sigma a} = \frac{\sigma_{dl}}{\sigma_m};$$

б) предельной амплитудой при данной асимметрии и числе циклов  $(\sigma_a)_N$

$$n_a = \frac{(\sigma_a)_N}{\sigma_a}.$$

При расчете определяются оба запаса и принимается во внимание меньший из них.

В зависимости от времени работы и соотношения  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  величины запасов прочности  $n$  могут приобретать различные значения, которые для суждения о прочности следует сопоставить с рекомендуемыми.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Автомобильные и конструкционные стали, под ред. А. П. Гуляева и И. С. Козловского, Машгиз, 1951.
2. Афанасьев Н. Н., Статистическая теория усталостной прочности стали, АН УССР, 1953.
3. Баладин П. П., «Вестник инженеров и техников» № 1, 1937.
4. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, ГИИТ, 1949.
5. Биргер И. А., «Вестник машиностроения» № 6, 1948.
6. Гвоздев А. А., Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Стройиздат, 1949.
7. Витман Ф. Ф., Сборник докладов по динамической прочности деталей машин, АН СССР, 1946.
8. Давиденков Н. Н., Динамические испытания металлов, ОНТИ, 1936.
9. Давиденков Н. Н., Проблема удара в металловедении, АН СССР, 1938.
10. Дымов И. А., Строительная механика машин, Техтеоретиздат, 1933.
11. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ, ГИТЛ, 1949.
12. Кинасашвили Р. С., вып. № 55, Оборонгиз, 1943.
13. Киммельман Д. Н., Расчет деталей машин при переменных напряжениях, Машгиз, 1950.
14. Конструкционные стали, справ. под ред. Н. Т. Гудцова, Металлургиздат, 1947.
15. Кудрявцев И. В., Саверин М. М., Рябченков А. В., Методы поверхностного упрочнения деталей машин, Машгиз, 1949.

16. Кудрявцев И. В., Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении, Машгиз, 1951.
17. Малинин Н. Н., Основы расчета на ползучесть, Машгиз, 1949.
18. Марковец М. П., Диаграммы истинных напряжений и расчет на прочность, Оборонгиз, 1947.
19. Некоторые вопросы усталостной прочности стали, сб., Машгиз, 1953.
20. Одинг И. А., Основы прочности металлов паровых котлов, турбин и турбогенераторов, Энергоиздат, 1949.
21. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, под ред. С. Д. Пономарева, Машгиз, 1950 и 1952.
22. Повышение прочности деталей машин, сб., АН СССР, 1949.
23. Повышение усталостной прочности деталей машин поверхностной обработкой, сб., Машгиз, 1952.
24. Прочность при неустановившихся режимах переменных напряжений, сб., АН СССР, 1954.
25. Работнов Ю. Н., Сопротивление материалов, ГТТИ, 1950.
26. Ратнер С. И., Пластичность и прочность металла, Оборонгиз, 1949.
27. Решетов Д. Н., Расчет деталей станков на прочность, сб., АН СССР, 1954.
28. Ржаницын А. Р., Расчет сооружений с учетом пластических свойств металлов, Строймориздат, 1948.
29. Саверин М. М., Контактная прочность, Машгиз, 1946.
30. Серенсен С. В., Известия Отделения технических наук АН СССР № 7, 1938; Инженерный сборник, т. 1, 1941.
31. Серенсен С. В., Вестник машиностроения № 6, 1943.
32. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М. и Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроении, Машгиз, 1945.
33. Серенсен С. В., Когаев В. П., Козлов Л. А., Шнейдерович Р. М., Несущая способность и расчет деталей машин на прочность, Машгиз, 1954.
34. Соколовский В. В., Теория пластичности, АН СССР, 1946.
35. Стрелецкий Н. С., Курс металлических конструкций, Стройиздат, 1940.
36. Трапезин И. И., Прочность металлов при переменной нагрузке, Машгиз, 1948.
37. Труды ЦНИИТМАШ № 6, Исследование стали ЭИ69, Машгиз, 1947.
38. Ужик Г. В., Методы испытаний металлов и деталей на выносливость, АН СССР, 1948.
39. Ужик Г. В., Сопротивление отрыву и хрупкая прочность, АН СССР, 1950.
40. Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.
41. Хрущов М. М., Усталость баббитов, АН СССР, 1943.
42. Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1951.
43. Шапов Н. П., Исследование металла железнодорожных конструкций, Трансжелдориздат, 1947.
44. Энциклопедический справочник "Машиностроение", т. 2, кн. 2-я, Машгиз, 1947.
45. Энциклопедический справочник "Машиностроение", т. 3 и 4, Машгиз, 1947.
46. Яги Ю. И., Вестник инженеров и техников № 6, 1931.

ГЛАВА XV

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ, НАПРЯЖЕНИЙ И УСИЛИЙ**

Для определения напряжений и усилий наряду с расчетом широко используются экспериментальные методы, основанные на различных способах измерения деформаций. Экспериментальными методами решаются следующие задачи:

- 1) определение усилий, возникающих в отдельных сечениях детали и элементах конструкции под заданной нагрузкой;
- 2) нахождение распределения, величины и концентрации напряжений, возникающих в деталях;

3) определение динамических усилий и напряжений, вызываемых колебаниями и ударами в машинах;

4) определение жесткости деталей и целых конструкций;

5) определение остаточных напряжений в детали.

Определение напряжений и усилий может производиться как на натуральных деталях, так и на их моделях (табл. 1).

Применение основных экспериментальных методов

Таблица 1

Решаемая задача	Метод решения	Ссылки (страницы, главы, литература)
1. Определение действующих нагрузок и усилий (и перемещений) в связи с режимами работы машины	Тензометрирование, регистрация давлений и вибраций (преимущественно электрическими методами). При натуральных и стендовых испытаниях применительно к эксплуатационным условиям работы машин	Стр. 508, 511, 513; табл. 9. Аппаратура стр. 492, 512; [4], [5], [10], [11], [26], [28], [30], [42], [43], [47], [50], [54], [55]
2. Определение деформаций и напряжений в отдельных местах натуральных деталей и конструкций; выявление нагрузок по деформациям	Тензометрирование, измерение перемещений и применение метода лаковых покрытий. При натуральных, стендовых и лабораторных испытаниях с динамическими и статическими нагрузками	Стр. 499, 511; табл. 3, 6, 9, 10. Аппаратура стр. 490, 492, 511, 515; [3], [5], [7], [19], [26], [42], [43], [47], [50], [51], [54].
3. Изучение концентрации и распределения напряжений; выбор формы детали, дающей меньшие напряжения	Тензометрирование на моделях и деталях (преимущественно малобазные тензометры); применение лаковых покрытий и поляризационно-оптического метода. При лабораторных (и стендовых) испытаниях со статическими (и динамическими) нагрузками	Стр. 507, 528; табл. 3, 6, 16. Аппаратура стр. 490, 522; [8], [15], [24], [33], [41], [50], [52], [53]
4. Определение остаточных зональных напряжений (технологических, монтажных)	Тензометрирование, измерение перемещений и метод лаковых покрытий при снятии остаточных напряжений с применением разрезки деталей; рентген-тензиометрия без разрезки деталей. При лабораторных и стендовых испытаниях на натуральных деталях и конструкциях	Аппаратура стр. 490, 493, 511, 515; [49], [50], [51]
5. Определение жесткости деталей; выявление состояния монтажа конструкций путем приложения нагрузок	Тензометрирование и измерение перемещений. При лабораторных и стендовых испытаниях со статической и динамической нагрузками; в натуральных условиях для оценки влияния условий сопряжения деталей	Стр. 514; табл. 10. Аппаратура стр. 511; [55]

## ТЕНЗОМЕТРИРОВАНИЕ

### Основные характеристики тензометров

**Тензометрирование** — измерение деформаций, выполняемое с помощью приборов (*тензометров*). В общем случае тензометрическая аппаратура (и аппаратура для измерения перемещений) состоит из частей: 1) воспринимающей деформации (*датчик*); 2) передающей и преобразующей эффект ее действия (усиление, интегрирование, дифференцирование); 3) указателя для визуальных отсчетов или регистратора; в электрической аппаратуре датчик, преобразующая и регистрирующая части соединяются проводами (кабелем).

**База тензометра** — длина участка, на котором производится измерение деформаций (расстояние между острыми ножом или длина тензочувствительной части наклеиваемого датчика). Средняя (на длине базы) относительная линейная деформация

$$\epsilon = \frac{(\Delta s)}{s} = \frac{\Delta}{ms} \quad (1)$$

Здесь  $(\Delta s)$  — удлинение (или укорочение) базы тензометра;  $\Delta$  — приращение отсчета по шкале или ордината записи при регистрации;  $m$  — масштаб тензометра, дающий отношение величины отклонения стрелки по шкале или ординаты записи при регистрации к величине деформации, вызвавшей это перемещение

(влияние поперечной тензочувствительности при наклеиваемых датчиках см. табл. 6).

Классификация тензоизмерительной аппаратуры производится по следующим признакам: а) по виду измеряемой деформации (измерение линейных деформаций, сдвига, сочетания компонентов деформаций); б) в зависимости от длины базы (малобазные до 4 мм, среднебазные до 25 мм, с большой базой более 25 мм); в) по положению измеряемого волокна (в поверхности детали, в фиктивном волокне на некотором расстоянии от поверхности детали); г) по характеру изменения измеряемой величины во времени (статическое, динамическое с различными диапазоном частот и продолжительностью); д) по способу отсчета или регистрации (визуальный отсчет, запись механическая или фотографическая); е) по дистанционности измерений (отсчет или регистрация на месте измерения — весь измерительный прибор на детали; дистанционные измерения — датчик на объекте испытаний и регистрация на стороне с применением проводной связи или без проводов; ж) по условиям среды, в которой ведутся измерения (при нормальной, при пониженной, при повышенной или при высокой температуре, в условии влажности, в условии газовой среды и пр.); з) по способу увеличения и принципу действия аппаратуры (с ме-

Таблица 2

Ориентировочные характеристики типов электрических датчиков для измерения динамических деформаций

Метод	Относительная тензочувствительность тензодатчиков	Возможность использования без усилителей	Диапазон измеряемых частот в гц*	Наименьший вес датчика в г
Индуктивный (реактивная катушка с железным сердечником)	10	Без или с усилителем	0—1 000	15
Индуктивный, трансформаторный (трансформаторная связь двух электрических цепей)	20	То же	0—1 000	5
Емкостный (с изменением расстояния между пластинами)	10	С усилителем	0—1 000	20
Реостатный (со скользящим контактом)	200	Без усилителя	0—100	20
С графитовыми столбиками, омического сопротивления	200	То же	10—300	100
Полупроводниковый (углеродистый), омического сопротивления, наклеиваемый	5	Обычно с усилителем	0—1 000	0,1
Проволочный, омического сопротивления, наклеиваемый	1	С усилителем или без усилителя**	0—50 000 0—1 000 0—500	0,05 10 20
Магнитоупругий	30 и более	С усилителем		
Электронный (ламповый)	200	Без или с усилителем		

\* При соответствующих характеристиках усилительной и регистрирующей аппаратуры.

\*\* Мощные датчики или обычно применяемые при использовании специализированного осциллографа.

ханической передачей, оптико-механические, электромеханические, электрические, оптические, пневмомеханические); по электрическому принципу действия параметрические: индуктивные, емкостные, омического сопротивления; энергетические, генераторные; пьезоэлектрические, магнитоэлектрические и др.); см. табл. 2 и т. 1, стр. 416.

Условия измерения определяют выбор типа и характеристик аппаратуры.

**Чувствительность и погрешность тензометров.** Чувствительностью прибора называется отношение перемещения указателя прибора к изменению измеряемой величины, вызвавшему это перемещение. Погрешностью называется средняя (при большом числе измерений) величина разности между измеренными и действительными значениями измеряемой величины; выражается в процентах по отношению к диапазону измерения (разности между верхним и нижним пределами измерения). Основная погрешность в процентах при нормальных условиях работы дает класс измерительного прибора (по ГОСТ 1845-52 установлены 5 классов: 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5).

### Приборы и аппаратура для измерения деформаций

#### I. Определение концентрации и неравномерности распределения напряжений (при статическом нагружении)

1. Зеркальный малогабаритный тензометр Лоренца [49]. Датчик устанавливается в направлении базы; отсчеты—по рейке через трубу. Увеличение 5000, база 5 мм (тип В); увеличение 10 000, база 2,5 мм (тип В).

2. Аппаратура с индуктивными малогабаритными датчиками. Датчик устанавливается на детали в месте измерения. С деформацией в датчике меняется воздушный зазор в магнитной цепи датчика и происходит изменение индуктивного сопротивления измерительной цепи из-за изменения магнитного сопротивления. Особенности индуктивных малогабаритных датчиков: а) малая база датчика; б) возможность многократного использования одного и того же датчика и непосредственной его тарировки; в) применимость только для измерений при статическом нагружении (при отсутствии тряска).

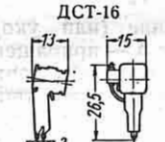
**Технические характеристики** [33]: база тензометра 2—4 мм; увеличение от 50 000 до 800 000; цена деления шкалы 0,02—0,07 мк; сила тока в датчике 10—15 ма; напряжение на выходе генератора 3 в и частота питания 500—1000 гц. Линейная характеристика в диапазоне относительных деформаций  $\pm 1,5 \cdot 10^{-3}$ . Погрешность 2—3% от диапазона.

Габариты датчиков в зависимости от применения см. табл. 3. Комплект аппаратуры состоит из: а) датчика с точечными (керновыми или ножевыми) опорами, снабженного приспособлениями для установки и крепления на детали;

б) измерительного устройства, включающего электрическую схему с ламповым усилителем, указывающий прибор и блок питания.

Таблица 3

Основные типы малогабаритных индуктивных датчиков и их назначение

Тип и габариты в мм	Назначение
<p>ДСТ-2</p> 	Исследование общей неравномерности распределения напряжений
<p>ДСТ-13</p> 	Определение концентрации напряжений в галтелях
<p>ДСТ-16</p> 	Определение концентрации напряжений на фаске поперечного отверстия

Способы крепления в зависимости от конфигурации и размеров детали—струбцинками, упругими стальными прутками или рамкой, с помощью координатного устройства. Поверхности детали высокой твердости перед установкой датчика омедняется (слой 0,01—0,04 мм).

3. Малогабаритный фотоэлектрический тензометр [49]. Отсчет по микроамперметру. Не требуется применение усилителя. Базы от 1,5 до 6 мм, увеличение ~30 000, высота тензометра до 60 мм.

4. Пневматический тензометр см. [38].

5. Малогабаритные проволочные тензометры с базой 2,5—4 мм см. стр. 491.

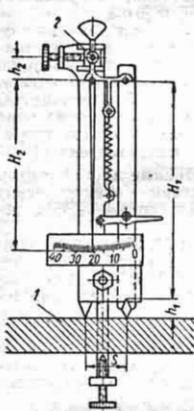
#### II. Определения деформаций в деталях машин и элементах конструкций

##### Статические деформации

1. Тензометр рычажный универсальный (типа Гугенберга), с постоянной или переменной базой. Увеличение механическое; отсчеты—по шкале. С помощью струбцинок и других приспособлений (зацепы, приклеиваемые колодки, привариваемые тяги, присоски, магниты) тензометр прижимается в любом положении к поверхностям детали или образца 1 (фиг. 1) через две ножевые опоры. Предельная величина измеряемой деформации—до 0,2 мм (с перестановкой стрелки приспособлением 2). Увеличение  $\frac{H_1}{h_1} \cdot \frac{H_2}{h_2} = 300 + 2000$  (в зависимости от марки тензометра). База

10 и 20 мм; удлинитель позволяет получить базы 100, 200 и 1000 мм.

2. Тензомер Аистова [4]. Увеличение рычажное 5:1. Величина деформации определяется перемещением микрометрического винта до замыкания электрической цепи. Цена деления шкалы 0,01 мм, число делений на диске микрометра 100, число оборотов диска до 10. База 25 мм (может быть уменьшена до 15 мм). Габарит 40×40×65 мм; вес (без креплений) 50 г.



Фиг. 1.

3. Зеркальный тензомер (типа Мартенса) [15] для определения предела упругости на образцах. Увеличение оптико-механическое. Призма с зеркальцем при помощи пружинной скобы прижимается к образцу. Отражение шкалы в зеркальце наблюдается через зрительную трубу. Обеспечивается высокий уровень точности измерения. Увеличение прибора  $m = \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{a \sin \alpha}$ ; при

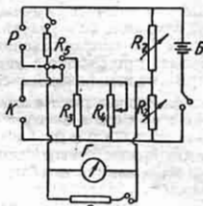
$\alpha < 2^\circ$  увеличение  $m \approx \frac{2L}{a}$  (см. табл. 10).

4. Съемный тензомер для измерения остаточных деформаций [4], получаемых в результате длительных нагрузок детали или при усадке материала. Две ножки тензометра имеют грани, которыми он при измерениях устанавливается на базу, фиксированную на поверхности исследуемой детали (шарики, штифты): база от 20 до 300 мм.

5. Измерительный мост постоянного тока с гальванометром для проволочных тензодатчиков сопротивления. Способы измерения: а) нулевой метод; б) метод непосредственного отсчета. Предназначен для измерения при малом числе тензодатчиков (см. стр. 494). Требуемая чувствительность гальванометра  $\approx 10^{-8}$  а, напряжение питания моста  $\sim 1,5 + 9$  в.

Рабочий R и компенсационный K датчики включаются в соседние плечи моста, приведенного на фиг. 2 [28]. Сопротивления рабочего и компенсационного датчиков  $R_P \approx R_K = R_1$ ;  $R_2$  — сопротивления в виде датчиков, наклеенных на двух сторонах изги-

баемой винтом в обе стороны балочки; обычно  $R_2 = R_1$ . При работе без компенсационного датчика включаются сопротивления  $R_3 = R_1 + 3$  ом и  $R_4 = -20 + 25$  ком (переменное, проволочное). Сопротивлением  $R_5 \approx 200$  ком шунтируется рабочий датчик при тарировке и при проверке измерительной схемы; сопротивление  $R_6$  — для предохранения гальванометра от повреждения при грубой настройке.



Фиг. 2.

В схеме фиг. 2 сопротивлений  $R_3$  и  $R_4$  может не быть, так как обычно измерения ведутся с компенсационными датчиками. Питание от батареи  $U = 1,5 + 9$  в.

Требуемая чувствительность гальванометра

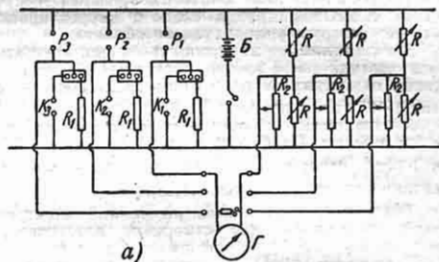
$$\Delta J_2 = \frac{U}{R_1} \cdot k(\Delta\sigma) \cdot \frac{1}{2 \left( 2 \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} + 1 \right)}, \quad (2)$$

где  $R_2$  — сопротивление гальванометра;  $k$  — коэффициент тензочувствительности датчика;  $\Delta\sigma$  — требуемая по механическому напряжению чувствительность схемы.

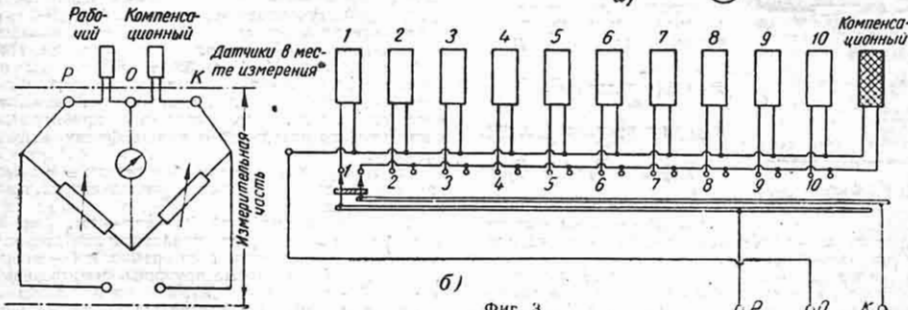
Пример. Выбрать гальванометр при  $U = 5$  в;  $R_1 = R_2 = 240$  ом;  $k = 2,1$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup> и при требуемой точности замера напряжений

$\Delta\sigma = \pm 10$  кг/см<sup>2</sup>. Задаем  $\frac{R_2}{R_1} = 1 + \delta$ ; принимая, например,  $\frac{R_2}{R_1} = 1$ , получим по формуле

(2)  $\Delta J_2 = 2,60 \cdot 10^{-8} a$ . По каталогу подбирается гальванометр с теневои стрелкой с сопротивлением 254 ом. Так как  $\frac{250}{240} \approx 1$ , то уточнение в приведенном подсчете делать не надо.



а)



Фиг. 3.

При большом числе тензодатчиков применяются мостовые схемы с нулевым методом измерения или с непосредственным отсчетом: а) *многоточечные мосты* (фиг. 3, а); б) *одноточечные мосты с ручным или автоматическим переключением датчиков* (фиг. 3, б). В схеме фиг. 3а сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  могут отсутствовать при работе с компенсационными датчиками при малом разбросе сопротивлений датчиков.

б. Измерительный мост постоянного тока с чувствительным гальванометром катушечного типа, встраиваемый в шлейфный осциллограф, допускает поочередную запись показаний с большого числа параллельных тензодатчиков при применении ручного или автоматического переключателя. Применяется также для записи динамических деформаций и усилий при частотах до 100–200 гц (см. табл. 5).

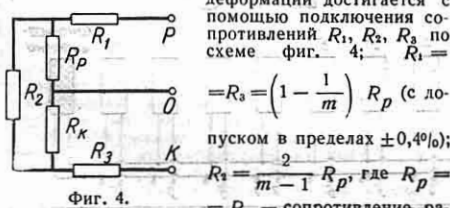
7. Электронный измеритель статических деформаций для проволочных тензодатчиков сопротивлением 50–200 ом (см. стр. 494). Общий диапазон измерений относительных линейных деформаций  $\pm (0,3 \div 0,6)\%$ . Одно деление лимба реохорда соответствует относительной деформации  $1 \cdot 10^{-5}$  или  $1 \cdot 10^{-6}$ . Напряжение питания датчика 120 мВ порядка 3в. Длина измерительной линии до 50 м (и больше). Для поочередных измерений с большого числа тензодатчиков применяются в комплекте ручные или автоматические переключатели на 10–20 датчиков. Питание измерителя от сети переменного тока или от аккумулятора.

В электронном измерителе деформаций применяется схема уравновешенного моста, питаемого от генератора переменным напряжением 5–6 в, 800–1200 гц, или от сети 50 гц. Измерительный мост состоит из рабочего датчика, устанавливаемого на исследуемом объекте, и компенсационного, устанавливаемого на исследуемом объекте или на ненапряженных образцах из того же материала, что и исследуемый объект. Напряжение небаланса при деформации снимается трансформатором и усиливается электронной схемой. Обеспечены переключение диапазонов для расширения шкалы измерений, регулировка чувствительности для работы с датчиками различной тензочувствительности (без внесения поправок), проверка отсутствия сползания нуля в схеме и корректировка его без разгрузки исследуемого объекта.

*Электронный измеритель статических деформаций ИД-2* [19] питается постоянным током от аккумулятора и от батареи. Цена деления  $1 \cdot 10^{-5}$ ; вес прибора 14 кг.

*Электронный измеритель Института машиноведения АН СССР* с ценой деления  $1 \cdot 10^{-5}$  и  $2 \cdot 10^{-6}$  относительной деформации — см. [54]; питание от сети. См. также [43].

*Расширение диапазона измерений* электронного измерителя для измерения пластических деформаций достигается с помощью подключения сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  по схеме фиг. 4;



$$R_1 = R_2 = R_3 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) R_p \text{ (с до-}$$

пуском в пределах  $\pm 0,40\%$ );

$$R_2 = \frac{2}{m-1} R_p, \text{ где } R_p = R_k \text{ — сопротивление рабо-}$$

бочего и компенсационного датчиков;  $m$  — требуемый коэффициент увеличения шкалы измерителя.

8. Электронный автоматический регистратор деформаций для проволочных тензодатчиков сопротивления. Автомати-

ческая запись на бумагу с пробиванием точечной или печатанием точек или цифр показаний от поочередно подключаемых тензодатчиков.

Применяется для измерений с большого числа тензодатчиков в короткое время. Скорость измерений — 1 сек. один-два датчика; погрешность регистрации 0,5–2%. См. [49] и [54].

9. Устройство для автоматической записи диаграмм деформации при испытании образцов и деталей машин. Поворот барабана, на котором гелется запись, производится непосредственно от тензомера, в зависимости от деформации; перемещение пера по образующей — от механического, электрического или гидравлического силоизмерителя.

**Статические и динамические деформации.** Сравнительные характеристики электрических тензодатчиков для измерения динамических деформаций — см. табл. 2.

1. Струнный метод Н. Н. Давиденкова [7]. Деформация определяется по изменению частоты собственных колебаний струны, закрепляемой концами. Измерение частот производится с помощью электронного генератора-частотомера; регистрация — на осциллограф.

При погрешности измерения частоты 1 гц и при длине струны  $l = 100$  мм погрешность измерения относительной линейной деформации  $\sim 0,3 \cdot 10^{-5}$ .

2. Царапающий тензомер. Запись на пластинке острым динамическим деформаций в натуральную величину в течение короткого промежутка времени [49]. При деформации записывающий рычаг приводится в движение пружиной.

Дешифровка записи — с помощью микроскопа. Малая точность; запись по времени — качественная. Величина записываемой деформации — от 0,0025 до 1,25 мм; база 50 мм; вес тензомера 2 г.

3. Аппаратура с индукционными датчиками для измерения деформаций в деталях машин. Преимущество индуктивных тензометров для измерения статических и динамических деформаций: а) простота и надежность; б) отсутствие значительных деформаций и трений в частях датчика, что обеспечивает возможность его использования при неограниченном числе циклов деформаций; в) возможность при достаточных габаритах датчиков обойтись без усиления сигналов от датчиков; г) значительная величина мощности датчика и в связи с этим меньшее влияние помех. Анализ схем см. [17], [29].

Аппаратура Института машиноведения АН СССР [24] с индукционными датчиками имеет шесть каналов для регистрации на шлейфный осциллограф деформаций, изменяющихся с частотой в пределах от 0 до 250 гц. Датчики имеют базу 20 мм и диапазоны измеряемых деформаций  $\pm 20$ ;  $\pm 40$  (упругие деформации) и  $\pm 600$  мк (пластические деформации). Погрешность измерения в пределах  $\pm 2\%$  от диапазона измерений. Питание от батареи 44–48 в, 3,5 а. Аппаратура состоит из: 1) датчиков; 2) лампового шестиканального генератора; 3) выпрямительно-компенсационного устройства с измерительным прибором и клеммами для подключения к шлейфному осциллографу.

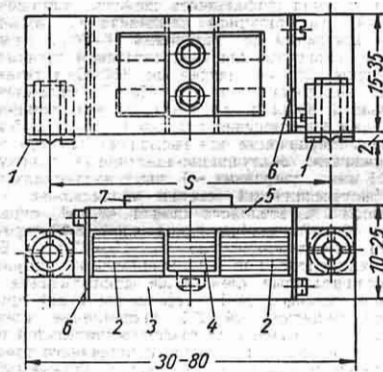
Способ крепления датчиков к детали — в зависимости от условий измерения (винты, сварка, прижатие остриями).

Одно из выполнений датчика — см. фиг. 5: 1 — опорные призмы для крепления винтами или скобками; 2 — сердечники на рамке 3; 4 — якорь на рамке 5; 6 — листовые пружины, связывающие рамки; 7 — клеммник. Датчик имеет двойную реактивную катушку с жестко соединенными сер-



дечниками, еключаемую по схеме моста. Выполнение других типов индукционных датчиков деформации см. [11], [26], [38], [49], [50].

Аппаратуру для регистрации скручивающих моментов см. [26], [28], [30], [50], [55].



Фиг. 5.

4. Реостатный тензометр [26]. При деформации изменяется положение скользящего контакта. Используется как индикатор прогибов упругого элемента в приборах при дистанционных измерениях (датчики давления, динамометры). Перемещение скользящего контакта в диапазоне измерения не менее 1—2 мм. Применяется схема без усиления.

5. Тензометр с графитовыми столбиками [26], [28], [47]. При деформации перемещается ножка датчика, и этим изменяется сила сжатия одного или двух столбиков, связанных с ножкой датчика и включенных в схему моста. Отсчеты — по стрелочному гальванометру или запись шлейфным осциллографом (без усиления). Малая стабильность, особенно при статических измерениях, и значительное усилие, необходимое для перемещения ножек тензометра при деформации.

Характеристики датчиков ЦНИИТМАШ: база 30 и 100 мм; вес 130 и 460 г; предел измеряемой деформации  $3 \cdot 10^{-3}$  и частота до 300 гц; изменение сопротивления при деформации до 5%; рабочая нагрузка в столбике до 60 кг; питание моста от аккумулятора 25 в; ток в столбике 200 мА.

6. Аппаратура с емкостными и индуктивными датчиками для измерения деформаций (усилий и давлений) типа ЭНИМС [3], [5]. Схема амплитудной модуляции. Запись шлейфным осциллографом. Регистрируемые перемещения от 0,002 мм при индуктивном датчике и от 0,001 мм при емкостном датчике. Частота регистрируемых деформаций от 0 до 1000 гц; несущая частота 5000 гц; выходной ток 20 мА. Питание от сети.

7. Аппаратура с полупроводниковыми наклеиваемыми датчиками омического сопротивления (графит, сернистый свинец) [26], [28]. С деформацией изменяется контактное сопротивление полупроводника. Датчик включается в схему моста. Тензочувствительный слой в датчике нанесен на пластинку из пластмассы, полосу фольги с изоляцией или бумагу. Допускается переключать датчика. Для углеродистых датчиков коэффициент тензочувствительности 15—20, сопротивление 10—15 ком; требуется защита от влаги. Применяется для измерений на вращающихся деталях в связи

с получаемым малым влиянием изменения сопротивления в контактах токоотвода.

8. Аппаратура с магнитоупругими (магнитоэлектрическими) тензодатчиками [18], [26]. Используется изменение импеданса цепи, питаемого переменным током 10—50 кгц, в связи с изменением магнитной проницаемости датчика при деформации.

Датчик из пермаллоевой пластинки толщиной 0,1—0,2 мм, вырезанной в форме замкнутого прямоугольника, приклеивается длиной стороной пластинки к поверхности детали. Коэффициент тензочувствительности от 100 до 200. Малая стабильность; линейная характеристика в пределах относительной деформации  $\pm 10^{-3}$ ; погрешность измерений до 10% (и выше).

9. Аппаратура с наклеиваемыми проволочными тензодатчиками омического сопротивления. Основные преимущества: а) монолитное соединение датчика с поверхностью детали в месте измерения; б) малые вес и толщина датчика, обеспечивающие при соответствующих характеристиках измерительной аппаратуры, применяемой с датчиками, практическую безинерционность (ориентировочно до 50 000 гц) измерения деформаций; в) малые габариты датчика; г) удобство крепления на поверхности исследуемой детали (наклейка); д) возможность измерения в сложных условиях испытания; е) универсальность применения. Погрешность измерения 1—2% и ниже.

Основные характеристики проволочных тензодатчиков: база от 2 до 100 мм и более; тензочувствительность датчика от 1,7 до 3,5; сопротивление датчика от 50 до 5000 ом (обычно 70—200 ом); пригодны при малых (упругих) и больших (пластических) деформациях до  $\pm 6\%$  и при температурах нормальной, пониженной и повышенной до 1000°С (при соответствующем устройстве датчика); допустимый ток в датчике из проволоки 30 мк порядка 25 мА при длительной работе и 50 мА или больше при кратковременном включении; сопротивление изоляции наклеенного датчика должно быть не менее 50—200 мгом. Датчик может приклеиваться к плоской или криволинейной поверхности детали и измерять среднюю на длине базы линейную деформацию или сочетание компонентов деформации в зависимости от формы чувствительной решетки (см. табл. 6).

Для питания и измерения показаний датчиков используется электронная генераторно-усилительная аппаратура, а также мостовые схемы с индикаторами и чувствительные гальванометры с питанием датчиков постоянным током; регистрация — шлейфным или катодным осциллографом.

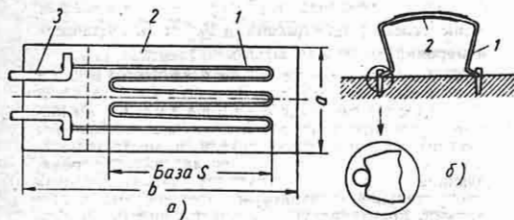
Мощные проволочные датчики, применяемые без усилителей, — см. [56].

Новый тип тензодатчиков сопротивления из фольги — см. [57].

Измерительная аппаратура разделяется в зависимости от характера изменения деформаций во времени на следующие типы: 1) для измерения статических деформаций; 2) для измерения статических и динамических деформаций частотой от 0 до 1000—1500 гц; 3) для измерения динамических деформаций частотой от 10 до 50 000 гц. Для обеспечения измерений с большого числа тензометров и для быстрой регистрации показаний применяются соответствующее число каналов измерений и автоматические или ручные переключатели датчиков.

Проволочные тензодатчики. Основным элементом датчика является тензочувствительная проволока (константан, никром и др.) диаметром 15—50 мк, располагаемая в форме петель 1 (фиг. 6, а и табл. 6) внутри слоя клея 2 (на бумаге или без нее). К концам проволоки подпаины (приварены) тонкие выводы 3. Размеры а и б

датчика зависит от базы  $s$ , числа и ширины петель; толщина датчика 0,1–0,4 мм (без защиты); расстояние от тензочувствительной проволоки до поверхности детали 40–150 мк. Величина омического сопротивления датчика зависит от базы, числа петель, диаметра проволоки тензочувствительной решетки и выбирается в соответствии с применяемой измерительной аппаратурой. **Допускаемый разброс** по тензочувствительности в одной партии изготовленных датчиков до  $\pm 0,5\%$  и по сопротивлению до  $\pm 0,1\%$  (ограничение, необходимое при многоточечных измерениях



Фиг. 6.

с одним измерительным устройством); тензочувствительность проверяется выборочной тарировкой.

**Коэффициент тензочувствительности** датчика (сохраняется при упругой и пластической

деформациях)  $k_0 = \frac{\Delta R}{R \epsilon_0}$ ;  $\Delta R$  — изменение омического сопротивления датчика при деформации и  $\epsilon_0$  — относительная линейная деформация в направлении базы, определяемые при тарировке при линейном напряженном состоянии (на балке или растягиваемом образце) (см. стр. 499). Изменение сопротивления датчика связано с изменением длины, площади поперечного сечения и удельного сопротивления материала проволоки при деформации.

**Поперечная тензочувствительность** проволоочного датчика (влияние на показания тензометра при линейном напряженном состоянии деформации в направлении, перпендикулярном к базе датчика) не более 1%; при меньшей базе датчика величина  $k_0$  при данном  $R$  меньше из-за уменьшения активной части длины тензочувствительной проволоки (см. табл. 6). Подробнее см. [54].

**Влияние изменения температуры** на показания проволоочных тензодатчиков связано со следующими его характеристиками, определяемыми на 1°С: а) **температурным коэффициентом** электрического сопротивления — изменением сопротивления датчика при изменении его температуры; б) **кажущимся напряжением**, соответствующим изменению сопротивления наклеенного на деталь датчика при изменении температуры датчика и детали; в) **термоэлектродвижущей силой**, создаваемой в соединении концов двух проводов при различной их температуре.

**Методы температурной компенсации:** в соседние плечи моста включаются два одинаковых датчика — рабочий и компенсационный (одновременно последний может быть и рабочим), находящиеся в одинаковых температурных условиях, или в некоторых случаях тензочувствительная часть датчика выполняется из двух материалов с температурными коэффициентами противоположных знаков (например, константан и коньел).

Выполнение датчиков для измерений упругих деформаций при комнатной температуре. Применяе-

мые для изготовления материалы: 1) **тензочувствительная проволока**, калиброванная голая (или эмалированная) из константана (при температурах измерения до 400°С), нихрома (при температуре до 1000°С) диаметром от 15 до 50 мк. Проволока из константана (ГОСТ 492-41) отжигается (лучшая стабильность свойств, улучшение условий температурной компенсации, возможность измерений до удлинений 4–6%), Режим отжига в вакууме для константановой проволоки диаметром 25 мк: нагрев до 650°С в течение 2 час., выдержка 1 час при 650°С, охлаждение с печью; 2) **бумага плотная писчая** толщиной до 0,1 мм и папиросная толщиной около 0,015 мм; 3) **клеи**, твердеющие при высыхании или при полимеризации: целлулоидно-ацетоновый (схватывание 15 мин., твердение ~9 час.); нитроцеллюлозный быстроотверждающий (состав: колаксиллина 6 ч., канифоли 2 ч., этилового спирта 40 см<sup>3</sup>, серного эфира 60 см<sup>3</sup>); карбинольный клей БФ2 (применяется при температурах до 100–120°) и БФ4 (при температурах до 50°); бакелитовый, кремний-нитроглифталевые клеи № 206 (пропитывание бумажной основы), № 200 (крепление к ней проволоочной решетки), № 212 (закрепление концов выводов); 4) выводы от тензочувствительной проволоки (соединяются с помощью оловянного припоя на канифоли или точечной сварки) медные луженые диаметром 0,1–0,4 мм или плоские 1 × (0,04–0,06) мм; 5) защита датчиков от повреждений и влияния воздушного потока из слоя сушка или фетра.

Способы намотки датчиков [1], [28], [54]: 1) ручная намотка на гребенку или на стальные штифты диаметром 0,3 мм, база тензометра 10–25 мм; 2) перенос решетки, наматанной вручную (10–50 мм) или с помощью поворотного столика (базы 2,5–50 мм); 3) намотка на цилиндр — двуслойный датчик (базы 2,5–10 мм). Наклеиваемый проволоочный тензодатчик (свободный датчик, закрепляемый по концам), — см. [11], [28].

Выполнение датчиков для измерения пластических деформаций при комнатной температуре. **Наклеиваемый датчик** отличается от обычного выполнения: применяются отожженный константан, папиросная бумага, неприклеенные выводы. **Датчик с упругим элементом** допускает неограниченно повторные измерения; см. [24], [47]. Упругий элемент П-образной формы 1 с проволоочным тензодатчиком 2 (фиг. 6, б) выполняется из стали с высоким пределом упругости или фосфористой бронзы; кольцевой — из пластмассы, фосфористой бронзы или стали. Необходимая толщина упругого элемента  $\delta = k \frac{2}{s} < \left( \frac{2}{3} a^2 + \frac{al}{2} \right)$  (П-образный датчик) и  $\delta = a^2 \frac{d^2}{4s}$  (кольцевой датчик), где  $s$  — база проволоочного тензодатчика;  $a$ ,  $l$  и  $d$  — высота и ширина П-образного элемента и диаметр кольцевого элемента;

$k = \frac{\epsilon_{\text{датч}}}{\epsilon_{\text{пласт}}}$  — требуемый коэффициент преобразования датчика;  $\epsilon_{\text{датч}}$  — наибольшая допускаемая деформация в месте наклейки датчика и  $\epsilon_{\text{пласт}}$  — наибольшая величина измеряемой пластической деформации;  $\alpha = 1,0 \div 1,5$ .

**Пример.** Для П-образного датчика при  $F = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> (сталь);  $a = 1$  см;  $l = 2$  см;  $s = 2,4$  см;  $\epsilon_{\text{датч}} = 3000$  кг/см<sup>2</sup> и диапазоне измерения  $\pm 3\%$  величина

$$k = \frac{3000}{\frac{2 \cdot 10^6}{0,03}} = \frac{1}{20},$$

необходимая толщина упругого элемента

$$\delta = \frac{1}{20} \frac{2}{2,4} (0,67 + 1,0) = 0,07 \text{ см.}$$

Датчики для измерения деформаций при повышенных температурах должны при повышенной температуре обеспечивать: а) прочную связь тензочувствительной проволоки с поверхностью исследуемой детали; б) сохранение необходимой изоляции (несколько мегомов) проволоки от детали; в) исключение влияния изменений температуры на омическое сопротивление проволоки; г) защиту проволоки от коррозии при длительных испытаниях. При температуре до 200° С применяются датчики с решеткой из отожженного константана, выполненные на бакелите; для высокой температуры до 900° С — из нихромовой проволоки. Концы тензочувствительной проволоки привариваются к выводам из нихрома диаметром 0,2—0,3 мм или (при длинной проволоке) из никеля.

Способы выполнения датчиков для измерений при высоких температурах: 1) незащищенная тензочувствительная решетка; 2) тензочувствительная решетка в тонком жаропрочном слое; 3) тензочувствительная решетка, смонтированная на изолирующем слое, скрепленном с поверхностью детали. Закрепление датчика на поверхности детали — термостойкой обмазкой или эмалью (применяется смесь высокомодульного жидкого стекла с тальком или окисью алюминия), наносимыми послойно и высушиваемыми при постепенном повышении температуры. В рабочий датчик для статического тензометрирования включаются элементы, компенсирующие влияние изменения температуры, или регистрируется температура датчика для внесения поправок.

Наклейка тензометров на детали. Применяются клеи: при нормальной температуре — целлулоидно-ацетоновый (сохнувший без прижигания к детали), карбинольный, БФ4 (полимеризующиеся, с прижатием); при температуре до 250° С — бакелитовый (полимеризующийся, с прижатием); при необходимости защиты от влаги — клей ГМН-100.

Принимаемое число компенсационных датчиков зависит от величины разброса в сопротивлениях датчиков и от изменений температуры при испытании. Число проводов к измерительному устройству от датчиков зависит от схемы питания и числа компенсационных датчиков.

Способы выполнения проводки между датчиками и измерительной аппаратурой: а) прокладка медного провода диаметром 0,15—1,0 мм в изоляции хлорвиниловой, эмаль с шелком, стекловолочно; б) многожильные жгуты (на 20—4) датчиков) с концами для подпайки или с разъемами для соединения; в) двухжильные провода с ртутными контакторами; г) прокладка высокочастотного и экранированного провода (при динамических измерениях при высокой частоте питания и для помехоустойчивости).

Способы защиты датчиков и соединений от влаги: а) заливка слоем 10—20 мм прогретой при 150° С в течение 20 мин. смеси: 8% воска, 32% парафина, 15% технического вазелина, 35% канфоли, 10% машинного масла (по весу); б) покрытие влагостойким лаком или резиной 2 мм на клею № 88; в) запайка, заварка или заклейка фольгой (датчика с выводами, до его установки или после установки на детали).

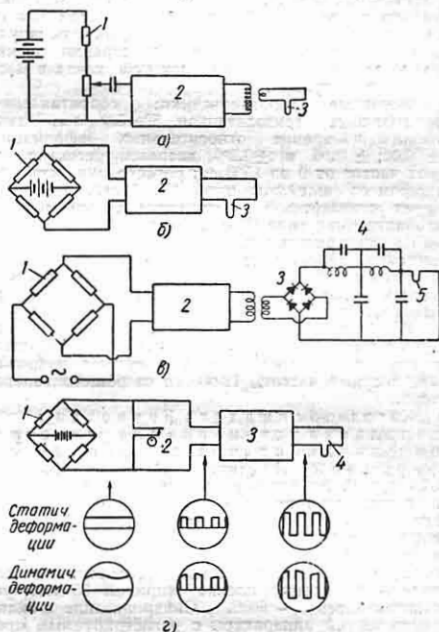
Схемы аппаратуры для измерения динамических деформаций проволочными тензодатчиками. Применяются:

а) Потенциометрическая схема включения датчика (фиг. 7, а) для измерения деформаций частотой от 10 до 50 000 гц. Датчик 1 питается постоянным током. На выходе широкополосного усилителя 2 — шлейф 3 осциллографа или катодный осциллограф (для регистрируемых частот более 5000 гц). Схема не допускает применения компенсационного датчика.

б) Схема с усилителем постоянного тока (фиг. 7, б) для измерения статических и дина-

ческих деформаций. Датчик 1 входит в мост, питаемый постоянным током; выход моста питает усилитель 2 постоянного тока. На выходе усилителя — шлейф 3 осциллографа. Недостаток — нестабильность, присущая усилителям постоянного тока.

в) Схема на несущей частоте (фиг. 7, в) для измерения статических и динамических деформаций. Напряжение несущей частоты, поступающее от генератора, модулируется по амплитуде при деформации датчика 1 и поступает в узкополосный усилитель 2 переменного тока. После усиления несущая частота выпрямляется



Фиг. 7.

выпрямителем 3 и через фильтр 4 питает шлейф 6 осциллографа. Несущая частота должна быть в 5—10 раз больше частоты измеряемой деформации. Схема на несущей частоте является наиболее простой и устойчивой для измерения статодинамических деформаций.

г) Схема с модулятором постоянного тока (фиг. 7, г). Снимаемое с моста постоянного тока, в который входит датчик 1, напряжение преобразуется с помощью вибрационного преобразователя, питаемого пульсирующим током, или механического прерывателя с эксцентрикром 2, приводимого в движение мотором. Усилитель—переменного тока. Частота виброреобразователя должна быть в 5—10 раз больше частоты измеряемой деформации. На фиг. 7, г показана форма волны сигнала, передаваемого в различных местах измерительного устройства; выпрямление тока может производиться тем же вибрационным преобразователем.

Описание электронных схем см. [2], [4], [11], [14], [24], [26], [28], [39], [43], [50].

Образцы аппаратуры. Трехканальная установка ПЭТ-3-В (ЦНИИТМАШ) [47] предназначена для измерения статических и динамических деформаций с применением проволочных тензодатчиков.

Основные характеристики: сопротивление проволочных тензодатчиков 100—400 ом; диапазон измерения относительных деформаций от  $\pm 0,04$  до  $\pm 0,4\%$ ; несущая частота 7000 гц; диапазон регистрируемых частот от 0 до 800 гц; регистрация осциллографом со шлейфом типа 1Г. Питание от сети через стабилизированный выпрямитель СТВ-300. ЦНИИТМАШ и феррорезонансный стабилизатор.

Трехканальная установка УД-3 (Институт машиноведения АН СССР) [54] предназначена для многооточечной регистрации статических и динамических деформаций в деталях работающих машин, в частности в условиях магнитных и электрических полей. Выходной балансировочный пульт позволяет подключать вручную или автоматически при регистрации поочередно до семи датчиков на каждый канал и масштабные импульсы.

Основные характеристики: сопротивление проволочных тензодатчиков 50—200 ом; диапазоны измерения относительных деформаций  $\pm 0,02$ ;  $\pm 0,06$  и  $\pm 0,2\%$ ; диапазон регистрируемых частот от 0 до 1500 гц; регистрация осциллографом со шлейфом типа 1Г. Питание от сети через стандартный выпрямитель с электронной стабилизацией типа ВУС-1. Отклонение амплитудной характеристики от прямой и неравномерность частотной характеристики  $\pm 3\%$  в диапазоне измерения. Схема входа позволяет включать электрический фильтр для снижения влияния паразитных наводок.

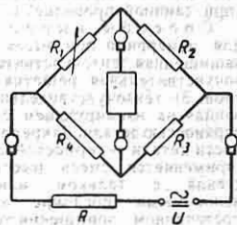
Питание датчиков и подача опорного напряжения осуществляется с помощью катодных повторителей, сетки которых получают напряжение несущей частоты 12 000 гц от общего генератора.

Катодно-осциллографическая двухканальная установка для регистрации динамических и ударных деформаций (Институт машиноведения АН СССР) [54]. Включение проволочного тензодатчика по потенциометрической схеме; усилитель переменного тока. Регистрация ведется фотографированием с экрана катодной трубки путем механической развертки на пленку на вращающемся барабане или электрической развертки на неподвижную пленку; пленка шириной 35 мм, чувствительность  $\sim 6000$ . Синхронизация включения частей аппаратуры с регистрируемым процессом осуществляется от одного канала сигналом от датчика деформаций или внешним синхронизирующим устройством с замыкающими контактами. Установка состоит из: 1) катодно-осциллографической части с генераторами и усилителями; на два канала, с катодной трубкой, ждущей разверткой и фотоприставкой с объективом и кассетой на 36 кадров и приспособлением для визуального наблюдения; 2) устройства для питания со стабилизатором и выпрямителем; 3) механической развертки с вращающимся барабаном, метчиком времени, фотографической частью и синхронизатором. Основные характеристики: сопротивление проволочных тензодатчиков от 50 до 200 ом; главное изменение диапазонов измеряемых относительных деформаций от  $\pm 0,05$  до  $\pm 0,5\%$ ; диапазон регистрируемых частот от 10 до 50 000 гц; скорости ждущей развертки от 50 мксек до 0,1 мсек на 120-мм экране катодной трубки; скорость вращения барабана от 1 до 10 м/сек при длине пленки 1 м; отклонение амплитудной характеристики от прямой и неравномерность частотной характеристики не превосходит  $\pm 3\%$  в диапазоне измерения; питание от сети.

Катодно-осциллографическая установка НИИ-58 для регистрации деформаций при соударении деталей см. [49].

Токоосъемные устройства для измерений на вращающихся деталях должны обеспечивать постоянство контактных сопротивлений и отсутствие

э. д. с., создаваемых контактом. Типы токоосъемных устройств — контактные (щетки и кольцо или диск, контакт через ртуть) и бесконтактные (через магнитную цепь). Допускаемая величина изменения сопротивлений переходных контактов определяется: 1) величиной допускаемой погрешности измерений; 2) типом датчиков, их сопротивлением и схемой соединения; 3) измерительной схемой. Рекомендуется для уменьшения влияния контакта: а) иметь малую скорость скольжения щеток по кольцам путем уменьшения диаметра колец (токоосъемное устройство на торце детали); б) измерительный мост размещать полностью на вращающейся детали; в) повышать общее сопротивление датчиков, устанавливаемых на вращающейся детали; при питании датчиков перемен-



Фиг. 8.

ного тока применить помещаемых на вращающейся детали понижающих трансформаторов в цепи питания датчиков и повышающих — в цепи токов, идущих от датчиков (согласование с сопротивлением входа регистрирующей части достигается трансформатором, устанавливаемым после токоосъемника); г) подключать балластное сопротивление последовательно с источником питания, напряжение которого соответственно увеличивается. Например, при сопротивлении датчиков 120 ом, образующих плечи моста (фиг. 8), при балластном сопротивлении  $R = 1500$  ом напряжение питания 7 в сохраняется при  $U = 110$  в, но снижается на 85% величина помех, получаемых при отсутствии балластного сопротивления.

Применяемые материалы для контактных пар: 1) кольца из нержавеющей стали или бронзы; щетки серебро-графитовые или в виде пакета из латуниных полос (сетчатый контакт); 2) серебряные кольца с серебро-графитовыми щетками (доступен конец вала); 3) медные кольца и медно-графитовые щетки.

Регистрирующие (и показывающие) приборы при работе с электрической аппаратурой для измерения деформаций и перемещений. Условия выбора показывающих или регистрирующих приборов: 1) требуется регистрация или достаточно визуальное наблюдение; 2) частота измеряемого процесса; 3) потребляемая при регистрации или отчетах электрическая энергия; 4) требуемая точность измерения и длительность записи (табл. 4).

Типы гальванометров: а) бифилярный с подвижной системой в виде металлической тонкой ленты и с зеркальцем (шлейфф); б) катушечный с подвижным элементом в виде катушки на упругой подвеске и с зеркальцем; последний тип отличается высокой чувствительностью при меньшей собственной частоте.

Выбор гальванометра производится исходя из наибольшей частоты регистрируемого процесса (наибольшей частоты гармоники, слагающей процесс), по частоте собственных колебаний гальванометра в воздухе (в незаземленном состоянии) и степени его демпфирования. При обшей величине коэффициента демпфирования  $\lambda = 0,5 \pm 0,7$  амплитудные и фазовые искажения отсутствуют, если частота процесса (слагающей гармоники) не превосходит  $1/\lambda - 1/\lambda_0$  собственной частоты гальванометра (при отсутствии демпфирования). Амплитудные искажения (отдельные участки записи с разным наклоном регистрируются в различном масштабе) характеризуются отноше-

Таблица 4

Диапазоны измеряемых или регистрируемых частот различными типами электрических приборов  
(при измерении деформаций и перемещений)

Тип прибора	Частота в <i>гц</i>	Тип прибора	Частота в <i>гц</i>
Стрелочный прибор для отсчетов	До 0,3 ÷ 1,0 0,1 ÷ 0,8 0,3 ÷ 2	Магнито-электрический осциллограф: а) гальванометры катушечные б) гальванометры бифилярные (шлейфы)	До 20—300 До 300—6000
Потенциометр			
Пишущий чернилами прибор	До 100 От 2 до 100	Катодный осциллограф: а) с усилителем постоянного напряжения б) с усилителем переменного напряжения	Не ограничена От 2 и выше
Осциллограф с непосредственной записью чернилами: а) усилитель постоянного тока б) усилитель переменного тока			

Таблица 5

Характеристики гальванометров  
а) Шлейфы осциллографа МПО-2

Класс	Собственная частота (не задемпфированного)	Чувствительность в <i>мм/ма</i>		Сопротивление в <i>ом</i>	Наибольшая допустимая амплитуда в <i>ма</i>	Наибольшее отклонение на экране в одну сторону в <i>мм</i>
		на пленке	на экране			
I	5 000	0,15	0,5	1,4	100	60
II	10 000	0,03	0,12	1,4	150	18
IV	3 000	0,83	3,5	6,0	10	70
V	2 000	2,8	11,0	6,0	6	66

б) Шлейфы осциллографа Сименс-ХЭТИ

Класс	Собственная частота (не задемпфированного)	Чувствительность в <i>мм/ма</i> (оптический рычаг 100 <i>см</i> )	Сопротивление в <i>ом</i>	Наибольший допустимый ток в <i>ма</i>	Размер зеркала в <i>мм</i>
1Т	5 500	0,66	1,4	100	1 × 0,5 0,8 × 0,05 1 × 1,5 (для целей демпфирования)
2Т	10 000	0,18	1,0	200	
3Т	2 500	0,46	1,2	100	
4Т	3 000	3,4	3,5	20	0,8 × 0,5 0,8 × 0,5
5Т	2 000	9,2	3,8	6	
6Т	500	0,8	1,2	120	2,5 × 3 (для целей демпфирования)
7Т	20 000	0,046	1,4	220	0,5 × 1 0,8 × 0,5
8Т	1 000	34	10	1,5	

в) Катушечные гальванометры завода „Геофизика“

Тип гальванометра	Собственная частота в <i>гц</i>	Чувствительность по току в <i>мм/ма</i>	Сопротивление в <i>ом</i>	Внешнее критическое сопротивление в <i>ом</i>
I	400	5 · 10 <sup>-6</sup>	56	60
II	200	1 · 10 <sup>-6</sup>	56	200
III	130	5 · 10 <sup>-7</sup>	56	330
IV	70	1 · 10 <sup>-7</sup>	44,5	300
V	25	2 · 10 <sup>-8</sup>	36	1000

нием чувствительностей гальванометра при переменном и постоянном токе

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4n^2\eta^2}};$$

фазовые искажения (отдельные участки записи с разным наклоном относительно сдвигаются по оси времени) характеризуются углом сдвига фаз

$$\delta = \arctg \frac{2n\eta}{(\eta^2 - 1)}.$$

Здесь  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$  — отношение частот регистрируемой гармоники и собственных колебаний гальванометра (незадемпфированного);  $n$  — коэффициент демпфирования.

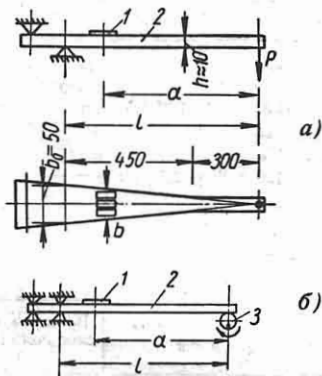
**Характеристики гальванометров** см. табл. 5. Применяемые шлейфовые осциллографы: 1) МПО-2 (завода 351), переносный, 8 шлейфов; 2) типа Сименс-ХЭТИ, стационарный, 9 или 6 шлейфов; 3) типа Сименс, переносный, 3 шлейфа; 4) завода «Геофизика», переносный, 24 шлейфа, катушечного типа (может быть использован для работы с проволочными тензодатчиками без усилителей).

**Характеристики стандартных катодных осциллографов для лабораторных работ** см. [46].

**Катодно-осциллографические установки для регистрации деформаций с помощью проволочных тензодатчиков сопротивления** см. стр. 496.

### Тарировка и проверка аппаратуры

1. Тарировочная балка, консольная или на двух опорах равного сопротивления или постоянного сечения для статической тарировки тензометров с наклеиваемыми датчиками и тензометров с ножевыми опорами при относи-



Фиг. 9.

тельной линейной деформации до 0,5%. Балка (фиг. 9, а) выполняется из материала с высоким пределом пропорциональности (хромансиль, пружинная сталь); отклонения по высоте  $h$  до  $\pm 0,2\%$ .

Способы определения относительной деформации  $\epsilon_0$  на поверхности тарировочной балки: а) по нагрузке  $P$  (через 1 или 5 кг),  $\epsilon_0 = \frac{6Pa}{Eb_0h^3}$  (ошибки из-за погрешности в определении  $E$ ); б) замер тарированным тензометром; в) по прогибу  $f$  на конце,  $\epsilon_0 = \frac{b_0ah}{bl^2} f$ . Для наклеиваемого тензодатчика коэффициент тензочувствительности  $k_0 = \frac{\Delta P}{\epsilon_0} (\Delta R - \text{изменение сопротивления } R \text{ тарируемого датчика, определяемое с погрешностью } 0,001 \text{ ом}).$  Указанные на фиг. 9, а размеры дают пример выполнения тарировочной балки.

2. Калибратор с микрометрическими винтом для статической тарировки тензометров с ножевыми опорами. В тензокалибраторе Н. Н. Аистова цена деления 0,1 мк; в тензокалибраторе В. С. Вольфсона (ЦАГИ) перемещения отсчитываются по головке оптиметра до 0,1 мк.

3. Динамический калибратор в виде консольной балки (фиг. 9, б) для динамической тарировки наклеиваемых тензометров. Профиль эксцентрика 1 подбирается таким, чтобы обеспечить гармонический закон перемещения конца консоли 2 с датчиком 3. Отрыв балки от эксцентрика при числе оборотов  $n > 1440 \times$

$$\times \frac{h}{l} \sqrt{\frac{f_{cp}}{f_0} - 1}, \text{ где } f_{cp} - \text{прогиб при среднем}$$

положении эксцентрика;  $f_0$  — амплитуда колебания;  $h$  — высота сечения балки. При  $a = 0,7l$  обеспечивается гармонический закон изменения деформаций, регистрируемых с помощью тензодатчика

$$\epsilon_0 = \frac{3ha}{2l^2} (f_{cp} + f_0 \sin 2\pi nt).$$

4. Динамический калибратор с механическим приводом (вибростол) для динамической тарировки тензометров с ножевыми опорами (и вибродатчиков). Характеристика калибратора и контроль получается фотозаписью движения платформы или измерения амплитуды колебания с помощью микроскопа. Предельная частота 200 гц; наименьшая амплитуда 2 мк. См. [51].

5. Динамический калибратор в виде балки с магнитным возбудителем для тарировки наклеиваемых тензометров. Датчик закрепляется на балке, вибрация которой возбуждается симметрично одним (камертон) или двумя (балка) электромагнитами. Частота колебаний меняется с помощью масс (колебания на резонансе), амплитуда — количеством энергии, подводимой к катушкам; частота до 1000 гц и при пьезоэлектрическом возбудителе до 20 000 гц (при малой амплитуде). См. [11] и [51].

6. Проверка электрического измерительного устройства, когда датчик установлен на объекте испытания. Воспроизводится изменение параметра измерительной схемы, соответствующее определенному значению измеряемой механической величины. В схему вместо рабочего датчика или параллельно с ним включают эталонное сопротивление, емкость, индуктивность или отдельный датчик, установленный на тарировочном устройстве или с изменяемым параметром.

### Применение тензометрирования

**Определение напряжений и деформаций в отдельных местах детали.** Датчики при измерении динамических деформаций устанавливаются в зонах наибольших напряжений или в соседних с ними. Связь между показаниями тензометра и величинами напряжений может устанавливаться дополнительно путем расчета или экспериментального исследования распределения напряжений при статической нагрузке. База тензометра выбирается по направлению наибольшей деформации, определяемому из условия симметрии детали, по данным исследования распределения напряжений при статической нагрузке или с помощью тензочувствительного покрытия (см. стр. 515).

Среднее на участке базы наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{1, \text{сред}}^{\text{эксп}} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ 1 + \mu \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \right] \epsilon_1^{\text{эксп}}. \quad (3)$$

Здесь  $\epsilon_1^{\text{эксп}}$  — деформация, замеренная тензомером в направлении главной деформации  $\epsilon_1$ ;  $E$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала детали;  $\left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)$  — отношение деформаций (средних на длине базы тензометра) в направлениях перпендикулярном и вдоль базы тензометра, устанавливаемое приближенно тензометрированием при статической нагрузке или другими методами. Если на длине базы величина напряжений различна, то наибольшее напряжение на участке базы

$$\sigma_1 = \sigma_{1, \text{сред}}^{\text{эксп}} \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_{1, \text{сред}}}, \quad (4)$$

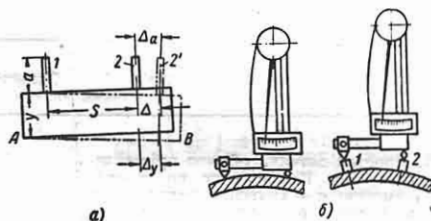
где  $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_{1, \text{сред}}}$  — отношение наибольшего напряжения, получающегося в одной из точек базы, к среднему на длине базы, определяемое путем исследования распределения напряжений (например, поляризационно-оптическим методом).

Определение напряжений во внутренних слоях детали тензометрированием с одной стороны наружной ее поверхности (например, для закрытых сосудов) может быть сделано, если известен закон распределения деформаций по толщине детали. При линейном законе распределения деформаций по толщине

удлинение  $\Delta_y$  волокна  $AB$  на глубине  $y$  от поверхности (фиг. 10)

$$\Delta_y = \Delta - \frac{\Delta_a - \Delta}{a} y, \quad (5)$$

где  $\Delta$  и  $\Delta_a$  — увеличение расстояния между точками 1 и 2 на поверхности детали и на подставках высотой  $a$ .



Фиг. 10.

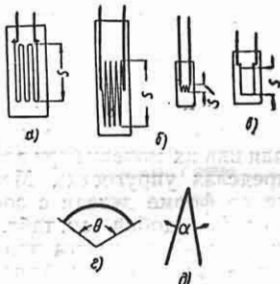
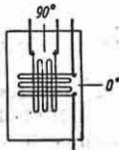
**Изучение распределения напряжений.** Обычно применяется статическая нагрузка, соответствующая типичным условиям при работе машины и осуществляемая в лаборатории с помощью нагрузочных приспособлений или испытательных машин. Для измерения напряжений с помощью тензомеров применяются детали или их модели (при деформации в пределах упругости). Модель выполняется по форме детали с соблюдением масштаба подобия (см. табл. 15). Материал модели — пластмасса или легкие сплавы, обеспечивающие соблюдение пропорциональности между нагрузкой и деформацией. Наиболее удобно применение пластмасс (блочные оргстекло или неолейкорит — для машинных деталей и узлов, листовое оргстекло — для тонкостенных узлов и конструкций): а) благодаря малой величине модуля продольной упругости нагрузки модели малы и деформации значительны, что существенно облегчает эксперимент; б) облегчаются требования к изоляции датчиков и проводки к ним.

Расположение и число датчиков при изучении распределения напряжений устанавливается в зависимости от задачи: а) места детали, подлежащие исследованию, и направления главных напряжений заранее известны (ослабленное сечение, места поломок); б) места установки тензомеров и направления главных напряжений неизвестны. В последнем случае наиболее напряженные зоны детали и направления главных напряжений в них выявляются

## Типы наклеиваемых проволочных датчиков

Обозначения:  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  — линейная относительная деформация вдоль базы и соответственно в направлении, перпендикулярном к ней;  $s$  — база тензостра;  $k$  — тензочувствительность проволоки датчика;

$k_s = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_s$  — тензочувствительность датчика;  $k' = k_0 + c\mu$  — продольная тензочувствительность датчика (при  $\varepsilon' = 0$ );  $c = \frac{k_0 - k'}{\mu}$  — поперечная тензочувствительность датчика (при  $\varepsilon = 0$ );  $\frac{\Delta R}{R}$  — относительное изменение сопротивления датчика;  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  — для тарировочного образца (для детали)

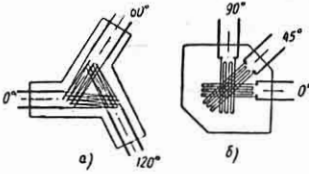
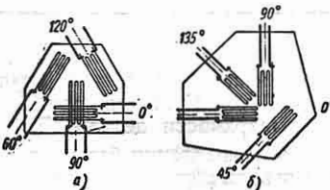
Тип и назначение датчика	Зависимость показаний датчика от измеряемой величины *
<p>1. Простой датчик, обычно применяемый тип. Различаются по способу намотки: а — круговые петли (обычный тип); б — острые петли; в — спиральная намотка, датчик в два слоя (для малых баз)</p> 	$\frac{\Delta R}{R} = k'\varepsilon \text{ (приближенно);}$ $\frac{\Delta R}{R} = k' \left( \varepsilon + \frac{c}{k'} \varepsilon' \right) \text{ (точно)}$ <p>(обычно <math>\frac{c}{k'} &lt; 0,05</math>).</p> <p>Зависимости между <math>k</math>, <math>k'</math> и <math>c</math> определяются расположением проволоки в датчике:</p> <p>1. Для <math>\sim</math> элемента (фиг. з)</p> $k' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) k; \quad c = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin \theta}{\theta} \right) k.$ <p>2. Для <math>\wedge</math> элемента (фиг. д)</p> $k' = \frac{1 + \cos \alpha}{2} k; \quad c = \frac{1 - \cos \alpha}{2} k.$ <p>3. Для датчика типа а с <math>n</math> прямыми участками и отношениями <math>\eta_1</math> и <math>\eta_2</math> шага намотки и соответственно общей длины тензочувствительных частей выводов к длине прямого участка решетки</p> $k' = \frac{\pi(n-1)\eta_1 + 4\eta_2 + 4n}{2\pi(n-1)\eta_1 + 4\eta_2 + 4n};$ $c = \frac{\pi(n-1)\eta_1}{2\pi(n-1)\eta_1 + 4\eta_2 + 4n}.$ <p>4. Для датчика типа в с углом <math>\alpha</math> между участками</p> $k' = \frac{1 + \cos \alpha}{2} k; \quad c = \frac{1 - \cos \alpha}{2} k$
<p>2. Розетка из двух взаимно перпендикулярных датчиков**. Для определения плоского напряженного состояния при известных главных напряжениях</p> 	<p>Для каждого отдельного датчика</p> $\frac{\Delta R}{R} = k'\varepsilon \text{ (приближенно),}$ <p>где <math>\frac{\Delta R}{R}</math> — для датчика, в направлении базы которого определяется деформация <math>\varepsilon</math>.</p> $\varepsilon_0 = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_\infty}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]};$ $\varepsilon_\infty = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_\infty - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]} \text{ (точно; при одинаковых датчиках)}$

\* При измерениях численная зависимость устанавливается путем тарировки. Составление приводимых в п. 1 зависимостей — см. [54].

\*\* Может быть составлена из простых датчиков, наклеиваемых рядом по тем же направлениям.

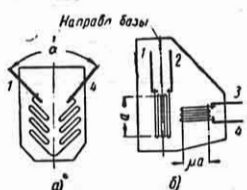
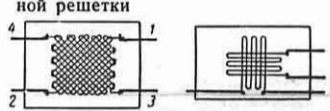


Продолжение табл. 6

Тип и назначение датчика	Зависимость показаний датчика от измеряемой величины *
<p>3. Розетка из трех одинаковых датчиков **: <i>a</i> — углы 0, 60, 120° (равноугольная розетка), <i>б</i> — углы 0, 45, 90° (прямоугольная розетка). Для определения плоского напряженного состояния, если главные направления неизвестны</p>  $\epsilon_{00} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{00} - \frac{c}{k'} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{120} \right]}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}; \quad \epsilon_{120} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{120} - \frac{c}{k'} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{60} \right]}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}$ <p style="text-align: center;">для прямоугольной розетки</p> $\epsilon_{0,90} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{0,90} - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90,0}}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}; \quad \epsilon_{45} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{45} + \frac{c}{k'} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{45} - \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 - \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90} \right]}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}$	<p>Для каждого отдельного датчика</p> $\frac{\Delta R}{R} = k' \epsilon \text{ (приближенно),}$ <p>где <math>\frac{\Delta R}{R}</math> — для датчика, в направлении базы которого определяется деформация.</p> <p>С учетом поперечной тензочувствительности (точно): для равноугольной розетки</p> $\epsilon_0 = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 - \frac{c}{k'} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{60} + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{120} \right]}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]};$
<p>4. Розетка из четырех одинаковых датчиков **: <i>a</i> — углы 0, 60, 90, 120° (тэ-дельта розетка); <i>б</i> — углы 0, 45, 90, 135° (веерная розетка). Для определения плоского напряженного состояния, если главные направления неизвестны; четвертый датчик — для проверки или повышения точности измерений</p>  $\epsilon_{0,90} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{0,90} - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90,0}}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}; \quad \epsilon_{60,120} = \frac{\left(1 + \frac{c}{k'}\right) \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{60,120} - \frac{c}{k'} \left[ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_0 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90} \right]}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}$ <p style="text-align: center;">для веерной розетки</p> $\epsilon_{0,90} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{0,90} - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90,0}}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}; \quad \epsilon_{45,135} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{45,135} - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{135,45}}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]}$	<p>Для каждого отдельного датчика</p> $\frac{\Delta R}{R} = k' \epsilon \text{ (приближенно),}$ <p>где <math>\frac{\Delta R}{R}</math> — для датчика, в направлении базы которого определяется деформация <math>\epsilon</math>.</p> <p>С учетом поперечной тензочувствительности (точно): для тэ-дельта розетки</p> $\epsilon_{0,90} = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{0,90} - \frac{c}{k'} \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{90,0}}{k' \left[ 1 - \left(\frac{c}{k'}\right)^2 \right]};$

\* При измерениях численная зависимость устанавливается путем тарировки.

\*\* Может быть составлена из простых тензодатчиков, наклеиваемых рядом по тем же направлениям.

Тип и назначение датчика	Зависимость показаний датчика от измеряемой величины *
<p>5. Датчик нормального напряжения. Угол <math>\alpha</math> в датчике типа <i>a</i> берется из условия</p> $\cos 2\alpha = \frac{1 - \mu}{1 + \mu},$ <p>где <math>\mu</math> — коэффициент Пуассона материала детали. Для измерений на стальной детали <math>\alpha = 28^\circ</math></p> 	<p>Приращение показаний по тензомеру дает величину нормального напряжения <math>\sigma</math> в направлении базы независимо от соотношения компонентов напряжений в точке измерения:</p> $\frac{\sigma}{E} = \frac{\epsilon_{срел}}{1 - \mu} = \frac{1}{k_0} \cdot \frac{\Delta R}{R};$ <p><math>\epsilon_{срел}</math> — деформация в направлении прямых участков витков датчика типа <i>a</i>, соответствующая показанию прибора. Выводы 2 и 3 соединяются; 1 и 4 — выводы датчика напряжения</p>
<p>6. Датчик касательного напряжения <math>\tau_{45}</math> (в направлении биссектрисы между осями X и Y) или датчик разности (<math>\epsilon_x - \epsilon_y</math>). Оси X и Y в направлении прямых участков тензочувствительной решетки</p> 	<p>Выводами 1 и 2 датчик включается в одно плечо измерительного моста и выводами 3 и 4 — в соседнее:</p> $\tau_{45} / G = \frac{1 + \mu}{E} (\sigma_x - \sigma_y) = (\epsilon_x - \epsilon_y) = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{k' \left[ 1 - \left( \frac{c}{k'} \right)^2 \right]};$ <p><math>\sigma_x - \sigma_y</math> — разность нормальных напряжений в направлениях X и Y</p>
<p>7. Датчик суммы (<math>\epsilon_x + \epsilon_y</math>). Правило построения: элементы тензочувствительной решетки составляют (с их параллельным переносом) две фигуры, совпадающие при повороте одной из них в плоскости датчика на <math>90^\circ</math></p>	<p>Концы 2 и 3 (см. фигуру для датчика типа 6) соединяются; выводами датчика являются концы 1 и 4:</p> $(\epsilon_x + \epsilon_y) = \frac{1 - \mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{k' \left[ 1 - \left( \frac{c}{k'} \right)^2 \right]}$

\* См. сноску на стр. 501

с помощью лаковых покрытий или же на поверхности исследуемой детали (или ее модели) намечается достаточно густая сетка и напряжения достаются по узлам сетки; центр узла принимается за середину базы тензомера.

На ненагруженной поверхности детали в точке, в которой должны быть определены напряжения, устанавливается: а) *один тензомер*, если известны направления главных деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (по краю детали, плоскость симметрии, в направлении трещин в покрытии) и их соотношение (например, для линейного напряженного состояния  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -\mu$ ); б) *два тензомера*, если известно направление главных деформаций и неизвестны


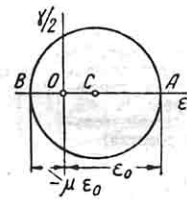

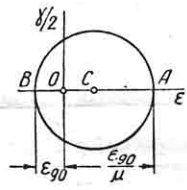

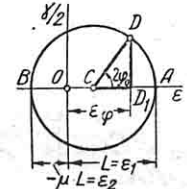
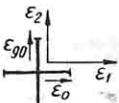
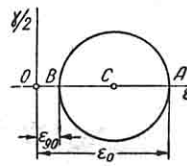
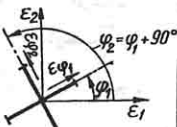
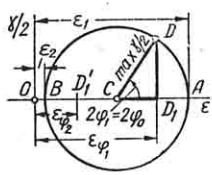
их величины и соотношение; в) *три тензомера (розетка)* — в общем случае напряженного состояния в точке на свободной поверхности детали. Деформация  $\epsilon^{\Delta KCP}$  в направлении базы с тремя неизвестными величинами главных деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  и углом  $\varphi_0$  между направлениями  $\epsilon^{\Delta KCP}$  и  $\epsilon_1$  связана зависимостью

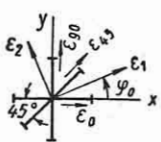
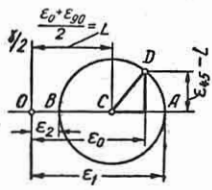
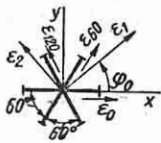
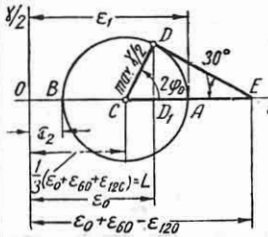

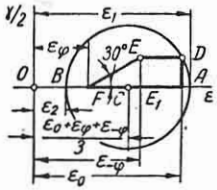
$$\epsilon^{\Delta KCP} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos 2\varphi_0. \quad (6)$$

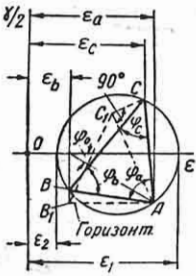
Подсчет главных деформаций и их направлений по замеренным линейным деформациям в направлении баз тензомеров — см. табл. 7 (для случая, когда поперечная тензочувствительность мала и не учитывается).

Таблица 7

Определение главных деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  по замеренным относительным деформациям вдоль базы тензометра

Тип напряженного состояния и расположение тензометров	Относительные деформации, измеренные тензометром	Определение $\epsilon_1$ , $\epsilon_2$ и главных направлений	
		Расчетные формулы	Построение круга деформаций
<i>Тензометры установлены по известным направлениям главных деформаций</i>			
1. Линейное напряженное состояние (в направлении $\epsilon_1$ ) 	$\epsilon_0$	$\epsilon_1 = \epsilon_0;$ $\epsilon_2 = -\mu \epsilon_0$	
2. Линейное напряженное состояние (в направлении $\epsilon_1$ ) 	$\epsilon_{90}$	$\epsilon_1 = -\frac{\epsilon_{90}}{\mu};$ $\epsilon_2 = \epsilon_{90}$	
3. Линейное напряженное состояние (в направлении $\epsilon_1$ ) 	$\epsilon_\varphi$	$\epsilon_1 = \frac{2}{(1 - \mu) + (1 + \mu) \cos 2\varphi} \epsilon_\varphi;$ $\epsilon_2 = -\mu \epsilon_1$	
1. Плоское напряженное состояние или плоская деформация 	$\epsilon_{\varphi_1}, \epsilon_{\varphi_2}$	$\epsilon_1 = \epsilon_0 \text{ (или } = \epsilon_{90});$ $\epsilon_2 = \epsilon_{90} \text{ (или } = \epsilon_0)$	
5. Плоское напряженное состояние или плоская деформация 	$\epsilon_{\varphi_1}, \epsilon_{\varphi_2}$	$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_{\varphi_1} + \epsilon_{\varphi_2}}{2} \pm \frac{\epsilon_{\varphi_1} - \epsilon_{\varphi_2}}{2 \cos \varphi_1}$	

Тип напряженного состояния и расположение тензометров	Относительные деформации, измеренные тензометром	Определение $\epsilon_1, \epsilon_2$ и главных направлений	
		Расчетные формулы	Построение круга деформаций
<i>Главные направления неизвестны</i>			
<p>6. Плоское напряженное состояние или плоская деформация. Углы между осью X и осями тензометров: 0, 45, 90° (прямоугольная розетка)</p> 	$\epsilon_0, \epsilon_{45}, \epsilon_{90}$	$\tau_{xy} = 2\epsilon_{45} - (\epsilon_0 + \epsilon_{90});$ $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\epsilon_{45} - (\epsilon_0 + \epsilon_{90})}{\epsilon_0 - \epsilon_{90}};$ $\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_{90}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_0 - \epsilon_{45})^2 + (\epsilon_{45} - \epsilon_{90})^2} = L \pm R;$ <p><math>R</math> — радиус круга деформации</p>	
<p>7. Плоское напряженное состояние или плоская деформация. Углы между осью X и осями тензометров: 0, 60, 120° (равноугольная розетка)</p> 	$\epsilon_0, \epsilon_{60}, \epsilon_{120}$	$\tau_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{60} - \epsilon_{120});$ $\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\sqrt{3} (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})}{2\epsilon_0 - \epsilon_{60} - \epsilon_{120}};$ $\epsilon_{1,2} = \frac{1}{3} (\epsilon_0 + \epsilon_{60} + \epsilon_{120}) \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_0 - \epsilon_{60})^2 + (\epsilon_0 - \epsilon_{120})^2 + (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})^2} = L \pm R;$ <p><math>R</math> — радиус круга деформации</p>	
<p>8. Плоское напряженное состояние или плоская деформация. Углы между осью X и осями тензометров: 0, +φ, -φ</p> 	$\epsilon_0, \epsilon_\varphi, \epsilon_{-\varphi}$	$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\epsilon_\varphi - \epsilon_{-\varphi}}{2\epsilon_0 - \epsilon_\varphi - \epsilon_{-\varphi}} \operatorname{tg} \varphi;$ $\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_\varphi + \epsilon_{-\varphi} - 2\epsilon_0 \cos 2\varphi}{2(1 - \cos 2\varphi)} \pm \frac{\epsilon_\varphi - \epsilon_{-\varphi}}{2 \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0}$	

Тип напряженного состояния и расположения тензометров	Относительные деформации, измеряемые тензометром	Определение $\epsilon_1, \epsilon_2$ и главных направлений	
		Расчетные формулы	Построение круга деформаций
<p>9. Плоское напряженное состояние или плоская деформация. Углы между осью X и осями тензометров: <math>\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c</math></p> 	<p><math>\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c</math></p>	$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{(\epsilon_a - \epsilon_b) \cos 2\varphi_c - (\epsilon_a - \epsilon_c) \cos 2\varphi_b + (\epsilon_c - \epsilon_b)}{(\epsilon_a - \epsilon_c) \sin 2\varphi_c + (\epsilon_a - \epsilon_b) \sin 2\varphi_b}$ $\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_a \sin 2\varphi_a + \epsilon_b \sin 2\varphi_b + \epsilon_c \sin 2\varphi_c}{\sin 2\varphi_a + \sin 2\varphi_b + \sin 2\varphi_c} \pm \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)[\epsilon_a - (\epsilon_a - \epsilon_c) \cos 2\varphi_a] + (\epsilon_b - \epsilon_c)[\epsilon_b - (\epsilon_b - \epsilon_a) \cos 2\varphi_b] + (\epsilon_c - \epsilon_a)[\epsilon_c - (\epsilon_c - \epsilon_b) \cos 2\varphi_c]}}{\sin 2\varphi_a + \sin 2\varphi_b + \sin 2\varphi_c}$	
<p>Определение главных напряжений по главным удлинениям <math>\epsilon_1</math> и <math>\epsilon_2</math> (или <math>\epsilon_0</math>) производится по формулам (7).</p>			

Пояснения к геометрическому решению, приведенному в табл. 7. П. 1: 1) от начала  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются в выбранном масштабе величины  $\epsilon_0$  (точка  $A$ ) и  $-\mu\epsilon_0$  (точка  $B$ ); 2) проводится окружность с центром в  $C$  (середина отрезка  $AB$ ); п. 2: 1) от  $O$  по оси  $\epsilon$

откладываются  $-\frac{\epsilon_{00}}{\mu}$  и  $\epsilon_{00}$ ; 2) проводится окружность с центром в  $C$  (середина отрезка  $AB$ ); п. 3: 1) от  $O$  по оси  $\epsilon$  откладывается произвольный отрезок  $L$  и отрезок  $-\mu L$ ; 2) проводится окружность с центром в  $C$  и радиус  $CD$  под углом  $2\varphi_0$ ; величина  $\epsilon_\varphi$  определяет масштаб отрезка  $L$ ; п. 4: от  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются величины  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_{00}$ ; 2) проводится окружность с центром в  $C$  (середина отрезка  $AB$ ); п. 5: 1) от  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются величины  $\epsilon_{\varphi_1}$  и  $\epsilon_{\varphi_2}$  и находится точка  $C$  в середине отрезка  $D_1D'_1$ ; 2) в  $D_1$  (или  $D'_1$ ) восстанавливается перпендикуляр до пересечения в  $D$  с радиусом, проведенным под углом  $2\varphi_1$  к оси  $\epsilon$ ; 3) проводится через  $D$  окружность с центром в  $C$ ; п. 6: от точки  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются величины  $L = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_{00}}{2}$  и  $\epsilon_0$ , а по оси  $\frac{\gamma}{2}$  величина  $\epsilon_{18} - L$ ; 2) через точку  $D$  проводится окружность с центром в  $C$ ; п. 7: 1) от точки  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются величины  $L = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_{00} + \epsilon_{120}}{3}$ ,  $\epsilon_0$  и  $(\epsilon_0 + \epsilon_{00} - \epsilon_{120})$ ;

2) в точке  $E$  проводится прямая под углом  $30^\circ$  к оси  $\epsilon$  до пересечения в  $D$  с перпендикуляром к оси  $\epsilon$  в точке  $D_1$ ; 3) через  $D$  проводится окружность с центром в  $C$ ; п. 8: 1) от точки  $O$  по оси  $\epsilon$  откладываются величины  $\epsilon_\varphi, \frac{\epsilon_c + \epsilon_b + \epsilon_a - \varphi}{3}, \epsilon - \varphi$

и  $\epsilon_0$ ; 2) в  $E$ , восстанавливается перпендикуляр к оси  $\epsilon$  до пересечения в  $E$  с прямой, проведенной под углом  $30^\circ$  к оси  $\epsilon$ ; 3) из  $E$  проводится прямая, параллельная оси  $\epsilon$ , до пересечения в  $D$  с перпендикуляром в точке  $D_1$  к оси  $\epsilon$ ; 4) через  $D$  проводится окружность с центром в  $C$ ; п. 9: 1) проводятся вертикали на расстояниях  $\epsilon_a, \epsilon_b$  и  $\epsilon_c$  от вертикальной линии, принимаемой за ось  $\frac{\gamma}{2}$ , и строится треугольник с углами  $\varphi_a, \varphi_b$  и  $\varphi_c$ , показанный пунктиром (вершины с углами  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  лежат на одной горизонтали и соответственно на вертикалях, проведенных на расстояниях  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_b$ ); 2) из вершины  $C$  восстанавливается перпендикуляр к стороне  $C_1A$  до пересечения с вертикалью, проведенной на расстоянии  $\epsilon_c$  от оси  $\frac{\gamma}{2}$ , и к линии  $AC$  проводятся прямые под углом  $\varphi_c$  и  $\varphi_a$  (пересекутся на вертикали  $\epsilon_b$ ); 3) через вершины полученного треугольника  $ABC$  проводится круг и через его центр — ось  $\epsilon$ .

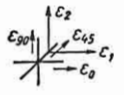
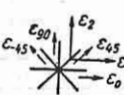
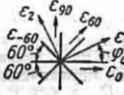
Учет поперечной тензочувствительности проволочных датчиков и специальные проволочные датчики, дающие требуемое сочетание компонентов деформаций, см. табл. 6. Выравнивание случайных ошибок при определении напряжений путем установки дополнительного тензометра в исследуемой точке см. табл. 8.

Таблица 8

Выравнивание случайных ошибок

при определении напряженного состояния в рассматриваемой точке применением дополнительного тензометра. Для исправленных значений главных деформаций  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  и главных направлений  $\varphi_0$  средние ошибки обозначены  $\eta_{\epsilon_1}$ ,  $\eta_{\epsilon_2}$  и  $\eta_{\varphi_0}$ .

Условия: 1) ошибки направления отсутствуют; 2) для разных направлений измерения относительных деформаций  $\epsilon$  получается одинаковая средняя ошибка  $\eta$ ; 3) минимум суммы квадратов поправок по Гауссу)

Рассматриваемый случай	Расположение тензометров	Относительные деформации, измеренные тензометрами	Расчетные формулы для исправленных значений
Направления главных деформаций известны		$\epsilon_0, \epsilon_{90}, \epsilon_{45}$	$\epsilon_1 = \frac{5}{6} \epsilon_0 + \frac{1}{3} \epsilon_{45} - \frac{1}{6} \epsilon_{90};$ $\epsilon_2 = -\frac{1}{6} \epsilon_0 + \frac{1}{3} \epsilon_{45} + \frac{5}{6} \epsilon_{90};$ $\eta_{\epsilon_1} = \eta_{\epsilon_2} = 0,91 \eta$
		$\epsilon_0, \epsilon_{90}, \epsilon_{45}, \epsilon_{-45}$	$\epsilon_1 = \frac{3 \epsilon_0 + \epsilon_{45} - \epsilon_{90} + \epsilon_{-45}}{4};$ $\epsilon_2 = \frac{-\epsilon_0 + \epsilon_{45} + 3 \epsilon_{90} + \epsilon_{-45}}{4};$ $\eta_{\epsilon_1} = \eta_{\epsilon_2} = 0,87 \eta$
Направления главных деформаций неизвестны		$\epsilon_0, \epsilon_{60}, \epsilon_{90}, \epsilon_{-60}$	$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{3\sqrt{3} (\epsilon_{-60} - \epsilon_{60})}{5\epsilon_0 - \epsilon_{-60} - \epsilon_{90} - 3\epsilon_{60}};$ $\epsilon_{1,2} = \frac{2}{9} (\epsilon_{90} + \epsilon_{-60}) + \frac{1}{18} (7\epsilon_0 + 3\epsilon_{90}) \pm \frac{\epsilon_{-60} - \epsilon_{60}}{\sqrt{3} \sin 2\varphi_0};$ $\eta_{\epsilon_1}, \eta_{\epsilon_2} = \eta \sqrt{\frac{17}{18} \pm \frac{2}{9} (\cos 2\varphi_0 - \cos^2 2\varphi_0)};$ $\eta_{\varphi_0} = \frac{\eta}{3 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \sqrt{5 + \cos 4\varphi_0}$

Средние ошибки  $\eta_{\epsilon_1}$  и  $\eta_{\epsilon_2}$  переносятся на главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\eta_{\sigma_1} = \frac{E}{1 - \mu^2} \sqrt{\frac{2}{\eta_{\epsilon_1} + \mu \eta_{\epsilon_2}}}; \quad \eta_{\sigma_2} = \frac{E}{1 - \mu^2} \sqrt{\frac{2}{\eta_{\epsilon_2} + \mu \eta_{\epsilon_1}}};$$

$E$ —модуль продольной упругости и  $\mu$ —коэффициент Пуассона материала тензометрируемой детали.

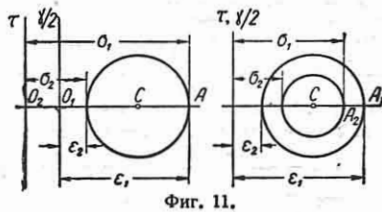
Определение главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по замеренным главным деформациям  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  при деформациях в пределах упругости, однородном и изотропном материале производится одним из следующих способов: а) подсчетом по формулам

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2);$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1), \quad (7)$$

где  $E$  и  $\mu$ —модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала детали, на которой ведется измерение;

б) по кругу деформаций одним из следующих способов (фиг. 11): 1) отклады-



Фиг. 11.

вается от точки  $C$  отрезок  $CO_2 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \times \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ ; если для  $\epsilon$  и  $\gamma$  1 см чертежа

равен  $m$  (относительная деформация), то для  $\sigma$  и  $\tau$  1 см чертежа равен  $2Gm \text{ кг/см}^2$  ( $G$  — модуль сдвига); 2) вычерчивается концентрическая окружность радиуса  $CA_2 = \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$ ; если для  $\epsilon$  и  $\gamma$  1 см чертежа равен  $m$  (относительная деформация), то для  $\sigma$  и  $\tau$  1 см чертежа равен  $2G \frac{1+\mu}{1-\mu} \text{ кг/см}^2$ .

Направления главных напряжений и деформаций совпадают.

Главные напряжения на основании формул (7) могут быть выражены непосредственно через приращения  $\Delta$  показаний тензометров:

$$\sigma = c \cdot \Delta \quad (7a)$$

(при линейном напряженном состоянии);

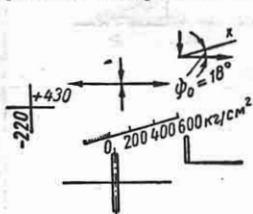
$$\sigma_1 = c' \Delta_1 + c'' \Delta_2 \text{ и } \sigma_2 = c' \Delta_2 + c'' \Delta_1 \quad (7b)$$

(при плоском напряженном состоянии). Здесь  $c$  — постоянная тензометров, определяемая тарировкой на образце в виде балки из того же материала, что и тензометрируемая деталь или модель (см. стр. 498);

$c' = \frac{c}{1-\mu^2}$  и  $c'' = \frac{\mu c}{1-\mu^2}$  — постоянные тензометров;  $\mu$  — коэффициент Пуассона материала тензометрируемой детали или модели;  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — приращения тензометров, установленных в направлениях определяемых напряжений  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Если главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получены для модели, то по ним напряжения для натурной детали подсчитываются с помощью формул подобия, приведенных в табл. 15.

Изображение напряженного состояния делается с помощью отрезков, которыми в некотором масштабе



Фиг. 12.

в узлах сетки изображаются главные напряжения в направлении их действия (фиг. 12).

**Определение напряжений в зонах концентрации.** Измерения проводятся на деталях или их моделях в наиболее напряженных зонах. Выбор числа устанавливаемых тензометров в каждой точке и определение напряжений по

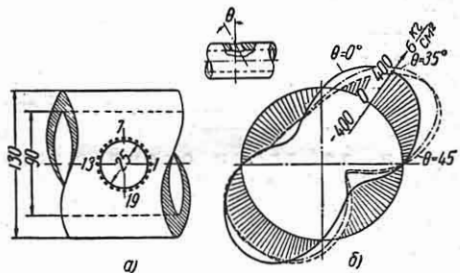
замеренным деформациям производятся, как при изучении распределения напряжений.

Напряжения в зонах концентрации выражаются через номинальные напряжения. В деталях машин, имеющих резкое изменение напряжений на малой длине (высокий градиент напряжений), необходимо применение малобазных тензометров, индуктивных, с базой 2—4 мм или наклеиваемых проволочных с базой от 2 мм и выше (в недоступных местах, для измерений при динамической нагрузке); см. стр. 490 и 495.

Требования к малобазному тензометру в связи с условиями его установки: а) возможность установки в малодоступных местах (отверстия, проточки, шпоночные вырезы) и на криволинейных участках детали (галтели и другие резкие изменения формы поверхности); б) удобство и точность установки датчика по месту и по ориентировке.

Укрупненные модели для достижения больших деформаций изготавливаются из материала с более низким модулем упругости, например пластмассы или алюминиевого сплава. Применяются при необходимости уменьшить погрешность измерений, связанную с градиентом напряжений (с увеличением масштаба градиент падает) и с целью увеличения размеров для возможности установки тензометров.

*Пример.* Исследования напряжений в зоне концентрации — по крутке отверстия полого скручиваемого вала [33]. Необходимые координированная установка индуктивного датчика над отверстием и упругое регулируемое его прижатие



Фиг. 13.

достигаются специальными поворотными приспособлениями. Места установки датчика по крутке отверстия и размеры скручиваемого вала обозначены на фиг. 13; номинальное напряжение вала без учета ослабления  $\tau_N = 160 \text{ кг/см}^2$ .

**Определение усилий в поперечных сечениях.** Необходимо соответствующее расположение тензодатчиков на поверхности детали; выбор базы датчика определяется получением требуемой величины показания в зависимости от измеряемого усилия. Зависимость между показанием тензометра и усилием устанавливается путем тарировки детали с укрепленными на ней датчиками, так как расчет является приближенным (отклонения от применяемого в расчете закона распределения напряжений по сечению; влияние креплений тензометра).

Для получения эпюры усилий по длине ненагруженного стержня необходимо определить усилия по крайней мере для двух сечений между узлами; по усилиям, найденным для этих сечений, подсчитываются усилия по концам стержня.

В элементах, работающих на продольное усилие, тензометры в сечении устанавливаются возможно ближе к оси элемента. В элементах, работающих на изгиб, тензометры устанавливаются на наиболее удаленных от оси элемента волокнах, где деформация, вызываемая рассматриваемым изгибающим моментом, имеет наибольшее значение.

Если в сечении действует продольное усилие и изгибающий момент одновременно, то для возможности определения каждого из этих усилий отдельно устанавливаются на противоположных сторонах и равных расстояниях от оси элемента два тензометра в одной с ней плоскости.

Продольное усилие определяется по сумме показаний тензометров, а изгибающий момент — по разности (с введением соответствующих поправок); см. табл. 9.

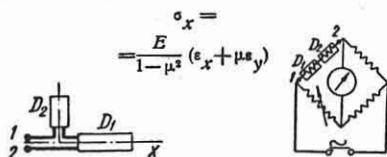
При действии осевого усилия  $N$  и изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  в двух главных плоскостях в рассматриваемом поперечном сечении монолитного не тонкостенного бруса (распределение деформаций в сечении по закону плоскости) устанавливаются три тензометра 1, 2, 3 (фиг. 14) с базами вдоль длины бруса. Места установки тензометров не должны располагаться на одной линии в сечении. В таком случае при невозможности применения тарировки

Таблица 9

**Схема расположения и включения проводочных тензодатчиков при измерении напряжений, усилий и нагрузки**

Зависимость между показаниями прибора и измеряемой величиной устанавливается путем тарировки и приближено путем расчета (см. табл. 3).  $R$  — сопротивление датчика,  $E$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала детали;  $F$  и  $W$  — площадь и момент сопротивления поперечного сечения детали.  $\epsilon$  — деформация по тензодатчикам.

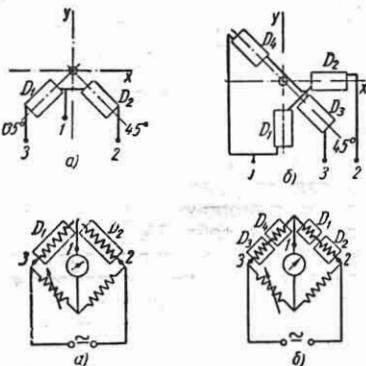
1. Нормальные напряжения  $\sigma_x$  в направлении  $x$ .  $R_2 = \mu R_1$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)$$


2. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в направлениях  $O_x$  и  $O_y$

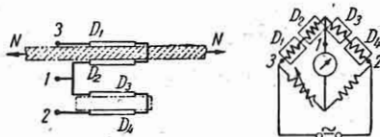
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} (\epsilon_{45} - \epsilon_{135}); \quad (a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1-\mu)} [2\epsilon_{45} - (\epsilon_x + \epsilon_y)] \quad (б)$$



3. Продольное осевое усилие в стержне, имеющем крайние волокна на равном расстоянии от оси;  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ ,  $D_4$  — рабочие и компенсационные датчики

$$N = E \cdot F \cdot \epsilon$$

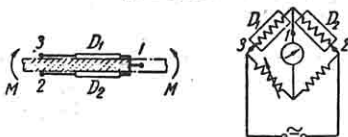




Продолжение табл. 9

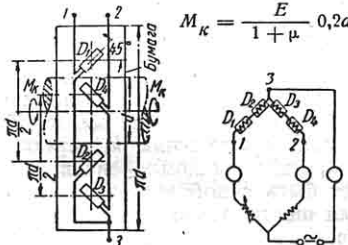
4. Изгибающий момент  $M$ . Компенсационный датчик является одновременно с этим рабочим

$$M = EW\varepsilon$$

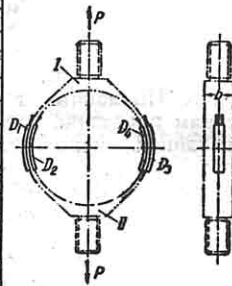


5. Скручивающий момент  $M_K$  вала диаметром  $d$

$$M_K = \frac{E}{1 + \mu} 0,2d^3 \varepsilon$$



6. Сила  $P$ . Конфигурация кольца в зависимости от нагрузки. Выступающие концы с нарезкой для крепления жестких стержней с шарнирами. Для кольца постоянного сечения:



$$P = 5,46 \frac{EW}{R} \varepsilon$$

(для сечения по диаметру  $\perp$  нагрузке);

$$P = 2,61 \frac{EW}{R} \varepsilon$$

(для сечения под силой);

$$W = \frac{b\delta^3}{6}, \text{ где } \delta -$$

толщина кольца в месте наклейки датчика. Изменение диаметра:

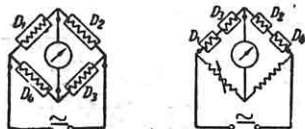
$$\Delta_1 = 0,149 \frac{R^2 P}{EJ} \text{ (в направлении нагрузки);}$$

$$\Delta_2 = -0,137 \frac{R^2 P}{EJ} \text{ (в направлении нагрузки).}$$

Основная частота собственных радиальных колебаний

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}},$$

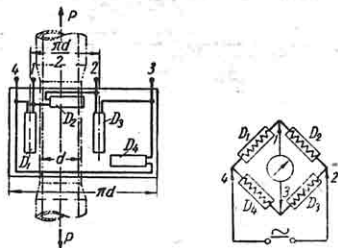
где  $g$  — ускорение силы тяжести.



Продолжение табл. 9

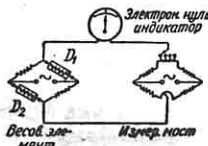
7. Сила  $P$ . Стержень круглого сечения (сплошной при  $P$  растягивающем и полой, если  $P$  может быть сжимающим). По концам стержня шарниры

$$P = EF\varepsilon$$



8. Сосредоточенное давление (вес)  $P$

$$J \approx EF\varepsilon$$



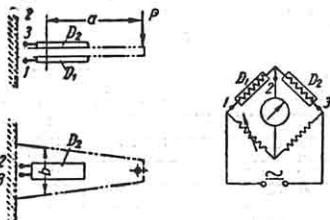
9. Сила  $P$  или прогиб  $f$

Определение нагрузки:

$$P = \frac{Eb\eta^2}{6a} \varepsilon.$$

Определение прогиба  $f$  в точке, где обозначена сила  $P$ :

$$f = \frac{P}{\eta} \varepsilon$$



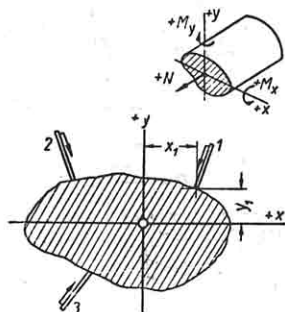
на детали могут быть использованы зависимости

$$\left. \begin{aligned}
 N &= \frac{F}{A} \left[ (x_2 y_3 - x_3 y_2) \sigma_1 + \right. \\
 &\quad + (x_3 y_1 - y_3 x_1) \sigma_2 + \\
 &\quad \left. + (y_2 x_1 - x_2 y_1) \sigma_3 \right]; \\
 M_x &= \frac{J_x}{A} [(x_3 - x_2) \sigma_1 + \\
 &\quad + (x_1 - x_3) \sigma_2 + (x_2 - x_1) \sigma_3]; \\
 M_y &= \frac{J_y}{A} [(y_3 - y_2) \sigma_1 + \\
 &\quad + (y_3 - y_1) \sigma_2 + (y_1 - y_2) \sigma_3].
 \end{aligned} \right\} (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A &= (x_3 - x_2) y_1 + (x_1 - x_3) y_2 + \\
 &\quad + (x_2 - x_1) y_3 \neq 0; \\
 \sigma_1 &= \frac{E}{m_1 s_1} \Delta_1; \\
 \sigma_2 &= \frac{E}{m_2 s_2} \Delta_2; \\
 \sigma_3 &= \frac{E}{m_3 s_3} \Delta_3;
 \end{aligned}$$

$F, J_x, J_y$  — площадь и главные моменты инерции сечения;  $m_1$  и  $s_1, m_2$  и  $s_2, m_3$  и  $s_3$  — соответственно масштабы и базы тензометров 1, 2, 3;  $E$  — модуль продольной упругости материала бруса, на котором проводятся измерения.



Фиг. 14.

При действии в поперечном сечении момента кручения  $M_k$  для исключения влияния изгибающих моментов и продольного усилия устанавливаются по крайней мере два тензометра по схеме 5 табл. 9 или применяется один тензометр, устанавливаемый под углом  $45^\circ$  к образующей скручиваемого вала, с замером в этом же месте среднего на

длине базы нормального напряжения  $\sigma_{cp}$  вдоль вала. В последнем случае

$$M_k = \frac{C}{1 + \mu} \left[ \frac{E}{ms} \Delta - \frac{1 - \mu}{2} \tau_{cp} \right]. \quad (9)$$

Здесь  $C = \frac{M_k}{\tau_{cp}}$ , где  $\tau_{cp}$  — средняя на длине базы величина касательного напряжения при моменте кручения  $M_k$ ;  $\Delta$  — приращение показаний по тензометру, установленному под углом  $45^\circ$ ;  $m$  и  $s$  — масштаб и база этого тензометра;  $E$  и  $\mu$  — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона материала скручиваемого вала.

В общем случае действия в сечении детали шести усилий  $Q_1$  и  $Q_2$  (поперечные силы),  $N, M_x, M_y$  и  $M_k$  или приложения к детали соответствующих им компонентов нагрузки может быть подобрано расположение на детали шести тензометров для определения всех шести величин усилий (компонентов нагрузки). Предварительно проводится тарировка детали или ее модели на каждое из единичных усилий; при этом расположение и базы тензометров для повышения точности подбираются такими, чтобы приращения отсчетов по каждому из тензометров вызывались преимущественно одним соответствующим усилием. По данным тарировки и приращениям показаний тензометров при испытаниях, используя линейную зависимость (при нагрузках в пределах пропорциональности), определяют усилия (нагрузки), воспринимаемые деталью.

Контроль результатов измерения усилий в фермах и рамах производится уравновешиванием при подсчете экспериментально полученных усилий по сумме проекций и по сумме моментов усилий, приходящихся на каждый узел конструкции. Ошибки измерений по продольным усилиям  $N$  и по изгибающим моментам  $M$

$$\Delta N = \frac{\sum n_p N}{\sum n_p (N)} 100\%; \quad \Delta M = \frac{\sum M}{\sum (M)} 100\%.$$

Контроль измерения по напряжениям изгибающих моментов  $M$  при динамических нагрузках изгибаемых элементов может производиться путем виброизмерений. Порядок обработки экспериментальных данных тензометрирова-

ния для их сопоставления с данными виброизмерений: а) находится  $\frac{M}{EJ} = \frac{\sigma}{cE}$ , где  $\sigma$  — напряжение на расстоянии  $c$  от нейтральной линии, замеренное тензомером; б) интегрируется дважды кривая  $\frac{M}{EJ}$

и получается динамическая упругая линия; в) полученные данные сопоставляются с данными виброизмерений упругой линии.

**Измерение нагрузок (сил) по деформации пружинящего элемента.** Динамометрический пружинящий элемент (из материала с высоким пределом упругости) выполняется в зависимости от условий измерений и нагрузки в виде кольца, стержня, столбика или балки. Для сохранения постоянства направления и точки приложения нагрузки применяются шарнирные или призменные опоры.

При дистанционных измерениях или при необходимости регистрации обычно принимается в пружинящем элементе в качестве индикатора перемещения (прогиба) индуктивный (или реостатный) датчик и в качестве индикатора деформации — проволочные датчики сопротивления или индуктивные датчики (на пружинящем элементе следует по возможности иметь полный измерительный мост).

Зависимость между показаниями пружинящего элемента и передаваемой им нагрузки устанавливается путем тарирования. Схемы применяемых динамометрических элементов — см. табл. 9.

Измерение отдельных сосредоточенных сил и реакций, приложенных к балке постоянного сечения (балка на двух опорах, неразрезная балка, консоль) в направлении, перпендикулярном к ее оси, может быть произведено по деформации изгиба с помощью четырех одинаковых тензодатчиков, наклеенных по крайним сжатым или растянутым волокнам балки [3]; по обеим сторонам от измеряемой силы устанавливаются по два датчика на равных между собой расстояниях. Датчики, расположенные со стороны силы, включаются в одно плечо измерительного моста, и два другие — в соседнее плечо моста.

Получение линий влияния усилий путем измерения деформаций и перемещений на упрощенных механических моделях стержневых систем (балки, рамы) — см. [27], [49].

## ИЗМЕРЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### Основные характеристики приборов для измерения перемещений (линейных, угловых)

Измерение перемещений выполняется с помощью приборов с визуальным отсчетом — при статических перемещениях и виброизмерительной аппаратуры с визуальным отсчетом или регистрацией — при динамических перемещениях.

Классификация приборов для измерения перемещений та же, что и в тензомерах (см. стр. 490). Кроме того, приборы для измерения перемещений различаются: а) по виду механических величин, преобразуемых в пропорциональные им сигналы (с датчиком перемещения, с датчиком скоростей, с датчиком ускорений, с датчиком деформаций); б) по способу обеспечения неподвижной точки, по отношению к которой измеряется перемещение (датчик связан с неподвижной точкой; датчик сейсмического типа, при котором записывается перемещение относительно массы, подвешенной к корпусу прибора на пружинах) [13]; в) по числу компонент измеряемых перемещений; г) по виду успокоения подвижной системы.

### Приборы для измерения перемещений

**Статические и медленно меняющиеся перемещения:** а) *Линейка или микрометр для непосредственного замера перемещения*, а также запись карандашом на неподвижном планшете.

б) *Рейка с делениями и нивелир* для замера вертикальных перемещений) или *теодолит* (для замера вертикальных и горизонтальных перемещений).

Погрешность измерения от 0,2 до 1 мм в зависимости от расстояния реек от нивелира или теодолита; применяется для измерений на крупных конструкциях.

в) *Прогибомер с проволочной связью* для измерения на крупных конструкциях (прогибомер Максимова — погрешность 0,2 мм и прогибомер Емельянова — погрешность 0,02 мм) [12].

г) *Фотографирование* с одной позиции для измерения по фотографии линейных и угловых перемещений и стереофотограмметрирование для определения перемещений в пространстве [12].

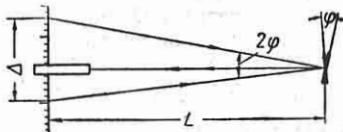
д) *Контактный прогибомер (индикатор)* является основным прибором для определения статических перемещений. Диапазоны измерений от 1 до 10 мм и цена деления 0,001 и 0,01 мм в зависимости от типа индикатора (ГОСТ 577-41). Допускает измерение амплитуд стабильных вибраций при частотах до 30—43 гц; допускаемая величина измеряемых амплитуд прогибов в зависимости от

Таблица 10

Продолжение табл. 10

Схемы измерения угловых перемещений с применением зеркала, рейки и отсчетной трубы. Назначение, условия применения и расчетные формулы

1. Одно зеркало в месте измеряемого поворота. Рейка, зеркало и труба — в одной плоскости, перпендикулярной к оси измеряемого поворота

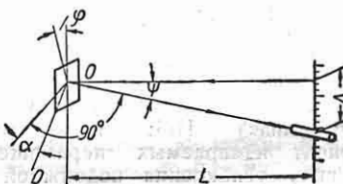


$$\varphi = \frac{\Delta}{2L}$$

Погрешность от ошибок  $\delta(\Delta)$  и  $\delta(L)$ :

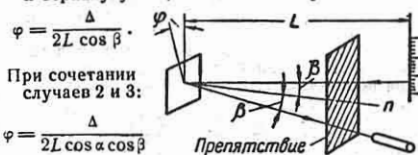
$$\delta(\varphi) = \frac{\delta(\Delta)}{2L} + \frac{\delta(L)}{2L^2} \Delta$$

2. Одно зеркало в месте измеряемого поворота. Ось поворота  $OO$  образует угол  $\alpha$  с плоскостью зеркала



$$\varphi = \frac{\Delta}{2L \cos \alpha}$$

3. Одно зеркало в месте измеряемого поворота. Лучи между рейкой — зеркалом и зеркалом — трубой образуют с нормалью к зеркалу угол  $\beta$  в плоскости лучей

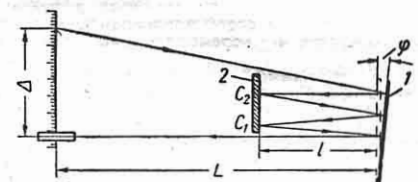


$$\varphi = \frac{\Delta}{2L \cos \beta}$$

При сочетании случаев 2 и 3:

$$\varphi = \frac{\Delta}{2L \cos \alpha \cos \beta}$$

4. Применение дополнительного неподвижного зеркала 2 для повышения точности измерения



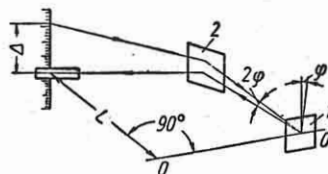
При двукратном отражении (точки  $C_1$  и  $C_2$ )

$$\varphi = \frac{\Delta}{8(L+l)}$$

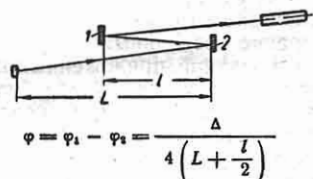
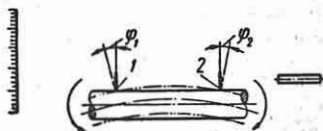
при однократном отражении

$$\varphi = \frac{\Delta}{4(L+l)}$$

5. Отведение измеряющих лучей в желательном направлении применением вспомогательного неподвижного зеркала 2; несколько понижается точность измерения (см. п. 2)



6. Применение двух зеркал для измерения относительного угла поворота двух мест детали, например взаимного угла поворота двух сечений вала при изгибе или кручении. Зеркала смещены из плоскости поворота для обеспечения возможности указанного на схеме хода лучей



$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\Delta}{4\left(L + \frac{l}{2}\right)}$$

7. Измерение взаимного угла поворота (см. п. 6) с повторными отражениями для повышения точности измерения

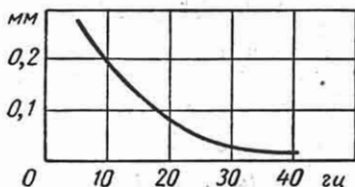
При двукратном отражении

$$\varphi = \frac{\Delta}{8\left(L + \frac{3}{2}l\right)}$$

Погрешность:

$$\delta(\varphi) = \frac{\delta(\Delta)}{8\left(L + \frac{3}{2}l\right)} + \frac{2\delta(L) + 3\delta(l)}{16\left(L + \frac{3}{2}l\right)^2} \Delta$$

частоты — см. фиг. 15. За неподвижную точку может быть принят груз, подвешенный к колеблющейся конструкции; с частотой собственных колебаний в 4—5 раз меньшей измеряемых.



Фиг. 15.

е) Зеркало, рейка и отсчетная труба для определения углов поворота. Зеркало крепится в месте, где определяется угол поворота; рейка и труба устанавливаются против зеркала на расстоянии от 1 до 20 м (см. табл. 10).

Динамические перемещения. В приборах, имеющих датчик с сейсмической массой, обеспечение регистрации без искажения требует соблюдения следующих основных условий [4], [13]:

для датчика перемещений  $\frac{\omega}{\omega_0} \geq 4$  и  $\gamma < 0,2$ ;

для датчика ускорений  $\frac{\omega}{\omega_0} < 0,6$  и  $\gamma \approx 1,2 \pm 1,4$ .

Здесь  $\omega$  — круговая частота регистрируемой гармоники;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$  — собственная круговая частота колебаний датчика ( $m$  — сейсмическая масса;  $C$  — жесткость подвески массы);  $\gamma$  — коэффициент демпфирования.

Для выполнения измерений применяются следующие виды аппаратуры:

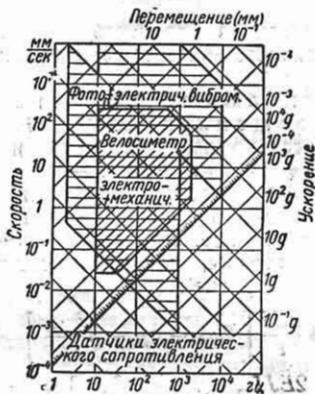
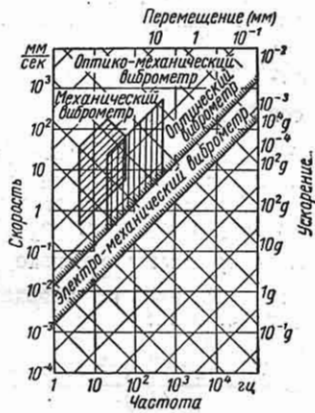
- а) Вибромарка [12].
- б) Частотомеры [12], [28].
- в) Виброшупы с пьезокварцевым датчиком и др. [26], [28].
- г) Ручные механические вибрографы: 1) типа РВ-1, позволяющий вести запись на вошеной бумаге перемещений от 0,02 до 1 мм при частотах от 20 до 60 гц; 2) типа ЦНИЭЛ с оптической записью при амплитудах от 0,01 до 0,5 мм и частотах от 1 до 100 гц.

д) Стационарные вибрографы [31], [49], устанавливаемые на неподвижном основании (например, виброграф типа Гейгера).

е) Аппаратура для торсионграфирования, предназначенная для регистрации крутильных колебаний [11], [26], [56]. Аппаратура применяется двух типов: 1) регистрация углов скручивания и линейных деформаций на некотором участке вала (с применением индуктивных датчиков [30] и проволочных тензодатчиков сопротивления; амплитудомеры для записи угловых деформаций деталей большой податливости); 2) регистрация отклонений какого-либо сечения вала от среднего положения (торсионграфы Гейгера, ДФЛ, ЦНИИ МСП конструкции Попова, электроторсионграф АУ-41Д Шнирмана и др.).

ж) Аппаратура для измерений перемещений (а также ускорений и скоростей) с электрическими датчиками с записью на осциллограф или визуальным отсчетом [4], [26], [28], [31], [43] [47], [50], [55] обеспечивает возможность измерений перемещений в требуемом диапазоне амплитуд, частот и для различных условий измерений, а также возможность их одновременной регистрации на общую осциллограмму с другими процессами. Сравнительные характеристики аппаратуры различного принципа действия для регистрации перемещений, ускорений и скоростей см. фиг. 16; характеристики укладываются в координатной сетке внутри заштрихованных фигур;

регистрация перемещений с применением консольной балки см. табл. 9, п. 9; частота собственных колебаний балки должна не менее чем в 3—4 раза превосходить частоты измеряемых перемещений.



Фиг. 16.

з) Аппаратура для фотографической регистрации перемещений [10] предназначена для регистрации вызванных деформацией перемещений деталей машин и узлов конструкций в широком диапазоне амплитуд (от долей миллиметра до 1 м) и частот (от нуля до тысяч герц); погрешность измерений до 3%. Этой аппаратурой обеспечивается также измерение перемещений путем фотографирования при вспышке длительностью  $2 \cdot 10^{-5}$  сек.

### Применение методов измерения перемещений

Определение усилий. Внутренние усилия, возникающие в сечениях стержня, определяются путем измерения перемещений (прогибов, углов поворота). Способ имеет по сравнению с тензометрированием то преимущество, что удается избежать искажающего

влияния местных деформаций, однако при этом требуются измерения для нескольких сечений стержня.

Изгибающий момент  $M$  в сечении стержня, работающего на изгиб, на основании зависимости  $M =$

$$= EJ \frac{d^2y}{dx^2}$$

находится по замерам прогибов

у его оси или углов  $\frac{dy}{dx}$  поворота сече-

ний стержня; здесь  $EJ$  — жесткость стержня в рассматриваемом сечении. Изгибающий момент  $M_x$  в сечении выражается через прогибы  $y_{x-\Delta x}$ ,  $y_x$ ,  $y_{x+\Delta x}$ , замеренные для близко расположенных сечений с координатами  $x - \Delta x$ ,  $x$  и  $x + \Delta x$ :

$$M_x = EJ \frac{y_{x+\Delta x} - 2y_x + y_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2}. \quad (10)$$

Достижимая точность определения изгибающего момента в сечении невелика.

Изгибающие моменты  $M_A$  и  $M_B$  в защемлениях  $A$  и  $B$  стержня находятся по замерам углов поворота  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  (положительные — по часовой стрелке) и относительного поперечного перемещения  $\delta_{AB}$  концов  $A$  и  $B$  стержня (положительное, если линия соединяет концы стержня, поворачивающегося по часовой стрелке):

$$M_A = \frac{2EJ}{l} \left[ 2\varphi_A + \varphi_B - 3 \frac{\delta_{AB}}{l} \right] + \bar{M}_A;$$

$$M_B = \frac{2EJ}{l} \left[ 2\varphi_B + \varphi_A - 3 \frac{\delta_{AB}}{l} \right] + \bar{M}_B. \quad (11)$$

Здесь  $EJ$  — постоянная жесткость стержня;  $\bar{M}_A$  и  $\bar{M}_B$  — опорные моменты балки в предположении ее жесткого защемления по концам (положительные — по часовой стрелке).

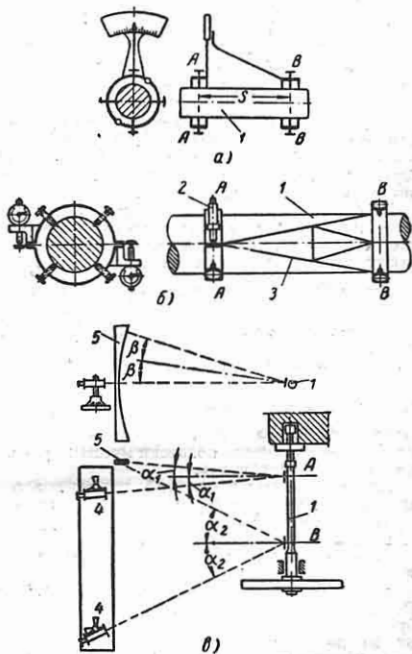
Продольное усилие  $N$  в элементе конструкции определяется величиной полного его удлинения или укорочения  $\Delta l$ , если по длине в элементе продольное усилие и жесткость  $EJ$  элемента остаются постоянными:

$$N = \frac{EF}{l} \Delta l.$$

Определение жесткости производится путем измерения перемещений при заданном нагружении.

Определение жесткости на кручение может производиться путем измерения углов  $\varphi$  закручивания или деформации  $s$  с помощью индикаторов (при  $\varphi \leq 2^\circ$ ) или зеркал:

а) в сечении детали  $I$  (фиг. 17, б) с противоположных сторон укреплены индикаторы и в сечении на расстоя-

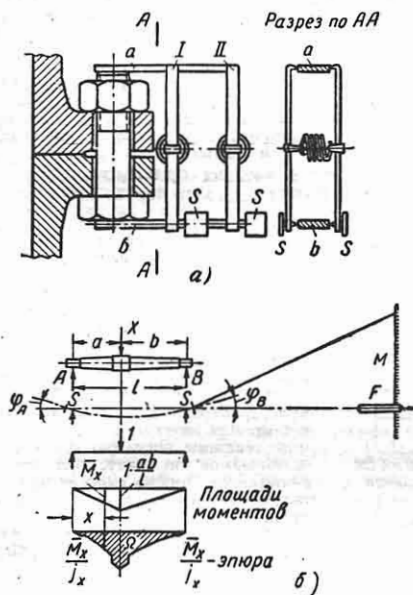


Фиг. 17. Измерение углов закручивания между сечениями  $AA$  и  $BB$  при статической нагрузке: а — отсчеты по стрелке, б — отсчеты по индикатору, в — отсчеты с помощью труб. 1 — скручиваемая деталь; 2 — индикатор; 3 — кронштейн; 4 — отсчетная труба; 5 — шкала.

нии  $s$  — жесткие кронштейны, контактирующие противоположными концами со штифтами индикаторов; угол закручивания  $\varphi^\circ = \frac{360\Delta}{\pi sb}$ , где  $b$  — расстояние между осями индикаторов и  $\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$  — среднее приращение отсчетов по индикаторам;

б) угловые перемещения зеркал  $A$  и  $B$  (фиг. 17, в), укрепленных по концам базы, наблюдаются через зрительные трубы 4 по масштабу 5, нанесенному на цилиндрическую поверхность; нормаль к зеркалу перпендикулярна оси исследуемой детали (см. также табл. 10).

**Пример 1.** На фиг. 18, а приведен пример определения продольного усилия и дополнительного изгиба в плоскости I—II путем измерения общей деформации в случае, когда тензометры непосредственно на стержне установить нельзя.



Фиг. 18.

**Пример 2.** Определение нагрузки  $X$  для случая фиг. 18, б

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_A + \operatorname{tg} \varphi_B &\approx \varphi_A + \varphi_B \approx \int_{EJ} M_x dx = \\ &= X \int \frac{M_x}{EJ} dx; \end{aligned}$$

отсюда

$$X = \frac{E}{\Omega} (\varphi_A + \varphi_B).$$

Здесь  $\Omega$  — площадь эпюры  $\frac{M_x}{EJ}$ , соответствующей силе  $X=1$ ;  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  — измеряемые углы.

Аналогично по замеру угла закручивания может быть найден скручивающий момент вала или жесткость его на кручение.

## МЕТОД ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

Покрытие наносится на исследуемую поверхность детали. Возникающие в покрытии при нагружении детали трещины, отслаивание покрытия от поверхности детали или деформации, наблюдаемые с помощью покрытия, определяют напряженное состояние или деформации в точках поверхности исследуемой детали.

## Лаковые покрытия

Лаковые покрытия, твердеющие при высыхании, предназначены для исследования упругих деформаций (покрытие Института машиноведения АН СССР и покрытие НИИ-58 [24], [49]).

**Характеристики покрытия.** *Постоянной* *покрытия*  $\epsilon_{разр}$  (или, при упругих деформациях,  $\sigma_{разр}$ ) называется деформация (или напряжение для материала исследуемой детали), при которой возникает трещина в покрытии в условии линейного напряженного состояния; величина  $\epsilon_{разр}$  (или  $\sigma_{разр}$ ) определяется тарировкой покрытия.

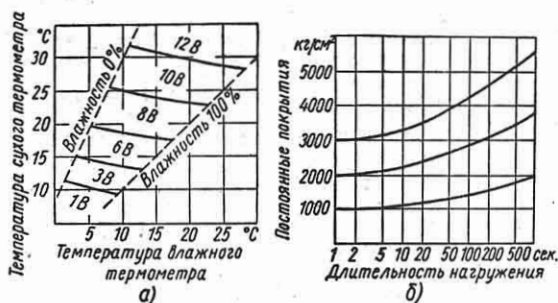
Задачи, решаемые методом лаковых покрытий для точек поверхности детали: 1) определение направлений главных деформаций (напряжений); 2) выявление зон, имеющих наибольшие деформации (напряжения); 3) оценка величин деформаций (напряжений) (при применении тарированного покрытия). Уточнение напряженного состояния далее производится с помощью тензометров.

Условия применения и свойства лаковых покрытий. Сушка нанесенного на поверхность детали покрытия производится на воздухе в естественных условиях. Покрытие применяется для исследования напряжений в деталях, воспринимающих статическую нагрузку, для быстро вращающихся деталей, при динамической и ударной нагрузках как в лабораторных условиях, так и в условиях эксплуатации, при температурах порядка от +8 до +35°C. Исследуемая деталь или ее модель могут быть из стали, чугуна, легкого сплава, пластмассы и других материалов.

После нанесения покрытий допускается не длительное (до 3 час.) действие воды (масло портит покрытие). На трущихся поверхностях покрытие не сохраняется. Постоянная покрытия  $\epsilon_{разр}$  имеет величину от 0,03 до 0,20% при применяемых условиях испытания с величиной разброса  $\pm 15\%$  от величины  $\epsilon_{разр}$ ; величина  $\epsilon_{разр}$  меняется на 5—10% при изменении температуры на 1°C. Действительная величина  $\epsilon_{разр}$  должна каждый раз устанавливаться тарировкой. Величина  $\epsilon_{разр}$  может быть понижена (до величины 0,01%) быстрым охлаждением (воздухом, водой). Поверхностное давление понижает  $\epsilon_{разр}$  (давление 200 кг/см<sup>2</sup> вызывает трещины).

Отслаивание покрытия происходит при деформациях сжатия  $\sim 10\%$ , растяжения  $\sim 30\%$  и при чистом сдвиге  $\sim 20\%$ .

Составы покрытий для исследования упругих деформаций. Для изготовления покрытий применяются очищенные и химически чистые материалы. 1. Лак для покрытия Института машиноведения АН СССР — раствор резината бария в сероуглероде при соотношении по весу 2:3. Для изготовления резината бария отвешивается по количеству требуемого лака высоко- сортная канифоль (температура размягчения не ниже  $68^\circ\text{C}$ ), расплавляется в фарфоровой чашке на плитке (в вытяжном шкафу). Когда температура достигает  $220-230^\circ\text{C}$ , в канифоль малыми порциями вводится гидрат окиси бария  $\text{Ba}(\text{OH})_2$ .



Фиг. 19.

Количество вводимого  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  определяет получаемую чувствительность покрытия: для получения покрытий № 1B, 3B, 6B, 8B, 10B, 12B (фиг. 19, а) вводится соответственно 1, 3, 6, 8, 10, 12%  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  по весу резината. После введения  $\text{Ba}(\text{OH})_2$  температура смеси доводится до  $270^\circ\text{C}$  и подогрев выключается; смесь при  $200^\circ\text{C}$  выливается в бумажные формы и затвердевает. Растворение полученного резината в очищенном сероуглероде производится при комнатной температуре. Хранение полученного лака — в герметически закрываемых металлических банках в прохладном месте; срок хранения до 1 года (и больше). Полученный лак летуч и огнеопасен.

2. Подложка для удобства наблюдения трещин в покрытии — в виде 2%-ного раствора нитроцеллюлозы в этилацетате с добавлением 0,4% по весу мелкой алюминиевой пудры. Наносится на предварительно очищенную от окалины и обезжиренную поверхность детали с помощью окрашенного пульверизатора (давление 2—3 атм).

3. Смычка для снятия нанесенного лака без растворения подложки — серный эфир, для снятия лака и подложки — ацетон.

4. Травитель для лучшего выявления трещин в покрытии — раствор канифоли в спирте с добавлением кислотного анилового красителя.

Проведение исследований. Порядок проведения исследований: а) Очистка поверхности (железной щеткой или наждачной бумагой, обдувка с помощью пистолетного аппарата, промывка растворителем).

б) Нанесение подложки, если поверхность имеет царапины или темный фон; желатинная модель из прозрачного материала.

в) Выбор марки покрытия в зависимости от температуры и влажности воздуха при сушке и испытании (см. фиг. 19, а).

г) Нанесение покрытия на поверхность исследуемой детали и на тарировочные образцы.

д) Сушка в одинаковых условиях покрытия исследуемой детали и тарировочных образцов.

е) Испытание тарировочных образцов (в условиях испытания детали); при количественных измерениях при испытании исследуемой детали производится зарисовка для каждой нагрузки зон распространения и направлений трещин (обводка тушью или мелом на детали, фотографирование или перечерчивание).

ж) Обработка данных эксперимента.

Вывод марки покрытия производится с помощью графика фиг. 19, а в зависимости от температуры и влажности воздуха во время сушки и испытания, определяемых по температурам сухого и влажного термометра;  $\epsilon_{\text{разр}}$  оказывается в пределах 0,03—0,10%. Если необходимо меньшее  $\epsilon_{\text{разр}}$ , то берут более высокий

номер покрытия, но во избежание трещин при сушке ее ведут при более высокой температуре, чем испытание. Менее чувствительное покрытие может дать трещины, исчезающие после снятия нагрузки.

Нанесение покрытия производится при температуре испытания (или несколько большей) мягкой кистью при малых размерах поверхности и сложной форме детали или с помощью пульверизатора при больших поверхностях. Для того чтобы достичь требуемой толщины покрытия 0,06—0,1 мкм, оцениваемой по цвету, при употреблении кисти нужно нанести приблизительно 7—8 слоев, а при распылении пульверизатором 8—10. При работе с пульверизатором необходимо отдельное хорошо вентилируемое помещение.

Сушка покрытия производится на воздухе в течение 20—24 час. Для получения величины  $\epsilon_{\text{разр}}$  сушка покрытия на детали и тарировочном образце производится при одних и тех же температурах и влажности. Колебания температуры допускаются не более  $\pm 5^\circ\text{C}$  и влажности не более  $\pm 5\%$ . Опасность появления трещин при сушке при применении лака повышенной чувствительности (лак более высокого номера марки, чем требуется по графику, фиг. 19, а) снижается искусственным повышением температуры, которая должна быть сделана нормальной за 1—2 часа до окончания сушки.

Тарировка покрытия производится на изгибаемых в виде консоли образцах прямоугольного сечения размером порядка  $5 \times 20 \times 300$  мм из стали с высоким пределом упругости или из материала исследуемой детали или модели. Способы определения  $\epsilon_{\text{разр}}$  для растянутой зоны:

1-й способ — после нанесения на плоскость образца покрытия и его просушки в условиях испытания детали к концу консоли ступенями (через 0,5 кг) прикладывается нагрузка до получения первых трещин; постоянная покрытия  $\epsilon_{\text{разр}} =$

$$= \frac{6}{E} \cdot \frac{P_0 l}{bh^2},$$

где  $E$  — модуль упругости материала образца;  $b$  и  $h$  — ширина и высота его сечения;  $P_0$  — нагрузка, при которой на расстоянии  $l$  от конца консоли получены первые трещины. 2-й способ — на конце консоли создается определенной величины прогиб (эксцентрик или винтом); для данного образца заранее находится величина упругих деформаций на поверхности в различных местах по длине. Место, до которого доходят трещины, на образце при тарировке покрытия определяется  $\epsilon_{\text{разр}}$ .

Способы определения  $\epsilon_{\text{разр}}$  и проведения испытания детали для измерений в сжатой зоне: 1-й способ — покрытие наносится на



сжатой стороне нагруженной детали и высушивается под нагрузкой, деталь разгружается. 2-й способ — покрытие наносится на нагруженную деталь, высушивается и затем медленно нагружается до максимальной нагрузки, выдерживается под нагрузкой не менее 1 часа и затем разгружается; величина  $\epsilon_{разр}$  при сжатии находится так же, как для растянутой зоны, но нагрузка отсчитывается от начального деформированного состояния образца. Если скорость деформации образца и детали различная, то по графику фиг. 19, б вводится поправка на ползучесть в зависимости от длительности нагрузки (или разгрузки) испытуемой детали.

Условия наблюдения трещин в покрытии: а) плоскость, в которой расположен источник освещения и глаз наблюдателя, должна быть перпендикулярна плоскости трещины; б) глаз наблюдателя должен находиться на линии, отраженной от поверхности детали, в месте расположения трещины (темная трещина), или на линии лучей, падающих на трещину (светлая трещина). Источник света не должен нагревать покрытие (лампа с питанием от батареи).

**Методы проведения измерений.** Для получения направления главных деформаций (напряжений) и выявления наиболее напряженных зон поверхности детали нагрузка доводится до получения трещин в покрытии в интересующих зонах (при нагрузке или разгрузке); величина нагрузки может не определяться, покрытие не тарируется. Для оценки величин деформаций (напряжений) в случае статического действия нагрузки (и для быстро вращающихся деталей) применяется тарированное покрытие одной чувствительности и ступенчатое изменение нагрузки (или числа оборотов вращающейся детали); в случае динамической нагрузки применяются покрытия нескольких марок с различными величинами  $\epsilon_{разр}$  (испытания проводятся повторно) или, если конструкция симметрична, на участках наносится покрытие различной чувствительности (проводится одно испытание); приближенная оценка величин напряжений делается по густоте трещин. Для оценки концентрации напряжений необходимо более стабильное и чувствительное покрытие (покрытие того же состава при искусственной сушке в стабильных условиях); коэффициент концентрации оценивается по отношению нагрузок при образовании трещин в зоне концентрации и в месте номинальных напряжений.

Основные зависимости, применяемые при обработке данных эксперимента: 1) трещины в покрытии совпадают в каждой точке с направлением главных деформаций; 2) напряжение на свободном контуре плоской детали обратно пропорционально

расстоянию от контура до ближайшей траектории; 3) при деформации в пределах пропорциональности и сохранении условий подобия деформация  $\epsilon$  при расчетной нагрузке  $P$  связана с  $\epsilon_{разр}$  и нагрузкой  $P_{эксп}$ , при которой возникла трещина в рассматриваемой точке, зависимостью

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{разр}}{P_{эксп}} P; \quad (12)$$

4) трещины в покрытии зависят от главных удлинений (за исключением мест, где оба главных напряжения сжимающие или их отношение, приближенно,  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} > \frac{1}{3}$ ); при этом условия главные напряжения могут оцениваться по замеренным при нагрузке и разгрузке детали с покрытием главным деформациям  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  с применением формул (7).

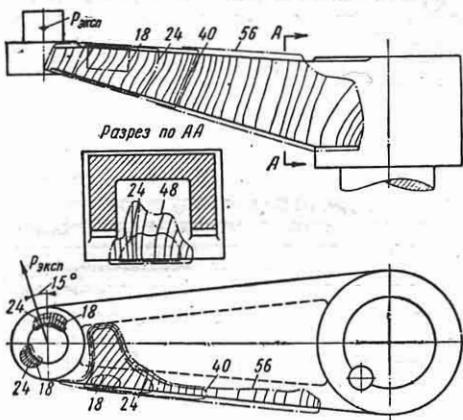
**Пример 1.** Для точек стальной детали, имеющей малую величину главных напряжений в направлении вдоль трещин, были получены трещины в покрытии при следующих нагрузках  $P_{эксп}$  в кг:

№ точки:	1	2	3	4	5	6
$P_{эксп}$	250	100	190	230	290	390

Постоянная покрытия, полученная на тарировочной балке из материала детали,  $\sigma_{разр} = 700 \text{ кг/см}^2$ . Отсюда, например, для наиболее напряженной точки 2

$$\sigma = \frac{700}{100} P = 7,0 P \text{ кг/см}^2.$$

**Пример 2.** Для исследования распределения напряжений в рычаге направляющего аппарата гидротурбины применена модель из оргстекла (используется также неолейкорит) (фиг. 20). Перед



Фиг. 20.

тензометрированием с помощью покрытий выявлены зоны наибольших напряжений и направления главных напряжений; нагрузки  $P_{эксп}$  модели, при

которых получены трещины в покрытиях, по зонам, перенесены на чертеж (см. фиг. 20). При постоянной примененного покрытия  $\sigma_{разр} = 8 \text{ кг/см}^2$  (орг. стекло) напряжения в модели при нагрузке  $P$  оцениваются величинами  $\sigma_{мод} = \frac{\sigma_{разр}}{P_{экс}} P$ .

### Накатные сетки

Накатные сетки применяются для изучения местных больших (в металлах) и упругих (при таких материалах, как резина) деформаций от 5% и выше [9], [40].

Метод заключается в нанесении на поверхность детали или образца сетки с базой от 0,25 до 5 мм и в замере получаемых деформаций с помощью инструментального микроскопа (увеличение до 60 раз) или по фотографии; путем пересчетов находят напряжение и величины главных деформаций и пластического сдвига. Сетки применяются при испытании деталей и узлов до разрушения, при механических испытаниях образцов, при испытаниях при температурах до 350°С и при пониженных температурах.

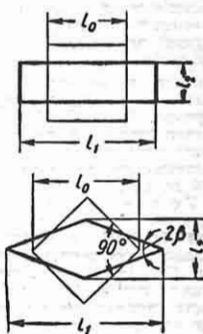
Основные характеристики метода: а) стандартность методики нанесения сеток; сетки в виде квадратов или соприкасающихся окружностей накатываются с матриц, представляющих собой клише с оригинала сетки, вычерченного в большом масштабе; б) сетка накатывается типографской краской без повреждения поверхности детали; высокая пластичность сетки сохраняется в течение нескольких месяцев; в) толщина линий сетки до деформации от 0,02 до 0,08 мм (в зависимости от базы сетки).

Комплект оборудования состоит из: 1) набора металлических матриц с разными базами и типами сеток; 2) валиков из желатин — одного для нанесения краски на матрицу и другого для переноса сетки с матрицы на исследуемую деталь; 3) приспособления для установки матрицы и испытуемых образцов; 4) зеркального стекла для раскатывания краски; 5) материалов для работы (печатные краски, бензин для очистки и снятия краски, глицерин для смягчения валиков).

Измерение производится инструментальным микроскопом непосредственно на поверхности исследуемой детали с перерывом ее нагружения или на экране с фотонегатива. Замеряются

(фиг. 21) конечные длина  $l_1$  и ширина  $l_2$  элементов сетки и конечный угол сетки  $\beta$  (для сетки с линиями, совпадающими в исходном положении с направлениями наибольших касательных напряжений).

Точность измерений связана с погрешностями в размерах сетки на оригинале и при накатке и зависит от базы сетки и величины измеряемой деформации.



Фиг. 21.

База сетки в мм	Величина деформаций в %	Средняя погрешность в мк	
		абсолютная	для подсчитанных удлинений
0,4	10	0,4	6,0
	50	4,0	1,3
2,0	10	6,0	5,0
	50		0,4

Расчет местных пластических деформаций при совпадении сторон сетки с направлениями главных деформаций производится на основании следующих формул: а) истинные относительные линейные деформации

$$e_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} \quad \text{и} \quad e_2 = \ln \frac{l_2}{l_0}; \quad (13a)$$

б) третья главная деформация  $e_3$  находится из закона постоянства объема при пластической деформации

$$e_3 = -(e_1 + e_2); \quad (13б)$$

в) истинный сдвиг  $g = e_1 - e_2$ .

Расчет наибольшего истинного удлинения из условного сдвига см. [9], [40]. Расчет напряжений по замеренным пластическим деформациям производится на основании диаграммы деформация — напряжение из опытов на кручение (при плоской деформации); для металлов, подчиняющихся закону обобщенной кривой течения). При определении концентрации напряжений в материалах, не подчиняющихся закону обобщенной кривой, снимается диаграмма деформация — напряжение на плоском образце, имеющем близкое к рассматриваемому деформированное состояние.

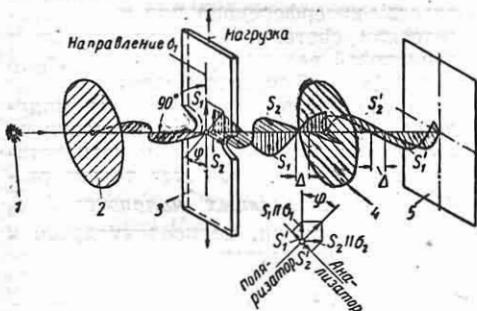
## ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Метод основан на свойстве большинства прозрачных материалов становиться двоякопреломляющими под действием нагрузки; получаемая *оптическая анизотропия*, связанная с возникающими деформациями (напряжениями), измеряется с помощью поляризованного света. Исследования ведутся на прозрачных моделях той же формы, что и изучаемая деталь; нагрузка модели, подобная нагрузке детали, прилагается к модели статически или динамически. Метод измерения разработан применительно к определению напряжений в деталях плоской и объемной формы, выполненных из однородного материала, при деформации в пределах пропорциональности.

Прозрачные материалы для исследований при пластической деформации см. [36].

### Оптика напряжений

**Плоские модели.** Монохроматический свет в полярископе. Свет создается источником 1 (фиг. 22). Волна длиной  $\lambda$  поляризованного света, идущая от поляризатора 2,



Фиг. 22.

проходит через плоскую нагруженную модель 3 и анализатор 4 [41], [49]. Изображение модели на экране 5 сопровождается картиной интерференции по всем точкам внутри контура модели. Часть экрана, не занятая моделью, при скрещенных поляризаторе и анализаторе (их оптические оси перпендикулярны)

будет темной; в точках, где линейные разности хода  $\Delta = 0, 1\lambda, 2\lambda, \dots$ , т. е.

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14a)$$

темные места экрана, и где

$$\Delta = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots$$

т. е.

$$m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \quad (14b)$$

места наибольшей освещенности.

Порядок  $m$  интерференции связан с разностью  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  главных напряжений и напряжением вдоль ненагруженного контура  $\sigma_{\text{конт}}$  зависимостями

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = 2\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{t} m \quad (15)$$

(для любой точки модели);

$$\sigma_{\text{конт}} = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{t} m \quad (16)$$

(на ненагруженном контуре).

Здесь  $t$  — толщина модели в см;  $\sigma_0^{(1,0)}$  — оптическая постоянная материала модели для  $t = 1,0$  см (табл. 11).

При деформациях модели в пределах пропорциональности получаемый порядок  $m$  интерференции может быть также отнесен к разности главных деформаций:

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{\epsilon_0^{(1,0)}}{t} m; \quad (15a)$$

здесь оптическая постоянная материала модели

$$\epsilon_0^{(1,0)} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_0^{(1,0)}. \quad (16a)$$

При  $\Delta$ , равном нескольким  $\lambda$  (модель из материала высокой оптической активности,  $\sigma_0^{(1,0)} < 20$  кг/см;  $t > 3 + 5$  мм), на экране получаются светлые и темные полосы различных порядков  $m$  (картина *полос*). Точки, лежащие на одной и той же полосе, соответствуют одинаковым  $m$ , т. е. одинаковым величинам  $(\sigma_1 - \sigma_2) = 2\tau_{\text{max}}$  в плоской модели. Для получения картины *полос* применяется монохроматический свет и круговая поляризация (включаются пластинки «четверть волны»). При  $m > 5 \div 6$  и белом свете

Таблица 11

Характеристика прозрачных материалов, применяемых для моделей в поляризационно-оптическом методе

Материал	Оптическая постоянная $\sigma_0^{(1,0)}$ в $\text{кг/см}$ (для $\lambda = 546,1 \text{ мкм}$ )	Предел прочности при растяжении $\sigma_{пр}$ в $\text{кг/см}^2$	Предел пропорциональности $\sigma_{пр}$ (механический и оптический) в $\text{кг/см}^2$	Модуль продольной упругости $E$ в $\text{кг/см}^2$	Коэффициент Пуассона $\mu$
<i>При комнатной температуре</i>					
Стекло . . . . .	160—500	—	—	(0,5—0,7) $10^9$	0,25
Оргстекло (для оптически не активной части составных моделей; для получения изоклин) . . . . .	200	500	200	25 000—28 000	0,35
Целлулоид . . . . .	40—70	350—600	250—400	15 000—30 000	0,33—0,33
Фенолформальдегидная пластмасса ИМ-44, типа вискомлит [49] . . . . .	12	1500	600	35 000—45 000	0,36
Глифталевая смола МИХМ-ИМАШ . . . . .	13—16	800	700	35 000	0,35
Глифталевая смола ВТ61-893 . . . . .	12	700	400	40 000	0,36
Аллиловый эфир CR-39 . . . . .	14	500	200	18 000	—
Этоксиленовая пластмасса . . . . .	10	—	—	28 000	—
Желатин (воды 65%, глицерина 14%) . . . . .	0,03	—	—	0,9	0,5
<i>При температуре „замораживания“ <math>T_0</math></i>					
Фенолформальдегидная пластмасса ИМ-44, типа „вискомлит“; $T_0 = 105^\circ \text{C}$ [49] . . . . .	0,60	35	10	140	0,40
Стиролакидная смола МИХМ-ИМАШ (материал М); $T_0 = 90^\circ \text{C}$ [25] . . . . .	0,30—0,40	7	6	50	0,5
Этоксиленовая пластмасса; $T_0 = 90^\circ \text{C}$ . . . . .	0,25	20	—	130	—

окраска на экране бледная; поэтому для замера разностей хода на моделях толщиной  $t > 2 \div 3 \text{ мм}$ , выполненных из материала с высокой оптической активностью, нельзя в полярископе пользоваться белым светом.

Точки модели, имеющие одинаковое направление главных напряжений, совпадающее с плоскостью поляризации поляризатора или скрещенного с ним анализатора (при плоской поляризации и белом свете), на экране соединены темной *изоклиной*.

Точки в модели, в которых  $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$  (*изотропные точки*, *изотропные линии* и *зоны*), соответствуют местам экрана, которые остаются всегда темными при любом положении скрещенных поляризатора и анализатора (при снятых пластинках „четверть волны“); при применении в полярископе белого света и круговой поляризации им соответствуют темные (неокрашенные) места экрана.

Белый свет в поляризаторе. Зависимости (15) и (16) остаются справедливыми, но должны быть применены к каждой монохроматической составляющей. В точках модели происходит погашение соответствующих составляющих

белого света, что приводит к появлению на экране дополнительных окрасок; подробнее см. [44] и [49]. Места, имеющие на экране одинаковую окраску, называются *изохромами* и соответствуют полосам интерференции при монохроматическом свете, т. е. точкам модели с одинаковой величиной  $(\sigma_1 - \sigma_2) = 2\tau_{\max}$ . При  $m > 5 \div 6$  окраска бледная.

**Зависимости для объемных моделей** [41], [49]. При просвечивании по оси  $z$  элемента объемной модели оптический эффект вызывается только разностью *квазиглавных напряжений*  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  в плоскости, перпендикулярной к направлению просвечивания:

$$\bar{\sigma}_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (17)$$

Порядок полосы интерференции при просвечивании элемента объемной модели толщиной  $t$

$$m = \frac{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}{\sigma_0^{(1,0)}} t \quad (18a)$$

— при однородном напряженном состоянии;

$$m = \frac{1}{\sigma_0^{(1,0)}} \int_0^t (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) dt \quad (18б)$$

— при неоднородном напряженном состоянии, но не меняющемся направлении квазиглавных напряжений;

$$m = \frac{1}{\sigma_0^{(1,0)}} \int_0^t (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) \times \sqrt{1 + \left(2 \frac{d\varphi}{d\delta}\right)^2} dt \quad (18в)$$

— при меняющихся от точки к точке углах наклона квазиглавных напряжений;  $\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$  — относительная разность фаз.

Поправкой, связанной с изменением  $\varphi$ , практически можно пренебречь или она может вводиться последовательным приближением.

### Материал для изготовления моделей

Требования к материалу: прозрачность, достаточная для просвечивания модели в полярикопе; отсутствие начального оптического эффекта; достаточная оптическая активность материала; изотропность и однородность; линейная зависимость между напряжениями и деформациями и между напряжениями и порядковым номером полос и отсутствие заметных механиче-

ской и оптической ползучестью (для исследуемых на упругих моделях); достаточная величина модуля упругости материала при данной его оптической активности, обеспечивающая отсутствие заметного искажения формы модели при нагрузке; возможность механической обработки для изготовления моделей из плиток или блоков; при исследовании методом „замораживания“ — способность материала к „замораживанию“ и достаточная величина показателя качества материала; при исследовании методом рассеянного света — оптимальные свойства рассеивания.

**Показатель качества материала** для моделей принимается равным  $K = \frac{E}{\sigma_0^{(1,0)}}$  или  $K =$

$$= \frac{E \sigma_{np}}{\left[\sigma_0^{(1,0)}\right]^2}, \text{ где } E, \sigma_{np} \text{ и } \sigma_0^{(1,0)} \text{ — модуль упругости, предел пропорциональности и оптическая постоянная при температуре „замораживания“.$$

Показатель качества оценивает минимальное искажение формы модели при получении необходимого оптического эффекта в методе „замораживания“ при деформации в пределах пропорциональности. Температура „замораживания“ определяется как наименьшая температура при нагреве, при которой при приложении нагрузки полная соответствующая ей деформация достигается за время приложения нагрузки.

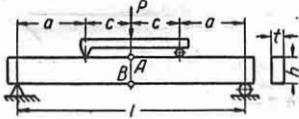
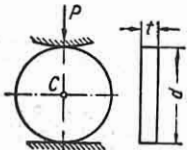
Основные недостатки имеющихся материалов для решения упругих задач: краевой эффект времени, трудность получения качественных блоков больших размеров, значительные деформации при „замораживании“.

Для прямого решения упруго-пластических задач оптический материал должен подчиняться за пределом упругости тем же условиям деформирования, что и материал исследуемой детали (сталь), а также давать за пределом упругости оптический эффект в зависимости от напряжений и в зависимости от деформаций.

Таблица 12

### Способы определения оптической постоянной $\sigma_0$ материала

При нагрузке модели отсчитываются  $m_A$  и  $m_B$  (на краях балки) или  $m_C$  (в центре диска). Нагрузка  $P$  не должна вызывать напряжений, больших предела пропорциональности (см. табл. 11)

Схема тарировочного образца и рекомендуемые размеры	Формулы для подсчета постоянной	Проверка отсутствия краевого эффекта
1. Балка при чистом изгибе: $l = 10 \div 15 \text{ см}; h_1 = 1,0 \div 1,5 \text{ см};$ $a = 2,5 \div 3,5 \text{ см}; t = 0,5 \div 0,8 \text{ см}$ 	$\sigma_0^{(t)} = \frac{12Pa}{(m_A + m_B) h_1^2};$ $\sigma_0^{(1,0)} = \sigma_0^{(t)} \frac{t}{1,0}$	$\frac{m_A - m_B}{\frac{1}{2} (m_A + m_B)} 100 < 5\%$
2. Сжимаемый диск: $d = 3 \div 7 \text{ см}; t = 0,4 \div 0,8 \text{ см}$ 	$\sigma_0^{(t)} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{P}{dtm_C};$ $\sigma_0^{(1,0)} = \sigma_0^{(t)} \frac{t}{1,0}$	На контуре $m = 0$

Ни один из имеющихся материалов не удовлетворяет в полной мере всем требованиям метода, в связи с чем необходимо применение нескольких марок материала.

Основные применяемые материалы, их свойства и определение постоянной  $\sigma$  см. табл. 10 и 11, см. также [25], [41], [49], [52].

Начальный оптический эффект наблюдается в полярикопе в виде полос интерференции (изохром) при отсутствии внешней нагрузки; может рассматриваться как результат "замораживания" деформации при изготовлении материала. Устраняется до чистой обработки модели путем отжига [22], [41], [49].

Краевой эффект времени наблюдения в виде полос интерференции непосредственно у края модели, которые образуются в первые часы после вырезки модели и развиваются со временем от края на глубину до толщины модели. Развитие краевого эффекта времени в модели предотвращается устранением влагообмена между материалом по обработанной поверхности модели и срелой; предохранение — хранение модели в эксикаторе или заклейка обработанной грани модели тонкой фольгой [24]. Краевой эффект времени в стиролалкидной пластмассе и в глифтаевой смоле незначителен.

Краевой эффект при неправильной обработке модели аналогичен краевому эффекту времени [22].

Изготовление моделей см. [22], [41], [49].

## Основное оборудование

Типы поляризационно-оптических установок (полярикопов). Полярископ предназначен для определения в моделях направлений главных напряжений и оптической разности хода, соответствующей разности главных напряжений.

Полярископ состоит из источника света со светофильтром или без него, поляризационного устройства с поляроидом или поляризационной призмой (поляризатор) и второго поляризационного устройства (анализатор). Исследуемая модель устанавливается между поляризатором и анализатором неподвижно или на координатном

Применяемые полярикопы позволяют получать линейно поляризованный свет (плоский полярископ) или, введением пластинок "четверть волны", поляризованный по кругу свет (круговой полярископ). В двоянном полярикопе поляризатор и анализатор расположены по одну сторону от модели (табл. 13 и 14).

Основные применяемые полярикопы и устройства к ним. Простейший полярископ для качественных исследований состоит из двух скрещенных поляроидных дисков. Свет — от освещающего матового стекла или дневной свет.

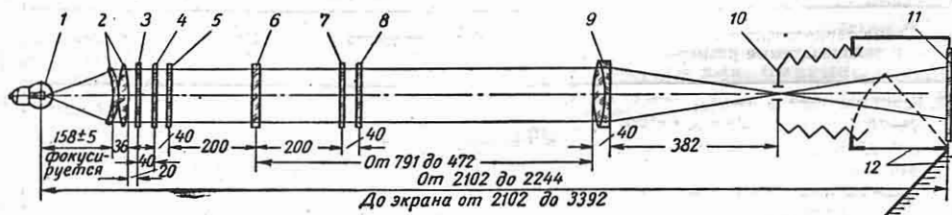
Проектионно-поляризационная установка ЛГУ (ППУ-4) с поляроидами используется для получения общей картины распределения напряжений при качественных и количественных исследованиях плоских моделей. Допускает наблюдение, фотографирование и зарисовку изоклин и изохром при белом свете и картины полос при введении светофильтра. При применении компенсатора осуществляется измерение по точкам модели. Рабочее поле диаметром 70 или 120 мм.

Установка ИМАШ-КБ2 (БПУ) [49] имеет те же назначения, что и прибор ППУ-4. Состоит из поляризационной и наблюдательной частей, универсального нагрузочного устройства на координатнике и устройства для фотографирования (фиг. 23). Рабочее поле установки 130 мм. Источник света — ртутная точечная лампа и лампа накаливания. Обеспечивается предел разрешения 10 полос на 1 мм.

Компаратор ЛГУ с компенсаторной трубой [15] применяется для количественных измерений по точкам в зонах модели разности главных напряжений и их направлений.

Координатно-синхронный поляриметр ЛГУ (КСП-4) [15] применяется для измерений компенсатором по точкам разностей главных напряжений и их направлений в зонах плоской или срезах объемной модели. Состоит из совместно вращаемых с помощью передачи поляризатора и анализатора, снабженных лимбом.

Насадка для одностороннего монтажа к компенсаторной трубе ЛГУ [15], [49] применяется при необходимости иметь все части установки по одну сторону модели ("односторонний монтаж").



Фиг. 23. Схема поляризационной установки БПУ: 1 — источник света (ртутная лампа СВДШ-250 или лампа накаливания с короткой нитью); 2 — коллектор 120/180; 3 — светофильтр  $\lambda=546,1$  мкм; 4 и 5 — поворотные поляроиды с лимбами, свободный  $\varnothing 130$  мм; 6 — модель в нагрузочном устройстве на координатнике; 7 — телескопический проекционный объектив  $f=400$ , совместно с коллектором изображающий источник света на ирисовой диафрагме 10 (перемещается вместе с объективом) с увеличением 2,2 и модель — на фотопластинке 11 в масштабе от —1 до —1,5 или на настенном экране в масштабе от —1 до —5; 12 — устройство с поворотным зеркалом для наблюдения со стороны модели.

устройстве. Кроме того, полярископ может иметь систему линз, экран и другие устройства для наблюдения и фотографирования и снабжается компенсатором для возможности замера долей порядка полос интерференции. Диаметр сечения пучка параллельных лучей поляризованного света, просвечивающего модель, определяет размер рабочего поля полярикопа.

Поляризационный микроскоп с поворотным устройством используется для измерений на срезах, вырезанных из "замороженной" модели; увеличение от 10 до 40. Компенсаторы для измерения малой разности хода [15], [41], [49] применяются для качественной оценки (кварцевый или слюдяной клин) или точного измерения (ком-

Типы полярископов

Таблица 13

Различие в типах	Типы полярископов	Оценка и применение
1. По способу получения поляризованного света	1. С поляризационными призмами. 2. С искусственными поляризаторами (поляроидами)	Поляризационными призмами достигается наилучшая поляризация, но поляроиды позволяют с малым числом линз или без них иметь большее рабочее поле установки
2. По оптической системе	1. Полярископы с линзами. 2. Полярископы без линз с зеркалами. 3. Полярископы без линз с диффузором	Полярископы без линз применяются для получения большого рабочего поля установки ( $\varnothing$ 300 мм и больше)
3. По ходу лучей в модели	1. Полярископы с прямым ходом лучей. 2. Полярископы с двойным ходом лучей	В типе 2 удваивается наблюдаемая разность хода — луч проходит модель дважды; применяется для одностороннего монтажа (исследование замкнутых оболочек и оптически активного слоя на непрозрачной модели)
4. По назначению	1. Для качественных исследований. 2. Для исследований плоских моделей (по методу полос). 3. Для зональных исследований по точкам (на малых участках плоской модели или срезов объемной модели) 4. Для исследования объемных моделей. 5. Специального назначения (для исследований во вращающихся моделях, при вибрациях, при ударах и пр.)	Типы 1 и 2 — обычно применяемые. Тип 3 — для исследования в зонах концентрации напряжений и при малых $\tau$

Таблица 14

Применяемое расположение частей полярископа и наблюдаемый оптический эффект (при монохроматическом свете)

Тип полярископа	Расположение частей полярископа	Поле вокруг модели	Изоклины	Порядки полос интерференции
Плоский, с прямым ходом лучей, без пластинок, $\frac{\lambda}{4}$	Поляризатор и анализатор скрещены (главные плоскости под углом $90^\circ$ ) Поляризатор и анализатор параллельны	Черное Светлое	Темные Светлые	Целые Половинные
Круговой, с прямым ходом лучей, с пластинками, $\frac{\lambda}{4}$	Поляризатор и анализатор скрещены (параллельны); оптические оси пластинок $\frac{\lambda}{4}$ скрещены (параллельны) и под углом $45^\circ$ к главной плоскости поляризатора Поляризатор и анализатор скрещены (параллельны); оптические оси пластинок $\frac{\lambda}{4}$ параллельны (скрещены) и под углом $45^\circ$ к главной плоскости поляризатора	Черное Светлое	Не видны Не видны	Целые Половинные
Сдвоенный (с обратным ходом лучей от модели)	Общий поляризатор и анализатор без пластинок $\frac{\lambda}{4}$ Общий поляризатор и анализатор с одной пластинкой $\frac{\lambda}{4}$ , имеющий оптическую ось под углом $45^\circ$ Независимые поляризатор и анализатор без пластинок $\frac{\lambda}{4}$ (или с ней)	Светлое Темное Как при соответствующем расположении в плоском (круговом) полярископе с прямым ходом лучей	Светлые Не видны	Целые и половинные Целые и половинные Как в полярископе с прямым ходом лучей, но с удвоенной полезной толщины модели

пенсаторы Бабине, Федорова, Берека, Краснова) разности главных напряжений в моделях из малооптически активных материалов (стекло, целлюлоза) или же в тонких пластинках (срезах) толщиной менее 3 мм модели из материала высокой оптической активности. Применение см. [49].

Устройство для измерения поперечных деформаций в плоской модели и изменений толщин срезов и размеров частей объемной модели при „замораживании“: а) *толщимеры*; б) *опти-метры*; в) *окуляр-микрометры*.

Установка для исследования по методу рассеянного света (УРС) [24] (Институт машиноведения АН СССР) обеспечивает: создание интенсивного плоского пучка параллельных лучей поляризованного монохроматического света; перемещения и повороты модели относительно направлений просвечивания и наблюдения; фотографирование картины полос при строго определенном одном и том же для всех точек просвечиваемого сечения направлении рассеяния света; измерения на модели.

Нагрузочные устройства. При нагружении требуется *постоянство нагрузки* (нагружение грузами) или *постоянство деформации* (нагружение винтами и упорами). Нагрузочные устройства применяются *универсальные* (для плоских моделей — нагрузочная рамка) и *специализированные* (по виду и устройству нагружающих элементов, по расположению нагрузки, для осуществления вибраций, удара, быстрого вращения модели). Нагружающие элементы должны обеспечивать требуемую передачу нагрузки на модель и отсутствие сил трения (см. [41], [49]).

Устройство для „замораживания“. Модель нагружается внутри термостата, допускающего приложенные нагрузки, деформацию модели, подъем до 150° и регулирование температуры с отклонением до  $\pm 3^\circ\text{C}$  в течение суток (см. [41], [49]).

### Проведение исследований

**Выбор модели и переход от модели к натуре.** При деформациях в пределах упругости (при однородном и изотропном материале) и при статической нагрузке модели необходимо, чтобы модель была по отношению к детали выполнена с соблюдением масштабов геометрического  $\alpha$  и силового  $\beta$  подобий:

$$\alpha = \frac{l_{дет}}{l_{мод}}; \quad \beta = \frac{P_{дет}}{P_{мод}}. \quad (19)$$

Масштаб перехода от модели к натуре для всякой другой величины (напряжения, деформации и пр.) определяется исходя из ее размерности по величинам  $\alpha$  и  $\beta$  и по соотношению модулей упругости. Из строгого условия статического подобия

$$\alpha\beta \frac{E_{мод}}{E_{дет}} \frac{\sigma_{1,дет}}{\sigma_{1,мод}} \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)_{дет}}{(\sigma_2 + \sigma_3)_{мод}} \frac{\mu_{дет}}{\mu_{мод}} = \frac{(\Delta l)_{дет}}{(\Delta l)_{мод}} \quad (20)$$

следует, что на распределение напряжений не влияет соотношение модулей упругости  $E_{мод}$  и  $E_{дет}$  и что при про-

извольных значениях  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  может оказаться необходимым соблюдение условия равенства коэффициентов Пуассона  $\mu_{мод} = \mu_{дет}$ . Для всех случаев плоских моделей. несоблюдение условия  $\mu_{мод} = \mu_{дет}$  или не дает ошибки при моделировании напряжений и деформаций (см. табл. 15) или (при неравенстве нулю равнодействующей внешних сил, приложенной к каждому контуру) ошибка мала (до 5%) и может не учитываться. В объемных моделях величина  $\mu$  относительно в меньшей степени сказывается на величине большего по абсолютной величине главного напряжения (до 10%) и в большей степени на величинах двух других главных напряжений. В случае чистого кручения вала переменного диаметра величина  $\mu$  не влияет на распределение напряжений. С увеличением суммы второго и третьего главных напряжений по сравнению с первым, за которое принимается наибольшее по абсолютной величине (например, в контактной задаче), ошибка моделирования из-за несовпадения  $\mu_{мод}$  и  $\mu_{дет}$  увеличивается.

Необходимые условия подобия и формулы перехода от модели к натуре см. табл. 15.

Размеры модели выбираются из условий имеющегося материала, возможности выполнить модель с соблюдением требуемого соотношения размеров и обеспечения точности измерений. Толщина плоской модели не влияет на получаемую оптическую картину при нормальном просвечивании, но лучше применять минимальную по условию устойчивости толщину; это дает меньшую глубину зоны краевого эффекта времени и уменьшает *эффект толщины модели* (плохая четкость изображения контура, увеличивающаяся с толщиной); в толстых плоских моделях под действием возникающих поперечных нормальных напряжений уменьшается поперечная деформация в зонах неравномерности напряжений в плоскости модели.

Преимущества крупных объемных моделей: а) благодаря возможности иметь большей толщины срезы (в „замороженных“ моделях) или пучки просвечивающих лучей (при применении рассеяния света) достигается повышение точности измерения и уменьшается эффект кривизны границ; б) при том же количестве полос интерференции — меньшая деформация модели.

Величина предлагаемой к мо-



Таблица 19

## Условия подобия детали и модели

Зависимости для напряжений и деформаций в детали и модели (в пределах пропорциональности)\*.  $E$  — модуль продольной упругости;  $t$  — толщина;  $S$  — усилие в сечении;  $u$  — линейное перемещение.

Условия подобия и зависимости	Запись условий подобия и зависимостей при соблюдении подобия
1. Геометрическое подобие. Постоянство для всех участков модели масштаба $\alpha$ геометрического подобия; см. формулу (19)	Отношение длины отрезка на детали к длине соответствующего отрезка на модели, $\alpha = \text{const}$ . Углы на детали и модели равны
2. Силовое подобие. Постоянство для всех участков модели масштаба $\beta$ силового подобия; см. формулу (19)	Отношение равнодействующей нагрузки на детали к равнодействующей нагрузки на соответствующих участках модели, $\beta = \text{const}$
3. Условие подобия контакта деталей: длины соответствующих участков контакта в детали и модели сохраняют масштаб $\alpha$	$\left( \frac{E_1 \text{дет}}{E_1 \text{мод}} + \frac{E_2 \text{дет}}{E_2 \text{мод}} \right) \alpha^2 = \left( 1 + \frac{E_1 \text{дет}}{E_2 \text{дет}} \right) \beta.$ <p>1 и 2 — части детали и модели, находящиеся в контакте. Соблюдается подбором материала моделей и выбором <math>\alpha</math> и <math>\beta</math></p>
4. Зависимости между изгибающими моментами $M_{\text{дет}}$ и $M_{\text{мод}}$ , напряжениями $\sigma_{\text{дет}}$ и $\sigma_{\text{мод}}$ и перемещениями $u_{\text{дет}}$ и $u_{\text{мод}}$ (при соблюдении условий пп. 1, 2 и 3)	$M_{\text{дет}} = \frac{1}{\alpha\beta} M_{\text{мод}}; \sigma_{\text{дет}} = \frac{t_{\text{мод}}}{t_{\text{дет}}} \frac{\beta}{\alpha} \sigma_{\text{мод}};$ $u_{\text{дет}} = \frac{t_{\text{мод}}}{t_{\text{дет}}} \beta \frac{E_{\text{мод}}}{E_{\text{дет}}} u_{\text{мод}}$ <p>(плоские деталь и модель);</p> $\sigma_{\text{дет}} = \frac{\beta}{\alpha^2} \sigma_{\text{мод}}; u_{\text{дет}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{E_{\text{мод}}}{E_{\text{дет}}} u_{\text{мод}}$ <p>(объемные деталь и модель)</p>
5. Зависимости при условии равенства величин относительных деформаций в детали и модели; $\epsilon_{\text{дет}} = \epsilon_{\text{мод}}$	$\frac{E_{\text{дет}}}{E_{\text{мод}}} \alpha^2 = \beta; \sigma_{\text{дет}} = \frac{E_{\text{дет}}}{E_{\text{мод}}} \sigma_{\text{мод}};$ $S_{\text{дет}} = \beta S_{\text{мод}}; u_{\text{дет}} = \alpha u_{\text{мод}}$

\* Если коэффициенты Пуассона детали и модели равны  $\nu_{\text{дет}} = \nu_{\text{мод}}$  или если при  $\nu_{\text{дет}} \neq \nu_{\text{мод}}$  различие в коэффициентах Пуассона сказывается незначительно; см. стр. 524 и [1], [41].

дели и нагрузки должна обеспечить получение достаточного для измерений оптического эффекта (10—20 полос на толщину 1 см) и не давать напряжений в модели, больших предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пр}}$  материала модели. Применяются следующие способы определения величины прилагаемой к модели нагрузки в зависимости от требуемой величины оптического эффекта и по  $\sigma_{\text{пр}}$  материала модели: 1) приближенный расчет величин ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) и нагрузки в модели; 2) для существующей или спроектированной конструкции — по рабочим нагрузкам с учетом масштаба подобия.

Основные погрешности, вытекающие из применения моделей (для упругих деформаций): 1) невозможность соблюдения условия  $\nu_{\text{дет}} = \nu_{\text{мод}}$  (для объемной модели); 2) искажение формы модели при нагружении по сравнению с

формой деформированной детали (при методе „замораживания“). Величина погрешностей зависит от задачи и оценивается: 1) расчетом для задачи, близкой к рассматриваемой, или 2) по результатам испытаний.

Изоклины и траектории напряжений (изостаты) в плоских моделях. Изоклина параметра  $\varphi_i$  — геометрическое место точек, в которых направление главных напряжений  $\sigma_1$  (или  $\sigma_2$ ) образует угол  $\varphi_i$  (или  $90^\circ - \varphi_i$ ) с начальной произвольно выбранным направлением (например, осью  $x$ ). Совокупность изоклин последовательных параметров (поле изоклин) определяет направление главных напряжений во всех точках модели и используется для вычерчивания по нему изостат, а также при компенсации по точкам при измерениях ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) внутри контура модели.

Способы получения изоклин см. [15], [41], [49]; рекомендуется применение моделей из оргстекла.

Траектории главных напряжений (изостаты) представляют собой две системы взаимно перпендикулярных кривых, касательные к которым совпадают с направлениями главных напряжений; к свободному контуру изостаты выходят по нормали. Поле изостат получается по полю изоклин проведением через точки изоклин прямых с наклоном, равным параметру изоклины; построение может начинаться с любых точек на изоклине. Построение изостат по изоклинам см. [41], [49].

Изотропные точки ( $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ) наблюдаются как полосы (изохромы) интерференции нулевого порядка  $m = 0$ . Способы определения положений точек  $m = 0$  с помощью полярископа: а) при белом свете и круговой поляризации точки  $m = 0$  — темные с оранжево-желтой каймой, все прочие — цветные; б) через точки  $m = 0$  проходят все изоклины (проверяется при белом свете и плоской поляризации); в) при нагружении модели точки  $m = 0$  не перемещаются.

Различие случаев  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$  или  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ : а)  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , если поперечная деформация в изотропной точке равна нулю (проверяется толщешером) или если высверливание поперечного отверстия малого диаметра в модели не нарушает картины напряжений; б)  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ , если при наклонном освещении изотропная точка раздваивается.

Определение разностей главных напряжений сводится по формуле (15) к определению целого или дробного порядка  $m$  интерференции.

Методы замера  $m$ : 1) сопоставление окрасок (белый свет в полярископе) для качественного определения  $m \leq 4$  [49]; 2) применение эталона; см. [41], [49]; 3) компенсация по точкам при малой оптической активности материала модели (стекло, целлулоид) или при малой толщине модели (например, при срезах «замороженной» модели толщиной  $t \approx 1 \div 2$  мм); см. [15], [41], [49]; 4) по методу полос при  $m \geq 3 \div 4$ ; этот метод является основным для моделей из материала с высокой оптической активностью толщиной более 3—4 мм — см. ниже; 5) применение микротонометра при необходимости измерять дробные значения  $m$  по негативам [15].

Метод полос является наиболее эффективным методом измерения  $m$  на плоских прозрачных моделях и заключается в получении на экране полярископа при нагружении модели картины интерференции в виде густо расположенных внутри контура модели полос интерференции с последовательным порядком  $m$  целым или половинным (см. табл. 14). Необходимо применение моделей из материала высокой оптической активности; в полярископе — круговая поляризация и монохроматический свет. Для получения порядка полос, равного  $m_{\max}$  при наибольшем допускаемом в модели напряжении  $\sigma_{\text{доп}} = c\sigma_{\text{пр}}$ , требуемая толщина модели (среза) при однократном просвечивании

$$t = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{c\sigma_{\text{пр}}} m_{\max}. \quad (21)$$

Пример. Для материала ИМ-44 при комнатной температуре испытания (см. табл. 11), принимая  $c = 0,5$ , получаем при  $m_{\max} = 10$  наименьшую толщину

$$t = \frac{12}{0,5 \cdot 500} 10 = 0,5 \text{ см.}$$

Определение порядка  $m$  полос производится: а) исходя из обычно имеющихся точек  $m = 0$  (выходящие углы модели, нейтральные зоны) счетом порядка полос на экране или фотографии; способы определения на экране полярископа точек  $m = 0$  см. выше «изотропные точки»; б) при отсутствии точек  $m = 0$  счетом полос в процессе нагружения или с помощью компенсатора. Порядковые номера соседних полос или равны, или отличаются на  $+1$  или  $-1$ . Густота полос может быть удвоена, если произвести два фотоснимка: при скрещенных поляризаторе и анализаторе (темный фон;  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и при параллельных (светлый фон;  $m = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ); см. табл. 14.

Рекомендуемый способ определения  $m_{\max}$  в зоне концентрации напряжений: 1) прилагается наибольшая нагрузка к модели и отмечается место  $m_{\max}$  на контуре; 2) с применением луны с 10- или 20-кратным увеличением (снабжается диафрагмой с небольшим отверстием) подсчитывается в отмеченной точке величина  $m_{\max}$  с точностью до 0,1 полосы, начиная счет с нулевой полосы; 3) нагрузка уменьшается ступенями (через  $1/10$  —  $1/5$  наибольшей нагрузки) и замеряются в той же точке величины  $m$ ; 4) по графику  $m$  — нагрузка определяется число полос на

единицу нагрузки для места наибольшего напряжения на контуре. Подсчет  $m$  на фотографиях обычно недостаточно точен: а) на экране полярископа  $m$  замеряется точнее, чем по фотографии; б) не исключается влияние начальных полос; в) не проверяется правильность установки модели. Величина  $m_{\max}$  на контуре определяется с ошибкой не более 20% при условии качественного материала и хорошего выполнения модели, приняты мер для видимости границ и правильного нагружения модели (см. [52]). Учет начального оптического эффекта см. также табл. 16.

Способы определения знака напряжений на контуре модели: а) приложение к модели дополнительной нагрузки (руками), дающей на контуре известный знак напряжений; б) давление острым краем по всей ширине модели; в) случае растяжения вдоль контура — при нажатии порядок полос повышается (полосы сдвигаются внутрь), и наоборот; в) применение компенсатора или образчика материала с краевым эффектом известного знака.

Основные случаи применения метода полос см. табл. 16.

Таблица 16

**Основные случаи применения метода полос при исследовании напряжений на плоских моделях**

$\sigma_0(1,0)$  и  $\sigma_0(t)$  — оптические постоянные материала для толщины модели 1,0 см и  $t$  см;  $m$  — номера полос на контуре

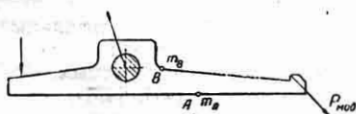
Основные случаи

**1. Определение напряжений на ненагруженном контуре**

Случай 1. Могут быть вычислены напряжения  $\sigma_{дет}$  в какой-либо точке  $A$  контура детали (и модели).

Оптическая постоянная материала модели и нагрузка модели могут не определяться. Напряжения в любой точке  $B$  вдоль контура детали

$$\sigma_{дет, B} = \frac{m_B}{m_A} \sigma_{дет, A}$$



Основные случаи

**2. Определение напряжений на ненагруженном контуре.**

Случай 2. Напряжения не могут быть подсчитаны ни в одной из точек детали (и модели).

При эксперименте должны быть определены постоянная материала  $\sigma_0(1,0)$  и нагрузка модели  $P_{мод}$ .

Напряжения в точке  $B$  вдоль контура детали

$$\sigma_{дет, B} = \frac{1}{\alpha} \frac{t_{мод}}{t_{дет}} \frac{P_{дет}}{P_{мод}} \sigma_0(1,0) m_B;$$

$\alpha$  — масштаб геометрического подобия.



**3. Определение усилий в сечениях элементов плоских рам и ферм**

В сечении  $CD$ :

продольное усилие

$$N = th \sigma_0(t) \frac{m' + m''}{2};$$

изгибающий момент

$$M = \frac{th^2}{6} \sigma_0(t) \frac{m' - m''}{2};$$

поперечная сила

$$Q = - \frac{h}{2c} N;$$

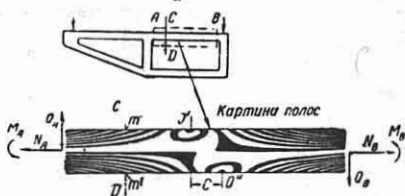
$c$  — расстояние между нулевыми точками  $O'$  и  $O''$  (см. фиг. ниже);  $h$  и  $t$  — высота и ширина сечения. Определение положения нулевых точек в модели используется для разрешения статической неопределенности рам.

Для плоских статически неопределимых рам размеры сечения каждого стержня плоской модели  $b_{мод}$  (в плоскости, перпендикулярной к модели) и  $h_{мод}$  (в плоскости модели) подбираются с соблюдением условия

$$\frac{b_{мод} h_{мод}^2}{12} = \frac{J_{дет}}{\alpha^4} \text{ и при необходимости}$$

учета деформаций от продольных сил

$$b_{мод} h_{мод} = \frac{F_{дет}}{\alpha^2}$$



Продолжение табл. 16

## Основные случаи

4. Определение коэффициентов концентрации  $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}$ 

Картина полос соответствует приведенному основному случаю 1: при изгибе

$$\alpha_\sigma = \frac{m_C}{m} \cdot \frac{M}{M_C} \cdot \frac{W_C}{W};$$

при продольном усилии:

$$\alpha_\sigma = \frac{m_C}{m} \cdot \frac{N}{N_C} \cdot \frac{F_C}{F};$$

$m_C$  и  $m$ ;  $M_C$  и  $M$ ;  $N_C$  и  $N$ ;  $W_C$  и  $W$ ;  $F_C$  и  $F$  — соответственно наибольшие порядковые номера полос, изгибающие моменты, продольные усилия, моменты сопротивления и площади для сечения, содержащего точку  $C$  концентрации напряжений, и для сечения, в котором определяется номинальное напряжение  $\sigma_n$ . При значительном начальном оптическом эффекте в приведенных формулах

$$m_C = m'_C \pm m''_C; \quad m = m' \pm m''$$

где  $m'_C$  и  $m'$  — порядковые номера в нагруженной модели и  $m''_C$  и  $m''$  — до нагрузки

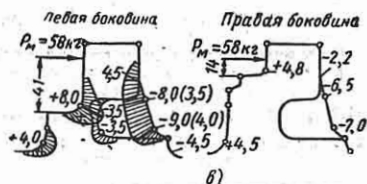
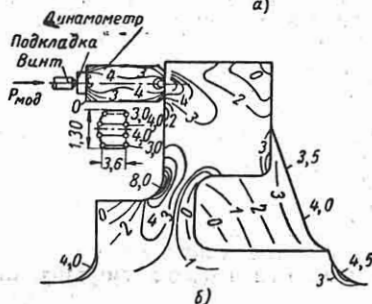
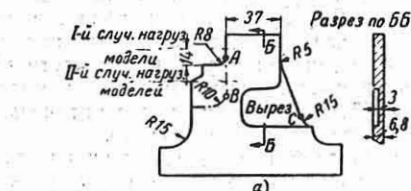
5. Оценка формы детали. Рассматриваются картины полос для основных случаев нагрузки. Сопоставлением наибольших порядковых номеров полос на контуре определяется соотношение напряжений в различных местах детали.

6. Выбор формы детали. Рассматриваются картины полос для основных случаев нагрузки. Рассматривается картина полос для существующей формы; после этого в месте наибольших напряжений изменяется контур или размер для уменьшения  $m_{\max}$ . Изменение конфигурации делается повторно. Относительное уменьшение величины  $m_{\max}$  характеризует степень улучшения формы

## Примеры применения метода полос

**Пример 1.** Определение коэффициента концентрации для двух форм сопряжений выступа с горизонтальной частью (фиг. 24, на вклейке); обе формы, правая и левая, выполнены в одной модели и поэтому они нагружаются одинаковой силой. Коэффициент концентрации  $\alpha'_\sigma = \frac{6,8}{6,7} \approx 1,0$ ;  $\alpha_\sigma = \frac{9,6}{6,7} = 1,4$ ; номинальное напряжение  $\sigma_n = \frac{P}{dh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right)$ . Для формы сопряжения, указанной справа, напряжения в 1,4 раза меньше, чем для левой.

**Пример 2.** Картина полос, полученная для модели по фиг. 25, а боковины детали переменной толщины, соответствует случаю 2 табл. 16. Усилие  $P_{\text{мод}}$  определяется с помощью оптического динамометра (фиг. 25, б). На основании учета масштабов подобия в точках А и С детали  $\sigma = 0,24 mP_{\text{дет}}$ , в точке В  $\sigma = 0,25 mP_{\text{дет}}$ ; значения на контуре даны на фиг. 25, в. Усилие  $P_{\text{дет}}$ , приходящееся на боковину детали, определяется

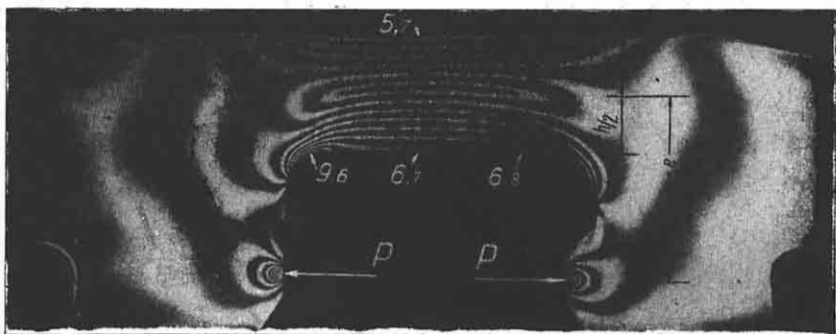


Фиг. 25.

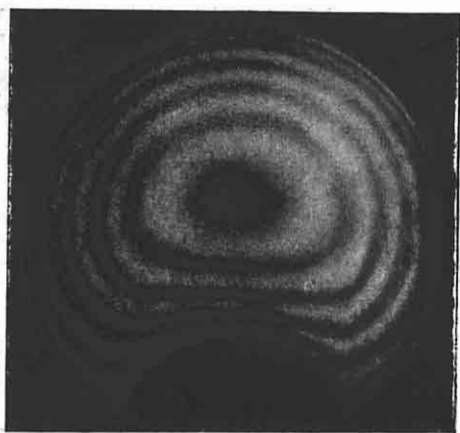
расчетом или динамическими измерениями при работе машины. Если  $P_{\text{дет}}$  неизвестно, то по картине полос находится лишь соотношение напряжений в различных точках детали.

**Разделение главных напряжений для плоских моделей.** Внутри контура модели полярского при нормальном просвечивании позволяет найти только разность  $R = (\sigma_1 - \sigma_2)$  главных напряжений и их направления. Для определения отдельно величины каждого из главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (**разделение главных напряжений**) применяются дополнительные экспериментальные или вычислительные методы:

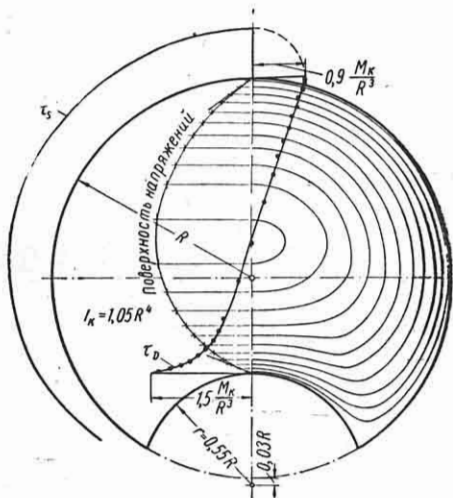
- 1) измерение поперечных деформаций модели (см. [41], [49]);
- 2) наклонная установка модели (см. [41], [49]);



Фиг. 24. Картина полос, получаемая при сопоставлении двух форм выреза и определении коэффициентов концентрации для них.



а)



б)

Фиг. 29. а — картина полос для рассеянного света, полученная для модели скручиваемого вала постоянного сечения с вырезом; б — линии полос (траектории касательных напряжений в сечении) и эпюры касательных напряжений  $\tau_D$  для точек по вертикальному диаметру  $D$  и  $\tau_S$  — по контуру.

3) метод аналогий (см. [6], [21], [41], [49], [51]);

4) интегрирование по изостатам (см. [15], [44], [49]);

5) метод приращения касательных напряжений (см. [41]);

6) метод конечных разностей (метод сеток) (см. [41], [49]).

**Определение напряжений на объемных моделях.** В общем случае объемных моделей требуется более сложная техника измерений, чем для плоских моделей. Напряжения на поверхности и по отдельным сечениям модели при трехмерном напряженном состоянии наиболее просто оптически методом решаются с применением оптически активных слоев. В общем случае исследования применяются независимо или в сочетании: а) метод „замораживания“; б) метод рассеянного света. Для разделения главных напряжений, кроме того, применяются вычислительные методы или (при  $\nu_{\text{мод}} \neq 0,5$ ) измерение линейных деформаций при „размораживании“. Объяснение явления „замораживания“ см. [41], [49].

Пример применения поляризационно-оптического метода к определению давлений по поверхности см. [32].

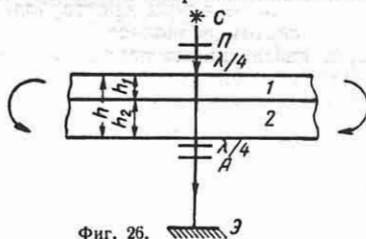
**Метод иммерсии.** Объемная нагруженная модель погружается в иммерсионную ванну и просвечивается в поляризационно параллельными лучами поляризованного света (см. [41] и [49]). Получающаяся на экране картина дает суммарный эффект прохождения каждого луча через всю толщину модели. Истинные напряжения по полученной картине могут определяться с достаточной точностью, если они по толщине модели меняются незначительно или если модель осесимметрична.

1. Односторонний монтаж полярископа (см. стр. 523 и [15], [49]) позволяет проводить измерения в сложных конструкциях, не допускающих прямого просвечивания всей конструкции, при определении продольных усилий в пространственных оболочках или в отдельных элементах сложных конструкций.

2. Модели со слоями различной оптической активности применяются для исследований напряжений в сечении объемной модели при прямом просвечивании без „замораживания“, а также для измерения динамических напряжений внутри объемных моделей. Модель изготавливается из оптически неактивного (или с малой активностью)

прозрачного материала (оргстекло, целлулоид) со встроенным в нее монолитно оптически активным слоем (пластмасса с высокой оптической активностью с тем же модулем упругости, что и для неактивного материала) в месте, где необходимо измерить напряжения.

При исследовании напряжений в плитах модель выполняется из двух слоев 1 и 2 (фиг. 26) различных прозрачных материалов, имеющих соответственно толщины  $h_1$  и  $h_2$  и оптические постоянные  $\sigma_{0,1}^{(1,0)}$  и  $\sigma_{0,2}^{(1,0)}$  [53]. По нормали к пластинке сохраняется постоянство



Фиг. 26.

главных направлений во всех местах и линейный закон изменения нормальных напряжений в сечении по толщине, исключая зону возле опор и сосредоточенных нагрузок (тонкая пластинка). При этих условиях: 1) при нормальном просвечивании получают изоклины, как в плоской модели; построенные по ним траектории главных напряжений определяют также направления главных изгибающих моментов в пластинке; 2) при одинаковых модулях продольной упругости слоев 1 и 2 величина разности главных напряжений  $(\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{max}}$  на поверхности плиты выражается через порядок полосы, наблюдаемый при сквозном просвечивании составной модели:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_{\text{max}} = \frac{m}{h_1} \sigma_{0,1}^{(1,0)} \frac{1}{1 - \frac{h_1}{h}} \times \frac{\sigma_{0,2}^{(1,0)}}{\sigma_{0,2}^{(1,0)} - \sigma_{0,1}^{(1,0)}} \quad (22)$$

При различных модулях упругости  $E_1$  и  $E_2$  для слоев 1 и 2 в приведенной формуле вместо  $h_1$  вводится  $h'_1 = h_1 \frac{E_1}{E_2}$  и вместо  $h$  вводится  $h_{\text{прив}} = h - (h_1 - h'_1)$ ; момент сопротивления  $W = \frac{h_{\text{прив}}^2}{6}$  при  $h'_1 = \frac{h_{\text{прив}}}{2}$ .

Для разделения главных напряжений применяются вычислительные методы

3. Метод „замораживания“. Объемная модель изготавливается из прозрачного материала, обладающего способностью к „замораживанию“. Нагруженная модель нагревается до температуры „замораживания“, выдерживается при ней и затем в нагруженном состоянии охлаждается до комнатной температуры. В модели после снятия нагрузки сохраняются упругие деформации, полученные при нагреве, как и в любом вырезанном из нее срезе (пластинке). Просвечивание вырезанных срезов поляризованным светом позволяет определить разность квазиглавных напряжений и их направления; при нагреве срезов или частей модели их размеры возвращаются к первоначальным („размораживание“), что используется для измерения линейных деформаций. Нагрузочные устройства не мешают измерениям. При исследовании напряжений быстровращающихся деталей устраняется необходимость измерений во время вращения.

Недостатки метода: необходимость разрезки модели, значительные деформации, получаемые при нагреве модели, которые могут дать искажение формы детали; невозможность исследований при приложенной динамической нагрузке; трудность учета при измерениях на срезах начального оптического эффекта, значительного для большинства материалов. Суммарная ошибка в определении напряжений 5—15% в зависимости от задачи и условий эксперимента.

Изготовление моделей, „замораживание“, разрезка моделей измерения — см. [22], [23], [24], [41], [49], [51], [53].

Напряжение по порядковому номеру полосы „замороженной“ модели определяется как: а) произведение номинального напряжения на отношение порядкового номера  $m$  полосы к порядковому номеру, соответствующему номинальному напряжению (постоянная материала  $\sigma_0^{(1,0)}$  не входит); б) произведение порядкового номера  $m$  на постоянную материала, определенную по той же модели или с помощью образца. Переход к напряжениям и деформациям в натурной детали — см. табл. 15.

Способы определения напряжений: 1) *Ненагруженная поверхность модели*;  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \neq 0$ ; значения  $\sigma_0$  и  $m$  берутся на 1 см луча. По срезу параллельно поверхности модели

просвечиванием по нормали определяются в плоской модели направления главных напряжений. В одном из главных направлений (например,  $\sigma_1$ ) вырезается пластинка в плоскости, перпендикулярной к поверхности; при просвечивании по нормали получается

$$m_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \quad (23a)$$

Второе главное напряжение  $\sigma_2$  определяется по просвечиванию под углом  $\alpha$  к первому в плоскости, касательной к поверхности:

$$m_\alpha = \frac{1}{\sigma_0} (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha). \quad (23b)$$

При ошибке в направлении вырезания второй пластинки в 10° ошибка в определении напряжения до 30%.

2) *Общий случай объемного нагруженного состояния*:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \neq 0$ . Внутренняя точка  $C$ , для которой должны быть определены все компоненты напряжений, соединяется с выбранной точкой  $O$  внешней поверхности прямой, принимаемой за ось  $x$ . Используются срезы в плоскостях  $xu$  и  $xz$ , просвечиваемые по нормали, соответственно по оси  $x$  и  $y$  (два отдельных среза в двух моделях или, при больших размерах модели, второй срез берется из первого; возможно использование одной пластинки с ее просвечиванием по нескольким направлениям — см. [41], [49]). При этом с помощью оптических измерений получают эпюры  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  для точек, лежащих от оси  $Ox$  на расстояниях соответственно  $\pm \frac{\Delta z}{2}$  и  $\pm \frac{\Delta y}{2}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)_{xy} \sin 2\varphi_0; \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)_{xz} \sin 2\varphi_0, \end{aligned} \quad (24a)$$

где  $(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)$  и  $\varphi_0$  — измеряемые на срезах разности квазиглавных напряжений и параметры изоклин соответственно в плоскостях  $xu$  и  $xz$ .

Расстояние  $OC$  разбивается точками  $0, 1, 2, 3, \dots, C$  на равные интервалы  $\Delta x$ , подсчитываются приращения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  в точках на концах отрезков соответственно  $\pm \frac{\Delta z}{2}$  и  $\pm \frac{\Delta y}{2}$ , отложенных по перпендикуляру к оси  $x$  в точках  $0, 1, 2, 3, \dots, C$ , а также средние арифметические

$\Delta\tau_{xy}$  и  $\Delta\tau_{xz}$  этих приращений на каждом интервале  $0, 1, 2, 3, \dots$ . При  $\Delta y = \Delta z = \Delta x$

$$(\sigma_x)_c = (\sigma_x)_0 - \sum_0^c \Delta\tau_{xy} - \sum_0^c \Delta\tau_{xz}. \quad (24б)$$

Начальная величина  $(\sigma_x)_0$  для точки  $O$  на поверхности модели определяется из граничных условий и порядка полос на контуре. Далее для рассматриваемой точки  $C$  находятся

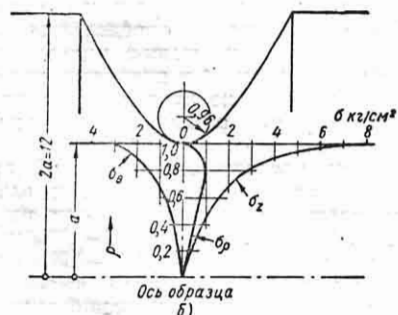
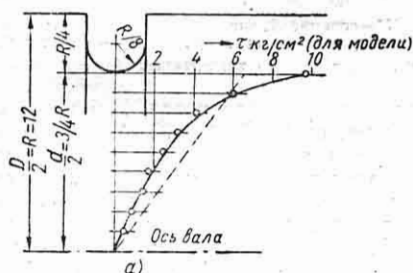
$$(\sigma_y)_c = (\sigma_x)_c - (\sigma_1 - \sigma_2)_{xy,c} \cos 2\varphi_0;$$

$$(\sigma_z)_c = (\sigma_x)_c - (\sigma_1 - \sigma_2)_{xz,c} \cos 2\varphi_0. \quad (24в)$$

С применением просвечивания среза  $xy$  в повернутом относительно оси  $y$  по часовой стрелке на угол  $\theta$  положение находится

$$(\tau_{xz})_c = \frac{\sigma_0 m_\theta \sin 2\varphi_0 - (\tau_{yx})_c \sin \theta}{\cos \theta}. \quad (24г)$$

Здесь  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  и  $\varphi_0$  — соответствующие разности квазиглавных напряжений и изоклинические углы для точки  $C$  (см. [41], [49]).



Фиг. 27.

Пример 1. Скручивание вала переменного диаметра. В сечении по надрезу (фиг. 27, а) неизвестной для каждой точки

является одна величина — касательное напряжение

$$\tau_{z\theta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sigma_0}{2} m.$$

так как  $\tau_{z\theta} = 0$ . Здесь  $\alpha$  — угол между нормалью к срезу и направлением просвечивания;  $m$  — порядок полосы интерференции при просвечивании и  $\sigma_0$  — соответствующая ей постоянная материала для толщины, равной длине пути луча в пластинке. Получен коэффициент концентрации

$$\alpha_\tau = 1,43$$

при 
$$\tau_K = \frac{M_K}{0,2d^3}.$$

Пример 2. Изгиб вала с надрезом. Компоненты главных напряжений в точках сечения по надрезу (фиг. 27, б) определяются по пластинке, вырезанной в плоскости изгиба с нормальным и наклонным просвечиванием. Экспериментально полученный коэффициент концентрации

$$\text{для точки по дну надреза } \alpha_\sigma = \frac{\sigma_z(p, \alpha)}{\tau_{\tau^2}} = 2,2$$

(по теоретической формуле для гиперболического надреза  $\alpha_\sigma = 2,14$ ).

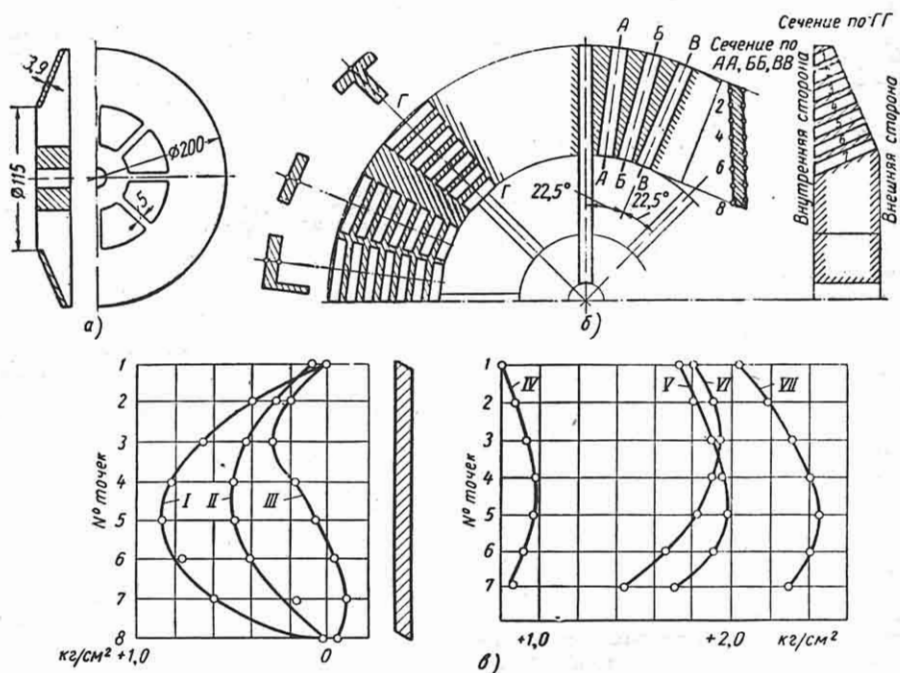
Пример 3. Крыльчатка под действием центробежных сил при вращении. При "замораживании" модели (фиг. 28, а), изготовленной из материала МИХМ-ИМАШ, вращение осуществляется в термостате с числом оборотов 1850 в минуту, подобранным так, чтобы напряжение в модели не превосходило  $0,6\sigma_{\text{пр}} = 3 \text{ кг/см}^2$ .

По замеру прогибов в "замороженной" модели с помощью оптиметра предварительно выявлен характер и знак деформаций отдельных элементов. Для определения напряжений выполнена разрезка на меридиональные и тангенциальные пластинки на всю толщину покрывающего диска и по лопаткам (фиг. 28, б): а) пластинки А, Б, В для определения меридиональных напряжений по внешней и внутренней сторонам покрывающего диска; замер  $m$  при просвечивании в кольцевом направлении в 16 точках (с обеих сторон в каждой пластинке); б) пластинки 1, 2, ..., 7 — для определения кольцевых напряжений для трех сечений, как указано на фиг. 28, б слева; замер  $m$  производится в одной или двух точках при просвечивании в меридиональных плоскостях; в) две лопатки (для контроля расположенные под углом  $90^\circ$ ), напряженное состояние в которых рассматривается как плоское; г) торцевые срезы втулки с обеих сторон крыльчатки для определения напряжений во втулке и концентрации напряжений в месте сопряжения лопатки со втулкой. Напряжения в модели подсчитываются по

формуле 
$$\sigma = \frac{\sigma_{(1,0)}}{t} m;$$
 некоторые из полученных эпюр приведены на фиг. 28, в.

На основании построенных эпюр: а) пересчетом по масштабам подобия получены напряжения для натурной крыльчатки; б) найдено, что наибольшие напряжения возникают в лопатках (в сердечниках внутренних сторон) и в зоне концентрации — в месте сопряжения лопатки с внутренним контуром покрывающего диска ( $\alpha_\sigma = 1,4$ ); при том же радиусе сопряжения концентрация в месте сопряжения лопатки с телом втулки отсутствует; отношение наибольших напряжений в лопатке и в покрывающем диске  $m_{\text{max A}} : m_{\text{max D}} = 3,0 : (1,4 \times 2,4) = 0,9$ .





Фиг. 28. Исследование крыльчатки: а — модель; б — разрезка модели; в — примеры полученных эпюр напряжений в модели. Меридиональные напряжения  $\sigma_r$ : I — сечение Г, внутренняя сторона крыльчатки; II — сечение В, внутренняя сторона крыльчатки; III — сечение В, внешняя сторона. Кольцевые напряжения  $\sigma_\theta$ : IV — сечение Г по лопатке; V — сечение В, внутренняя сторона; VI — сечение 0, наружная сторона; VII — сечение Г, внутренняя сторона крыльчатки.

4. Метод рассеянного света. Параллельные лучи поляризованного света в виде тонкой полосы пропускаются через объемную модель и дают в каждой точке на своем пути внутри модели рассеянный свет, который наблюдается в направлении, перпендикулярном к лучу. Состояние поляризации по линии каждого луча от точки к точке меняется соответственно с напряженным состоянием в этих точках. Измерения основаны на том, что интенсивность света, рассеиваемого точкой, пропорциональна квадрату компоненты колебания проходящего света, нормальной к линии наблюдения; прохождение рассеянного света через модель не сказывается на измерениях, так как рассеянный свет наблюдается без анализатора. При круговой поляризации в установке (см. стр. 524) определяются разности квазиглавных напряжений и при плоской поляризации — направления главных напряжений. Измерения ведутся на нагруженной при комнатной температуре модели (материал ИМ-44, глифталевая

смола) или модели после „замораживания“ (материал МИХМ-ИМАШ). Просвечивание узкой полосой лучей плоско или по кругу поляризованного света объемных моделей производится в различных плоскостях и плоской — в ее плоскости. Исследования могут вестись при статической или динамической нагрузке.

Недостатки метода: разность квазиглавных напряжений определяется по градиенту в направлении проходящих лучей; перемещения и повороты нагруженной модели, необходимые для просвечивания по различным сечениям, затруднены.

Оценка погрешности измерений (при надлежащих размерах моделей и качестве материала): для внутренних точек модели 10% и на контуре 6—10% (при одном просвечивании) и 15—20% (при нескольких просвечиваниях); в области высоких градиентов напряжений ошибка в определении разности квазиглавных напряжений уменьшается, но создается дополнительная ошибка в определении расположения точки, соответствующей

найденной разности квазиглавных напряжений.

По одной фотографии картины полос получается для всего просвечиваемого сечения разность квазиглавных напряжений в плоскости, перпендикулярной к направлению  $s$  просвечивания:

$$(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)_{CP} = \frac{\sigma_0}{d_s} \quad (25a)$$

(среднее на участке между полосами;  $d_s$  — расстояние между соседними полосами в направлении  $s$ );

$$(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) = \frac{dm}{ds} \quad (25b)$$

(истинное значение).

Определение  $\frac{dm}{ds}$  может производиться микрофотометром (ширина щели микрофотометра не более 1—2 десятых от расстояния между полосами). При измерениях поворот квазиглавных направлений по точкам луча можно практически не учитывать (см. стр. 521). Точность измерения у контура снижается из-за больших градиентов показателей преломления (переходный слой), вызывающих искривление лучей и искажение наблюдаемой картины.

Способы измерений в зависимости от типа напряженного состояния см. [24].

*Пример 1.* Чистое кручение вала. Производится просвечивание продольного или

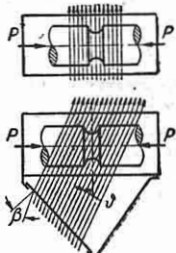
поперечного сечения. При просвечивании поперечного сечения (фотографирование вдоль оси вала) картина полос интерференции рассеянного света дает траектории касательных напряжений  $\tau$  в сечении (фиг. 29, см. вклейку); расстояния  $d$  между полосами по перпендикуляру к ним обратно пропорциональны

$$\text{величинам } \tau = \frac{c}{d}.$$

*Пример 2.* Сжатие вала круглого сечения с кольцевой выточкой. Достаточно найти напряжения в одной плоскости симметрии; просвечивание плоскости симметрии в двух направлениях: вдоль радиусов и под углом  $\theta$  к ним (фиг. 30). Ось поляризации просвечивающих лучей и направление наблюдения составляют углы  $45^\circ$  с нормально к просвечиваемой плоскости симметрии. Разности квазиглавных напряжений, соответствующие этим просвечиваниям, определяются по картинам полос:

$$\frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)_r}{\sigma_H} = \frac{\sigma_0}{r\sigma_H} \cdot \frac{dm_r}{dr}; \quad \frac{(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)_\theta}{\sigma_H} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_H} \cdot \frac{dm_\theta}{d\theta},$$

где  $r$  — радиус сечения;  $\sigma_H$  — номинальное напряжение, определяемое (для правых частей в приводимых формулах) по полосам для удаленных от выточки сечений. Условия измерений: «замороженная» модель из материала МИХМ-ИМАШ; диаметр вала 70 мм, длина 200 мм и диаметр по шейке 17 мм;  $\theta = 45^\circ$ ;  $\beta = 24^\circ$  (показатель преломления материала модели  $n_D = 1,568$ ); ширина щели 0,5 мм. Приложенная нагрузка  $P_{\text{расч}} = 28$  кг; найденная по картине полос  $P_{\text{расч}} = 25,2$  кг. Расхождение полученных теоретически (по методу Нейбера) и по эксперименту коэффициентов концентрации  $\sim 6\%$ .



Фиг. 30.

## ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Богуславский П. Е., Дунаев А. И., Методика испытаний краповых металлоконструкций, ВНИИПТМАШ, Машгиз, 1950.
2. Бонч-Бруевич А. М., Применение электронных ламп в экспериментальной физике, ОГИЗ, 1953.
3. Васильев А. В., «Вестник машиностроения» № 5, 1955.
4. Волчок Л. Я., Электрические методы измерений в двигателях внутреннего сгорания, Машгиз, 1948.
5. Всесоюзная выставка отечественного приборостроения, каталог-справочник, вып. 16, 19, 22а и 22б, 36; Машгиз, 1948 и 1949.
6. Гутенмахер Л. И., Электрические модели, изд. АН СССР, 1949.
7. Давиденков Н. Н., Струнный метод измерения деформации, ГТТИ, 1933.
8. Динамика и прочность авиационных деталей, т. 3, сб. статей под ред. С. В. Серенсен, Оборонгиз, 1949.
9. Зилова Т. К., Фридман Я. Б., Методика изучения местных пластических деформаций с помощью накатных делительных сеток, «Заводская лаборатория» № 3, 1951.
10. Иванов М. Н., Фототеневой метод регистрации колебаний, сб. МВТУ «Машины и приборы», Машгиз, 1953.
11. Измерения механических величин электрическими методами. сб. перев. с англ., Машгиз, 1952.
12. Красиков В. И., Испытания строительных конструкций, Стройиздат, 1952.
13. Крылов А. Н., Вибрация судов, ОНТИ, 1938.
14. Ламповые усилители, т. 1 и II, изд. «Советское радио», 1950.
15. Ленинградский государственный университет, «Оптический метод изучения напряжений в деталях машин», ОНТИ, 1935 и «Экспериментальные методы изучения напряжений и деформаций», ОНТИ, 1935, а также «Труды конференции по оптическому методу», сб. НИИММ ЛГУ, ОНТИ, 1937.
16. Лехницкий С. Г., О переходе от напряжений в прозрачной модели к напряжениям в действительной детали, сб. ЛГУ «Экспериментальные методы изучения напряжений и деформаций», ОНТИ, 1935.
17. Мильштейн В. Н., Основы электрического расчета индуктивных измерителей малых перемещений, журнал «Автоматика и телемеханика» № 2, 1940.
18. Майоров Ф. В., Магнито-электрическое измерение деформаций в машинах, «Электричество» № 4, 1949.

19. МСП, Описание измерителя деформаций ИД-2, 1949.
20. Нилендер Ю. А., Испытание сооружений, Справочник проектировщика промышленных зданий, т. 2, Госстройиздат, 1934.
21. Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939.
22. Прейсс А. К., Изготовление плоских моделей поляризационно-оптического метода исследования напряжений, "Заводская лаборатория" № 9, 1950.
23. Пригоровский Н. И., Прейсс А. К., Исследование напряженного состояния на прозрачных объемных моделях в пучке параллельных лучей поляризованного света, "Известия ОТН АН СССР", в. 2, 1949.
24. Пригоровский Н. И., Рудашевский Г. Е., Бокштейн М. Ф. и др., Развитие методики и аппаратуры для исследования деформаций, напряжений и усилий в деталях машин, сб. Института машиноведения АН СССР, "Вопросы машиноведения", 1950.
25. Пригоровский Н. И., Прейсс А. К., Рутковский Б. Н., Шеголевская Н. А., Материал для моделей в методе "замораживания", "Изв. ОТН АН СССР" № 8, 1952.
26. Пфлиер П., Электрическое измерение механических величин, Машгиз, 1948.
27. Рабинович И. М., Механический расчет, Справочник проектировщика промышленных зданий, т. 2, Госстройиздат, 1934.
28. Раевский Н. П., Методы экспериментального исследования параметров машин, АН СССР, 1952.
29. Рудашевский Г. Е., Трансформаторная и индукционная схемы в применении к измерению малых деформаций, "Труды Сейсмологического института АН СССР" № 84, 1938.
30. Рудашевский Г. Е., Крутильный деформометр, "Известия ОТН АН СССР" № 11, 1946 и № 1, 1948.
31. Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П., Элементы сейсмологии и сейсмометрии, Гостехиздат, 1949.
32. Саверин М. М., Заварцева В. М., Использование оптического метода измерения напряжений при решении задач с упруго-пластическим контактом, сб. ЦНИИТМАШ "Исследование прочности стали", кн. 40, 1951.
33. Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Лейкин А. С., Максименков И. В., Статические индукционные тензометры и их применение, МАП, вып. 167, 1949.
34. Современные катодные осциллографы, т. I, II и III, ИЛ, 1950—1954.
35. Стекольников И. С., Электронный осциллограф, Энергоиздат, 1949.
36. Степанов А. В., Новый оптический метод изучения напряжений в поляризованном свете, "Журнал технической физики", т. XIX, вып. 2, 1949.
37. Темников Е. Ф., Харченко Р. Р., Электрические измерения неэлектрических величин, Госэнергоиздат, 1948.
38. Трапезников В. А., Городецкий И. Е., Петров Б. Н., Фельдбаум А. А., Автоматический контроль линейных размеров, Оборонгиз, 1947.
39. Турчин А. М., Электрические измерения неэлектрических величин, Энергоиздат, 1954.
40. Фридман Я. Б., Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.
41. Фрохт М., Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, ч. I и II, Гостехиздат, 1948 и 1950.
42. ЦНИИТМАШ, Новые машины и приборы, каталог-справочник, Машгиз, 1950.
43. ЦНИИТМАШ, Вибро- и тензоизмерительные приборы, кн. 68, Машгиз, 1954.
44. Ченцов Н. Г., Озеров Г. А., Основные положения оптического метода исследования напряжений, "Труды ЦАГИ", вып. 270, 1966.
45. Шапошников Н. А., Механические испытания металлов, Машгиз, 1951.
46. Шкурин Г. П., Справочник по электроизмерительным и радиоизмерительным приборам, Военно-морское изд-во, 1950.
47. Экспериментальные методы исследования машин, сб. Института машиноведения АН СССР под ред. акад. И. И. Артоболевского, 1954.
48. Электронно-лучевые трубки, т. I и II, изд-во "Советское радио", 1949.
49. Энциклопедический справочник "Машиностроение", т. I, кн. 2-я, гл. II и IV и т. 3, гл. III, Машгиз, 1947. Справочник машиностроителя, т. III, Машгиз, 1951.
50. Experimental stress analysis, Proc., m. I—XI, 1943—1953.
51. Hetenyi M., Handbook of experimental stress analysis, 1950.
52. Heywood R., Designing by photoelasticity, 1953.
53. Föppel L., Mönch E., Praktische Spannungs-optik, 1950; Schwieger H., Ein Auswerteverfahren bei d. spannungsopt. Unters. elast. Platten, Wissenschaft. Zeitschr. d. Martin-Luther Unlvers., N. 2, 1954.
54. "Измерение напряжений в деталях машин", сб. под ред. Н. И. Пригоровского, Машгиз, 1955.
55. Терских В. П., Расчет крутильных колебаний силовых установок, Судпромгиз, 1954.
56. Семенов К. В., Спиров В. В., журнал "Заводская лаборатория" № 3, 1953.
57. Джексон П., Датчики сопротивления на фольге, сб. переводов "Прикл. механика и машиностроение" № 5, 1954.

*ПРЕДМЕТНЫЙ  
АЛФАВИТНЫЙ  
УКАЗАТЕЛЬ*

## А

- Автоколебания 346  
Автокрепление труб 288  
— Напряжения остаточные — Пример определения 288  
Автоскрепленные цилиндры — см. *Цилиндры автоскрепленные*  
Азотирование — Влияние на предел выносливости 469, 470  
Аистова тензометры 491  
Алюминиевые сплавы — см. *Сплавы алюминиевые*  
Амортизаторы 352  
Амплитуды вибрации — Определение 382  
— колебаний — Уменьшение 351  
— колебаний вынужденных — Нарастание при различном демпфировании 337  
Анализаторы 522  
Ангивибраторы 352  
Антирезонансная частота 362  
Аппаратура для измерения деформации 490, 492, 493, 495, 498  
— тензоизмерительная — Классификация 489  
Арки трехшарнирные — Пример расчета 143  
Асимметричный цикл переменных напряжений 448  
Афанасьева метод расчета коэффициентов концентрации 417

## Б

- Базы тензометров 489  
Бакелит — Коэффициент Пуассона 22  
— Модуль продольной упругости 22  
— Модуль сдвига 22  
Баладина гипотеза о сопротивлении разрушению 435  
Балки — Грузоподъемность 276  
— Изгиб косой 104  
— Изгиб продольно-поперечный 106  
— Изгибающий момент при продольно-поперечном изгибе 107

- Коэффициент концентрации — Определение 418  
— Нагрузки допускаемые 91, 273  
— Напряжения 86  
— Напряжения главные 89, 90  
— Несущая способность 273  
— Перемещения — см. *Перемещения в балках*  
— Прогиб 105, 272  
— Прогиб допустимый — Определение 273  
— Прогиб при возникновении пластических деформаций 273, 275  
— Прочность при изгибе — Проверка 106  
— Растяжение или сжатие с изгибом 105  
— Расчет на жесткость 95  
— Расчет на прочность 86  
— Сечения — Размеры — Определение 90  
— Сопротивление сложное 101  
— Устойчивость плоской формы изгиба 325  
— Устойчивость при поперечном изгибе 186  
Балки бесконечно длинные — Расчет 75  
— бесконечные под действием нагрузки — Расчет 76  
— двутавровые — Геометрический фактор жесткости 326; — Коэффициент устойчивости при опрокидывании 329, 330; — Напряжения касательные при изгибе 88; — Статический момент 276; — Центр изгиба 103; — Опрокидывание 329  
— двутавровые прокатные — Геометрические характеристики 171  
— двутавровые с полками постоянной толщины — Напряжения и угол закручивания при кручении 32  
— двухопорные с равномерно распределенной массой — Колебания — Формы 371  
— двухролетные — Нагрузка предельная — Пример определения 276

- из разнородных материалов 94, 95
- клинообразные 92
- конические 92
- консольные — Опорные реакции 56—66; — Опорные реакции — Формулы 55, 56; — Прогиб — Пример решения 124; — Усилия и перемещения 56—66
- консольные при ударе — Масса приведенная — Пример определения 400
- любой длины с нагрузкой — Расчет 78
- Балки многопролетные** — Изгибающие моменты 66; — Поперечные силы 66; — Уравнение трех моментов 67, 68
  - на жестких опорах 66; — Расчет 73
  - на сплошном упругом основании — Расчет 74
  - на упруго оседающих опорах — Расчет 73
  - неразрезные — Расчет 68, 73
  - постоянного сечения — Уравнения трех моментов 66
- Балки на двух опорах** — Прогибы при возникновении пластических деформаций 275
  - на упругом основании при неподвижной нагрузке — Изгибающие моменты 66; — Поперечные силы 66
  - ограниченной длины, нагруженные произвольно — Расчет 77
- Балки однопролетные** — Влияние смещения опор и изменения температуры — Расчетные формулы 64—66
  - Изгибающий момент 50
  - Опорные реакции 56—66
  - Поперечные силы 50
  - Усилия и перемещения 56—66
- Балки однопролетные заземленные** — Опорные реакции — Формулы 55
- Балки переменного сечения** 92; — Расчетные формулы 56—59
  - подкрановые — Устойчивость — Пример расчета 187
  - Пластмассовые — Расчет 95
  - полубесконечные — Расчет 75
  - постоянного сечения — Напряжения касательные 87; — Напряжения нормальные 86; — Расчет на прочность 89
  - постоянного сечения с жесткой заделкой — Расчетные формулы 60—63
  - постоянной жесткости — Прогиб — Дополнительные влияния 97
- прокатные — Сечения — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
- простые — Линии влияния для расчета 79
- прямоугольного сечения двухопорные — Прогиб — Пример определения 273
- равного сопротивления изгибу 92
- с двумя грузами 78
- с заземленными концами — Линии влияния 80
- с любым направлением сосредоточенных сил, перпендикулярных к оси 53
- с отверстием изгибаемые — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 405
- с подвижной нагрузкой — Изгибающие моменты — Поперечные силы 78
- со значительной высотой сечения 91
- с сосредоточенными моментами 53
- с сосредоточенными силами 52
- со ступенчатым изменением сечения 94
- статически неопределимые — Линии влияния для расчета — Построение 80
- статически определяемые — Построение эпюр — Аналитический метод 51; — Построение эпюр — Графический метод 54; Построение эпюр — Графо-аналитический метод 54; — Потеря несущей способности 276; — Расчетные формулы 56—59
- тарировочные 498
- фиктивные и действительные — Схемы 99
- Балочные конструкции** — Перемещение — Определение 151
- Беляева гипотеза ползучести** 292
  - старения 293
- Бернадского метод для расчета рам** 165
- Бетон** — Коэффициент Пуассона 22
  - Модуль продольной упругости 22
- Биметаллические изгибаемые полосы** 95
- Вимомент** 174, 175
  - инерции двутавров 171
  - инерции профиля тонкостенных стержней 178, 179
  - инерции тонкостенных стержней 178
  - инерции швеллеров 172
  - сопротивления двутавров 171
  - сопротивления швеллеров 172

- Болтовые соединения** — Коэффициент концентрации 460
- Болты шатунные** — Усталость — Пример расчета 477
- Бронза** — Диаграммы механического состояния 438
- Модуль продольной упругости 22
- Брусья** — см. также *Балки; Стержни*
- Жесткость при кручении обобщения 297
- Изгиб — Расчет с учетом пластических деформаций 271
- Изгиб, кручение и растяжение совместный 279
- Коэффициент концентрации — Графики 408, 411
- Коэффициент концентрации — Пример определения 416
- Кручение при установившейся ползучести 295
- Несущая способность при кручении 278
- Несущая способность при совместном растяжении, кручении и изгибе 278
- Ползучесть установившаяся 295
- Радиус кривизны остаточный 287
- Усилия в поперечных сечениях — Определение тензометрированием 508
- Частота собственных колебаний 338
- Брусья винтовые** — Внутренние силы 117; — Напряженное состояние 118; — Расчет 112
- круглого поперечного сечения — Напряжения 117
- Брусья изогнутые** — Напряжения при установившейся ползучести 295
- Ползучесть материала — Радиус кривизны 295
- Прогиб 295
- Расчет за пределами упругости 271
- Расчет на ползучесть 295
- Брусья кривые** — Внутренние силы 112
- Напряжения и деформации 112
- Напряжения наибольшие 113
- Напряжения при чистом изгибе 112
- Перемещения — Вычисление 115
- Расчет 112
- Сечения — Радиусы нейтральных слоев 113
- Сечения сложные — Определение нейтральной линии 114
- Энергия потенциальная 115
- Брусья кривые круглого поперечного сечения** — Напряжения 116
- плоские — Напряжения при изгибе 114; — Напряжения при нагрузке, нормальной плоскости кривизны 115
- прямоугольного сечения — Напряжения 116
- Брусья круглого сечения** — Напряжения при кручении 277
- круговые консольные — Перемещения и усилия 153, 154
- наклепанные 287
- постоянного поперечного сечения вращающиеся — Пример расчета 230
- Брусья прямые** — Расчет 21—139
- Брусья с вырезом** — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 405
- с выточкой растянутые — Эпюры напряжений 283
- с круговыми выточками — Растяжения в условиях пластичности 283
- ступенчатые с галтелью — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 406
- Бурдона пружины** 214
- Бурдона трубки** 214

## В

- Валики шлицевые** — Долговечность — Пример расчета 478
- Валы** — Галтели — Предел выносливости 471
- Жесткость 28
- Коэффициент влияния абсолютных размеров сечения 460, 461
- Коэффициент влияния концентрации абсолютных размеров 456
- Коэффициент концентрации 460
- — Графики 409, 412, 413
- — Пример определения 416, 417
- Коэффициент концентрации эффективный 455—457
- Кручение чистое — Пример определения 533
- Момент инерции массы 358
- Переходы — Податливость 356, 357
- Податливость 355
- Потенциальная энергия 28
- Скорости критические 366, 372
- Скручивание — Пример определения 531
- Точки поверхности — Напряжения главные 28
- Угол закручивания 28
- Частота собственных колебаний 347; — — Формула Дункерлея 367
- Шейка — Кручение — Коэффициент концентрации 459
- Шека — Изгиб — Коэффициент концентрации 458
- Валы вращающиеся** — Напряжения 236

- двухопорные — Пример расчета критической скорости 371
  - дизель-генераторных установок — Крутильные колебания — Расчетная схема 361
  - дизельных установок — Усталость — Пример расчета 476
  - длинные — Момент инерции 360
  - круглого поперечного сечения — Напряжения кручения 27
  - круглые с кольцевой выточкой — Сжатие — Пример определения 533
  - некругового поперечного сечения 28
  - паразитных шестерен — Конструкция 447
  - паровых машин — Усталость — Пример расчета 475
  - переменного сечения — Критические скорости 369
  - постоянного сечения — Частота собственных колебаний — Изменение 372
  - с кольцевой канавкой — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 406
  - с лыской — Сечение — Напряжения и угол закручивания при кручении 29
  - с надрезом — Изгиб — Пример определения 531
  - с отверстием — Предел выносливости — Влияние обжима краев отверстия 472
  - с сосредоточенными массами — Колебания крутильные 360
  - сплошные — Диаметр — Определение 110; — Пример определения рассеяния энергии при крутильных колебаниях 350
  - ступенчатые — Сопряжения — Размеры 417
  - ступенчатые скручиваемые — Коэффициент концентрации — Пример определения 415
  - ступенчатые с галтелью — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 406
  - Верещагина метод** 273
  - правило 152
  - Верховского метод** расчета коэффициентов концентрации 417
  - Вибраторы** — Учет массы при испытаниях 386
  - гипоциклические 384
  - механические 384
  - пневматические 385
  - центробежные 384
  - электрические 385
  - электродинамические 385
  - Вибрации** — см. *Колебания*
  - Виброграммы** 378
  - Виброизоляция** 352
  - Виброметры** — Схема 381
  - Вильо метод** для определения перемещений ферменных конструкций 155
  - Винты** — Запас устойчивости 311
  - Гребные — Момент инерции 359
  - Власова формула** 174
  - Возбудители колебаний** 384
  - вынужденные 347
  - периодические 348, 349
  - Волокнит** — Прочность механическая — Характеристика 431
  - Восьмиугольники правильные** — Геометрические характеристики 41
  - Напряжения и угол закручивания при кручении 31
  - Выносливость деталей** — Влияние качества поверхности 464
  - Вырезы** — Коэффициенты концентрации 414, 415
  - Выточки** — Коэффициент концентрации 413
  - кольцевые — Растяжения — Коэффициент концентрации 445, 446
- Г**
- Галтели обтекаемые** — Размеры 416, 417
  - Гальваническое покрытие** — Влияние на предел выносливости 466, 467
  - Гальванометры** — Выбор, 496; — Характеристики 497
  - для измерительных мостов — Пример выбора 491
  - Гармонические составляющие** периодических функций 347
  - сил давления газов в двигателях 348
  - Гармоническое движение** 333
  - Гасители** 352
  - Гашение колебаний** 350
  - вынужденных 347
  - Геометрический фактор жесткости** для двуглава 329
  - Гетинакс** — Модуль продольной упругости 22
  - Модуль сдвига 22
  - Прочность механическая — Характеристика 431
  - Гибкость стоек** 319
  - Гипертригонометрические функции Крылова** 343
  - Гипотеза Баландина** о сопротивлении разрушению 435
  - ломаных сечений 418



- Мора определения условий пластичности 435, 436
  - наибольших касательных напряжений 435
  - наибольших нормальных напряжений об условиях прочности 435
  - наибольших удлинений 435
  - октаэдрических напряжений 435
  - ползучести 289.
  - старения 292, 293
  - течения 292
  - упрочнения 289
  - Гистерезис механический** 350
  - ГОСТ 380-50** 429
  - ГОСТ 1050-52** 429
  - ГОСТ 2856-45** 431
  - Градиент напряжения** 403
  - Гранит** — Модуль продольный упругости 22
  - Графики зависимости изгибающего момента от кривизны** — Построение 271
  - зависимости  $\frac{M_{\max}}{M_T}$  то  $\frac{f_{\max}}{f_T}$  273, 274
  - коэффициентов концентрации для деталей 408—413
  - Грифитса формула** 406
  - Грузоподъемность балок** 276
- Д**
- Давиденкова метод измерения деформации** 492
  - Давиденкова формула о температурном запасе вязкости** 481
  - Давления контактные допускаемые** 481
    - наибольшие при контакте деталей машин — Формулы 419, 420
  - Датчики** 380; — Включение — Схемы 495; — Место установки 382
    - для измерения деформаций 494, 495
    - малобазные индуктивные 490
    - проволочные — Тензочувствительность — Учет 505
    - проволочные наклеиваемые — Типы 500—502
    - ЦНИИТМАШ — Характеристики 493
    - электрические — Типы — Характеристики 489
  - Двутавровые балки** — см. *Балки двутавровые*
  - Девиатор напряжений** 8
  - Декремент** — Измерение 383
    - затухания 335
  - Дельта-древесина** — Прочность механическая — Характеристики 431
  - Демпферы** 352
    - маятниковые 352
  - Демпфирование колебаний** 350
  - Депланация профиля** 169
  - Депланация тонкостенных стержней при свободном кручении** единичная — Эпюры 171
    - с замкнутым профилем при свободном кручении единичная — Эпюры 173
    - с открытым профилем при свободном кручении единичная — Эпюры 171
  - Депланирующие профили тонкостенных стержней** 169
  - Дерево** — Гибкость 319
    - Запас устойчивости 309
    - Коэффициент понижения допускаемого напряжения на сжатие 320
    - Модуль поперечной упругости 22
    - Модуль сдвига 22
  - Детали** — Выбор формы 528
    - Выносливость — Влияние качества поверхности 464
    - Оценка формы 528
    - Подобие с моделями 525
  - Детали движущиеся** — Удар о закрепленную деталь — Расчет — Пример 402
    - из легких сплавов — Коэффициент концентрации 462
    - из малопластичных и хрупких материалов — Несущая способность 443
    - из материала в пластическом состоянии — Несущая способность 440
    - из малопластичных материалов — Запас прочности 443
  - Детали машин** — Выносливость — Влияние маркировки 465
    - Давление наибольшее при контакте — Формулы 419, 420
    - Деформации — Определение экспериментальное 490
    - Напряжения при контакте 419, 420
    - Несущая способность — Повышение 287
    - Перемещение при контакте — Формулы 420
    - Расчет в условиях статического напряжения 439
    - Расчет с учетом пластических деформаций 271
    - Усталость — Примеры расчета 475
  - Детали машин пластически деформированные (наклепанные)** 287
    - работающих — Деформации статические и динамические — Регистрация 496
  - Детали сопрягаемые** — Посадки пресо-вые — Расчет 220, 227

- сферические — Контакт с деталями различной формы 421, 422
- цилиндрические под действием осесимметричной нагрузки — Расчет 219—228
- чугунные — Коэффициент концентрации 461
- Деформации** 11
  - Измерение — Аппаратура 490
  - Измерение — Методы 517
  - Измерение накатными сетками 518
  - Интенсивность 13
  - Исследования — Выбор моделей 524
  - Методы покрытий 515, 516
  - Определение методом покрытия 515
  - Определение экспериментальное 488—534
  - Скорость — Зависимость от напряжения 289
  - Типы 12
- Деформации в пределах упругости** — Выражения через напряжения 14
  - в стержнях от изменения температуры — Определение 24
  - главные — Определение по относительным деформациям 503, 504
  - деталей машин — Определение экспериментальное 499
  - деталей машин пластические — Расчет 271
  - динамические — Измерение 381, 489; — Измерение — Аппаратура 495
  - и напряжения в пределах упругости — Зависимости (по закону Гука) 14
  - изгиба — Энергия 95
  - крыльчатки — Пример определения 531
  - остаточные — Измерение тензотрами 491; — Определение 287
  - пластические — Выражение через напряжения 17; — Зависимость от напряжений и от времени 292; — Использование для повышения несущей способности 287; — Сопротивление 434; — Стадии 17
  - пластические местные — Расчет 518
  - по разным направлениям в рассматриваемой точке — Зависимости 12
  - при повышенных температурах — Измерение датчиками 495
  - пружин при ударе — Расчет — Волновой метод 398
  - статические — Определение экспериментальное 490
  - статические и динамические в деталях работающих машин — Регистрация 496
  - стержней — Изменения в точке удара 396; 397; — Потенциальная энергия 23
  - тонкостенных стержней с замкнутым профилем при свободном кручении 173
  - тонкостенных стержней с открытым профилем при свободном кручении 170
  - тонкостенных трубок 299
  - угловые 12
  - упругие — Формулы для потенциальной энергии единицы объема 16; — Энергия 13
- Деформация активная** 17
  - однородная 13
  - пассивная 17
  - сдвига 26
- Деформирование** — Диаграмма истинная 17, 18
- Диаграммы возбуждения колебаний** 349
  - гармонического колебания векторная 333
  - деформирования 429
  - деформирования истинные 17, 18
  - изгиба — Построение по диаграмме растяжения 271
  - кручения — Построение по диаграмме сдвига 277
  - Максвелла-Кремоны — Построение 144
  - механического состояния для бронзы 438
  - напряжений круговые 9
  - перемещений — Пример построения 156
  - пределов выносливости при растяжении-сжатии 468
  - пределов прочности при асимметричном цикле 454
  - предельных напряжений при асимметричных циклах 448
  - сдвига 19; — Построение по диаграмме кручения 278
  - сдвига фаз между силами при колебаниях 337
  - упругих параметров 130—134
- Динамическая жесткость** — см. *Жесткость динамическая*
- Динамические испытания** 381
- Динамические перемещения** — Измерение — Электроаппаратура 381
- Диски вращающиеся** — Графический расчет 248
  - Колебания собственные — Частота 377
  - Напряжения за пределами упругости 281
  - Несущая способность 281
  - Ползучесть — Пример расчета 302

- Порядок расчета 301, 302
- Расчет за пределом упругости 280
- Расчет по методу Кинашошвили 262
- Расчет по методу Малинина 256
- Расчет по методу Тумаркина 241
- Диски вращающиеся гиперболического профиля** — Напряжения 240
  - конические — Напряжения 239
- Диски вращающиеся переменной толщины** — Получать установленная — Расчет 300; — Пример расчета 242; — Упругое и пластическое состояние 282
  - без центрального отверстия неравномерно нагретые — Пример расчета на прочность 246
  - неравномерно нагретые — Напряжения 243; — Пример графического расчета 250; — Пример расчета по методу Малинина 258
  - равномерно нагретые — Расчет по методу Тумаркина 241
  - равномерно нагретые, посаженные на вал с натягом — Пример расчета 260
- Диски вращающиеся, посаженные на вал с натягом** — Расчет 260
  - постоянной толщины — Напряжения 237; — Расчет 249
  - с ободом и втулкой — Напряжения 238
  - сплошные — Профилирование по эквивалентным допускаемым напряжениям 264
- Диски зубчатые** — Применение для возбуждения колебаний 386
  - равнопрочные 239; — Профилирование графическим способом 254
  - равнопрочные без центрального отверстия — Пример профилирования 254
  - радиальных турбомашин — Расчет 248
- Долговечность** 481
- Допускаемое контактное давление** — см. Давления контактные допускаемые
- Допускаемые напряжения** — см. Напряжения допускаемые
- Дункерля формула** 367
- Дуралюмин** — Гибкость 319
  - Плакировка алюминием — Влияние на предел выносливости 466
  - Покрытие ланолином — Влияние на предел выносливости 466, 467
  - Предел выносливости — Влияние антикоррозионной защиты 466, 467

## Ж

- Железо волнистое** — Сечение — Геометрические характеристики 43
- Железобетон** — Модуль продольной упругости 22
- Жесткость** — Определение 514
  - балок — Расчет 95
  - брусев — Расчет 21
  - брусев при кручении обобщенная 297
  - вала 28
  - динамическая 337, 338, 361, 362
  - мембран гофрированных — Расчет 211, 212
  - мембран плоских — Расчет 211
  - на изгиб 96
  - оболочек большой гибкости — Расчет 210
  - опор — Влияние на частоту поперечных колебаний 373
  - пружин 354
  - пружин трубчатых манометрических — Расчет 214
  - сифонов — Расчет 213, 216
  - систем рычажных 355
  - стержней 23; — Формулы расчетные 353
  - струн натянутых 354
  - трубок толстостенных — Расчет 214, 215
  - элементов конструкции для продольных колебаний 353

## З

- Запас долговечности** 481
- Запас прочности** 482; — Определение 434; Формулы 441; — Расчетные формулы 474
  - в условиях статического напряжения 439
  - для вала паразитной шестерни — Пример расчета 447
  - для малопластичных материалов 443
  - для преского напряженного состояния 453
  - по деформациям — Расчетные формулы 440
  - по перемещениям 444
  - по пределу текучести — Расчетные формулы 440
  - по разрушающим нагрузкам для сечений 442
  - по сопротивлению пластическим деформациям 454
  - по сопротивлению усталости 450
  - по статической несущей способности — Расчетные формулы 453

- по усталости 453
  - при расчете на усталость 452
- Затяжка шпилек фланцевого соединения паропровода** — Напряжения — Пример определения 293

## И

- Известняк** — Модуль продольной упругости 22
- Изгиб** — Энергия деформации 95
- балок 50
  - балок косою 104
  - балок продольно-поперечный 106, 107
  - брусьев — Расчет с учетом пластических деформаций 271
  - и кручение 107
  - кручение и растяжение брусьев 279
  - стержней слабоизогнутых консольных в плоскости вращения — Расчет 232
  - стержней слабоизогнутых консольных из плоскости вращения — Расчет 234
- Изгибающие моменты в балках многопролетных** 66
- на упругом основании при неподвижной нагрузке 66
  - неразрезных постоянного сечения с равными пролетами 69
  - однопролетных 50
  - при подвижной нагрузке 78
  - при сложном сопротивлении 103
- Изгибающие моменты в защемлении** — Определение 514
- в сечении стержня — Определение 514
  - для балок с двумя равными грузами 78
  - поперечного кругового сечения суммарные 110
  - при продольно-поперечном изгибе 107
- Изменяемость мгновенная** 141
- Измерители деформаций статических электронных** 492
- Измерительные устройства токосъемные на вращающихся деталях** 496
- Изоклины и траектории напряжений в плоских моделях** 525
- Изостаты** 19
- в плоских моделях 525
- Изотропные точки** 526
- Импеданс механический** 338
- Инварианты напряженного состояния** 9
- Интеграл Мора** 152
- Интегралы**  $\int M_1 M_2 ds$  152
- для швеллеров — Значения 186

- Интенсивность деформации** 13
- напряжений 9; — Зависимость от интенсивности деформаций 18

## К

- Калибраторы для тарировки тензометров** 498
- Каучук** — Коэффициент Пуассона 22
- Модуль продольной упругости 22
- Квадраты** — Напряжения касательные при изгибе 88
- Квазигармонические колебания** 346
- Кинасошвили метод расчета дисков** 262, 302
- Кинематика колебательного движения** 333
- Клей для наклейки тензометров** 495
- Клеймение деталей машин** — Влияние на выносливость 465
- Клин мерный** 380
- Колебания** — Возбудители 384
- Возбуждение электромагнитное 385
  - Гашение 350
  - Демпфирование 350
  - Измерение — Оптические методы 379
  - Исследование на моделях 386
  - Исследование экспериментальное 378
  - Моделирование — Сопоставление механических и электрических величин 388
  - Силы возбуждения 347
  - Устранение 351
  - Частота — Измерение 378
- Колебания балок двухопорных с равномерно распределенной массой** — Формы 371
- валов с сосредоточенными массами крутильные 360
  - валов собственные — Частота — Изменение 372
  - вращающихся валов крутильные — Измерение 381
  - вращающихся дисков собственные — Частота 377
  - вынужденные 335; — Возбуждение 347; — Сдвиг фаз 337
  - гармонические 333
  - затухающие 335
  - защемленной консоли собственные — Частота 367
  - квазигармонические 346
  - колец изгибные — Частота 378
  - крутильные валов 335, 360, 381; — Резонансные кривые экспериментальные 383
  - маятника собственные — Частота 339
  - мембран собственные — Частота 375

- оболочек собственные — Частота 376
  - пластинок — Частота 375
  - поперечные — Частота высшая — Определение 372
  - продольные и поперечные 335
  - простых систем собственные — Частота 361
  - псевдогармонические 345
  - разветвленных систем собственные — Расчет частот по методу остатка 364
  - свободные 334
  - систем нелинейных 345
  - систем с одной степенью свободы при различных видах сопротивления — Расчетные формулы 351
  - систем с переменными параметрами 345
  - систем с сосредоточенными массами — Расчет — Метод сил 341
  - систем со многими степенями свободы — Формы 340
  - системы вал — винт собственные — Частота 363
  - собственные — Частота — Определение 334, 360
  - стержней переменного сечения поперечные 369
  - стержней поперечные 366; — Частота — Определение 367
  - стержней постоянного сечения с распределенной массой крутильные 365
  - стержней постоянного сечения с распределенной массой продольные 365
  - стержней собственные крутильные — Частота 366
  - упругих систем с одной степенью свободы 334
  - элементов конструкций — Расчет 353
  - элементов машиностроительных конструкций 333—389
- Колено вала** — Податливость 357
- Кольца** — Колебания изгибные — Частота 378
- Расчет — Формулы 163
  - Статический момент 276
  - Части — Напряжения касательные при изгибе 88
- Кольца круглые** — Сечения — Геометрические характеристики 48
- круговые — Устойчивость 324
  - круговые незамкнутые — Напряжения и угол закручивания при кручении 29
  - поршневые — Радиальная толщина — Пример расчета 446
  - произвольной формы — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
  - стальные — Пример определения критических нагрузок 325
  - тонкие — Геометрические характеристики 42
  - тонкие вращающиеся — Пример расчета 230
  - тонкостенные — Напряжения касательные при изгибе 88
  - тонкостенные правильные — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
  - эллиптические — Напряжения и угол закручивания при кручении 30
  - эллиптические — Расчет 164
- Компараторы** 522
- Компенсаторы для измерения малой разности хода** 522
- Компоненты деформации** 11
- напряжений 5; — Правило знаков 6
- Компрессоры мембранные** — Пример расчета на жесткость 217
- Консоли** — Прогреты при возникновении пластических деформаций 275; — Расчет 80; — Частота собственных колебаний — Пример определения — Расчетная формула 369
- закрученные — Частота колебаний 354
  - защемленные — Частота собственных колебаний 367
  - ломаные — Эпюры моментов, поперечных и продольных сил — Построение 150
- Конструкции** — Движущиеся элементы — Расчет 229—270
- Расчет на устойчивость 320
- Контакт двух деталей** — Распределение давлений 419
- цилиндров — Напряжения 419, 420
- Контактные напряжения** 418
- Концентрация напряжений** 403; — Определение экспериментальное 490
- в условиях пластичности 283
- Коррозия** — Влияние на предел выносливости деталей 465—467
- Коэффициент асимметрии цикла** 448
- влияния 341
  - влияния абсолютных размеров сечения 451
  - влияния абсолютных размеров сечения для валов 456, 460, 461
  - влияния абсолютных размеров сечения для легких сплавов 462
  - влияния абсолютных размеров для стали 455

- влияния качества обработки поверхности 451
- гармонический 348
- демпфирования 336; — Определение 383
- динамического усиления 336
- динамичности 336
- для расчета вращающихся конечных оболочек 266
- долговечности 473
- затухания 336
- Коэффициент концентрации** 403
- Определение 528; Графики 407
- Пример определения 415
- Расчет — Методы приближенные 417, 418
- Формулы расчетные 404
- Коэффициент концентрации для алюминиевых сплавов эффективный** 462, 463
- для балок с отверстием — Формулы расчетные 405
- для болтовых соединений 460
- для брусьев — Графики 408, 411; — Пример определения 416
- для брусьев с вырезом — Формулы расчетные 405
- для брусьев ступенчатых — Формулы расчетные 406
- для валов 460; — Графики 409, 412, 413; — Пример определения 416; — Формулы расчетные 406
- для валов эффективный 455—457
- для входящих углов 458, 461
- для вырезов 414, 415
- для выточек 413
- для двух форм сопряжения выступа — Пример определения 528
- для деталей — Графики 408—413
- для изгиба чугунного уголка 445
- для кольцевой выточки при растяжении 445, 446
- для легких сплавов эффективный 462, 463
- для магниевых сплавов эффективный 462, 463
- для надрезов 413—415
- для пластин с отверстием — Формулы расчетные 404
- для ялос — Графики 409—412
- для полос с отверстием — Формулы расчетные 404
- для прямоугольных пластин 458
- для стержней — Графики 412
- для стержней скручивания — Формулы расчетные 407
- для тонкостенных профилей — Формулы расчетные 407
- для тонкостенных цилиндров — Формулы расчетные 407
- для угольников — Графики 412
- для чугунных деталей 461
- для шестерен 459
- для шлицевых соединений 458
- для фланцев — Пример определения 462
- общий 451
- при изгибе щеки коленчатого вала 458
- при кручении шейки коленчатого вала 459
- при надрезах 445
- эффективный 451, 454
- Коэффициент передачи перемещений** 353
- понижения допускаемого напряжения на сжатие 320
- приведенной длины 309, 313, 314
- Пуассона 13
- Пуассона для материалов 22
- разупрочнения 18
- редуционный для подкрепленных пластинок после потери устойчивости 201
- сопротивления 336
- сопротивления в пластической области 444; — Расчетные формулы 440
- сопротивления разрушению 444
- тензочувствительности 494
- уменьшения предела прочности 444
- упрочнения 469
- упругости для изотропного материала — Зависимости 13
- усиления — Определение 383
- устойчивости для двутавровых балок при опрокидывании 329, 330
- устойчивости для двуступенчатых консольных стоек 315
- устойчивости для пружин 331
- устойчивости для консольных полос при поперечном изгибе 327
- устойчивости стоек 309, 311—314
- характеризующий влияние размеров сечения 445, 446
- чувствительности для легких сплавов 462, 463
- чувствительности металла к концентрации напряжений 458
- Кривая огибающая** круги напряжений 436, 438
- ползучести 289
- релаксации 292
- усилий предельная при комбинированном нагружении 453
- Кривизна изогнутой оси бруса** из-за ползучести материала 295
- Кривошипно-шатунные механизмы** — Момент инерции 359
- Кривошипные механизмы** — Крутящие моменты периодические 348

- Кривые деформирования и в условиях разрушения** 438
- длительной прочности 432
  - опасных перегрузок 472
  - податливости 356
  - резонансные 336, 345, 346
  - резонансные крутильных колебаний экспериментальные 383
  - резонансные при псевдогармонических колебаниях 345
  - релаксации для стали 486
  - упругие периодические 128, 129, 135
  - усталости 472
  - усталости материалов 430
  - частоты статические суммарные 472
- Критическая сила сжимающая** — Определенное 184
- Критические нагрузки для сжатых молотных стержней** 309
- Критические силы в расчетах на устойчивость** 309
- за пределами упругости для стоек 319
- Круг Мора** 9
- Круги** — Напряжения касательные при изгибе 88
- Статический момент 276
  - Секторы — Центр изгиба 102
- Круги для моментов инерции** 39
- неполные — Геометрические характеристики 42
- Крутильные колебания** — см. *Колебания крутильные*
- Кручение** 27
- Расчет на прочность 33
  - Формулы для напряжений и угла закручивания 29
- Кручение брусев** — Жесткость обобщенная 297
- брусев при установившейся ползучести 295
- Крылова гипертригонометрические функции** 343
- Крыльчатка** — Исследования 531, 532

## Л

- Лаковые покрытия** — см. *Покрытия лаковые*
- Лагунь** — Коэффициент Пуассона 22
- Модуль продольной упругости 22
  - Модуль сдвига 22
- Легкие сплавы** — см. *Сплавы легкие*
- Линии влияния** — Построение 80
- влияния для балочных ферм 145
  - равных главных напряжений 20
- Лиссажу фигуры** 379

- Литейные сплавы** — Предел выносливости — Влияние поверхностных покрытий 466, 467
- Лопатки турбинные** — Резонансные числа оборотов 349
- Формы колебаний типичные 341
  - Частота собственных колебаний — Пример определения 369
- Лоренца тензометры малобазные** 490
- Ляме формулы** 219

## М

- Магниеые сплавы** — см. *Сплавы магниевые*
- Маквелла-Кремоны диаграмма** — Построение 144
- Маквелла-Мора формула** 151
- Малинина метод** 256
- Манометры с пружиной Бурдона** — Пример расчета на жесткость 217
- Маркировка деталей машин** — Влияние на выносливость 465
- Масса приведенная консольной балки** — Пример определения 400
- стержня — Пример определения 400
- Масса системы** — Инерция поворота — Влияние на частоту поперечных колебаний 374
- Момент гироскопический — Влияние на частоту поперечных колебаний 374
- Материалы** — Коэффициент Пуассона 22
- Модуль продольной упругости 22
  - Модуль сдвига 22
  - Оптическая постоянная — Определение 521
  - Ползучесть — Характеристики 290
  - Прочность 429
  - Сопротивление разрушению 435
- Материалы для моделей при исследовании деформаций** 520, 521
- Машиностроительные конструкции** — Колебания 339—389
- Частота собственных колебаний — Расчет 339
- Маховики** — Напряжения 231
- Расчет 231
- Маятники** — Частота собственных колебаний 339
- Мгновенная изменяемость** 141
- Медь** — Модуль продольной упругости 22
- Модуль сдвига 22
- Мерный клин** 380
- Мембраны** — Колебания собственные — Частота 375
- гофрированные — Расчет на жесткость 211, 212

- плоские — Расчет на жесткость 211
- Местные напряжения** 403—427
- Металлы** — Коэффициент чувствительности  $k$  концентрации напряжений 458
- Предел выносливости 465
- Метод Афанасьева** расчета коэффициентов концентрации 417
  - Бернадского для расчета рам 165
  - Верещагина 273
  - Верховского расчета коэффициентов концентрации 417
  - Вильо для определения перемещений ферменных конструкций 155
  - Давиденкова измерения деформации 492
  - Кинасошвили 262, 302
  - Малинина 256
  - Пономарева 248
  - Смрчека 386
  - Тумаркина 241
  - Шиманского расчета коэффициентов концентрации 418
  - Штаермана определения изгибных напряжений для оболочек вращения 207
  - Яновского 244
- аналогии 33
- аналогии для расчета плоских одноконтурных рам 159
- остатка для определения частот собственных колебаний 363
- пересечения характеристик для определения частот собственных колебаний 363
- последовательных приближений расчета критической скорости (или частоты собственных колебаний) вала переменного сечения 371
- распределения узловых моментов для расчета рам 165
- сил для расчета статически неопределимых систем 156
- сквозных сечений при расчете плоских ферм 143
- узловых сечений при расчете плоских ферм 143
- энергетический расчета собственных колебаний стержней и валов переменного сечения 369
- Микроскопы поляризационные** 522
- Многоугольники правильные** — Геометрические характеристики 41
- Модели механические** 387
  - объемные 520
  - плоские 519
  - электрические 388
- Моделирование** 386
  - колебаний — Сопоставление электрических и механических величин 388
- Модуль объемный** 13
  - ползучести 305
  - продольной упругости 13, 22
  - сдвига 13, 22
  - упрочнения 18
  - упругости гетинакса 431
  - упругости дельта-древесины 431
- Момент изгибающий предельный** — Определение 276
- Момент инерции** — Графическое определение 44
  - валов — Определение 358
  - гребных винтов 359
  - двутавров при свободном кручении 171
  - длинных валов 360
  - кривошипно-шатунных механизмов 359
  - масс — Определение 358
  - неправильных тел — Определение 358
  - обобщенная — Формулы 295, 296
  - полярный направленный 182
  - роторов — Определение 359
  - секториальный 175
  - сечений 40; — Вычисление 34
  - сечений сложной формы — Вычисление 35
  - систем с зубчатыми передачами 360
  - трапеций 37
  - швеллеров при свободном кручении 172
  - щеки колена вала — Пример определения 358
- Момент крутящий допустимый для торсиона редуктора** — Пример расчета 446
  - предельный — Определение 278
  - при возникновении пластических деформаций — Зависимость от угла закручивания 278
- Момент кручения в балках при сложном сопротивлении** 103
  - приведенный для сечений — Формулы 111
  - сопротивления для сечений 442
  - сопротивления изгибу обобщенный — Формулы 295, 296
  - сопротивления кручению обобщенный — Формулы 295, 297
  - сопротивления сечений 40
  - статический для сечений 276
- Монель-металл** — Удельное рассеяние энергии при колебаниях 351
- Мора гипотеза определения условий пластичности** 435, 436
- Мора интеграл** 152



- во вращающихся валах 236
- Напряжения во вращающихся дисках** 237
  - гиперболического профиля 240
  - за пределом упругости 281
  - конических 239
  - переменной толщины 241, 243, 282
  - постоянной толщины 249
  - с ободом и втулкой 238
- Напряжения главные** 6
  - Определение по главным деформациям 506
  - Разности — Определение 526
  - Траектория 19
  - Формулы 6
- Напряжения главные в плоских моделях** — Разделение 528
  - в точках поверхности вала круглого сечения 28
  - равные — Линии 20
- Напряжения допускаемые** 482, 484, 485; — Определение 434, 442
  - по разрушающим нагрузкам для сечений 442
  - при расчете на усталость 452
- Напряжения и деформации в пределах упругости** — Зависимости (по закону Гука) 14
  - кривых брусьев 112
- Напряжения касательные** 5; — Зависимость от угловой деформации 277; — Свойство парности 6
  - максимальные при кручении бруса при установившейся ползучести 295
  - наибольшие — Формулы 6
  - контактные 418
  - контактные допускаемые при статической нагрузке 482
  - кручения наибольшие при круглом поперечном сечении вала 27
  - местные 403—427
  - на ненагруженном контуре — Определение 527
  - наибольшие при растяжении и сжатии 443
  - нормальные 5
  - октаэдрические — Формулы 8
  - остаточные — Определение 287
  - переменные — Циклы 448
  - полные 5
  - по наклонным площадкам — Формулы 6
  - при изгибе брусьев кривых плоских 114
  - при контакте в виде полосы 426
  - при контакте деталей машин 419, 420
  - при контакте цилиндров 419, 420
- при пластической деформации — Выражение через деформации 17
- при приложении нагрузки к поверхности детали машин — Формулы 420
- при установившейся ползучести изогнутых брусьев 295
- приведенные для сечений — Формулы 110, 111
- приведенные при расчете на прочность 437
- приведенные при расчете на сопротивление пластическим деформациям 436
- приведенные при расчете на усталость при симметричном цикле 450
- Напряженное состояние** — Изображение 507
  - Определение — Метод покрытия 515
  - Сложение 11
  - Типы 8
  - Формулы 6—8
- Напряженное состояние в винтовых брусьях** 118
  - материала — Влияние на прочность 447
  - сложное — Запас прочности по усталости 452
- Недепланирующие профили тонкостенных стержней** 169
- Неметаллические материалы** — Прочность механическая — Характеристика 431
- Несущая способность** 434
  - балок 273
  - брусьев при кручении 278
  - брусьев при совместном растяжении, кручении и изгибе 278
  - вращающихся дисков 281
  - деталей из малопластичных и хрупких материалов 443
  - деталей из материалов в пластическом состоянии 440
  - для сложного нагружения 454
  - оболочек 284
  - пластинок 284
  - по сопротивлению пластическим деформациям 441
  - при действии нескольких нагрузок 480
  - при переменных напряжениях 451
  - при простом нагружении 480
  - при сложных напряженных состояниях 452
  - при статических напряжениях 439
  - при хрупком состоянии 442
  - толстостенных труб под давлением 280

- Никель** — Коэффициент Пуассона 22  
 — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
**Нить гибкая** 24  
 — Расчет 25  
 — Стрела провеса 25

## О

- Обдвка дробью** — Влияние на предел выносливости 470  
**Обертаны** 340  
**Обкатка роликом** — Влияние на предел выносливости 470  
**Обобщенный момент сопротивления кручению** — см. *Момент сопротивления кручению обобщенный*  
**Обозначения** 1  
**Оболочки** — Колебания собственные — Частота 376  
 — Нагрузки продольные — Определение 284  
 — Несущая способность 284  
 — Расчет 203—218  
**Оболочки бесконечной длины** под действием равномерно распределенной по окружности силы — Предельная нагрузка 287  
 — большой гибкости — Расчет на жесткость 210  
**Оболочки вращающиеся** — Расчет 265  
 — конические — Расчет — Коэффициент 266  
 — конические алюминиевые — Пример расчета 270  
 — конические переменной толщины — Расчет 265  
 — цилиндрические тонкостенные с закрепленными краями — Расчет 265  
 — цилиндрические тонкостенные со свободными концами — Расчет 265  
**Оболочки вращения** — Определение изгибных напряжений 207  
 — под действием равномерно распределенной нагрузки по поверхности и моментов по торцам — Предельная нагрузка 286  
 — симметричные 203, 204  
 — сферические под действием внешнего давления — Расчет на устойчивость 209  
 — сферические под действием нагрузки — Напряжения и перемещения — Расчет на устойчивость 206  
 — тонкостенные — Напряжения и перемещения 203; — Расчет на устойчивость 207  
**Оболочки цилиндрические** — Расчет на устойчивость 206, 208, 209

- Образцы алюминиевые** — Предел выносливости — Влияние коррозии 466  
 — стальные — Обкатка роликом — Влияние на предел выносливости 471; — Предел выносливости 465—467  
**Однотавры с полкой постоянной толщины** — Напряжения и угол закручивания при кручении 32  
**Октаэдрический сдвиг** 12  
**Опорные реакции** 140  
 — в консольных балках 56—66  
 — в однопролетных балках 56—66  
 — неразрезных балок — Расчет 69  
**Опоры** 140  
 — Жесткость — Влияние на частоту поперечных колебаний 373  
 — Податливость — Влияние на частоту поперечных колебаний 372  
**Опрокидывание** 325  
 — балок двутавровых 329  
 — полос криволинейных 339  
 — полос при поперечном изгибе 327  
 — полос при чистом изгибе 326  
**Оптика напряжений** 519  
**Оргстекло** — Коэффициент Пуассона 22  
 — Модуль продольной упругости 22  
**Осадка пружин критическая** 331  
**Оси сечений главные** 36  
 — стержней большой гибкости изогнутые — Построение 120, 124; — Связь с периодической кривой 128; — Форма 126  
**ОСТ 10016-39** 171  
**ОСТ 10017-39** 172, 183  
**Остаточные деформации** — см. *Деформации остаточные*  
**Остаточные напряжения** — см. *Напряжения остаточные*  
**Осциллографы** — Частота 497  
 — шлейфовые 497, 498

## П

- Панели сферические под действием нагрузок** — Расчет на устойчивость 210  
**Параболы квадратные** — Сегмент — Центр изгиба 102  
**Параметры упругие** — см. *Упругие параметры*  
**Перегрузатели** — Пример расчета 141  
**Перемещения в балках** 95  
 — Зависимость 96  
 — Определение — Методы 97  
 — Расчет графический 101  
 — Расчет графо-аналитический 99  
 — Расчет по методу начальных параметров 98

- Перемещения в тонкостенных оболочках 203  
 — динамические — Измерения 379, 512; — Измерения — Электроаппаратура 380  
 — единичные упругие — Теорема взаимности 157  
 — в усилия консольных круговых брусьев 153, 154  
 — кривых брусьев — Вычисление 115  
 — при контакте деталей машин — Формулы 420  
 — стержневых систем 151, 155  
 — угловые — Измерение — Схемы 512  
 — упругие — Измерение 511  
 — ферменных конструкций 155  
 Перенапряжения повторные — Прочность 472  
 Песочные фигуры 383  
 Пик напряжения 403  
 Пластинки — Колебания собственные — Частота 375  
 — Нагрузки предельные — Определенные 284  
 — Напряжения — Формулы 300  
 — Несущая способность 284  
 — Ползучесть установившаяся 300  
 — Расчет 190—202  
 — Расчет на изгиб 191  
 — Расчет на устойчивость в пределах упругости 198  
 — Расчет на устойчивость за пределами упругости 201  
 Пластинки гибкие — Расчет 196  
 — жесткие — Расчет 191  
 — заземленные — Нагрузка предельная 284  
 — квадратные — Расчет 192  
 — квадратные опертые — Нагрузка предельная 286  
 — кольцевые заземленные — Нагрузка предельная 285  
 — кольцевые опертые — Нагрузка предельная 285  
 — кольцевые постоянной толщины — Нагрузка — Расчетные формулы 285  
 — консольные переменного сечения — Формы колебаний типичные 340  
 — круглые — Расчет 193—195; — Расчет на устойчивость 201  
 — опертые — Нагрузка предельная 284  
 — подкрепленные после потери устойчивости — Коэффициент редуцированный 201  
 — произвольной формы заземленные по контуру под действием сосредоточенной силы — Нагрузки предельные 286  
 — прямоугольные — Нагрузки после потери устойчивости 201, 202; — Пример расчета 197; — Расчет 191—193; — Расчет на устойчивость 198—201  
 — с боковыми вырезами и отверстием растянутые в условиях пластичности — Эпюры напряжений 283  
 — с отверстием — Коэффициент концентрации — Графики 408  
 — с отверстием растягиваемые — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 404  
 — сплошные постоянной толщины — Нагрузка — Расчетные формулы 284  
 — тонкие — Расчет 191  
 Пластины — Расчет на ползучесть 303, 304  
 — прямоугольные — Коэффициент концентрации 458  
 Пластическая деформация — см. Деформация пластическая  
 Пластичность 17  
 — Условия 19  
 Пластмассы — Удельное рассеяние энергии при колебаниях 351  
 Плексиглас — Прочность механическая — Характеристики 431  
 Плиты круглые — Расчет 197  
 — толстые — Расчет 197  
 Площади сечений 40  
 Плошадки контакта — Размеры 419, 420  
 Погрешность тензометров 490  
 Податливость валов 355  
 — опор — Влияние на чистоту поперечных колебаний 372  
 — ременных передач 357  
 — стержней призматических 357  
 — фланцевых соединений 356  
 Подобие геометрическое — Масштаб 387  
 — динамическое 387  
 — силовое — Масштаб 387  
 — статическое — Условия 387  
 Покртия влагостойкие для датчиков 495  
 — лаковые для исследования деформаций — Характеристики 515  
 Поле изоклин 525  
 — напряжений 19  
 Полигармонические силы 347  
 Ползучесть — Гипотеза 289  
 — Кривая 289  
 — Модуль 305  
 — Теория Работнова 292  
 Ползучесть брусьев установившаяся 295

- вращающихся дисков — Расчет 300—302
- материалов — Характеристики 290
- пластинок установившаяся 300
- при неодносном напряженном состоянии 294
- при одноосном растяжении 289
- стали — Характеристики 290
- тонкостенных трубок 299
- Полосы** — Коэффициент концентрации — Графики 408—412
- Опрокидывание при поперечном изгибе 327
- Опрокидывание при чистом изгибе 326
- Предел выносливости — Влияние развальцовки 472
- Полосы изгибаемые** — Пример расчета на устойчивость против опрокидывания 326
- изгибаемые биметаллические — Расчет 95
- консольные при поперечном изгибе — Коэффициент устойчивости 327
- криволинейные — Опрокидывание 330
- с опертыми или защемленными концами — Расчет на опрокидывание 328
- с отверстием растягиваемые — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 404
- тонкие — Жесткость обобщенная 298; — Момент сопротивления кручению обобщенный 298
- Полукруг** — Геометрические характеристики 42
- Центр изгиба 102
- Полуось моста комбайна** — Усталость — Пример расчета 479
- Поляризаторы** 522
- Поляризационные установки** — Схема 522
- Поляриметры** координатно-синхронные 522
- Полярископы** 522
- Пономарева метод** 248
- Поршни с равномерно распределенной нагрузкой** — Пример расчета 195
- Посадки прессовые** — Расчет 220, 227
- Потенциометры** — Частота 497
- Правило Верещагина** 152
- Предел выносливости** — Влияние абсолютных размеров сечения 451
- Влияние азотирования 469, 470
- Влияние наклепа 470
- Влияние обдувки дробью 470
- Влияние обкатки роликами 470
- Влияние поверхностной обработки в условиях коррозии 466, 467
- Влияние поверхностных покрытий 466
- Влияние химико-термической обработки 469
- Влияние цементации 469
- Влияние цианирования 469
- Предел выносливости** алюминиевых сплавов 431
- волокнита 431
- гетинакса 431
- дельта-древесины 431
- легких сплавов 462
- магниевых сплавов 431
- плексигласа 431
- стали 429, 433, 449; — Влияние закалки токами высокой частоты 469
- текстолита 431
- чугуна 430; — Влияние закалки токами высокой частоты 469
- Предел ползучести стали** 433
- Предел прочности** алюминиевых сплавов 431
- волокнита 431
- гетинакса 431
- дельта-древесины 431
- магниевых сплавов 431
- плексигласа 431
- стали — Изменение с температурой 433
- стали жаропрочной 432, 433
- стали конструкционной 432
- стали легированной 430
- стали углеродистой 429
- статический длительный 432
- стекла 431
- текстолита 431
- фибры 431
- целлулоида 431
- чугуна 430
- Предел текучести** легких сплавов 429
- стали 429; — Изменение от температуры 432
- стали жаропрочной 432
- стали конструкционной 432
- стали легированной 430
- Предел упругости** 13
- Предел усталости** стали — Изменение с температурой 433
- Прецессия синхронная** 374
- Приборы для измерения деформаций** 490
- для измерения перемещений — Характеристики 511
- Приведенное напряжение** — см. *Напряжения приведенные*
- Примеры расчетов** — см. соответствующие названия предметов с подру-

- брикой — Пример расчета — На-  
пример, *Диски вращающиеся* —  
Пример расчета
- Принцип сложения действия сил** 157
- Проволочные тензодатчики** 493, 508
- Прогибы балок** 69, 96, 97, 105, 124, 272,  
275; — Определение 272
- консольных — Пример решения  
124
- неразрезных — Расчет 69
- при возникновении пластических  
деформаций 273, 275
- Прогибы брусев изогнутых** 295
- упругой системы динамические 391
- Проекционно-поляризационные уста-  
новки** 522
- Профили** внецентренно сжатые —  
Силы критические — Определение  
185
- замкнутые тонкостенные — Мо-  
мент сопротивления кручению обо-  
общенный — Формулы 297
- корытные — Пример определения  
геометрических характеристик и  
построения эпюр 184
- несимметричные внецентренно сжа-  
тые — Сила критическая — Опре-  
деление 186
- несимметричные центрально сжа-  
тые — Сила критическая — Опре-  
деление 186
- по дуге круга 184
- прокатные — Стесненное кручение  
170
- Профили тонкостенные** — Жесткость  
обобщенная 298; — Момент со-  
противления кручению обобщенный  
298; — Центр изгиба 102
- под действием кручения — Коэф-  
фициент концентрации — Формулы  
для подсчета 407
- Профили тонкостенных стержней** 169
- деформирующие 169
- замкнутые 170
- недеформирующие 169
- Профилирование** равнопрочных ди-  
сков — Графический способ 254
- сплошных дисков по эквивалент-  
ным допускаемым напряжениям  
264
- Прочностной расчет** 428—487
- Прочность** — Расчет 428—487
- Сопротивление пластическим дефор-  
мациям — Расчет 435
- Прочность** алюминиевых сплавов меха-  
ническая — Характеристика 431
- балок — Расчет 86
- балок постоянного сечения — Рас-  
чет 89
- балок при изгибе — Проверка 106,  
107
- брусев — Расчет 21
- дисков вращающихся переменной  
толщины — Пример расчета 246,  
258
- легированной стали механиче-  
ская — Характеристика 430
- магниевых сплавов механиче-  
ская — Характеристика 431
- материалов 429; — Влияние на-  
пряженного состояния 447
- неметаллических материалов ме-  
ханическая — Характеристика 431
- при контактных напряжениях 481
- при кручении — Расчет 33
- при переменных напряжениях 447
- при повторных перенапряжениях  
472
- при статических напряжениях 434
- при ударной нагрузке 481
- стержней — Расчет 23
- углеродистой стали механическая —  
Характеристика 429
- чугуна механическая — Характе-  
ристика 430
- Пружины** — Жесткость 354
- Коэффициент устойчивости 331
- Осадка критическая 331
- Приведение распределений массы  
355
- Усилия и деформации при ударе —  
Расчет 398
- Пружины Бурдона** 214
- винтовые цилиндрические вращаю-  
щиеся — Расчет 234
- клапанные — Пример расчета на  
удар 399; — Пример расчета на  
усталость 477
- радиально расположенные вращаю-  
щиеся — Расчет 235
- с осью вращения произвольно  
расположенного в плоскости нор-  
мальной к оси вращения — Расчет  
235
- сжатия цилиндрические витые —  
Устойчивость 330
- трубчатые манометрические —  
Расчет на жесткость 214, 216
- Прямоугольники** — Геометрические ха-  
рактеристики 45
- Напряжения и угол закручивания  
при кручении 30, 31
- Напряжения касательные при изгибе  
88
- Статический момент 276
- Прямоугольники полые** — Напряжения и  
угол закручивания при кручении 31
- Псевдогармонические колебания** — см.  
*Колебания псевдогармонические*

Пуассона коэффициент 13  
 Пульсирующий цикл переменных напряжений 448  
 Пучность колебаний 340

## Р

Работнова гипотеза старения 292  
 Работнова теория ползучести 292  
 Радиус кривизны брусьев остаточный 287  
 — инерции главный 39  
 — инерции сечений 40  
 Разброс по тензочувствительности допускаемый 494  
 Размерность напряжений 5  
 Рамные конструкции — Перемещения — Определение 151  
 Рамы — Изгибающие моменты — Эпюры — Построение — Пример 159, 167  
 — однопролетные — Расчетные формулы 160  
 — плоские одноконтурные — Расчет 159  
 — плоские с нагрузкой в своей плоскости 150  
 — плоские с одной лишней неизвестной — Расчет 159  
 — плоские со многими лишними неизвестными — Число лишних неизвестных — Определение 165  
 — статически неопределимые со многими лишними неизвестными — Расчет практический 165  
 — статически определимые — Расчет 149  
 Рассеяние энергии в материале при колебаниях 350, 351  
 Растяжение балок с изгибом 105  
 — центральное 21  
 Расчет за пределами упругости 271—307  
 Расчет на прочность 428—487  
 Реакции опорные 140  
 Регистраторы деформации автоматические электронные 492  
 Регуляторы силовые — Пример расчета на жесткость 216  
 Резонанс 333, 336  
 Резонансная частота 362  
 Резонансные кривые — см. *Кривые резонансные*  
 Резонансные числа оборотов турболопатоков 349  
 Релаксация 486  
 — напряжений 292  
 Ременные передачи — Податливость 357  
 Роторы — Момент инерции — Определение 359

## С

Сверла спиральные — Пример расчета на устойчивость 323  
 Свинец — Коэффициент Пуассона 22  
 — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
 Сдвиг 26  
 — Деформация 26  
 — Диаграмма 19  
 — Расчет на прочность 26  
 Сдвиг абсолютный 26  
 — октаэдрический 22  
 — относительный 26, 28  
 — фаз при вынужденных колебаниях 337  
 Сжатие 21  
 — балок с изгибом 105  
 Сегмент квадратной параболы — Центр изгиба 102  
 Сегменты — Геометрические характеристики 42  
 — круговые — Геометрические характеристики 43  
 Сейсмическая масса 381  
 Сектор кольца — Геометрические характеристики 43  
 — круга — Центр изгиба 102  
 — круговой — Геометрические характеристики 42  
 — тонкого кругового трубчатого сечения — Центр изгиба 102  
 Секториальный момент инерции 175  
 Сетки накатные для измерения деформаций 518  
 Сечения — Геометрические характеристики 33  
 — Главные оси 36  
 — Запас прочности по разрушающим нагрузкам 442  
 — Момент инерции 40  
 — — Вычисления 35  
 — Момент инерции обобщенный 296  
 — Момент приведенный — Формулы 111  
 — Момент сопротивления 40, 442  
 — Момент сопротивления изгибу обобщенный 296  
 — Момент статический 276  
 — Напряжения допускаемые по разрушающим нагрузкам 442  
 — Напряжения касательные при изгибе 87  
 — Напряжения приведенные — Формулы 110, 111  
 — Площади 40  
 — Радиус инерции 40  
 — Усилия предельные по разрушающим нагрузкам 442  
 — Центр изгиба 101—103  
 — Центр тяжести — Положения 40

- Сечения вала с лыской** — Напряжения и угол закручивания при кручении 29
- волнистого железа — Геометрические характеристики 43
  - вытянутые любой формы — Напряжения и угол закручивания при кручении 32
  - квадратные — Напряжения и угол закручивания при кручении 30
  - клинообразные — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
  - кольцевые — Жесткость обобщенная 297; — Момент сопротивления кручению обобщенный 297
  - круглые — Геометрические характеристики 46
  - круглые кольцевые — Геометрические характеристики 48
  - круглые полые — Геометрические характеристики 42; — Жесткость обобщенная 297; — Момент сопротивления кручению обобщенный 297
  - круглые сплошные — Жесткость обобщенная 297; — Момент сопротивления кручению обобщенный 297
  - круглых труб — Геометрические характеристики 47
  - круговые — Напряжения и угол закручивания при кручении 29
  - круговые поперечные — Изгибающий момент суммарный 110
  - ломаные — Гипотеза 418
  - неправильной формы — Напряжения при кручении 32
  - поперечные — Усилия — Определение 508
  - прокатных балок — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
  - прямоугольные — Геометрические характеристики 45; — Жесткость обобщенная 298; — Расчет 110
  - прямоугольные сплошные — Напряжения и угол закручивания при кручении 30
  - сложной формы — Момент инерции — Вычисление 35
  - сплошные компактные без входящих углов — Напряжения и угол закручивания при кручении 32
  - элементов плоских рам и ферм — Усилия — Определение 527
  - эллиптические — Напряжения и угол закручивания при кручении 30
- Сила возбуждения колебаний** 347
- гармоническая 335
  - полигармоническая 347
  - поперечная — Влияние на частоту поперечных колебаний стержней 373
  - поперечная в балках при сложном сопротивлении 103
  - продольная — Влияние на частоту поперечных колебаний 373, 374
  - сжимающая критическая — Определение 184
- Сильфоны** — Расчет на жесткость 213, 216
- Симметричный цикл** — Усталость — Расчет 450
- переменных напряжений 448
- Системы нелинейные** — Колебания 345
- рычажные — Жесткость 355
  - с зубчатыми передачами — Момент инерции 360
  - с одной сосредоточенной массой — Частота собственных колебаний 339
  - с одной степенью свободы — Колебания 334, 351
  - с переменными параметрами — Колебания 345
  - с сосредоточенными массами — Частота резонансная 341; — Частота собственных колебаний 341
  - со многими степенями свободы — Динамическая жесткость 362
  - со многими степенями свободы упругие — Колебания 340
  - статически неопределимые 156—158
  - стержневые — см. *Стержневые системы*
- Скальвание** 26
- Скорость критическая валов** 366, 369
- угловая радиально расположенных пружин критическая 236
- Скрепленные цилиндры** — см. *Цилиндры скрепленные*
- Смрчека метод** 386
- Собачки храповых механизмов** — Пример расчета на удар 401
- Соединения цилиндрических деталей** одинаковой длины — Контактное давление — Расчет 220
- различной длины — Контактное давление — Расчет 227
- Сопротивление в балках** сложное 101
- пластическим деформациям 434
  - разрушению материалов 435
  - тонкостенных стержней сложное 174
  - усталости — Влияние упрочнения поверхностного слоя 466

- Сопряжения для ступенчатых валов** —  
 Размеры 417
- Соударение двух упругих тел** — Упрощенный расчет 401  
 — массивных тел 390
- Спарники** — Напряжения 231  
 — паровозные — Устойчивость — Пример расчета 322
- Сплавы алюминия** — Коэффициент концентрации эффективный 462, 463  
 — Коэффициент Пуассона 22  
 — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
 — Предел выносливости — Влияние коррозии 466
- Сплавы легкие** — Коэффициент влияния абсолютных размеров сечения 462  
 — Коэффициент концентрации эффективный 462, 463  
 — Коэффициент чувствительности 462, 463  
 — Предел выносливости 462  
 — Предел текучести 429
- Сплавы магниевые** — Коэффициент концентрации эффективный 462, 463  
 — Коэффициент Пуассона 22  
 — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
 — Окислирование — Влияние на предел выносливости 466, 467  
 — Предел выносливости — Влияние поверхностных покрытий 466, 467  
 — Удельное рассеяние энергии при колебаниях 351
- Срез** 26
- Сталь** — Азотирование — Влияние на предел выносливости 466, 467  
 — Гибкость 319  
 — Допускаемое давление контактное 482  
 — Запас устойчивости 309  
 — Коэффициент влияния абсолютных размеров 455  
 — Коэффициент понижения допускаемого напряжения на сжатие 320  
 — Коэффициент Пуассона 22  
 — Кривые релаксации 486  
 — Металлизация — Влияние на предел выносливости 466, 467  
 — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
 — Напряжения допускаемые — График 485  
 — насыщение диффузионное — Влияние на предел выносливости 466, 467  
 — Обкатка роликом — Влияние на предел выносливости 466, 467  
 — Ползучесть — Характеристики 290  
 — Предел выносливости 449
- — Влияние антикоррозионной защиты 466, 467  
 — — Влияние закалки токами высокой частоты 469  
 — — Влияние коррозии 465, 466  
 — — Влияние поверхностного наклона 470  
 — — Влияние поверхностных покрытий 466, 467  
 — Предел прочности — Изменение с температурой 433  
 — Предел текучести 429  
 — — Изменение от температуры 432  
 — Предел текучести динамический 390  
 — Предел усталости — Изменение с температурой 433  
 — Удельное рассеяние энергии при колебаниях 351
- Сталь жаропрочная** — Предел длительной прочности 433; — Характеристики механические 432  
 — — конструкционная — Механические характеристики 432  
 — — легированная — Прочность механическая — Характеристики 430  
 — — углеродистая — Прочность механическая — Характеристики 429
- Старение** — Гипотеза 292, 293
- Статически неопределимые системы** — Расчет 156—158
- Стекло** — Модуль продольной упругости 22  
 — Модуль сдвига 22  
 — Предел прочности 431
- Стержневые системы** — Расчет 140—168  
 — Угловые подобия 387
- Стержневые системы вращающиеся** — Расчет 229  
 — — основные — Выбор 156  
 — — плоские — Перемещения 151, 155  
 — — пространственные — Перемещения 155  
 — — статически неопределимые 156—158
- Стержневые элементы конструкций** — Запас устойчивости 309  
 — Расчет на статическую устойчивость 308—332
- Стержни** — Деформации — Изменения в точке удара 396, 397  
 — Динамические схемы колебаний 360  
 — Жесткость 23  
 — Заделка — Влияние на частоту поперечных колебаний 373  
 — Колебания поперечные 366  
 — Колебания собственные поперечные 372  
 — Кручение 27  
 — Коэффициент концентрации и графики 412



- Напряжения и деформации от изменения температуры — Определение 24
- Номинальное напряжение 22
- Потенциальная энергия деформации 24
- Расчет на прочность 23
- Силы поперечные — Влияние на частоту поперечных колебаний 373
- Силы продольные — Влияние на частоту поперечных колебаний 373, 374
- Удар продольный — Расчет 394, 398
- Учет собственного веса 23
- Форма колебаний 340, 341
- Частота поперечных колебаний — Определение 367
- Частота собственных колебаний 338
- Стержни большой гибкости — Геометрическое подобие — Условия 126**
- Оси изогнутые — Построение 124
- Построение графическое 120; — Форма 126
- Примеры расчетов 136
- Расчет — Выбор координат, правила отсчета и знаков 125
- Расчет графический 120
- Расчет графо-аналитический по Е. П. Попову 124
- Расчет на изгиб 119
- Расчет по методу упругих параметров 124
- Стержни движущиеся — Расчет 229**
- длинные — Частота собственных крутильных колебаний 366
- естественно завитые 323
- консольные переменного сечения — Частота собственных колебаний — Определение — Пример 369
- монолитные сжатые — Критические нагрузки 309
- невесомые — Частота собственных колебаний — Определение 367
- однопролетные с шарнирно опертыми концами — Прогиб наибольший 308
- переменного поперечного сечения вращающиеся — Пример расчета 229
- переменного поперечного сечения поступательно движущиеся — Расчет 229
- переменного сечения — Колебания поперечные 369
- постоянного сечения — Жесткость 353; — Приведение распределенной массы к сосредоточенной 355
- постоянного сечения с распределенной массой — Продольные и крутильные колебания 365
- при продольном ударе — Масса приведенная — Пример определения 400
- призматические — Податливость 357; — Частота собственных продольных колебаний 365
- прямолинейные сжатые — Устойчивость 308
- прямые постоянного сечения — Напряжения 21
- равногo сопротивления 24
- с заземленными концами — Пример расчета на колебания 343
- с меняющимся сечением — Расчет на прочность 23
- с одним закрепленным концом и другим свободным — Пример расчета на колебания 342
- с распределенной массой — Расчет на колебания 342
- с сосредоточенной массой — Жесткость поперечная — Расчет 353
- сварные швеллерного типа — Пример определения бимоента и напряжений стесненного кручения 182
- сжато-скрученные — Устойчивость 324
- сжатые — Расчет по коэффициенту понижения допускаемого напряжения 320
- сжатые прямолинейные естественно завитые — Устойчивость 323
- скручиваемые с продольным отверстием — Коэффициент концентрации — Формулы 407
- слабоизогнутые вращающиеся — Расчет 232
- слабоизогнутые консольные — Изгиб — Расчет 232, 234
- слабоизогнутые консольные вращающиеся — Напряжения 233
- стальные с шарнирно опертыми концами сжатые — Пример расчета на устойчивость 308
- ступенчатые 24
- Стержни тонкостенные — Бимомент инерции профиля при сложном сопротивлении 178**
- Деформация при сложном сопротивлении — Главные эпюры 178
- Напряжения по сечению при сложном сопротивлении 174
- Приведение нагрузок к типам усилий при сложном сопротивлении 179
- Профили 169, 170
- Расчет 169—189
- Сопротивление сложное 174
- Усилия при сложном сопротивлении — Определение 180

- Эпюры — Построение при сложном сопротивлении 180
- Характеристика качественная 169
- Центр изгиба 177
- Стержни тонкостенные** короткие 183
  - с замкнутым профилем — Деформации при свободном кручении 173; — Конструктивные рекомендации 170; — Напряжения при свободном кручении 173; — Напряжения при сложном сопротивлении 177
  - с открытым профилем — Деформации при свободном кручении 170; — Напряжения при свободном кручении 170; — Особенности 169; — Устойчивость 170, 184
- Стойка** — Гибкость 319
  - Критическая сила за пределами упругости 319
  - Нагрузки критические за пределами пропорциональности 319, 320
  - Напряжения критические за пределами упругости 319
- Стойки двуступенчатые консольные** — Коэффициент устойчивости 315
  - переменного сечения — Нагрузки критические 315—317; — Устойчивость 315
  - поперечного сечения с непрерывным изменением — Устойчивость 316
  - постоянного сечения — Коэффициент проведенной длины 313, 314; — Коэффициент устойчивости 312—314; — Нагрузки критические 311; — Устойчивость 310—312
  - постоянного сечения консольные — Коэффициент устойчивости 311
  - постоянного сечения однопролетные — Расчет на устойчивость 310
  - сжатые — Пример расчета на устойчивость 320, 321
  - составные решетчатые — Нагрузки критические 318; — Устойчивость 318
  - ступенчатые — Устойчивость 315, 316
  - ступенчатые постоянной толщины — Пример расчета на устойчивость 315
  - чугунные — Критическая сила 320
- Стрела провеса гибкой нити** 25
  - прогиба 96
- Стрингер** 183
- Стробоскоп** 379
- Струны натянутые** — Жесткость 354
- Сферы под действием внутреннего давления** — Определение напряжений и перемещений 204

## Т

- Тавр** — Центр изгиба 103
- Тарировка аппаратуры для измерения деформаций** 498
  - покрытий для исследования деформаций 516
- Твердость волокнита** 431
  - гетинакса 431
  - дельта-древесины 431
  - текстолита 431
  - чугуна 430
- Текстолит** — Модуль продольной упругости 22
  - Модуль сдвига 22
  - Прочность механическая — Характеристика 431
  - Твердость 431
- Тела массивные** — Соударение 390
  - неправильной формы — Момент инерции 358
  - твердые — Прикрепление к земле или к другому телу 148
  - упругие — Соударение — Расчет упрощенный 401; — Удар о неподвижную преграду — Расчет упрощенный 401
- Тензодатчики проволочные** 493
  - Расположение — Схема 508
- Тензоизмерительная аппаратура** — Классификация 489
- Тензометрирование** 489
  - Применение 499
- Тензометры** — Тарировка 498
  - Характеристики 489
  - Чувствительность и погрешности 490
- Тензометры Аистова** 491
  - для измерения остаточных деформаций 491
  - зеркальные 491
  - индуктивные 492
  - малобазные Лоренца 490
  - реостатные 493
  - рычажные универсальные 490
  - с графитовым столбиком 493
  - царапающие 492
- Тензор шаровой** 8
- Тензочувствительность** — Коэффициент 494
  - проволочных датчиков — Учет 505
- Теорема взаимности единичных упругих перемещений** 157
- Терских уравнение** 361
- Течение** — Гипотеза 292
- Тимошенко формула для расчета коэффициента концентрации** 459
- Тонкостенные стержни** — см. *Стержни тонкостенные*
- Торсиограммы** 378, 381

- Торсионы к редукторам — Крутящий момент допустимый — Пример расчета 446
- Торы под действием внутреннего давления — Определение напряжений и перемещений 204
- Траектории главных напряжений 19
- напряжений в плоских моделях 525, 526
- Трапеции — Момент инерции 37; — Статический момент 276
- равнобочные — Напряжения и угол закручивания при кручении 31
- Треугольники — Статический момент 276
- прямоугольные — Центр изгиба 102
- равнобедренные — Напряжения касательные при изгибе 88; — Центр изгиба 102
- Треффца формула 407
- Трубки Бурдона 214
- Трубки толстостенные — Расчет на жесткость 215
- Трубки тонкостенные — Деформации 299
- Напряжения 299
- Перемещения 299
- Ползучесть 299
- Расчет на жесткость 214
- Трубопроводы — Деформация пластическая — Возникновение 220
- Трубы — Автоскрепление 288; — Напряжения при автоскреплении — Определение 288
- круглые — Сечения — Геометрические характеристики 47
- толстостенные — Напряжения 299; — Несущая способность под давлением 280; — Ползучесть установившаяся 299
- толстостенные под внутренним и внешним давлениями 279
- Тумаркина метод 241
- У**
- Углы входящие — Коэффициент концентрации 458, 461
- Угол закручивания между сечениями — Измерение 514
- вала 28
- тонкостенных стержней 171, 173
- Угол сдвига 26
- Уголки с неравными стенками — Геометрические характеристики 43
- чугунные — Изгиб — Коэффициент концентрации 445
- Угольники — Коэффициент концентрации — Графики 412; — Центр изгиба 102
- с полкой постоянной толщины — Напряжения и угол закручивания при кручении 32
- Удар — Расчет — Упрощенные методы 399
- детали движущейся о деталь закрепленную — Пример расчета 402
- жесткого груза по упругой системе — Расчет 391
- по буферу — Расчет 392
- по пружинам — Расчет — Волновой метод 398
- по системе с двумя ступенями свободы — Расчет 393
- продольный по стержням — Расчет 394, 398
- упругого тела — Упрощенный расчет 401
- Ударные нагрузки — Расчет 390—402
- Удельный вес неметаллических материалов 431
- Узлы колебаний 340
- Упрочнение — Влияние глубины слоя при цементации и цианировании 470; — Гипотеза 289
- поверхность — Схемы 468
- Упругая линия — Уравнение дифференциальное 96
- Упругие параметры 128
- Диаграммы 130—134
- Переход от периодических упругих кривых 129
- Применение для решения задач 135
- Упругость 13
- Уравнение вековое 341; — Определение резонансных частот 341
- Терских 361
- траекторий 20
- эпюры бимоментов тонкостенных стержней 181
- Уравнения для перемещений в балках дифференциальные 99, 100
- канонические для расчета стержневых систем статически неопределимых 157
- скелетных осей 346
- трех моментов для балок 66, 68
- упругой линии дифференциальные 96
- частот для защемленных консолей 368
- Усилия — Определение 513
- Определение тензодатчиками проводными 508
- Определение экспериментальное 488—534

- Усилия** в сечениях плоских рам и ферм — Определение 527
- и перемещения в консольных балках 56—66
- и перемещения в однопролетных балках 56—66
- предельные — Определение — Формулы 441
- предельные по несущей способности 451
- предельные по разрушающим нагрузкам для сечений 442
- продольные — Определение 514; — Пример определения 515
- пружин при ударе — Расчет — Волновой метод 398
- Условия пластичности** 19
- Усталость** деталей машин — Пример расчета 475
- материалов — Кривые 430
- Установки для исследования напряжений по методу рассеянного света** 524
- Устойчивость** балок подкрановых — Пример расчета 187
- балок при поперечном изгибе 186
- колец круговых 324
- конструкций — Расчет 320
- оболочек тонкостенных — Расчет 207
- пластинок — Расчет 198—201
- плоской формы изгиба балок 325
- пружин сжатия цилиндрических витых 330
- решетчатых стоек составных 318
- сверл спиральных — Пример расчета 323
- спарников паровозных — Пример расчета 322
- стержневых элементов конструкций — Расчет 308—332
- Устойчивость** стержней прямолинейных естественно завитых 323
- сжато-скрученных 324
- сжатых естественно завитых 323
- сжатых прямолинейных 308
- сжатых тонкостенных с открытым профилем 184
- тонкостенных с открытым профилем 170
- Устойчивость** стоек — Расчет — Критические силы 309
- переменного сечения 315
- постоянного сечения 310—312
- при продольном изгибе — Нагрузка сжимающая допускаемая 309
- с непрерывным изменением поперечного сечения 316

- сжатых — Пример расчета 320, 321
- ступенчатых 315, 316
- Устранение колебаний** 351

## Ф

- Фанера** — Модуль поперечной упругости 22
- Модуль сдвига 22
- Удельное рассеяние энергии при колебаниях 351
- Ферменные конструкции** — Перемещения — Определение 155
- Пример расчета 149
- Фермы** — Перемещение узлов — Диаграммы 156; — Типы 140
- балочные — Линии влияния 145
- плоские 140; — Образования 140; — Расчет 143
- Фермы** плоские с неподвижной нагрузкой — Расчет усилий 141
- Реакции — Графическое определение 142
- Усилия в стержнях — Определение 143
- — Определение графическое 144
- Расчет усилий 145
- Установка нагрузки в опасное положение 146
- Фермы** плоские спаренные — Расчет 148
- преобразованные 141
- пространственные 146; — Расчет 146, 147; — Усилия — Расчет 146
- с тремя опорными стержнями — Пример расчета 143
- с цилиндрически неподвижной опорой слева и цилиндрической подвижной опорой справа — Пример расчета 143
- статически определимые — Расчет 140
- стропильные — Пример расчета 142
- Фибра** — Модуль продольной упругости 22
- Модуль сдвига 22
- Прочность механическая — Характеристики 431
- Фигуры** Лиссажу 379
- песочные 383
- Фланцевые соединения** — Податливость 356
- Фланцы** — Коэффициент концентрации — Пример определения 463, 465
- Формула** Власова 174
- Гриффитса 406
- Давиденкова 481
- Дункерля 367

- Максвелла-Мора 151
- Тимошенко 459
- Треффца 407
- Цехновича 459
- Эйлера 208
- Формулы Ляме 219**
- для напряжений и угла закручивания при кручении 29
- для напряжений по наклонным площадкам 6
- для напряжений при кручении 29
- для определения предельных нагрузок на пластинки и оболочки 284—286
- для потенциальной энергии единицы объема при упругой деформации 16
- для расчета колебаний крутильных 335
- для угла закручивания 29

## X

**Химико-термическая обработка** — Влияние на предел выносливости 469

## Ц

- Целлулоид** — Коэффициент Пуассона 22
- Модуль продольной упругости 22
- Модуль сдвига 22
- Прочность механическая — Характеристики 431
- Цементация** — Влияние глубины слоя на упрочнение 470
- Влияние на предел выносливости 469
- Центр изгиба 27, 177**
- изгиба для тонкостенных профилей 102
- изгиба сечений 101—103
- жесткости 183
- сдвига 183
- тяжести сечений — Положение 40
- Цепочка сил 148**
- Цехновича формула для расчета коэффициента концентрации 459**
- Цианирование** — Влияние глубины слоя на упрочнение 470
- Влияние на предел выносливости 469
- Циклы переменных напряжений** — Коэффициент асимметрии 448
- Цилиндры** — Контакт с деталями различной формы — Формулы 420
- автокрепленные 222
- под действием внутреннего давления — Напряжения и перемещения — Определение 204

— под действием нагрузки — Напряжения и перемещения — Определение 204, 205

— скрепленные 222

**Цилиндры толстостенные** — Напряжения — Определение графическое 221; — Напряжения температурные 224; — Несущая способность — Повышение 223, 224

— под действием внутреннего и наружного давления — Расчет 219

— под действием переменной по длине осесимметричной нагрузки 225

**Цилиндры тонкостенные с отверстием** — Коэффициент концентрации — Формулы расчетные 407

**Цинк** — Коэффициент Пуассона 22

— Модуль продольной упругости 22

— Модуль сдвига 22

## Ч

**Частота антирезонансная 362**

— высшая поперечных колебаний — Определение 372

— изгибных колебаний колец 378

— колебаний 333; — Измерение 378

— колебаний закрученной консоли 354

— колебаний систем со многими степенями свободы 340

— поперечных колебаний стержней — Определение 367

— резонансная 362; — Определение по вековому уравнию 341

— резонансная систем с сосредоточенными массами 341

**Частота собственных колебаний** — Определение 343, 344, 360, 383

— вращающихся дисков 377

— консольных стержней переменного сечения — Пример определения 369

— мембран 375

— оболочек 376

— пластинок 375

— призматических стержней 365

— простых систем 361

— разветвленных систем — Расчет по методу остатка 364

— систем вал — винт 363

— систем с сосредоточенными массами 341

**Частотная отстройка 351, 352**

**Частотные диаграммы** — см. *Диаграммы возбуждения колебаний*

**Частотомеры 378**

**Чувствительность тензометров 490**

**Чугун** — Гибкость 320

- Запас устойчивости 309
- Коэффициент понижения допускаемого напряжения на сжатие 320
- Коэффициент Пуассона 22
- Модуль продольной упругости 22
- Модуль сдвига 22
- Предел выносливости — Влияние за-  
калки токами высокой частоты 469
- — Влияние коррозии 466
- Прочность механическая — Характе-  
ристика 430

## Ш

- Шарниры пластические** 276
- Шары толстостенные под давлением —**  
Напряжения — Определение 227
- Напряжения температурные 228
- Шатуны — Напряжения** 231
- тихоходных паровых машин —  
Запас устойчивости — Пример  
определения 318
- Швеллеры — Значения интегралов  $U_y$**   
186; — Центр изгиба 103, 176, 178
- прокатные — Геометрические ха-  
рактеристики 172
- Шестерни — Коэффициент концентрации**  
459
- Шестиугольники правильные — Геоме-  
трические характеристики** 41
- Напряжения и угол закручивания  
при кручении 31
- Шиманского метод расчета коэффици-  
ентов концентрации** 418
- Шлейфы осциллографов** 497
- Шлицевые соединения — Коэффициент**  
концентрации 458
- Шпильки фланцевого соединения паро-  
провода — Напряжения затяжки —**  
Пример определения 293
- Штаермана метод определения изгибных**  
напряжений для оболочек вращения  
207

## Щ

- Щека колена вала — Момент инерции —**  
Определение 358

## Э

- Эйлера формула** 208
- Электроприборы измерительные дина-  
мических перемещений** 380
- Элементы конструкций — Расчет на ко-  
лебания** 353
- движущиеся — Расчет 229—270
- Эллипсоид напряжений** 9
- Эллипсы — Напряжения касательные**  
при изгибе 88
- — инерции 39
- — полые — Геометрические характе-  
ристики 43
- — сплошные — Геометрические ха-  
рактеристики 42
- Энергетический метод определения ча-  
стот собственных колебаний** 334
- Энергия деформации изгиба** 95
- потенциальная вала 28
- потенциальная кривых брусьев  
115
- упругих деформаций 13
- Эпюры — Сложение** 54
- бимоментов тонкостенных стерж-  
ней при сложном сопротивлении  
181
- изгибающих моментов в балках  
51
- моментов, продольных и попереч-  
ных сил — Построение 150
- наибольших изгибающих момен-  
тов в простой балке 78, 79
- напряжений 20
- напряжений при автоскреплении  
труб 288
- напряжений растянутых брусьев  
283
- напряжений растянутых пластинок  
283
- остаточных напряжений 287
- поперечных сил в балках 51
- Эффективный коэффициент concentra-  
ции** 403

## Я

- Яновского метод** 244