К. Зигель
Ю. Мозер

ЛЕКЦИИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

R&C Dynamics

C. L. Siegel, J. K. Moser

Lectures on Celestial Mechanics

Translation by C. I. Kalme

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1971

К. Зигель, Ю. Мозер

Лекции по небесной механике

Перевод М. С. Яров-Ярового,
Л. Д. Пустыльникова, А. Г. Арзамасцева

R&C Dynamics

РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 517.9

Зигель К., Мозер Ю.

Лекции по небесной механике. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 384 стр.

Предлагаемая книга завершает собой целую эпоху в развитии математических методов аналитической небесной механики.

В ней описаны некоторые вопросы поведения решений дифференциальных уравнений в целом, изложено решение задачи трех тел методом рядов Зундмана, даны методы нахождения периодических решений дифференциальных уравнений, а также рассмотрены некоторые общие вопросы устойчивости равновесных решений. Особое внимание уделено исследованию гамильтоновых систем и приложению всех полученных результатов к задачам небесной механики.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов.

ISBN 5-93972-069-2

http://rcd.ru

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый перевод этой книги ранее уже частично появлялся на русском языке. Дело в том, что книга К. Зигеля и Ю. Мозера состоит по существу из трех независимых частей:

1. Книги К. Зигеля «Лекции по небесной механике», вышедшей в переводе М. С. Яров-Ярового в Издательстве иностранной литературы в 1959 году и давно ставшей библиографической редкостью.

2. Доказательства Мозера теоремы об инвариантных кривых, переведенного Л. Д. Пустыльниковым и вышедшего как дополнение к мозеровским «Лекциям по гамильтоновым системам», выпущенных издательством «Мир» в 1973 году.

3. Результатов Зигеля о тройных столкновениях, перевод которых публикуется нами впервые (он выполнен А. Г. Арзамасцевым).

Несомненно, что издание этих лекций в полном объеме частично восполнит пробел по небесной механике в российской литературе, за последнее десятилетие здесь практически ничего не появлялось.

А. В. Борисов

Посвящается памяти
Франца Реллиха

ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Данная книга в основном представляет собой перевод с немецкого книги К. Л. Зигеля «Лекции по небесной механике»[1]. Потребность в новом издании и переводе на английский язык привели к появлению этого труда, который, однако, представляет собой нечто большее, чем просто перевод. Для того чтобы учесть последние работы в этой области науки в книгу были добавлены несколько параграфов, особенно в третью главу, посвященную теории устойчивости. Тем не менее, мы не пытались представить полный обзор этой области, и, в основном, следовали структуре оригинальной книги Зигеля. В книге особо выделены результаты и аналитические методы, основанные на идеях А. Пуанкаре, Дж. Д. Биркгофа, А. Ляпунова, и, что касается первой главы, на работе К. Ф. Зундмана и К. Л. Зигеля. В последние годы вновь возник интерес к разделам механики, связанным с теорией меры, что привело к ряду новых результатов, которые не будут здесь обсуждаются. В связи с этой тематикой мы особо рекомендуем интереснейшую книгу В. И. Арнольда и А. Авеца «Эргодические проблемы классической механики»[2], которая посвящена взаимосвязи механики и эргодической теории.

Отметим моменты в которых эта книга отличается от немецкого первоисточника. В первую главу К. Л. Зигель добавил два параграфа, посвященных тройным столкновениям в задаче трех тел. Глава II в сущности не изменилась, за исключением добавленного доказательства сходимости преобразования к нормальной форме Биркгофа отображения, сохраняющего площадь, вблизи гиперболической неподвижной точки. Основные изменения были внесены в третью главу. Двадцать шестой параграф содержит новое и более простое доказательство теоремы Зигеля о конформных отображениях вблизи неподвижной точки. §§ 32–36 содержат вывод теорем устойчивости для систем с двумя

[1] Русский перевод этой книги был выполнен М. С. Яров-Яровым и вышел в издательстве ИЛ в 1959 году.

[2] Русский перевод этой книги появился в издательстве РХД в 1999 году.

степенями свободы, а также теорему существования для квазипериодических решений, вытекающую из работ Колмогорова, Арнольда и моей. Ответственность за правильность этих добавлений также лежит на мне.

Тщательно подготовленный перевод выполнен К. Калме из университета Южной Калифорнии, который решил сложнейшую задачу, заключающуюся в сохранении основного содержания оригинальной книги, сохранении правильности доказательств и в подготовке понятного английского текста. Мы хотим поблагодарить Р. Чёрчиля и М. Брауна за помощь при проверке перевода. Х. Рюссманн предложил упрощение доказательства в § 33.

Сохранение духа исходной книги оказалось возможным благодаря тесному сотрудничеству Зигеля при работе над английским текстом и при проверке доказательств.

Принстон, апрель 1971 *Юрген К. Мозер*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

По изложенным ниже вопросам небесной механики я читал лекции во Франкфурте-на-Майне и в Балтиморе, а затем повторил их в Гёттингене и Принстоне, причем наиболее подробно в зимнем семестре 1951/52 гг. в Гёттингене. Д-р Мозер, находящийся теперь в Нью-Йорке, подготовил тогда тщательные записи лекций, которые и положены в основу этого издания.

Я не астроном по специальности, поэтому я не пытаюсь улучшить практические методы определения орбит, которые, как известно, хорошо описаны в учебниках. Наоборот, в данной книге речь идет преимущественно о развитии некоторых установленных за последние 70 лет идей и результатов, касающихся поведения решений дифференциальных уравнений в целом, причем, разумеется, важное место занимают приложения общей теории к системам Гамильтона, и особенно к уравнениям движения в задаче трех тел. Но и здесь я не стремлюсь к полноте изложения и выбираю материал, исходя из своих личных интересов, а также с расчетом на внимание слушателей в рамках каждой лекции.

В первой главе после вводного рассмотрения теории преобразования дифференциальных уравнений излагаются важные результаты К. Ф. Зундмана, относящиеся к задаче трех тел. Хотя прошло уже 50 лет после получения этих теорем, они известны только узкому кругу специалистов и для дальнейшего их развития ничего не сделано. Вслед за работами Пуанкаре по теории дифференциальных уравнений работы Зундмана, несмотря на их специальный характер, принадлежат к значительнейшим новым достижениям в этой области.

Более ранняя работа Пуанкаре (Poincaré, «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste») также не оказала столь плодотворного влияния на математический мир, как этого можно было бы ожидать благодаря богатству заключенных в ней идей. Из последующего поколения наиболее глубоко разобрался в этих методах, конечно, Биркгоф, который, кроме упрощения изложения и кроме проведения более тщательных доказательств, добавил также новые интересные теоремы. Его книга «Динамические системы» в свое время вдохновила меня на дальнейшее изучение затронутых в ней вопросов; эта книга находится в тесной связи с той частью задачи, которой посвящены остальные две главы.

Во второй главе рассматриваются различные методы нахождения замкнутых решений систем дифференциальных уравнений и особенно обстоятельно излагаются также метод неподвижной точки и непосредственно связанные с ним результаты Биркгофа. Здесь чаще всего предполагается, что речь идет об аналитических дифференциальных уравнениях, и результаты получаются соответствующим преобразованием степенных рядов; алгебраические выводы отделяются по возможности от аналитических. Данное исследование проводится только для таких дифференциальных уравнений, которые в своих правых частях не содержат явно независимого переменного t, хотя весьма важен также и тот случай, когда правые части зависят от t периодически; объясняется это тем, что методы в этом более общем случае принципиально не отличаются от методов в рассматриваемом нами случае, и наш случай показывает все основные трудности.

Третья глава посвящена задаче устойчивости и содержит наряду с классическими результатами Ляпунова прежде всего рассмотрение вопросов сходимости, связанных с нормальной формой аналитических дифференциальных уравнений вблизи положения равновесия и с разложением общего решения в тригонометрические ряды. В этой связи было бы весьма желательным привести также полное доказательство часто упоминаемой теоремы Пуанкаре о расходимости рядов в небесной механике, но мне не удалось этого сделать. Излагаемая в конце теорема о возвращении не полностью укладывается в рамки книги; она, однако, должна принести читателю некоторое удовлетворение после ряда предшествующих разочарований.

Подробные литературные указания читатель может найти в книге Уинтнера (W i n t n e r, «Analytical foundations of celestial mechanics»). Приведенный в конце указатель литературы соответствует характеру книги и является поэтому весьма неполным; его цель — указать читателю некоторые дополнения к тексту. В каждом параграфе дана сквозная нумерация формул. В тексте под (a; b) подразумевается формула (b) из § a; [c] означает ссылку на соответствующую работу в литературном указателе.

Гёттинген, октябрь 1955 г. *Карл Л. Зигель*

Глава I
ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Ковариантность производных Лагранжа

По Лейбницу наш мир является наилучшим из всех возможных миров, и поэтому законы природы можно описать экстремальными принципами. Поскольку дифференциальные уравнения механики происходят из вариационных задач, они обладают инвариантными свойствами относительно некоторых групп преобразований координат. Так как это обстоятельство имеет особенное значение в небесной механике, то во вводных параграфах мы разовьем теорию преобразований уравнений Эйлера–Лагранжа и Гамильтона в объеме, желательном для наших целей.

Пусть n — натуральное число и $f = f(x, \dot{x}, t)$ есть действительная функция $2n + 1$ независимых действительных переменных x_k, $\dot{x}_k$, t; индекс k принимает значения $1, \ldots, n$, а x, $\dot{x}$ обозначают векторы с составляющими x_k, $\dot{x}_k$. Ограничим значения t замкнутым интервалом $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и значения остальных переменных x, $\dot{x}$ — открытым множеством G в пространстве $2n$ измерений. Пусть для соответствующих значений x, $\dot{x}$, t функция f определена и обладает непрерывными частными производными первого и второго порядков. Рассмотрим теперь следующую задачу вариационного исчисления: требуется найти такие непрерывные с непрерывными производными первого и второго порядков функции $x_k = x_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ переменной t в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ с заданными краевыми условиями $x_k(t_1) = a_k$, $x_k(t_2) = b_k$, чтобы интеграл

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t)\, dt$$

имел экстремум; при этом $\dot{x}_k = dx_k(t)/dt$, а x, $\dot{x}$ должны лежать в G.

Предположим, что эта задача имеет решение. Тогда это решение принадлежит множеству допустимых функций сравнения $x_k = x_k(\alpha;\, t)$

$(k = 1, \ldots, n)$, которые вместе со своими производными по t непрерывно дифференцируемы по параметру α в интервале $-1 < \alpha < 1$; пусть $x_k(0;\, t) = x_k(t)$ есть предполагаемое решение экстремальной задачи. Образуем теперь, используя функции сравнения, интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(\alpha;\, t),\, \dot{x}(\alpha;\, t),\, t]\, dt \quad (-1 < \alpha < 1).$$

При этом $I(\alpha)$ в случае $\alpha = 0$ имеет экстремум I, и поэтому производная $dI(\alpha)/d\alpha$ обращается в нуль при $\alpha = 0$.

Для удобства обозначим через f_{x_k}, $f_{\dot{x}_k}$ частные производные по x_k, $\dot{x}_k$ от f как функции $2n + 1$ независимых переменных x_l, $\dot{x}_l$, t; дифференцирование по параметру α будем отмечать штрихом. Тогда

$$I'(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} [f_{x_k} x'_k(\alpha;\, t) + f_{\dot{x}_k} \dot{x}'_k(\alpha;\, t)]\, dt. \tag{1}$$

С другой стороны, выражение

$$s = s(\alpha;\, t) = \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k} x'_k(\alpha;\, t)$$

при $t = t_1$ и $t = t_2$ равно нулю в силу условий $x_k(\alpha;\, t_1) = a_k$, $x_k(\alpha;\, t_2) = b_k$, поэтому

$$0 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{df_{\dot{x}_k}}{dt} x'_k(\alpha;\, t) + f_{\dot{x}_k} \dot{x}'_k(\alpha;\, t) \Big]\, dt. \tag{2}$$

Если ввести производные Лагранжа

$$L_{x_k} f = f_{x_k} - \frac{df_{\dot{x}_k}}{dt}$$

и вычесть (2) из (1), то получится формула

$$I'(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} x'_k L_{x_k} f\, dt,$$

в которую уже подставлены $x_k = x_k(\alpha;\, t)$, $\dot{x}_k = dx_k/dt$. В силу произвольности выбора $x_k'(0;\, t)$ и в силу непрерывности $L_{x_k}f$ из условия $I'(0) = 0$ следует, что функции $x_k = x_k(0;\, t) = x_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$, дающие решение вариационной задачи, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Эйлера–Лагранжа, а именно

$$L_{x_k}f = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Исследуем теперь свойства производных Лагранжа при преобразованиях координат. Введем вместо $x_1, \ldots, x_n$ новые координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ подстановкой

$$x_k = x_k(\xi,\, t) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

При этом $x_k(\xi,\, t)$ являются функциями $n+1$ независимых переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n, t$ с непрерывными первыми и вторыми частными производными. Будем считать, что в рассматриваемой области не равен нулю функциональный определитель n-го порядка

$$\left|\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l}\right| \neq 0,$$

так что преобразование ξ в x будет однозначно обратимым. Сама переменная t не преобразуется, и функции $x_k(\xi,\, t)$ не имеют никакого отношения к ранее введенным функциям $x_k(\alpha;\, t)$. Если, в частности, $x_k = x_k(\alpha;\, t)$, то $\xi_k = \xi_k(\alpha;\, t)$ также становятся функциями от α, t, и из (3) следует, что

$$\dot{x}_k = x_{kt} + \sum_{l=1}^{n} x_{k\xi_l}\dot{\xi}_l, \tag{4}$$

где через x_{kt}, $x_{k\xi_l}$ обозначены частные производные от $x_k(\xi,\, t)$. Подстановки (3), (4) делают $f(x,\, \dot{x},\, t)$ функцией ξ, $\dot{\xi}$, t, и тогда

$$I'(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k' L_{\xi_k} f\, dt,$$

откуда, используя непрерывность, найдем, что выражение

$$A = \sum_{k=1}^{n} x_k' L_{x_k} f$$

инвариантно при преобразовании (3), (4).

Алгебраическим путем эта инвариантность устанавливается следующим образом. Из (3) и (4) следует

$$x_{k\dot{\xi}_l} = 0, \quad \dot{x}_{k\dot{\xi}_l} = x_{k\xi_l}, \quad x'_k = \sum_{l=1}^{n} x_{k\xi_l}\xi'_l,$$

таким образом,

$$f_{\dot{\xi}_l} = \sum_{k=1}^{n}(f_{x_k}x_{x\dot{\xi}_l} + f_{\dot{x}_k}\dot{x}_{k\dot{\xi}_l}) = \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k}x_{k\xi_l},$$

$$\sum_{l=1}^{n} f_{\dot{\xi}_l}\xi'_l = \sum_{k,\,l=1}^{n} f_{\dot{x}_k}x_{k\xi_l}\xi'_l = \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k}x'_k = s.$$

Отсюда следует, что s является инвариантом, поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{df_{\dot{x}_k}}{dt}x'_k + f_{\dot{x}_k}\dot{x}'_k\Big)$$

также инвариантно.

Инвариантным является также выражение

$$f' = \sum_{k=1}^{n}(f_{x_k}x'_k + f_{\dot{x}_k}\dot{x}'_k),$$

а значит, и

$$f' - \frac{ds}{dt} = A.$$

При обоих доказательствах не использовалось предположение, что $x_k = x_k(t)$ является решением экстремальной задачи.

Вследствие произвола в выборе x'_k имеем

$$\sum_{k=1}^{n} x_{k\xi_l}L_{x_k}f = L_{\xi_l}f \quad (l = 1,\, \ldots,\, n);$$

это равенство, в частности, выполняется при $\alpha = 0$, т. е. при $x_k = x_k(t)$. Мы получили свойство производных Лагранжа при преобразовании координат; из него, в частности, следует инвариантность дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа. Если обозначить через

$$x_\xi = \|x_{k\xi_l}\| = \mathfrak{M}$$

функциональную матрицу подстановки (3) и если $L_x = L_x f$ есть образованная из $L_{x_k}f$ строка, то

$$L_x\mathfrak{M} = L_\xi.$$

Чтобы сформулировать свойство инвариантности A без введения параметра α, используем новое обозначение: если φ является функцией нескольких независимых переменных, среди которых встречается и t, то будем понимать под $\delta\varphi$ дифференциал φ при постоянном t, следовательно, при условии $dt = 0$. Тогда для столбца x, образованного из x_k, получается в соответствии с формулой (3) формула

$$\delta x = \mathfrak{M}\delta\xi,$$

так что L_{x_k} преобразуется контраградиентно к δx_k, и билинейное выражение $L_x \delta x$ является инвариантным.

Исследуем теперь вопрос, в какой степени определяется функция f своими n производными Лагранжа $L_{x_k} f$. В явном виде

$$L_{x_k} f = f_{x_k} - \sum_{l=1}^{n} (f_{\dot{x}_k x_l} \dot{x}_l + f_{\dot{x}_k \dot{x}_l} \ddot{x}_l) - f_{\dot{x}_k t}, \tag{5}$$

где правую часть нужно рассматривать как функцию $3n+1$ независимых переменных $x_l, \dot{x}_l, \ddot{x}_l, t$. Если для двух функций $g(x,\, \dot{x},\, t)$, $h(x,\, \dot{x},\, t)$ попарно совпадают, как функции тех же $3n+1$ переменных, n производных Лагранжа $L_{x_k} g$, $L_{x_k} h$, то для разности этих функций $f = h - g$ уравнения $L_{x_k} f = 0$ обращаются в тождества относительно $x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\, t$. В частности, так как в (5) равен нулю коэффициент при $\ddot{x}_l$, т. е. $f_{\dot{x}_k \dot{x}_l} = 0$, то f имеет следующий вид:

$$f(x,\, \dot{x},\, t) = f_0(x,\, t) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x,\, t) \dot{x}_k.$$

Если внести это выражение в (5), то из сравнения коэффициентов следует, что

$$f_{0x_k} = f_{kt}, \quad f_{lx_k} = f_{kx_l} \quad (k = 1,\, \ldots,\, n;\; l = 1,\, \ldots,\, n).$$

Но это есть необходимые и достаточные условия для существования функции $v(x,\, t)$, полный дифференциал которой равен

$$dv = f_0\, dt + \sum_{k=1}^{n} f_k\, dx_k.$$

Отсюда следует

$$f = \frac{dv}{dt}$$

и

$$h(x,\, \dot{x},\, t) = g(x,\, \dot{x},\, t) + \frac{dv(x,\, t)}{dt},$$

где при полном дифференцировании по t переменные x_k рассматриваются как функции от t. Таким образом, если даны производные Лагранжа в виде функций от x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, t, то функция $f(x,\, \dot{x},\, t)$ определяется с точностью до произвольной аддитивной функции, являющейся полной производной по t от функции $v(x,\, t)$, не содержащей $\dot{x}$. Впрочем, добавление такой функции изменяет интеграл I только на величину, не зависящую вследствие краевых условий от выбора $x_k(t)$.

§ 2. Канонические преобразования

Производные Лагранжа содержат, согласно (1; 5), вообще говоря, вторые производные функций $x_k(t)$, и соответствующая система n дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа есть система уравнений второго порядка. Напишем ее в виде системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка. Положим для этого

$$y_k = f_{\dot{x}_k}(x,\, \dot{x},\, t) \quad (k = 1,\, \dots,\, n), \tag{1}$$

откуда $\dot{x}_k$ можно выразить как функции от $x_1,\, \dots,\, x_n$, t и новых независимых переменных $y_1,\, \dots,\, y_n$. Это возможно, если предположить, что отличен от нуля определитель n-го порядка:

$$\left| f_{\dot{x}_k \dot{x}_l} \right| \neq 0. \tag{2}$$

Теперь

$$L_{x_k} f = f_{x_k}(x,\, \dot{x},\, t) - \dot{y}_k, \tag{3}$$

где точка над y_k означает полную производную по t, и дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа обращаются в

$$\dot{y}_k = f_{x_k}(x,\, \dot{x},\, t) \quad (k = 1,\, \dots,\, n), \tag{4}$$

что совместно с (1) дает систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2n$ неизвестных функций $x_k(t)$, $y_k(t)$. Чтобы устранить асимметрию этой системы, введем функцию

$$E = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - f(x,\, \dot{x},\, t), \tag{5}$$

в которой $3n+1$ переменных x_k, y_k, $\dot{x}_k$, t рассматриваются как независимые. Тогда

$$dE = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k\, dy_k + y_k\, d\dot{x}_k - f_{x_k}\, dx_k - f_{\dot{x}_k}\, d\dot{x}_k) - f_t\, dt. \tag{6}$$

Так как вследствие (1) $\dot{x}$ является функцией x, y и t, то $E = E(x, y, t)$ также будет функцией только от x, y, t. Но в силу равенства (1) коэффициенты при $d\dot{x}_k$ в выражении (6) взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$dE = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k \, dy_k - f_{x_k} \, dx_k) - f_t \, dt$$

как полный дифференциал от $E(x, y, t)$. Отсюда для частных производных E как функции от x, y, t получаются значения

$$E_{x_k} = -f_{x_k}, \quad E_{y_k} = \dot{x}_k \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

и (3) переходит в

$$L_{x_k} f = -E_{x_k} - \dot{y}_k. \tag{8}$$

Итак, из (1), (5) и дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа следует, что

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

а это и есть дифференциальные уравнения Гамильтона.

Из предположения (2) следует, что не равны нулю функциональный определитель $|y_{k\dot{x}_l}|$, в котором y_k являются функциями $\dot{x}_l$, и обратная величина определителя $|\dot{x}_{k y_l}|$, а из формул (7) это следует и для определителя $|E_{y_k\, y_l}|$. Обратно, пусть теперь дана функция $E(x, y, t)$ и пусть определитель

$$|E_{y_k\, y_l}| \neq 0. \tag{9}$$

Аналогично (5) определим

$$f = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - E(x, y, t) \tag{10}$$

и будем опять считать, что $3n+1$ переменных x_k, y_k, $\dot{x}_k$, t независимы. Отсюда получим

$$df = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k \, dy_k + y_k \, d\dot{x}_k - E_{x_k} \, dx_k - E_{y_k} \, dy_k) - E_t \, dt.$$

Определим теперь y как функцию x, $\dot{x}$, t уравнениями

$$\dot{x}_k = E_{y_k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

что, по предположению (9), является допустимым. Теперь f будет функцией только x, $\dot{x}$, t, что даст нам

$$df = \sum_{k=1}^{n} (y_k \, d\dot{x}_k - E_{x_k} \, dx_k) - E_l \, dt.$$

Следовательно,

$$f_{x_k} = -E_{x_k}, \quad f_{\dot{x}_k} = y_k \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

откуда опять получается равенство (8). Наконец, (9) показывает, что функциональный определитель $|\dot{x}_{k y_l}|$ для $\dot{x}_k$ как функций y_l и обратный ему определитель $|y_{k \dot{x}_l}|$ отличны от нуля, поэтому в соответствии с (11) это будет иметь место и для определителя $|f_{\dot{x}_k \dot{x}_l}|$. Наоборот, из (9) и уравнений Гамильтона можно снова получить (1), (2) и уравнения Эйлера–Лагранжа.

Из $2n$ уравнений Гамильтона половина, а именно $\dot{y}_k = -E_{x_k}$, непосредственно получается из уравнений Эйлера–Лагранжа, в то время как другая половина может быть получена только с помощью подстановок (1), (5). Весьма интересен тот факт, что все $2n$ уравнений Гамильтона можно интерпретировать как уравнения Эйлера–Лагранжа. Чтобы показать это, возьмем вместо прежнего переменного x из § 1 переменные x, y и рассмотрим функцию f от $4n+1$ независимых переменных x_k, y_k, $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, t, определяемую равенством (10), причем переменные $\dot{y}_k$ фактически явно в функцию f не входят; согласно определению производных Лагранжа имеем

$$\begin{cases} L_{x_k} f = f_{x_k} - \dfrac{df_{\dot{x}_k}}{dt} = -E_{x_k} - \dot{y}_k, \\[2ex] L_{y_k} f = f_{y_k} - \dfrac{df_{\dot{y}_k}}{dt} = \dot{x}_k - E_{y_k}, \end{cases} \tag{12}$$

откуда, приравнивая правые части нулю, мы действительно получим уравнения Гамильтона.

Это преобразование выгодно тем, что полученные результаты можно применить для преобразования производных Лагранжа. Исследуем теперь подстановки вида

$$x_k = x_k(\xi, \eta, t), \quad y_k = y_k(\xi, \eta, t) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

причем $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ — новые переменные, а t остается неизменным. Для сокращения обозначим $2n$ величин $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ через $z_1, \ldots, z_{2n}$ и соответственно через $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$ обозначим величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$; тогда вместо (13) можно написать короче:

$$z_k = z_k(\zeta, t) \quad (k = 1, \ldots, 2n).$$

Если

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= x_\xi = \|x_{k\xi_l}\|, \qquad & \mathfrak{B} &= x_\eta = \|x_{k\eta_l}\|, \\ \mathfrak{C} &= y_\xi = \|y_{k\xi_l}\|, \qquad & \mathfrak{D} &= y_\eta = \|y_{k\eta_l}\| \end{aligned} \tag{14}$$

— матрицы n-го порядка и

$$\mathfrak{M} = z_\zeta = \|z_{k\zeta_l}\|$$

— матрица порядка $2n$, то

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

причем мы будем предполагать, что $|\mathfrak{M}| \neq 0$. Мы хотим теперь установить, при каких предположениях для подстановки (13) производные Лагранжа принимают в новых переменных опять форму (12), с не определенной еще функцией $\mathbf{E}(\xi, \eta, t)$ вместо $E(x, y, t)$. Итак, равенства

$$L_{\xi_k} f = -\mathbf{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k, \quad L_{\eta_k} f = \dot{\xi}_k - \mathbf{E}_{\eta_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

должны удовлетворяться тождественно относительно $\zeta, \dot{\zeta}, t$, причем функция f задается равенством (10). При этих условиях преобразование (13) будем называть каноническим.

Если положить

$$\varphi(\zeta, \dot{\zeta}, t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}_k \eta_k - \mathbf{E}(\zeta, t), \tag{17}$$

то производные Лагранжа от φ даются непосредственно правыми частями (16). Следовательно, согласно результатам § 1, имеем

$$f = \varphi + \frac{dv(\zeta, t)}{dt}$$

тождественно относительно ζ, $\dot{\zeta}$, t, если f выражена через эти переменные. В соответствии с равенствами (10), (17) это означает, что

$$\frac{dv(\zeta,\,t)}{dt} = \mathbf{E} - E + \sum_{r=1}^{n} \dot{x}_r y_r - \sum_{l=1}^{n} \dot{\xi}_l \eta_l =$$
$$= \mathbf{E} - E + \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_{r\xi_l} y_r - \eta_l\right)\dot{\xi}_l + \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} x_{r\eta_l} y_r\right)\dot{\eta}_l + \sum_{k=1}^{n} x_{kt} y_k, \tag{18}$$

следовательно,

$$v_{\xi_l} = \sum_{r=1}^{n} x_{r\xi_l} y_r - \eta_l, \quad v_{\eta_l} = \sum_{r=1}^{n} x_{r\eta_l} y_r, \quad v_t = \mathbf{E} - E + \sum_{k=1}^{n} x_{kt} y_k.$$

Эти равенства определяют все $2n+1$ частных производных первого порядка функции $v(\zeta,\,t)$. Последнее из этих равенств дает возможность определить функцию $\mathbf{E}$. Остальные вследствие $v_{\zeta_k\zeta_l} = v_{\zeta_l\zeta_k}$ дадут необходимые и достаточные условия интегрируемости:

$$\sum_{r=1}^{n}(x_{r\xi_l\xi_k} y_r + x_{r\xi_l} y_{r\xi_k}) = \sum_{r=1}^{n}(x_{r\xi_k\xi_l} y_r + x_{r\xi_k} y_{r\xi_l}),$$
$$\sum_{r=1}^{n}(x_{r\xi_l\eta_k} y_r + x_{r\xi_l} y_{r\eta_k}) - e_{kl} = \sum_{r=1}^{n}(x_{r\eta_k\xi_l} y_r + x_{r\eta_k} y_{r\xi_l}),$$
$$\sum_{r=1}^{n}(x_{r\eta_l\eta_k} y_r + x_{r\eta_l} y_{r\eta_k}) = \sum_{r=1}^{n}(x_{r\eta_k\eta_l} y_r + x_{r\eta_k} y_{r\eta_l})$$
$$(k = 1,\,\ldots,\,n,\, l = 1,\,\ldots,\,n);$$

здесь $e_{kl} = 1$ при $k = l$ и $e_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Используя матрицы, определенные равенствами (14), эти условия можно записать в форме

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}'\mathfrak{A} - \mathfrak{E} = \mathfrak{B}'\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'\mathfrak{D}, \tag{19}$$

причем $\mathfrak{E}$ есть единичная матрица порядка n. Если положить затем

$$\mathfrak{I} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{Vmatrix},$$

то условия (19) с помощью (15) можно записать в виде одного уравнения:

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M} = \mathfrak{J}. \tag{20}$$

Следовательно, эта формула дает необходимое и достаточное условие того, что преобразование (13) не изменяет гамильтонову форму (12) производных Лагранжа; очевидно, что найденные условия для такого канонического преобразования не зависят от вида функции $E(z,\, t)$. Найти $v(\zeta,\, t)$ по ее $2n$ частным производным v_{ξ_l}, v_{η_l} можно только с точностью до произвольной аддитивной функции от t, поэтому такая аддитивная функция войдет также и в v_t, а значит, и в $\mathbf{E}$; но при образовании производных $\mathbf{E}_{\xi_k}$, $\mathbf{E}_{\eta_k}$ эта функция пропадает, так что правые части (16) определены полностью.

Матрица $\mathfrak{M}$, которая удовлетворяет уравнению (20), называется симплектической. Переходя к определителям, имеем $|\mathfrak{M}|^2|\mathfrak{J}| = |\mathfrak{J}| = 1$, и потому $|\mathfrak{M}|^2 = 1$. Впрочем, можно еще показать, что $|\mathfrak{M}| = 1$, что, однако, не будет в дальнейшем использовано. Во всяком случае, для симплектической матрицы $\mathfrak{M}$ определитель $|\mathfrak{M}| \neq 0$, поэтому существует обратная матрица $\mathfrak{M}^{-1}$. Из (20) тогда следует

$$(\mathfrak{M}^{-1})'\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{-1} = (\mathfrak{M}^{-1})'(\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M})\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{J},$$

поэтому матрица $\mathfrak{M}^{-1}$ также будет симплектической. Соответственно показывается, что если матрицы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ симплектические, то их произведение $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ также является симплектической матрицей. Значит, симплектические матрицы образуют относительно умножения группу, являющуюся симплектической группой. Но, согласно нашему результату, преобразование $z = z(\zeta,\, t)$ будет каноническим тогда и только тогда, если функциональная матрица $z_\zeta = \mathfrak{M}$ будет симплектической тождественно по ζ и t. Следовательно, обратное преобразование будет всегда каноническим, и, вообще говоря, канонические преобразования при соответствующих предположениях об областях определения переменных образуют группу.

В частности, каноническое преобразование переводит систему дифференциальных уравнений Гамильтона опять в систему Гамильтона. Можно поставить более общую задачу о нахождении всех обратимых преобразований, обладающих этим свойством. При этом лучше рассмотреть вместо дифференциальных уравнений соответствующие выражения $\dot{x}_k - E_{y_k}$, $\dot{y}_k + E_{x_k}$, которые можно записать в виде столбца $\dot{z} - \mathfrak{J}E_z$, где под E_z понимается столбец E_{x_k}, E_{y_k}. При подстановке $z = z(\zeta,\, t)$ с функциональной матрицей $z_\zeta = \mathfrak{M}$ получим

$$E_{\zeta_k} = \sum_{l=1}^{2n} E_{z_l} z_{l\zeta_k}, \quad E_\zeta = \mathfrak{M}' E_z, \quad \dot{z} = \mathfrak{M}\dot{\zeta} + z_t. \tag{21}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}^{-1}(\dot{z} - \mathfrak{J}E_z) = \dot{\zeta} + \mathfrak{M}^{-1} z_t - \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}'^{-1} E_\zeta.$$

Чтобы правая часть последнего уравнения имела гамильтонову форму $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\mathbf{E}_\zeta$ при соответствующем выборе $\mathbf{E}(\zeta,\, t)$, эта функция должна удовлетворять условию

$$\mathbf{E}_\zeta = \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}'^{-1} E_\zeta - \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1} z_t.$$

Если положить еще

$$\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}'^{-1} = \mathfrak{P} = (p_{kl}), \quad -\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{Q} = (q_{kl}),$$

то условия интегрируемости примут следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{2n} (p_{kr} E_{\zeta_r} + q_{kr} z_{rt})_{\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n} (p_{lr} E_{\zeta_r} + q_{lr} z_{rt})_{\zeta_k}$$
$$(k = 1,\, \ldots,\, 2n,\ l = 1,\, \ldots,\, 2n).$$

Если эти условия выполняются при любом выборе функции $E(z,\, t)$, то прежде всего

$$\sum_{r=1}^{2n} p_{kr} E_{\zeta_r\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n} p_{lr} E_{\zeta_r\zeta_k}, \quad \sum_{r=1}^{2n} p_{kr\zeta_l} E_{\zeta_r} = \sum_{r=1}^{2n} p_{lr\zeta_k} E_{\zeta_r},$$

следовательно,

$$p_{kl} = 0, \quad p_{kk} = p_{ll} \quad (k \neq l), \quad p_{kr\zeta_l} = p_{lr\zeta_k},$$
$$k = 1,\, \ldots,\, 2n, \quad l = 1,\, \ldots,\, 2n, \quad r = 1,\, \ldots,\, 2n,$$

и потому $\mathfrak{P}$ отличается от единичной матрицы только скалярным множителем, который не зависит от ζ. Должны быть также выполнены и остальные условия

$$\sum_{r=1}^{2n} (q_{kr} z_{rt})_{\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n} (q_{lr} z_{rt})_{\zeta_k}. \tag{22}$$

Если положить для сокращения $\mathfrak{J} z_t = u$, то в силу

$$\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q} = -\mathfrak{M}'\mathfrak{J}^{-1} = (z_{l\zeta_k})\mathfrak{J}$$

уравнение (22) переходит в

$$\sum_{r=1}^{2n}(z_{r\zeta_k\zeta_l}u_r + z_{r\zeta_k}u_{r\zeta_l}) = \sum_{r=1}^{2n}(z_{r\zeta_l\zeta_k}u_r + z_{r\zeta_l}u_{r\zeta_k}), \tag{23}$$

следовательно, в матричной записи

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t = (\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t)', \tag{24}$$

вследствие $\mathfrak{J}' = -\mathfrak{J}$ отсюда получается формула

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t + \mathfrak{M}'_t\mathfrak{J}\mathfrak{M} = 0.$$

Как видно, матрица $\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}$ не зависит от t, и то же самое получится для $\mathfrak{P}$. Поэтому необходимым и достаточным условием для найденных преобразований будет

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M} = \lambda\mathfrak{J} \tag{25}$$

со скалярной постоянной $\lambda \neq 0$. Появление произвольного множителя λ обусловливает обобщение канонических подстановок и симплектических групп; так как для специальной подстановки $x = \xi$, $y = \lambda\eta$ условие (23) выполнено, то получается, что все найденные подстановки составляются из канонической и упомянутой тривиальной. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только канонических подстановок.

§ 3. Уравнение Гамильтона – Якоби

Обратимся теперь к задаче представления всех канонических подстановок в параметрической форме. Рассмотрим прежде всего случай

$$|\mathfrak{B}| = |x_{k\eta_l}| \neq 0. \tag{1}$$

Тогда n уравнений $x_k = x_k(\xi, \eta, t)$ определяют η_l как функции x, ξ, t, и соответствующий функциональный определитель $|\eta_{kx_l}|$ также отличен от нуля. Воспользуемся уравнением (2; 18), которое дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы подстановка была канонической, и выразим $v(\zeta,\, t)$ как функцию $x,\, \xi,\, t$. Если положить

$$v = v(\zeta,\, t) = w(x,\, \xi,\, t),$$

то

$$\frac{dv}{dt} = w_t + \sum_{k=1}^{n} (w_{x_k} \dot{x}_k + w_{\xi_k} \dot{\xi}_k),$$

и (2; 18) дает при сравнении коэффициентов соотношения

$$y_k = w_{x_k}, \quad \eta_k = -w_{\xi_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, n), \quad \mathbf{E} = E + w_t. \tag{2}$$

Из условия $|\eta_{kx_l}| \neq 0$ получим, что

$$|w_{\xi_k x_l}| \neq 0. \tag{3}$$

Если, наоборот, w является функцией $x,\, \xi,\, t$, удовлетворяющей условию (3), то решение второго уравнения (2) дает x как функцию от $\xi,\, \eta,\, t$, и тогда первое из уравнений (2) после подстановки дает y как функцию от $\xi,\, \eta,\, t$. При этом выполнено и условие (1). Впрочем, при выполнении условия (3) можно получить, наоборот, из первого уравнения (2) ξ как функцию $x,\, y,\, t$, тогда второе уравнение даст после подстановки η как функцию $x,\, y,\, t$. Если определить еще $\mathbf{E}$ третьим уравнением (2), то равенство (2; 18) будет выполнено. Итак, полученное преобразование является каноническим и удовлетворяет условию $|\mathfrak{B}| \neq 0$. Система (2) дает все канонические преобразования, для которых $|\mathfrak{B}| \neq 0$, причем $\mathbf{E}$ определяется третьим уравнением.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k;$$

условие (3) здесь выполнено и преобразование $x_k = -\eta_k$, $y_k = \xi_k$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ будет каноническим с функциональной матрицей $\mathfrak{M} = -\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{-1}$. Естественно, существуют канонические преобразования и с $|\mathfrak{B}| = 0$, например тождественное преобразование $z = \zeta$, для которого $\mathfrak{M}$ является единичной матрицей. В этом случае можно в предположении

$$|\mathfrak{A}| = |x_{k\xi_l}| \neq 0$$

провести рассмотрение, аналогичное использованному для случая $|\mathfrak{B}| \neq 0$, однако проще привести этот случай к уже рассмотренному при помощи подстановки $\xi = -\eta^*$, $\eta = \xi^*$. Тогда функциональная матрица от z как функции ζ^* будет равна

$$\mathfrak{M}\mathfrak{J}^{-1} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{B} & -\mathfrak{A} \\ \mathfrak{D} & -\mathfrak{C} \end{Vmatrix},$$

здесь вместо $\mathfrak{B}$ стоит $-\mathfrak{A}$, и формулы (2) будут справедливыми, если в них вместо ξ, η использовать ξ^*, η^*. Отсюда получаются равенства

$$y_k = w_{x_k}, \quad \xi_k = w_{\eta_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \mathbf{E} = E + w_t, \tag{4}$$

причем $w = w(x, \eta, t)$ и

$$|w_{\eta x_l}| \neq 0.$$

Таким образом, мы получили все канонические преобразования с $|\mathfrak{A}| \neq 0$. В частности,

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \eta_k$$

соответствует тождественному преобразованию $z = \zeta$. Мы не будем рассматривать случай, когда оба определителя $|\mathfrak{A}|$ и $|\mathfrak{B}|$ равны 0; заметим только, что каждое каноническое преобразование можно составить из двух таких же с $|\mathfrak{A}| \neq 0$ или $|\mathfrak{B}| \neq 0$.

Наша дальнейшая цель — возможно более упростить с помощью соответствующего канонического преобразования систему Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Наиболее простой вид преобразованная система Гамильтона

$$\dot{\xi}_k = \mathbf{E}_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -\mathbf{E}_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

будет иметь в том случае, если $\mathbf{E}(\xi, \eta, t) = 0$. Допустим, что этого можно достигнуть с помощью некоторого преобразования, для которого $|\mathfrak{A}| \neq 0$; тогда условие (4) выполнено, и для производящей функции $w = w(x, \eta, t)$ получается уравнение в частных производных Гамильтона – Якоби

$$E(x, w_x, t) + w_t = 0, \tag{6}$$

причем, кроме того, $|w_{x_k \eta_l}| \neq 0$. Наоборот, если можно найти решение $w(x, \eta, t)$ уравнения (6), которое еще зависит от n параметров $\eta_1, \ldots, \eta_n$ таким образом, что определитель $|w_{x_k \eta_l}|$ отличен от нуля, то определенное уравнениями (4) каноническое преобразование приводит заданную систему Гамильтона (5) к виду

$$\dot{\xi}_k = 0, \quad \dot{\eta}_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Дифференциальные уравнения (7) тотчас же интегрируются, и ξ_k, η_k становятся константами интегрирования. Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона приводится к решению дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона–Якоби. Однако при этом не следует забывать, что необходимо взять не общее решение уравнения (6), а только решение с n параметрами $\eta_1, \ldots, \eta_n$, которое удовлетворяет условию $|w_{x_k \eta_l}| \neq 0$. Это также является упрощением, так как полное решение дифференциальных уравнений Гамильтона (5) требует прежде всего $2n$ постоянных интегрирования.

Всегда ли существует вообще такое каноническое преобразование, которое заданную систему (5) переводит в нормальную форму (7)? Как будет далее показано, на этот вопрос следует ответить утвердительно.

Рассмотрим сначала вообще систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{z}_k = g_k(z, t) \quad (k = 1, \ldots, m)$$

с m неизвестными функциями $z_k = z_k(t)$. Для заданных начальных значений $t = \tau$, $z = \zeta$ по теореме существования обязательно существует единственное решение $z = z(\zeta, t)$, если выполнены условия Липшица и область изменения переменных в достаточной мере ограничена. Закрепим τ и рассмотрим ζ, t как независимые переменные. В силу дифференциальных уравнений при $z = z(\zeta, t)$ имеем

$$z_{kt} = g_k(z, t), \tag{8}$$

и, следовательно, также

$$z_{kt\zeta_l} = \sum_{r=1}^{m} g_{kz_r} z_{r\zeta_l} \quad (k = 1, \ldots, m, \ l = 1, \ldots, m).$$

Если положить еще

$$z_\zeta = \| z_{k\zeta_l} \| = \mathfrak{M}, \quad g_z = \| g_{kz_l} \| = \mathfrak{G},$$

то отсюда для функциональной матрицы $\mathfrak{M}$ как функции t при постоянном ζ получается однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\mathfrak{M}_t = \mathfrak{G}\mathfrak{M}. \tag{9}$$

Так как соотношение $z(\zeta, \tau) = \zeta$ справедливо тождественно относительно ζ, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$ для $t = \tau$.

В системе Гамильтона $\dot{z} = \mathfrak{J}E_z$ имеем $m = 2n$, и

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{J}E_{zz} = \mathfrak{J}(E_{z_k z_l}),$$

следовательно, матрица

$$\mathfrak{J}\mathfrak{G} = -E_{zz}$$

симметрична. Тогда из (9) следует симметрия матрицы

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{G}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t$$

и соотношение

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t = (\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t)' = \mathfrak{M}'_t\mathfrak{J}'\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}'_t\mathfrak{J}\mathfrak{M}.$$

Таким образом, $\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M}$ не зависит от t; так как $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ для $t = \tau$, то справедливо равенство

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M} = \mathfrak{J}.$$

Следовательно, преобразование $z = z(\zeta, t)$ будет каноническим. В соответствии с (2; 21) и (8) оно переводит, с другой стороны, данную систему в $\dot{\zeta} = 0$. Если t достаточно близко к τ, определитель $|\mathfrak{U}| = |x_{k\xi_l}|$ отличен от нуля, так как он для $t = \tau$ равен 1. Поэтому преобразование $z = z(\zeta, t)$ может быть получено решением дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона – Якоби (6) вместе с уравнениями (4).

Если не удается прямо найти интеграл $w(x, \eta, t)$ дифференциального уравнения Гамильтона – Якоби, то иногда задачу можно упростить следующим образом. Пусть функция Гамильтона $E(x, y, t)$ состоит из двух слагаемых:

$$E(x, y, t) = F(x, y, t) + G(x, y, t)$$

и пусть соответствующее первому слагаемому уравнение Гамильтона–Якоби

$$F(x,\, w_x,\, t) + w_t = 0$$

имеет интеграл $w(x,\, \eta,\, t)$ с $|w_{x_k \eta_l}| \neq 0$. При соответствующем каноническом преобразовании (4) имеем тогда

$$\mathbf{E} = E + w_t = F + G + w_t = G,$$

и заданная система (5) переходит в систему

$$\dot{\xi}_k = G_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -G_{\xi_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, n),$$

где G нужно рассматривать как функцию от ξ, η, t. При известных условиях эту систему можно прямо решить; в противном случае функцию G можно опять подходящим образом разложить и тем самым провести процесс преобразования еще раз. Весьма возможно, что подобным способом удастся разложить функцию $E(x,\, y,\, t)$ на конечное или бесконечное количество таких слагаемых, что соответствующие им уравнения Гамильтона–Якоби можно будет каждый раз разрешить. Если даже при бесконечном количестве шагов этот процесс не будет сходиться, то может все-таки случиться, что прекращение этого процесса на определенной стадии даст нам приемлемое приближенное решение.

В предшествующих исследованиях теорему существования для неявных функций мы использовали без точного определения области изменения переменных. Было только отмечено условие, согласно которому некоторые функциональные определители должны быть отличными от нуля; результаты имели поэтому только локальный характер. В каждом конкретном случае для получения соответствующих величин необходимо проводить дополнительно особое рассмотрение.

§ 4. Теорема существования Коши

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = f_k \quad (k = 1,\, \ldots,\, m), \tag{1}$$

причем m заданных функций $f_k = f_k(x)$ зависят от $x_1,\, \ldots,\, x_m$ и не зависят от t. Если f_k удовлетворяют в действительной окрестности $x = \xi$

условиям Липшица, то система (1), как известно, имеет при заданном начальном значении $x(\tau) = \xi$ единственное решение $x(t)$. Предположим теперь, что f_k являются регулярными аналитическими функциями переменных $x_1, \ldots, x_m$ в некоторой комплексной окрестности $x = \xi$. Нашей целью является доказательство следующей теоремы:

Пусть все функции $f_1, \ldots, f_m$ регулярны в области $|x_k - \xi_k| < r$ $(k = 1, \ldots, m)$ и по абсолютной величине $|f_i| \leqslant M$. Тогда в определяемом начальными условиями $x_k(\tau) = \xi_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ решении системы уравнений (1) $x_k(t)$ являются регулярными аналитическими функциями от t в комплексной окрестности точки τ

$$|t - \tau| < \frac{r}{(m+1)M}$$

и удовлетворяют в этой окрестности неравенствам

$$|x_k(t) - \xi_k| < r \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Замена величин x_k, f_k, t величинами $\xi_k + r x_k$, $M f_k$, $\tau + M^{-1} r t$ сохраняет систему (1) неизменной, в то время как постоянные ξ_k, r, M, τ превращаются в 0, 1, 1, 0. Таким образом, теорему достаточно доказать только для этого частного случая. Чтобы решить уравнения (1) с начальными условиями $x_k(0) = 0$, возьмем ряд

$$x_k = x_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,\,n} t^n \quad (k = 1, \ldots, m)$$

с неопределенными коэффициентами и будем затем сравнивать коэффициенты после подстановки в дифференциальные уравнения. Для сокращения воспользуемся при этом следующими обозначениями. Для формально образованного степенного ряда

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

о сходимости которого ничего пока не известно, положим

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad (\varphi)_n = c_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Тогда, очевидно, $(\varphi)_n = (\varphi_n)_n$ и, далее, $(\varphi\psi)_n = (\varphi_n\psi_n)_n$, $(\varphi \pm \psi)_n = (\varphi_n \pm \psi_n)_n$, если через ψ также обозначен формальный степенной ряд по t. Если теперь положить

$$f_k = \sum_l a_{k,\, l_1, \ldots, l_m} x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

причем индекс l под знаком суммы должен указывать на суммирование по всем целым неотрицательным значениям $l_1, \ldots, l_m$, то сравнение коэффициентов после подстановки в систему (1) даст следующие равенства:

$$(n+1)\alpha_{k,\, n+1} = \sum_l a_{k, l_1, \ldots, l_m} (x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m})_n = \\ = \sum_l a_{k,\, l_1, \ldots, l_m} (x_{1n}^{l_1} \ldots x_{mn}^{l_m})_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \quad (2)$$

Отсюда полной индукцией установим, что $\alpha_{k,\, n}$ будут многочленами относительно $a_{r,\, l_1, \ldots, l_m}$ $(r = 1, \ldots, m)$ с неотрицательными рациональными коэффициентами.

Для доказательства сходимости образуем мажорирующий ряд. Если

$$f = \sum_l a_{l_1, \ldots, l_m} x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}, \quad g = \sum_l b_{l_1, \ldots, l_m} x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$$

два формально образованных степенных ряда, которые не обязательно сходятся, то ряд g называется мажорирующим для f (обозначается $f \prec g$), если

$$|a_{l_1, \ldots, l_m}| \leqslant b_{l_1, \ldots, l_m},$$

следовательно, все коэффициенты ряда g должны быть действительными и неотрицательными. Пусть $f_k \prec g_k$ $(k = 1, \ldots, m)$; рассмотрим наряду с системой (1) мажорирующую систему

$$\dot{y}_k = g_k(y) \quad (k = 1, \ldots, m). \quad (3)$$

Эта система также может быть формально решена при начальных значениях $y_k(0) = 0$ с помощью рядов

$$y_k = y_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{k,\, n} t^n.$$

Мы утверждаем, что $y_k(t)$ также является мажорантой для $x_k(t)$, т. е. что

$$|\alpha_{k,\,\nu}| \leqslant \beta_{k,\,\nu} \quad (k = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Так как коэффициенты $b_{k,\, l_1, \ldots, l_m}$ ряда g_k неотрицательны, то из рекуррентных формул, соответствующих (2), получаем следующие равенства:

$$(n+1)\beta_{k,\,n+1} = \sum_l b_{k,\, l_1, \ldots, l_m} (y_{1n}^{l_1} \ldots y_{mn}^{l_m})_n \quad (n = 0, 1, \ldots);$$

отсюда заключаем, что все $\beta_{k,\,\nu}$ являются действительными неотрицательными числами. Докажем теперь (4) методом полной индукции. Пусть утверждение справедливо для индексов $\nu \leqslant n$, причем это допущение для $n = 0$ не имеет смысла. Следовательно, тогда $x_{kn} \prec y_{kn}$ и из неравенств

$$\begin{aligned}(n+1)|\alpha_{k,\,n+1}| \leqslant \sum_l |a_{k,\, l_1, \ldots, l_m}| \left|(x_{1n}^{l_1} \ldots x_{mn}^{l_m})_n\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_l b_{k,\, l_1, \ldots, l_m} (y_{1n}^{l_1} \ldots y_{mn}^{l_m})_n = (n+1)\beta_{k,\,n+1}\end{aligned}$$

следует (4) для $\nu = n + 1$. Этим самым доказано, что $x_k \prec y_k$.

Теперь достаточно найти такую мажоранту g_k для f_k, чтобы новая система (3) интегрировалась до конца и для ее решений могли быть доказаны упомянутые в теореме оценки. Из предположения $|f_k| \leqslant 1$ для $|x_1| < 1, \ldots, |x_m| < 1$ и из формулы Коши следует, как и для случая одной переменной, неравенство

$$|a_{k,\, l_1, \ldots, l_m}| \leqslant 1.$$

Поэтому специального вида степенной ряд, не зависящий от k,

$$g(x) = g_k(x) = \sum_l x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m} = \prod_{k=1}^{m} (1 - x_k)^{-1}$$

будет мажорантой для любого из рядов $f_k(x)$. Так как правые части уравнений

$$\dot{y}_k = g(y), \quad y_k(0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$$

не зависят от k, то их решения $y_k(t)$ даются одним степенным рядом $y = y(t)$, удовлетворяющим уравнению

$$\dot{y} = (1-y)^{-m}, \quad y(0) = 0.$$

Прямое интегрирование дает

$$1-(1-y)^{m+1} = (m+1)t, \quad y = 1-[1-(m+1)t]^{1/(m+1)}.$$

Но соответствующий степенной ряд сходится при $|t| < (m+1)^{-1}$, и в этом круге

$$|y| \leqslant 1-[1-(m+1)|t|]^{1/(m+1)} < 1,$$

следовательно, тем более $|x_k(t)| < 1$. Так как полученные с помощью рекуррентного соотношения формальные степенные ряды для $x_k(t)$ формально удовлетворяют системе (1) и эти степенные ряды сходятся при $|t| < (m+1)^{-1}$, то функции, представленные этими степенными рядами, являются решениями системы дифференциальных уравнений. Это доказывает теорему полностью.

Из рекуррентных формул для коэффициентов разложения решений в степенной ряд по степеням $t-\tau$ следует, что все эти коэффициенты действительны, если все начальные значения ξ_k $(k = 1, \ldots, m)$ и соответствующие коэффициенты разложения функций $f_k(x)$ действительны. Будем считать, что это условие выполнено; пусть также τ действительно. Рассмотрим найденные решения $x_k(t)$ системы (1) для действительных $t \geqslant \tau$ и допустим, что все функции $x_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ будут регулярными на открытом справа интервале $\tau \leqslant t < t_1$. Пусть далее вся кривая $x = x(t)$ принадлежит при $\tau \leqslant t < t_1$ тому ограниченному замкнутому точечному множеству P пространства m измерений, на котором m функций $f_k(x)$ комплексных переменных $x_1, \ldots, x_m$ регулярны. Нужно теперь показать, что вследствие теоремы существования $x_k(t)$ будут регулярными и в конечной точке $t = t_1$.

Так как функции $f_k(x)$ регулярны на P, то, согласно теореме о покрытии, существует такое положительное число ρ, что $f_k(x)$ будут также регулярными для всех точек ξ множества P в замкнутой комплексной области $|x_l - \xi_l| \leqslant \rho$ $(l = 1, \ldots, m)$; при этом ρ не зависит от ξ. Существует, далее, такое положительное число M, также не зависящее от ξ, что в указанной области абсолютная величина $|f_k(x)| \leqslant M$. Выберем теперь число $t = t_2$ из интервала $\tau \leqslant t < t_1$, который удовлетворяет условию

$$t_1 - t_2 < \frac{\rho}{(m+1)M},$$

и применим в этом случае теорему существования к системе (1) с $\xi_k = x_k(t_2)$ $(k = 1, \ldots, m)$ и t_2, ρ вместо τ, r. Отсюда следует регулярность решения $x_k(t)$ в круге

$$|t - t_2| < \frac{\rho}{(m+1)M}$$

и, в частности, в точке t_1 этого круга, как мы и утверждали ранее.

Для дальнейших целей дадим найденным результатам в случае системы Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}(x, y), \quad \dot{y}_k = -E_{x_k}(x, y) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

еще одну удобную форму, в которой выразим необходимые оценки частных производных от E через оценку самой функции E. При этом мы воспользуемся некоторыми известными результатами теории функций. Именно, если $g(z)$ есть функция одного комплексного переменного z, регулярная в круге $|z - \zeta| < 2\rho$ и удовлетворяющая в нем оценке $|g(z)| \leqslant M$, то по интегральной теореме Коши будем иметь

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G \frac{g(u)\, du}{(u - z)^2},$$

если $|z - \zeta| < \rho$ и если путь интегрирования G является окружностью $|u - z| = \rho$ в плоскости u. Весь круг лежит целиком в области $|u - \zeta| < 2\rho$, поэтому имеет место оценка

$$|g'(z)| \leqslant M\rho^{-1} \quad (|z - \zeta| < \rho).$$

Если теперь предположить, что функция Гамильтона $E(x, y)$ будет аналитической в области $|x_k - \xi_k| < 2\rho$, $|y_k - \eta_k| < 2\rho$ $(k = 1, \ldots, n)$ относительно каждой из $2n$ переменных $x_1, \ldots, y_n$, и что в этой области справедлива оценка $|E(x, y)| < M$, то в области $|x_k - \xi_k| < \rho$, $|y_k - \eta_k| < \rho$ $(k = 1, \ldots, n)$ имеют место оценки

$$|E_{x_l}| \leqslant M\rho^{-1}, \quad |E_{y_l}| \leqslant M\rho^{-1} \quad (l = 1, \ldots, n).$$

Теорема существования тогда говорит, что решения $x_k(t)$, $y_k(t)$ системы Гамильтона (5) с начальными условиями $x_k(\tau) = \xi_k$, $y_k(\tau) = \eta_k$ регулярны в круге

$$|t-\tau| < \frac{\rho^2}{(2n+1)M}$$

и в этом круге

$$|x_k(t) - \xi_k| < \rho, \quad |y_k(t) - \eta_k| < \rho.$$

Теорема об аналитическом продолжении решений вдоль оси t принимает для системы Гамильтона следующую форму. Пусть решения $x_k(t)$, $y_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ системы (5) будут регулярными для $\tau \leqslant \leqslant t < t_1$ и пусть соответствующая дуга кривой, изображающей решение в пространстве (x, y) $2n$ измерений, принадлежит замкнутому ограниченному множеству, на котором функция Гамильтона $E(x, y)$ является регулярной; тогда $x_k(t)$, $y_k(t)$ регулярны также для $t = t_1$. Этот результат мы используем при исследовании задачи трех тел.

§ 5. Задача n тел

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве n материальных точек P_k $(k = 1, \ldots, n)$, причем $n > 1$. Пусть их координаты в неподвижной декартовой системе координат будут x_k, y_k, z_k и пусть масса точки P_k равна $m_k > 0$. Взаимное расстояние r_{kl} между P_k и P_l определяется формулой

$$r_{kl}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \\ (k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Для упрощения мы будем часто обозначать символом q_k любую из трех координат x_k, y_k, z_k и символом q какую-либо из этих $3n$ возможных координат q_k $(k = 1, \ldots, n)$; далее, мы будем иногда обозначать через m массу m_k, которая соответствует точке с координатой q. При надлежащем выборе основных единиц силовая функция для ньютоновского притяжения будет иметь вид

$$U = \sum_{k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}. \tag{2}$$

Уравнения движения в задаче n тел можно записать в сокращенном виде следующим образом:

$$m\ddot{q} = U_q; \tag{3}$$

здесь через U_q обозначена частная производная от U по q. Эти уравнения можно записать также в виде системы $6n$ дифференциальных уравнений первого порядка с $6n$ неизвестными функциями q, v времени t:

$$\dot{q} = v, \quad v = m^{-1}U_q. \tag{4}$$

Обозначим теперь начальные значения для действительного $t = \tau$ индексом τ, который не следует принимать за значок дифференцирования; тогда $6n$ действительных величин $q = q_\tau$, $v = v_\tau$ будут удовлетворять условиям

$$r_{kl\tau} = \rho_{kl} > 0 \quad (k \neq l;\ k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n),$$

где ρ_{kl} — произвольны. Задача n тел состоит в описании общего поведения всех решений уравнений движения для произвольно заданных начальных значений. Несмотря на усилия выдающихся математиков в течение последних 200 лет, эта задача остается неразрешенной для случая $n > 2$ и до сегодняшнего дня.

В 1858 г. Дирихле [1] сообщил своему другу Кронекеру, что он нашел общий метод рассмотрения задач механики, и хотя этот метод не приводит к прямому интегрированию дифференциальных уравнений движения, но дает последовательные приближения к решению задачи. В другой беседе он сказал, кроме того, что ему удалось доказать устойчивость планетной системы. Дирихле вскоре умер, не оставив после себя никаких письменных указаний об этом открытии, поэтому мы не имеем более подробных сведений об этом методе. Вейерштрасс предположил, что здесь шла речь о разложении в степенные ряды, и попытался найти соответствующее решение задачи n тел; об этом он говорил также своим ученикам С. Ковалевской и Г. Миттаг–Леффлеру [2]. По предложению Миттаг–Леффлера, тогдашний король Швеции и Норвегии учредил даже премию за решение задачи, которая заключается в нахождении пригодных для любых значений времени разложений в ряды координат в задаче n тел. Эту премию получил в 1889 г. Пуанкаре; хотя он также не нашел решения поставленной задачи, все же его премированная работа [3] полна оригинальных идей, которые имели большое значение для последующего развития механики и оплодотворили другие разделы математики. Наконец, 20 лет спустя Зундман решил эту задачу для случая $n = 3$. Главная трудность задачи состояла в том, что не удавалось с помощью соответствующих неравенств для начальных условий исключить столкновения двух тел. Зундман обошел эту трудность, введя вместо времени t новое независимое переменное ω таким образом, что t и все координаты q как функции ω остаются регулярными и при столкновении двух тел; он получил разложения для q и t в ряды по степеням ω, которые представляют весь ход движения. Этот важный и красивый результат будет подробно изложен в оставшейся части первой главы. Для $n > 3$ соответствующий результат неизвестен.

Прежде всего найдем для любого $n > 1$ десять классических интегралов задачи n тел. Из (1) и (2) получим

$$U_{q_k} = \sum_{l \neq k} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} U_{q_k} = 0, \tag{6}$$

и уравнения движения (4) дадут

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{v}_k = 0, \quad v_k = \dot{q}_k,$$

откуда получаются шесть интегралов движения центра инерции:

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = a, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k = b, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k = c, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - t\dot{x}_k) = a^*, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k - t\dot{y}_k) = b^*, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (z_k - t\dot{z}_k) = c^*, \end{array}\right. \tag{7}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = at + a^*, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = bt + b^*, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k z_k = ct + c^*,$$

с шестью постоянными интегрирования a, a^*, b, b^*, c, c^*.

Если p_k, q_k обозначают какие-либо из переменных x_k, y_k, z_k при $k = 1, \ldots, n$, то из равенства (5) получим

$$U_{q_k} p_k - U_{p_k} q_k = \sum_{l \neq k} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^3} (q_l p_k - p_l q_k) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

откуда следует

$$\sum_{k=1}^{n} (U_{q_k} p_k - U_{p_k} q_k) = 0.$$

Уравнения движения (4) дадут нам соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (\dot{v}_k p_k - \dot{u}_k q_k) = 0, \quad v_k = \dot{q}_k, \quad u_k = \dot{p}_k,$$

из которых получаются три интеграла площадей:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \alpha, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = \beta, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \gamma, \end{cases} \tag{8}$$

с тремя постоянными интегрирования α, β, γ. Наконец, из уравнений (4) получается при суммировании по всем координатам соотношение

$$\sum_{q} (m v \dot{v} - U_q \dot{q}) = 0,$$

из которого вытекает интеграл энергии

$$T - U = h \tag{9}$$

с постоянной интегрирования h, причем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{q} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \sum_{v} m v^2 \tag{10}$$

обозначает живую силу системы материальных точек. С помощью найденных десяти интегралов (7), (8), (9) можно исключить из уравнений движения (4) десять координат q, v и привести данную систему к $6n - 10$ дифференциальным уравнениям первого порядка.

Заметим, что левые части интегралов (7), (8), (9) являются алгебраическими функциями $6n + 1$ переменных q, v, t. Можно поставить вопрос, существуют ли еще такие алгебраические интегралы. Для разъяснения этого вопроса нужно прежде всего уточнить понятие интеграла. Пусть

$$\dot{x}_k = f_k(x, t) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{11}$$

опять является системой m дифференциальных уравнений первого порядка, но правые части этих уравнений теперь могут зависеть не только от $x_1, \ldots, x_m$, но и от t. Непрерывно дифференцируемая функция $g(x, t)$ от $m + 1$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ и t называется интегралом системы (11), если она остается постоянной на каждом решении $x = x(t)$ системы (11). Это означает, что она удовлетворяет тождественно по всем переменным x, t однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$g_t + \sum_{k=1}^{m} f_k(x, t) g_{x_k} = 0.$$

Если найдено l интегралов $g = g_1, \ldots, g = g_l$ системы (11), то они называются независимыми, если функциональная матрица, образованная из $m + 1$ частных производных этих интегралов по x_k, t, имеет ранг l. Далее, интеграл называется алгебраическим, если он является алгебраической функцией от x_k, t. Следовательно, выше у нас были найдены в случае $n > 1$ десять алгебраических интегралов системы дифференциальных уравнений задачи n тел (4); легко видеть, что они независимы. Брунс [5] доказал интересную теорему: не существует ни одного алгебраического интеграла системы (4), который был бы независимым от десяти классических. Отсюда следует, что каждый алгебраический интеграл системы (4) будет алгебраической функцией уже известных десяти интегралов. С другой стороны, в силу теоремы существования система (4) должна иметь $6n$ независимых интегралов, но они при $6n > 10$ не могут быть все алгебраическими. Так как доказательство теоремы Брунса очень длинно, оно не может быть, к сожалению, здесь помещено.

Применим теперь доказанную в предыдущем параграфе теорему существования Коши к системе (4). При этом τ и начальные значения $q = q_\tau$, $v = v_\tau$ будут действительными, в то время как для определения входящих в теорему существования положительных постоянных r, M необходимо принимать во внимание комплексные значения переменных. По предположению начальные значения $r_{kl\tau} = \rho_{kl} > 0$ $(k \neq l)$. Пусть A есть верхняя грань U при $t = \tau$, следовательно,

$$U_\tau \leqslant A;$$

далее, пусть

$$\min_{k \neq l} \rho_{kl} = \rho, \quad \min_k m_k = \mu. \tag{12}$$

Тогда из (2) имеем

$$\frac{\mu^2}{\rho} \leqslant U_\tau \leqslant A,$$

поэтому

$$\rho \geqslant \mu^2 A^{-1}. \tag{13}$$

Чтобы получить верхнюю оценку абсолютных значений производных U_q, оценим прежде всего снизу значения $|r_{kl}|$ $(k \neq l)$ для комплексных q вблизи q_τ. Если обозначить для сокращения три выражения $(q_k - q_{k\tau}) - (q_l - q_{l\tau})$ для $q = x$, y, z через φ, ψ, χ, то неравенство Шварца в соответствии с равенством (1) даст оценку

$$|r_{kl}|^2 \geqslant \rho_{kl}^2 - 2\rho_{kl}(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2)^{1/2} + (|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2). \tag{14}$$

Теперь, если

$$|q - q_\tau| < \frac{\rho}{14} \tag{15}$$

для всех q, то φ, ψ, χ по абсолютной величине будут меньше $\rho/7$, следовательно,

$$|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 < 3\frac{\rho^2}{49} < \frac{\rho^2}{16},$$

и вследствие соотношений (12), (14) имеем также

$$|r_{kl}|^2 \geqslant \rho_{kl}^2 - \frac{1}{2}\rho_{kl}\rho + \frac{1}{16}\rho^2 > \frac{1}{4}\rho_{kl}^2, \quad |r_{kl}| > \frac{1}{2}\rho_{kl}. \tag{16}$$

Благодаря оценке (13) неравенство (15), наверное, будет выполнено, если

$$|q - q_\tau| < \frac{\mu^2}{14A}, \tag{17}$$

тогда далее получаем

$$|q_l - q_k| \leqslant |q_l - q_{l\tau}| + |q_k - q_{k\tau}| + |q_{l\tau} - q_{k\tau}| < \frac{\rho}{7} + \rho_{kl} \leqslant \frac{8}{7}\rho_{kl}.$$

В соответствии с неравенствами (13), (16) будем иметь

$$\left|\frac{q_l - q_k}{r_{kl}^3}\right| \leqslant \left(\frac{2}{\rho_{kl}}\right)^3 \frac{8}{7}\rho_{kl} = \frac{64}{7}\rho_{kl}^{-2} \leqslant \frac{64}{7}A^2\mu^{-4} \quad (k \neq l),$$

$$|m_k^{-1}U_{q_k}| = \left|\sum_{l\neq k} \frac{m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k)\right| < c_1 A^2 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

причем соответствующая положительная постоянная c_1 будет зависеть только от масс. Учитывая равенство $\dot{q} = v$, в соответствии с интегралом энергии будем, кроме того, иметь следующее соотношение:

$$\frac{m}{2}v_\tau^2 \leqslant T_\tau = U_\tau + h \leqslant A + h, \quad |v_\tau| \leqslant c_2\sqrt{A+h},$$

причем c_2 также зависит только от масс. Если положить

$$\frac{\mu^2}{14A} = r \tag{18}$$

и потребовать, кроме условия (17), выполнения неравенства

$$|v - v_\tau| < r,$$

то будем иметь следующую оценку:

$$|v| \leqslant |v - v_\tau| + |v_\tau| < r + c_2\sqrt{A+h}.$$

Итак, если постоянные r, M, входящие в теорему существования, определяются равенством (18) и равенством

$$M = c_1 A^2 + \frac{\mu^2}{14A} + c_2\sqrt{A+h},$$

то решение $q(t)$, $v(t) = \dot{q}(t)$ системы (4) регулярно в круге

$$|t - \tau| < \frac{r}{(6n+1)M} = \delta$$

и, в частности, в интервале $\tau \leqslant t < \tau + \delta$. Радиус δ зависит только от A, h и от масс.

Рассмотрим кривую, изображающую решение в пространстве $6n$ координат q, $v = \dot{q}$ при $t \geqslant \tau$. Если $t - \tau < \delta$, то $q(t)$ являются регулярными функциями t. При этом, в частности, не может произойти соударения, так как иначе силовая функция U стала бы бесконечной, следовательно, в соответствии с интегралом энергии бесконечной стала бы и кинетическая энергия T, а вместе с нею по меньшей мере одна из составляющих скорости $\dot{q}(t)$, что противоречит доказанной регулярности $q(t)$. Осуществим теперь аналитическое продолжение решения для действительных $t > \tau$. Тогда либо все $6n$ координат для всех конечных действительных моментов времени $t \geqslant \tau$ будут регулярными, либо существует особенность для момента $t_1 > \tau$, по крайней мере для одной из координат $q(t)$, но все $q(t)$ при $\tau \leqslant t < t_1$ остаются регулярными. Мы утверждаем, что U при возрастающем $t \to t_1$ станет больше любого положительного числа и, следовательно, стремится к положительной бесконечности. Если бы это было не так, то существовала бы такая положительная константа A и такая сходящаяся к t_1 снизу последовательность моментов времени $\tau_1 > \tau$, для которой

$$U_{\tau_1} \leqslant A.$$

Тогда выберем $\tau_1 > t_1 - \delta$, где δ — величина, введенная в предыдущем абзаце, и применим теорему существования с рассмотрением τ_1 вместо τ. Из этой теоремы следует, что все $q(t)$ остаются регулярными также при $t = t_1$, что противоречит смыслу выбора момента τ_1. Из только что доказанной теоремы о стремлении $U \to \infty$ при $t \to t_1$ следует, если принять во внимание (2), что наименьшее из $n(n-1)/2$ расстояний r_{kl} $(k < l)$ для $t \to t_1$ стремится к нулю.

§ 6. Соударение

Шесть интегралов движения центра инерции (5; 7) говорят о том, что центр инерции P_0 системы n тел движется прямолинейно и равномерно. Введем параллельным переносом новую подвижную систему координат с началом в P_0. Уравнения движения (5; 3) при этом преобразовании координат останутся инвариантными. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся только случаем, когда P_0 лежит в начале координат.

Зундманом была доказана важная теорема; позднее выяснилось, что эта теорема была известна Вейерштрассу, но не была им доказана. Теорема гласит:

Если для момента $t = t_1$ все n тел сталкиваются в одной точке, то все три постоянные площадей α, β, γ равны нулю.

Так как центр инерции P_0 лежит в начале координат, то столкновение всех n тел может иметь место только в точке 0. Введем выражение

$$I = \sum_q mq^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

При $\tau \leqslant t < t_1$ имеем тогда

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_q mq\dot{q}, \quad \frac{1}{2}\ddot{I} = \sum_q m(\dot{q}^2 + q\ddot{q}) = 2T + \sum_q qU_q. \tag{1}$$

Так как U является однородной функцией минус первой степени относительно координат q, то по известной теореме Эйлера

$$\sum_q qU_q = -U,$$

вследствие чего получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T - U,$$

называемое уравнением Лагранжа. Используя интеграл энергии $T - U = h$, получаем

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = T + h = U + 2h. \tag{2}$$

Прежде всего мы не предполагаем заранее, что в момент t_1 происходит столкновение всех материальных точек; мы считаем только, как и в предыдущем параграфе, что t_1 является особой точкой по крайней мере для одной координаты $q(t)$. Как мы уже видели, в этом случае U

стремится к ∞ при $t \to t_1$, поэтому для достаточно близкого к t_1 момента $t_2 < t_1$ правая часть уравнения (2) во всем интервале $t_2 \leqslant t < t_1$ положительна, следовательно,

$$\ddot{I} > 0 \quad (t_2 \leqslant t < t_1).$$

Поэтому функция $\dot{I}$ монотонно возрастает в этом интервале. Мы можем также принять, что $\dot{I}$ в рассматриваемом интервале либо везде положительна, либо везде отрицательна. В самом деле, предположим, что $\dot{I}$ меняет знак в момент t_3. Выберем некоторое t_2 между t_3 и t_1. Тогда в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$ положительная функция I монотонно возрастает или монотонно убывает и, следовательно, при $t \to t_1$ имеет предел. Этот предел по определению I тогда и только тогда равен нулю, если в момент t_1 все n тел столкнутся в одной точке.

Используем теперь алгебраическое тождество

$$\sum_{k=1}^{g} \xi_k^2 \sum_{k=1}^{g} \eta_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{g} \xi_k \eta_k\right)^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2,$$

полагая в котором $g = 3n$, $\xi_k = q\sqrt{m}$, $\eta_k = \dot{q}\sqrt{m}$, мы получим с помощью (1) формулу

$$2IT = \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2.$$

В последней сумме обратим внимание только на те члены, в которых величины ξ_k, η_l, относятся к одной и той же материальной точке; это даст нам следующую оценку:

$$\begin{multline} 2IT \geqslant \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \{(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y})^2 + \\ + (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k)^2 + (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)^2\}. \quad (3) \end{multline}$$

С другой стороны, неравенство Шварца вследствие (5; 8) даст

$$\alpha^2 = \left\{\sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)\right\}^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} m_k^2 (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)^2$$

и аналогичные соотношения для β, γ, поэтому неравенство (3) приводится к следующему виду:

$$2IT \geqslant \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \eta, \quad \eta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{n}. \tag{4}$$

Для целей настоящего параграфа достаточно взять вместо (4) более слабое неравенство

$$2IT \geqslant \eta,$$

которое вследствие (2) равносильно неравенству

$$\ddot{I} \geqslant \eta I^{-1} + 2h. \tag{5}$$

Пусть теперь I монотонно убывает в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$. Умножим (5) на положительное число $-2\dot{I}$ и проинтегрируем от t_2 до t. Обозначая через I_2, $\dot{I}_2$ соответственно значения I, $\dot{I}$ при $t = t_2$, получим

$$\dot{I}_2^2 - \dot{I}^2 \geqslant 2\eta \ln \frac{I_2}{I} + 4h(I_2 - I);$$

тем более справедливо неравенство

$$2\eta \ln \frac{I_2}{I} \leqslant \dot{I}_2^2 + 4|h|I_2 \quad (t_2 \leqslant t < t_1). \tag{6}$$

Отсюда следует существование для I положительной нижней грани, если $\eta > 0$, т. е. если не все α, β, γ равны 0. Если, с другой стороны, I в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$ монотонно возрастает, то там, очевидно, $I \geqslant I_2$. В каждом случае, следовательно, I имеет в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$ положительную нижнюю грань, если только $\eta > 0$. Если обозначить через ρ_k расстояние точки P_k от центра инерции, т. е. от начала координат, то

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k q_k = 0,$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (q_l - q_k) = M q_l,$$

где

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad MI \leqslant 2\sum_{k<l} m_k m_l r_{kl}^2,$$

$$Mq_l^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_k (q_l - q_k)^2 \quad (l = 1, \ldots, n).$$

Поэтому если $\eta > 0$, то наибольшее из $n(n-1)/2$ расстояний r_{kl} $(k < l)$ в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$, а значит и в интервале $\tau \leqslant t < t_1$ остается больше некоторого положительного числа, и тогда в момент t_1 столкновения не может быть. Тем самым теорема доказана.

Далее в этой главе будем рассматривать только случай $n = 3$. Мы хотим доказать, что три постоянные площадей α, β, γ только в том случае могут быть все равны нулю, если движение трех тел происходит в некоторой неизменной плоскости. Так как $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ и уравнения движения при ортогональных преобразованиях координат остаются инвариантными и, кроме того, центр инерции P_0 находится в начале координат, то можно принять, что при $t = \tau$ три материальные точки лежат в плоскости $z = 0$. Тогда из (5; 8) при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ получаем, в частности, уравнения

$$\sum_{k=1}^{3} m_k y_k \dot{z}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k x_k \dot{z}_k = 0 \quad (t = \tau);$$

кроме того,

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \dot{z}_k = 0,$$

так как центр инерции остается неподвижным. Из этих трех однородных линейных уравнений для величин $m_k \dot{z}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ при $t = \tau$ следует либо равенство нулю $\dot{z}_k$ при $t = \tau$, либо

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (t = \tau).$$

В первом случае направления начальных скоростей трех точек лежат в плоскости $z = 0$, откуда вследствие теоремы о единственности решения системы дифференциальных уравнений движения заключим, что тогда все три точки всегда будут оставаться в этой плоскости. Во втором случае три точки в момент $t = \tau$ лежат на одной прямой; тогда оси координат можно повернуть таким образом, чтобы при $t = \tau$ равнялась нулю величина $\dot{z}_3$. Если исключить уже рассмотренный случай $\dot{z}_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, то из вышеупомянутых уравнений следует

$$y_1 = y_2, \quad x_1 = x_2 \quad (t = \tau).$$

Итак, точки P_1, P_2 совпадут в момент $t = \tau$, что противоречит предположенному. Поэтому утверждение доказано.

В частности, можно показать, что в случае соударения всех трех тел движение обязательно происходит в неподвижной плоскости. Случай тройного столкновения (см. [1]–[3]) здесь более рассматриваться не будет.

Итак, в дальнейшем будет предполагаться, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$. Тогда из нашего предыдущего результата следует, что длина наибольшей из трех сторон треугольника r_{12}, r_{23}, r_{31}, образованного материальными точками, ограничена сверху при $\tau \leqslant t < t_1$ положительным числом ε. С другой стороны, результат предыдущего параграфа гласит, что наименьшая из сторон этого треугольника стремится к 0 при $t \to t_1$. Если длина этой стороны есть r, то t_2 можно выбрать настолько близким к t_1, что r при $t_2 \leqslant t < t_1$ будет оставаться меньше $\varepsilon/2$. Но тогда во всем этом интервале времени наименьшей должна оставаться одна и та же сторона треугольника; действительно, в противном случае из соображений непрерывности следует, что две стороны треугольника будут для некоторого момента t из этого интервала меньше $\varepsilon/2$, а тогда третья сторона также будет меньше ε, что приводит к противоречию. Поэтому меньше $\varepsilon/2$ остается в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$ одна и та же сторона треугольника, например r_{13}, и мы будем иметь

$$r_{13} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad r_{12} > \frac{\varepsilon}{2}, \quad r_{23} > \frac{\varepsilon}{2} \quad (t_2 \leqslant t < t_1). \tag{7}$$

Итак, при $t \to t_1$ к нулю стремится только расстояние $r_{13} = r$, в то время как два других расстояния остаются больше некоторого положительного числа, и в момент $t = t_1$ сталкиваются точки P_1 и P_3.

Нужно теперь показать, что это столкновение произойдет в определенной точке пространства. Из уравнения движения

$$\ddot{q}_2 = \frac{m_1}{r_{12}^3}(q_1 - q_2) + \frac{m_3}{r_{23}^3}(q_3 - q_2)$$

следует оценка

$$|\ddot{q}_2| \leqslant \frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2},$$

откуда в соответствии с неравенствами (7) вытекает ограниченность $\ddot{q}_2$ в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$. После двукратного интегрирования получим, что $\dot{q}_2$ и q_2 при $t \to t_1$ имеют верхнюю грань; поэтому точка P_2 при $t \to t_1$ имеет предельное положение и равным образом имеет некоторые предельные значения составляющих скорости. Так как, с другой стороны, разность $q_1 - q_3$ при $t \to t_1$ стремится к нулю и так как центр инерции системы находится в начале координат, то из соотношения $m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0$ следует, что q_1 и q_3 имеют также предел при $t \to t_1$. Значит P_1 и P_3 в действительности столкнутся в определенной точке пространства. Отсюда также следует, что монотонная функция I ограничена в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$, поэтому I имеет при $t \to t_1$ конечный предел.

Наоборот, следует ожидать, что скорости точек P_1 и P_3 при $t \to t_1$ становятся бесконечно большими. Чтобы исследовать это подробно, обозначим скорость точки P_k через V_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ и напишем интеграл энергии в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k V_k^2 = T = U + h.$$

Так как $r = r_{13}$ при $t \to t_1$ стремится к нулю, в то время как величины обеих других сторон треугольника имеют положительную нижнюю грань, то произведение rU стремится к $m_1 m_3$, т. е.

$$r\sum_{k=1}^{3} m_k V_k^2 \to 2m_1 m_3 \quad (t \to t_1). \tag{8}$$

Поэтому, в частности, выражения rV_k^2, $r\dot{q}_k^2$, $r^{1/2}\dot{q}_k$ $k = 1,\ 2,\ 3$ остаются при соударении ограниченными. Вследствие соотношения $m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2 + {}$ $+ m_3\dot{q}_3 = 0$ имеем далее

$$r(m_1\dot{q}_1)^2 - r(m_3\dot{q}_3)^2 = m_2 r^{1/2}\bigl\{m_2 r^{1/2}\dot{q}_2^2 + 2m_3\dot{q}_2(r^{1/2}\dot{q}_3)\bigr\}.$$

В фигурных скобках отдельные сомножители $k = 1,\ 2,\ 3$ остаются ограниченными, в то время как множитель $r^{1/2}$ стремится к нулю. Следовательно,

$$r(m_1\dot{q}_1)^2 - r(m_3\dot{q}_3)^2 \to 0, \quad r(m_1 V_1)^2 - r(m_3 V_3)^2 \to 0.$$

Так как выражение $rm_2V_2^2$ стремится к нулю, то соотношение (8) дает формулу

$$rV_1^2 \to \frac{2m_3^2}{m_1+m_3} \quad (t \to t_1); \tag{9}$$

эта формула определяет асимптотическое поведение при $t = t_1$ величин V_1 и V_3.

Функция r^{-1} становится при $t = t_1$ бесконечной. Докажем все же сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{dt}{r} = \lim_{t \to t_1} \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{dt}{t}. \tag{10}$$

При этом мы воспользуемся уравнением Лагранжа (2)

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = U + 2h.$$

Так как разность $U - m_1m_3r_{13}^{-1}$ вследствие соотношения (7) остается в интервале $\tau \leqslant t < t_1$ ограниченной, то, очевидно, достаточно установить существование верхней грани значений $\dot{I}$ при $t \to t_1$. В начале параграфа было уже показано, что $\dot{I}$ есть монотонная функция в интервале $t_2 \leqslant t < t_1$. Поэтому мы должны только доказать, что $\dot{I}$ ограничено. С помощью интегралов движения центра инерции получаем

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_{k=1}^{3} m_k(x_k\dot{x}_k + y_k\dot{y}_k + z_k\dot{z}_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2} m_k\big\{(x_k - x_3)\dot{x}_k + (y_k - y_3)\dot{y}_k + (z_k - z_3)\dot{z}_k\big\}.$$

Следовательно, в силу неравенства Шварца,

$$\frac{1}{2}|\dot{I}| \leqslant \sum_{k=1}^{2} m_k r_{k3} V_k.$$

Но в соответствии с (9) $r_{13}V_1$ стремится к нулю, в то время как r_{23} и V_2 ограничены. Поэтому сходимость интеграла (10) доказана.

Прежде чем более подробно исследовать в двух следующих параграфах природу особенности q и $\dot{q}$ при $t = t_1$, сделаем еще одно предварительное замечание, которое будет использовано в дальнейшем. По крайней мере одна из девяти функций $\dot{q}(t)$ при $t \to t_1$ будет неограниченной, а функции $q(t)$, как мы знаем, стремятся к конечным пределам. Уже из этого следует, что ни одна из функций $\dot{q}(t)$ не может иметь полюса при $t = t_1$, так как иначе соответствующая $q(t)$ также была бы бесконечной. Предположим сначала без доказательства, что $q(t)$ при $t = t_1$ не имеет существенной особенности и самое большее может иметь точку ветвления конечного порядка; проведем тогда следующее рассуждение. Пусть

$$s = (t_1 - t)^{1/l},$$

где l — натуральное число, будет локальной регуляризирующей переменной для всех $q(t)$, так что $q(t)$ представится обыкновенным степенным рядом по s, сходящимся при достаточно малых абсолютных значениях s. Пусть, далее, s^μ будет наименьшей входящей в $q(t)$ положительной степенью s; тогда имеем

$$q(t) = q(t_1) + c_1 s^\mu + \ldots, \tag{11}$$

причем c_1 по меньшей мере для одной координаты q отлично от нуля. Из равенства

$$\dot{q}(t) = -\frac{\mu}{l} c_1 s^{\mu - l} + \ldots \tag{12}$$

следует соотношение

$$V_1^2 = c_2 s^{2(\mu - l)} + \ldots, \quad c_2 > 0.$$

Равенство (11) дает далее

$$r = c_3 s^\mu + \ldots, \quad c_3 \geqslant 0.$$

Если здесь $c_3 > 0$, то из (9) следует равенство $3\mu - 2l = 0$. Поэтому $\mu/l = 2/3$, откуда напрашивается догадка, что $l = 3$ и что

$$s = (t_1 - t)^{1/3}$$

будет локально регуляризирующей переменной. Мы покажем в § 8, что это действительно имеет место. Впрочем, с помощью равенства (12) можно показать, что $\dot{q}(t)$ как функция s при $t = t_1$ либо остается регулярной, либо имеет полюс первого порядка. Если образовать интеграл

$$\lambda = \int\limits_{t}^{t_1} \frac{dt}{t} \quad (\tau \leqslant t < t_1),$$

существование которого уже доказано, то разложение λ в ряд по степеням s при нашем допущении будет иметь следующий вид:

$$\lambda = \frac{3}{c_3} s + \ldots$$

В этом случае λ также можно выбрать в качестве локально регуляризирующей переменной. Такой выбор был уже сделан в классической теории задачи двух тел; в этой теории λ является эксцентрической аномалией.

В ближайших параграфах будут даны основы для доказательства наших эвристических результатов. Нельзя найти особую точку $t = t_1$, применяя только теорему существования Коши и вводя в уравнения движения задачи трех тел вместо t новую независимую переменную λ. Это не удастся хотя бы потому, что по крайней мере одно $\dot{q}$ при $s = 0$ обязательно имеет особенность. Если высказанные нами ранее предположения верны, то величины, получающиеся из $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$ и из $\dot{x}_3$, $\dot{y}_3$, $\dot{z}_3$ преобразованием обратных радиусов, будут при $\lambda = 0$ регулярными. Зундману с помощью введения в дифференциальные уравнения таких новых переменных удалось прийти к желаемой цели.

Чтобы сделать необходимые выкладки возможно более простыми и прозрачными, приведем сначала уравнения движения, следуя Леви–Чивита [4], к канонической форме и определим затем каноническое преобразование, которое выполнит наше требование относительно $\dot{q}$.

§ 7. Регуляризирующее преобразование

Напишем теперь дифференциальные уравнения задачи трех тел в гамильтоновой форме. При этом мы сначала не будем предполагать, что центр инерции P_0 находится в начале координат. Координаты точек P_1, P_2, P_3 обозначим сквозным индексом при q: $q_1, \ldots, q_9$, следовательно x_k, y_k, z_k $(k = 1, 2, 3)$ будут заменены на q_{3k-2}, q_{3k-1}, q_{3k}.

Соответственно обозначим импульсы $m_k\dot{x}_k$, $m_k\dot{y}_k$, $m_k\dot{z}_k$ через p_{3k-2}, p_{3k-1}, p_{3k}. Тогда

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\Big(\frac{p_k^2}{m_1} + \frac{p_{k+3}^2}{m_2} + \frac{p_{k+6}^2}{m_3}\Big). \tag{1}$$

Уравнения движения (5; 4) будут иметь при $n = 3$ следующую гамильтонову форму:

$$\dot{q}_k = E_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -E_{q_k} \quad (k = 1, \ldots, 9), \tag{2}$$

причем $E = T - U$ рассматривается как функция 18 независимых переменных p_k, q_k. Из этих 18 дифференциальных уравнений нужно исключить с помощью интегралов движения центра инерции 3 пары переменных p_k, q_k, и этого можно достигнуть подходящим каноническим преобразованием q_k, p_k в новые переменные x_k, y_k. По образцу преобразования (3; 4) сделаем подстановку

$$p_k = w_{q_k}, \quad x_k = w_{y_k} \quad (k = 1, \ldots, 9) \tag{3}$$

с производящей функцией $w(q, y)$, функциональный определитель которой $|w_{y_k q_l}|$ не равен нулю. Это каноническое преобразование построим таким образом, чтобы $x_1, \ldots, x_6$ были относительными координатами точек P_1, P_2 относительно P_3, а x_7, x_8, x_9 оставались координатами точки P_3:

$$x_k = q_k - q_{k+6}, \quad x_{k+3} = q_{k+3} - q_{k+6}, \quad x_{k+6} = q_{k+6} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Это требование будет в согласии со вторым уравнением (3), если положить

$$w = \sum_{k=1}^{3}\big\{(q_k - q_{k+6})y_k + (q_{k+3} - q_{k+6})y_{k+3} + q_{k+6}y_{k+6}\big\}.$$

Легко видеть, что определитель $|w_{y_k q_l}| = 1$, так что формулы (3) действительно дают каноническое преобразование. Из первого уравнения (3) получим равенства

$$p_k = y_k, \quad p_{k+3} = y_{k+3}, \quad p_{k+6} = y_{k+6} - y_{k+3} - y_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

поэтому

$$y_k = p_k, \quad y_{k+3} = p_{k+3}, \quad y_{k+6} = p_k + p_{k+3} + p_{k+6} \quad (k = 1,\, 2,\, 3) \tag{5}$$

и формулы (4), (5) дают искомое каноническое преобразование, которое получилось линейным. Так как оно, кроме того, не зависит от t, то новые уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, 9). \tag{6}$$

Здесь $E = T - U$ нужно рассматривать как функцию x_k, y_k. Теперь получаем

$$\begin{gathered}
T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\bigl\{m_1^{-1}y_k^2 + m_2^{-1}y_{k+3}^2 + m_3^{-1}(y_{k+6} - y_k - y_{k+3})^2\bigr\}, \\
U = m_1 m_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} + m_2 m_3 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^{-1/2} + \\
+ m_1 m_2 \bigl\{(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2\bigr\}^{-1/2},
\end{gathered} \tag{7}$$

поэтому E не зависит от x_7, x_8, x_9. Отсюда следует в соответствии с уравнением (6), что y_7, y_8, y_9 во время движения остаются постоянными, что и дает опять, очевидно, интегралы движения центра инерции. Если рассмотреть дифференциальные уравнения (6) только для $k = 1, \ldots, 6$, то при этом получится гамильтонова система для шести первых пар x_k, y_k, так как x_7, x_8, x_9 в E не входят, а y_7, y_8, y_9 остаются постоянными. Если эту систему решить, то величины x_7, x_8, x_9 можно затем найти из уравнений

$$\dot{x}_k = E_{y_k} \quad (k = 7,\, 8,\, 9)$$

при помощи квадратур. Предположим теперь опять, что центр инерции находится в начале координат; тогда $y_7 = y_8 = y_9 = 0$ и далее,

$$\begin{aligned}
0 = m_1 q_k + m_2 q_{k+3} + m_3 q_{k+6} = \\
= m_1(x_k + x_{k+6}) + m_2(x_{k+3} + x_{k+6}) + m_3 x_{k+6},
\end{aligned}$$

следовательно,

$$x_{k+6} = -\frac{m_1 x_k + m_2 x_{k+3}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

Поэтому достаточно рассмотреть только систему

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6), \tag{8}$$

для которой

$$T = \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1}) \sum_{k=1}^{3} y_k^2 + \\ + \frac{1}{2}(m_2^{-1} + m_3^{-1}) \sum_{k=1}^{3} y_{k+3}^2 + m_3^{-1} \sum_{k=1}^{3} y_k y_{k+3}. \tag{9}$$

С помощью результатов предыдущих параграфов исследуем теперь ближе свойства решений x_k, y_k при столкновении P_1 и P_3 в момент t_1. Если положить для сокращения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y^2, \tag{10}$$

то $x > 0$ при $\tau \leqslant t < t_1$, $x \to 0$ при $t \to t_1$ и соотношение (6; 9) переходит в

$$xy^2 \to \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3} \quad (t \to t_1). \tag{11}$$

Из полученных ранее результатов очевидно, что x_k, y_k ($k = 4, 5, 6$) при $t \to t_1$ стремятся к определенным предельным значениям, а также что

$$xU \to m_1 m_3 \quad (t \to t_1).$$

Согласно результатам предыдущего параграфа, пока еще не полностью обоснованным, нужно ввести вместо t новую независимую переменную

$$s = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{dt}{x(t)} \quad (\tau \leqslant t < t_1), \tag{12}$$

где $x = x(t)$ есть функция, определенная уравнениями (6) и (10). Тогда переменная s как функция от t регулярна в интервале $\tau \leqslant t < t_1$ и возрастает от нуля до конечного значения

$$s_1 = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{dt}{x(t)}. \tag{13}$$

Так как $\dot{s} = x^{-1}$, то обратная функция $t(s)$ также является регулярной и монотонно возрастает от τ до t_1 в интервале $0 \leqslant s < s_1$. Будем обозначать дифференцирование по s штрихом; тогда с этой новой независимой переменной дифференциальные уравнения будут иметь следующий вид:

$$x'_k = xE_{y_k}, \quad y'_k = -xE_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6). \tag{14}$$

Эти дифференциальные уравнения уже не имеют гамильтоновой формы.

С помощью искусственного приема, предложенного Пуанкаре, этим уравнениям можно придать опять гамильтонову форму следующим образом. Из интеграла энергии следует, что на каждом решении системы (8) E равно постоянной h. Введем теперь функцию

$$F = x(E - h) = x(T - U - h), \tag{15}$$

которая зависит от переменных x_k, y_k $(k = 1, \ldots, 6)$. Для рассматриваемого решения

$$F_{x_k} = xE_{x_k}, \quad F_{y_k} = xE_{y_k},$$

так как другой член, возникающий при дифференцировании $x(E - h)$, содержит равный нулю на каждом решении множитель $E - h$. Следовательно, система (14) переходит в гамильтонову систему

$$x'_k = F_{y_k}, \quad y'_k = -F_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6), \tag{16}$$

и притом этой системе удовлетворяют все те решения первоначальных уравнений движения, для которых E имеет заданное значение h, и поэтому функция F равна нулю. Так как новая гамильтонова функция F не содержит явно независимой переменной s, то для каждого решения системы (16) производная

$$F' = \sum_{k=1}^{6} (F_{x_k} x'_k + F_{y_k} y'_k)$$

равна нулю, поэтому F является постоянной. Тогда для $F = 0$, $x \neq 0$ система (14), наоборот, следует из системы (16), в то время как решения (16) при $F \neq 0$ не имеют прямого отношения к задаче трех тел. Поэтому польза от введения функции $F = xT - xU - hx$ состоит в том, что слагаемые xT, xU не становятся бесконечными при $t \to t_1$, а стремятся к конечным пределам. Разумеется, вследствие бесконечности y не все производные F_{x_k} остаются ограниченными, поэтому система (16) также еще не пригодна для дальнейшего исследования особенности при $t = t_1$. Нам придется сделать еще одно каноническое преобразование, при котором y_1, y_2, y_3 выразятся через обратные радиусы.

Чтобы дать представление об этом преобразовании, обратимся сначала к задаче двух тел. Эта задача получается в предположении, что тело P_2 при $t \to t_1$ не оказывает существенного влияния на поведение тел P_1 и P_3. Поэтому исключим совсем тело P_2, выберем в качестве тел в задаче две материальные точки P_1 и P_3, а центр инерции расположим в нуле. Тогда

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \\ U &= m_1 m_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} = m_1 m_3 x^{-1}, \\ F &= \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1}) x y^2 - m_1 m_3 - hx. \end{aligned}$$

Если ограничиться только частным случаем $h = 0$, $\frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1}) = 1$ и опустить аддитивную постоянную $-m_1 m_3$, то получится упрощенная система Гамильтона

$$x_k' = F_{y_k}, \quad y_k' = -F_{x_k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3), \tag{17}$$

где

$$F = F(x_k,\, y_k) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

По теории Гамильтона–Якоби, развитой в § 3, полное решение системы (17) получается в том случае, если найти зависящее от трех параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3 решение $w(x_k,\, \xi_k,\, s)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$F(x_k,\, w_{x_k}) + w_s = 0 \tag{18}$$

при выполнении условия $|w_{x_k \xi_l}| \neq 0$; тогда имеем

$$y_k = w_{x_k}, \quad \eta_k = -w_{\xi_k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3) \tag{19}$$

с шестью постоянными интегрирования ξ_k, η_k. Так как F не зависит от s, то для нахождения решения уравнения (18) сделаем подстановку

$$w(x_k,\, \xi_k,\, s) = v(x_k,\, \xi_k) - \lambda(\xi_k)s. \tag{20}$$

Решение можно было бы осуществить еще проще, если предполагать, что функция w не зависит от s; но тогда в силу (19) общее решение x_k, y_k системы (17) также не будет содержать s, что приводит к противоречию. После применения подстановки (20) уравнение (18) переходит в

$$F(x_k,\, v_{x_k}) = \lambda(\xi_k), \quad |v_{x_k\xi_l}| \neq 0, \tag{21}$$

и соотношения (19) переходят в

$$y_k = v_{x_k}, \quad \eta_k = \lambda_{\xi_k}s - v_{\xi_k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{22}$$

Прежде чем решать уравнение (21), изменим обозначения и вместо (22) введем каноническое преобразование

$$y_k = v_{x_k}, \quad \eta_k = -v_{\xi_k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3), \tag{23}$$

которое не зависит от s. Из (21) следует

$$F(x_k,\, y_k) = F(x_k,\, v_{x_k}) = \lambda(\xi_k);$$

по теории преобразований гамильтонова система (17) вследствие (22) переходит в

$$\xi_k' = \lambda_{\eta_k} = 0, \quad \eta_k' = -\lambda_{\xi_k}.$$

Следовательно, ξ_k и $\eta_k + \lambda_{\xi_k}s = \zeta_k$ $(k = 1,\, 2,\, 3)$ являются постоянными интегрирования.

Чтобы решить уравнение (21), рассмотрим прежде всего аналогичную задачу на плоскости и затем уже обобщим надлежащим образом найденное решение на случай трех измерений. В упрощенном таким способом дифференциальном уравнении

$$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) = \lambda(\xi_k), \quad |v_{x_k\xi_l}| \neq 0, \tag{24}$$

положим $x_1 + ix_2 = z$ и попытаемся получить v как мнимую часть аналитической функции $\varphi z = u + iv$. В силу условий Коши–Римана имеем

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \quad v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 = u_{x_1}^2 + v_{x_1}^2 = |\varphi_z|^2,$$

следовательно, выражение

$$|z\varphi_z^2| = \lambda(\xi_k)$$

должно быть постоянным относительно z. Но так как функция $z\varphi_z^2$ является аналитической, то и сама эта функция постоянна. Положим

$$z\varphi_z^2 = \overline{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \varphi_z = \left(\frac{\overline{\zeta}}{z}\right)^{1/2}$$

с комплексной постоянной $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$. Интегрированием получим, что функция

$$\varphi(z) = 2\sqrt{\overline{\zeta}z}$$

является решением поставленной задачи. Отсюда

$$iv = \sqrt{\overline{\zeta}z} - \sqrt{\zeta\overline{z}},$$

$$v^2 = 2|\zeta z| - \overline{\zeta}z - \zeta\overline{z} = 2\bigl\{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\bigr\}.$$

При $\zeta z \neq 0$ легкое вычисление показывает, что

$$|v_{x_k\xi_l}| = \frac{1}{4|\zeta z|} \neq 0,$$

следовательно, второе требование в (24) также выполнено.

Ближайшая задача — обобщить найденные результаты с помощью преобразования

$$v^2 = 2\left(\xi x - \sum_{k=1}^{3} \xi_k x_k\right), \quad \xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}, \quad x = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{25}$$

на случай трех измерений. Покажем, что из (25) действительно следует (21) с соответствующей $\lambda(\xi_k)$ и что

$$F(x_k, y_k) = xy^2 = x(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Из (25) прежде всего имеем

$$\begin{cases} vv_{x_k} = \dfrac{x_k}{x}\xi - \xi_k \quad (x \neq 0), \\[2ex] vv_{\xi_k} = \dfrac{\xi_k}{\xi}x - x_k \quad (\xi \neq 0). \end{cases} \tag{26}$$

Умножая первое из уравнений (26) на x, возводя в квадрат и суммируя по $k = 1, 2, 3$, получим

$$\begin{gathered} x^2 v^2 \sum_{k=1}^{3} v_{x_k}^2 = 2\xi^2 x^2 - 2\xi x \sum_{k=1}^{3} \xi_k x_k = \xi x v^2, \\ x \sum_{k=1}^{3} v_{x_k}^2 = \xi \quad (xv^2 \neq 0); \end{gathered} \tag{27}$$

вычисляя далее функциональный определитель, имеем

$$|v_{x_k \xi_l}| = -\frac{1}{4\xi x v} \quad (\xi x v \neq 0),$$

после чего, полагая

$$\lambda(\xi_k) = \xi,$$

убедимся в том, что уравнение (21) удовлетворяется. Чтобы удовлетворить еще требованию $\xi x v \neq 0$, предположим, что оба действительных вектора $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_k)$ и $(x_1, x_2, x_3) = (x_k)$ линейно независимы. Это делает нашу подстановку пригодной; остается еще найти каноническое преобразование (23), производимое функцией $v(x_k, \xi_k)$.

Умножение первого уравнения (26) на x и второго — на ξ дает

$$x v v_{x_k} = \xi x_k - \xi_k x = -\xi v v_{\xi_k},$$

что вследствие (23) сводится к

$$x y_k = \xi_{\eta_k} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Из (23) и (27) получается равенство

$$x y^2 = \xi;$$

далее, из (26) следует, если учесть также (27), соотношение

$$\xi \sum_{k=1}^{3} v_{\xi_k}^2 = x,$$

откуда по формулам (23), полагая для сокращения $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = \eta^2$, получим формулу

$$\xi \eta^2 = x. \tag{29}$$

Умножение соотношения (28) на y^2 дает

$$\eta_k = \frac{y_k}{y^2} \quad (k = 1,\, 2,\, 3) \tag{30}$$

и, соответственно,

$$y_k = \frac{\eta_k}{\eta^2} \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{31}$$

При этом вследствие $x\xi \neq 0$ имеем также $y \neq 0$, $\eta \neq 0$. Соотношения (30) и (31) показывают, что тройки y_1, y_2, y_3 и η_1, η_2, η_3 получаются друг из друга с помощью преобразования обратных радиусов.

Наконец, необходимо явно написать уравнения преобразования для x_k. Из (23) и (26) имеем

$$vy_k = \frac{x_k}{x}\xi - \xi_k.$$

Умножая на x_k, суммируя по k и вводя сокращенные обозначения

$$g = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{3} \xi_k \eta_k,$$

получаем формулу

$$vg = x\xi - \sum_{k=1}^{3} x_k \xi_k = \frac{v^2}{2},$$

следовательно,

$$g = \frac{v}{2};$$

аналогично получаем

$$\gamma = -\frac{v}{2}$$

с помощью формулы

$$v\eta_k = x_k - \frac{\xi_k}{\xi}x.$$

Далее, из последнего уравнения получаем

$$x_k = \frac{\xi_k}{\xi}x - 2\gamma\eta_k;$$

это соотношение сводится в силу (29) к

$$x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{32}$$

Совершенно так же получим обратное преобразование

$$\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{l=1}^{3} x_l y_l \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{33}$$

Найденное каноническое преобразование оказалось бирациональным и инволюционным. Для проведения выкладок было предположено, что оба вектора (x_k), (ξ_k) действительны и линейно независимы. Легко дополнительно показать, что (30) и (33) являются единственным решением уравнений (31) и (32), если только $\eta \neq 0$; при выполнении этого условия $y \neq 0$ и преобразование будет каноническим.

Прежде чем применить это преобразование к регуляризации соударений в задаче трех тел, определим те траектории в задаче двух тел, для которых $h = 0$. С помощью преобразований (31) и (32) гамильтоновы уравнения (17) можно привести к виду

$$\xi_k' = 0, \quad \eta_k' = -\lambda_{\xi_k} = -\frac{\xi_k}{\xi} \quad (\xi \neq 0;\; k = 1,\, 2,\, 3),$$

решение которых

$$\eta_k = -\frac{\xi_k}{\xi} s + \zeta_k \tag{34}$$

содержит действительные постоянные ξ_k, ζ_k. Подставляя это решение в (32), получим x_k в виде многочленов второй степени относительно s; мы получили искомые уравнения траектории. Покажем, что траектория является параболой. Из (34) следует, что вектор (η_k) лежит в плоскости, определенной векторами (ξ_k), (ζ_k); в этой же плоскости, согласно (32), лежит и вектор (x_k), а потому и вся траектория. В силу ортогональной инвариантности[1] достаточно рассмотреть случай $\xi_3 = \zeta_3 = 0$, в котором речь идет о плоскости $x_3 = 0$. Шесть выражений x_1^2, $x_1 x_2$,x_2^2,

[1]То есть вследствие инвариантности длины вектора при ортогональных преобразованиях координат. — *Прим. перев.*

x_1, x_2, 1 суть многочлены относительно s степени $\leqslant 4$, и потому являются однородными линейными функциями пяти переменных s^4, s^3, s^2, s, 1. Поэтому существует многочлен второй степени относительно x_1, x_2, который как функция s тождественно равен нулю. Следовательно, траектория является коническим сечением. Для дальнейшего заменим s на $s+c$ с постоянным c, тогда (34) переходит в

$$\eta_k = -\frac{\xi_k}{\xi} s + \Big(\zeta_k - c\frac{\xi_k}{\xi}\Big).$$

Определим c, потребовав, чтобы векторы (ξ_k) и $\Big(\zeta_k - c\frac{\xi_k}{\xi}\Big)$ были взаимно ортогональными:

$$c\xi = \sum_{k=1}^{2} \xi_k \zeta_k.$$

Тогда если обозначить опять $\zeta_k - c\frac{\xi_k}{\xi}$ через ζ_k, то (ξ_k), (ζ_k) будут ортогональными и уравнение (34) вместе с уравнениями

$$\eta^2 = s^2 + \zeta^2, \quad \sum_{k=1}^{2} \xi_k \eta_k = -\xi s$$

удовлетворяются при $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$. При этом соотношение (32) переходит в

$$x_k = \xi_k(s^2+\zeta^2) + 2\Big(\zeta_k - \frac{\xi_k}{\xi}s\Big)\xi s = 2\xi s \zeta_k + (\zeta^2 - s^2)\xi_k \quad (k = 1,\, 2). \tag{35}$$

Это коническое сечение является параболой, ось которой параллельна вектору $(-\xi_k)$. Покажем еще, что фокус этой параболы лежит в начале координат. Для этого применим характеристическое свойство параболы, по которому вектор, проведенный из начала координат в каждую ее точку, образует с касательной к параболе в этой точке тот же угол, какой эта касательная образует с осью параболы. Так как направление этой оси задано величинами $(-\xi_k)$ и вектор (x_k') указывает направление касательной, то нужно только доказать справедливость уравнения

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{x_k}{x} x_k' = \sum_{k=1}^{2} \frac{-\,\xi_k}{\xi} x_k'.$$

Но, согласно (35),

$$\frac{x_k'}{2} = \xi\zeta_k - s\xi_k,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{\xi_k}{\xi}x_k' = -s\xi.$$

С другой стороны, дифференцирование равенств $x^2 = x_1^2 + x_2^2$, $x = \xi\eta^2$ и использование (34) дает

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{x_k}{x}x_k' = \frac{1}{2}x' = \xi\sum_{k=1}^{2}\eta_k\eta_k' = \xi\sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{\xi_k}{\xi}s - \zeta_k\Big)\frac{\xi_k}{\xi} = \xi s,$$

т. е. то, что требовалось доказать. Наконец, зависимость между t и s задается соотношением

$$t' = x = \xi\eta^2 = \xi(s^2 + \zeta^2),$$

т. е. при подходящем выборе начала отсчета времени соотношением

$$t = \frac{\xi}{3}s^3 + \xi\zeta^2 s.$$

В случае столкновения обоих тел $x = \xi(s^2 + \zeta^2)$ равно нулю, следовательно, $\zeta = 0$, $x_k = -s^2\xi_k$ $(k = 1,\, 2)$, $t = (\xi/3)s^3$; парабола вырождается в прямую, столкновение происходит при $s = t = 0$ и $t^{1/3}$ является регуляризирующей переменной для η_k.

Следует заметить, что, согласно предыдущему, только те параболы являются траекториями в первоначальной задаче двух тел при $h = 0$, для которых выполнено условие $xy^2 = m_1m_3$, т. е. $\xi = m_1m_3$. Этим объясняется кажущееся противоречие: найденные параболические орбиты вначале содержат шесть параметров, т. е. столько же, как и общее решение пространственной задачи двух тел в относительных координатах.

§ 8. Применение к задаче трех тел

Применим теперь найденное в предыдущем параграфе преобразование к задаче трех тел. Теперь $F(x_k,\, y_k)$ обозначает функцию, определяемую формулами (7; 7), (7; 9) и (7; 15), от двенадцати переменных

x_k, y_k $(k = 1, \ldots, 6)$, определенных равенствами (7; 4) и (7; 5); мы будем рассматривать систему Гамильтона (7; 16) с независимой переменной s, которая задается формулой (7; 12). При значениях s в интервале $0 \leqslant s < s_1$, где s_1 определяется равенством (7; 13), все функции $x_k(s)$, $y_k(s)$ регулярны, в то время как при $s = s_1$ по крайней мере одна из трех функций $y_1(s)$, $y_2(s)$, $y_3(s)$ имеет особенность. Преобразуем теперь три пары переменных x_k, y_k $(k = 1, 2, 3)$ с помощью подстановки (7; 30), (7; 33) в три новые пары ξ_k, η_k $(k = 1, 2, 3)$, а для $k = 4, 5, 6$ оставим $x_k = \xi_k$, $y_k = \eta_k$.

Это преобразование шести пар x_k, y_k $(k = 1, \ldots, 6)$, очевидно, также является каноническим, потому что это было уже установлено для первых трех пар. Так как преобразование не зависит от s, то гамильтонова функция F остается той же самой, и преобразованные уравнения движения имеют следующий вид:

$$\xi_k' = F_{\eta_k}, \quad \eta_k' = -F_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, 6), \tag{1}$$

где F нужно теперь рассматривать как функцию ξ_k, η_k. В соответствии с формулами (7; 7), (7; 9), (7; 29), (7; 31) и (7; 32) получаем

$$xT = \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})\xi + \frac{1}{2}(m_2^{-1} + m_3^{-1})\xi\eta^2 \sum_{k=1}^{3} \eta_{k+3}^2 + m_3^{-1}\xi \sum_{k=1}^{3} \eta_k \eta_{k+3}, \tag{2}$$

$$x = \xi\eta^2, \quad xU = m_1 m_3 + m_2 \xi \eta^2 \left(\frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{12}}\right), \tag{3}$$

где

$$r_{23}^2 = \sum_{k=1}^{3} \xi_{k+3}^2, \quad r_{12}^2 = \sum_{k=1}^{3} (x_k - \xi_{k+3})^2, \tag{4}$$

$$x_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^{3} \xi_l \eta_l, \quad y_k = \frac{\eta_k}{\eta^2} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{5}$$

$$\xi^2 = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^2, \quad \eta^2 = \sum_{k=1}^{3} \eta_k^2, \tag{6}$$

все это вносится в формулу

$$F = xT - xU - hx. \tag{7}$$

Нужно теперь с помощью теоремы существования Коши доказать, что новые координаты ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ как функции s останутся регулярными также и при $s = s_1$. Для этого исследуем прежде всего поведение этих координат при предельном переходе $s \to s_1$ $(0 \leqslant s < s_1)$, для чего используем результаты § 6. Соответственно этому заставим стремиться ξ_k, η_k $(k = 4, 5, 6)$ при $t \to t_1$, т. е. при $s \to s_1$, к их предельным значениям, и расстояния r_{23}, r_{12} — к положительным пределам. В соответствии с (7; 11) получаем

$$\xi = xy^2 \to \frac{2(m_1 m_3)}{m_1 + m_3} = c > 0 \quad (s \to s_1), \tag{8}$$

следовательно, ξ также имеет положительный предел. Но мы еще не можем здесь утверждать, что каждая из величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 в отдельности имеет предел. Из $x \to 0$ следует, что $y \to \infty$, и

$$\eta_k = \frac{y_k}{y^2} \to 0 \quad (s \to s_1;\ k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Выберем число s_0 в интервале $0 \leqslant s < s_1$, так что

$$\frac{c}{2} \leqslant \xi \leqslant 2c \quad (s_0 \leqslant s < s_1), \tag{10}$$

и рассмотрим теперь ξ_1, ξ_2, ξ_3 как независимые переменные в определенном неравенством (10) сферическом слое S. Остальные девять координат ξ_k $(k = 4, 5, 6)$, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ имеют как функции s при $s \to s_1$ определенные пределы. В соответствии с (9) мы можем выбрать настолько малую замкнутую действительную сферу K около соответствующей точки в девятимерном пространстве, что в силу соотношений (4), (5) и (6) во всех точках области $P = S \times K$ функции ξ, r_{12}^{-1}, r_{23}^{-1} двенадцати независимых переменных ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ будут регулярными. Тогда в этой области, согласно (2), (3) и (7), будет регулярна и функция F. Следовательно, в интервале $s_0 \leqslant s < s_1$, где s_0 достаточно близко к s_1, дуга интегральной кривой $\xi_k(s)$, $\eta_k(s)$ погружена целиком в P, и из результата, приведенного в конце § 4, следует регулярность всех $\xi_k(s)$, $\eta_k(s)$ $(k = 1, \ldots, 6)$ в точке $s = s_1$. В частности, ξ_1, ξ_2, ξ_3 при $s \to s_1$ действительно имеют предельные значения.

Чтобы рассмотреть более подробно поведение t в точке s_1, положим для сокращения $\xi_k(s_1) = \xi_{k1}$ $(k = 1, 2, 3)$, $b = \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})$ и напишем в соответствии с (8) и (9), используя соотношения (1), (2), (3) и (7) при $k = 1, 2, 3$, разложения в ряды по степеням $s - s_1$:

$$\eta_k' = -F_{\xi_k} = -\frac{b}{c}\xi_{k1} + \ldots, \quad \eta_k = -\frac{b}{c}\xi_{k1}(s - s_1) + \ldots \tag{11}$$

Отсюда

$$\eta^2 = b^2(s - s_1)^2 + \ldots, \tag{12}$$

и из (5) получаем

$$\begin{aligned} x_k = \xi_{k1} b^2 (s - s_1)^2 - 2b^2 \xi_{k1}(s - s_1)^2 + \ldots = \\ = -b^2 \xi_{k1}(s - s_1)^2 + \ldots \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{13}$$

следовательно,

$$x = b^2 c (s - s_1)^2 + \ldots$$

Согласно (7; 12) $t' = x$, поэтому

$$t = t_1 + \frac{b^2 c}{3}(s - s_1)^3 + \ldots \tag{14}$$

есть разложение t в ряд по степеням $s - s_1$ в окрестности $s = s_1$. Обращением этого ряда получим, наконец, разложение по положительным степеням $(t - t_1)^{1/3}$ с действительными коэффициентами

$$s - s_1 = \left[\frac{3}{b^2 c}(t - t_1)\right]^{1/3} + \ldots, \tag{15}$$

причем под $(t - t_1)^{1/3}$ при $t < t_1$ нужно подразумевать действительное значение этого выражения. Этим показано, что при аналитическом продолжении первоначального решения $x_k(t)$, $y_k(t)$ системы (7; 8) вдоль интервала $\tau \leqslant t < t_1$ точка $t = t_1$ является точкой ветвления второго порядка. Величины x_k как функции $s - s_1$ будут в соответствии с разложением (13) регулярными; с помощью (11), (12) получаем разложение

$$y_k = \frac{\eta_k}{\eta^2} = -(bc)^{-1}\xi_{k1}(s - s_1)^{-1} + \ldots \quad (k = 1, 2, 3),$$

следовательно, y_k как функции s в случае $\xi_{k1} \neq 0$ имеют полюс первого порядка при $s = s_1$.

Наш результат показывает, что мы можем аналитически продолжить x_k, y_k через особенность $t = t_1$; теперь нужно исследовать поведение x_k, y_k при прохождении s через s_1 по действительной оси s. В соответствии с разложением (14) t остается при этом действительным и проходит, возрастая, через t_1. Вследствие действительности всех коэффициентов разложений в ряды x_k, y_k также остаются действительными при этом аналитическом продолжении. Из разложения (13) можно заметить, что обе материальные точки P_1 и P_3, двигаясь по направлению вектора (ξ_{k1}), сталкиваются при $t = t_1$ и затем отталкиваются друг от друга. Это заключение имеет, разумеется, только математический смысл, но не имеет физического значения. Для всех $t > t_1$, достаточно близко лежащих к t_1, опять имеем $x > 0$, и y является конечным. В силу обратной подстановки (7;31), (7;32) можно ввести опять старые координаты x_k, y_k вместо ξ_k, η_k. При этом значения постоянных в интегралах движения центра инерции, постоянных в интегралах площадей и постоянной в интеграле энергии остаются те же, что и для $\tau \leqslant t < t_1$, так как они получаются при аналитическом продолжении функций переменной t. То же самое справедливо и для дифференциальных уравнений, поэтому уравнения (7;16) также удовлетворяются, и можно опять перейти от них через (7;6) к системе (7;2).

Пусть теперь существует определенное значение $t > t_1$, до которого решение (7;2) уже продолжено. Обозначим это значение времени опять через τ; мы можем применить к новому τ все до сих пор доказанное. Если при осуществлении аналитического продолжения для возрастающего $t > \tau$ мы встретим новую особенность при конечном значении $t = t_2$, то тогда снова только два тела должны столкнуться, так как по предположению постоянные площадей не все равны нулю. Это могут быть и не P_1 и P_3, но и в этом случае можно при $t = t_2$ провести соответствующую регуляризацию, как ранее для $t = t_1$. Продолжив решение через t_2 и идя дальше, мы можем встретить снова особые точки $t = t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если число особенностей будет конечным или если t_n при $n \to \infty$ стремится к бесконечности, то для всех конечных $t \geqslant \tau$ мы получим аналитическое продолжение. Докажем теперь, что оставшийся нерассмотренным случай, в котором t_n имеют конечную точку накопления t_∞, вообще невозможен.

Это утверждение можно доказать при помощи уже использованных результатов. Итак, пусть t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ суть расположенные в возрастающем порядке особые точки при аналитическом продолжении данного решения при $t \geqslant \tau$ вдоль действительной оси t и пусть их предельная точка t_∞ конечна. В интервале $\tau \leqslant t < t_\infty$ значение потенциальной функции U для всех $t = t_n$ бесконечно, а в остальных точках конечно. Можно утверждать, что U стремится к бесконечности, если t, оставаясь в этом интервале, стремятся к t_∞. Действительно, в противном случае для заданного положительного числа A можно было бы указать возрастающую сходящуюся к t_∞ последовательность таких значений t, для которых U остается не больше A. Но тогда из заключительного утверждения § 5 следует, что решение будет регулярно при $t = t_\infty$, в то время как эта точка, как предельная точка особых точек t_n, сама должна быть особой. Поэтому $U \to \infty$ при $t \to t_\infty$ и, следовательно, наименьшее из трех расстояний r_{12}, r_{23}, r_{31} стремится к нулю. Тогда из формулы Лагранжа (6; 2) следует, что $\ddot{I} > 0$ в некотором достаточно малом интервале $t_0 \leqslant t < t_\infty$. Функция $\ddot{I}$ при всех $t = t_n$ будет бесконечной. Уже было доказано, что $\dot{I}$ при $t = t_1$ и, следовательно, также при всех $t = t_n$ непрерывна слева; таким же точно способом можно доказать правостороннюю непрерывность. Поэтому $\dot{I}$ в рассматриваемом интервале монотонно возрастает и непрерывна; ввиду этого из (6; 6) следует, что I при $t_0 \leqslant t < t_\infty$ имеет положительную нижнюю грань. Отсюда, аналогично неравенствам (6; 7), получаем, что при $t \to t_\infty$ только одна из сторон треугольника $r_{13} = r$ стремится к нулю, в то время как остальные будут оставаться больше некоторых положительных пределов. Поэтому для бесконечно многих t_n, лежащих в этом интервале, каждый раз сталкиваются P_1 и P_3, и для регуляризации при всех t_n можно использовать одно и то же преобразование (7; 4), (7; 5), (7; 30), (7; 33). Используя ранее введенные обозначения, можем утверждать, что функция $\xi = xy^2$ в соответствии с разложением (7; 11) имеет предельное значение

$$\lim_{t \to t_\infty} \xi = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3} > 0.$$

Аналогично равенству (7; 13), особенностям t_n соответствуют следующие значения регуляризирующей переменной s:

$$s_n = \int\limits_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{x(t)}.$$

При доказательстве существования интеграла $(6;10)$ мы доказали попутно ограниченность $\dot{I}$ при $t \to t_\infty$, а также сходимость несобственного интеграла

$$s_\infty = \int\limits_{t_0}^{t_\infty} \frac{dt}{x(t)};$$

отсюда следует, что s_n также имеют конечную точку накопления s_∞. Тот же самый вывод, с помощью которого была доказана в начале параграфа регулярность $x(s)$ при $s = s_1$, устанавливает теперь также регулярность этой функции при $s = s_\infty$. Но, с другой стороны, $x(s)$ равно нулю при бесконечно многих s_n с точкой накопления s_∞. Так как аналитическая функция $x(s)$ не равна тождественно нулю, то мы получили противоречие. Следовательно, предположение о том, что особенности t_n могут накапливаться на конечном интервале значений t, является ложным.

Так же, как это было сделано для всех $t \geqslant \tau$, решение можно продолжить и при $t \leqslant \tau$. Это не потребует никаких новых рассуждений, если заметить, что уравнения движения $(7;2)$ не изменятся при замене q_k, p_k, t на q_k, $-p_k$, $-t$. Таким образом, мы получаем решение для всех конечных действительных значений t. Единому рассмотрению решения на всей оси времени мешает только еще то обстоятельство, что применявшийся до сих пор выбор локально регуляризирующей переменной s зависит от выбора тех двух из трех точек, которые будут сталкиваться. Поэтому теперь нужно ввести вместо s подходящим образом выбранную новую переменную ω, которая будет регуляризирующей в целом (im Großen). При этом t и координаты трех тел q_k $(k = 1, \ldots, 9)$ будут регулярными функциями от ω в единичном круге $|\omega| < 1$, а интервал $-1 < \omega < 1$ будет отображаться на всю действительную ось t.

Существование такого параметра ω можно доказать без особых выкладок следующим образом. До сих пор регуляризация единственной особенности производилась посредством подстановки $(7;12)$. При этом x было расстоянием между сталкивающимися материальными точками, поэтому в подстановке фигурировали только два тела из трех. Чтобы уничтожить такую асимметрию, заменим сначала величину x^{-1} в $(7;12)$ величиной U, положив

$$s = \int\limits_{\tau}^{t} U\,dt. \tag{16}$$

Так как U при приближении к особой точке t_1 ведет себя асимптотически как $m_1 m_3 x^{-1}$, то легко показать, что новый параметр s может служить для регуляризации всех соударений. При этом хотелось бы, чтобы s вместе с t стремилось к $\pm\infty$. Хотя фактически это при определении (16) выполнено, но, чтобы избежать вовсе не тривиального доказательства, можно вместо (16) сделать подстановку

$$s = \int_{\tau}^{t} (U+1)dt. \tag{17}$$

Тогда s, очевидно, будет обладать желаемым свойством. Этим параметром s также регуляризируются все столкновения, поэтому каждая конечная точка s_0 действительной оси s является центром круга K_0 комплексной плоскости s, внутри которого t и девять координат q_k представляются сходящимися степенными рядами относительно переменной $s - s_0$. Множество всех таких кругов K_0 для переменной s_0 образует, очевидно, односвязную область G, симметрично расположенную относительно действительной оси s и содержащую эту ось. По теореме Римана эта область может быть конформно отображена на круг единичного радиуса в плоскости некоторой переменной ω и именно так, чтобы при этом действительная ось s перешла в диаметр $-1 < \omega < 1$. Тогда введенный таким образом параметр ω обладает желаемыми свойствами.

Однако это рассуждение доказывает только существование такого параметра. Чтобы произвести явно указанное конформное отображение, нужно лучше знать область, образуемую перекрытием кругов сходимости K_0. Весьма возможно, что радиус ρ_0 круга K_0 как функция s_0 не имеет положительной нижней грани. Тогда не существует параллельной полосы, которая целиком содержалась бы в G и включала бы в себя действительную ось s. В действительности этот случай не встречается; в следующем параграфе будет доказана теорема Зундмана о том, что радиус сходимости ρ_0 имеет положительную нижнюю грань δ, поэтому время t и координаты q_k $(k = 1, \ldots, 9)$ будут регулярными в полосе $-\delta < \nu < \delta$ функциями определенного формулой (17) параметра $s = \sigma + i\nu$. Доказательство можно выполнить сразу, если выразить δ как функцию начальных значений и масс, предполагая по-прежнему, что не все постоянные площадей равны нулю. Прежде всего при этом исследовании нужно доказать две важные вспомогательные теоремы, которые также даны впервые Зундманом и имеют самостоятельный интерес. В первой вспомогательной теореме утверждается, что периметр треугольника, образованного тремя материальными точками, для всех моментов времени остается больше некоторого положительного числа ϑ. Ранее нами было только доказано, что периметр треугольника будет существенно положительным, так как случай тройного столкновения исключается; но при этом все-таки возможно, что периметр треугольника при достаточно больших значениях времени может оказаться сколь угодно близким к нулю. Во второй вспомогательной теореме утверждается, что величина скорости той материальной точки, которая находится против наименьшей стороны треугольника, для всех моментов времени будет меньше некоторой верхней грани $\varkappa$. До сих пор было только установлено, что эта скорость является конечной. Величины ϑ, $\varkappa$ являются функциями начальных условий и масс материальных точек.

Наконец дадим общее представление о множестве всех траекторий столкновения как о части множества всех траекторий задачи трех тел. Пусть для траектории столкновения $t = t_1$ будет моментом столкновения двух масс P_1 и P_3. Введем опять регуляризирующее преобразование и обозначим, как раньше, преобразованные координаты через ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ и s, причем s должно определяться выражением (7; 12), и столкновение происходит при $s = s_1$. Тогда двенадцать координат ξ_k, η_k будут регулярными функциями s в окрестности s_1; вследствие соотношений (8) и (9) имеем

$$\xi(s_1) = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3}, \quad \eta_k(s_1) = 0 \quad (k = 1,\, 2,\, 3), \tag{18}$$

где $\xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$. Наоборот, зададим двенадцать действительных начальных значений $\xi_k(s_1)$, $\eta_k(s_1)$ $(k = 1, \ldots, 6)$ при $s = s_1$, так, чтобы выполнялось (18). Следовательно, выбор таких значений, соответствующих индексам $k = 4, 5, 6$, остается произвольным, $\eta_1(s_1) = \eta_2(s_1) = \eta_3(s_1) = 0$, а $\xi_1(s_1)$, $\xi_2(s_1)$, $\xi_3(s_1)$ выбираются в соответствии с заданной суммой квадратов (18). Тогда гамильтонова функция F, заданная равенством (7), равна нулю при этих начальных значениях и, следовательно, остается на соответствующем решении системы (1) все время равной нулю. Если перейти с помощью обратного преобразования к первоначальным координатам q_k, $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, 9)$, то получится соответствующее соударению решение, для которого постоянная энергии имеет значение h, входящее в F как линейный параметр. Вследствие четырех аналитических условий (18) для двенадцати начальных значений ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ и произвольного параметра h координаты на траектории столкновения зависят от девяти параметров и времени t, т. е. в общей сложности от десяти независимых параметров. Легко получить из теоремы Коши, что решения являются аналитическими функциями параметров. Отбрасывая ранее сделанное предположение, что центр инерции находится в начале координат, мы введем еще шесть произвольных параметров. Поэтому траектории столкновения заполняют в восемнадцатимерном пространстве q_k, $\dot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, 9)$ аналитическое шестнадцатимерное многообразие. Нужно принять во внимание, что мы получим еще два таких многообразия, если будем исследовать столкновения и двух других пар точек. О форме этих трех многообразий ничего больше не известно. Возможно, что они проходят сколь угодно близко от каждой точки восемнадцатимерного пространства. Можно сделать еще одно заключение: мера Лебега множества всех траекторий столкновения в пространстве q, $\dot{q}$ равна нулю. В частности, траектории столкновения не имеют значения для эргодической теории, так как в этой теории может идти речь лишь о множествах положительной меры. Наконец отметим, что все исключенные траектории тройного столкновения также имеют в этом пространстве нулевую меру; это следует из того обстоятельства, что все они лежат в шестнадцатимерном алгебраическом многообразии, которое определяется нулевыми значениями постоянных в интегралах площадей при неподвижном центре инерции.

§ 9. Оценка периметра треугольника

Предположим опять, что центр инерции P_0 находится в начале координат. В этом параграфе мы докажем первую вспомогательную теорему Зундмана.

Если не все постоянные площадей равны нулю, то периметр треугольника, образованного тремя телами, остается все время больше некоторой положительной постоянной.

Координаты материальных точек P_k будем опять обозначать через x_k, y_k, z_k; будем использовать сокращения q_k и q, введенные в § 5. Обозначим через ρ_k расстояние между P_k и P_0; достаточно показать, что величина

$$I = \sum_q mq^2 = \sum_{k=1}^{3} m_k \rho_k^2$$

все время остается больше некоторой положительной постоянной. Так как центр инерции лежит внутри рассматриваемого треугольника, то справедливо неравенство $\rho_1 + \rho_2 \leqslant r_{13} + r_{23}$; два других аналогичных неравенства получаются циклической перестановкой. Складывая все три неравенства, получаем для периметра $r_{12} + r_{23} + r_{31} = \sigma$ оценку снизу $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \leqslant \sigma$. Из неравенства треугольника $r_{12} \leqslant \rho_1 + \rho_2$ следует также оценка сверху $\sigma \leqslant 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$. Если μ обозначает наибольшую из трех масс, то, с одной стороны, справедливо неравенство

$$I \leqslant \mu \sum_{k=1}^{3} \rho_k^2 \leqslant \mu\sigma^2, \tag{1}$$

с другой стороны, из неравенства Шварца следует

$$\frac{\sigma^2}{4} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{3} \rho_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{3} (m_k^{1/2}\rho_k) m_k^{-1/2}\right)^2 \leqslant I \sum_{k=1}^{3} m_k^{-1}. \tag{2}$$

Поэтому $I\sigma^{-2}$ лежит между двумя положительными границами, которые зависят только от масс; для нашей цели достаточно установить для I положительную нижнюю грань.

Как и при доказательстве того, что I отлично от нуля, будем исходить из формул (6; 2) и (6; 4), по которым

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = T + h = U + 2h, \tag{3}$$

$$\begin{cases} 2IT \geqslant \dfrac{1}{4}\dot{I}^2 + \eta, \\ \eta = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{3} > 0, \end{cases} \tag{4}$$

где α, β, γ — постоянные площадей. Исключая T, получим

$$\ddot{I} - \frac{1}{4}\dot{I}^2 I^{-1} - \eta I^{-1} - 2h \geqslant 0. \tag{5}$$

Если умножить левую часть на $2\dot{I}I^{-1/2}$, то полученное выражение легко интегрируется. Обозначая неопределенный интеграл через L, имеем

$$L = (\dot{I}^2 + 4\eta)I^{-1/2} - 8hI^{1/2}. \tag{6}$$

В соответствии с неравенством (5) L возрастает вместе с t, если при этом и I возрастает, и убывает, если I убывает. Отсюда можно дать оценку снизу для I. Будем опять обозначать значения различных величин в момент $t = \tau$ индексом τ и предположим, что для данного положительного числа A выполнены четыре неравенства

$$I_\tau < A, \quad U_\tau < A, \quad |h| < A, \quad \eta^{-1} < A. \tag{7}$$

Мы покажем, что существует положительное число $\Theta = \Theta(A,\, m)$, зависящее только от A и масс m_k, такое, что неравенство $I > \Theta$ выполняется при всех действительных значениях t. Нашей целью будет также получение явного выражения Θ как функции A и m_k, однако необходимые для этого несколько громоздкие выкладки мы проводить не будем. Для упрощения обозначим через $c_l = c_l(A,\, m)$ $(l = 1,\, \ldots,\, 58)$ положительные числа, зависящие только от A, m_k, каждое из которых будет построено определенным образом; они будут играть роль верхних границ. Прежде всего очевидно, что

$$m_k m_l r_{kl\tau}^{-1} \leqslant U_\tau < A \quad (k = 1,\, 2,\, 3;\ l = 1,\, 2,\, 3,\ k < l),$$

следовательно,

$$r_{kl\tau} > c_1^{-1},$$

и из неравенства (2) имеем также

$$I_\tau > c_2^{-1}.$$

Рассмотрим сначала более простой случай $h \geqslant 0$. Тогда из (3) следует, что все время

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = U + 2h > 0,$$

следовательно, I является выпуклой книзу функцией от t. Если начальное значение $\dot{I}_\tau = 0$, то I при $t = \tau$ имеет абсолютный минимум, и $I \geqslant I_\tau > c_2^{-1}$ есть оценка нужного нам вида. Если теперь еще заменить t на $-t$, то для остального случая можно принять $\dot{I}_\tau < 0$. Рассмотрим тогда интервал $\tau \leqslant t < t_1$, в котором функция I монотонно убывает. В этом интервале величина L, определенная равенством (6), также монотонно убывает, поэтому вследствие $h \geqslant 0$ выражение $L + 8hI^{1/2}$ тоже убывает. Следовательно,

$$(\dot{I}^2 + 4\eta)I^{-1/2} \leqslant (\dot{I}_\tau^2 + 4\eta)I_\tau^{-1/2} \quad (\tau \leqslant t \leqslant t_1)$$

и, тем более,

$$4\eta I^{-1/2} \leqslant (\dot{I}_\tau^2 + 4\eta)I_\tau^{-1/2},$$

откуда

$$I \geqslant I_\tau \Big(1 + \frac{1}{4\eta}\dot{I}_\tau^2\Big)^{-2}. \tag{8}$$

Но так как функция I выпукла книзу, то оценка (8) пригодна для всех моментов времени. Из (4) следует также оценка

$$\dot{I}_\tau^2 \leqslant 8I_\tau T_\tau = 8I_\tau(U_\tau + h) < 16A^2,$$

справедливая, впрочем, и в случае $h < 0$, а из (8) получается оценка

$$I \geqslant c_2^{-1}(1 + 4A^3)^{-2}, \quad I > c_3^{-1}.$$

Таким образом случай $h \geqslant 0$ рассмотрен полностью.

В случае $h < 0$ оценка так просто не получается, так как I здесь уже не выпукла книзу и может иметь бесконечно много экстремумов. Положим $k = -2h$ и ограничимся оценкой I для $t \geqslant \tau$. Если $\dot{I} \geqslant 0$ при всех $t \geqslant \tau$, то при этих же t будет $I \geqslant I_\tau > c_2^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем исследовать только тот случай, когда при каком-нибудь $t > \tau$ имеем $\dot{I} < 0$. Пусть теперь $\tau \leqslant t_0 < t_1$, и I монотонно убывает во всем интервале $t_0 < t < t_1$. Но тогда там монотонно убывает также и функция L, в частности,

$$(\dot{I}^2 + 4\eta)I^{-1/2} + 4kI^{1/2} \leqslant (\dot{I}_0^2 + 4\eta)I_0^{-1/2} + 4kI_0^{1/2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{9}$$

где индекс 0 соответствует значениям функций при $t = t_0$. Так как $k > 0$, то

$$4\eta I^{-1/2} \leqslant (\dot{I}_0^2 + 4\eta)I_0^{-1/2} + 4kI_0^{1/2},$$

откуда

$$I \geqslant I_0 \Big(1 + \frac{k}{\eta}I_0 + \frac{1}{4\eta}\dot{I}_0^2\Big)^{-2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{10}$$

Выберем теперь для закрепленного t_1 нижнюю границу интервала t_0 возможно меньшей. Тогда или $t_0 = \tau$ и, следовательно,

$$I \geqslant c_2^{-1}\Big(1 + \frac{k}{\eta}A + \frac{4}{\eta}A^2\Big)^{-2}, \quad I > c_4^{-1} \quad (\tau \leqslant t \leqslant t_1), \tag{11}$$

или $t_0 > \tau$ и I_0 есть максимум I. В последнем случае $\dot{I}_0 = 0$, и из неравенства (9) следует

$$\eta I^{-1/2} + kI^{1/2} \leqslant \eta I_0^{-1/2} + kI_0^{1/2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{12}$$

При этом предполагается, что I в этом интервале монотонно убывает.

Последнее неравенство дает возможность получить для величины I оценку снизу, которая легко выводится из свойств функции

$$f(x) = \eta x^{-1/2} + kx^{1/2} \quad (x > 0).$$

Эта функция не изменится, если x заменить на $(\eta/k)^2 x^{-1}$, и имеет при положительных x только один экстремум, а именно минимум при $x = \eta/k$. В интервале $0 < x < \dfrac{\eta}{k}$ она монотонно убывает. В интервале $t_0 < t \leqslant t_1$ будет $I < I_0$, и из (12) получается, что $f(I) \leqslant f(I_0)$, следовательно, тем более $I_0 > \eta/k$. С другой стороны, $f(x) = f(I_0)$ при $x = (\eta/k)^2\, I_0^{-1} < \eta/k$, следовательно, $f(x) > f(I_0)$ при $x < (\eta/k)^2 I_0^{-1}$ и потому

$$I \geqslant \Big(\frac{\eta}{k}\Big)^2 I_0^{-1} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Если при этом $I_0 \leqslant k^{-2}$, то

$$I \geqslant \eta^2 > A^{-2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{13}$$

Остается рассмотреть случай $I_0 > k^{-2}$. Тогда либо для всех моментов времени

$$I \geqslant k^{-2} = (2h)^{-2} > (2A)^{-2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{14}$$

либо существует в интервале такой момент $t = t_2 < t_1$, для которого $I = I_2 = k^{-2}$. При последнем допущении будем иметь

$$I > (2A)^{-2} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{15}$$

в то время как для остального интервала $t_2 \leqslant t \leqslant t_1$ можно применить неравенство (10) с заменой t_0, I_0, $\dot{I}_0$ на t_2, I_2, $\dot{I}_2$, что дает

$$I \geqslant \Big(k + \eta^{-1} + \frac{k}{4\eta}\dot{I}_2^2\Big)^{-2} \quad (t_2 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{16}$$

Ниже мы докажем оценку

$$\dot I_2^2 \leqslant c_5 k^{-1} \quad (I_2 = k^{-2}, \quad \dot I_2 < 0). \tag{17}$$

Если считать, что она доказана, можно объединить неравенства (13), (14), (15), (16) в одно неравенство

$$I > c_6^{-1} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{18}$$

При этом функция I имеет в точке t_0 максимум и в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ она монотонно убывает. Рассмотрим теперь следующие три возможности. Если I убывает при всех $t > t_0$, то оценка (18) справедлива при всех $t \geqslant t_0$. Если I при $t > t_0$ имеет где-нибудь минимум, то это будет сначала при $t = t_1$. Тогда, если I при $t > t_1$ все время возрастает, то во всяком случае

$$I \geqslant I_1 > c_6^{-1} \quad (t \geqslant t_1),$$

следовательно, опять $I > c_6^{-1}$ при всех $t \geqslant t_0$. Но если I при $t > t_1$ не все время возрастает, то первый максимум встретится при $t = t_3$, и тогда в интервале между двумя последовательными максимумами имеем

$$I \geqslant I_1 > c_6^{-1} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_3).$$

Наконец, следует заметить, что моменты времени, соответствующие изолированным максимумам, не могут накапливаться на конечном интервале, так как иначе накапливались бы и нули функции $\dot I(t)$; но, согласно уже полученным результатам об аналитическом продолжении решения задачи трех тел, $\dot I(t)$ должно тождественно равняться нулю, а этот случай был уже нами рассмотрен ранее в предположении $\dot I \geqslant 0$ $(t \geqslant \tau)$. Поэтому оценка $I > c_6^{-1}$ доказана при всех $t \geqslant t_0$, если t_0 есть время первого максимума I при $t > \tau$. Наконец, пусть $\tau \leqslant t \leqslant t_0$, или, если I при $t > \tau$ вообще не имеет максимума, $\tau \leqslant t$. Тогда внутри этого интервала нет и минимумов, соответственно, I не убывает, так как там тривиальным образом $I \geqslant I_\tau > c_2^{-1}$. В остальных случаях можно применить неравенство (11) и получить $I \geqslant c_4^{-1}$ для интервала $\tau \leqslant t \leqslant t_0$ или, соответственно, для $\tau \leqslant t$. Итак, действительно $I > c_7^{-1}$ при всех $t \geqslant \tau$.

Нужно еще доказать неравенства (17), для чего недостаточно использовать дифференциальное неравенство (5); требуется более точно изучить поведение функции I. Пусть наименьшая сторона треугольника, образованного материальными точками в момент t, опять будет $r_{13} = r$ и пусть ρ обозначает расстояние между P_2 и центром инерции P_0, который находится в начале координат. Неравенство треугольника дает тогда

$$\rho < r + r_{23} \leqslant 2r_{23}, \quad \rho < r + r_{12} \leqslant 2r_{12}. \tag{19}$$

Наоборот, в нижнюю оценку ρ входят две стороны треугольника r_{12} и r_{23}. Положим $m_1 + m_2 + m_3 = M$, тогда из теоремы о движении центра инерции

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0 \tag{20}$$

следует формула

$$Mq_2 = m_1(q_2 - q_1) + m_3(q_2 - q_3).$$

Заметим также, что угол треугольника при P_2 не больше $\pi/3$, и его косинус $\geqslant 1/2$, поэтому

$$M^2\rho^2 \geqslant (m_1 r_{12})^2 + (m_3 r_{23})^2 + m_1 m_3 r_{12} r_{23} > \frac{1}{2}(m_1 r_{12} + m_3 r_{23})^2,$$

откуда

$$2M\rho > m_1 r_{12} + m_3 r_{23}. \tag{21}$$

Так как r_{13} является наименьшей стороной треугольника, то $r_{12}/2 \leqslant$ $\leqslant r_{23} \leqslant 2r_{12}$. Из оценок (19) и (21) следует, что отношения r_{12}/ρ, r_{23}/ρ лежат между двумя положительными границами, которые зависят только от масс.

После этого вспомогательного рассмотрения вернемся опять к оценке $\dot{I}_2$. Вычитая из

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_q m\dot{q}q = \sum_{k=1}^{3} m_k(\dot{x}_k x_k + \dot{y}_k y_k + \dot{z}_k z_k)$$

уравнение, вытекающее из теоремы о движении центра инерции,

$$0 = \sum_{k=1}^{3} m_k(\dot{x}_k x_3 + \dot{y}_k y_3 + \dot{z}_k z_3),$$

получим

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_{k=1}^{2} m_k \big\{\dot{x}_k(x_k - x_3) + \dot{y}_k(y_k - y_3) + \dot{z}_k(z_k - z_3)\big\}$$

или, короче,

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_q \big\{m_1\dot{q}_1(q_1 - q_3) + m_2\dot{q}_2(q_2 - q_3)\big\}. \tag{22}$$

Выразим теперь $q_2 - q_3$ через $q_1 - q_3$ и q_2. Из уравнения (20) следует

$$m_1(q_1 - q_3) + (m_1 + m_3)(q_3 - q_2) + (m_1 + m_2 + m_3)q_2 = 0,$$

откуда

$$q_2 - q_3 = \frac{m_1}{m_1 + m_3}(q_1 - q_3) + \frac{M}{m_1 + m_3}q_2, \tag{23}$$

и потому уравнение (22) переходит в

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_q m_1\Big(\dot{q}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_3}\dot{q}_2\Big)(q_1 - q_3) + \frac{m_2 M}{m_1 + m_3}\sum_q \dot{q}_2 q_2. \tag{24}$$

Обозначив через v наибольшую из скоростей точек P_1 и P_2, с помощью неравенства Шварца получим

$$\left|\sum_q m_1\Big(\dot{q}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_3}\dot{q}_2\Big)(q_1 - q_3)\right| \leqslant \frac{m_1 M}{m_1 + m_3}vr. \tag{25}$$

Чтобы оценить правую часть, воспользуемся тем, что $h < 0$, и тогда

$$T = U + h < U, \tag{26}$$

а потому, очевидно,

$$rT \leqslant rU < c_8. \tag{27}$$

Отсюда следует

$$rv^2 < c_9, \quad rv \leqslant \sqrt{c_9 r}.$$

С другой стороны, из неравенства

$$0 \leqslant 2T = 2U - k$$

следует оценка снизу

$$2U \geqslant k, \tag{28}$$

откуда

$$r < c_{10}k^{-1}.$$

Поэтому

$$rv < c_{11}k^{-1/2}. \tag{29}$$

Замечая, что

$$\sum_q q_2^2 = \rho^2, \quad \sum_q \dot{q}_2 q_2 = \dot{\rho}\rho, \tag{30}$$

имеем из (24) в соответствии с оценками (25) и (29) дифференциальное неравенство

$$\left|\dot{I} - \frac{2m_2M}{m_1+m_3}\rho\dot{\rho}\right| < c_{12}k^{-1/2}. \tag{31}$$

В момент $t = t_2$ будет $I(t_2) = I_2 = k^{-2}$, $\dot{I}(t_2) = \dot{I}_2 < 0$. Пусть ρ_2, $\dot{\rho}_2$ — значения ρ, $\dot{\rho}$ при $t = t_2$. Если нам удастся получить оценку типа

$$-\rho_2\dot{\rho}_2 < c_{13}k^{-1/2}, \tag{32}$$

то из оценки (31) получится неравенство

$$0 < -\dot{I}_2 < c_{14}k^{-1/2},$$

а, следовательно, и неравенство (17) с $c_5 = c_{14}^2$.

Для доказательства (32) так же, как это было сделано для I, найдем дифференциальное неравенство для ρ, интегрирование которого даст нам желаемую оценку. Дифференцированием уравнения (30) получаем

$$\sum_q (\ddot{q}_2 q_2 + \dot{q}_2^2) = \ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2,$$

следовательно, согласно дифференциальным уравнениям движения,

$$\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 = \sum_q q_2\left(m_1\frac{q_1-q_2}{r_{12}^3} + m_3\frac{q_3-q_2}{r_{23}^3}\right) + v_2^2, \tag{33}$$

если v_2 есть скорость точки P_2. Если заметить, что по неравенству (21) расстояние $\rho > 0$, то из (30) следует с помощью неравенства Шварца, что

$$\dot{\rho}^2 = \left(\sum_q \dot{q}_2\frac{q_2}{\rho}\right)^2 \leqslant \sum_q \dot{q}_2^2 = v_2^2. \tag{34}$$

Для $k = 1$ и $k = 3$ из неравенств (19) следует оценка

$$|q_k - q_2| r_{k2}^{-3} \leqslant r_{k2}^{-2} < 4\rho^{-2}, \tag{35}$$

кроме того, $|q_2| \leqslant \rho$, так что из (33), (34), (35) получаем дифференциальное неравенство

$$\ddot{\rho} > -c_{15}\rho^{-2}. \tag{36}$$

Для доказательства неравенства (32) достаточно рассмотреть случай $\dot{\rho}_2 < 0$. Выберем достаточно малый интервал $t_4 \leqslant t \leqslant t_2$, в котором везде $\dot{\rho} < 0$, и r_{13} есть наименьшая из сторон треугольника. Тогда из неравенства (36)

$$2\dot{\rho}\ddot{\rho} < -2c_{15}\dot{\rho}\rho^{-2} \quad (t_4 \leqslant t \leqslant t_2),$$

откуда, интегрируя, имеем

$$\dot{\rho}_2^2 - 2c_{15}\rho_2^{-1} \leqslant \dot{\rho}^2 - 2c_{15}\rho^{-1} \quad (t_4 \leqslant t \leqslant t_2),$$

следовательно, тем более

$$\dot{\rho}_2^2 < \dot{\rho}_4^2 + 2c_{15}\rho_2^{-1},$$

где $\dot{\rho}_4 = \dot{\rho}(t_4)$, вследствие $\rho_2 \leqslant \rho_4 = \rho(t_4)$ получим также

$$(\rho_2\dot{\rho}_2)^2 < (\rho_4\dot{\rho}_4)^2 + 2c_{15}\rho_2.$$

Здесь слева стоит именно то выражение, которое использовалось при доказательстве неравенства (32). Справа стоят два слагаемых, которые легко оценить нужным нам образом, так как, по определению I,

$$I > m_2\rho^2, \quad \rho^2 < c_{16}I_2^{1/2} = c_{16}k^{-1}.$$

Для исследования первого слагаемого рассмотрим еще несколько случаев. Во-первых, рассмотрим случай, когда в качестве t_4 можно использовать ранее введенное значение t_0, для которого I имеет максимум. Тогда вследствие $\dot{I}_0 = 0$ из неравенства (31) получим

$$(\rho_4\dot{\rho}_4)^2 < c_{17}k^{-1}. \tag{37}$$

Во-вторых, пусть теперь нельзя принять $t_4 = t_0$, тогда t_4 надо выбрать возможно меньшим. Следовательно,

$$t_0 < t_4 \leqslant t_2,$$

и в момент t_4 либо $\dot\rho = \dot\rho_4 = 0$, либо r_{13} при дальнейшем убывании t перестает быть наименьшей стороной треугольника. Для $\dot\rho_4 = 0$ неравенство (37) выполняется тривиальным образом. В оставшемся случае еще какая-нибудь сторона треугольника равна r при $t = t_4$. Из неравенства треугольника имеем $r_{k2} \leqslant 2r$ $(k = 1, 3)$ при $t = t_4$, и так как, с другой стороны, величина ρ/r_{k2} лежит левее некоторой грани, зависящей только от масс, то это будет справедливо и для отношения ρ/r при $t = t_4$. По неравенству (27) там также $\rho U < c_{18}$, и из соотношений (26), (28) и (34) получается

$$(\rho\dot\rho)^2 \leqslant (\rho v_2)^2 \leqslant c_{19}\rho^2 T < c_{19}\rho^2 U < c_{20}U^{-1} \leqslant 2c_{20}k^{-1} \quad (t = t_4).$$

Отсюда следует, что (32) справедливо во всех рассмотренных случаях, поэтому доказательство первой теоремы Зундмана закончено.

В соответствии с неравенством (1) мы доказали оценку

$$\sigma > c_{21}^{-1}. \tag{38}$$

Из всего хода вывода очевидно, что можно найти весьма простое выражение для c_{21} в виде функции от A и m_k. Это выражение также было найдено Зундманом.

§ 10. Оценка скорости

Пусть центр инерции P_0 лежит в начале координат. Во второй вспомогательной теореме Зундмана утверждается:

Если не все три постоянные площадей равны нулю, то величина скорости той материальной точки, которая лежит против наименьшей стороны треугольника, всегда остается меньше некоторой конечной постоянной.

Для доказательства привлечем первую вспомогательную теорему и тогда сравнительно просто придем к цели. Согласно (9; 38), периметр треугольника удовлетворяет для всех моментов времени неравенству

$$r_{12} + r_{23} + r_{31} > c_{21}^{-1} > 0. \tag{1}$$

Если для момента t наименьшая сторона треугольника

$$r \geqslant \frac{1}{4}c_{21}^{-1},$$

то очевидно, что $T = U + h < c_{22}$; следовательно, тогда все скорости в этот момент меньше c_{23}. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением случая

$$r < \frac{1}{4} c_{21}^{-1}. \tag{2}$$

Пусть опять $r_{13} = r$ — наименьшая сторона треугольника и $v_2 = v$ — скорость точки P_2. Нам нужно получить теперь, кроме неравенства (9; 36), также неравенство противоположного смысла, для чего выведем сначала неравенство, соответствующее (9; 34). Из (9; 30) имеем

$$\rho^2(v^2 - \dot{\rho}^2) = \sum_q q_2^2 \sum_q \dot{q}_2^2 - \left(\sum_q q_2 \dot{q}_2\right)^2 = (x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2)^2 + \\ + (y_2\dot{z}_2 - z_2\dot{y}_2)^2 + (z_2\dot{x}_2 - x_2\dot{z}_2)^2. \tag{3}$$

Для оценки этого выражения используем интегралы площадей. Если для преобразования

$$\gamma = \sum_{k=1}^{3} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) \tag{4}$$

использовать еще интегралы движения центра инерции, то прежде всего получим

$$\gamma = \sum_{k=1}^{2} m_k \big\{(x_k - x_3)\dot{y}_k - (y_k - y_3)\dot{x}_k\big\},$$

откуда, исключая $x_2 - x_3$, $y_2 - y_3$ с помощью (9; 23), имеем

$$\gamma = m_1 \Big\{(x_1 - x_3)\Big(\dot{y}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_3}\dot{y}_2\Big) - \\ - (y_1 - y_3)\Big(\dot{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_3}\dot{x}_2\Big)\Big\} + \frac{m_2 M}{m_1 + m_3}(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2). \tag{5}$$

Первое слагаемое справа меньше по абсолютной величине, чем

$$c_{24} r T^{1/2} \leqslant c_{24} r \big(U + |h|\big)^{1/2} \leqslant c_{24} r U^{1/2} + c_{24} r |h|^{1/2} < c_{24} r U^{1/2} + c_{25},$$

и так как $rU < c_8$, то

$$r^2 U < c_{26}.$$

Если внести в (4) начальные значения, то при помощи неравенства Шварца найдем

$$\gamma^2 \leqslant 2I_\tau T_\tau \leqslant 2I_\tau\big(U_\tau + |h|\big) < 4A^2.$$

Поэтому (5) даст оценку

$$|x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2| < c_{27},$$

а также два аналогичных неравенства, получаемых циклической перестановкой x, y, z. Из (3) теперь следует

$$0 \leqslant v^2 - \dot{\rho}^2 < c_{28}\rho^{-2}.$$

Так как отношения r_{12}/ρ, r_{23}/ρ ограничены и так как, с другой стороны, из неравенства треугольника, согласно (1) и (2), имеем

$$r_{12}^{-1} < 4c_{21}, \quad r_{23}^{-1} < 4c_{21},$$

то будет иметь место также неравенство

$$\rho^{-1} < c_{29}, \tag{6}$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant v^2 - \dot{\rho}^2 < c_{30}\rho^{-1}. \tag{7}$$

Используем, как и ранее, для оценки сверху абсолютной величины первого члена в правой части дифференциального уравнения (9; 33) величину $c_{31}\rho^{-1}$, тогда получим из (7) неравенство

$$|\ddot{\rho}| < c_{32}\rho^{-2}, \tag{8}$$

которое дает в нашем случае вместо (9; 36) двустороннюю оценку $\ddot{\rho}$.

Из неравенства (8) путем интегрирования можно получить желаемый результат. Для этого достаточно рассмотреть только случай $t \geqslant \tau$. Если в момент t производная $\dot{\rho} = 0$, то из неравенств (6) и (7) уже следует $v^2 < c_{30}c_{29}$. Пусть, следовательно, $\dot{\rho} \neq 0$. Тогда этот момент времени заключим в интервал $t_1 < t < t_2$, в котором выполняется неравенство (2) и $\dot{\rho}$ не обращается в нуль. Тогда в этом интервале $r_{13} = r$ остается наименьшей стороной треугольника. Из (8) теперь следует

$$|2\dot{\rho}\ddot{\rho}| < 2c_{32}|\dot{\rho}|\rho^{-2} \quad (t_1 < t < t_2),$$

поэтому, так как $\dot\rho$ сохраняет в этом интервале один и тот же знак, имеем

$$|\dot\rho^2 - \dot\rho_1^2| < 2c_{32}|\rho^{-1} - \rho_1^{-1}|,$$

где $\rho_1 = \rho(t_1)$, $\dot\rho_1 = \dot\rho(t_1)$. Отсюда, по неравенству (6),

$$\dot\rho^2 < \dot\rho_1^2 + 2c_{32}c_{29}. \tag{9}$$

Будем теперь выбирать t_1 при условии $t_1 \geqslant \tau$ возможно меньшим. Если при этом $t_1 = \tau$, то, согласно (7),

$$\dot\rho_1^2 \leqslant v_\tau^2 \leqslant 2m_2^{-1}T_\tau < c_{33}. \tag{10}$$

Если, напротив, $t_1 > \tau$, то либо $\dot\rho_1 = 0$, либо

$$r = \frac{1}{4}c_{21}^{-1} \quad (t = t_1).$$

В первом случае (10) выполнено тривиальным образом. Во втором случае

$$U < c_{34}, \quad T = U + h < c_{35} \quad (t = t_1),$$

и опять

$$\dot\rho_1^2 < c_{36}. \tag{11}$$

Итак, из неравенств (6), (7), (9), (10), (11) получается в каждом случае $v^2 < c_{37}$, т. е. утверждение доказано полностью. Таким образом получается оценка

$$v < c_{38}, \tag{12}$$

в которой c_{38} можно выразить явно через A и массы.

§ 11. Теорема Зундмана

Применим теперь обе вспомогательные теоремы Зундмана к отысканию координат q_k $(k = 1, \ldots, 9)$ в задаче трех тел в виде функций новой независимой переменной, заданной выражением (8; 17)

$$s = \int_\tau^t (U + 1)dt. \tag{1}$$

Если h есть значение постоянной энергии для рассматриваемого решения, то положим теперь в отличие от (7; 15)

$$F = \frac{T - U - h}{U + 1} = \frac{T - h + 1}{U + 1} - 1. \tag{2}$$

Аналогично переходу от (7; 6) к (7; 16) получим из уравнений движения (7; 2) систему Гамильтона

$$q_k' = F_{p_k}, \quad p_k' = -F_{q_k} \quad (k = 1, \ldots, 9), \tag{3}$$

причем штрих обозначает дифференцирование по s и, кроме того,

$$t' = (U + 1)^{-1}. \tag{4}$$

Функция F на рассматриваемом решении тождественно равна нулю. Мы докажем теперь как третью вспомогательную теорему следующее утверждение:

Если для начальных значений выполнены неравенства (9; 7), то существует такая положительная величина $\delta = \delta(A, m)$, зависящая только от A и масс, что координаты q, взаимные расстояния трех тел и время t будут регулярными аналитическими функциями от $s = \sigma + i\nu$ в полосе $-\delta < \nu < \delta$ комплексной плоскости s.

Для доказательства используем опять теорему существования Коши. Мы уже знаем, что рассматриваемое решение можно аналитически продолжить для всех конечных действительных значений времени; вспомним, что в соответствии с подстановкой (1) действительной оси t при этом соответствует действительная ось s. Пусть $s = s_1$ есть произвольно выбранное действительное число. Мы докажем, что q_k $(k = 1, \ldots, 9)$, $r_{\varkappa\lambda}$ $(1 \leqslant \varkappa < \lambda \leqslant 3)$ и t будут регулярными в круге $|s - s_1| < \delta$, причем δ не зависит от s_1 и зависит только от A и масс. Мы будем обозначать в этом параграфе, как и раньше, индексом 1 значения соответствующих функций при $s = s_1$. Введем действительное число $B \geqslant A + 1$, которое позднее будет определено точнее, и будем различать в дальнейшем два случая.

Прежде всего пусть при $s = s_1$ значение $U = U_1 \leqslant B$. Для применения теоремы существования к уравнениям (3), (4) достаточно найти положительное число b, зависящее только от B и от масс, такое, чтобы функции F и $(U + 1)^{-1}$ в комплексной окрестности

$$|q_k - q_{k1}| < b, \quad |p_k - p_{k1}| < b \quad (k = 1, \ldots, 9)$$

были регулярны относительно q_k, p_k и чтобы их абсолютные значения оставались меньше некоторой величины, зависящей только от B и масс. Вследствие определения (2), это нужно доказать только для T и $(U+1)^{-1}$. В дальнейшем под $b_1, \ldots, b_5$ будем понимать надлежащим образом выбранные положительные числа, которые зависят только от масс и от B. Для $s = s_1$

$$T = T_1 = U_1 + h < B + A < 2B,$$

и (7; 1) показывает, что в комплексной окрестности

$$|p_k - p_{k1}| < 1 \quad (k = 1, \ldots, 9) \tag{5}$$

справедлива оценка вида $|T| < b_1$, причем регулярность T очевидна. Вернемся теперь к соответствующему исследованию $(U+1)^{-1}$ и определим прежде всего такую окрестность q_{k1}, чтобы там наверное было $|U+1| > \frac{1}{4}$. Для этого достаточно, чтобы там было $|U - U_1| < \frac{3}{4}$, так как тогда получается

$$|U+1| \geqslant (U_1+1) - (U_1 - U) > \frac{1}{4}.$$

Если обозначить через μ наименьшую и через m — наибольшую из масс m_k $(k = 1, 2, 3)$, то достаточно в соответствии с (5; 2) найти такую окрестность q_{k1}, в которой будут выполнены три условия

$$\left|\frac{r_{\varkappa\lambda 1}}{r_{\varkappa\lambda}} - 1\right| < \frac{\mu^2}{4m^2 B} = b_2 \quad (1 \leqslant \varkappa < \lambda \leqslant 3). \tag{6}$$

Тогда, вследствие соотношения

$$\frac{\mu^2}{r_{\varkappa\lambda 1}} < U_1 \leqslant B, \tag{7}$$

будем иметь

$$\begin{gathered} \left|\frac{1}{r_{\varkappa\lambda}} - \frac{1}{r_{\varkappa\lambda 1}}\right| = \frac{1}{r_{\varkappa\lambda 1}}\left|\frac{r_{\varkappa\lambda 1}}{r_{\varkappa\lambda}} - 1\right| < B\mu^{-2}\frac{\mu^2}{4m^2 B} = \frac{1}{4m^2}, \\ |U - U_1| = \left|\sum_{\varkappa<\lambda} m_\varkappa m_\lambda\Big(\frac{1}{r_{\varkappa\lambda}} - \frac{1}{r_{\varkappa\lambda 1}}\Big)\right| < 3m^2\frac{1}{4m^2} = \frac{3}{4}. \end{gathered} \tag{8}$$

Заметим теперь, что выражение $(u^2+v^2+w^2)^{-1/2}-1$ как функция трех комплексных переменных u, v, w будет регулярно во всех точках действительной сферы

$$u_1^2+v_1^2+w_1^2=1$$

и равно там нулю. Следовательно, оно меньше по абсолютной величине, чем b_2, в подходящей комплексной окрестности

$$|u-u_1|<b_3,\quad |v-v_1|<b_3,\quad |w-w_1|<b_3.$$

Если положить

$$u=\frac{x_\varkappa-x_\lambda}{r_{\varkappa\lambda 1}},\quad v=\frac{y_\varkappa-y_\lambda}{r_{\varkappa\lambda 1}},\quad w=\frac{z_\varkappa-z_\lambda}{r_{\varkappa\lambda 1}},$$

где x, y, z опять рассматриваются как декартовы координаты, то условие (6) выполняется при

$$\left|\frac{q_k-q_{k1}}{r_{\varkappa\lambda 1}}\right|<\frac{b_3}{2}\quad (k=1,\,\ldots,\,9),$$

и, следовательно, по неравенству (7) тем более выполняется для

$$|q_k-q_{k1}|<\frac{b_3\mu^2}{2B}=b_4\quad (k=1,\,\ldots,\,9). \tag{9}$$

Тогда в этой окрестности $(U+1)^{-1}$ меньше по абсолютной величине, чем 4, и регулярно, как это следует из (8). Вследствие оценок (5) и (9) получим нужное b, полагая $b=\min(1,\,b_4)$. Из теоремы существования Коши тотчас следует регулярность q_k, p_k и t при $|s-s_1|<b_5$.

Теперь рассмотрим случай $U_1>B$. Это охватывает, в частности, случай столкновения, так как тогда U_1 имеет бесконечное значение. Пусть для $s=s_1$ опять r_{13} — наименьшая из сторон треугольника. Введем каноническими преобразованиями (7; 4), (7; 5) и (7; 30), (7; 33) вместо q_k, p_k новые переменные ξ_k, η_k $(k=1,\,\ldots,\,6)$. При этом система Гамильтона (3) переходит в

$$\xi_k'=F_{\eta_k},\quad \eta_k'=-F_{\xi_k}\quad (k=1,\,\ldots,\,6), \tag{10}$$

причем функция F, определенная равенством (2), выражается теперь по формулам преобразования через ξ_k, η_k. Тогда с введенными ранее обозначениями для стороны $r_{13} = x$ по соотношению (7; 29) опять получается $x = \xi\eta^2$, где опять

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Умножая числитель и знаменатель функции F на x, получаем

$$\begin{cases} F = \dfrac{xT + (1-h)x}{xU + x} - 1, \\ \dfrac{1}{U+1} = \dfrac{x}{xU + x}. \end{cases} \tag{11}$$

Для применения теоремы существования к системе (10), (4) нужно теперь ближе рассмотреть три функции x, xT, $(xU + x)^{-1}$ от двенадцати независимых переменных ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ в достаточно малой комплексной окрестности ξ_{k1}, η_{k1}. Сначала рассмотрим x и xT.

Вследствие неравенства $U_1 > B$ имеем при $s = s_1$ $3m^2x^{-1} > B$, поэтому

$$x < \frac{3m^2}{B} \quad (s = s_1). \tag{12}$$

Так как было предположено, что для начальных значений выполнены неравенства (9; 7), то справедливо неравенство (9; 38). Далее, пусть теперь

$$B \geqslant 12m^2 c_{21}. \tag{13}$$

Тогда тем более

$$(x)_1 < \frac{1}{4} c_{21}^{-1},$$

значит, для двух других сторон имеем

$$r_{121}^{-1} < 4c_{21}, \quad r_{231}^{-1} < 4c_{21}. \tag{14}$$

Тогда из

$$xT = x(U + h) = m_1 m_3 + m_1 m_2 \frac{x}{r_{12}} + m_2 m_3 \frac{x}{r_{23}} + hx$$

следует

$$\bigl|(xT)_1 - m_1 m_3\bigr| < \frac{c_{39}}{B} < c_{39}, \tag{15}$$

и, согласно (8; 2), далее

$$(\xi_1) < c_{40}. \tag{16}$$

Вследствие (7; 5) для скорости v точки P_2 справедливо соотношение

$$(m_2 v)^2 = y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = \eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2,$$

откуда в соответствии с (10; 12) получается оценка

$$(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2)_1 < c_{41}. \tag{17}$$

Далее, также

$$\xi\eta = (\xi\eta^2)^{1/2}\xi^{1/2} = x^{1/2}\xi^{1/2},$$

и при выполнении неравенств (12), (16) получаем

$$(\xi\eta)_1 < c_{42} B^{-1/2}. \tag{18}$$

Из (8; 2), (17), (18) следует, что

$$\left|(xT)_1 - \frac{1}{2}(m_1^{-1} + m_3^{-1})(\xi)_1\right| < c_{43} B^{-1/2}$$

и по неравенству (15), наконец,

$$\left|(\xi)_1 - \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3}\right| < c_{44} B^{-1/2}.$$

Положим опять

$$\frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3} = c$$

и подчиним B условию

$$4c_{44} B^{-1/2} \leqslant c. \tag{19}$$

Тогда

$$\frac{3}{4}c < (\xi)_1 < \frac{5}{4}c, \tag{20}$$

и из $\xi\eta^2 = x$ затем следует, кроме того,

$$(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)_1 = (\eta^2)_1 < \frac{4m^2}{cB} < c_{45}. \tag{21}$$

В комплексной окрестности

$$|\xi_k - \xi_{k1}| < \frac{c}{10} \quad (k = 1,\, 2,\, 3) \tag{22}$$

будет теперь

$$\left|\xi^2 - (\xi^2)_1\right| < \frac{3}{100}c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 < \frac{1}{2}c^2, \quad \frac{1}{4}c < |\xi| < 2c; \tag{23}$$

следовательно, там регулярно и $\xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$. Вследствие (8; 2) функция $xT\xi^{-1}$ является многочленом четвертой степени относительно η_k ($k = 1, \ldots, 6$). Тогда в комплексной окрестности, заданной неравенствами (22) и

$$|\eta_k - \eta_{k1}| < \frac{c}{10} \quad (k = 1, \ldots, 6), \tag{24}$$

согласно неравенствам (17), (20), (21) и (23), функции xT и $x = \xi\eta^2$ регулярны и имеют оценки

$$|xT| < c_{46}, \quad |x| < c_{47}. \tag{25}$$

Обратимся теперь к соответствующему исследованию функции $(xU + x)^{-1}$. Согласно неравенствам (12) и (14),

$$0 < xU + x - m_1 m_3 = \frac{m_2 m_3}{r_{23}}x + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}x + x < c_{48}B^{-1} \quad (s = s_1).$$

Пусть теперь еще

$$c_{48}B^{-1} \leqslant \frac{1}{2}m_1 m_3, \tag{26}$$

тогда

$$m_1 m_3 < (xU + x)_1 < \frac{3}{2}m_1 m_3. \tag{27}$$

Выражение xU как функция ξ_k ($k = 1, \ldots, 6$) и η_k ($k = 1, 2, 3$) задано равенствами (8; 3), (8; 4), (8; 5) и (8; 6). Эта функция регулярна, пока ξ, r_{12} и r_{23} не равны нулю. Определим теперь постоянную c_{49} так, чтобы в комплексной окрестности

$$\begin{cases} |\xi_k - \xi_{k1}| < c_{49}^{-1} & (k = 1, \ldots, 6), \\ |\eta_k - \eta_{k1}| < c_{49}^{-1} & (k = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{28}$$

было выполнено неравенство

$$\left|(xU + x) - (xU + x)_1\right| < \frac{1}{2}m_1 m_3. \tag{29}$$

Если обозначить теперь через r какую-нибудь из двух сторон r_{12}, r_{23}, то неравенство (29) наверное будет выполнено, если

$$\left|\frac{x}{r}-\left(\frac{x}{r}\right)_1\right|<\frac{\mu}{8m}\quad(r=r_{12},\,r_{23}),\qquad\bigl|x-(x)_1\bigr|<\frac{1}{8}m_1m_3.$$

Так как в окрестности, заданной неравенствами (22) и (24), согласно (25), выполняется неравенство $|x|<c_{47}$, то достаточно найти такое $c_{49}>10c^{-1}$, чтобы в области (28) выполнялись условия

$$\begin{cases}\left|\dfrac{(r)_1}{r}-1\right|<\dfrac{c_{21}\mu}{64c_{47}m}\quad(r=r_{12},\,r_{23}),\\ \bigl|x-(x)_1\bigr|<\min\Bigl(\dfrac{m_1m_3}{8},\ \dfrac{c_{21}\mu}{64m}\Bigr);\end{cases}\tag{30}$$

тогда действительно

$$\left|\frac{x}{r}-\left(\frac{x}{r}\right)_1\right|\leqslant\frac{|x|}{(r)_1}\left|\frac{(r)_1}{r}-1\right|+\frac{\bigl|x-(x)_1\bigr|}{(r)_1}<\frac{4c_{47}}{c_{21}}\,\frac{c_{21}\mu}{64c_{47}m}+\frac{4}{c_{21}}\,\frac{c_{21}\mu}{64m}=\frac{\mu}{8m}.$$

Но тогда выполняется, аналогично неравенству (6), первое из неравенств (30), если переменные x_k, ξ_{k+3} $(k=1,\,2,\,3)$, входящие в выражение (8; 4) для r^2, будут находиться в окрестности

$$\begin{cases}|x_k-x_{k1}|<c_{50}^{-1}\quad(k=1,\,2,\,3),\\ |\xi_k-\xi_{k1}|<c_{50}^{-1}\quad(k=4,\,5,\,6),\end{cases}\tag{31}$$

причем будет выполняться также и второе неравенство (30). Наконец, так как, согласно (8; 5), переменные x_1, x_2, x_3 являются многочленами третьей степени относительно ξ_k, η_k $(k=1,\,2,\,3)$, то нужную нам величину c_{49} легко найти. В окрестности (28) величины ξ, r_{12}, r_{23} отличны от нуля, следовательно, там $xU+x$ регулярно и в соответствии с неравенствами (27) и (29) удовлетворяет неравенствам

$$|xU+x|>\frac{1}{2}m_1m_3,\qquad|xU+x|^{-1}<\frac{2}{m_1m_3}.$$

Этим доказано, что в окрестности

$$|\xi_k-\xi_{k1}|<c_{49}^{-1},\qquad|\eta_k-\eta_{k1}|<c_{49}^{-1}\quad(k=1,\,\ldots,\,6)\tag{32}$$

обе функции F и $(U+1)^{-1}$ регулярны и остаются там по абсолютной величине меньше некоторой постоянной c_{51}. По теореме существования Коши решения ξ_k, η_k, $(k=1,\,\ldots,\,6)$ и t системы (4), (10) регулярны при $|s-s_1|<c_{52}^{-1}$. Из соотношений (7; 4), (8; 5) и теоремы о движении центра инерции видно, что первоначальные декартовы координаты q_k $(k=1,\,\ldots,\,9)$ также регулярны в той же области.

Выберем теперь для B наименьшее число $B\geqslant A+1$, которое удовлетворяет первоначально поставленным условиям (13), (19) и (26). Если $B=c_{53}$, то $b_5=c_{54}^{-1}$. Если обозначить $\delta=\min(c_{52}^{-1},\,c_{54}^{-1})$, то δ обладает свойством, сформулированным в третьей вспомогательной теореме. При этом легко видеть, что три расстояния r_{kl} будут регулярными функциями от $s=\delta+i\nu$ в полосе $-\delta<\nu<\delta$. В случае $U_1\leqslant B$ уже было доказано, что в предположении (9) получаются неравенства (6), из которых во всяком случае следует $r_{kl}\neq 0$; но, с другой стороны, по теореме существования Коши $q_k(s)$ остаются для $|s-s_1|<c_{54}^{-1}$ точно в области, определенной неравенством (9). В случае $U_1>B$ величины r_{12}, r_{23} отличны от нуля, как это следует из (30); в то же время функция $r_{13}=x=\xi(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)$ будет регулярной, потому что $\xi=$ $=(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^{1/2}$ как функция s по теореме существования остается в области (23), в которой, в частности, $\xi\neq 0$. Итак, третья вспомогательная теорема полностью доказана.

Отобразим теперь конформно полосу $-\delta<\nu<\delta$ плоскости s преобразованием

$$\omega=\frac{e^{\frac{\pi s}{2\delta}}-1}{e^{\frac{\pi s}{2\delta}}+1}$$

на единичный круг $|\omega|<1$. При этом $s=0$ переходит в $\omega=0$ и действительная ось s — в действительный диаметр. Тогда прямоугольные декартовы координаты x_k, y_k, z_k, расстояния r_{kl} и время t будут регулярными функциями новой независимой переменной во всех внутренних точках единичного круга и, следовательно, могут быть разложены в ряды по степеням ω, наверное сходящиеся при $|\omega|<1$. Эти степенные ряды будут представлять движение для всех действительных моментов времени, так как интервалу $0<\omega<1$ соответствуют моменты времени $t>\tau$, а интервалу $-1<\omega<0$ — предшествующие моменты времени $t<\tau$. Наконец, можно отбросить предположение о том, что центр инерции находится в начале координат, и предположить, что система отсчета равномерно поступательно движется. Это можно сделать, в частности, линейным преобразованием переменных x, y, z и t: при этом координаты опять будут регулярными относительно ω. Еще раз сформулируем наш главный результат, теорему Зундмана:

Если постоянные площадей при неподвижном положении центра инерции не все равны нулю, то декартовы координаты и расстояния между тремя телами, так же как и время t, могут быть разложены в ряды по степеням переменной ω, которые сходятся при $|\omega| < 1$ и описывают движение для всех действительных значений времени; ω определяется подстановками

$$s = \int\limits_{\tau}^{t} (U+1)dt, \quad \omega = \frac{e^{\frac{\pi s}{2\delta}} - 1}{e^{\frac{\pi s}{2\delta}} + 1},$$

и δ есть положительное число, которое определяется массами, начальными значениями координат и составляющими скорости для момента $t = \tau$.

Необходимо заметить, что в исследованиях Зундмана теорема доказана в несколько иной формулировке, так как там вместо s стоит вспомогательная переменная, определенная другим образом. Интересующийся этими вопросами читатель может легко установить, что обе формулировки качественно совершенно равнозначны. Впрочем, Зундманом были даны явные оценки для входящих здесь постоянных, в то время как мы от этого в целях сокращения отказались.

Если написать уравнения движения прямо с переменной ω, то q_k $(k = 1, \ldots, 9)$ и t можно определить с помощью степенных рядов с неопределенными коэффициентами. При этом ω вводится следующим образом:

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{dt}{ds}\,\frac{ds}{d\omega} = 4\pi^{-1}\delta(1-\omega^2)^{-1}(1+U)^{-1}.$$

Входящая здесь величина δ может быть выражена и оценена, как известно, с помощью масс и начальных значений. Из найденных оценок можно сделать вывод, насколько хороши приближения при использовании частичных сумм; однако таким путем мы не получим практически пригодного способа для вычисления орбит.

Из наших разложений можно получить все возможные столкновения, если определить нули производной $dt/d\omega$ в интервале $-1 < \omega < 1$.

Так как нули аналитической функции не могут накапливаться внутри круга единичного радиуса, то опять получаем тот же результат: моменты столкновения не могут накапливаться на конечном отрезке времени. Все же очень возможно, что нули накапливаются при $\omega = 1$ или $\omega = -1$, и это можно проиллюстрировать соответствующими примерами. Чтобы с помощью найденных разложений в ряд можно было исследовать свойства движения при $t \to \pm\infty$, необходимо рассмотреть равномерную сходимость рядов во всем открытом интервале $-1 < \omega < 1$; при этом ничего не известно о сходимости при $\omega = \pm 1$. В заключение заметим, что интервал времени между двумя последующими столкновениями, если таковые вообще происходят, имеет нижнюю грань. Для доказательства примем, что при $s = s_1$ произошло столкновение. Тогда в этот момент $\eta_{k1} = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$, $(\xi)_1 = c > 0$, $(x)_1 = 0$, $(xU)_1 = m_1 m_3$ и по соотношениям $(8;2)$, $(8;3)$, $(8;4)$, $(8;5)$ и (11)

$$(F_{\xi_k})_1 = c^{-1}\Big(\frac{\xi_k}{\xi}\Big)_1 \quad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

Соответствующим поворотом осей координат можно достичь выполнения равенства $(\xi_1)_1 = (\xi)_1$. В комплексной области (32) функция F будет регулярной; по абсолютной величине она здесь меньше c_{51}. Но тогда из интегральной формулы Коши следует оценка

$$\big|F_{\xi_1} - (F_{\xi_1})_1\big| < \frac{1}{2c},$$

если при соответствующем c_{55} выполнены условия

$$\begin{cases} |\xi_k - \xi_{k1}| < c_{55}^{-1} < c_{49}^{-1}, \\ |\eta_k - \eta_{k1}| < c_{55}^{-1} \quad (k = 1,\ \ldots,\ 6). \end{cases} \tag{33}$$

В частности, для действительных ξ_k, η_k

$$F_{\xi_1} > \frac{1}{2c}.$$

Тогда для действительного s в силу уравнений (10) на рассматриваемом решении

$$|\eta_1| = \big|\eta_1 - (\eta_1)_1\big| = \left|\int\limits_{s_1}^{s} F_{\xi_1}\,ds\right| \geqslant \frac{1}{2c}|s - s_1|, \tag{34}$$

если для всего интервала от s_1 до s будут выполнены условия (33). Но это будет по теореме существования иметь место для области $|s - s_1| \leqslant c_{56}^{-1} < c_{52}^{-1}$, и в соответствии с оценками (23), (27) и (29) имеем тогда

$$\xi > \frac{1}{4}c, \quad xU + x < 2m_1m_3.$$

Отсюда и из неравенства (34) получаем

$$\begin{cases} x = \xi\eta^2 \geqslant \dfrac{1}{16c}(s - s_1)^2, \\ \dfrac{1}{U+1} = \dfrac{x}{xU+x} \geqslant c_{57}^{-1}(s - s_1)^2, \end{cases} \tag{35}$$

и по (4), наконец,

$$|t - t_1| = \left|\int\limits_{s_1}^{s} \frac{ds}{U+1}\right| \geqslant \frac{1}{3}c_{57}^{-1}|s - s_1|^3. \tag{36}$$

Из второго неравенства (35) усматриваем, что U будет бесконечной только в точке $s = s_1$ интервала $s_1 - c_{56}^{-1} \leqslant s \leqslant s_1 + c_{56}^{-1}$. Следовательно, в этом интервале для $s \neq s_1$ больше столкновений не будет. Тогда по неравенству (36) интервал времени между двумя последующими столкновениями имеет нижнюю грань $\frac{1}{3}c_{57}^{-1}c_{56}^{-3} = c_{58}^{-1}$, которая зависит только от A и от масс. Отсюда и следует, что наше утверждение справедливо.

Чтобы приложить наши результаты к системе Земля – Солнце – Луна, примем, что эти тела являются материальными точками, притягивающимися точно по закону Ньютона; кроме того, будем пренебрегать влиянием всех остальных небесных тел и других сил природы. Наблюдения показывают, что три названные тела не двигаются в одной неподвижной плоскости, следовательно, для некоторого известного момента времени можно определить численное значение величины A. Тогда при сделанных предположениях можно прямым путем найти два положительных числа ρ и ε; в случае столкновения Земли с Солнцем Луна будет иметь некоторое наименьшее расстояние ρ от Земли, и потребуется добавочное время ε, чтобы оказалось возможным столкновение Луны с Землей. Этот пример приложения теории Зундмана помогает нам смотреть с уверенностью в будущее[1].

[1]Как следует из результатов Г. А. Мермана [Бюлл. Инст. Теор. Астр. АН СССР, т. VI, 1958, №10 (83), 687], в поставленной автором задаче столкновения Солнца и Земли не может быть. — *Прим. перев.*

§ 12. Тройное столкновение

В этом и следующем параграфах мы исследуем поведение координатных функций в задаче трех тел при предположении, что в сингулярности $t = t_1$ все три частицы сталкиваются. Хотя в общем случае это приводит к существенным особенностям в координатных функциях, тем не менее можно описать все траектории тройного столкновения в терминах подходящих разложений в ряды. Для последующего изложения удобно заменить t на переменную $t_1 - t$ и обозначить последнюю снова как t, а $t_1 - \tau$ соответственно обозначить как τ. Исходные уравнения тем самым остаются неизменными. Таким образом, мы предполагаем, что девять координатных функций $q = q(t)$ точек P_1, P_2, P_3 являются регулярными на интервале $0 < t \leqslant \tau$, открытом слева, и мы желаем определить их поведение при $t \to 0$. Так же, как в § 6 и § 9, выражение

$$I = \sum_q mq^2 = \sum_{k=1}^{3} m_k(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^{3} m_k \varrho_k^2 \tag{1}$$

играет важную роль в этом исследовании. Снова предполагаем, что центр масс системы трех частиц покоится в начале системы координат.

Поскольку $t = 0$ соответствует тройному столкновению, когда t монотонно убывает до нуля, положительная функция $I = I(t)$ стремится к 0, в то время как $U = U(t)$ стремится к $+\infty$. Ввиду (6; 2), это означает, что в достаточно малом интервале $0 < t \leqslant t_0 \leqslant \tau$ функция $I(t)$ монотонно убывает совместно с t и ее производная $\dot I > 0$. Далее из (6; 2) следует, что

$$\begin{gathered}\ddot I I^{-1/4} - \frac14 \dot I^2 I^{-5/4} = \frac14 (8IT - \dot I^2) I^{-5/4} + 2hI^{-1/4},\\ \dot I_0 I_0^{-1/4} - \dot I I^{-1/4} = \frac14 \int_t^{t_0} (8IT - \dot I^2) I^{-5/4} dt + 2h \int_t^{t_0} I^{-1/4} dt \\ (0 < t \leqslant t_0),\end{gathered} \tag{2}$$

где I_0, $\dot I_0$ — значения I, $\dot I$ при $t = t_0$. Поскольку $\dot I I^{-1/4} > 0$, левая часть (2) ограничена сверху, а согласно (6; 3) подынтегральная функция в первом слагаемом справа неотрицательна. Константа h во втором слагаемом, однако, может быть отрицательной. В любом случае, чтобы установить сходимость первого интеграла вплоть до $t = 0$, достаточно доказать, что второй интеграл сходится при $t = 0$, и для этого мы введем оценку I снизу.

Пусть μ_1 обозначает самую малую из трех масс m_1, m_2, m_3, из неравенства Шварца следует, что

$$I \geqslant \mu_1 \sum_{k=1}^{3} \varrho_k^2 \geqslant \frac{\mu_1}{3}(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)^2 \geqslant \frac{\mu_1}{3} r_{12}^2,$$

и поэтому

$$U > m_1 m_2 r_{12}^{-1} \geqslant \mu_2 I^{-1/2}, \quad \mu_2 = m_1 m_2 \sqrt{\frac{\mu_1}{3}}, \quad \ddot{I} = 2U + 4h > \mu_2 I^{-1/2}$$

при всех достаточно малых $t > 0$. Следовательно,

$$(\dot{I}^2)^{\cdot} > 4\mu_2 (I^{1/2})^{\cdot},$$

откуда, дважды интегрируя от 0 до t, получаем

$$\dot{I}^2 \geqslant 4\mu_2 I^{1/2}, \quad (I^{3/4})^{\cdot} = \frac{3}{4} I^{-1/4} \dot{I} \geqslant \mu_3 = \frac{3}{2}\sqrt{\mu_2}, \quad I^{3/4} \geqslant \mu_3 t. \tag{3}$$

Из этого сходимость вышеупомянутого интеграла становится очевидной.

Дополнительно (2) теперь показывает, что функция $\dot{I} I^{-1/4}$ стремится к конечному пределу $\delta \geqslant 0$ при $t \to 0$, и поэтому

$$(I^{3/4})^{\cdot} = \frac{3}{4} I^{-1/4} \dot{I} \to \frac{3}{4}\delta, \quad I^{3/4} = \frac{3}{4}\delta t + o(t), \quad I \sim \varkappa t^{4/3} \quad (t \to 0), \tag{4}$$

вместе с (3) влечет

$$\varkappa = \left(\frac{3}{4}\delta\right)^{4/3} > 0. \tag{5}$$

Кроме того,

$$\dot{I} \sim \delta I^{1/4} \sim \delta\left(\frac{3}{4}\delta t\right)^{1/3}, \quad \dot{I} \sim \frac{4}{3}\varkappa t^{1/3} \quad (t \to 0). \tag{6}$$

Вышеуказанная асимптотическая формула для $\dot{I}$ уточняет асимптотическую формулу для I, данную в (4), и формально может быть выведена из нее с помощью дифференцирования. Далее будет показано, что остается верной даже следующая формула

$$\ddot{I} \sim \frac{4}{9}\varkappa t^{-2/3} \quad (t \to 0)$$

согласно $(6;2)$, это эквивалентно

$$U \sim \frac{2}{9}\varkappa t^{-2/3}. \tag{7}$$

Если мы введем функцию

$$(8IT - \dot{I}^2)t^{-2/3} = g(t) = g \tag{8}$$

и воспользуемся $(5;9)$, (4) и (6) совместно с (5), наше утверждение (7) сводится к тому, что

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0. \tag{9}$$

Ввиду $(6;3)$ получаем, что $g(t) \geqslant 0$. Чтобы доказать (9), воспользуемся уже полученной сходимостью первого интеграла в (2) вплоть до $t = 0$, что совместно с (4) и (5) также влечет сходимость

$$\int\limits_0^\tau g(t)\frac{dt}{t} = G.$$

Поэтому неотрицательная функция g должна удовлетворять

$$\varliminf_{t\to 0} g(t) = 0.$$

Теперь, если бы (9) было ложным, то, поскольку $g(t)$ непрерывна в интервале $0 < t \leqslant \tau$, существовали бы достаточно маленькое положительное число ε и последовательность τ, τ_1, τ_2, …, монотонно убывающая к 0, такая, что

$$\begin{gathered} g(\tau_{2j}) = \varepsilon, \quad g(\tau_{2j-1}) = 2\varepsilon, \quad \varepsilon \leqslant g(t) \leqslant 2\varepsilon \\ (\tau_{2j} \leqslant t \leqslant \tau_{2j-1};\ j = 1,\, 2,\, \ldots). \end{gathered} \tag{10}$$

Следовательно, на каждом из этих интервалов функция g будет возрастать на величину ε. Чтобы прийти к противоречию, оценим производную

$$\dot{g} = (8\dot{I}T + 8I\dot{T} - 2\dot{I}\ddot{I})t^{-2/3} - \frac{2}{3}gt^{-1} \tag{11}$$

сверху.

Во-первых, (4), (5) и (6) показывают, что

$$I = O(t^{4/3}), \quad I^{-1} = O(t^{-4/3}), \quad \dot{I} = O(t^{1/3}) \quad (t \to 0).$$

Поэтому, объединив (8) и (10), получим

$$T = \frac{1}{8} I^{-1}(g t^{2/3} + \dot{I}^2) = O(t^{-2/3}) \quad (\tau_{2j} \leqslant t \leqslant \tau_{2j-1};\ j \to \infty),$$

так что ввиду (5; 10) каждая координата удовлетворяет оценке

$$\dot{q} = O(t^{-1/3}),$$

и также

$$\begin{gathered} U = T - h = O(t^{-2/3}), \quad \dot{T} = \dot{U} = O(t^{-5/3}), \quad r_{kl}^{-1} = O(t^{-2/3}) \\ (r_{kl}^{-1})^{\cdot} = r_{kl}^{-3}\bigl\{(x_k - x_l)(\dot{x}_l - \dot{x}_k) + (y_k - y_l)(\dot{y}_l - \dot{y}_k) + \\ + (z_k - z_l)(\dot{z}_l - \dot{z}_k)\bigr\} = O(t^{-4/3} \cdot t^{-1/3}) = O(t^{-5/3}), \end{gathered}$$

и

$$\ddot{I} = 2T + 2h = O(t^{-2/3}),$$

все это верно при $\tau_{2j} \leqslant t \leqslant \tau_{2j-1}$, $j \to \infty$. Из этих оценок вместе с (10) и (11) видно, что

$$\dot{g} < b t^{-1} \quad (\tau_{2j} \leqslant t \leqslant \tau_{2j-1};\ j = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

для некоторой положительной константы b.

Из (10) и (12) теперь получаем

$$\begin{gathered} \varepsilon = g(\tau_{2j-1}) - g(\tau_{2j}) = \int\limits_{\tau_{2j}}^{\tau_{2j-1}} \dot{g}(t)\, dt < b \int\limits_{\tau_{2j}}^{\tau_{2j-1}} \frac{dt}{t}, \\ \int\limits_{\tau_{2j}}^{\tau_{2j-1}} g(t) \frac{dt}{t} > \varepsilon \int\limits_{\tau_{2j}}^{\tau_{2j-1}} \frac{dt}{t} > \varepsilon^2 b^{-1}, \end{gathered}$$

что при суммировании по j противоречит сходимости интеграла G. Это доказывает утверждение (9) и (7) и, в свою очередь, приводит к оценкам

$$r_{kl}^{-1} = O(t^{-2/3}), \quad \dot{q} = O(t^{-1/3}) \quad (t \to 0), \tag{13}$$

которые до этого момента были известны только на интервалах $\tau_{2j} \leqslant \leqslant t \leqslant \tau_{2j-1}$ при $j \to \infty$.

Важным следствием (8), (9) и (6; 3) является асимптотическая формула
$$p\dot{q} - q\dot{p} = o(t^{1/3}) \quad (t \to 0), \tag{14}$$
верная для любых двух координат p и q. Это, в частности, еще раз доказывает, что в случае тройного столкновения все три константы угловых моментов равны нулю.

Поскольку согласно (1) и (4)
$$q = O(t^{2/3}),$$
удобно ввести
$$\overline{q} = qt^{-2/3}, \quad \overline{p} = pt^{-2/3} \quad (t > 0).$$
Тогда
$$\overline{q} = O(1), \quad \overline{p} = O(1) \quad (t \to 0), \tag{15}$$
и (14) переходит в
$$\overline{p}\,\dot{\overline{q}} - \overline{q}\,\dot{\overline{p}} = (p\dot{q} - q\dot{p})t^{-4/3} = o(t^{-1}) \quad (t \to 0). \tag{16}$$

В общем случае, когда f — однородная функция степени ν по координатам q, пусть $\overline{f}$ обозначает соответствующую функцию по переменным $\overline{q}$, такую, что
$$\overline{f} = ft^{-2\nu/3}.$$
Тогда из (4) и (6)
$$\overline{I} = It^{-4/3} \to \varkappa, \quad \dot{\overline{I}} = \dot{I}t^{-4/3} - \frac{4}{3}It^{-7/3} = o(t^{-1}) \quad (t \to 0), \tag{17}$$
в то время как с другой стороны
$$\overline{I} = \sum_{\overline{q}} m\overline{q}^2, \quad \frac{1}{2}\dot{\overline{I}} = \sum_{\overline{q}} m\overline{q}\,\dot{\overline{q}},$$
поэтому (15), (16) и (17) дают
$$\frac{1}{2}\overline{p}\,\dot{\overline{I}} - \overline{I}\,\dot{\overline{p}} = \sum_{\overline{q}} m\overline{q}(\overline{p}\,\dot{\overline{q}} - \overline{q}\,\dot{\overline{p}}) = o(t^{-1}), \quad \overline{I}\,\dot{\overline{p}} = o(t^{-1}), \quad \dot{\overline{p}} = o(t^{-1}).$$

Таким образом, для каждой координаты q получим

$$\dot{\overline{q}} = o(t^{-1}) \quad (t \to 0). \tag{18}$$

В дополнение к треугольнику $\triangle$, образованному (5) тремя частицами P_1, P_2, P_3, рассмотрим треугольник $\overline{\triangle}$, вершины которого $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ соответствуют координатам $\overline{q}$. Таким образом, новый треугольник получается из исходного расширением в отношении 1 к $t^{2/3}$. При тройном столкновении $\triangle$ вырождается к точке начала координат, в то время как в конце будет показано, что большой треугольник $\overline{\triangle}$ также имеет определенное предельное положение при $t \to 0$. Сначала мы покажем, что длины всех трех сторон $\overline{\triangle}$ имеют положительные пределы, которые также будут вычислены. Для этого рассмотрим уравнения движения

$$m\ddot{q} = U_q$$

и выразим их в терминах $\overline{q}$ вместо q.

При объединении соотношений

$$\overline{U} = Ut^{2/3}, \quad \overline{U}_{\overline{q}} = U_q t^{4/3},$$

$$\ddot{q} = (\overline{q}t^{2/3})^{\cdot\cdot} = \ddot{\overline{q}}t^{2/3} + \frac{4}{3}\dot{\overline{q}}t^{-1/3} - \frac{2}{9}\overline{q}t^{-4/3} = (\dot{\overline{q}}t^{4/3})^{\cdot}t^{-2/3} - \frac{2}{9}\overline{q}t^{-4/3}$$

получаем

$$(\dot{\overline{q}}t^{4/3})^{\cdot}t^{2/3} - \frac{2}{9}\overline{q} = m^{-1}\overline{U}_{\overline{q}}. \tag{19}$$

Теперь вычислим среднее значение для обеих частей этого дифференциального уравнения на интервале от t до $2t$, где $0 < 2t \leqslant \tau$. Проведенное с помощью (18) интегрирование по частям приводит к оценке

$$\int_t^{2t} (\dot{\overline{q}}t^{4/3})^{\cdot}t^{2/3}\,dt = \dot{\overline{q}}t^{4/3}t^{2/3}\Big|_t^{2t} - \frac{2}{3}\int_t^{2t}\dot{\overline{q}}t^{4/3}t^{-1/3}\,dt = o(t) \quad (t \to 0), \tag{20}$$

в то время как для $t \leqslant t^* \leqslant 2t$ также

$$\overline{q}(t^*) - \overline{q}(t) = \int_t^{t^*}\dot{\overline{q}}\,dt = o(1). \tag{21}$$

Чтобы оценить среднее значение функции $\overline{U}_{\overline{q}}$, воспользуемся соотношением

$$\overline{U}_{\overline{q}}(t^*) - \overline{U}_{\overline{q}}(t) = \int_t^{t^*}\dot{\overline{U}}_{\overline{q}}\,dt, \quad \dot{\overline{U}}_{\overline{q}} = \sum_{\overline{p}}\overline{U}_{\overline{q}\,\overline{p}}\dot{\overline{p}},$$

и согласно (13) и (18) тогда получим

$$\overline{r}_{kl}^{-1} = O(1),$$

$$\overline{U}_{\overline{q}\,\overline{p}} = O(1), \quad \dot{\overline{U}}_{\overline{q}} = o(t^{-1}), \quad \overline{U}_{\overline{q}}(t^*) - \overline{U}_{\overline{q}}(t) = o(1) \quad (t \to 0). \tag{22}$$

Таким образом, (19) вместе с (20) и (21) приводят к формуле

$$-\frac{2}{9}\overline{q} = m^{-1}\overline{U}_{\overline{q}} + o(1) \quad (t \to 0). \tag{23}$$

Разумеется, это уже не дифференциальное уравнение, а скорее алгебраическое соотношение, которому асимптотически удовлетворяют координаты $\overline{q}$.

В § 6 уже было показано, что в случае тройного столкновения, три частицы движутся в фиксированной плоскости, которую можно принять за плоскость $z = 0$, поэтому z_1, z_2, z_3 тождественно равны 0 и нужно рассматривать только шесть координат x_k, y_k $(k = 1, 2, 3)$. С помощью взятия производных или с помощью прямых вычислений получаем, что соответствующие шесть уравнений (23) инвариантны при произвольных вращениях координатных осей в плоскости (x, y). Теперь введем новые координаты X_k, Y_k вместо $\overline{x}_k$, $\overline{y}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ с тем же началом координат, как и раньше, но с новой осью абсцисс, которая всегда параллельна направлению вектора $P_3\,P_1$. В этой новой движущейся системе координат $Y_1 = Y_3$, а (23) приводит к трем уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{2}{9}Y_1 &= m_2(Y_1 - Y_2)\overline{r}_{12}^{-3} + m_3(Y_1 - Y_3)\overline{r}_{13}^{-3} + o(1),\\
\frac{2}{9}Y_2 &= m_1(Y_2 - Y_1)\overline{r}_{12}^{-3} + m_3(Y_2 - Y_3)\overline{r}_{23}^{-3} + o(1),\\
\frac{2}{9}Y_3 &= m_1(Y_3 - Y_1)\overline{r}_{13}^{-3} + m_2(Y_3 - Y_2)\overline{r}_{23}^{-3} + o(1)
\end{aligned} \tag{24}$$

и к трем аналогичным уравнениям для X_1, X_2, X_3. Согласно (15) все шесть координат $X_k(t)$, $Y_k(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ остаются ограниченными при $t \to 0$. Рассмотрим произвольную последовательность значений для $t \to 0$, по которой эти координаты стремятся к определенным пределам $\widehat{X}_k$, $\widehat{Y}_k$. Тогда расстояния $\overline{r}_{kl} = r_{kl}t^{-2/3}$ тоже имеют пределы $\widehat{r}_{kl}$, которые ввиду (22) все положительны. Так как $Y_1 = Y_3$, вычитание третьего уравнения в (24) из первого приводит к соотношению

$$m_2(\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_2)(\widehat{r}_{12}^{\,-3} - \widehat{r}_{23}^{\,-3}) = 0.$$

Следовательно, либо $\widehat{r}_{12} = \widehat{r}_{23}$, либо $\widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_2$.

Если $\widehat{r}_{12} \neq \widehat{r}_{23}$, тогда $\widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_2$ и, поскольку также $\widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_3$ и $m_1\widehat{Y}_1 + m_2\widehat{Y}_2 + m_3\widehat{Y}_3 = 0$, следовательно, $\widehat{Y}_k = 0$ для всех трех ординат. Таким образом, в этом случае при $t \to 0$ по рассматриваемой последовательности три точки $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ стремятся к предельным положениям на оси абсцисс новой системы координат. В другом случае $\widehat{r}_{12} = \widehat{r}_{13}$ в то время как предыдущий анализ, повторенный относительно системы координат с осью абсцисс, параллельной $P_1\,P_2$, показывает, что также $\widehat{r}_{13} = \widehat{r}_{23}$. Поэтому предельное положение во втором случае является равносторонним треугольником. Таким образом, мы видим, что при $t \to 0$ по выбранной последовательности либо все три угла треугольника $\overline{\triangle}$ стремятся к $\frac{\pi}{3}$, либо один угол стремится к π и два других к 0. Кроме того, поскольку при $t > 0$ углы являются непрерывными функциями от t, их предельные значения не зависят от выбора последовательности $t \to 0$. Две возможные конфигурации в дальнейшем будем называть равносторонним случаем и коллинеарным случаем. Дополнительно, положим

$$m_1 + m_2 + m_3 = M.$$

Пусть для равностороннего случая $\widehat{r}_{12} = \widehat{r}_{13} = \widehat{r}_{23} = r$. Тогда из (24) получим

$$\frac{2}{9}\widehat{Y}_k r^3 = M\widehat{Y}_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

и поскольку не все $\widehat{Y}_k$ равны нулю, из этого следует, что

$$r^3 = \frac{9}{2}M. \tag{25}$$

Таким образом, r имеет вполне определенное значение, и из (7) также получим

$$\varkappa = \frac{9}{2}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)r^{-1}. \tag{26}$$

Если, дополнительно, ориентация системы координат выбрана так, чтобы при прохождении треугольника $\overline{\triangle}$ в положительном направлении вершины $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ проходили в таком порядке, тогда

$$\widehat{X}_1 - \widehat{X}_3 = r, \quad \widehat{X}_2 - \widehat{X}_3 = \frac{1}{2}r, \quad \widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_3 = 0, \quad \widehat{Y}_2 - \widehat{Y}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

$$0 = \sum_{k=1}^{3} m_k\widehat{X}_k = M\widehat{X}_1 - \frac{1}{2}m_2r - m_3r, \quad 0 = \sum_{k=1}^{3} m_k\widehat{Y}_k = M\widehat{Y}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}m_2r,$$

$$\widehat{X}_1 = \frac{\frac{1}{2}m_2 + m_3}{M}r, \quad \widehat{X}_2 = \frac{m_3 - m_1}{2M}r, \quad \widehat{X}_3 = -\frac{m_1 + \frac{1}{2}m_2}{M}r,$$

$$\widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_3 = -\frac{\sqrt{3}\,m_2}{2M}r, \quad \widehat{Y}_2 = \sqrt{3}\frac{m_1 + m_3}{2M}r.$$

В коллинеарном случае обозначим самую длинную сторону $\widehat{r}_{13} = \widehat{X}_1 - \widehat{X}_3 = a$, таким образом $\widehat{r}_{12} = \widehat{X}_1 - \widehat{X}_2 = \varrho a$, $\widehat{r}_{23} = \widehat{X}_2 - \widehat{X}_3 = \sigma a$, где $\varrho + \sigma = 1$, $0 < \varrho < 1$. Тогда соответствующие уравнения (24) для абсцисс имеют вид

$$\frac{2}{9}\widehat{X}_1 a^2 = m_2\varrho^{-2} + m_3, \ \frac{2}{9}\widehat{X}_2 a^2 = -m_1\varrho^{-2} + m_3\sigma^{-2}, \ \frac{2}{9}\widehat{X}_3 a^2 = -m_1 - m_2\sigma^{-2}$$

и при вычитании дают

$$\frac{2}{9}a^3 = m_1 + m_2(\varrho^{-2} + \sigma^{-2}) + m_3, \ \frac{2}{9}\sigma a^3 = m_1(1 - \varrho^{-2}) + m_2\sigma^{-2} + m_3\sigma^{-2}. \quad (27)$$

Исключение a приводит к уравнению пятой степени по ϱ

$$m_1\sigma^2(\varrho^3 - 1) + m_2(\varrho^3 - \sigma^3) + m_3\varrho^2(1 - \sigma^3) = 0 \quad (\sigma = 1 - \varrho). \quad (28)$$

Если записать это уравнение в виде

$$\frac{m_1 + m_2\sigma}{m_1 + m_2\sigma^{-2}} = \frac{m_3 + m_2\varrho}{m_3 + m_2\varrho^{-2}},$$

то можно увидеть, что на интервале $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ левая часть как функция от ϱ монотонно убывает от 1 до 0, а правая часть в то же время монотонно возрастает от 0 до 1. Следовательно, (28) имеет в точности одно положительное решение $\varrho < 1$, и тогда из (27) однозначно определяется длина a. Из уравнения (7) теперь следует, что

$$\varkappa = \frac{9}{2}(m_1 m_2 \varrho^{-1} + m_1 m_3 + m_2 m_3 \sigma^{-1})a^{-1}, \quad (29)$$

а координаты задаются соотношениями

$$0 = \sum_{k=1}^{3} m_k \widehat{X}_k = M\widehat{X}_1 - m_2\varrho a - m_3 a, \quad \widehat{X}_1 = \frac{m_2\varrho + m_3}{M}a,$$

$$\widehat{X}_2 = \frac{m_3\sigma - m_1\varrho}{M}a, \quad \widehat{X}_3 = -\frac{m_1 + m_2\sigma}{M}a, \quad \widehat{Y}_1 = \widehat{Y}_2 = \widehat{Y}_3 = 0.$$

Эти значения соответствуют случаю, когда при $t = 0$ точка $\overline{P}_2$ лежит между $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_3$. Две другие ситуации в коллинеарном случае получаются из этой циклической перестановкой m_1, m_2, m_3.

Таким образом, мы доказали, что в равностороннем и в коллинеарном случае координаты X_k, Y_k точек $\overline{P}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ имеют вполне определенные предельные значения, которые не зависят от рассматриваемой изначально последовательности $t \to 0$. Следовательно, относительно движущейся системы координат, треугольник $\overline{\triangle}$ стремится к предельному положению, которое в обоих случаях зависит только от значений m_1, m_2, m_3.

В этом параграфе мы вывели те результаты Зундмана [1], которые относятся к тройному столкновению; в частности, теорему о том, что при расширении в отношении 1 к $t^{2/3}$ стороны треугольника имеют определенные пределы, которые соответствуют либо равностороннему, либо коллинеарному случаю. Однако из этого не следует, что старые координаты $\overline{x}_k$, $\overline{y}_k$ точек $\overline{P}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ сами имеют предельные значения. Чтобы доказать это, осталось показать, что при $t \to 0$ угол между старой и новой системами координат также стремится к пределу. Кроме того, полностью аналогично случаю простого столкновения в этом случае можно получить подходящие разложения в ряды для координат x_k, y_k и тем самым определить в совокупности все возможные траектории тройного столкновения. Все это будет получено в следующем параграфе.

§ 13. Траектории тройного столкновения

Сначала мы построим частное решение плоской задачи трех тел, которое покажет, что как равносторонний случай тройного столкновения, так и коллинеарный случай со всеми его тремя возможными перестановками, действительно могут возникнуть. Для этого пусть шесть координат $q = x_k$, y_k $(k = 1, 2, 3)$ имеют вид

$$q = q(t) = \widehat{q}w, \quad w = w(t), \tag{1}$$

где w — дважды дифференцируемая положительная функция на интервале $0 < t \leqslant \tau$, и шесть констант $\widehat{q}$ такие, что при $t > 0$ три точки различны. Также для тройного столкновения при $t = 0$ предположим, что $w(t) \to 0$ при $t \to 0$. Исходя из (1), получаем, что функция

$$\widehat{U} = Uw$$

зависит только от параметров $\widehat{q}$ и является однородной функцией степени -1 по этим величинам. Следовательно,

$$\sum_{\widehat{q}} \widehat{q}\widehat{U}_{\widehat{q}} = -\widehat{U} < 0,$$

и поэтому $\widehat{q}\widehat{U}_{\widehat{q}} < 0$ по крайней мере для одной координаты. При предположении (1) уравнения движения (5; 3) принимают вид

$$m\widehat{q}\ddot{w} = \widehat{U}_{\widehat{q}} w^{-2}.$$

Это влечет, что выражение $\ddot{w}w^2$ должно тождественно равняться отрицательной константе b_1. Если умножить w на положительный множитель для нормализации $b_1 = -\frac{2}{9}$, то мы придем к уравнениям

$$\ddot{w} = -\frac{2}{9}w^{-2}, \quad -\frac{2}{9}\widehat{q} = m^{-1}\widehat{U}_{\widehat{q}}. \tag{2}$$

Интегрирование дифференциального уравнения (2) приводит к

$$\dot{w}^2 = \frac{4}{9}(w^{-1} + b_2), \tag{3}$$

где b_2 — произвольная константа. Если выбрать константу равной нулю, то из этого следует, что

$$\frac{3}{2}w^{1/2}\dot{w} = 1, \quad w^{3/2} = t, \quad w = t^{2/3}.$$

С другой стороны, второе уравнение в (2) совпадает с (12; 23), если заменить в нем функции $\overline{q} = \overline{q}(t)$ на константы $\widehat{q}$. Из нашего вышеприведенного результата мы знаем, что решения задаются тремя неподвижными точками $\widehat{P}_1$, $\widehat{P}_2$, $\widehat{P}_3$ с координатами $\widehat{q}$, соответствующими либо равностороннему, либо коллинеарному случаю. Если выбрать ось абсцисс по направлению вектора $\widehat{P}_3\widehat{P}_1$, то значения $\widehat{q}$ в точности те же, что были найдены $\widehat{X}_k$, $\widehat{Y}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Это доказывает, что каждый из частных случаев тройного столкновения действительно возникает как частное решение задачи трех тел.

Можно, тем не менее, ввести произвольный вещественный параметр в вышеуказанные решения, если не предполагать, что $b_2 = 0$ в (3), и воспользоваться разложением в ряд

$$(1 + b_2 w)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}b_2 w + \ldots \quad \big(|b_2 w| < 1\big).$$

Тогда

$$\frac{3}{2}\Bigl(w^{1/2}-\frac{1}{2}b_2w^{3/2}+\ldots\Bigr)\dot w=1,\quad w^{3/2}-\frac{3}{10}b_2w^{5/2}+\ldots=t,$$
$$w-\frac{1}{5}b_2w^2+\ldots=t^{2/3},\quad w=t^{2/3}\overline{w}, \tag{4}$$
$$\overline{w}=1+\frac{1}{5}b_2t^{2/3}+\ldots,\quad q=\overline{q}t^{2/3},\quad \overline{q}=\widehat{q\overline{w}},$$

где $\overline{w}$ — степенной ряд по $b_2t^{2/3}$, который сходится при достаточно малых положительных значениях t. Кроме того, величину b_2 можно выразить в терминах постоянной энергии h.

Следующее исследование покажет, что частные решения задачи трех тел, возникающие в (4), по-прежнему не являются наиболее общими траекториями тройного столкновения [1, 2, 3]. При определении всех из них можно предположить, что в коллинеарном случае с использованием обозначений из предыдущего параграфа точка $\overline{P}_2$ при $t=0$ лежит между $\overline{P}_3$ и $\overline{P}_1$, так как две другие возможности могут быть сведены к этой с помощью циклической перестановки индексов.

В соответствии с § 7 введем относительные координаты

$$\xi_1=x_1-x_3,\quad \xi_2=x_2-x_3,\quad \xi_3=y_1-y_3,\quad \xi_4=y_2-y_3 \tag{5}$$

точек P_1 и P_2 относительно P_3, где

$$r_{13}^2=\xi_1^2+\xi_3^2,\quad r_{23}^2=\xi_2^2+\xi_4^2,\quad r_{12}^2=(\xi_1-\xi_2)^2+(\xi_3-\xi_4)^2,$$

и поскольку по предположению центр масс покоится в начале координат, также получим

$$\begin{aligned}
Mx_1&=(m_2+m_3)\xi_1-m_2\xi_2, & My_1&=(m_2+m_3)\xi_3-m_2\xi_4,\\
Mx_2&=-m_1\xi_1+(m_1+m_3)\xi_2, & My_2&=-m_1\xi_3+(m_1+m_3)\xi_4,\\
Mx_3&=-m_1\xi_1-m_2\xi_2, & My_3&=-m_1\xi_3-m_4\xi_4,
\end{aligned} \tag{6}$$

где снова $M=m_1+m_2+m_3$. Если дополнительно положить

$$\eta_1=m_1\dot x_1,\quad \eta_2=m_2\dot x_2,\quad \eta_3=m_1\dot y_1,\quad \eta_4=m_2\dot y_2, \tag{7}$$

то

$$m_3\dot x_3=-\eta_1-\eta_2,\quad m_3\dot y_3=-\eta_3-\eta_4,$$
$$T=\frac{1}{2m_1}(\eta_1^2+\eta_3^2)+\frac{1}{2m_2}(\eta_2^2+\eta_4^2)+\frac{1}{2m_3}\bigl\{(\eta_1+\eta_2)^2+(\eta_3+\eta_4)^2\bigr\}.$$

Как уже было установлено в § 7, для переменных ξ_k, η_k это приводит к гамильтоновой системе

$$\dot{\xi}_k = E_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -E_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, 4),$$

где $E = T - U$, или в явном виде

$$\begin{cases} \dot{\xi}_k = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_3}\right)\eta_k + \dfrac{1}{m_3}\eta_{k+1}, \\ \dot{\xi}_{k+1} = \left(\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3}\right)\eta_{k+1} + \dfrac{1}{m_3}\eta_k, \quad (k = 1,\, 3) \\ \dot{\eta}_k = U_{\xi_k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3,\, 4). \end{cases} \tag{8}$$

Для последующего обсуждения тройного столкновения необходимо ввести новую прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с P_3, а ось абсцисс всегда проходит через P_1. Пусть p_4 — угол между старой и новой осями абсцисс, а p_1, 0 и p_2, p_3 — новые координаты P_1 и P_2. Используя сокращения

$$\cos p_4 = c, \quad \sin p_4 = s,$$

получим

$$\xi_1 = p_1 c, \quad \xi_2 = p_2 c - p_3 s, \quad \xi_3 = p_1 s, \quad \xi_4 = p_2 s + p_3 c, \tag{9}$$

$$r_{13} = p_1, \quad r_{23}^2 = p_2^2 + p_3^2, \quad r_{12}^2 = (p_1 - p_2)^2 + p_3^2. \tag{10}$$

Чтобы продолжить преобразование (9) переменных $\xi_1, \ldots, \xi_4$ в $p_1, \ldots, p_4$ до канонического преобразования восьми независимых переменных ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 4)$, рассмотрим порождающую функцию

$$W = W(p,\, \eta) = \eta_1 p_1 c + \eta_2(p_2 c - p_3 s) + \eta_3 p_1 s + \eta_4(p_2 s + p_3 c).$$

Тогда определитель четвертого порядка

$$|W_{\eta_k p_l}| = -p_1 \neq 0.$$

Согласно § 3, выражение

$$W_{p_k} = q_k, \quad W_{\eta_k} = \xi_k \quad (k = 1, \ldots, 4)$$

задает каноническое преобразование, которое, очевидно, удовлетворяет (9) и добавляет четыре уравнения

$$\begin{aligned} &q_1 = \eta_1 c + \eta_3 s, \quad q_2 = \eta_2 c + \eta_4 s, \quad q_3 = -\eta_2 s + \eta_4 c, \\ &q_4 = p_1(-\eta_1 s + \eta_3 c) + p_2(-\eta_2 s + \eta_4 c) - p_3(\eta_2 c + \eta_4 s). \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью вспомогательной переменной

$$q_0 = -\eta_1 s + \eta_3 c \tag{12}$$

приходим к

$$\begin{gathered} q_4 = p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2, \quad q_0 = (q_4 - p_2 q_3 + p_3 q_2) p_1^{-1}, \\ \eta_1 = q_1 c - q_0 s, \quad \eta_2 = q_2 c - q_3 s, \quad \eta_3 = q_1 s + q_0 c, \quad \eta_4 = q_2 s + q_3 c \end{gathered} \tag{13}$$

и

$$T = \frac{1}{2m_1}(q_1^2 + q_0^2) + \frac{1}{2m_2}(q_2^2 + q_3^2) + \frac{1}{2m_3}\bigl\{(q_1 + q_2)^2 + (q_0 + q_3)^2\bigr\}. \tag{14}$$

Нужно заметить, что здесь и в дальнейшем q_k имеет отличный смысл от q, использованного ранее.

Настоящее преимущество канонических преобразований, определенных в (9) и (11), заключается в том, что как следствие (10), (13) и (14) функция E в своей зависимости от восьми новых переменных p_k, q_k $(k = 1, \ldots, 4)$ больше не содержит угол p_4. Из § 2 видно, что новая гамильтонова система принимает вид

$$\dot{p}_k = E_{q_k}, \quad \dot{q}_k = -E_{p_k} \quad (k = 1, \ldots, 4) \tag{15}$$

и, поскольку $E_{p_4} = 0$, из этого следует, что q_4 — константа. С другой стороны, из (5; 8) вместе с (5), (7), (9) и (11) получаем, что

$$\begin{aligned} q_4 &= \xi_1 \eta_3 + \xi_2 \eta_4 - \xi_3 \eta_1 - \xi_4 \eta_2 = \\ &= m_1(x_1 - x_3)\dot{y}_1 + m_2(x_2 - x_3)\dot{y}_2 - m_1(y_1 - y_3)\dot{x}_1 - m_2(y_2 - y_3)\dot{x}_2 = \\ &\quad = m_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + m_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) + m_3(x_3\dot{y}_3 - y_3\dot{x}_3) = \gamma = 0, \end{aligned}$$

поскольку для тройного столкновения константы момента количества движения равны нулю. Таким образом, (15) сводится к системе

$$\dot{p}_k = (E_{q_k})_{q_4=0}, \quad \dot{q}_k = -(E_{p_k})_{q_4=0} \quad (k = 1, 2, 3)$$

из шести уравнений, свободной от p_4 и q_4, плюс дополнительное уравнение

$$\dot{p}_4 = (E_{q_4})_{q_4=0},$$

которое можно решить квадратурой. С целью исследования этих дифференциальных уравнений определим асимптотическое поведение p_k и q_k $(k = 1,\,2,\,3)$ при $t \to 0$.

Величины

$$p_k t^{-2/3} = \overline{p}_k \quad (k = 1,\,2,\,3) \tag{16}$$

в обозначениях предыдущего параграфа соответствуют

$$\overline{p}_1 = X_1 - X_3, \quad \overline{p}_2 = X_2 - X_3, \quad \overline{p}_3 = Y_2 - Y_3$$

и поэтому при $t = 0$ принимают предельные значения

$$\widehat{p}_1 = r, \quad \widehat{p}_2 = \frac{1}{2}r, \quad \widehat{p}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

в равностороннем случае и

$$\widehat{p}_1 = a, \quad \widehat{p}_2 = \sigma a, \quad \widehat{p}_3 = 0$$

в коллинеарном случае, где r, a, σ — обозначения, принятые ранее. Затем, пусть

$$q_k t^{1/3} = \overline{q}_k \quad (k = 0,\,1,\,2,\,3). \tag{17}$$

Очень важно, что $\overline{q}_k$ также имеют пределы при $t = 0$ и они сразу могут быть вычислены.

Во-первых, из (12; 1) и (5), (7), (9), (11) имеем равенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{I} &= \sum_{k=1}^{3} m_k(x_k\dot{x}_k + y_k\dot{y}_k) = \sum_{k=1}^{2} m_k\big((x_k - x_3)\dot{x}_k + (y_k - y_3)\dot{y}_k\big) = \\ &= \sum_{k=1}^{4} \xi_k\eta_k = \sum_{k=1}^{3} p_k q_k = t^{1/3}\sum_{k=1}^{3}\overline{p}_k\overline{q}_k,\end{aligned}$$

которое благодаря (12; 6) показывает, что

$$\sum_{k=1}^{3}\overline{p}_k\overline{q}_k \to \frac{2}{3}\varkappa \quad (t \to 0). \tag{18}$$

Здесь положительная константа $\varkappa$ задана (12; 26) в равностороннем случае, и (12; 29) в коллинеарном случае. Поскольку $q_4 = 0$, из (13) следует, что также

$$\overline{p}_1\overline{q}_0 + \overline{p}_2\overline{q}_3 - \overline{p}_3\overline{q}_2 = 0. \tag{19}$$

Из (12; 14) можно получить дополнительные асимптотические соотношения, в частности

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = o(t^{1/3}), \quad x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2 = o(t^{1/3}),$$
$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1 = o(t^{1/3}).$$

С помощью (6), (9), (11), (12), (16) и (17) из этого получаем

$$(m_2 + m_3)(\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1) - m_2(\xi_2\eta_3 - \xi_4\eta_1) = o(t^{1/3}),$$
$$(m_1 + m_3)(\xi_2\eta_4 - \xi_4\eta_2) - m_1(\xi_1\eta_4 - \xi_3\eta_2) = o(t^{1/3}),$$
$$m_1(m_2 + m_3)(\xi_1\eta_2 + \xi_3\eta_4) - m_2(m_1 + m_3)(\xi_2\eta_1 + \xi_4\eta_3) +$$
$$+ m_1m_2(\xi_1\eta_1 + \xi_3\eta_3 - \xi_2\eta_2 - \xi_4\eta_4) = o(t^{1/3}),$$
$$(m_2 + m_3)\overline{p}_1\overline{q}_0 - m_2(\overline{p}_1\overline{q}_0 - \overline{p}_3\overline{q}_1) \to 0, \tag{20}$$
$$(m_1 + m_3)(\overline{p}_2\overline{q}_3 - \overline{p}_3\overline{q}_2) - m_1\overline{p}_1\overline{q}_3 \to 0, \tag{21}$$
$$m_1(m_2 + m_3)\overline{p}_1\overline{q}_2 - m_2(m_1 + m_3)(\overline{p}_2\overline{q}_1 + \overline{p}_3\overline{q}_0) +$$
$$+ m_1m_2(\overline{p}_1\overline{q}_1 - \overline{p}_2\overline{q}_2 - \overline{p}_3\overline{q}_3) \to 0, \tag{22}$$

которые все справедливы при $t \to 0$. Основываясь на (12; 13) и (7), (11), (12), (17), также получим

$$\overline{q}_k = O(1) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{23}$$

Из (18), (19), (20), (21) и (23) получаем соотношения

$$2\overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \sqrt{3}\,\overline{q}_3 \to \frac{4}{3}\varkappa r^{-1}, \quad 2\overline{q}_0 - \sqrt{3}\,\overline{q}_2 + \overline{q}_3 \to 0,$$
$$2\sqrt{3}\,m_2\overline{q}_1 + (m_2 + 2m_3)(\sqrt{3}\,\overline{q}_2 - \overline{q}_3) \to 0,$$
$$\sqrt{3}(m_1 + m_3)\overline{q}_2 + (m_1 - m_3)\overline{q}_3 \to 0.$$

Тогда, если положить

$$\overline{q}_3 = \frac{m_2}{\sqrt{3}}(m_1 + m_3)\overline{q},$$

то, следовательно,

$$\overline{q}_2 = \frac{m_2}{3}(m_3 - m_1)\overline{q} + o(1), \quad \overline{q}_1 = \frac{m_1}{3}(m_2 + 2m_3)\overline{q} + o(1),$$
$$\frac{4}{3}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)\overline{q} \to \frac{4}{3}\varkappa r^{-1},$$

поэтому с помощью (12; 25) и (12; 26) получим

$$\overline{q} \to \frac{r}{M}.$$

Следовательно, в равностороннем случае $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, $\overline{q}_3$ имеют предельные значения

$$\widehat{q}_1 = \frac{m_1}{3M}(m_2 + 2m_3)r, \quad \widehat{q}_2 = \frac{m_2}{3M}(m_3 - m_1)r, \quad \widehat{q}_3 = \frac{m_2}{\sqrt{3}\,M}(m_1 + m_3)r,$$

а величина

$$\overline{q}_0 \to \widehat{q}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\widehat{q}_2 - \frac{1}{2}\widehat{q}_3 = -\frac{m_1 m_2}{\sqrt{3}\,M}r.$$

Так же, как и для $\widehat{p}_1$, $\widehat{p}_2$, $\widehat{p}_3$, эти значения зависят только от масс m_1, m_2, m_3.

В коллинеарном случае из (19), (20), (22) и (23) получим соотношения

$$\overline{q}_0 + \sigma\overline{q}_3 \to 0, \quad (m_2\varrho + m_3)\overline{q}_0 \to 0,$$
$$m_2(m_1\varrho - m_3\sigma)\overline{q}_1 + m_1(m_2\varrho + m_2)\overline{q}_2 \to 0,$$

и поэтому

$$\overline{q}_0 \to 0, \quad \overline{q}_3 \to 0.$$

Если мы положим

$$\overline{q}_1 = m_1(m_2\varrho + m_3)\overline{q},$$

то

$$\overline{q}_2 = m_2(m_3\sigma - m_1\varrho)\overline{q} + o(1),$$

и из (18) следует, что

$$\big\{m_1(m_2\varrho + m_3) + m_2\sigma(m_3\sigma - m_1\varrho)\big\}\overline{q} \to \frac{2}{3}\varkappa a^{-1}.$$

С другой стороны, благодаря (12; 27) и (12; 29), получим

$$\frac{2}{9}a^3 m_1(m_2\varrho + m_3) + \frac{2}{9}\sigma a^3 m_2(m_3\sigma - m_1\varrho) =$$
$$= M(m_1 m_2\varrho^{-1} + m_1 m_3 + m_2 m_3\sigma^{-1}) = \frac{2}{9}M\varkappa a,$$

так что в конечном итоге

$$\overline{q} \to \frac{2a}{3M}.$$

Таким образом, в коллинеарном случае $\overline{q}_0$, $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$, $\overline{q}_3$ в пределе равны

$$\widehat{q}_0 = 0, \quad \widehat{q}_1 = \frac{2m_1}{3M}(m_2\varrho + m_3)a, \quad \widehat{q}_2 = \frac{2m_2}{3M}(m_3\sigma - m_1\varrho)a, \quad \widehat{q}_3 = 0,$$

и эти пределы также зависят только от трех масс.

Пусть q_4 снова произвольно. В дифференциальных уравнениях (15) сделаем замены

$$p_k = \overline{p}_k t^{2/3} \quad (k = 1, 2, 3), \quad q_k = \overline{q}_k t^{-1/3} \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$
$$q_4 = \overline{q}_4 t^{1/3}, \quad p_4 = \overline{p}_4,$$

а также

$$t = e^{-u}, \quad dt = -t\,du.$$

Функция $\overline{E}$ получается из E прямой заменой семи переменных p_k ($k = 1, 2, 3$) и q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) на $\overline{p}_k$ и $\overline{q}_k$ и удовлетворяет соотношению

$$E = \overline{E} t^{-2/3}.$$

При этом дифференциальные уравнения преобразуются в систему

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{p}_k}{du} = \frac{2}{3}\overline{p}_k - \overline{E}_{\overline{q}_k}, \quad \frac{d\overline{q}_k}{du} = -\frac{1}{3}\overline{q}_k + \overline{E}_{\overline{p}_k} \quad (k = 1, 2, 3) \\ &\frac{d\overline{p}_4}{du} = -\overline{E}_{\overline{q}_4}, \quad \frac{d\overline{q}_4}{du} = \frac{1}{3}\overline{q}_4. \end{aligned} \tag{24}$$

Теперь пусть

$$\begin{aligned} &\overline{p}_k = \widehat{p}_k + \delta_k, \quad \overline{q}_k = \widehat{q}_k + \delta_{k+2} \quad (k = 1, 2) \\ &\overline{p}_3 = \widehat{p}_3 + \delta_5, \quad \overline{q}_3 = \widehat{q}_3 + \delta_6, \quad \overline{q}_4 = \delta_7, \quad \overline{p}_4 = \delta_8, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\widehat{p}_k$, $\widehat{q}_k$ ($k = 1, 2, 3$) — полученные ранее пределы либо для равностороннего, либо для коллинеарного случая. Значения $\delta_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 8$) в точности соответствуют координатам частных траекторий тройного столкновения, полученных в начале этого параграфа, и поскольку они также приводят к решениям (24), то, следовательно, правые части восьми дифференциальных уравнений, как функции от δ_k, все обращаются в нуль в точке $\delta_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 8$). С другой стороны, в достаточно малой комплексной окрестности этой точки правые части регулярны и имеют сходящиеся разложения в ряды по степеням δ_k. Таким образом, система (24) имеет вид

$$\frac{d\delta_k}{du} = \sum_{l=1}^{8} a_{kl}\delta_l + \phi_k \quad (k = 1, \ldots, 8), \tag{26}$$

где ϕ_k — степенные ряды по $\delta_1, \ldots, \delta_7$, начинающиеся со слагаемых второго порядка, и a_{kl} — вещественные константы. Здесь

$$a_{k8} = 0 \quad (k = 1, \ldots, 8), \quad a_{77} = \frac{1}{3}, \quad a_{7l} = 0 \quad (l \neq 7),$$

что приводит к матрице восемь на восемь вида

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B} & * & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\mathfrak{B}$ — матрица шесть на шесть. Кроме того, $\phi_7 = 0$.

Так как $u = \log t^{-1}$, то, когда t убывает до нуля, переменная u возрастает до ∞. Кроме того, $\delta_7 = q_4 t^{-1/3} = 0$ для каждой траектории тройного столкновения. Таким образом, чтобы получить все траектории тройного столкновения, необходимо решить шесть дифференциальных уравнений

$$\frac{d\delta_k}{du} = \sum_{l=1}^{6} a_{kl}\delta_l + \phi_k \quad (k = 1, \ldots, 6), \tag{28}$$

где $\delta_7 = 0$, чтобы найти все решения $\delta_k = \delta_k(u)$ $(k = 1, \ldots, 6)$, которые определены для достаточно больших u и асимптотически стремятся к решениям $\delta_k = 0$ при $u \to \infty$.

Чтобы решить эту задачу, воспользуемся результатом, который будет получен в § 28 независимо от настоящих исследований. Согласно (27), линейная часть правой стороны в (28) имеет матрицу коэффициентов $\mathfrak{B}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ — собственные числа $\mathfrak{B}$, т. е. корни полинома $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{B}|$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ имеют отрицательную вещественную часть. Благодаря ограничениям, наложенным в § 28, в дальнейшем будем предполагать, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ — простые, никакое из них не является чисто мнимым или нулем, и для всех систем неотрицательных целых чисел $n_1, \ldots, n_f$, где $n_1 + \ldots + n_f > 1$, имеем

$$\sum_{l=1}^{f} n_l \lambda_l \neq \lambda_k \quad (k = 1, \ldots, f). \tag{29}$$

В соответствии с § 28 искомые решения (28) задаются выражениями

$$\delta_k = \psi_k(v_1, \ldots, v_f) \quad (k = 1, \ldots, 6), \quad v_l = c_l e^{\lambda_l u} \quad (l = 1, \ldots, f), \tag{30}$$

где ψ_k — сходящиеся степенные ряды по переменным $v_1, \ldots, v_f$ без постоянных слагаемых, а c_l — произвольные константы, достаточно малые по модулю. Коэффициенты в рядах ψ_k однозначно определяются с помощью рекуррентной процедуры. Как только искомые решения $\delta_1, \ldots, \delta_6$ уравнений (28) будут получены из (30), угол $p_4 = \overline{p}_4 = \delta_8$ находится квадратурой из последнего уравнения в (26), которое при $\delta_7 = 0$ имеет вид

$$\frac{dp_4}{du} = -\Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\Big)\frac{\overline{q}_0}{\overline{p}_1} - \frac{1}{m_3}\frac{\overline{q}_3}{\overline{p}_1}, \quad \overline{q}_0 = \frac{\overline{q}_2\overline{p}_3 - \overline{p}_2\overline{q}_3}{\overline{p}_1}. \tag{31}$$

В свете (30) правая часть этого дифференциального уравнения снова будет степенным рядом по $v_1, \ldots, v_f$ без постоянного слагаемого, и, поскольку $\lambda_1, \ldots, \lambda_f$ имеют отрицательные вещественные части, интеграл сходится при $u = \infty$. Следовательно, для каждого решения, заканчивающегося тройным столкновением, угол p_4 также имеет конечный предел $\widehat{p}_4$ при $t \to 0$. Это завершает доказательство того, что столкновение трех частиц происходит в определенных направлениях.

Вычисление шести собственных значений облегчается при возврате к старым переменным. Из (27) имеем

$$\begin{gathered}
\lambda\mathfrak{E}_8 - \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \lambda\mathfrak{E}_6 - \mathfrak{B} & * & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{3} & 0 \\ * & * & \lambda \end{pmatrix}, \\
|\lambda\mathfrak{E}_8 - \mathfrak{A}| = \lambda(\lambda - \frac{1}{3})|\lambda\mathfrak{E}_6 - \mathfrak{B}|.
\end{gathered} \tag{32}$$

Преобразуем восемь переменных δ_k $(k = 1, \ldots, 8)$ с помощью подстановки

$$\omega_k = \sum_{l=1}^{8} c_{kl}\delta_l + \chi_k \quad (k = 1, \ldots, 8),$$

где коэффициенты c_{kl} образуют обратимую постоянную матрицу $\mathfrak{C}$, а χ_k — сходящиеся степенные ряды по δ_l $(l = 1, \ldots, 8)$, начинающиеся с квадратичного слагаемого. В результате (26) заменяются на новую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega_k}{du} = \sum_{l=1}^{8} g_{kl}\omega_l + \ldots \quad (k = 1, \ldots, 8),$$

матрица коэффициентов $\mathfrak{G} = (g_{kl})$ которого определяется из соотношения

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{C}. \tag{33}$$

Это утверждение по своей природе является чисто алгебраическим и не влияет на свойства решений этих дифференциальных уравнений. При определении ω_k мы обратились к ранее использованным каноническим преобразованиям

$$\begin{gathered} \xi_1 = p_1 c, \quad \xi_2 = p_2 c - p_3 s, \quad \xi_3 = p_1 s, \quad \xi_4 = p_2 s + p_3 c, \\ \eta_1 = q_1 c - q_0 s, \;\; \eta_2 = q_2 c - q_3 s, \;\; \eta_3 = q_1 s + q_0 c, \;\; \eta_4 = q_2 s + q_3 c, \\ q_0 = (q_4 - p_2 q_3 + p_3 q_2) p_1^{-1}, \quad c = \cos p_4, \quad s = \sin p_4 \end{gathered} \tag{34}$$

и провели дополнительную обратимую однородную линейную замену

$$\begin{gathered} -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)\eta_k - \frac{1}{m_3}\eta_{k+1} = \xi_{k+4}, \\ -\frac{1}{m_3}\eta_k - \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)\eta_{k+1} = \xi_{k+5} \quad (k = 1, 3). \end{gathered} \tag{35}$$

В терминах

$$\bar{\xi}_k = \xi_k t^{-2/3}, \quad \bar{\xi}_{k+4} = \xi_{k+4} t^{2/3} \quad (k = 1, \ldots, 4),$$

при $t = e^{-u}$ система (8) имеет вид

$$\frac{d\bar{\xi}_k}{du} = \frac{2}{3}\bar{\xi}_k + \bar{\xi}_{k+4}, \quad \frac{d\bar{\xi}_{k+4}}{du} = -\frac{1}{3}\bar{\xi}_{k+4} - F_k \quad (k = 1, \ldots, 4), \tag{36}$$

где

$$F_k = \begin{cases} (m_1 + m_3)R_2\bar{\xi}_k + m_2 R_1 \bar{\xi}_{k+1} + m_2 R_3(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_{k+1}) & (k = 1, 3) \\ m_1 R_2 \bar{\xi}_{k-1} + (m_2 + m_3)R_1\bar{\xi}_k + m_1 R_3(\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_{k-1}) & (k = 2, 4) \end{cases}$$

$$R_1 = (\bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_4^2)^{-3/2}, \; R_2 = (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_3^2)^{-3/2}, \; R_3 = \{(\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2)^2 + (\bar{\xi}_3 - \bar{\xi}_4)^2\}^{-3/2}.$$

И последнее, пусть $\widehat{\xi}_k$ $(k = 1, \ldots, 8)$ — значения $\overline{\xi}_k$ как функций от восьми переменных δ_l $(l = 1, \ldots, 8)$ при $\delta_l = 0$, и определим

$$\omega_k = \overline{\xi}_k - \widehat{\xi}_k \quad (k = 1, \ldots, 8). \tag{37}$$

Тогда правые части (36) приводятся к сходящимся степенным рядам по ω_k без постоянных слагаемых с соответствующей матрицей коэффициентов

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathfrak{E}_4 & \mathfrak{E}_4 \\ -\mathfrak{S} & -\frac{1}{3}\mathfrak{E}_4 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где элементы s_{kl} $(k, l = 1, \ldots, 4)$ в матрице четыре на четыре $\mathfrak{S}$ являются частными производными $\dfrac{\partial F_k}{\partial \overline{\xi}_l}$, вычисленными при $\overline{\xi}_r = \widehat{\xi}_r$ $(r = 1, \ldots, 4)$.

Из (34) получаем, что $\widehat{\xi_1} = \widehat{p}_1$, $\widehat{\xi_2} = \widehat{p}_2$, $\widehat{\xi_3} = 0$, $\widehat{\xi_4} = \widehat{p}_3$, и поэтому в равностороннем случае

$$r^3\mathfrak{S} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}m_2 - 2(m_1+m_3) & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}m_2 \\ -\frac{9}{4}m_1 & \frac{1}{4}(m_1+m_2+m_3) & -\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 & \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2-m_3) \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}m_2 & m_1+m_3-\frac{5}{4}m_2 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}m_1 & \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2-m_3) & \frac{9}{4}m_1 & -\frac{5}{4}(m_1+m_2+m_3) \end{pmatrix},$$

в то время как в коллинеарном случае

$$a^3\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} -2\mathfrak{Q} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Q} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} m_1+m_3+m_2\varrho^{-3} & m_2(\sigma^{-3}-\varrho^{-3}) \\ m_1(1-\varrho^{-3}) & m_1\varrho^{-3}+(m_2+m_3)\sigma^{-3} \end{pmatrix}.$$

Используя сокращение

$$(\lambda + \frac{1}{3})(\lambda - \frac{2}{3}) = \zeta,$$

из (32), (33), (38) видим, что

$$|\lambda\mathfrak{E}_8 - \mathfrak{U}| = |\lambda\mathfrak{E}_8 - \mathfrak{C}| = \begin{vmatrix} (\lambda - \frac{2}{3})\mathfrak{E}_4 & -\mathfrak{E}_4 \\ \mathfrak{S} & (\lambda + \frac{1}{3}\mathfrak{E}_4) \end{vmatrix},$$

$$(\zeta + \frac{2}{9})|\lambda\mathfrak{E}_6 - \mathfrak{B}| = |\zeta\mathfrak{E}_4 + \mathfrak{S}|,$$

и прямое вычисление определителя четвертого порядка дает

$$|\zeta\mathfrak{E}_4 + \mathfrak{S}| = (\zeta + \frac{2}{9})(\zeta - \frac{4}{9})(\zeta^2 - \frac{2}{9}\zeta - \frac{8}{81} + \frac{1}{3}\mu),$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}$$

в равностороннем случае, и

$$|\zeta\mathfrak{E}_4 + \mathfrak{S}| = (\zeta + \frac{2}{9})(\zeta - \frac{4}{9})(\zeta + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\nu)(\zeta - \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\nu),$$

где

$$\nu = \frac{m_1(1 + \varrho^{-1} + \varrho^{-2}) + m_3(1 + \sigma^{-1} + \sigma^{-2})}{m_1 + m_2(\varrho^{-2} + \sigma^{-2}) + m_3}$$

в коллинеарном случае. Определитель $|\lambda\mathfrak{E}_6 - \mathfrak{B}|$ получается из этих двух полиномов при отбрасывании множителя $(\zeta + \frac{2}{9})$. Таким образом, в равностороннем случае шесть собственных значений $\mathfrak{B}$ равны

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3},\ \lambda_2 = \frac{1}{6}\big(1 - \sqrt{13 + 12\sqrt{1 - 3\mu}}\big),\ \lambda_3 = \frac{1}{6}\big(1 - \sqrt{13 - 12\sqrt{1 - 3\mu}}\big),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{6}\big(1 + \sqrt{13 - 12\sqrt{1 - 3\mu}}\big),\ \lambda_5 = \frac{1}{6}\big(1 + \sqrt{13 + 12\sqrt{1 - 3\mu}}\big),\ \lambda_6 = 1,$$

а в коллинеарном случае они равны

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{25 + 16\nu}), \quad \lambda_3 = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{1 - 8\nu}),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{1 - 8\nu}), \quad \lambda_5 = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{25 + 16\nu}), \quad \lambda_6 = 1.$$

Тождество

$$2M^2(1 - 3\mu) = (m_1 - m_2)^2 + (m_1 - m_3)^2 + (m_2 - m_3)^2$$

показывает, что в равностороннем случае все шесть собственных значений вещественны, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — отрицательны, а $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ — положительны. Кроме того, за исключением случая $m_1 = m_2 = m_3$, все собственные значения различны, а условие (29), как легко увидеть, совпадает с ограничением, что ни λ_1/λ_3, ни λ_2/λ_3 не являются целым числом. При отбрасывании этих исключительных ситуаций, ранее упомянутый результат из § 28 задает координаты для равностороннего случая тройного столкновения в виде степенных рядов от трех переменных

$$v_1 = c_1 t^{2/3}, \quad v_2 = c_2 t^{-\lambda_2}, \quad v_3 = c_3 t^{-\lambda_3}, \tag{39}$$

содержащих три произвольные вещественные константы c_1, c_2, c_3. Еще одна константа, которая фиксирует направление столкновения трех точек, возникает при определении p_4 с помощью квадратуры. Далее можно выбрать произвольную ориентацию плоскости $(x,\, y)$ в пространстве и придать ей поступательное движение с постоянной скоростью, получив тем самым 8 дополнительных констант. Таким образом, равносторонний случай тройного столкновения содержит всего 12 независимых вещественных параметров. Наконец, заметим, что произвольная константа $c_0 > 0$ в преобразовании $t \to c_0 t$, $c_k \to c_k c_0^{\lambda_k}$ не изменяет переменных v_k $(k = 1,\, 2,\, 3)$ в (39), таким образом, функции $\overline{p}_k$, $\overline{q}_k$ $(k = 1,\, 2,\, 3)$, построенные из них с помощью (25) и (30), также остаются неизменными, хотя сами $p_k = \overline{p}_k t^{2/3}$ изменяются. Тогда, с учетом независимой переменной t, траектории тройного столкновения в равностороннем случае образуют 13-мерное многообразие в 18-мерном пространстве.

В коллинеарном случае два собственных значения λ_1, λ_2 — вещественные и отрицательные, λ_5, λ_6 — вещественные и положительные, а λ_3, λ_4 — либо вещественные и положительные, либо комплексно сопряженные с положительной вещественной частью $\frac{1}{6}$. Чтобы все собственные значения были различными, необходимо потребовать, чтобы $\nu \neq \frac{1}{8}$, а (29) здесь означает, что λ_2/λ_1 не должно быть целым числом. Тогда координаты задаются в виде степенных рядов от двух переменных

$$v_1 = c_1 t^{2/3}, \quad v_2 = c_2 t^{-\lambda_2} \tag{40}$$

с двумя произвольными вещественными константами c_1, c_2.

В заключение мы покажем, что в коллинеарном случае тройного столкновения угол p_4 является константой, поэтому три частицы движутся вдоль фиксированной прямой. Для этого, в дополнение к уравнению (31) для p_4, рассмотрим отдельно два дифференциальных уравнения для $\overline{p}_3$ и $\overline{q}_3$, которые ввиду (10), (13), (14) и (24) явно записываются в виде

$$\frac{d\overline{p}_3}{du} = \frac{2}{3}\overline{p}_3 + \Big\{\Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\Big)\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - \frac{1}{m_3}\Big\}\overline{q}_0 + \Big(\frac{1}{m_3}\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\Big)\overline{q}_3,$$

$$\frac{d\overline{q}_3}{du} = -\frac{1}{3}\overline{q}_3 + m_2 m_3(\overline{p}_2^2 + \overline{p}_3^2)^{-\frac{3}{2}}\overline{p}_3 + m_1 m_2\big\{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2)^2 + \overline{p}_3^2\big\}^{-\frac{3}{2}}\overline{p}_3 + \tag{41}$$

$$+ \Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\Big)\frac{\overline{q}_2}{\overline{p}_1}\overline{q}_0 + \frac{1}{m_3}\frac{\overline{q}_2}{\overline{p}_1}\overline{q}_3,$$

где

$$\overline{q}_0 = (\overline{q}_4 - \overline{p}_2\overline{q}_3 + \overline{q}_2\overline{p}_3)\overline{p}_1^{-1}.$$

Поскольку в коллинеарном случае $\widehat{p}_3 = 0$, $\widehat{q}_3 = 0$, поэтому из (25) получаем $\overline{p}_3 = \delta_5$, $\overline{q}_3 = \delta_6$. Правые части обоих уравнений при $\delta_7 = 0$ имеют вид $\Phi\delta_5 + \Psi\delta_6$, где Φ и Ψ — сходящиеся степенные ряды от $\delta_1, \ldots, \delta_6$. Теперь, если два собственных значения, соответствующие линейным слагаемым в правой части (41), оба имеют положительную вещественную часть, из § 28 следует, что решения $\delta_5 = \delta_5(u)$ и $\delta_6 = \delta_6(u)$ при условии, что $\delta_k \to 0$ ($k = 1, \ldots, 6$), когда $u \to 0$, должны тождественно равняться нулю по u. Условие на два собственных значения, с другой стороны, следует из утверждения, что они просто равны λ_3 и λ_4. Поскольку прямое вычисление собственных значений с использованием (41) выглядит слишком трудоемким, лучше продолжать так же, как и при вычислении шести собственных значений $\mathfrak{B}$. Из (24) и (25) получаем, что в коллинеарном случае коэффициенты a_{kl} в (26) равны 0, если $k = 1, \ldots, 4$ и $l = 5, \ldots, 8$. Теперь, если в определении ω_k в (37) поменять местами индексы 3 и 5 и также 4 и 6 в левой части, тогда, согласно (34) и (35) соответственно, составленная новая матрица $\mathfrak{C}$ раскладывается так же, как $\mathfrak{A}$, а вместо (38) получим

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathfrak{E}_2 & \mathfrak{E}_2 & 0 & 0 \\ 2a^{-3}\mathfrak{Q} & -\frac{1}{3}\mathfrak{E}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\mathfrak{E}_2 & \mathfrak{E}_2 \\ 0 & 0 & -a^{-3}\mathfrak{Q} & -\frac{1}{3}\mathfrak{E}_2 \end{pmatrix}.$$

С помощью этого разложения получим исследуемое нами утверждение о двух собственных значениях, из чего следует, что в коллинеарном случае $\overline{p}_3 = 0$, $\overline{q}_3 = 0$. Поскольку тогда также $\overline{q}_0 = 0$, уравнение (31) действительно влечет, что $p_4 = \widehat{p}_4$ является константой.

Чтобы получить общее решение в коллинеарном случае, нужно заменить орбитальную прямую на любую прямую линию в старой системе координат, движущуюся параллельно самой себе с постоянной скоростью. Из этого получим 7 дополнительных новых констант, вместе с c_1, c_2, p_4 всего 10 независимых вещественных параметров, в то время как в равностороннем случае было 12 параметров.

Показатели $-\lambda_2$, $-\lambda_3$ в (39) равностороннего случая и показатель $-\lambda_2$ в (40)для коллинеарного случая в общем случае иррациональны, а именно для всех μ, ν, которые зависят от масс m_1, m_2, m_3, за исключением определенного счетного множества значений. Таким образом, в общем случае тройное столкновение приводит к существенной особенности в координатах x_k, y_k ($k = 1$, 2, 3). С другой стороны, если положить $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ в (39) и $c_2 = 0$ в (40), то получим частные решения тройного столкновения с тем же типом особенности, что и простые столкновения, и координаты в этом случае являются степенными рядами по переменной $t^{2/3}$. Более тщательное исследование этих частных решений показывает, что они совпадают с полученными в (4) и константа b_2 связана с c_1 простым соотношением.

Исследования § 28 могут быть продолжены до аналогичных результатов для случаев, когда не все собственные значения различны или не удовлетворяют условию (29), этот случай был нами исключен. Однако здесь мы не будем продолжать эти исследования.

И последняя тема в нашем обсуждении — возможность сингулярности в задаче трех тел из-за простых столкновений в моменты времени $t = t_1$, t_2, ..., последовательность t_i убывает к 0. Из рассуждений § 8 следует, что в этом случае тройное столкновение должно произойти при $t = 0$. Но рассуждения § 12, соответствующим образом перенесенные на этот случай, показывают, что (12; 7) снова будет истинным, и это противоречит тому, что $U = U(t)$, с другой стороны, должна равняться бесконечности при всех t_k ($k = 1$, 2). Таким образом, расширяя результат, полученный в § 8, мы доказали, что простые столкновения в задаче трех тел не могут накапливаться за конечное время, даже если все константы момента количества движения относительно неподвижного центра масс равны нулю.

На этом завершается наше исследование сингулярностей задачи трех тел. Ограничение на вещественнозначность t существенно, и удовлетворительное продолжение этого анализа на комплексный случай выглядит безнадежным.

Глава II
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

§ 14. Решения Лагранжа

Теорема Зундмана, о которой шла речь в первой главе, представляет собой наиболее далеко идущий результат по общему решению задачи трех тел. К сожалению, полный блестящих идей метод Зундмана не распространен на случай $n > 3$. Как показывает более подробное исследование, это происходит по той причине, что хотя одновременное столкновение всех n тел в одной точке можно исключить в соответствии с результатами § 6, но даже при одновременном столкновении только трех из n тел получается существенная особенность.

В настоящей главе будут развиты методы, применимые к задаче n тел и употребляющиеся во многих общих вопросах механики. Речь будет идти об определении периодических решений названной задачи. Характерной чертой решения с периодом τ является то обстоятельство, что для полного определения такого решения для всех моментов времени достаточно рассматривать интервал только конечной длины τ. Поэтому, в частности, отпадают встречающиеся при доказательстве первой вспомогательной теоремы Зундмана трудности, связанные с неограниченностью времени. Периодические решения в задаче n тел имеют также значение для астрономии, так как движения в солнечной системе очень близки к периодическим.

Простейший случай периодического решения будем иметь в том случае, когда координаты совершенно не зависят от времени. Такие решения назовем равновесными. Прежде всего покажем, что задача n тел $(n > 1)$ не имеет равновесных решений. В самом деле, если бы каждая координата q не зависела от времени, то ее вторая производная $\ddot{q} = 0$; следовательно, в соответствии с уравнениями движения $(5; 3)$ также U_q равнялось бы нулю, и по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_q qU_q = -U = 0,$$

в то время как силовая функция U по определению существенно положительна. Так как отсюда видно, что для задачи n тел не существует равновесных решений, то будем искать другие по возможности более простые периодические решения. Ограничимся опять только тремя материальными точками P_1, P_2, P_3 и поставим вопрос: существуют ли такие решения задачи трех тел, при которых все три материальные точки движутся равномерно по окружностям, лежащим в некоторой неподвижной плоскости? На этот вопрос мы ответим утвердительно и таким путем найдем частные решения задачи трех тел, которые были получены еще в 1772 г. Лагранжем.

Введем в рассматриваемой плоскости систему декартовых прямоугольных координат и обозначим через q_{2k-1}, q_{2k} $(k = 1, 2, 3)$ координаты P_k. Если положить опять

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{3} m_k^{-1}(p_{2k-1}^2 + p_{2k}^2), \\ U = \displaystyle\sum_{k<l} m_k m_l r_{kl}^{-1}, \quad E = T - U, \end{cases} \tag{1}$$

где r_{kl} есть расстояние между P_k и P_l, то уравнения движения можно написать в форме Гамильтона

$$\dot{q}_k = E_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -E_{q_k} \quad (k = 1, \ldots, 6). \tag{2}$$

Введем теперь новые прямоугольные декартовы координаты с тем же началом отсчета, и пусть координатные оси равномерно вращаются вокруг неподвижного центра. Найдем тогда такую скорость вращения этих осей, чтобы материальные точки относительно этой новой системы координат были неподвижными. Если обозначить через λ угол поворота, то для новых координат x_{2k-1}, x_{2k} точки P_k имеем формулы

$$\begin{cases} x_{2k-1} = q_{2k-1}c + q_{2k}s, \\ x_{2k} = -q_{2k-1}s + q_{2k}c \quad (k = 1, 2, 3), \\ c = \cos\lambda, \quad s = \sin\lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Сделаем замену $\lambda = \omega t$ с еще неизвестной действительной постоянной $\omega \neq 0$. Введем новые координаты в уравнения движения (2) и попытаемся выбрать шесть других переменных $y_1, \ldots, y_6$, так чтобы преобразование (3) было каноническим. Для этого в основу положим представление канонических преобразований, данное уравнениями (3; 4). Тогда легко получить порождающую функцию в виде

$$w = w(q,\, y) = \sum_{k=1}^{3} \bigl\{(q_{2k-1}c + q_{2k}s)y_{2k-1} + (-q_{2k-1}s + q_{2k}c)y_{2k}\bigr\}.$$

Так как матрица двойной билинейной формы, стоящей в фигурных скобках, будет ортогональной, то для определителя шестого порядка $|w_{q_k y_l}|$ получается значение $l \neq 0$. В соответствии с уравнениями (3; 4) каноническое преобразование будет иметь следующий вид:

$$p_k = w_{q_k}, \quad x_k = w_{y_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, 6),$$

что дополняет уравнения (3) формулами

$$p_{2k-1} = y_{2k-1}c - y_{2k}s, \quad p_{2k} = y_{2k-1}s + y_{2k}c \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \tag{4}$$

Отсюда следует

$$p_{2k-1}^2 + p_{2k}^2 = y_{2k-1}^2 + y_{2k}^2,$$

и потому для введения новых координат достаточно подставить в выражение (1) для T переменную y_k вместо p_k. Так как силовая функция U зависит только от расстояний между материальными точками, то в функции U координаты q_k можно аналогично заменить на x_k. Далее, имеем $c_t = -\omega s$, $s_t = \omega c$, и, следовательно, в соответствии с уравнениями (3; 4) новая функция Гамильтона будет иметь вид

$$F = E + w_t = E + \omega \sum_{k=1}^{3} (x_{2k}y_{2k-1} - x_{2k-1}y_{2k}).$$

Преобразованные уравнения движения будут

$$\dot{x}_k = F_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -F_{x_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, 6),$$

или же

$$\begin{cases} \dot{x}_{2k-1} = E_{y_{2k-1}} + \omega x_{2k}, \\ \dot{y}_{2k-1} = -E_{x_{2k-1}} + \omega y_{2k}, \\ \dot{x}_{2k} = E_{y_{2k}} - \omega x_{2k-1}, \\ \dot{y}_{2k} = -E_{x_{2k}} - \omega y_{2k-1} \quad (k = 1,\, 2,\, 3). \end{cases} \tag{5}$$

При этом

$$E_{x_k} = -U_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, 6),$$
$$E_{y_{2k-1}} = m_k^{-1} y_{2k-1}, \quad E_{y_{2k}} = m_k^{-1} y_{2k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Нужно еще заметить, что выражение

$$\sum_{k=1}^{3} (x_{2k} y_{2k-1} - x_{2k-1} y_{2k}) = Q,$$

входящее слагаемым в функцию F, является интегралом площадей. Действительно, это выражение не изменится, если x и y заменить их выражениями через q и $p = m\dot{q}$ с помощью уравнений (3) и (4). Но можно также непосредственно из уравнений (5) убедиться, что $\dot{Q} = 0$.

Равновесные решения уравнений (5) определяются двенадцатью условиями

$$m_k^{-1} y_{2k-1} + \omega x_{2k} = 0, \quad U_{x_{2k-1}} + \omega y_{2k} = 0,$$
$$m_k^{-1} y_{2k} - \omega x_{2k-1} = 0, \quad U_{x_{2k}} - \omega y_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Исключение y_k $(k = 1, \ldots, 6)$ приведет к системе

$$m_k \omega^2 x_{2k-1} = -U_{x_{2k-1}}, \quad m_k \omega^2 x_{2k} = -U_{x_{2k}} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Каждое решение x_k $(k = 1, \ldots, 6)$ этой системы уравнений опять приводит к равновесному решению. Суммируя (6) по k в соответствии с равенством (5; 6), убедимся, что центр инерции трех тел лежит в начале координат.

Предположим сначала, что треугольник $P_1 P_2 P_3$ не будет равносторонним. Тогда можно выбрать индексы таким образом, чтобы $r_{13} \neq r_{23}$. Направим ось абсцисс в P_3, тогда $x_6 = 0$, и второе уравнение (6) дает для $k = 3$ условие

$$m_1 x_2 r_{13}^{-3} + m_2 x_4 r_{23}^{-3} = 0.$$

В силу

$$m_1 x_2 + m_2 x_4 + m_3 x_6 = 0, \quad x_6 = 0$$

получим

$$m_1 x_2 (r_{13}^{-3} - r_{23}^{-3}) = 0,$$

откуда $x_2 = 0$, а следовательно, и $x_4 = 0$. Итак, если три материальные точки не образуют равностороннего треугольника, то они лежат на одной прямой.

Если рассматривается случай равностороннего треугольника, то $r_{12} = r_{23} = r_{31} = r$, и по теореме о движении центра инерции из уравнений (6) получим, если $M = m_1 + m_2 + m_3$, что

$$\omega^2 x_{2k-1} = r^{-3} \sum_{l=1}^{3} m_l (x_{2k-1} - x_{2l-1}) = M r^{-3} x_{2k-1},$$
$$\omega^2 x_{2k} = M r^{-3} x_{2k} \quad (k = 1,\, 2,\, 3).$$

Так как не все x_k $(k = 1, \ldots, 6)$ равны нулю, то

$$M = \omega^2 r^3, \quad \omega = \pm\sqrt{M r^{-3}}. \tag{7}$$

Обратно, из равенства (7) опять следуют уравнения (6), так что мы действительно нашли решение задачи трех тел, если $P_1\,P_2\,P_3$ является равносторонним треугольником со стороной r и ω определено равенством (7). Это и есть так называемое треугольное решение.

Остается еще исследовать другой случай, в котором три материальные точки лежат на одной прямой. Если выберем эту прямую за ось абсцисс, то $x_{2k} = 0$ $(k = 1,\, 2,\, 3)$, и вторые уравнения (6) удовлетворяются. Предположим затем, что P_2 лежит между P_1 и P_3 и что ось абсцисс направлена от P_1 к P_3. Если положить $r_{13} = a$, $r_{12} = \rho a$, $r_{23} = \sigma a$, то $\rho + \sigma = 1$, $0 < \rho < 1$, и первое уравнение (6) дает для $k = 1$, 2, 3 формулы

$$\begin{cases} -m_2(\rho a)^{-2} - m_3 a^{-2} = \omega^2 x_1, \\ m_1(\rho a)^{-2} - m_3(\sigma a)^{-2} = \omega^2 x_3, \\ m_1 a^{-2} + m_2(\sigma a)^{-2} = \omega^2 x_5. \end{cases} \tag{8}$$

Среднее уравнение здесь можно заменить по теореме о движении центра инерции уравнением $m_1 x_1 + m_2 x_3 + m_3 x_5 = 0$. Из этой теоремы получим также, положив $M = m_1 + m_2 + m_3$, соотношения

$$M x_1 + m_2 \rho a + m_3 a = 0, \quad M x_5 - m_2 \sigma a - m_1 a = 0.$$

Теперь координаты x_1 и x_5 можно исключить из первого и третьего уравнений (8) и это даст

$$\begin{cases} m_2 \rho^{-2} + m_3 = M^{-1} \omega^2 a^3 (m_2 \rho + m_3), \\ m_2 \sigma^{-2} + m_1 = M^{-1} \omega^2 a^3 (m_2 \sigma + m_1). \end{cases} \tag{9}$$

В силу $\sigma = 1 - \rho$ получим условия

$$M^{-1}\omega^2 a^3 = \frac{m_2\rho^{-2} + m_3}{m_2\rho + m_3} = \frac{m_2(1-\rho)^{-2} + m_1}{m_2(1-\rho) + m_1}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{10}$$

Так как разность

$$\frac{m_2\rho^{-2} + m_3}{m_2\rho + m_3} - \frac{m_2(1-\rho)^{-2} + m_1}{m_2(1-\rho) + m_1} = f(\rho)$$

в интервале $0 < \rho < 1$ является монотонной убывающей функцией ρ, которая при $\rho \to 0$ стремится к $+\infty$ и при $\rho \to 1$ к $-\infty$, то уравнение $f(\rho) = 0$ имеет в интервале $0 < \rho < 1$ единственный действительный корень ρ. Тогда, если положить $M^{-1}\omega^2 a^3$ равным численному значению, заданному условиями (10), и определить из уравнений (8) x_1, x_3, x_5, то получится решение уравнений (6), т. е. опять получится частное решение задачи трех тел. При данном a угловая скорость ω определяется с точностью до знака. Это и будет так называемое прямолинейное решение. Определение ρ сводится к решению уравнения пятой степени, коэффициенты которого еще зависят от масс. Как было сказано, оно имеет единственное решение в интервале $0 < \rho < 1$. При рассмотрении этого случая было предположено, что P_2 лежит между P_1 и P_3. Циклической перестановкой индексов получим остальные два решения.

Лагранж думал, что найденные им частные решения не имеют астрономического значения. Но позднее было установлено, что Солнце, Юпитер и малые планеты троянской группы образуют приблизительно равносторонний треугольник. Поэтому представляет интерес найти решения задачи трех тел, близкие к решениям Лагранжа; это будет сделано в § 16.

Вышеупомянутые решения были обобщены еще самим Лагранжем. Он поставил вопрос, существуют ли для задачи трех тел другие решения, при которых треугольник, образованный материальными точками, остается все время сам себе подобным; Лагранж нашел все такие решения. Мы рассмотрим здесь аналогичный вопрос для задачи n тел в плоскости, причем в соответствии с теоремой о движении центра инерции можем принять, что центр инерции неподвижен. Тогда для прямоугольных декартовых координат x_k, y_k точки P_k будем иметь

$$x_k + iy_k = z_k = \zeta_k q \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — различные комплексные постоянные и q — неизвестная комплексная функция действительного переменного t. Для расстояний получаем

$$r_{kl} = |z_k - z_l| = |\zeta_k - \zeta_l|\,|q|,$$

и так как уравнения движения можно написать в комплексной форме

$$\ddot{z}_k = \sum_{l \neq k} m_l \frac{z_l - z_k}{r_{kl}^3} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

то наша замена в случае $q \neq 0$ приводит к уравнениям

$$\zeta_k \ddot{q} = q\,|q|^{-3} \sum_{l \neq k} m_l \frac{\zeta_l - \zeta_k}{|\zeta_l - \zeta_k|^3} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Так как не все ζ_k равны 0, то, следовательно, выражение[1]

$$\ddot{q} q^{1/2} \overline{q}^{3/2} = c \tag{12}$$

не зависит от t и

$$\zeta_k c = \sum_{l \neq k} m_l \frac{\zeta_l - \zeta_k}{|\zeta_l - \zeta_k|^3} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Таким образом, задача приводится к решению дифференциального уравнения (12), не зависящего от n, и системы алгебраических уравнений (13). При этом в случае $n = 2$ получим этим путем общее решение задачи двух тел, так как отрезок $P_1 P_2$, очевидно, всегда остается себе подобным. Тогда, кроме того, $m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 = 0$, следовательно, $\zeta_1 = m_2\zeta$, $\zeta_2 = -m_1\zeta$ с комплексным $\zeta \neq 0$, и из (13) следует, что в этом случае величина $c = -(m_1 + m_2)^{-2}|\zeta|^{-3}$ будет действительной и отрицательной.

Предположим теперь, что решение задачи двух тел известно. Тогда

$$x + iy = z = \zeta q$$

с комплексной постоянной $\zeta \neq 0$ представляет собой коническое сечение в плоскости (x, y) в параметрической форме, если $q = q(t)$ есть

[1] $\overline{q}$ есть величина, комплексно сопряженная с q. — *Прим. перев.*

какое-нибудь решение дифференциальных уравнений (12) с неотрицательной постоянной c, и притом фокус этого конического сечения лежит в начале координат. Пусть теперь n опять произвольно, и предположим, что n различных комплексных чисел $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ удовлетворяют всем уравнениям (13) при $c < 0$. Тогда в силу равенства (11) каждому решению уравнения (12) соответствует частное решение задачи n тел. При этом каждая материальная точка описывает коническое сечение, и многоугольник, образованный n телами, остается все время себе подобным. В частности, если это коническое сечение есть эллипс, то $q(t)$ есть периодическая функция, т. е. получается периодическое решение.

В случае $n = 3$ мы теперь уже знаем все решения системы уравнений (13) с отрицательным c, так как эта система уравнений для $n = 3$ равносильна системе уравнений (6), если в уравнениях (6) положить $\omega^2 = -c$ и $x_{2k-1} + ix_{2k} = \zeta_k$. Таким образом, мы получили все решения задачи трех тел, в которых точки ζ_1, ζ_2, ζ_3 либо образуют равносторонний треугольник, либо лежат на прямой линии с отношением расстояний ρ, определяемым из уравнения (10). Это и есть обобщенные решения Лагранжа. Как частный случай опять получается круговое решение, если положить $q = e^{i\omega t}$. В другом частном случае для q нужно выбрать действительное решение уравнения (12). Последний результат в случае прямолинейного решения был получен уже Эйлером [2], который первым нашел частное решение задачи трех тел. В этой работе Эйлера уже встречается уравнение пятой степени $f(\rho) = 0$.

§ 15. Собственные значения

Рассмотрим систему m дифференциальных уравнений первого порядка, которую запишем в векторной форме

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где под x и $f(x)$ подразумеваются векторы-столбцы с элементами x_k и $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$. Пусть $x = x^{(0)}$ есть равновесное решение, и предположим, что f_k являются не зависящими от t регулярными функциями величин $x_1, \ldots, x_m$ в некоторой окрестности $x^{(0)}$. Без ограничения общности можно принять, что $x^{(0)} = 0$, так что ряд Тейлора для функций $f_k(x)$ по переменным x_l вблизи $x = 0$ запишется в виде

$$f_k(x) = \sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l + \ldots$$

В векторных обозначениях это равенство можно записать короче:

$$f(x) = \mathfrak{A}x + \ldots, \quad \mathfrak{A} = (a_{kl}).$$

Сначала в правой части пренебрежем членами высших порядков и вместо системы уравнений (1) будем решать линейную систему

$$\dot{x} = \mathfrak{A}x. \tag{2}$$

Попытаемся использовать решения системы (2) для решения предыдущей нелинейной системы (1). Это не всегда удается, однако мы докажем, что если (1) есть система Гамильтона, то из периодического решения системы (2), вообще говоря, можно получить также периодическое решение системы (1).

Для решения (2) используем известную алгебраическую теорему о нормальной форме квадратной матрицы. Собственными значениями $\mathfrak{A}$ будут m корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ характеристического уравнения m-й степени

$$|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = 0, \tag{3}$$

причем $\mathfrak{E}$ есть единичная матрица порядка m. Допустим далее, что эти m корней различны. Тогда по упомянутой теореме существует такая обратимая комплексная матрица $\mathfrak{C}$, что матрица

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{L} = \|\lambda_1, \ldots, \lambda_m\| \tag{4}$$

будет диагональной с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Рассмотрим также, в какой степени матрица $\mathfrak{C}$ определяется матрицей $\mathfrak{A}$. Если обозначить через $c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}$ один из столбцов матрицы $\mathfrak{C}$, то матричное уравнение $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{L}$ равносильно m векторным уравнениям

$$\mathfrak{A}c^{(k)} = c^{(k)}\lambda_k \quad (k = 1, \ldots, m),$$

откуда получим

$$(\lambda_k\mathfrak{E} - \mathfrak{A})c^{(k)} = 0. \tag{5}$$

Так как все характеристические корни λ_k различны, то матрица

$$\lambda_k\mathfrak{E} - \mathfrak{A} = \mathfrak{C}(\lambda_k\mathfrak{E} - \mathfrak{L})\mathfrak{C}^{-1}$$

имеет ранг $m-1$, и потому $c^{(k)}$ определяются из уравнений (5) с точностью до постоянного множителя p_k. С другой стороны, если положить

$$\mathfrak{P} = \|p_1, \ldots, p_m\|, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{P}$$

с произвольными $p_k \neq 0$, то для матрицы $\mathfrak{B}$ ее определитель $|\mathfrak{B}| \neq 0$ и $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{L}$. Это показывает, что в $c^{(k)}$ входит еще один произвольный скалярный множитель, не равный нулю. Подобное алгебраическое рассмотрение возможно для произвольной комплексной матрицы $\mathfrak{A}$.

Если матрица $\mathfrak{A}$ действительна, то характеристическое уравнение (3) имеет действительные коэффициенты, и поэтому для каждого корня λ_k найдется комплексно сопряженная величина $\overline{\lambda}_k$, которая также является корнем λ_l уравнения (3). При этом каждому $k = 1, \ldots, m$ будет соответствовать точно одно $l = l_k$ из ряда $1, \ldots, m$, так что $\overline{\lambda}_k = \lambda_l$; в частности, $k = l$ для действительного λ_k. Так как все λ_k попарно различны, то соответствие между k и l_k взаимно-однозначно. Теперь в силу уравнений (5) также

$$\|\lambda_l \mathfrak{E} - \mathfrak{A}\| \overline{c^{(k)}} = 0 \quad (l = l_k),$$

таким образом,

$$c^{(l)} = \overline{c^{(k)}} \rho_k \quad (l = l_k) \tag{6}$$

со скалярными ρ_k. Так как имеем также $c^{(k)} = \overline{c^{(l)}} \rho_l$, и вследствие $|\mathfrak{C}| \neq 0$ обязательно $c^{(k)} \neq 0$, то

$$\overline{\rho_k} \rho_l = 1. \tag{7}$$

Так как вместо $c^{(k)}$ можно написать $c^{(k)} \rho_l^{1/2}$, то $\rho_k = 1$, значит, $c^{(l)} = \overline{c^{(k)}}$. Это же можно увидеть непосредственно из уравнений (5). Но для дальнейшего применения к системам Гамильтона удобнее не пользоваться нормированием $\rho_k = 1$.

Линейной подстановкой

$$x = \mathfrak{C} y, \quad y = \mathfrak{C}^{-1} x$$

систему (2) можно преобразовать в систему

$$\dot{y} = \mathfrak{L} y. \tag{8}$$

Если $y_1, \ldots, y_m$ — элементы столбца y, то полное решение (8) запишется в виде

$$y_k = \alpha_k e^{\lambda_k t} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

с m постоянными интегрирования $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. В частности, y_k будет периодической функцией действительного переменного t, если λ_k чисто мнимое. Для исследования условий вещественности используем равенство (6). Чтобы

$$x = \sum_{k=1}^{m} c^{(k)} y_k$$

было действительным, должно быть также

$$x = \sum_{k=1}^{m} \overline{c^{(k)}}\, \overline{y}_k,$$

откуда в силу $|\mathfrak{C}| \neq 0$ следует в случае действительной матрицы $\mathfrak{A}$, что $\overline{y}_k = \rho_k y_{lk}$. Поэтому в данном случае можно взять $\overline{\alpha}_k = \rho_k \alpha_{lk}$.

Рассмотрим опять общую нелинейную систему

$$\dot{x} = \mathfrak{A}x + \ldots \tag{9}$$

и произведем замену переменных

$$x_k = \varphi_k(y) \quad (k = 1, \ldots, m),$$

аналитическую в окрестности $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$ и переводящую $y = 0$ в $x = 0$. Пусть соответствующее разложение Тейлора будет

$$x = \mathfrak{B}y + \ldots \tag{10}$$

и предположим, что $|\mathfrak{B}| \neq 0$. Тогда в окрестности $x = 0$ существует также обратное аналитическое преобразование $y = \mathfrak{B}^{-1}x + \ldots$ При этом система (9) посредством подстановки (10) переходит в

$$\dot{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}y + \ldots.$$

Это доказывает, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ остаются инвариантными при аналитических преобразованиях дифференциальных уравнений (1).

Остановимся теперь на дифференциальных уравнениях (1), имеющих форму Гамильтона

$$\dot{u}_k = H_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -H_{u_k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Чтобы эту систему также записать в векторной форме, обозначим через w столбец из $2n$ элементов $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ и через H_w —

столбец соответствующих производных от H. Если обозначить опять через $\mathfrak{E}$ единичную матрицу порядка n и положить

$$\mathfrak{J} = \left\| \begin{matrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{matrix} \right\|,$$

то систему уравнений (11) можно записать в сокращенном виде

$$\dot{w} = \mathfrak{J} H_w. \tag{12}$$

Пусть функция Гамильтона $H = H(w)$ будет регулярной в окрестности $w = 0$. Так как постоянный член ряда Тейлора для функции H при $w = 0$ для дифференциальных уравнений (11) не имеет значения, то его можно положить равным нулю. Если $w = 0$ соответствует состоянию равновесия системы (11), то должны быть равными нулю и первые производные от H при $w = 0$. Таким образом, степенной ряд для H начинается с членов второго порядка, и потому можно положить

$$H = \frac{1}{2} w' \mathfrak{S} w + \ldots, \tag{13}$$

где через $\mathfrak{S}$ обозначена симметричная матрица порядка $2n$ и через w' — транспозиция соответствующей строки w. Тогда

$$H_w = \mathfrak{S} w + \ldots,$$

и уравнение (12) переходит в

$$\dot{w} = \mathfrak{A} w + \ldots, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{J}\mathfrak{S}.$$

Поэтому нужно исследовать характеристический многочлен $p(\lambda) = |\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S}|$. Теперь $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^{-1} = -\mathfrak{J}$, $|\mathfrak{J}| = 1$, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$, значит,

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S})' = \lambda\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(-\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S})\mathfrak{J},$$
$$p(\lambda) = |\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S}| = |-\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S}| = p(-\lambda),$$

таким образом, $p(\lambda)$ является четной функцией. Если λ есть корень многочлена $p(\lambda)$, то корнем будет и $-\lambda$, и притом оба корня будут иметь одинаковую кратность. Если нуль также корень, то его кратность будет четной. Допустим опять, что все собственные значения являются простыми и, следовательно, не равны нулю; при соответствующем расположении их можно обозначить через λ_k, $\lambda_{k+n} = -\lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим $\mathfrak{L}_0 = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ и найдем тогда такую обратимую комплексную матрицу $\mathfrak{C}$ порядка $2n$, что

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{L} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{L}_0 & 0 \\ 0 & -\mathfrak{L}_0 \end{Vmatrix} \tag{14}$$

будет нормальной формой для $\mathfrak{J}\mathfrak{S}$. Переходом к транспонированной матрице получаем

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{J} = -\mathfrak{L}\mathfrak{C}'. \tag{15}$$

С другой стороны, матрица

$$-\mathfrak{L}\mathfrak{J}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathfrak{L}_0 \\ \mathfrak{L}_0 & 0 \end{Vmatrix}$$

будет симметричной, так что

$$\mathfrak{L}\mathfrak{J}^{-1} = (\mathfrak{L}\mathfrak{J}^{-1})' = (\mathfrak{J}^{-1})'\mathfrak{L} = \mathfrak{J}\mathfrak{L}. \tag{16}$$

Из уравнений (15) и (16) следует

$$(\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{J})\mathfrak{J}\mathfrak{S} = \mathfrak{J}\mathfrak{C}'\mathfrak{S} = -\mathfrak{J}\mathfrak{L}\mathfrak{C}'\mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{L}(\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{J}).$$

Если положить, кроме того, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{J})^{-1}$, то $|\mathfrak{B}| \neq 0$, что дает

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \mathfrak{L}.$$

Но из нашего прежнего определения $\mathfrak{C}$ следует $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{P}$ с обратимой диагональной матрицей $\mathfrak{P}$, которую мы представим в виде

$$\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{P}_2 \end{Vmatrix}$$

с двумя диагональными матрицами $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ порядка n. Следовательно,

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{J}\mathfrak{C} = \mathfrak{J}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C} = \mathfrak{J}\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} 0 & -\mathfrak{P}_2 \\ -\mathfrak{P}_1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Кроме того, матрица $\mathfrak{C}'\mathfrak{J}\mathfrak{C}$ альтернированная, так как альтернированной будет $\mathfrak{J}$; следовательно, $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$. Полагая тогда

$$\mathfrak{Q} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{P}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} \end{Vmatrix},$$

получим $\mathfrak{Q}'\mathfrak{J}\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}\mathfrak{P}$. Если обозначить, наконец, $\mathfrak{C}\mathfrak{Q}^{-1}$ опять через $\mathfrak{C}$, то уравнение (14) останется справедливым, и, кроме того, теперь

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{J}\mathfrak{C} = \mathfrak{J},$$

следовательно, матрица $\mathfrak{C}$ является симплектической. Отсюда далее следует

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = -(\mathfrak{C}'\mathfrak{J}\mathfrak{C})\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = -\mathfrak{J}\mathfrak{L} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathfrak{L}_0 \\ \mathfrak{L}_0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

т. е. $\mathfrak{S}$ переводится симплектическим преобразованием в нормальную форму.

Будем понимать под z столбец с $2n$ элементами $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ и рассмотрим линейную подстановку

$$w = \mathfrak{C}z_1. \tag{19}$$

Так как функциональная матрица $\mathfrak{C}$ симплектическая, то подстановка (19) в соответствии с уравнением (2; 20) будет каноническим преобразованием. Оно переводит систему Гамильтона (12) в

$$\dot{z} = \mathfrak{J}H_z, \tag{20}$$

где в силу уравнений (13) и (18)

$$H = \frac{1}{2}z'\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C}z + \ldots = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k + \ldots, \tag{21}$$

поэтому квадратичные члены H будут иметь нормальную форму.

Если степенной ряд $H(w)$ имеет действительные коэффициенты, то матрицы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}\mathfrak{S}$ будут действительными. Чтобы w было также действительным, нужно z подчинить опять условию $\mathfrak{C}z = \overline{\mathfrak{C}}z$. Но $\mathfrak{C}$ определяется уравнениями (14) и (15) не однозначно, а с точностью до произвольной симплектической диагональной матрицы порядка $2n$

$$\mathfrak{R} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{R}_0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_0^{-1} \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{R}_0 = \|r_1, \ldots, r_n\|,$$

на которую она справа может быть умножена. Соответствующим выбором матрицы $\mathfrak{R}$ можно упростить вид условий, при которых z действительно. Прежде всего пусть собственное значение λ_k $(k \leqslant n)$ не является чисто мнимым, и $\lambda_l = \overline{\lambda}_k$ $(l = l_k)$. Если при этом $l > n$, то $\lambda_k \neq -\lambda_l = \lambda_{l-n}$, а также $\lambda_k \neq \lambda_l$; тогда меняем местами λ_{l-n} и λ_l и переходим к другому случаю $l \leqslant n$. Итак, можно предположить, что $l \leqslant n$ и также $\lambda_{l+n} = \overline{\lambda}_{k+n}$. Если λ_k чисто мнимое, то $\overline{\lambda}_k = -\lambda_k = \lambda_{k+n}$. Обозначим опять через $c^{(1)}, \ldots, c^{(2n)}$ столбцы $\mathfrak{C}$, тогда из $\mathfrak{C}'\mathfrak{J}\mathfrak{C} = \mathfrak{J}$ следует соотношение

$$c^{(k)'}\mathfrak{J}c^{(k+n)} = 1 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Если λ_k не чисто мнимое, то уравнение (6) дает формулу

$$1 = c^{(l)'}\mathfrak{J}c^{(l+n)} = \rho_k\overline{c^{(k)'}}\mathfrak{J}\overline{c^{(k+n)}}\rho_{k+n} = \rho_k\rho_{k+n}, \tag{22}$$

но если λ_k чисто мнимое, то $l_k = k + n$, и

$$-1 = -(c^{(k)'}\mathfrak{J}c^{(k+n)})' = c^{(k+n)'}\mathfrak{J}c^{(k)} = \rho_k\overline{c^{(k)'}}\mathfrak{J}\overline{c^{(k+n)}}\rho_{k+n} = \rho_k\rho_{k+n}. \tag{23}$$

Если теперь опять заменить произведение матриц $\mathfrak{C}\mathfrak{R}$ матрицей $\mathfrak{C}$, то первоначальные столбцы $c^{(k)}$, $c^{(k+n)}$ умножатся на скалярные множители r_k, r_k^{-1}. Если собственное значение λ_k не чисто мнимое, то тогда в соответствии с уравнением (6) ρ_k умножаются на множитель $r_l\overline{r}_k^{-1}$. В случае когда λ_k не будет действительным и $k < l_k$, выбирая $r_k = \overline{\rho}_k$, $r_l = 1$, получим $\rho_k = 1$; тогда в силу уравнений (7), (22) имеем также $\rho_{k+n} = 1$, $\rho_l = 1$, $\rho_{l+n} = 1$. Если λ_k действительно, значит, $k = l_k$, и, согласно уравнению (7), модуль числа ρ_k равен 1; заменяя тогда r_k на $\rho_k^{-1/2}$, получим сразу искомый результат. Наконец, если λ_k чисто мнимое, то ρ_k имеет положительный множитель $(r_k\overline{r}_k)^{-1}$, в то время как в соответствии с уравнениями (7), (23) из уравнения $\overline{\rho}_k = -\rho_k$ следует, что ρ_k будет чисто мнимым. Поэтому в этом случае можно добиться выполнения равенства $\rho_k = \rho_{k+n} = \pm i$. Если переставить λ_k и λ_{k+n}, то можно положить $c^{(k)} = c^{(k+n)}$ и $c^{(k+n)} = -c^{(k)}$, причем $\mathfrak{C}$ остается симплектической. Так как тогда ρ_k заменяется на $-\rho_{k+n}$, то можно, следовательно, сделать $\rho_k = -i$. При этом $\rho_k = -i$ будет множителем для всех чисто мнимых собственных значений λ_k, в противном случае $\rho_k = 1$. Условие вещественности $\mathfrak{C}z = \overline{\mathfrak{C}}\,\overline{z}$ совпадает с $\overline{z}_k = \rho_k z_{l_k}$, следовательно, $x_l = \overline{x}_k$, $y_l = \overline{y}_k$ для $\lambda_l = \overline{\lambda}_k \neq -\lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $y_k = i\overline{x}_k$ для $\overline{\lambda}_k = -\lambda_k$.

Если рассматривать в правой части уравнения (20) только линейный член, то получится линейная система $\dot{z} = \mathfrak{L}z$, или, точнее,

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k, \quad \dot{y}_k = -\lambda_k y_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

с общим решением

$$x_k = \xi_k e^{\lambda_k t}, \quad y_k = \eta_k e^{-\lambda_k t},$$

где ξ_k, η_k — постоянные интегрирования. Если одно из собственных значений λ_k чисто мнимое, например λ_1, то решение

$$x_k = y_k = 0 \quad (k = 2, \ldots, n), \quad x_1 = \xi_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_1 = \eta_1 e^{-\lambda_1 t}$$

есть периодическое решение линейной системы. При этом, чтобы w было действительным, нужно взять $\eta_1 = i\overline{\xi}_1$. Цель ближайших двух параграфов состоит в том, чтобы, исходя из этого решения, получить периодическое решение общей системы нелинейных уравнений Гамильтона (11).

Что же касается не гамильтоновых дифференциальных уравнений (1), то может случиться, что они, кроме постоянных решений, не имеют никаких других периодических решений, в то время как соответствующая линейная система (2) может иметь периодическое решение, не являющееся константой. Это можно показать на примере системы

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)^g, \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2)^g \tag{24}$$

с двумя неизвестными функциями x, y, где g есть заданное натуральное число. Соответствующая линейная система $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ имеет только периодические решения, а именно $x = \alpha \cos t + \beta \sin t$, $y = \alpha \sin t - \beta \cos t$ с постоянными α, β. Это будут концентрические окружности в плоскости (x, y), которые пробегаются с постоянной угловой скоростью, равной единице, и центр этих окружностей находится в начале координат. С другой стороны, если записать данную систему (24) в полярных координатах с помощью подстановки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^{g+1} = r^{2g+2},$$
$$r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 + y^2 = r^2.$$

Для решений, отличных от тривиального решения $r = 0$, получим

$$\dot{r} = r^{2g+1}, \quad r = (a - 2gt)^{-1/2g}, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi = b + t$$

с двумя постоянными интегрирования a, b. Эти решения суть спирали, следовательно они заведомо не будут периодическими. Данный пример, в частности, показывает, что свойство системы $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ иметь периодические решения исчезнет, если добавить в правые части члены более высоких степеней относительно x и y; например, в нашем случае можно выбрать параметр $g = 1, 2, \ldots$. Однако заметим, что данная система не является канонической. Теперь нам нужно исследовать, как можно получить периодические решения системы Гамильтона, если их имеет соответствующая линейная система и если, кроме того, выполняется некоторое условие.

§ 16. Теорема существования

Пусть система Гамильтона $\dot{w} = \mathfrak{J}H_w$ удовлетворяет тем же самым условиям, как и в предыдущем параграфе. Следовательно, $H = \frac{1}{2}w'\mathfrak{S}w + \ldots$ будет степенным рядом с действительными коэффициентами, начинающимся с квадратичных членов, причем этот ряд сходится в некоторой окрестности точки $w = 0$. Пусть также $\mathfrak{J}\mathfrak{S}$ имеет $2n$ различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Докажем следующую теорему существования:

Пусть λ_1 чисто мнимое и пусть ни одно из $n - 1$ отношений $(\lambda_2/\lambda_1), \ldots, (\lambda_n/\lambda_1)$ не является целым числом. Тогда существует семейство действительных периодических решений системы Гамильтона, зависящее аналитически от действительного параметра ρ и обращающееся при $\rho = 0$ в равновесное решение. Период $\tau = \tau(\rho)$ будет также аналитической функцией ρ и $\tau(0) = \dfrac{2\pi}{|\lambda_1|}$.

Для доказательства этой теоремы будем искать решения в форме степенных рядов с неизвестными коэффициентами. Сначала будем строить формальные ряды, как уже делалось в § 4, а доказательство сходимости этих рядов проведем в следующем параграфе. Переменными будут теперь неизвестные $z_1, \ldots, z_m$, не имеющие определенных численных значений, в то время как коэффициенты будут какими-то определенными комплексными числами. Если определить равенство, сумму и произведение по правилам, которые имеют место в случае сходимости, то степенные ряды образуют кольцо $R(z)$ без делителей нуля. Если ввести новые переменные $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ посредством подстановки степенных рядов относительно $z_1, \ldots, z_m$, которые не содержат постоянных членов, то каждый степенной ряд относительно новой переменной ζ посредством перестановки членов перейдет в степенной ряд относительно старой переменной z, и поэтому кольцо $R(\zeta)$ изоморфно отобразится на часть кольца $R(z)$. Можно определить частные производные по $z_1, \ldots, z_m$ как результат почленного проведения этой операции, причем дифференцирование многочлена сводится к чисто алгебраическим операциям. Тогда в кольце $R(z)$ получатся обычные правила для производной суммы и произведения, остается в силе и цепное правило.

Сначала рассмотрим опять вместо системы Гамильтона общую нелинейную систему (13; 1) при том ограничении, что матрица $\mathfrak{A}$ имеет два противоположных по знаку собственных значения λ_1, $\lambda_2 = -\lambda_1$. Попытаемся найти частное решение, в котором $x_1, \ldots, x_m$ разлагаются в степенные ряды по двум неизвестным функциям $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$. Система (13; 1) переходит при этом в

$$x_\xi \dot{\xi} + x_\eta \dot{\eta} = f(x).$$

Предполагая теперь, что функции ξ, η удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям

$$\dot{\xi} = \alpha\xi, \quad \dot{\eta} = \beta\eta, \tag{1}$$

причем α, β суть степенные ряды по ξ, η, мы нахождение каждого частного решения разделим на два этапа. Прежде всего рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$x_\xi \xi\alpha + x_\eta \eta\beta = f(x) \tag{2}$$

для $x(\xi, \eta)$ при соответствующем выборе $\alpha(\xi, \eta)$ и $\beta(\xi, \eta)$, а затем уже проинтегрируем систему (1). Преимущество этого способа заключается в том, что при рассмотрении уравнения (2) можно оставаться в кольце формальных степенных рядов и не исследовать вопрос об их сходимости. Уравнение (2) при линейной подстановке $x = \mathfrak{C}y$ переходит в уравнение

$$y_\xi \xi\alpha + y_\eta \eta\beta - \mathfrak{L}y = g(y), \tag{3}$$

где степенной ряд

$$g(y) = \mathfrak{C}^{-1} f(\mathfrak{C}y) - \mathfrak{L}y \tag{4}$$

начинается с членов второго порядка и опять $\mathfrak{L} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$. Чтобы из уравнения (3) путем сравнения коэффициентов можно было однозначно определить $m+2$ степенных рядов $y_k(\xi, \eta)$ $(k = 1, \ldots, m)$,

$\alpha(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta)$, введем еще следующие три условия: все ряды $y_1 - \xi$, $y_2 - \eta$ и y_k $(k = 3, \ldots, m)$ должны начинаться с членов второго порядка; $y_1 - \xi$ не должно иметь членов вида $\xi(\xi\eta)^l$ и $y_2 = -\eta$ — членов вида $\eta(\xi\eta)^l$; α и β должны быть рядами только по степеням одного произведения $\xi\eta = \omega$. m собственных значений λ_1, $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3, \ldots, \lambda_m$, как и раньше, предполагаются различными; потребуем еще, чтобы никакое из $m-2$ отношений $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \dfrac{\lambda_m}{\lambda_1}$ не было целым числом.

Подставим $m+2$ степенные ряда y_k, α, β с неопределенными коэффициентами в уравнение (3) и приравняем прежде всего линейные члены. При этом получится, что α, β имеют постоянные члены λ_1, $-\lambda_1$. Пусть теперь s — натуральное число, и предположим, что приравниванием членов порядков $\leqslant s$ однозначно найдено y до s-го порядка и α, β до порядка $s-1$. Приравняем теперь в уравнении (3) коэффициенты членов вида $\xi^p\eta^q$ $(p+q = s+1)$. Так как $g(y)$ начинается с членов второго порядка, то соответствующий коэффициент в $g(y)$ есть многочлен относительно уже известных коэффициентов в $y_1, \ldots, y_m$. Пусть γ — искомый коэффициент при $\xi^p\eta^q$ в y_k. Этот член дает в соответствующем коэффициенте левой части уравнения (3) величину $\big\{\lambda_1(p-q) - \lambda_k\big\}\gamma$. Если теперь не будут одновременно иметь место равенства $k=1$ и $p = q+1$ или $k=2$ и $q = p+1$, то слева прибавляется еще один многочлен относительно уже известных коэффициентов разложений функций y, α, β. Так как тогда множитель перед γ отличен от нуля, то γ определяется однозначно. Если все-таки или $k=1$, $p=q+1$, или $k=2$, $q=p+1$, то в этом случае, согласно второму упомянутому выше требованию, $\gamma = 0$; но, с другой стороны, тогда слева прибавляется для $k=1$ неизвестный коэффициент при ω^p в α и для $k=2$ неизвестный коэффициент при ω^q в β, в то время как остальные члены уже известны. Поэтому предположенное для s доказано также для $s+1$, и так как оно выполняется для $s=1$, то отсюда следует по индукции разрешимость уравнения (3) при поставленных условиях.

Теперь допустим, что ряд $f(x)$ имеет действительные коэффициенты. Пусть собственное значение λ_1 является чисто мнимым, тогда $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Посмотрим, какие следствия выводятся отсюда для рядов $y(\xi, \eta)$, $\alpha(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta)$. Если положить $\mathfrak{C}^{-1}\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}^{-1}y = y^*$, то последняя подстановка в силу уравнений (13; 6), (13; 7) имеет простейший вид

$$y_l = \rho_l y_k^* \quad (l = l_k;\ k = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

и, в частности, $y_1 = \overline{\rho}_1 y_2^*$, $y_2 = \overline{\rho}_2 y_1^*$, $\overline{\rho}_1 \rho_2 = 1$. В тождестве (3) перейдем теперь к комплексно сопряженным коэффициентам, причем неопределенные ξ, η могут оставаться постоянными. Тогда, если положить $\overline{y} = \overline{y}(\xi,\,\eta)$, то

$$\overline{\mathfrak{C}}^{-1}\overline{f}(\overline{\mathfrak{C}}y) = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C}^{-1}f(\mathfrak{C}\mathfrak{T}\overline{y}),$$

и, в силу (4), уравнение (3) будет удовлетворяться, если в нем y, α, β заменить на $\mathfrak{T}\overline{y}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. Обе первые составляющие вектора $\mathfrak{T}\overline{y}$ суть $\overline{\rho}_1\overline{y}_2 = \overline{\rho}_1\eta + \ldots$, $\overline{\rho}_2\overline{y}_1 = \overline{\rho}_2\xi + \ldots$, а остальные начинаются опять с членов второго порядка. Если ξ, η заменить теперь на $\rho_1\eta$, $\rho_2\xi$, то, очевидно, получится, что $\mathfrak{T}\overline{y}(\rho_1\eta,\,\rho_2\xi)$, $\overline{\beta}(\rho_1\eta,\,\rho_2\xi)$, $\overline{\alpha}(\rho_1\eta,\,\rho_2\xi)$ также составят решение уравнения (3), для которого выполнены все три требования. Вследствие доказанной единственности, отсюда получается, что

$$\mathfrak{C}y(\xi,\,\eta) = \overline{\mathfrak{C}}\overline{y}(\rho_1\eta,\,\rho_2\xi), \quad \alpha(\xi,\,\eta) = \overline{\beta}(\rho_1\eta,\,\rho_2\xi).$$

Таким образом, при $\overline{\xi} = \rho_1\eta$ в случае сходимости значения функций $\alpha(\xi,\,\eta)$, $\beta(\xi,\,\eta)$ будут комплексно сопряженными, а значение функции $\mathfrak{C}y(\xi,\,\eta) = x(\xi,\,\eta)$ будет действительным.

Аналогично можно рассмотреть тот случай, когда ряд $f(x)$ имеет действительные коэффициенты и λ_1 является действительной величиной, следовательно, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$. Теперь $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ и можно нормировать, принимая $\rho_1 = \rho_2 = 1$, после этого получается $y_1 = y_1^*$, $y_2 = y_2^*$. Так как тогда обе первые компоненты $\mathfrak{T}\overline{y}$ имеют уже форму $\overline{y}_1 = \xi + \ldots$, $\overline{y}_2 = \eta + \ldots$, то в этом случае

$$\mathfrak{C}y(\xi,\,\eta) = \overline{\mathfrak{C}}\overline{y}(\xi,\,\eta), \quad \alpha(\xi,\,\eta) = \overline{\alpha}(\xi,\,\eta), \quad \beta(\xi,\,\eta) = \overline{\beta}(\xi,\,\eta),$$

и потому в случае сходимости для действительных ξ, η значения функций $x(\xi,\,\eta)$, $\alpha(\xi,\,\eta)$, $\beta(\xi,\,\eta)$ также будут действительными.

Не будем опять требовать вещественности функции $f(x)$ и рассмотрим частный случай системы Гамильтона. Нужно показать, что тогда $\alpha(\xi,\,\eta) = -\beta(\xi,\,\eta)$. Использовавшиеся до сих пор обозначения целесообразно изменить следующим образом. Вместо m переменных $y_1,\,\ldots,\,y_m$ возьмем $2n$ переменных $z_k = x_k$, $z_{k+n} = y_k$ $(k = 1,\,\ldots,\,n)$, причем, в частности, переменные x_1, y_1 будут играть роль переменных y_1, y_2 и, соответственно, $\lambda_2 = -\lambda_1$ заменим на $\lambda_{n+1} = -\lambda_1$. Предположим, что в функции Гамильтона H уже произведено линейное каноническое преобразование переменных, которое члены второго порядка приводит к нормальной форме, заданной равенством (13; 21). Тогда вместо уравнений (3), (4) имеем

$$z_\xi \xi \alpha + z_\eta \eta \beta = \mathfrak{J} H_z,$$

и потому для формально образованного дифференциала $dH = H_\xi\, d\xi + H_\eta\, d\eta$ получается выражение

$$dH = H_z'\, dz = (\alpha\xi z_\xi' + \beta\eta z_\eta')\mathfrak{J}(z_\xi\, d\xi + z_\eta\, d\eta) = (\alpha\xi\, d\eta - \beta\eta\, d\xi) z_\xi' \mathfrak{J} z_\eta.$$

Если положить для сокращения еще $z_\xi' \mathfrak{J} z_\eta = \Delta$, то $H_\xi = -\beta\eta\Delta$, $H_\eta = \alpha\xi\Delta$.

$$\alpha\xi H_\xi + \beta\eta H_\eta = 0, \tag{6}$$

причем H теперь является степенным рядом по ξ, η.

С помощью уравнения (6) покажем, что H есть ряд только по $\omega = \xi\eta$. Пусть уже доказано, что члены в H порядка $\leqslant s$ образуют многочлен относительно ω. Для $s = 2$ это справедливо, так как

$$H = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k + \ldots = \lambda_1 \omega + \ldots .$$

Пусть теперь $\gamma \xi^p \eta^q$ $(p + q = s + 1)$ — член порядка $s + 1$. Так как $\alpha = \lambda_1 + \ldots$, $\beta = -\lambda_1 + \ldots$, то в тождестве

$$\lambda_1(\eta H_\eta - \xi H_\xi) = (\alpha - \lambda_1)\xi H_\xi + (\beta + \lambda_1)\eta H_\eta$$

множители $\alpha - \lambda_1$, $\beta + \lambda_1$ будут степенными рядами по ω, не содержащими постоянных членов. Применяя здесь метод полной индукции, допустим, что стоящие справа члены порядков $\leqslant s+2$ образуют многочлен относительно ω. Коэффициент при $\xi^p\eta^q$ в левой части равенства будет равен $\lambda_1(p - q)\gamma$, следовательно, $\gamma = 0$ при $p \neq q$, и этим сформулированное выше утверждение доказывается для $s + 1$.

Так как H зависит только от ω, то

$$H_\xi = \eta H_\omega, \quad H_\eta = \xi H_\omega,$$

и уравнение (6) переходит в

$$(\alpha + \beta)\omega H_\omega = 0.$$

Так как $\omega H_\omega = \lambda_1 \omega + \ldots$ не будет степенным рядом, тождественно равным нулю, то получаем условие

$$\alpha + \beta = 0. \tag{7}$$

Возвратимся еще раз к общему случаю уравнения (2) и допустим, что для найденного решения выполняется также условие (7). В следующем параграфе будет показано, что тогда в случае сходимости функции $f(x)$ ряды $y(\xi,\,\eta)$, α, β будут также сходящимися для комплексных ξ, η, модули которых достаточно малы. Поэтому дифференциальные уравнения (1) получают некоторый смысл. Согласно условию (7), будем иметь теперь

$$\dot{\omega} = \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta} = (\alpha + \beta)\xi\,\eta = 0,$$

следовательно, ω, α, β не зависят от t. Отсюда следует далее

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}, \quad \eta = \eta_0 e^{\beta t}. \tag{8}$$

Пусть ряд $f(x)$ имеет опять действительные коэффициенты и λ_1 чисто мнимое; выберем начальные значения ξ_0, η_0 для переменных ξ, η при $t = 0$ в соответствии с условием $\overline{\xi}_0 = \rho_1\eta_0$ и потребуем, чтобы $|\xi_0|$ было достаточно мало. Тогда, согласно ранее полученному результату, числа $\alpha = \alpha(\xi,\,\eta) = \alpha(\xi_0,\,\eta_0)$ и $\beta = \beta(\xi,\,\eta) = \beta(\xi_0,\,\eta_0)$ будут комплексно сопряженными, следовательно, согласно условию (7), они будут сопряженными и чисто мнимыми. В соответствии с (8), тогда также $\overline{\xi} = \rho_1\eta$ для всех действительных t и $|\xi| = |\xi_0|$; следовательно, согласно упомянутому уже результату, $x(\xi,\,\eta)$ также будет действительным. Поэтому (8) представляет семейство действительных периодических решений системы дифференциальных уравнений (13; 1), которое содержит комплексный параметр ξ_0. Так как правые части дифференциальных уравнений не зависят явно от t, то каждая кривая, изображающая решение, переходит сама в себя, если t заменить на $t + c$ при произвольном c. Поэтому достаточно выбрать $\xi_0 = \rho \geqslant 0$. Период имеет величину $\tau(\rho) = 2\pi/|\alpha|$, где $\alpha = \lambda_1 + \ldots$; следовательно, $\tau(0) = 2\pi/|\lambda_1|$. Так как в соответствии с нашей заменой $y_1 = \xi + \ldots$, $y_2 = \eta + \ldots$, то получим также, что y_1, y_2 при достаточно малом $\rho > 0$ действительно зависят от t, и тогда $\tau(\rho)$ есть примитивный период. В силу (8) найденные степенные ряды могут быть записаны в следующем параграфе как ряды Фурье по кратным $|\alpha|t$. Поэтому, после того как будет проведено доказательство сходимости, отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет действительные коэффициенты и λ_1 действительно, а следовательно, и $\lambda_2 = -\lambda_1$ действительно; выберем тогда начальные значения ξ_0, η_0 действительными и $|\xi_0|$, $|\eta_0|$

достаточно малыми. В этом случае числа $\alpha = \alpha(\xi,\,\eta) = \alpha(\xi_0,\,\eta_0)$ и $\beta = -\alpha$ будут действительными, следовательно, в силу равенств (8) и ξ, η действительны для всех действительных t. Тогда $x(\xi,\,\eta)$ сходится, во всяком случае, для достаточно малых $|t|$ и тоже является действительным. Семейство решений (8), зависящее в плоскости $(\xi,\,\eta)$ от действительных параметров ξ_0, η_0, есть семейство равносторонних гипербол или, точнее, если различать разные знаки ξ_0, η_0, то четыре семейства гипербол. Таким образом, мы получили четыре однопараметрических семейства действительных решений системы (13; 1). Если теперь $\alpha > 0$ и $\beta = -\alpha < 0$, то $e^{\alpha t}$ (соответственно $e^{\beta t}$) стремится к ∞ при $t \to \infty$ (соответственно при $t \to -\infty$). Следовательно, при $\xi_0\eta_0 \neq 0$ в соответствии с равенствами (8) точка ξ, η остается в заданной ограниченной окрестности начал координат только в течение ограниченного времени, в то время как при $\xi_0 = 0$, $\eta_0 \neq 0$ и $t \to \infty$ она, двигаясь по оси η, возвращается в начало координат; аналогичная картина имеет место по оси ξ при $\xi_0 \neq 0$, $\eta_0 = 0$, $t \to -\infty$. Соответственно двум возможным знакам η_0 и ξ_0 получаются четыре решения $x(t)$, которые при $t \to \infty$ (соответственно при $t \to -\infty$) асимптотически приближаются к решению, соответствующему положению равновесия. Напротив, для случая $\xi_0\eta_0 \neq 0$ найденное решение $x(t)$ обладает тем свойством, что оно остается в достаточно малой окрестности начала координат $x = 0$ только в течение ограниченного времени; значит, оно сначала будет некоторое время находиться в этой окрестности, а потом опять уйдет в бесконечность. Впрочем, нельзя заключить, что между этими решениями будут периодические с действительным периодом, так как невозможно установить периодичность, используя только локальное исследование. Если положить $e^{\alpha t} = q$, то $x_k(t)$ $(k = 1,\,\ldots,\,m)$ будут рядами Лорана относительно переменной q и будут иметь по t чисто мнимый период $2\pi i/\alpha$. Чтобы лучше разъяснить этот результат, рассмотрим для сравнения систему

$$\dot{x} = x + x(xy)^g, \quad \dot{y} = -y + y(xy)^g,$$

которая образована по аналогии с системой (13; 24); здесь g — опять заданное натуральное число. Тогда

$$(xy)^{\cdot} = 2(xy)^{g+1}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} = 2xy.$$

Рассмотрим сначала случай $xy \neq 0$, тогда

$$xy = (a - 2gt)^{-1/g}, \quad x = bye^{2t}$$

с двумя постоянными интегрирования $a \neq 0$, $b \neq 0$; отсюда

$$x = b^{1/2}e^{t}(a-2gt)^{-1/2g}, \quad y = b^{-1/2}e^{-t}(a-2gt)^{-1/2g}, \tag{9}$$

в то время как при $xy = 0$ получается частное решение $x = 0$, $y = ce^{-t}$ и $x = ce^{t}$, $y = 0$ с постоянной c. В этом случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, но все же нет решения из однопараметрического семейства (9) с комплексным периодом. Отсюда вытекает аналитичность решений системы Гамильтона и для действительного λ_1, которая, вообще говоря, не имеет места для системы (13; 1).

Для последовательного нахождения коэффициентов разложения в ряды функций y, α, β путем сравнения коэффициентов существенно, чтобы все $m-2$ отношения $\lambda_3/\lambda_1, \ldots, \lambda_m/\lambda_1$ не равнялись целым числам. В случае системы Гамильтона это соответствует тому, чтобы ни одно из $n-1$ отношений $\lambda_2/\lambda_1, \ldots, \lambda_n/\lambda_1$ не было целым. На примере покажем, что это предположение не является лишним для справедливости теоремы существования. Возьмем функцию Гамильтона в виде многочлена третьей степени

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) - x_2^2 - y_2^2 + x_1y_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2)y_2.$$

Тогда соответствующая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_1x_2 - y_1y_2, \\ \dot{y}_1 = -x_1 - y_1x_2 - x_1y_2, \\ \dot{x}_2 = -2y_2 + \dfrac{1}{2}(x_1^2 - y_1^2), \\ \dot{y}_2 = 2x_2 - x_1y_1, \end{cases} \tag{10}$$

очевидно, имеет равновесное решение $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$; собственными значениями будут $\lambda_1 = -\lambda_3 = i$, $\lambda_2 = -\lambda_4 = 2i$. Беря в качестве собственного значения, рассматриваемого в теореме существования, чисто мнимое значение λ_2, удовлетворим предположению, что $\lambda_1/\lambda_2 = 1/2$ не будет целым числом, откуда следует существование однопараметрического семейства периодических решений с периодом, приблизительно равным $2\pi i/\lambda_2 = \pi$. Это решение легко получить непосредственно. Действительно, при начальных значениях $x_1 = y_1 = 0$ получим в силу теоремы единственности решений дифференциальных уравнений общее решение

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = \alpha \cos 2t - \beta \sin 2t, \quad y_2 = \alpha \sin 2t + \beta \cos 2t$$

с постоянными α, β, являющееся окружностью в плоскости (x_2, y_2), которая пробегается один раз за время π. При этом радиус остается произвольным. Это как раз то решение, которое получается из теоремы существования, и потому период здесь равен точно π и не только в первом приближении. Но если взять в качестве собственного значения, рассматриваемого в теореме существования, величину λ_1, то можно показать, что фактически не существует периодических решений с периодом, близким к $2\pi i/\lambda_1 = 2\pi$, если не рассматривать тривиальное решение. Так как в этом случае нарушено предположение теоремы существования о том, что λ_2/λ_1 не должно равняться целому числу (здесь оно равно двум), то отсюда видно, что указанное предположение не является несущественным. Мы видели уже, что все решения с начальными значениями $x_1 = y_1 = 0$ имеют период π. Покажем теперь, что все другие действительные решения не будут периодическими. По теореме о единственности решений дифференциальных уравнений для таких решений, во всяком случае, будет всегда справедливо неравенство $p = x_1^2 + y_1^2 > 0$. Положим $q = x_2^2 + y_2^2$, тогда из системы (10), если соответствующим образом сгруппировать члены, весьма просто получается дифференциальное уравнение

$$\ddot{p} = 4pq + p^2.$$

Вследствие условий $p^2 > 0$, $4pq \geqslant 0$ отсюда получается, что p есть выпуклая функция t в строгом смысле, которая, следовательно, не является периодической. Итак, в рассмотренном случае фактически не существует других периодических решений, кроме кругового.

§ 17. Доказательство сходимости

С помощью применявшегося в § 4 метода мажорант докажем теперь сходимость степенных рядов, формально построенных в предыдущем параграфе. При этом будем предполагать, что при решении уравнения (14; 3) выполняется условие $\alpha + \beta = 0$. Для систем Гамильтона это предположение всегда выполнено в силу (14; 7).

Пусть $h = h(\xi, \eta)$ является степенным рядом относительно ξ, η; его коэффициенты при $\xi^p\eta^q$ в разложении функции $h(\xi, \eta)$ будем обозначать через $\{h\}_{pq}$. В силу уравнения (14; 3) тогда имеем

$$\bigl\{(y_\xi\xi - y_\eta\eta)\alpha - \mathfrak{L}y\bigr\}_{pq} = \bigl\{g(y)\bigr\}_{pq},$$

причем вместо y и α следует подставить искомые ряды. Так как

$$\alpha = \lambda_1 + \sum_{r=1}^{\infty}\{\alpha\}_{rr}(\xi\eta)^r$$

является степенным рядом только относительно $\xi\eta$, то после сравнения коэффициентов в равенстве (14; 3) получим для $k = 1, \ldots, m$

$$\bigl[(p-q)\lambda_1 - \lambda_k\bigr]\{y_k\}_{pq} + \sum_{r=1}^{\infty}(p-q)\{\alpha\}_{rr}\{y_k\}_{p-r,q-r} = \bigl\{g_k(y)\bigr\}_{pq}, \quad (1)$$

причем сумма заканчивается членом с $r = \min(p, q)$. Пусть сначала не будут одновременно выполняться равенства $k = 1$, $p = q + 1$ или $k = 2$, $q = p + 1$; тогда, следовательно, $(p - q)\lambda_1 - \lambda_k \neq 0$, и существует такое число $c_1 > 0$, не зависящее от k, p, q, что

$$\left|\frac{1}{(p-q)\lambda_1 - \lambda_k}\right| < c_1, \quad \left|\frac{p-q}{(p-q)\lambda_1 - \lambda_k}\right| < c_1.$$

Из равенства (1) при сделанных предположениях тогда следует, что

$$\bigl|\{y_k\}_{pq}\bigr| \leqslant c_1\bigl|\{g_k(y)\}_{pq}\bigr| + c_1\sum_{r=1}^{\infty}\bigl|\{\alpha\}_{rr}\{y_k\}_{p-r,\,q-r}\bigr|. \quad (2)$$

В оставшихся нерассмотренными случаях, когда одновременно $k = 1$, $p = q + 1$ или $k = 2$, $q = p + 1$, будет всегда выполняться условие $\{y_k\}_{pq} = 0$ при $p + q > 1$, в то время как $\{y_1\}_{10} = \{y_2\}_{01} = 1$. Следовательно, в этих случаях из равенства (1) получим

$$\begin{cases} \bigl|\{\alpha\}_{qq}\bigr| = \bigl|\{g_1(y)\}_{pq}\bigr| & (p = q + 1 > 1), \\ \bigl|\{\alpha\}_{pp}\bigr| = \bigl|\{g_2(y)\}_{pq}\bigr| & (q = p + 1 > 1). \end{cases} \quad (3)$$

Пусть h является каким-нибудь степенным рядом относительно ξ, η; положим тогда, что

$$|\overline{h}| = \sum_{p,\,q}\bigl|\{h\}_{pq}\bigr|\xi^p\eta^q.$$

Таким образом, ряд $|h|$ получается из ряда h заменой всех его коэффициентов их абсолютными значениями. Далее, обозначим для сокращения $y_1^* = y_1 - \xi$, $y_2^* = y_2 - \eta$, $y_k^* = y_k$ $(k = 3, \ldots, m)$, $\alpha^* = \alpha - \lambda_1$. Если умножить равенства (2) и (3) на $\xi^p \eta^q$ и просуммировать по k, p, q, то получится мажорантное соотношение

$$(\xi+\eta)|\overline{\alpha^*}| + \sum_{k=1}^{m} |\overline{y_k^*}| \prec c_1\left(\sum_{k=1}^{m} \left|\overline{g_k(y)}\right| + |\overline{\alpha^*}| \sum_{k=1}^{m} |\overline{y_k^*}|\right), \tag{4}$$

в которое больше не входят производные.

Используем оценку для $\left|\overline{g_k(y)}\right|$ и обозначим через $c_2, \ldots, c_8$ подходящим образом выбранные положительные постоянные. По нашему предположению m функций $f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ регулярны в окрестности $x = 0$; функции $g_k(y)$, определенные равенством (14; 4), также регулярны в окрестности $y = 0$. Пусть теперь функции $g_k(y)$ регулярны при $|y_l| \leqslant c_2$ $(l = 1, \ldots, m)$, и пусть они по абсолютной величине $\leqslant c_3$; тогда при помощи интегральной формулы Коши получим соотношение

$$g_k(y) \prec c_3 \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{y_l}{c_2}\right)^{-1},$$

причем $y_1, \ldots, y_m$ рассматриваются как независимые переменные. Далее, полагая для сокращения $s = y_1 + \ldots + y_m$, будем иметь

$$\prod_{l=1}^{m} \left(1 - \frac{y_l}{c_2}\right)^{-1} \prec \left(1 - \frac{s}{c_2}\right)^{-m} \prec \frac{c_4}{1 - c_5 s}.$$

Так как разложения функций $g_k(y)$ начинаются с членов второй степени, то

$$g_k(y) \prec \frac{c_6 s^2}{1 - c_5 s} \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Если положить еще

$$\sum_{k=1}^{m} |\overline{y_k^*}| = S, \tag{6}$$

то, с другой стороны,

$$|\overline{s}| \prec \xi + \eta + S.$$

Из оценочных неравенств (4), (5), (6) получим

$$(\xi+\eta)|\overline{\alpha^*}|+S \prec c_1\Big(\frac{c_6(\xi+\eta+S)^2}{1-c_5(\xi+\eta+S)}+|\overline{\alpha^*}|S\Big). \tag{7}$$

В соответствии с неравенством (6) достаточно доказать сходимость рядов S и $|\overline{\alpha^*}|$ в окрестности $\xi=0$, $\eta=0$, и так как все коэффициенты разложений больше или равны нулю, то достаточно рассмотреть случай $\xi=\eta$. Так как ряд S также начинается с членов второго порядка относительно ξ, η, то

$$2|\overline{\alpha^*}|+\xi^{-1}S=U$$

будет степенным рядом относительно ξ с неотрицательными коэффициентами, не содержащим постоянного члена, и оценочное неравенство (7) дает нам

$$U \prec c_7\Big(\frac{\xi(1+U)^2}{1-2c_5\xi(1+U)}+U^2\Big).$$

Если положить еще

$$\xi+U+\xi U=V,$$

то

$$2\xi U+2\xi U^2+U^2 \prec V^2,$$

следовательно,

$$\begin{gathered} V \prec \xi+U+V^2 \prec \xi+V^2+c_7\Big(\frac{\xi+V^2}{1-2c_5V}+V^2\Big), \\ V \prec c\frac{2\xi+V^2}{4-cV}, \quad c=c_8, \end{gathered} \tag{8}$$

и достаточно доказать сходимость ряда V для достаточно малого положительного ξ. Рассмотрим вместо оценочного неравенства (8) уравнение

$$W=c\frac{2\xi+W^2}{4-cW} \tag{9}$$

для неизвестного степенного ряда

$$W=W(\xi)=\sum_{l=1}^{\infty}\gamma_l\xi^l.$$

Если разложить правую часть уравнения (9) по степеням W и ввести ряд $W(\xi)$, то все коэффициенты γ_l, однозначно определяются последовательным сравнением; из получающихся при этом рекуррентных формул усматриваем, что в силу оценочного неравенства (8) ряд W является мажорирующим для ряда V. Но из равенства (9) следует, что

$$cW^2 - 2W + c\xi = 0, \quad (1 - cW)^2 = 1 - c^2\xi,$$

значит,

$$2cW \prec (1 - cW)^{-2} - 1 = \frac{c^2\xi}{1 - c^2\xi},$$

чем доказывается сходимость ряда $W(\xi)$ при $|\xi| < c^{-2}$.

Чтобы сделать выкладки более короткими, мы отказались от определения явного выражения для c. Если дать в соответствующих местах более точные оценки, то этим путем можно прийти к практически пригодным результатам.

§ 18. Применение к решениям Лагранжа

Применим сформулированную в § 14 теорему существования к задаче трех тел на плоскости и докажем существование периодических решений вблизи круговых решений Лагранжа. При этом мы будем использовать обозначения § 12, в которых q_{2k-1}, q_{2k} $(k = 1,\, 2,\, 3)$ будут координатами трех материальных точек в неподвижной плоскости. Уравнения движения запишем в форме Гамильтона

$$\dot{q}_k = E_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -E_{q_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, 6),$$

где функция Гамильтона $E = T - U$ определяется выражением (12; 1). Каноническое преобразование (12; 3), (12; 4) соответствует вращению системы координат в рассматриваемой плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Преобразованные дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{x}_k = F_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -F_{x_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, 6), \tag{1}$$

где

$$F = E + \omega Q = T - U + \omega Q, \quad Q = \sum_{k=1}^{3} (x_{2k} y_{2k-1} - x_{2k-1} y_{2k}), \tag{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} m_k^{-1} (y_{2k-1}^2 + y_{2k}^2). \tag{3}$$

Здесь в качестве равновесных решений получались треугольные и прямоугольные решения Лагранжа, причем ω выбиралось согласно условиям (12; 7) и (12; 10). Не ограничивая общности, положим $\omega = 1$.

Чтобы к системе (1) применить теорему существования § 14, нужно разложить в ряд функцию $F = F(x, y)$ в окрестности соответствующего равновесного решения $x_k = x_{k0}$, $y_k = y_{k0}$ $(k = 1, \ldots, 6)$ и вычислить члены второй степени. Если положить $z_k = x_k - x_{k0}$, $z_{k+6} = y_k - y_{k0}$, то разложение Тейлора имеет вид

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^{12} s_{kl} z_k z_l + \ldots,$$

где матрица $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ выбрана симметричной. Согласно § 13, соответствующие собственные значения λ_k получаются из уравнения двенадцатой степени $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{J}\mathfrak{S}| = 0$, которое можно также записать в виде $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S} = 0|$. В дальнейшем мы выполним вычисление этого определителя, а сейчас допустим, что это уже сделано. Тогда в случае равностороннего треугольника получим

$$|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = \lambda^2(\lambda^2 + 1)^3(\lambda^4 + \lambda^2 + \gamma), \tag{4}$$

где

$$\gamma = \frac{27}{4} \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}, \tag{5}$$

и в случае прямолинейного движения, если P_2 лежит между P_1 и P_3,

$$|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = \lambda^2(\lambda^2 + 1)^3\big[\lambda^4 + (1 - \alpha)\lambda^2 - \alpha(2\alpha + 3)\big], \tag{6}$$

где

$$\alpha = \frac{m_1(1 + \rho^{-1} + \rho^{-2}) + m_3(1 + \sigma^{-1} + \sigma^{-2})}{m_1 + m_2(\rho^{-2} + \sigma^{-2}) + m_3}, \tag{7}$$

причем $\sigma = 1 - \rho$ и ρ суть опять решения уравнения (12; 10). Следовательно, в обоих случаях получим $\lambda = 0$ как двойной корень и $\lambda = \pm i$ даже как тройной корень, в то время как в теореме существования предполагалось, что все собственные значения λ_k являются простыми.

Корень $\pm i$ можно получить и другим способом без всякого вычисления. А именно, возвратимся к координатам q в неподвижной системе отсчета; они для рассматриваемого равновесного решения, очевидно, имеют период 2π. Если теперь заменить координаты q_{2k-1}, q_{2k} на

$q_{2k-1}+a$, $q_{2k}+b$ $(k=1,\,2,\,3)$, где a и b являются произвольными линейными функциями от t, то уравнения движения удовлетворяются. Таким образом, в силу преобразований (12; 3), (12; 4) из каждого равновесного решения x_{k0}, y_{k0} получается решение

$$\begin{cases} x_{2k-1} = x_{2k-1,\,0} + ac + bs, \\ y_{2k-1} = y_{2k-1,\,0} + \dot a c + \dot b s, \\ \quad x_{2k} = x_{2k,\,0} - as + bc, \\ \quad y_{2k} = y_{2k,\,0} - \dot a s + \dot b c \quad (k=1,\,2,\,3). \end{cases} \tag{8}$$

Оно имеет период 2π, если a и b выбраны постоянными, и тогда решение (8) является тривиальным разложением по степеням функций $e^{\lambda t}$ и $e^{-\lambda t}$ при $\lambda = i$. С другой стороны, теорема существования § 14 дает прямое разложение в ряд решения по степеням $e^{\alpha t}$ и $e^{-\alpha t}$ с $\alpha = \lambda + \ldots$, причем λ есть чисто мнимое собственное значение. Очевидно, что решению (8) могут соответствовать собственные значения $\pm i$. Впрочем, фактически у нас $\pm i$ являются даже многократными корнями, в связи с тем, что в решении (8) a и b могут быть линейными функциями времени; но это замечание пока еще нельзя доказать, так как в § 14 шла речь только о простых собственных значениях. Существование собственного значения $\lambda = 0$ также имеет свою причину: мы потом покажем, что это следует из интеграла площадей.

Чтобы можно было применить теорему существования § 14, нужно сделать корни простыми, что удается сделать понижением порядка системы Гамильтона (1) с помощью интегралов движения центра инерции и интегралов площадей. Прежде всего введем линейное каноническое преобразование, аналогичное преобразованию (7; 4), (7; 5), а именно:

$$\begin{cases} \xi_{2k-1} = x_{2k-1} - x_5, \quad \xi_{2k} = x_{2k} - x_6 \quad (k=1,\,2), \\ \xi_5 = x_5, \quad \xi_6 = x_6, \quad \eta_k = y_k \quad (k=1,\,\ldots,\,4), \\ \eta_5 = y_1 + y_3 + y_5, \quad \eta_6 = y_2 + y_4 + y_6. \end{cases} \tag{9}$$

При помощи этого преобразования мы вводим относительные координаты точек P_1 и P_2 относительно точки P_3. Теперь новые уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot\xi_k = F_{\eta_k}, \quad \dot\eta_k = -F_{\xi_k} \quad (k=1,\,\ldots,\,6). \tag{10}$$

Так как U зависит только от разностей первоначальных координат, то новые координаты ξ_5, ξ_6 в функцию U не войдут. В силу равенств (2), (3) найдем $F = T - U + Q$, где

$$Q = \sum_{k=1}^{3}(\xi_{2k}\eta_{2k-1} - \xi_{2k-1}\eta_{2k}), \tag{11}$$

$$T = \frac{1}{2}m_3^{-1}\left[(\eta_5 - \eta_3 - \eta_1)^2 + (\eta_6 - \eta_4 - \eta_2)^2\right] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k^{-1}(\eta_{2k-1}^2 + \eta_{2k}^2). \tag{12}$$

Вследствие соотношений $Q_{\xi_6} = \eta_5$ и $Q_{\xi_5} = -\eta_6$ из уравнений (10) следует, в частности,

$$\dot\eta_5 = \eta_6, \quad \dot\eta_6 = -\eta_5, \tag{13}$$

что соответствует теореме о движении центра инерции для вращающейся системы координат. Если предположить теперь, что центр инерции в первоначальной системе координат покоится, как это имеет место для решений Лагранжа, то $\eta_5 = 0$, $\eta_6 = 0$. При этом решение системы (10) приводится к интегрированию приведенной системы Гамильтона

$$\dot\xi_k = F_{\eta_k}, \quad \dot\eta_k = -F_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, 4) \tag{14}$$

и последующему определению квадратурами ξ_5, ξ_6 из уравнений

$$\begin{cases} \dot\xi_5 = F_{\eta_5} = \xi_6 - m_3^{-1}(\eta_3 - \eta_1), \\ \dot\xi_6 = F_{\eta_6} = -\xi_5 - m_3^{-1}(\eta_4 + \eta_2). \end{cases} \tag{15}$$

Из уравнений (13) и (15) непосредственно видно, что собственные значения i, $-i$ для равновесного решения приведенной системы будут только простыми. Следовательно, при этом преобразовании в характеристических уравнениях (4) и (6) множитель $(\lambda^2 + 1)^3$ заменяется на первую степень множителя $\lambda^2 + 1$. Но остается еще λ^2, и этот множитель устраняется с помощью использования интеграла площадей Q. При этом вследствие $\eta_5 = \eta_6 = 0$ имеем

$$Q = \sum_{k=1}^{2}(\xi_{2k}\eta_{2k-1} - \xi_{2k-1}\eta_{2k}). \tag{16}$$

Покажем сначала, что двойной корень $\lambda = 0$ является следствием существования не зависящего от t интеграла Q. Рассмотрим опять общую систему

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{17}$$

имеющую $x = 0$ равновесным решением. Пусть функции $f_k(x)$ при $x = 0$ будут регулярными, так что существует разложение в ряд $f(x) = \mathfrak{A}x + \ldots$ Предположим далее, что при $x = 0$ существует интеграл $\psi(x)$ системы (17), который не зависит явно от t. Пусть $\psi(x) = \psi(0) + cx + \ldots$ есть ряд для $\psi(x)$, причем, следовательно, c обозначает вектор-строку. Из уравнения в частных производных

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_{x_k} f_k(x) = 0,$$

которому удовлетворяет ψ, получаем при сравнении коэффициентов линейных членов, что $c\mathfrak{A} = 0$. Если теперь $c \neq 0$, то отсюда следует $|\mathfrak{A}| = 0$, и характеристическое уравнение $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = 0$ имеет тогда корень $\lambda = 0$. С помощью выражений (2), (11) и (16) для Q легко усматривается, что частные производные первого порядка не все равны нулю для положения равновесия, так что выполняется условие $c \neq 0$. Этим и объясняется наличие множителя λ в уравнениях (4) и (6); так как $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}|$ есть четная функция от λ, то в эти уравнения должен входить множитель λ^2. Следует заметить, что хотя интегралы движения центра инерции также не зависят от t во вращающейся системе координат, но они все же не могут быть использованы в вышеизложенном смысле вместо Q.

Итак, для устранения множителя λ^2 необходимо произвести еще одно понижение порядка системы Гамильтона с помощью интеграла площадей. Для этого определим такое каноническое преобразование, которое вводит Q как новое независимое переменное. Такой переход был осуществлен еще Якоби для пространственной задачи трех тел, где эта операция именуется исключением узлов. Чтобы пояснить идею, рассмотрим произвольную систему Гамильтона $\dot{x}_k = H_{y_k}$, $\dot{y}_k = -H_{x_k}$ с неизвестными функциями x_k, y_k $(k = 1, \ldots, n)$ и предположим, что существует интеграл $\psi(x, y)$, не содержащий t. Введем посредством порождающей функции $w = w(\xi, y)$ с помощью равенств (3; 4) подстановку

$$\eta_k = w_{\xi_k}, \quad x_k = w_{y_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad |w_{\xi_k y_l}| \neq 0, \tag{18}$$

являющуюся каноническим преобразованием x, y в ξ, η, и добьемся того, чтобы $\eta_n = \psi(x, y)$. Это приводит к дифференциальному уравнению в частных производных

$$w_{\xi_n} = \psi(w_y, y). \tag{19}$$

Предположим, что имеется решение уравнения (19), которое удовлетворяет условию $|w_{\xi_k y_l}| \neq 0$. Если обозначить столбцы переменных x, y и ξ, η соответственно через z и ζ, а функциональную матрицу ζ_z через $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ будет симплектической, поэтому $\mathfrak{M}\mathfrak{J}\mathfrak{M}' = \mathfrak{J}$, откуда получим $H_z = \mathfrak{M}' H_\zeta$, $\psi_z = \mathfrak{M}'\psi_\zeta$. Поэтому выражение

$$\sum_{k=1}^{n} (\psi_{x_k} H_{y_k} - \psi_{y_k} H_{x_k}) = \psi_z' \mathfrak{J} H_z \tag{20}$$

остается при переходе от z к ζ инвариантным, с другой стороны, оно тождественно равно нулю, так как $\psi(x, y)$ есть интеграл. Но в силу уравнений (18) и (19) $\psi = \eta_n$, и, значит, $\psi_{\eta_n} = 1$, в то же время другие частные производные от ψ как функции ζ все будут равны нулю. Из равенства (20) поэтому следует $H_{\xi_n} = 0$, и вместе с тем H после введения ξ, η от ξ_n не зависит. Если еще предположить, что данная система обладает равновесным решением, в окрестности которого функция Гамильтона и каноническое преобразование (18) будут аналитическими, то из новых дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_k = H_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -H_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

следует, что строка в матрице $\mathfrak{A}$, соответствующая переменной η_n, и столбец, соответствующий переменной ξ_n, состоят из нулей. Это опять доказывает существование множителя λ^2 в выражении $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}|$. При переходе к приведенной системе

$$\dot{\xi}_k = H_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -H_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{22}$$

этот множитель выпадает. Если, наконец, проинтегрировать систему (22), то функция ξ_n получается после этого квадратурой из дифференциального уравнения $\dot{\xi}_n = H_{\eta_n}$.

Этот результат можно применить к системе Гамильтона (14), в которой вместо x, y, ξ, η, ψ, n стоят ξ, η, u, v, Q, 4. Так как Q в силу равенств (11) является билинейной формой относительно ξ, η, то для $w(u,\,\eta)$ будем искать линейную подстановку

$$w = \sum_{k=1}^{4} g_k \eta_k, \quad g_k = g_k(u),$$

с помощью которой уравнение в частных производных (19) переходит в

$$\sum_{k=1}^{4} g_{ku_4}\eta_k = \sum_{k=1}^{2}(g_{2k}\eta_{2k-1} - g_{2k-1}\eta_{2k});$$

итак,

$$g_{2k-1,\,u_4} = g_{2k}, \quad g_{2k,\,u_4} = -g_{2k-1} \quad (k = 1,\,2). \tag{23}$$

Частное решение

$$g_1 = u_1 c, \quad g_2 = -u_1 s, \quad g_3 = u_2 c + u_3 s, \quad g_4 = -u_2 s + u_3 c,$$
$$c = \cos u_4, \quad s = \sin u_4$$

уравнений (23) удовлетворяет при $u_1 \neq 0$ условию $|w_{u_k\eta_l}| = 0$, так как $|w_{u_k\eta_l}| = |d_{lu_k}| = -u_1$. Тогда при этом предположении в силу уравнений (18) искомое каноническое преобразование имеет вид

$$\xi_1 = u_1 c, \quad \xi_2 = -u_1 s, \quad \xi_3 = u_2 c + u_3 s, \quad \xi_4 = -u_2 s + u_3 c, \tag{24}$$

$$\begin{cases} v_1 = \eta_1 c - \eta_2 s, \quad v_2 = \eta_3 c - \eta_4 s, \quad v_3 = \eta_3 s + \eta_4 c, \\ v_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2}(\xi_{2k}\eta_{2k-1} - \xi_{2k-1}\eta_{2k}) = Q. \end{cases} \tag{25}$$

При преобразовании последнего уравнения получим

$$v_4 = u_3 v_2 - u_2 v_3 - u_1(\eta_1 s + \eta_2 c),$$

следовательно,

$$\eta_1 s + \eta_2 c = v_0, \tag{26}$$

причем значение

$$v_0 = u_1^{-1}(u_3 v_2 - u_2 v_3 - v_4)$$

может быть определено. То, что функция Гамильтона F в новых координатах u, v не зависит больше от u_4, получается также и прямым путем. Именно в силу равенств (25), (26) имеем

$$v_2^2 + v_3^2 = \eta_3^2 + \eta_4^2, \quad v_1^2 + v_0^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2,$$
$$(v_1 + v_2)^2 + (v_3 + v_0)^2 = (\eta_1 + \eta_3)^2 + (\eta_2 + \eta_4)^2,$$

и вследствие $\eta_5 = \eta_6 = 0$ из равенства (12) получим формулу

$$T = \frac{1}{2}\left\{m_1^{-1}(v_1^2 + v_0^2) + m_2^{-1}(v_2^2 + v_3^2) + m_3^{-1}\left[(v_1 + v_2)^2 + (v_3 + v_0)^2\right]\right\},$$

так что T и $Q = v_4$ не содержат u_4. Чтобы показать то же самое для U, примем во внимание, что в силу равенств (24) преобразование ξ_k $(k = 1, \ldots, 4)$ в u_k есть поворот на угол $-u_4$ около материальной точки P_3 как центра вращения, причем точки (ξ_1, ξ_2), (ξ_3, ξ_4) переходят в $(u_1, 0)$, (u_2, u_3). Следовательно, $(u_1, 0)$, (u_2, u_3) будут координатами P_1, P_2 в прямоугольной декартовой системе координат с началом в P_3, ось абсцисс которой направлена в P_1. В частности, поэтому $u_1 \neq 0$. Так как U зависит только от взаимных расстояний трех материальных точек, то U будет функцией одних u_1, u_2, u_3. Система Гамильтона (14) переходит теперь вследствие введения новых координат в другую систему более низкого порядка

$$\dot{u}_k = F_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -F_{u_k} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{27}$$

и отщепляется система

$$\dot{u}_4 = F_{v_4}, \quad \dot{v}_4 = 0. \tag{28}$$

Для v_4 будет выбрано постоянное значение, соответствующее положению равновесия. Тогда, если проинтегрировать уравнения (27), то u_4 получается из первого уравнения (28) квадратурой. Очевидно, что для системы Гамильтона (27) характеристический многочлен имеет для случая равностороннего треугольника вид $(\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + \gamma)$ и для случая прямолинейного движения $(\lambda^2+1) \times \left[\lambda^4 + (1-\alpha)\lambda^2 - \alpha(2\alpha+3)\right]$, причем значения γ и α заданы равенствами (5) и (7).

Рассмотрим сперва случай равностороннего треугольника. Если положить

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} = \rho, \quad a_1 = \frac{1}{2} + \rho, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \rho,$$

то

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + \lambda^2 + \gamma) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + a_1)(\lambda^2 + a_2).$$

Так как $\gamma > 0$, то случай кратности собственных значений встретится только при $\gamma = \frac{1}{4}$; этот случай можно исключить. Если $\gamma > \frac{1}{4}$, то a_1, a_2 комплексно сопряжены и различны; для $\gamma < \frac{1}{4}$ будет $0 < a_2 < a_1 < 1$.

Следовательно, по теореме существования § 14 корням $\lambda_3 = i$, $\lambda_6 = -i$ соответствует однопараметрическое семейство периодических решений уравнений (27), лежащих вблизи равновесного решения и имеющих период, приблизительно равный 2π. Но эти решения уже известны: они были найдены как обобщенные решения Лагранжа в конце § 12, когда искались частные решения с эллиптической орбитой, близкие к круговым решениям Лагранжа. Используя известные формулы для решения задачи двух тел, легко установить, что при фиксированном значении постоянной интеграла площадей v_4 существует еще одно семейство эллиптических решений, параметром которых можно выбрать период τ. Если положить $c = \cos(t - u_4)$, $s = \sin(t - u_4)$, то из уравнений (12; 3), (12; 4), (9) и (24) получается

$$\begin{aligned} q_1 - q_5 &= u_1 c, & q_2 - q_6 &= u_1 s,\\ q_3 - q_5 &= u_2 c - u_3 s, & q_4 - q_6 &= u_2 s + u_3 c,\\ p_1 &= v_1 c - v_0 s, & p_2 &= v_1 s + v_0 c,\\ p_3 &= v_2 c - v_3 s, & p_4 &= v_2 s + v_3 c, \end{aligned}$$

так что u_1, c, s, u_2, u_3, v_1, v_2 и v_3 действительно имеют период τ. Поэтому можно ограничиться теперь двумя другими чисто мнимыми парами корней λ_1, $\lambda_4 = -\lambda_1$ и λ_2, $\lambda_5 = -\lambda_2$, которые существуют при $\gamma < \frac{1}{4}$, т. е. при условии

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

Очевидно, что это неравенство и есть условие для m_1, m_2, m_3; оно, например, не выполнено, если $m_1 = m_2 = m_3$. Впрочем, нельзя сказать, что в этом случае не будет других периодических решений; однако эти решения нельзя получить с помощью замен § 12 и § 14.

Положим теперь $\lambda_1^2 = -a_1$, $\lambda_2^2 = -a_2$ и посмотрим, выполняется ли условие, чтобы отношения λ_k/λ_1 при $k = 2, 3$ не имели целочисленных значений. Имеем

$$-\lambda_3^2 = 1 > -\lambda_1^2 = a_1 > \frac{1}{2} > a_2 = -\lambda_2^2 > 0,$$

следовательно, $0 < \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 < 1$ и $1 < \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^2 < 2$. Поэтому оба условия выполнены, и по теореме существования получаем семейство периодических решений с периодом, приблизительно равным $2\pi i/\lambda_1$. Чтобы исследовать отношения λ_k/λ_2 при $k = 1, 3$, положим $\lambda_3/\lambda_2 = \varkappa_2$. Тогда, следовательно, $\lambda_2^2 = -\varkappa_2^{-2}$, откуда получается $\varkappa_2^{-4} - \varkappa_2^{-2} + \gamma = 0$. Поэтому нужно потребовать, чтобы для всех целых чисел $g > 1$ выполнялось неравенство

$$\gamma \neq g^{-2} - g^{-4}. \tag{29}$$

Если положить аналогично $\lambda_1/\lambda_2 = \varkappa$, откуда $\lambda_1^2 = \varkappa^2\lambda_2^2$, то $\varkappa^2 > 1$ и $(\varkappa\lambda_2)^4 + (\varkappa\lambda_2)^2 + \gamma = 0$, что вследствие $\lambda_2^4 + \lambda_2^2 + \gamma = 0$ дает $(\varkappa^4 - 1)\lambda_2^4 + (\varkappa^2 - 1)\lambda_2^2 = 0$, $(\varkappa^2 + 1)\lambda_2^2 + 1 = 0$,

$$(\varkappa^2 + 1)^{-2} - (\varkappa^2 + 1)^{-1} + \gamma = 0.$$

Следовательно, нужно в дальнейшем потребовать, чтобы для всех целых $g > 1$

$$\gamma \neq (g + g^{-1})^{-2}. \tag{30}$$

Если для γ выполняется счетное множество условий (29) и (30), то по теореме существования имеется второе семейство периодических решений с приближенным значением периода $2\pi i/\lambda_2$.

Подобным же образом можно рассмотреть периодические решения вблизи прямолинейных решений. В этом случае опять получается семейство эллиптических решений Лагранжа, которые лежат вблизи круговых и соответствуют паре собственных значений i, $-i$. Остальные собственные значения получаются из корней λ_1^2, λ_2^2 квадратного уравнения

$$x^2 + (1 - \alpha)x - \alpha(2\alpha + 3) = 0, \tag{31}$$

причем α определяется формулой (7). Так как $\alpha > 0$, то эти корни действительны и имеют противоположные знаки, поэтому можно предположить, что $\lambda_1^2 < 0$, $\lambda_2^2 > 0$. Следовательно, кроме $\pm\lambda_3 = \pm i$, имеется еще одна пара чисто мнимых собственных значений, а именно $\pm\lambda_1$. Так как левая часть уравнения (31) имеет при $x = -1$ отрицательное значение $-2\alpha(\alpha+1)$, то отрицательный корень уравнения (31) удовлетворяет неравенству

$$\lambda_1^2 < -1 = \lambda_3^2 < 0,$$

и поэтому отношение λ_3/λ_1 не может быть целым числом. Вследствие этого вблизи прямолинейных решений Лагранжа имеется простое семейство периодических решений с приближенным значением периода $2\pi i/\lambda_1$. Согласно § 14, паре действительных собственных значений $\pm\lambda_2$

соответствуют четыре решения задачи трех тел, которые асимптотически стремятся при $t \to \infty$ и, соответственно, при $t \to -\infty$ к равновесному решению, кроме того семейства решений, которое только для ограниченного интервала времени остается в малой окрестности равновесного решения.

Периодические решения, существование которых было доказано, могут быть разложены с помощью замены, упомянутой в § 14, в ряды Фурье.

В заключение рассмотрим вычисление определителя $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}|$. В случае равностороннего треугольника используем относительные координаты ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$ и обозначим через ξ_k^*, η_k^* их значения для решения Лагранжа. Примем, что после соответствующего поворота

$$\xi_1^* = -\xi_3^* = \frac{r}{2}, \quad \xi_2^* = \xi_4^* = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Заменим теперь ξ, η на $\xi + \xi^*$, $\eta + \eta^*$ и разложим U по степеням ξ_k $(k = 1, \ldots, 6)$. Вводя для сокращения обозначения

$$s_{kl} = 2r^{-2}\bigl\{(x_k - x_l)(x_k^* - x_l^*) + (x_{k+3} - x_{l+3})(x_{k+3}^* - x_{l+3}^*)\bigr\},$$
$$q_{kl} = r^{-2}\bigl\{(x_k - x_l)^2 + (x_{k+3} - x_{l+3})^2\bigr\}$$

при $1 \leqslant k < l \leqslant 3$, будем иметь

$$r_{kl}^{-1} = r^{-1}(1 + s_{kl} + q_{kl})^{-1/2} = r^{-1}\Bigl(1 - \frac{1}{2}s_{kl} - \frac{1}{2}q_{kl} + \frac{3}{8}s_{kl}^2 + \ldots\Bigr), \quad (32)$$

и, таким образом, для членов второй степени относительно ξ_k в выражении для $-2U$ получим

$$V = \frac{m_1 m_3}{4r^3}(\xi_1^2 - 6\sqrt{3}\xi_1\xi_2 - 5\xi_2^2) + \frac{m_2 m_3}{4r^3}(\xi_3^2 + 6\sqrt{3}\xi_3\xi_4 - 5\xi_4^2) + \frac{m_1 m_2}{r^3}\bigl\{(\xi_2 - \xi_4)^2 - 2(\xi_1 - \xi_3)^2\bigr\}.$$

Тогда в силу уравнений (11) и (12) $\mathfrak{S}$ будет матрицей квадратичной формы $V + 2Q + 2T$ относительно двенадцати переменных ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, 6)$. Если положить еще $m_k^{-1} = \mu_k$ $(k = 1, 2, 3)$ и ввести матрицы четвертого порядка

$$\mathfrak{A} = \frac{m_1 m_2 m_3}{4r^3}\begin{Vmatrix} \mu_2 - 8\mu_3 & -3\sqrt{3}\mu_2 & 8\mu_3 & 0 \\ -3\sqrt{3}\mu_2 & 4\mu_3 - 5\mu_2 & 0 & -4\mu_3 \\ 8\mu_3 & 0 & \mu_1 - 8\mu_3 & 3\sqrt{3}\mu_1 \\ 0 & -4\mu_3 & 3\sqrt{3}\mu_1 & 4\mu_3 - 5\mu_1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{Vmatrix},$$

$$\mathfrak{D} = \begin{Vmatrix} \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 + \mu_3 & 0 & \mu_3 \\ \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 0 & \mu_2 + \mu_3 \end{Vmatrix},$$

то тогда

$$|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = (\lambda^2 + 1)^2 \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix}.$$

Вследствие

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{E} & -\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{E} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C} & 0 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{Vmatrix}$$

будем иметь

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = |\mathfrak{D}\mathfrak{A} - \mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C}|,$$

откуда непосредственным вычислением определителя четвертого порядка получим соотношения (4) и (5).

В случае прямолинейного движения можно для координат $x_{2k-1} = x^*_{2k-1}$ ($k = 1, 2, 3$) исходного равновесного решения подставить их значения, найденные из решения уравнений (12; 8); в то же время $x^*_{2k} = 0$. Полагая

$$\begin{gathered} u_k = x_{2k-1} - x^*_{2k-1}, \quad u_{k+3} = x_{2k} - x^*_{2k}, \quad u_{k+6} = y_{2k-1} - y^*_{2k-1}, \\ u_{k+9} = y_{2k} - y^*_{2k} \quad (k = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{33}$$

разложим функцию F по степеням $u_1, \ldots, u_{12}$, получим

$$F(x, y) = F(x^*, y^*) + \frac{1}{2} \sum_{k,\, l=1}^{12} r_{kl} u_k u_l + \ldots$$

с симметричной матрицей $(r_{kl}) = \mathfrak{R}$, имеющей двенадцатый порядок. Так как линейная подстановка (33) будет канонической, то $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = |\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{R}|$; с другой стороны, используя равенство (32), найдем, что

$$\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{R} = \begin{Vmatrix} -2\mathfrak{W} & 0 & \lambda\mathfrak{E} & -\mathfrak{E} \\ 0 & \mathfrak{W} & \mathfrak{E} & \lambda\mathfrak{E} \\ -\lambda\mathfrak{E} & \mathfrak{E} & \mathfrak{M}^2 & 0 \\ -\mathfrak{E} & -\lambda\mathfrak{E} & 0 & \mathfrak{M}^2 \end{Vmatrix},$$

где

$$\mathfrak{W} = m_1 m_2 m_3 a^{-3} \begin{Vmatrix} \mu_2 + \mu_3\rho^{-3} & -\mu_3\rho^{-3} & -\mu_2 \\ -\mu_3\rho^{-3} & \mu_3\rho^{-3} + \mu_1\sigma^{-3} & -\mu_1\sigma^{-3} \\ -\mu_2 & -\mu_1\sigma^{-3} & \mu_2 + \mu_1\sigma^{-3} \end{Vmatrix},$$

$$\mathfrak{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} \mu_1^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^{1/2} \end{Vmatrix},$$

причем a, ρ, σ имеют значения, полученные в § 12. Квадратичная форма трех действительных переменных w_1, w_2, w_3, которой соответствует матрица $\|m_1\, m_2\, m_3\|^{-1} a^3 \mathfrak{W}$, имеет вид

$$\mu_1\sigma^{-3}(w_2 - w_3)^2 + \mu_2(w_3 - w_1)^2 + \mu_3\rho^{-3}(w_1 - w_2)^2 \geqslant 0;$$

следовательно, она неотрицательна, но нужно заметить, что она при $w_1 = w_2 = w_3$ равна нулю. Отсюда получаем, что $|\mathfrak{W}| = 0$. Для диагональной матрицы двенадцатого порядка

$$\mathfrak{N} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{M}^{-1} \end{Vmatrix}$$

будет $|\mathfrak{N}| = 1$, поэтому

$$|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{R}| = \left|\mathfrak{N}(\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{R})\mathfrak{N}\right| = \begin{vmatrix} -2\mathfrak{G} & 0 & \lambda\mathfrak{E} & -\mathfrak{E} \\ 0 & \mathfrak{G} & \mathfrak{E} & \lambda\mathfrak{E} \\ -\lambda\mathfrak{E} & \mathfrak{E} & \mathfrak{E} & 0 \\ -\mathfrak{E} & -\lambda\mathfrak{E} & 0 & \mathfrak{E} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{W}\mathfrak{M}.$$

Так как определитель двенадцатого порядка составлен из матриц третьего порядка, то его можно раскрыть формально как определитель четвертого порядка и получить

$$\begin{aligned} |\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| &= \left|(\lambda^2+1)^2\mathfrak{E} + (1-\lambda^2)\mathfrak{G} - 2\mathfrak{G}^2\right| = \\ &= \prod_{k=1}^{3} \bigl((\lambda^2+1)^2 + (1-\lambda^2)\gamma_k - 2\gamma_k^2\bigr), \end{aligned} \tag{34}$$

если γ_1, γ_2, γ_3 будут собственными значениями $\mathfrak{G}$. Так как $|\mathfrak{W}| = 0$, имеем также, что $|\mathfrak{G}| = 0$, поэтому одно собственное значение равно нулю, пусть, например, $\gamma_3 = 0$. Для определения γ_1 и γ_2 заметим, что из существования интеграла площадей следует равенство нулю определителя $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}|$ при $\lambda = 0$. Поэтому при соответствующей нумерации γ_1 и γ_2

$$0 = 1 + \gamma_2 - 2\gamma_2^2 = (1 + 2\gamma_2)(1 - \gamma_2).$$

Матрица $\mathfrak{G}$ вместе с $\mathfrak{W}$ также неотрицательна, следовательно, $\gamma_2 \geqslant 0$, т. е. $\gamma_2 = 1$. Так как $\mathfrak{G}$ имеет след

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=\gamma=a^{-3}\big[m_1(1 + \rho^{-3})+m_2(\rho^{-3} + \sigma^{-3})+m_3(1 + \sigma^{-3})\big], \quad (35)$$

то $\gamma_1 = \gamma - 1$. Если внести найденные значения γ_1, γ_2, γ_3 в равенство (34), то, вводя для сокращения обозначения $\alpha = \gamma - 2$, получим

$$|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = \lambda^2(\lambda^2 + 1)^3\big[\lambda^4 + (1 - \alpha)\lambda^2 - \alpha(2\alpha + 3)\big]. \quad (36)$$

Вследствие соотношений $x_3^* - x_1^* = \rho a$, $x_5^* - x_3^* = \sigma a$ с помощью уравнений (12; 8) получим

$$-1 = m_3(\rho a)^{-1}(\sigma a)^{-2} - m_3(\rho a)^{-1}a^{-2} - (m_1 + m_2)(\rho a)^{-3}, \quad (37)$$

$$-1 = m_1(\sigma a)^{-1}(\rho a)^{-2} - m_1(\sigma a)^{-1}a^{-2} - (m_2 + m_3)(\sigma a)^{-3}. \quad (38)$$

Принимая во внимание, что $\rho + \sigma = 1$, сложением равенств (35), (37) и (38) получим соотношение

$$\alpha = m_1 a^{-3}(1 + \rho^{-1} + \rho^{-2}) + m_3 a^{-3}(1 + \sigma^{-1} + \sigma^{-2}). \quad (39)$$

Наконец, сложение двух уравнений (12; 9) даст

$$a^3 = m_1 + m_2(\rho^{-2} + \sigma^{-2}) + m_3. \quad (40)$$

Теперь из равенств (36), (39) и (40) получаются уравнения (6) и (7).

§ 19. Задача Хилла

Попытаемся теперь найти периодические решения задачи трех тел, отличные от рассмотренных в предыдущем параграфе. При этом мы ограничимся опять только плоскими решениями. Вначале исключим из рассмотрения материальную точку P_2 и рассмотрим движения только двух материальных точек P_1 и P_3. Эти точки описывают конические сечения, и можно, в частности, принять, что они имеют круговые орбиты вокруг их общего центра инерции P_0. Заменим теперь P_1, P_3 через P_0 и введем в рассмотрение третью материальную точку P_2. Среди всех возможных движений P_0 и P_2 рассмотрим опять только круговые. Если P_2 достаточно удалена от остальных масс, то из этого приближенного решения удается получить строгое решение.

Можно прийти к весьма простому для рассмотрения предельному случаю названной задачи, если исходить вместо общей задачи трех тел из так называемой ограниченной задачи трех тел. Последняя есть частный случай плоской задачи трех тел, в которой масса точки P_3 равна нулю, а точки P_1, P_2 описывают окружности[1]. Чтобы получить дифференциальные уравнения движения для точки P_3, введем в заданной плоскости вращающуюся систему осей с началом в центре инерции точек P_1 и P_2, так что точки P_1 и P_2 относительно новой системы координат будут неподвижными. Без ограничения общности можно принять, что угловая скорость $\omega = 1$; в силу уравнений (12; 5) для прямоугольных координат x_{2k-1}, x_{2k} точки P_k ($k = 1, 2, 3$) во вращающейся системе координат получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}_{2k-1} = m_k^{-1} y_{2k-1} + x_{2k}, \quad \dot{y}_{2k-1} = U_{x_{2k-1}} + y_{2k},$$
$$\dot{x}_{2k} = m_k^{-1} y_{2k} - x_{2k-1}, \quad \dot{y}_{2k} = U_{x_{2k}} - y_{2k-1},$$

откуда, исключая y_{2k-1}, y_{2k}, получим дифференциальные уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x}_{2k-1} = 2\dot{x}_{2k} + x_{2k-1} + m_k^{-1} U_{x_{2k-1}}, \\ \quad \ddot{x}_{2k} = -2\dot{x}_{2k-1} + x_{2k} + m_k^{-1} U_{x_{2k}} \quad (k = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{1}$$

При этом m_3 пока не считается равной нулю, и точки P_1, P_2 еще не считаются покоящимися. Далее

$$\begin{cases} m_k^{-1} U_{x_{2k-1}} = \sum\limits_{l \neq k} m_l (x_{2l-1} - x_{2k-1}) r_{kl}^{-3}, \\ \quad m_k^{-1} U_{x_{2k}} = \sum\limits_{l \neq k} m_l (x_{2l} - x_{2k}) r_{kl}^{-3}, \end{cases} \tag{2}$$

[1] Обычно под ограниченной задачей трех тел понимают изучение движения материальной точки P_3 под действием притяжения точками P_1 и P_2; точки P_1 и P_2 движутся по кеплеровским орбитам; точка P_3 может иметь и не плоское движение, и ее действие на точки P_1 и P_2 не учитывается. — *Прим. перев.*

и здесь правые части имеют смысл при $m_3 = 0$. Но в этом случае система (1) для $k = 1, 2$ дает дифференциальные уравнения задачи двух тел для материальных точек P_1, P_2. Если еще положить $m_1 + m_2 = 1$ и $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$ при $0 < \mu < 1$, то как частное решение получается $x_1 = 1 - \mu$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\mu$, $x_4 = 0$, что в неподвижных осях соответствует круговым орбитам точек P_1 и P_2. Тогда уравнения движения для третьей точки P_3 с координатами $x_5 = x$, $x_6 = y$ получаются в виде

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x + F_x, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + y + F_y, \tag{3}$$

причем здесь

$$F = \frac{1-\mu}{r_{23}} + \frac{\mu}{r_{13}} = (1-\mu)\big[(x+\mu)^2 + y^2\big]^{-1/2} + \mu\big[(x+\mu-1)^2 + y^2\big]^{-1/2}.$$

Это и есть дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел. Хотя эта система имеет только четвертый порядок, мы сейчас еще далеки от ее полного решения. Дифференциальные уравнения (3) выгодно записать в комплексно сопряженных переменных

$$p = (x + \mu - 1) + iy, \quad q = \overline{p} = (x + \mu - 1) - iy, \tag{4}$$

при этом, очевидно, p есть вектор в комплексной плоскости, идущий из P_1 в P_3. Тогда

$$F = \frac{\mu}{\sqrt{pq}} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(1+p)(1+q)}}, \quad F_x = F_p + F_q, \quad F_y = i(F_p - F_q),$$

таким образом,

$$\ddot{p} = -2i\,\dot{p} + p - \mu + 1 + 2F_q, \quad \ddot{q} = 2i\,\dot{q} + q - \mu + 1 + 2F_p,$$

а полагая

$$G = pq + (1-\mu)(p+q) + 2F = pq + (1-\mu)(p+q) + \frac{2\mu}{\sqrt{pq}} + \frac{2-2\mu}{\sqrt{(1+p)(1+q)}},$$

получим преобразованные дифференциальные уравнения в виде

$$\ddot{p} = -2i\,\dot{p} + G_q, \quad \ddot{q} = 2i\,\dot{q} + G_q. \tag{5}$$

Чтобы определить периодические решения системы (5), сделаем еще одно упрощение, которое введено Хиллом и заимствовано из астрономии. Если выбрать P_2 в качестве Солнца, P_1 — как Землю и P_3 — как Луну, то масса Земли μ намного меньше массы Солнца $1-\mu$; при этом приближенно можно принять, что Солнце и Земля описывают круговые орбиты вокруг их общего центра инерции, а Луна движется приблизительно в плоскости этой круговой орбиты. Кроме того, масса Луны значительно меньше массы Земли, поэтому примем $m_3 = 0$. Будем искать периодическое решение системы (5) при малых значениях μ. Так как $|p|$ есть расстояние от Луны до Земли, которое значительно меньше расстояния от Земли до Солнца, равного единице, то будем искать такие периодические решения, для которых $|p|$ мало. Если вначале мы каким-нибудь способом исключим из уравнений (5) члены $-2i\,\dot{p}$, $2i\,\dot{q}$ и оставим в G только главный член $2\mu(pq)^{-1/2}$, то получится система

$$\ddot{p} = -\mu p(pq)^{-3/2}, \quad \ddot{q} = -\mu q(pq)^{-3/2}. \tag{6}$$

Мы получили опять дифференциальные уравнения задачи двух тел P_1 и P_3, записанные в комплексной форме, которая уже использовалась нами в уравнении (12; 12). Эти уравнения имеют, в частности, круговое решение $p = \mu^{1/3}e^{it}$, $q = \overline{p} = \mu^{1/3}e^{-it}$, $|p| = |q| = \mu^{1/3}$. Поэтому напрашивается преобразование переменных

$$p = \mu^{1/3}u, \quad q = \mu^{1/3}v, \tag{7}$$

после выполнения которого получим

$$\ddot{u} = -2i\,\dot{u} + H_v \quad \ddot{v} = 2i\,\dot{v} + H_u, \tag{8}$$

где

$$H = \mu^{-2/3}G = uv + \mu^{-1/3}(1-\mu)(u+v) + \frac{2}{\sqrt{uv}} + \frac{2\mu^{-2/3}(1-\mu)}{\sqrt{(1+\mu^{1/3}u)(1+\mu^{1/3}v)}}.$$

Разложение функции H по возрастающим степеням $\mu^{1/3}$ имеет вид

$$\begin{aligned} H = {} & uv + \mu^{-1/3}(u+v) + \\ & + 2\mu^{-2/3}\Big(1 - \frac{1}{2}\mu^{1/3}u + \frac{3}{8}\mu^{2/3}u^2\Big)\Big(1 - \frac{1}{2}\mu^{1/3}v + \frac{3}{8}\mu^{2/3}v^2\Big) + \\ & + 2(uv)^{-1/2} + \ldots = 2\mu^{-2/3} + \frac{3}{4}(u+v)^2 + 2(uv)^{-1/2} + \ldots, \end{aligned}$$

причем ненаписанные члены содержат только положительные степени $\mu^{1/3}$. Так как μ было принято малым, то откинем остальные члены и рассмотрим вместо системы (8) систему

$$\begin{cases} \ddot{u} = -2i\,\dot{u} + \dfrac{3}{2}(u+v) - u(uv)^{-3/2}, \\ \ddot{v} = 2i\,\dot{v} + \dfrac{3}{2}(u+v) - v(uv)^{-3/2}. \end{cases} \tag{9}$$

Это и есть дифференциальные уравнения Хилла. Их общее решение неизвестно; мы определим теперь периодические решения подобно тому, как это было сделано в § 14, с помощью некоторой подстановки в виде степенных рядов.

Чтобы найти эту подстановку, рассмотрим еще раз упрощенную систему, аналогичную системе (6);

$$\ddot{u} = -u(uv)^{-3/2}, \quad \ddot{v} = -v(uv)^{-3/2}, \tag{10}$$

которая соответствует отбрасыванию в системе (9) первых членов в правых частях. Будем искать периодические решения, для которых $\overline{v} = u$; в этом случае, в силу равенств (4) и (7), координаты x, y будут действительными. Одним из таких решений является круговое $u = u_0 e^{\lambda t}$. $v = v_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda^2 = -(uv)^{-3/2} = -(u_0 v_0)^{-3/2}$, $v_0 = \overline{u}_0$. Если положить для уничтожения радикалов $u = \xi^4$, $v = \eta^4$, то $\xi = \xi_0 e^{\alpha t}$, $\eta = \eta_0 e^{-\alpha t}$, $\dot{\xi} = \alpha\xi$, $\dot{\eta} = -\alpha\eta$, где $\alpha = \dfrac{\lambda}{4} = \pm\dfrac{i}{4}(\xi_0\eta_0)^{-3}$, $\eta_0 = \overline{\xi}_0$. Для точного решения уравнений (9) введем новые переменные ξ, η с помощью подстановки с неопределенными коэффициентами a_{kl}

$$u = \xi^4\Big(1 + \sum_{k,\,l} a_{kl}\xi^{3k+4l}\eta^{3k-4l}\Big), \quad v = \eta^4\Big(1 + \sum_{k,\,l} a_{kl}\xi^{3k-4l}\eta^{3k+4l}\Big), \tag{11}$$

причем k, l пробегают все пары целых чисел, удовлетворяющих условиям $3k \geqslant 4|l|$, $k > 0$. Специальный вид этой подстановки будет обоснован позднее. По предварительным соображениям новые неизвестные ξ, η должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot{\xi} = \alpha\xi, \quad \dot{\eta} = -\alpha\eta, \quad \alpha = \pm\frac{i}{4}(\xi\eta)^{-3}, \tag{12}$$

из которых опять $(\xi\eta)^{\cdot} = \alpha\xi\eta + \xi(-\alpha\eta) = 0$, и тогда

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}, \quad \eta = \eta_0 e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \pm\frac{i}{4}(\xi_0\eta_0)^{-3} \tag{13}$$

с постоянными ξ_0, η_0, отличными от нуля.

Образуем формальные производные по t почленным дифференцированием степенных рядов для u и v, причем $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ выражаются через ξ, η равенствами (12). Вводя сокращение

$$\zeta_{kl} = \xi^{3k+4l}\eta^{3k-4l}, \tag{14}$$

получим

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= 4\alpha\xi^4\Big[1 + \sum(2l+1)a_{kl}\zeta_{kl}\Big],\\
\ddot{u} &= (4\alpha)^2\xi^4\Big[1 + \sum(2l+1)^2 a_{kl}\zeta_{kl}\Big],\\
\dot{v} &= -4\alpha\eta^4\Big[1 + \sum(2l+1)a_{kl}\zeta_{k,\,-l}\Big],\\
\ddot{v} &= (4\alpha)^2\eta^4\Big[1 + \sum(2l+1)^2 a_{kl}\zeta_{k,\,-l}\Big].
\end{aligned}$$

Здесь и далее в этом параграфе суммы распространены на такие пары значений k, l, для которых показатели $3k+4l$, $3k-4l$ в равенстве (14) неотрицательны, а их сумма $6k$ положительна. Назовем k порядком ζ_{kl} и положим

$$A = -\sum a_{kl}\zeta_{kl}, \quad B = -\sum a_{kl}\zeta_{k,\,-l}.$$

Чтобы избежать в уравнениях (9) отрицательных показателей, умножим первое из этих уравнений на $\xi^2\eta^6$ и получим, учитывая равенство $4\alpha = \pm i(\xi\eta)^{-3}$, следующие выражения для отдельных членов:

$$\begin{cases}
-\ddot{u}\xi^2\eta^6 = 1 + \sum(2l+1)^2 a_{kl}\zeta_{kl},\\
-2i\,\dot{u}\xi^2\eta^6 = \pm 2\Big[\zeta_{10} + \sum(2l+1)a_{kl}\zeta_{k+1,\,l}\Big],\\
\dfrac{3}{2}(u+v)\xi^2\eta^6 = \dfrac{3}{2}\Big(\zeta_{20} + \sum a_{kl}\zeta_{k+2,l}\Big) + \dfrac{3}{2}\Big(\zeta_{2,-1} + \sum a_{kl}\zeta_{k+2,l-1}\Big),\\
-u^{-1/2}v^{-3/2}\xi^2\eta^6 = -(1-A)^{-1/2}(1-B)^{-3/2},
\end{cases} \tag{15}$$

причем в разложение

$$\begin{aligned}
(1-A)^{-1/2}(1-B)^{-3/2} &= \Big(1 + \frac{1}{2}A + \ldots\Big)\Big(1 + \frac{3}{2}B + \ldots\Big) = \\
&= 1 + \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B + \ldots
\end{aligned} \tag{16}$$

по степеням A и B нужно подставить вместо A и B ряды по ζ_{kl}. Так как $\zeta_{kl}\zeta_{gh} = \zeta_{k+g,\, l+h}$, то правая часть последнего уравнения (15) будет также рядом вида $\sum c_{kl}\zeta_{kl}$, как это имеет место для других строк. Чтобы первое дифференциальное уравнение (9) формально удовлетворялось, определим постоянные a_{kl} таким образом, чтобы сумма выражений (15) была равна тождественно нулю по ζ_{kl}.

Если умножить второе уравнение (9) на $\xi^6\eta^2$, то для отдельных членов получаются ряды, аналогичные содержащимся в уравнениях (15). Эти ряды получатся прямо из уравнений (15), если ξ с η поменять местами и написать, следовательно, $\zeta_{k,\,-l}$ вместо ζ_{kl}. При этом нужно в левой части второго уравнения заменить $-2i\,\dot{u}\xi^2\eta^6$ на $2i\,\dot{v}\xi^6\eta^2$, тогда стоящие в правых частях знаки $\pm$ остаются без изменения. Таким образом, получается, что сравнение коэффициентов при ζ_{kl} в первом уравнении (9) дает те же самые условия для a_{kl}, как и соответствующее сравнение коэффициентов при $\zeta_{k,\,-l}$ во втором уравнении (9). Поэтому достаточно определить неизвестные коэффициенты a_{kl} так, чтобы сумма четырех правых частей уравнений (15) была тождественно равна нулю. Мы покажем, что это возможно сделать единственным образом и что все a_{kl} будут рациональными числами.

Доказательство этого утверждения проведем методом полной индукции по k. Из рассмотрения наших подстановок очевидно, что утверждение справедливо для постоянных членов. Пусть теперь $r \geqslant 1$, и предположим, что для $0 < k \leqslant r-1$ все a_{kl} могут быть единственным образом выбраны так, чтобы сравнение коэффициентов проходило для всех членов порядков $1,\,2,\,\ldots,\,r-1$; пусть коэффициенты a_{kl} являются при этом рациональными числами. Для $r=1$ это очевидно. Чтобы показать, что предположение верно и для a_{rl} $(4\,|l| \leqslant 3r)$, заметим, что разложение в ряд выражения

$$D = (1-A)^{-1/2}(1-B)^{-3/2} - 1 - \frac{1}{2}A - \frac{3}{2}B \tag{17}$$

по степеням A и B начинается с членов второго порядка. Поэтому, если поставить вместо A и B их ряды по ζ_{kl}, то в D коэффициентом при ζ_{rl} будет многочлен по a_{ks} (здесь $k<r$), причем он уже определен единственным образом и рационален. Коэффициентами этого многочлена будут вполне определенные рациональные числа. Поэтому коэффициент при ζ_{rl} в правой части последней строки уравнений (15) равен сумме $\frac{1}{2}a_{rl} + \frac{3}{2}a_{r,\,-l}$ и является также определенным рациональ-

ным числом. Если принять во внимание первые три уравнения (15), то сравнение коэффициентов дает условие

$$\left[(2l+1)^2+\frac{1}{2}\right]a_{rl}+\frac{3}{2}a_{r,\,-l}=\rho_{rl} \tag{18}$$

с однозначно определенными рациональными числами ρ_{rl}. Для $l=0$ отсюда получается

$$3a_{r0}=\rho_{r0}; \tag{19}$$

следовательно, a_{r0} является рациональным числом. Если $l\neq 0$, то, изменяя знак у l в условии (18), мы получим второе уравнение

$$\frac{3}{2}a_{rl}+\left[(-2l+1)^2+\frac{1}{2}\right]a_{r,\,-l}=\rho_{r,\,-l}. \tag{20}$$

Так как у системы линейных уравнений (18) и (20) для a_r, $a_{r,\,-l}$ определитель

$$\left[(2l+1)^2+\frac{1}{2}\right]\left[(-2l+1)^2+\frac{1}{2}\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2=4l^2(4l^2-1) \tag{21}$$

будет положительным и так как коэффициенты этих уравнений рациональны, то отсюда a_{rl}, $a_{r,\,-l}$ определяются единственным образом и являются рациональными числами. Таким образом, индукция полностью проведена.

Докажем после этого, что найденные ряды для u, v абсолютно сходятся, если $|\xi|$ и $|\eta|$ достаточно малы. Если, кроме того, $\eta=\overline{\xi}$, то вследствие действительности a_{kl} обе величины u, v комплексно сопряжены, поэтому первоначальные координаты x, y действительны. Следовательно, в равенствах (13) можно выбрать $\eta_0=\overline{\xi}_0$.

Для доказательства сходимости используем, как и в § 15, метод мажорант. Пусть

$$\varphi=\sum c_{kl}\zeta_{kl}=\sum c_{kl}\xi^{3k+4l}\eta^{3k-4l}$$

будет формальным рядом с постоянными коэффициентами c_{kl}; будем полагать для сокращения $c_{kl}=\{\varphi\}_{kl}$. Если еще раз написать уравнение, получаемое из сравнения коэффициентов, то из уравнений (15) и (17) мы получим соотношение

$$\rho_{kl}=\Big\{D\mp 2\Big[\zeta_{10}+\sum(2l+1)a_{kl}\zeta_{k+1,\,l}\Big]-\\ -\frac{3}{2}\zeta_{20}(1+A)-\frac{3}{2}\zeta_{2,\,-1}(1+B)\Big\}_{kl}; \tag{22}$$

с другой стороны,

$$a_{k0} = \frac{1}{3}\rho_{k0}, \quad a_{kl} = \frac{\left[(1-2l)^2 + \frac{1}{2}\right]\rho_{kl} - \frac{3}{2}\rho_{k,\,-l}}{4l^2(4l^2-1)} \quad (l \neq 0). \tag{23}$$

Чтобы доказать абсолютную сходимость степенных рядов u и v в комплексной окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$, выберем сначала $\xi = \eta$. Тогда $\zeta_{kl} = \xi^{3k+4l}\eta^{3k-4l} = \xi^{6k} = \zeta^k$, где $\zeta = \xi^6$, и тогда достаточно в силу равенств (11) доказать сходимость ряда

$$Z = \sum |a_{kl}|\zeta^k$$

для некоторого $\zeta > 0$. Прежде всего мажорируем D. Вследствие $\xi = \eta$ будем иметь $A = B \prec Z$, причем ζ теперь рассматривается как независимая переменная. Далее, так как разложение $(1-A)^{-1/2}(1-B)^{-3/2}$ по степеням A, B имеет только положительные коэффициенты, то

$$D \prec (1-Z)^{-2} - 1 - 2Z = \frac{3Z^2}{(1-Z)^2} - \frac{2Z^3}{(1-Z^2)} \prec \frac{3Z^2}{(1-Z)^2} \prec \frac{3Z^2}{1-2Z}, \tag{24}$$

и, кроме того,

$$-\frac{3}{2}\zeta_{20}(1+A) - \frac{3}{2}\zeta_{2,-1}(1+B) \prec 3\zeta^2(1+Z). \tag{25}$$

Тогда вследствие $|2l+1| \geqslant 1$ из оценок (22), (24) и (25) получим

$$\sum_{k,\,l}\left|\frac{\rho_{kl}}{2l+1}\right|\zeta^k \prec \frac{3Z^2}{1-2Z} + 3\zeta^2(1+Z) + 2\zeta(1+Z). \tag{26}$$

Принимая во внимание, что оба отношения

$$\frac{(2l+1)\left[(1-2l)^2 + \frac{1}{2}\right]}{4l^2(4l^2-1)}, \quad \frac{\frac{3}{2}(2l+1)}{4l^2(4l^2-1)}$$

ограничены при всех целых $l \neq 0$, из оценок (23) и (26) получаем условие

$$Z \prec c_1\left[\frac{Z^2}{1-2Z} + \zeta^2(1+Z) + \zeta(1+Z)\right].$$

При этом c_1, так же как и в дальнейшем величины $c_2, \ldots, c_5$, будет положительной постоянной. С помощью соотношения $1+Z \prec (1-2Z)^{-1}$ получаем

$$Z \prec c_1 \frac{Z^2+\zeta^2+\zeta}{1-2Z} \prec c_1 \frac{\zeta+(\zeta+Z)^2}{1-2(\zeta+Z)};$$

тогда для $V=\zeta+Z$ имеем

$$V \prec c_2 \frac{2\zeta+V^2}{4-c_2 V},$$

откуда, согласно доказанному в § 15, следует сходимость V при $\zeta < c_3$. Следовательно, степенные ряды u и v абсолютно сходятся при $|\xi| < c_4$, $|\eta| < c_4$.

Изложим кратко результаты. В решении

$$\xi = \xi_0 e^{\alpha t}, \quad \eta = \eta_0 e^{-\alpha t} \tag{27}$$

дифференциальных уравнений (12) полагаем $\eta_0 = \overline{\xi}_0$ и $0 < |\xi_0| = \rho < c_4$. Тогда величина

$$\alpha = \pm \frac{i}{4}(\xi_0\eta_0)^{-3} = \pm \frac{i}{4}\rho^{-6}$$

будет чисто мнимой, и, следовательно, $\eta = \overline{\xi}$, $|\xi| = \rho$ для всех действительных t. Поэтому степенные ряды u и v сходятся и выполняется тождество $v = \overline{u}$, следовательно, решение в первоначальных координатах x, y будет действительным. Функции ξ, η, а также $\xi^4 = \xi_0^4 e^{4\alpha t}$, $\eta^4 = \eta_0^4 e^{-4\alpha t}$ и $\zeta_{kl} = \xi_0^{3k+4l}\eta_0^{3k-4l}e^{8l\alpha t}$ будут периодическими функциями от t. Подставив эти функции в степенные ряды (11), получим u, v, а также x и y как периодические функции от t с периодом $\left|\frac{2\pi i}{4\alpha}\right| = 2\pi\rho^6$. В силу равенств (27) соответствующим сдвигом t можно получить $\xi_0 = \eta_0 = \rho$. Положим $\rho^2 = \sigma$ и будем считать эту величину независимым параметром в интервале $0 < \sigma < c_4^2 = c_5$. Ряды для x, y будут рядами Фурье относительно $e^{4\alpha t}$, и коэффициенты Фурье будут степенными рядами по σ, которые также абсолютно сходятся при $|\sigma| < c_5$. Если заменить t на $-t$, то ξ и η, а также u и v обменяются местами, и потому точка x, y зеркально отобразится относительно оси x и перейдет в точку x, $-y$. Это отразится на разложении Фурье следующим образом: x будет рядом по косинусам, а y по синусам. Следовательно, траектория расположена симметрично относительно оси x. Мы получаем, таким образом, семейство периодических решений, зависящих от действительного параметра σ и имеющих период $2\pi\sigma^3$. Так как в уравнениях (12) имеется две возможности для знака α, что вносит знак $\pm$ и во второе уравнение (15), то получаются два различных семейства периодических решений, которые соответствуют различным направлениям движения Луны P_3 вокруг Земли P_1; именно, для положительного знака получается то же самое направление, как и для Земли вокруг Солнца, а для отрицательного знака — противоположное направление. Траектории обоих семейств действительно отличаются друг от друга.

Решения u и v дифференциальных уравнений (9) впервые были получены Хиллом [1] в 1878 г. Он нашел их несколько другим путем, используя период решения как параметр и вводя непосредственно ряды Фурье с неопределенными коэффициентами. Сравнение коэффициентов дало бесконечную систему уравнений, в которой каждое уравнение содержит бесконечное количество неизвестных. С помощью разложения в степенной ряд по параметру он пришел к рекуррентным формулам, которые совпадают с уравнениями (18), (19). Но Хилл не доказал сходимость полученных им рядов. Доказательство сходимости было дано в 1925 г. Винтнером [2][1].

§ 20. Обобщенная задача Хилла

В предыдущем параграфе мы нашли только приближенное решение задачи трех тел; теперь будем искать точные периодические решения задачи трех тел, из которых решение Хилла получается как предельный случай. Но при этом мы ограничимся только плоской задачей трех тел и примем за основу рассуждение, приведенное в начале § 17. Заменим материальные точки P_1 и P_3 их общим центром инерции P_0 с массой $m_1 + m_3 = \mu$ и допустим, что относительное движение P_2 вокруг P_0 есть круговое, с угловой скоростью $\omega = 1$. Выберем единицу массы так, чтобы $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, следовательно, $m_2 = 1 - \mu$ и $0 < \mu < 1$. Проведенное ранее рассмотрение показывает, что тогда расстояние от P_0 до P_2 должно равняться единице. Пусть расстояние от P_1

[1] Впервые сходимость рядов Хилла была доказана в 1874 г. А. М. Ляпуновым, который дал также интересный, оригинальный метод для построения этих рядов. Этот метод отличен и от метода Хилла, и от метода Зигеля. — *Прим. перев.*

до P_3 будет малым по сравнению с единицей и пусть P_1 и P_3 описывают круговые орбиты вокруг их центра инерции P_0. Мы хотим теперь доказать, что существуют строгие решения задачи трех тел, близкие к этим круговым орбитам.

Так как речь идет о плоской задаче, то для определения положения материальной точки можно ввести комплексные координаты z_k ($k = 0, 1, 2, 3$), которые уже были использованы в § 12, тогда действительная часть z_k даст абсциссу, а мнимая — ординату точки P_k. При этом можно ввести систему осей, которые вращаются вокруг центра инерции трех материальных точек P_1, P_2, P_3 с угловой скоростью, равной единице. Тогда

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \quad \mu z_0 = m_1 z_1 + m_3 z_3 = -m_2 z_2,$$

откуда следует

$$z_2 = \mu(z_2 - z_0), \quad \mu(z_0 - z_3) = m_1(z_1 - z_3).$$

Из уравнений (17; 1) и (17; 2) получатся уравнения движения

$$\ddot{z}_k + 2i\dot{z}_k - z_k = \sum_{l \neq k} m_l (z_l - z_k)|z_l - z_k|^{-3} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Так как было принято, что расстояние r_{13} значительно меньше единицы, а расстояния r_{12} и r_{23} приблизительно равны единице и что точки P_0 и P_2 находятся (приближенно) в покое во вращающейся системе отсчета, то целесообразно сделать подстановку

$$z_1 - z_3 = x, \quad z_0 - z_2 = 1 + y,$$

где x и y обозначают две новые комплексные переменные. Тогда z_0, z_1, z_2 и z_3 будут являться линейными функциями x и y, а именно,

$$\begin{aligned}
z_0 &= (1 - \mu)(1 + y), \\
z_1 &= (1 - \mu)(1 + y) + \frac{m_3}{\mu} x, \\
z_2 &= -\mu(1 + y), \\
z_3 &= (1 - \mu)(1 + y) - \frac{m_1}{\mu} x,
\end{aligned}$$

и при $x = y = 0$ будем иметь $z_0 = z_1 = z_3 = 1 - \mu$, $z_2 = -\mu$.

Итак, найдем в обобщенной задаче Хилла периодические решения системы (1), для которых абсолютные значения x и y будут достаточно малыми. Если положить для сокращения

$$m_1 = \delta_1\mu, \quad m_3 = \delta_3\mu, \quad \delta_3 = \delta, \quad \delta_1 = 1 - \delta,$$

то $0 < \delta < 1$ и

$$z_1 - z_2 = 1 + y + \delta_3 x, \quad z_3 - z_2 = 1 + y - \delta_1 x.$$

Из уравнений (1) для x, y получим два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + 2i\dot{x} - x = m_2(z_2 - z_1)r_{13}^{-3} + m_2(z_3 - z_2)r_{23}^{-3} + \mu(z_3 - z_1)r_{13}^{-3},\\
&\ddot{y} + 2i\dot{y} - y = 1 + \delta_1(z_2 - z_1)r_{12}^{-3} + \delta_3(z_2 - z_3)r_{23}^{-3},
\end{aligned}$$

где правые части нужно выразить через x, y. Но теперь

$$\begin{gathered}
r_{13}^2 = x\overline{x}, \quad r_{23}^2 = (1 + y - \delta_1 x)(1 + \overline{y} - \delta_1\overline{x}),\\
r_{12}^2 = (1 + y + \delta_3 x)(1 + \overline{y} + \delta_3\overline{x}),
\end{gathered}$$

и разложение в ряд дает

$$\begin{aligned}
(z_3 - z_2)r_{23}^{-3} &= (1 + y - \delta_1 x)^{-1/2}(1 + \overline{y} - \delta_1\overline{x})^{-3/2} =\\
&= 1 - \frac{1}{2}(y - \delta_1 x) - \frac{3}{2}(\overline{y} - \delta_1\overline{x}) + \ldots,\\
(z_1 - z_2)r_{12}^{-3} &= (1 + y + \delta_3 x)^{-1/2}(1 + \overline{y} + \delta_3\overline{x})^{-3/2} =\\
&= 1 - \frac{1}{2}(y + \delta_3 x) - \frac{3}{2}(\overline{y} + \delta_3\overline{x}) + \ldots.
\end{aligned}$$

Так как $\delta_3 = \delta$, $\delta_1 = 1 - \delta$, то эти ряды сходятся при $|x| + |y| < 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ и притом равномерно относительно x, y и δ, удовлетворяющих условию $|x| + |y| \leqslant \vartheta$ для каждой положительной постоянной $\vartheta < 1$. Подставляя эти степенные ряды в приведенные выше уравнения для x, y, после простых промежуточных выкладок получим

$$\begin{cases}
\ddot{x} + 2i\dot{x} + \dfrac{1}{2}(\mu - 3)x + \dfrac{3}{2}(\mu - 1)\overline{x} + \mu x^{-1/2}\overline{x}^{\,-3/2} = P,\\
\ddot{y} + 2i\dot{y} - \dfrac{3}{2}(y + \overline{y}) = Q.
\end{cases} \tag{2}$$

При этом P, Q суть степенные ряды по x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, которые начинаются с членов второго порядка и сходятся при $|x|+|y|<1$. Коэффициенты этих рядов суть многочлены относительно μ и δ с рациональными коэффициентами.

Мы хотим найти периодические решения системы (2) и для этого заменим x, $\overline{x}$, y, $\overline{y}$ опять степенными рядами по новым переменным ξ, η. При этом ξ, η должны удовлетворять, как и в предыдущем параграфе, дифференциальным уравнениям

$$\dot{\xi}=\alpha\xi, \quad \dot{\eta}=-\alpha\eta, \quad \alpha=\pm\frac{i}{4}(\xi\eta)^{-3}. \tag{3}$$

На этот раз введем обозначения

$$\zeta_{kl}=\xi^{k+2l}\eta^{k-2l}, \quad \zeta_k=\zeta_{k0}=(\xi\eta)^k$$

и сделаем подстановку

$$x=\mu^{1/3}(1\mp 2\zeta_3)^{1/3}\xi^4\Bigl(1+\sum_{k>4}a_{kl}\zeta_{kl}\Bigr), \qquad y=\mu^{2/3}\sum_{k>3}b_{kl}\zeta_{kl},$$
$$\overline{x}=\mu^{1/3}(1\mp 2\zeta_3)^{1/3}\eta^4\Bigl(1+\sum_{k>4}a_{kl}\zeta_{k,\,-l}\Bigr), \qquad \overline{y}=\mu^{2/3}\sum_{k>3}b_{kl}\zeta_{k,\,-l},$$

где суммирования по l ведутся при условии $2\,|l|\leqslant k$. Выбор знака в множителе

$$(1\mp 2\zeta_3)^{1/3}=\gamma$$

для x и $\overline{x}$ определяется выбором знака α в уравнениях (3). Выбор формы этой подстановки оправдывается следующим сравнением коэффициентов. Образуем производные от x, y по t и выразим $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ соответственно из уравнений (3) через ξ, η, причем заметим, что множитель γ от t не зависит. Мы получим

$$\dot{x}=\mu^{1/3}\gamma\xi^4(\pm i\zeta_3^{-1})\Bigl[1+\sum_{k>4}(l+1)a_{kl}\zeta_{kl}\Bigr], \qquad \dot{y}=\mu^{2/3}(\pm i\zeta_3^{-1})\sum_{k>3}l b_{kl}\zeta_{kl},$$
$$\ddot{x}=\mu^{1/3}\gamma\xi^4(-\zeta_6^{-1})\Bigl[1+\sum_{k>4}(l+1)^2a_{kl}\zeta_{kl}\Bigr], \qquad \ddot{y}=\mu^{2/3}(-\zeta_6^{-1})\sum_{k>3}l^2 b_{kl}\zeta_{kl}.$$

Подставим теперь ряды для x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$ и для производных от x, y в дифференциальные уравнения (2), умножим первое уравнение на $-\mu^{-1/3}\gamma^2\xi^{-4}\zeta_6$, второе уравнение — на $-\mu^{-2/3}\zeta_6$; после некоторых простых преобразований получим

$$(1 \mp 2\zeta_3)\left[\sum_{k>4}(l+1)^2 a_{kl}\zeta_{kl} \pm 2\sum_{k>4}(l+1)a_{kl}\zeta_{k+3,\,l}\right] + \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B = f, \quad (4)$$

$$\sum_{k>3} l^2 b_{kl}\zeta_{kl} \pm 2\sum_{k>3} l b_{kl}\zeta_{k+3,\,l} + \frac{3}{2}\sum_{k>3}(b_{kl}+b_{k,\,-l})\zeta_{k+6,\,l} = g; \quad (5)$$

здесь

$$A = \sum_{k>4} a_{kl}\zeta_{kl}, \quad B = \sum_{k>4} a_{kl}\zeta_{k,\,-l},$$

$$f = \left\{(1+A)^{-1/2}(1+B)^{-3/2} - 1 + \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B\right\} + 4\zeta_6 + \\ + \frac{1}{2}(1 \mp 2\zeta_3)\big[(\mu-3)\zeta_6(1+A) + 3(\mu-1)\zeta_{6,\,-2}(1+B)\big] - \\ - \mu^{-1/3}(1 \mp 2\zeta_3)^{2/3}\zeta_{4,\,-1}P, \quad (6)$$

$$g = -\mu^{-2/3}\zeta_6 Q. \quad (7)$$

Если разложить $(1+A)^{-1/2}(1+B)^{-3/2}$ по степеням A и B и внести в P и Q ряды для x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$, то f и g также станут степенными рядами по ξ и η следующей формы:

$$f = \sum_{k\geqslant 0} f_{kl}\zeta_{kl}, \quad g = \sum_{k\geqslant 0} g_{kl}\zeta_{kl}.$$

При этом коэффициенты f_{kl}, g_{kl} будут многочленами по $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $\mu^{1/3}$ и δ с рациональными коэффициентами; разложения P, Q по x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$ начинаются с членов второго порядка, а x и $\overline{x}$ (соответственно y и $\overline{y}$) имеют после подстановки общий множитель $\mu^{1/3}$ (соответственно $\mu^{2/3}$). Исследуем эти многочлены подробнее.

Выражение $\zeta_{kl} = \xi^{k+2l}\eta^{k-2l}$ имеет степень $2k$; назовем k весом ζ_{kl}. Так как ряд для P по x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ начинается по меньшей мере с членов второй степени, и, с другой стороны, разложения x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ по степеням ξ, η начинаются с членов, вес которых будет по крайней мере равен двум, то вес членов в разложении P по степеням ξ и η не меньше 4. То же самое будет для Q, и тогда в силу равенства (7) при $k < 10$, $g_{kl} = 0$.

Соответственно разложение $\zeta_{4,\,-1}P$ начинается с членов веса $\geqslant 8$. Так как, далее, A и B по определению не содержат членов с весом < 5, то фигурные скобки в выражении (6) начинаются членами с весом $\geqslant 10$. Тогда из уравнения (6) следует, что $f_{kl} = 0$ при $k < 8$, за исключением f_{60} и $f_{6,-2}$. Нужно еще установить, через какие $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{x\lambda}$ выражаются коэффициенты f_{kl}, g_{kl}. Для этого заметим, что разложение P по x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ начинается с членов второго порядка, и, с другой стороны, ряды для x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ по ξ, η начинаются членами с весом $\geqslant 2$. Следовательно, если внести степенные ряды для x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ в $\zeta_6 Q$, то $b_{\varkappa\lambda}$, которое входит в y или $\overline{y}$, может войти только в такой член выражения $\zeta_6 Q$, вес которого не меньше чем $\varkappa + 6 + 2 = \varkappa + 8$. Поэтому для $b_{\varkappa\lambda}$, которые входят в g_{kl}, будет выполнено неравенство $\varkappa \leqslant k - 8$. Если принять во внимание, что ряд для x (соответственно для $\overline{x}$) содержит множитель $\xi^4 = \zeta_{21}$ (соответственно $\eta^4 = \zeta_{2,\,-1}$), то можно заметить, что в g_{kl} войдут только такие $a_{\varkappa\lambda}$, для которых $\varkappa \leqslant k - 10$. Следовательно, если обозначить для сокращения через $\mathfrak{P}(r,\, s)$ какой-нибудь многочлен относительно $a_{\varkappa\lambda}$, b_{kl}, $\mu^{1/3}$ и δ с $\varkappa \leqslant r$, $k \leqslant s$ с рациональными коэффициентами, то

$$g_{kl} = \mathfrak{P}(k - 10,\, k - 8) \quad (k \geqslant 10). \tag{8}$$

Точно так же можно заключить, что коэффициент при ζ_{kl} в $\zeta_{4,\,-1}P$ имеет вид $\mathfrak{P}(k-8,\, k-6)$. Так как A, B содержат только a_{kl} и при этом $k \geqslant 5$, то коэффициенты при ζ_{kl} в фигурных скобках выражения (6) имеют форму $\mathfrak{P}(k - 5,\, 0)$. Следовательно, в силу уравнений (6),

$$f_{kl} = \mathfrak{P}(k - 5,\, k - 6) \quad (k \geqslant 6). \tag{9}$$

Сравним теперь коэффициенты в уравнениях (4) и (5). Вводя сокращения

$$F_{kl}=\left[(l+1)^2+\frac{1}{2}\right]a_{kl}+\frac{3}{2}a_{k,-l} \mp 2l(l+1)a_{k-3,l}-4(l+1)a_{k-6,l}-f_{kl}, \tag{10}$$

$$G_{kl} = l^2 b_{kl} \pm 2l b_{k-3,\,l} + \frac{3}{2}(b_{k-6,\,l} + b_{k-6,\,-l}) - g_{kl}, \tag{11}$$

будем иметь условия

$$F_{kl} = 0, \quad G_{kl} = 0, \tag{12}$$

которые выполняются для всех целых k, l, удовлетворяющих условию $2|l| \leqslant k$. При этом нужно положить $a_{\varkappa\lambda} = 0$, $b_{\varkappa\lambda} = 0$, если $2|\lambda| > \varkappa$;

далее, в соответствии с нашей подстановкой, будем иметь также $a_{\varkappa\lambda} = 0$ при $\varkappa < 5$ и $b_{\varkappa\lambda} = 0$ при $\varkappa < 4$. Так как $g_{kl} = 0$ при $k < 10$, то условия $G_{k0} = 0$ выполняются при $k < 10$, и условия $G_{kl} = 0$ — при $k < 4$. На том же основании $F_{kl} = 0$ при $k < 5$. В частности, в силу равенств (10) и (11) получаем

$$F_{k0} = 3a_{k0} - 4a_{k-6,\,0} - f_{k0}, \quad G_{k0} = 3b_{k-6,\,0} - g_{k0}, \tag{13}$$

далее

$$\begin{cases} F_{k1} = \dfrac{9}{2}a_{k1} + \dfrac{3}{2}a_{k,\,-1} \mp 4a_{k-3,\,1} - 8a_{k-6,\,1} - f_{k1}, \\ F_{k,\,-1} = \dfrac{3}{2}a_{k1} + \dfrac{1}{2}a_{k,\,-1} - f_{k,\,-1}, \end{cases} \tag{14}$$

и отсюда также

$$F_{k+3,\,1} - 3F_{k+3,\,-1} = \mp 4a_{k1} - 8a_{k-3,\,1} - f_{k+3,\,1} + 3f_{k+3,\,-1}. \tag{15}$$

Кроме того, при $l \neq 0, \pm 1$ нужно использовать соотношение

$$F_{k,\,-l} = \frac{3}{2}a_{kl} + \left[(1-l)^2 + \frac{1}{2}\right]a_{k,\,-l} \pm \\ \pm 2l(1-l)a_{k-3,\,-l} - 4(1-l)a_{k-6,\,-l} - f_{k,\,-l}; \tag{16}$$

уравнения (10) и (16) следует понимать как два линейных уравнения для a_{kl}, $a_{k,\,-l}$. Для определителя системы находим выражение

$$\left[(l+1)^2 + \frac{1}{2}\right]\left[(1-l)^2 + \frac{1}{2}\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = l^2(l^2-1) > 0$$

($l^2 > 1$), аналогичное (17; 21) и получающееся из него заменой $2l$ на l. Индукция проводится следующим образом. Пусть r — натуральное число. Рассмотрим все уравнения

$$G_{kl} = 0 \quad (l \neq 0), \quad G_{k+6,\,0} = 0, \tag{17}$$

$$F_{kl} = 0 \quad (l \neq 1), \quad F_{k+3,\,1} - 3F_{k+3,\,-1} = 0 \tag{18}$$

при $k < r$. Их левые части в соответствии с (8), (9), (10), (11), (13), (14) и (15) будут при $\varkappa < r$ многочленами относительно $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$; мы предположим, что эти уравнения уже имеют единственное решение. Это предположение выполняется при $r < 5$ тривиальным образом в силу того, что было выбрано $a_{\varkappa\lambda} = 0$ $(\varkappa < 5)$, $b_{\varkappa\lambda} = 0$ $(\varkappa < 4)$, так как $g_{kl} = 0$ $(k < 10)$, $f_{kl} = 0$ $(k < 6)$, $f_{6l} = 0$ $(l \neq 0, -2)$. При $r = 5$ $b_{4l} (l \neq 0)$ и b_{40} определяются однозначно из $G_{4l} = 0$ $(l \neq 0)$ и $G_{10,\,0} = 0$, в то время как уравнения (18) опять тривиальным образом оказываются справедливыми при $k = 4$ вследствие $f_{7l} = 0$. Пусть теперь $r > 5$. В силу (8), (11) и (13) b_{rl} $(l \neq 0)$ и b_{r0} при $k = r$ опять однозначно определяются из уравнений (17). Вследствие (9), (10), (13) и (16) a_{rl} $(l \neq \pm 1)$ однозначно определяются из $F_{rl} = 0$ $(l \neq \pm 1)$, и в соответствии с (9), (14) и (15) a_{r1} и $a_{r,\,-1}$ также однозначно определяются из $F_{r+3,\,1} - 3F_{r+3,\,-1} = 0$, $F_{r,\,-1} = 0$. Таким образом, этим приемом доказано, что наше предположение справедливо для $r+1$, если оно справедливо для r, а поэтому оно справедливо и для всех r. Из уравнений (17) и (18) при $k \geqslant 0$, $l \neq 0$ и при $k \geqslant 6$, $l = 0$ теперь следует $G_{kl} = 0$, а при $k \geqslant 0$, $l \neq 1$ и при $k \geqslant 3$, $l = 1$ следует $F_{kl} = 0$, в то время как в остальных случаях $k < 6$, $l = 0$ (или, соответственно, $k < 3$, $l = 1$), условия (12) выполняются тривиальным образом. Так как f_{kl} и g_{kl} были многочленами относительно $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $\mu^{1/3}$ и δ с рациональными числовыми коэффициентами и так как нахождение a_{kl} и b_{kl}, из рекуррентных формул (17) и (18) требует только решения линейных уравнений с одними и теми же постоянными коэффициентами в левых частях, то, следовательно, все a_{kl} и b_{kl} получаются однозначно в виде многочленов относительно $\mu^{1/3}$ и δ с рациональными числовыми коэффициентами; в частности, все они будут действительными.

Доказательство сходимости для найденных рядов по переменным x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, так же, как и для решений Хилла, проводится методом мажорант; мы не приводим здесь это доказательство, так как оно не содержит каких-либо новых идей. Можно показать [1], что рассмотренные ряды абсолютно и равномерно сходятся в области $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $|\xi| < c$, $|\eta| < c$, причем c есть положительная постоянная, не равная нулю.

Внесем теперь решение системы (3)

$$\xi = \rho e^{\alpha t}, \quad \eta = \rho e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \pm \frac{i}{4}\rho^{-6} \quad (0 < \rho < c)$$

в степенные ряды для x, y, $\overline{x}$ и $\overline{y}$, причем нам нужно будет еще сдвинуть начало отсчета времени. Величины ξ и η комплексно сопряжены, следовательно, $\zeta_{k,\,-l} = \overline{\zeta}_{kl}$, и фактически ряды для $\overline{x}$ и $\overline{y}$ комплексно сопряжены с рядами для x и y, так как коэффициенты a_{kl}, b_{kl} получились действительными. Поэтому соответственно выбору знака α получаются два семейства решений плоской задачи трех тел, которые зависят от параметра ρ $(0 < \rho < c)$ и имеют во вращающихся осях период $\left|\dfrac{\pi i}{2\alpha}\right| = 2\pi\rho^6$. Нужно подчеркнуть, что эти решения существуют для произвольно выбранных μ и δ из интервалов $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, поэтому не требуется никакого ограничения для величин трех масс. Следовательно, может быть и случай $\mu = \dfrac{2}{3}$, $\delta = \dfrac{1}{2}$, когда все массы равны.

В предельном случае $\mu = 0$, $\delta = 0$ получаются решения Хилла, которые были выведены в предыдущем параграфе, где рассмотрение рекуррентных формул для коэффициентов было более простым, потому что вместо l входило $2l$ и отсутствовала особенность при $l = \pm 1$. При $\delta = 0$ и $0 < \mu < 1$ получаем ограниченную задачу трех тел, в которой масса Луны равна нулю. Для этого случая периодическое решение было найдено Брауном [2] по методу Хилла. Полученное нами общее решение было найдено Мультоном другим способом, а именно, с помощью метода малого параметра Пуанкаре. Этому методу посвящен следующий параграф.

§ 21. Метод малого параметра

В первом параграфе этой главы рассматривался метод определения периодических решений системы Гамильтона с помощью степенных рядов. В двух предыдущих параграфах были получены этим методом периодические решения плоской задачи трех тел, которые имеют значение в теории движения Луны. В этом параграфе будет рассмотрен третий метод определения периодических решений системы дифференциальных уравнений. Бóльшая часть изложенных ниже результатов имеет место не только при регулярности, но и при более слабых предположениях; все же ради простоты предположение о регулярности будет в дальнейшем сохранено.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x, \alpha) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

которая зависит от одного параметра α. Пусть правые части f_k при

$$|x_l - \xi_l^*| < r \quad (l = 1, \ldots, m), \quad \alpha \in G \tag{2}$$

являются регулярными функциями $m+1$ комплексных переменных x_l и α, причем G есть область комплексной α-плоскости. Далее, пусть при условиях (2) выполняются неравенства

$$\left|f_k(x,\,\alpha)\right| \leqslant M \quad (k=1,\,\ldots,\,m). \tag{3}$$

Прежде чем применять метод малого параметра, исследуем зависимость решений системы (1) от параметра α и начальных значений $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_m$.

Пусть $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_m$ — какие-нибудь комплексные величины, удовлетворяющие условиям

$$|\xi_l - \xi_l^*| < \frac{r}{2} \quad (l=1,\,\ldots,\,m). \tag{4}$$

Тогда при

$$|x_l - \xi_l| < \frac{r}{2}, \quad \alpha \in G$$

$f_k(x,\,\alpha)$ будут регулярными функциями переменных x_l и α, и в этой области справедлива оценка (3). Согласно теореме существования Коши (§ 4), система (1) имеет единственное решение $x(t,\,\xi,\,\alpha)$, для которого $x(0,\,\xi,\,\alpha)=\xi$ и $x_k(t,\,\xi,\,\alpha)$ $(k=1,\,\ldots,\,m)$ суть регулярные аналитические функции комплексной переменной t в круге

$$|t| < \frac{r}{2(m+1)M} = \rho.$$

Последнее справедливо для любого значения ξ из области (4) и для любого α из G. Покажем теперь, что $x_k(t,\,\xi,\,\alpha)$ в области

$$|t|<\rho, \quad |\xi_l - \xi_l^*| < \frac{r}{2} \quad (l=1,\,\ldots,\,m), \quad \alpha \in G \tag{5}$$

будут регулярными функциями всех $m+2$ независимых комплексных переменных $t,\,\xi_l,\,\alpha$. Это следует из доказательства теоремы Коши, данного в § 4. Коэффициенты α_{kn} разложения в ряд $x_k(t,\,\xi,\,\alpha)$ по степеням t при сравнении коэффициентов оказываются многочленами относительно коэффициентов разложения Тейлора функции $f_l(x,\,\alpha)$ $(l = 1,\,\ldots,\,m)$ по степеням $x_1-\xi_1,\,\ldots,\,x_m-\xi_m$; эти последние коэффициенты по формуле Тейлора будут аналитическими функциями от $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_m,\,\alpha$ в области $|\xi_h - \xi_h^*| < \frac{r}{2}$ $(h=1,\,\ldots,\,m)$, $\alpha \in G$. Так как, с другой стороны, для разложений функций $x_k(t, \xi, \alpha)$ по степеням t можно указать мажорирующие функции, коэффициенты которых зависят только от M и r, то эти ряды сходятся равномерно по ξ_h и α в каждом открытом отрезке $|t| < \rho$. Следовательно, $x_k(t, \xi, \alpha)$ по известной теореме Вейерштрасса будут регулярными по всем $m+2$ переменным в области (5).

Если значения $x_k(t, \xi, \alpha)$ при каком-либо t из интервала $0 < t < \rho$, например при $t = \rho/2$, считать опять начальными значениями, то решение можно продолжить аналитически и за точку $t = \rho$. Пусть решение $x(t, \xi, \alpha)$ при закрепленных $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$ продолжено, как функция t, на весь интервал $0 \leqslant t < t_1$. Если тогда кривая $x(t, \xi^*, \alpha^*)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ вся лежит в области регулярности $f_1(x, \alpha), \ldots, f_m(x, \alpha)$, то, как это следует из теоремы о покрытии, из последовательного применения вышеупомянутых операций следует, что в достаточно малой окрестности U точки $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$ решение $x(t, \xi, \alpha)$ может быть продолжено на интервал $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и там будет оставаться регулярной функцией всех переменных t, ξ, α. Но чем больше будет выбрано t_1, тем меньше будет вообще окрестность U, в которой регулярность сохранится при аналитическом продолжении. Нужно заметить, что это рассуждение можно провести и для таких дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x, t, \alpha) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

в правые части которых входит явно независимая переменная t. Именно, если ввести новую неизвестную x_0 и заменить систему (6) системой

$$\dot{x}_0 = 1, \quad \dot{x}_k = f_k(x, x_0, \alpha) \quad (k = 1, \ldots, m),$$

то правые части этих $m+1$ дифференциальных уравнений не содержат более переменной t.

Так как $x_k(t, \xi, \alpha)$ будет при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ регулярной функцией ξ_l в окрестности $\xi = \xi^*$, то там, в частности, существуют частные производные $x_{k\xi_l}(t, \xi, \alpha)$. Ввиду того что дальнейшее рассмотрение не зависит от α, ибо будет предполагаться, что α имеет постоянное значение, мы не будем писать α в качестве аргумента функций. Если известно теперь решение $x(t, \xi)$ для системы фиксированных начальных значений ξ_l^* $(l = 1, \ldots, m)$, то частные производные $x_{k\xi_l} = x_{k\xi_l}(t, \xi^*)$ определяются следующим образом из так называемых уравнений в вариациях. Так как ξ_l, t можно рассматривать по отношению к $x_k(t, \xi)$ как независимые переменные, то из дифференциальных уравнений (1) дифференцированием по ξ_l получаем

$$\dot{x}_{k\xi_l} = \sum_{r=1}^{m} f_{kx_r} x_{r\xi_l}, \quad f_{kx_r} = f_{kx_r}\big[x(t,\, \xi^*)\big] \quad (k = 1,\, \ldots,\, m;\; l = 1,\, \ldots,\, m).$$

Если ввести матрицы m-го порядка $\mathfrak{X} = (x_{k\xi_l})\mathfrak{F} = (f_{kx_l})$, то для $\mathfrak{X}$ получается уравнение в вариациях

$$\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{F}\mathfrak{X}, \tag{7}$$

причем $\mathfrak{F}$ известно. Так как $x(0,\, \xi) = \xi$, то при $t = 0$ $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$. Итак, матрицу $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(t)$ можно получить интегрированием линейного дифференциального уравнения (7) при начальном условии $\mathfrak{X}(0) = \mathfrak{E}$. Это интегрирование можно провести последовательными приближениями с использованием интегрального уравнения

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{E} + \int_0^t \mathfrak{F}\mathfrak{X}\, dt,$$

для решения которого можно использовать матричную последовательность

$$\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{X}_n = \mathfrak{E} + \int_0^t \mathfrak{F}\mathfrak{X}_{n-1}\, dt \quad (n = 1,\, 2 \ldots);$$

можно также использовать метод сравнения коэффициентов, как это было сделано при доказательстве теоремы существования Коши.

Для определителя $\Delta = |\mathfrak{X}|$ получается

$$\dot{\Delta} = \sum_{k,\, l=1}^{m} \dot{x}_{k\xi_l} X_{lk}; \tag{8}$$

причем X_{kl} есть алгебраическое дополнение элемента $x_{k\xi_l}$ в матрице $\mathfrak{X}$, т. е. минор элемента $x_{x\xi_l}$, взятый со знаком $(-1)^{k+l}$. Если ввести еще матрицу $\mathfrak{Y} = (X_{kl})$, составленную из алгебраических дополнений элементов $\mathfrak{X}$, то равенство (8) можно записать в виде

$$\dot{\Delta} = \sigma(\dot{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}),$$

где σ обозначает след матрицы $\dot{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$. С помощью уравнения (7) имеем

$$\dot{\Delta} = \sigma(\mathfrak{F}\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}).$$

С другой стороны, $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y} = \Delta\mathfrak{E}$, откуда

$$\dot{\Delta} = \Delta\sigma(\mathfrak{F}) = \Delta\sigma, \tag{9}$$

где

$$\sigma = \sigma(\mathfrak{F}) = \sum_{k=1}^{m} f_{kx_k}(x)$$

и $x = x(t, \xi^*)$. Принимая во внимание, что начальное значение $\Delta(0)$ функции $\Delta = \Delta(t, \xi^*) = \Delta(t)$ вследствие $\mathfrak{X}(0) = \mathfrak{E}$ равно единице, путем интегрирования уравнения (9) получим

$$\ln\Delta = \int_0^t \sigma\,dt.$$

Можно считать, что система (1) есть система дифференциальных уравнений движения потока жидкости, причем x_k $(k = 1, \ldots, m)$ суть координаты частиц жидкости. Так как правые части не содержат явно независимой переменной, то имеет место установившееся движение. При $t = 0$ положение частиц жидкости определяется координатами ξ_k. По прошествии времени t частицы перейдут из ξ в $x(t, \xi)$, чем устанавливается отображение ξ на x. Функциональная матрица этого отображения есть $(x_{k\xi_l}) = \mathfrak{X}(t, \xi)$, и функциональный определитель равен Δ. Если Δ тождественно равно единице, получается отображение, сохраняющее объем, что соответствует несжимаемому потоку. В соответствии с уравнением (9) это означает, что

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} f_{kx_k} = 0. \tag{10}$$

Для системы Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

имеем

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \big[(E_{y_k})_{x_k} + (-E_{x_k})_{y_k}\big] = 0,$$

так что в этом случае равенство (10) выполняется.

Метод малого параметра, предложенный Пуанкаре [1], возник из следующей задачи. Рассмотрим решение $x(t, \xi, \alpha)$ системы (1) опять в зависимости от ξ и α и допустим, что при $\alpha = \alpha^*$ система имеет периодическое решение. Пусть этому решению соответствуют начальные значения $\xi = \xi^*$, тогда $x = x(t, \xi^*, \alpha^*)$. Предположим при этом, что речь идет не о равновесном решении. Пусть $\tau^* > 0$ будет периодом $x(t, \xi^*, \alpha^*)$ по t, причем это необязательно наименьший положительный период, и пусть вся кривая $x(t, \xi^*, \alpha^*)$ лежит при $0 \leqslant t \leqslant \tau^*$ в области регулярности функций $f_1, \ldots, f_m$ по x и α. Тогда эти утверждения справедливы для всякого действительного t, так как

$$x(t + \tau^*, \xi^*, \alpha^*) = x(t, \xi^*, \alpha^*). \tag{11}$$

По теореме о единственности решений дифференциальных уравнений равенство (11) справедливо при всех t, если оно верно хотя бы при одном значении, например при $t = 0$. Поставим вопрос, имеет ли система (1) периодические решения для несколько измененных начальных значений ξ, α.

Будем искать сначала периодические решения с тем же самым периодом τ^*. Чтобы $x(t, \xi, \alpha)$ имело период τ^*, по теореме единственности необходимо и достаточно, чтобы $x(\tau^*, \xi, \alpha) = x(0, \xi, \alpha) = \xi$. Если положить

$$\varphi_k(\xi, \alpha) = x_k(\tau^*, \xi, \alpha) - \xi_k, \tag{12}$$

то, следовательно, нужно удовлетворить m аналитическим уравнениям

$$\varphi_k(\xi, \alpha) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Это будет система неявных уравнений, которые удовлетворяются при $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$ в силу периодичности исходного решения. Следовательно, если функциональный определитель $|\varphi_{k\xi_l}|$ порядка m отличен от нуля при $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$, то можно найти решение системы (13) вблизи $\alpha = \alpha^*$, и по известной теореме существования для неявных функций m разностей $\xi_k - \xi_k^*$ получаются в виде степенных рядов по $\alpha - \alpha^*$, причем эти ряды не содержат постоянных членов. Но этого здесь как раз и не может быть, так как именно определитель $|\varphi_{k\xi_l}|$ обязательно равен нулю. Эту трудность, однако, можно обойти небольшим видоизменением рассуждения. Исследуем, почему определитель должен обращаться в нуль. Пусть $\alpha = \alpha^*$. Если опять положить $\mathfrak{X} = \bigl[x_{k\xi_l}(t, \xi)\bigr]$ и ввести матрицу $\mathfrak{C}(t,\,\xi) = \mathfrak{X} - \mathfrak{E}$, то в силу равенства (12) имеем для функциональной матрицы

$$\|\varphi_{k\xi_l}\| = \mathfrak{C}(\tau^*,\,\xi^*) = \mathfrak{C}. \tag{14}$$

С другой стороны, если ξ будет какой-нибудь точкой на траектории $x(t,\,\xi^*)$, то при соответствующем выборе t' можно положить, что

$$\xi = x(t',\,\xi^*), \tag{15}$$

т. е. величина ξ будет функцией t'. Так как правые части дифференциальных уравнений (1) явно не зависят от t, то

$$x(t + t',\,\xi^*) = x(t,\,\xi). \tag{16}$$

Дифференцируя равенство (16) по t', в соответствии с (1) и (15) получим уравнения

$$f_k\bigl[x(t,\,\xi)\bigr] = \sum_{l=1}^{m} x_{k\xi_l}(t,\,\xi) f_l(\xi) \quad (k = 1,\,\ldots,\,m),$$

следовательно,

$$f(x) = \mathfrak{X} f(\xi), \quad f(x) - f(\xi) = \mathfrak{C}(t,\,\xi) f(\xi),$$

где $f(x)$ — вектор, имеющий составляющие $f_1(x),\,\ldots,\,f_m(x)$, и где нужно положить $x = x(t,\,\xi)$. Тогда, в частности, при $\xi = \xi^*$, $t = \tau^*$ будем иметь $f(x) = f(\xi)$, и поэтому

$$\mathfrak{C} f = 0, \quad f = f(\xi^*). \tag{17}$$

Так как рассматриваемое периодическое решение $x(t,\,\xi^*)$ не является равновесным, то $f(\xi^*)$ не будет нулевым вектором, следовательно, $|\mathfrak{C}| = 0$. Поэтому основная причина обращения определителя $\mathfrak{C}$ в нуль состоит в том, что при произвольном сдвиге начальных значений ξ на траектории $x(t,\,\xi^*)$ получается опять периодическое решение, а именно, та же самая траектория, для которой только t увеличено на постоянную t'. Этого можно избежать, если варьировать начальные значения ξ только в $(m-1)$-мерной плоскости, которая не касается интегральной кривой в начальной точке ξ^*. Мы уже видели, что $f(\xi^*)$ не есть нулевой вектор, поэтому можно выбрать обозначения так, чтобы последняя составляющая $f_m(\xi^*) \neq 0$. Тогда в соответствии с системой (1) $x_m = \xi_m^*$ и будет такой плоскостью. Следовательно, можно положить $\xi_m = \xi_m^*$ и варьировать только $m-1$ начальных значений $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$. Но так как должны быть удовлетворены m уравнений (13), мы будем теперь предполагать период искомого периодического решения τ также величиной переменной.

Если положить теперь

$$\varphi_k(\tau, \xi, \alpha) = x_k(\tau, \xi, \alpha) - \xi_k, \tag{18}$$

то m уравнений

$$\varphi_k(\tau, \xi, \alpha) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{19}$$

должны быть удовлетворены при дополнительном условии $\xi_m = \xi_m^*$. Они имеют очевидное решение $\tau = \tau^*$, $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$. Будем рассматривать $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и τ в уравнениях (19) как неизвестные, а α как независимую переменную, и найдем соответствующую функциональную матрицу $\mathfrak{B}$ порядка m, которая получается из $\mathfrak{C}$ заменой столбца φ_{ξ_m}, соответствующего ξ_m, столбцом $\varphi_\tau = \varphi_\tau(\tau^*, \xi^*, \alpha^*)$. Теперь, в соответствии с системой (1) и соотношением (18),

$$\varphi_\tau = \dot{x}(\tau, \xi, \alpha) = f\big[x(\tau, \xi, \alpha), \alpha\big],$$

следовательно, в точке $\tau = \tau^*$, $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$

$$\varphi_\tau = f(\xi^*, \alpha^*) = f,$$

и

$$\mathfrak{B} = (\varphi_{\xi_1} \ldots \varphi_{\xi_{m-1}} f), \tag{20}$$

где первые $m-1$ столбцов суть

$$\varphi_{\xi_k} = \varphi_{\xi_k}(\tau^*, \xi^*, \alpha^*) \quad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Если определитель $|\mathfrak{B}|$ отличен от нуля, то систему уравнений (19) можно при $\xi_m = \xi_m^*$ разрешить в окрестности $\alpha = \alpha^*$ относительно τ, $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и получить для разностей $\tau - \tau^*$, $\xi_1 - \xi_1^*, \ldots \xi_{m-1} - \xi_{m-1}^*$ степенные ряды по $\alpha - \alpha^*$, не содержащие постоянных членов. Следовательно, тогда для всех значений параметра α в достаточной близости от α^* можно определить такие начальные значения $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m = \xi_m^*$ и такой период τ, что соответствующее этим начальным значениям решение будет периодическим с периодом τ. Чтобы вычислить матрицу $\mathfrak{B}$, нужно в соответствии с равенством (14) проинтегрировать только систему линейных уравнений в вариациях (7), причем $x = x(t, \xi^*, \alpha^*)$ следует взять в качестве известного исходного периодического решения с начальными значениями $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$. Можно построить простые примеры, показывающие, что определитель $|\mathfrak{B}|$ в отличие от определителя $|\mathfrak{C}|$ не всегда равен нулю.

Пуанкаре распространил свой метод и на общий случай, когда правые части дифференциальных уравнений зависят явно от t; при этом правые части должны быть, однако, периодическими функциями t. Предполагается, что существует периодическое решение с тем же самым периодом; легко показать на примерах, что аналогично подсчитываемый определитель по крайней мере не всегда равен нулю. Последнее правдоподобно, так как для обоснования равенства нулю определителя существенную роль у нас играла стационарность потока. Мы не будем больше здесь и далее углубляться в важные и интересные вопросы, связанные с теорией дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Бо́льшую часть известных методов и результатов этой теории можно истолковать с помощью рассмотренных нами стационарных потоков; кроме того, при начальном рассмотрении не решенной еще задачи следует ограничиваться разбором простых нетривиальных случаев.

Мы покажем теперь, что можно найти периодическое решение для значения α, близкого к α^*, с тем же самым периодом $\tau = \tau^*$, как и в исходном решении, если известен не зависящий от t интеграл $\psi(x, \alpha)$, который при $x = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$ не является стационарным. При этом предположим, что интеграл $\psi(x, \alpha)$ будет аналитическим относительно x, α в окрестности исходного периодического решения $x(t, \xi^*, \alpha^*)$ и значения α^*. Являясь интегралом системы (1), $\psi = \psi(x, \alpha)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_{x_k} f_k(x, \alpha) = 0$$

тождественно по x и α. Если ввести теперь вектор-строку ψ_x с составляющими $\psi_{x_k}(\xi^*, \alpha^*)$, то, в частности,

$$\psi_x f = 0. \tag{21}$$

Мы предположили, что ψ не является стационарным при $x = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$; поэтому ψ_x не является нулевым вектором. Так как, с другой стороны, $f_m(\xi^*, \alpha^*) \neq 0$, то не все величины $\psi_{x_k}(\xi^*, \alpha^*)$ при $k = 1, \ldots, m-1$ равны нулю. Выберем теперь обозначения таким образом, чтобы $\psi_{x_{m-1}}(\xi^*, \alpha^*) \neq 0$. Так как интеграл $\psi(x, \alpha)$ имеет постоянное значение на каждой траектории, то равенство

$$\psi\bigl[x(t, \xi, \alpha), \alpha\bigr] = \psi(\xi, \alpha) \tag{22}$$

удовлетворяется тождественно по t, ξ, α. Отсюда, дифференцируя по ξ_l, получим

$$\sum_{k=1}^{m} \psi_{x_k}(x, \alpha) x_{k\xi_l} = \psi_{x_l}(\xi, \alpha) \quad (l = 1, \ldots, m)$$

на каждой траектории $x = x(t, \xi, \alpha)$. Если здесь положить $t = \tau^*$, $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$, т. е. если $x = \xi^*$, то в векторной форме получим

$$\psi_x \mathfrak{X}(\tau^*, \xi^*) - \psi_x = \psi_x \mathfrak{C} = 0. \tag{23}$$

Из уравнений (14), (20), (21) и (23) прежде всего следует $\psi_x \mathfrak{B} = 0$, так что в случае существования нестационарного интеграла определитель $|\mathfrak{B}|$ равен нулю, и поэтому нельзя прямо применить метод, развитый выше. Условия того, что $x(t, \xi, \alpha)$ будет периодическим решением с периодом τ^*, даются m уравнениями (13). Положим опять $\xi_m = \xi_m^*$, и тогда нужно определить еще $m-1$ неизвестных $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$, удовлетворяющих этим m уравнениям. Разрешим прежде всего $m-1$ уравнений

$$\varphi_k(\xi, \alpha) = 0 \quad (k \neq m-1) \tag{24}$$

и выразим $\xi_l - \xi_l^*$ $(l = 1, \ldots, m-1)$ в виде степенных рядов по $\alpha - \alpha^*$, не содержащих постоянных членов, причем предположим, что соответствующий функциональный определитель не равен нулю при $\xi = \xi^*$, $\alpha = \alpha^*$. Соответствующая функциональная матрица $m-1$ порядка $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{C}$ вычеркиванием последнего столбца и предпоследней строки. Тогда при $|\mathfrak{A}| \neq 0$ в окрестности $\alpha = \alpha^*$ уравнения (24) удовлетворяются. Остается показать, что вследствие существования интеграла $\psi(x, \alpha)$ выполняется также и последнее уравнение $\varphi_{m-1}(\xi, \alpha) = 0$. Если образовать с найденными начальными значениями $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и $\xi_m = \xi_m^*$ решение $x = x(t, \xi, \alpha)$, то на этой траектории удовлетворяется уравнение (22). Положим здесь, в частности, $t = \tau^*$ и применим теорему о среднем значении из дифференциального исчисления к функции $\psi(x,\,\alpha)$ и переменной x_{m-1}. Тогда, принимая во внимание уравнения (24), получим

$$0=\psi\bigl[x(\tau^*,\,\xi,\,\alpha),\,\alpha\bigr]-\psi(\xi,\,\alpha)=\psi_{x_{m-1}}(\widetilde{x},\,\alpha)\varphi_{m-1}(\xi,\,\alpha),$$

где $\widetilde{x}_k=\xi_k$ $(k\neq m-1)$, и $\widetilde{x}_{m-1}$ лежит между ξ_{m-1} и $x_{m-1}(\tau^*,\,\xi,\,\alpha)$. Вследствие того что $\psi_{x_{m-1}}(\xi^*,\alpha^*)\neq 0$, будем также иметь $\psi_{x_{m-1}}(\widetilde{x},\alpha)\neq 0$, если только α достаточно близко к α^*; отсюда и получится нужное нам уравнение $\varphi_{m-1}(\xi,\,\alpha)=0$. Этим самым доказано существование периодических решений с периодом τ^* в окрестности α^* в предположении, что $|\mathfrak{A}|\neq 0$.

Будем считать теперь τ параметром и положим $\alpha=\alpha^*$. Если $m-1$ условий периодичности

$$\varphi_k(\tau,\,\xi,\,\alpha^*)=x_k(\tau,\,\xi,\,\alpha^*)-\xi_k=0\quad(k\neq m-1)\tag{25}$$

выполнены, то так же, как и выше, выполняется остающееся условие $\varphi_{m-1}(\tau,\,\xi,\,\alpha^*)=0$. В качестве функционального определителя для $\tau=\tau^*$, $\xi=\xi^*$, очевидно, получим опять $|\mathfrak{A}|$. Следовательно, в предположении $|\mathfrak{A}|\neq 0$ существуют также периодические решения с фиксированным параметром α^* и с любым заданным периодом τ, достаточно близким к τ^*; начальные значения этого решения можно разложить по степеням $\tau-\tau^*$. Для некоторых исследований выгодно ввести вместо τ значение интеграла $\psi(x,\,\alpha)=\gamma$ на рассматриваемой замкнутой траектории как новую переменную. Пусть $\gamma=\gamma^*$ для исходного решения $x=x(t,\,\xi^*,\,\alpha^*)$. Тогда к $m-1$ уравнениям (25) прибавляется еще следующее:

$$\psi(\xi,\,\alpha^*)-\gamma=0.\tag{26}$$

Это будут m уравнений с m неизвестными $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{m-1},\,\tau$. Функциональная матрица этой системы при $\xi=\xi^*$, $\tau=\tau^*$ получается из матрицы $(m+1)$-го порядка

$$\mathfrak{D}=\begin{Vmatrix}\mathfrak{C} & f\\ \psi_x & 0\end{Vmatrix}\tag{27}$$

вычеркиванием m-го столбца и $(m-1)$-й строки. Вследствие условий (17), (21) и (23) $(m-1)$-я строка в $\mathfrak{D}$ не зависит от остальных; то же самое имеет место для m-го столбца. Следовательно, наш определитель обязательно отличен от нуля, если матрица $\mathfrak{D}$ имеет ранг m. При этом предположении вышеприведенную систему уравнений можно разрешить в окрестности $\gamma = \gamma^*$ разложением в ряды разностей $\xi_k - \xi_k^*$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ и $\tau - \tau^*$ по степеням $\gamma - \gamma^*$. Выполнение условия $\varphi_{m-1}(\tau, \xi, \alpha^*) = 0$ и периодичность обусловлены существованием интеграла.

Наконец, если α будет переменной, а $\gamma = \gamma^*$ фиксировано, при тех же предположениях получаем существование соответствующих разложений по степеням $\alpha - \alpha^*$. Тогда, следовательно, для каждого α вблизи α^* существует в окрестности исходного решения периодическое решение с одним и тем же значением постоянной интеграла $\gamma = \gamma^*$.

Для действительного определения тех разложений в степенные ряды, о которых шла речь, необходимо, разумеется, знать полное решение $x(t, \xi)$ в окрестности $\xi = \xi^*$, $t = \tau^*$; в то время как для того, чтобы проверить, отличен ли соответствующий функциональный определитель от нуля, требуется только интегрирование линейной системы (7) с использованием уже известного исходного периодического решения.

Если будет известно большее число интегралов, не зависящих от t, то метод можно соответствующим образом изменить, но не очень сильно.

Применим теперь метод малого параметра к ограниченной задаче трех тел. Пусть точки P_1, P_2, P_3 имеют массы $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$, $m_3 = 0$, где $0 < \mu < 1$ и пусть P_1, P_2 вращаются с угловой скоростью, равной единице, вокруг общего центра инерции. Введем, как в § 17, вращающуюся систему координат, относительно которой P_1, P_2 и P_3 будут иметь координаты $(1-\mu, 0)$, $(-\mu, 0)$ и (x, y). Если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \dot{x}$ и $x_4 = \dot{y}$, то система (17; 3) даст следующие уравнения движения точки P_3:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = 2x_4 + x_1 + F_{x_1}, \quad \dot{x}_4 = -2x_3 + x_2 + F_{x_2}, \tag{28}$$

где

$$F = (1-\mu)\big[(x_1+\mu)^2 + x_2^2\big]^{-1/2} + \mu\big[(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2\big]^{-1/2}. \tag{29}$$

Эта система имеет ту же форму, что и система (1), с параметром $\alpha = \mu$ и с $m = 4$. При $\mu = 0$ масса точки P_1 обращается в нуль и формулы

$$\begin{gathered} x_1 = rc, \quad x_2 = rs, \quad x_3 = -r\omega s, \quad x_4 = r\omega c, \\ c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t) \end{gathered} \tag{30}$$

дают тогда при действительной постоянной $\omega \neq 0$ периодическое решение, если $r^3(\omega+1)^2 = 1$. Период этого решения $\tau^* = 2\pi|\omega|^{-1}$. Это решение выберем за исходное, полагая $\alpha^* = 0$. При этом предположим, что $r \neq 1$; в противном случае точка P_3 должна была бы пройти через место расположения $(1,\, 0)$ точки P_1, а это невозможно, т. к. точка $x_1 = 1-\mu$, $x_2 = 0$ будет особой точкой системы (28) при $\mu \neq 0$, и эта точка стремится к P_1 при $\mu \to 0$. Точно так же следует предположить, что $\omega \neq -2,\, -1,\, 0$. Нам надо установить, существуют ли периодические решения системы (28) при достаточно малых положительных значениях μ.

Если через $f_k(x,\, \mu)$ $(k = 1,\, \ldots,\, 4)$ обозначить правые части системы (28) и через ξ_k^* обозначить начальные значения $\xi_1^* = r$, $\xi_2^* = \xi_3^* = 0$, $\xi_4^* = r\omega$ исходного решения при $t = 0$, то $f_3(\xi^*,\, 0) = -r\omega^2 \neq 0$. Следовательно, вместо $f_m \neq 0$ будем иметь $f_3 \neq 0$. Для применения метода малого параметра необходимо найти решение уравнений в вариациях (7). В нашем случае они интегрируются в элементарных функциях, причем для интегрирования нужно сделать подстановку

$$y_{2k-1} = x_{2k-1}c + x_{2k}s, \quad y_{2k} = -x_{2k-1}s + x_{2k}c \quad (k = 1,\ 2).$$

Образуем теперь матрицу $\mathfrak{C} = \mathfrak{X} - \mathfrak{E}$, и отсюда в соответствии с равенством (20) матрицу $\mathfrak{B}$, но при этом заменим на f третий столбец матрицы $\mathfrak{C}$ вместо последнего столбца. Вычисление показывает, что $|\mathfrak{B}| = 0$, поэтому первый метод применять нельзя. Причина этому — существование для ограниченной задачи трех тел так называемого интеграла Якоби

$$\psi(x,\, \mu) = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2) - F. \tag{31}$$

Далее, $\psi_{x_4}(\xi^*,\, 0) = r\omega \neq 0$, таким образом мы вместо $\psi_{x_{m-1}} \neq 0$ имеем $\psi_{x_4} \neq 0$. Если образовать квадратную матрицу третьего порядка $\mathfrak{A}$ вычеркиванием третьего столбца и четвертой строки матрицы $\mathfrak{C}$, то вычисление дает

$$|\mathfrak{A}| = 24\pi \sin^2 \frac{\pi}{\omega}.$$

Чтобы этот определитель не был равен нулю, нужно потребовать, кроме $\omega \neq -2,\, -1,\, 0$, также выполнения условия

$$\omega \neq g^{-1} \quad (g = \pm 1,\, \pm 2, \ldots). \tag{32}$$

Для радиуса r исходного решения соответственно получаются значения $(g^{-1}+1)^{-2/3}$ с точкой накопления 1, которая исключается из рассмотрения. Следовательно, при этих предположениях для достаточно малых положительных μ существуют периодические решения системы (28) с периодом $\tau = \tau^* = 2\pi|\omega|^{-1}$.

Далее, пусть $\mu = \mu^*$ будет достаточно малым положительным числом, для которого имеется периодическое решение системы (28) с периодом $\tau = \tau^* = 2\pi|\omega|^{-1}$ и пусть γ^* есть соответствующее значение постоянной интеграла Якоби (31). Покажем, используя метод Пуанкаре, что для каждого достаточно близкого к γ^* значения γ будут существовать периодические решения с периодом, близким к τ^*. Для этого исследуем теперь ранг квадратной матрицы пятого порядка $\mathfrak{D}$, определенной равенством (27). Если вычеркнуть в $\mathfrak{D}$ третий столбец и четвертую строку, то соответствующий минор при $\xi = \xi^*$, $\tau = \tau^*$, $\mu = 0$ имеет значение $4r^2\omega^3 \sin^2 \frac{\pi}{\omega}$, которое не равно нулю, если выполняется условие (32). Если теперь при фиксированном ω выбрать положительное число μ^* достаточно малым, то ранг матрицы $\mathfrak{D}$ при $\mu = \mu^*$ на рассматриваемом периодическом решении равен 4. Следовательно, для каждого такого значения μ^* существует семейство периодических решений, зависящее от γ; период τ этих решений может быть разложен в окрестности γ^* по степеням $\gamma - \gamma^*$, и при $\gamma = \gamma^*$ он имеет исходное значение τ^*. Таким образом, исходя из $\mu = 0$ и кругового решения с периодом $\tau^* = 2\pi|\omega|^{-1}$ ($\omega \neq 0,\ -2,\ g^{-1}$), нам удается найти при малых положительных μ сначала периодические решения системы (28) с тем же самым периодом и затем после фиксирования μ удается найти семейство периодических решений, зависящих от параметра γ, причем период этих решений τ, вообще говоря, не равен τ^*.

Метод малого параметра дает периодические решения только для достаточно малой окрестности значений γ. Интересно было бы изучить поведение решений при аналитическом продолжении по γ. Рассмотрим только случай системы Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, n), \tag{33}$$

для которой $m = 2n$; тогда $\psi = E(x,\, y)$ будет интегралом этой системы. В частности, при $n = 2$ и $y_1 = x_3 - x_2$, $y_2 = x_4 + x_1$ получается система (28), для которой ψ определяется выражением (31). Пусть теперь G есть область действительного пространства $(x,\, y)$, в которой функция Гамильтона E регулярна и не имеет стационарных точек. Будем исходить из периодического решения C, лежащего в G, которое к тому же не является равновесным. На этом решении интеграл $\psi = E$ также не будет нигде стационарным. Пусть ранг соответствующей матрицы $\mathfrak{D}$, определенной равенством (27), есть m. Если обозначить через γ^* значение параметра $E = \gamma$ для заданного решения, то метод малого параметра дает семейство периодических решений C_γ, зависящее от параметра γ, начальные значения которых $x = \xi$, $y = \eta$ и период τ можно разложить по степеням $\gamma - \gamma^*$ в окрестности γ^*. При этом C_{γ^*} будет исходной кривой семейства C, и для достаточно малых по абсолютной величине $\gamma - \gamma^*$ кривая C_γ лежит целиком в G. Повторно применяя метод малого параметра, продолжим аналитически это решение вдоль действительной оси γ. При этом предположим, что все решения C_γ продолжены на весь интервал $\gamma^* \leqslant \gamma < \gamma_0$, и все они лежат в G. Исследуем поведение C_γ при $\gamma \to \gamma_0$. Если для каждой замкнутой ограниченной подобласти H области G существует число $\varepsilon > 0$, такое, что при условии $\gamma_0 - \varepsilon < \gamma < \gamma_0$ никакая C_γ уже не лежит целиком в H, то мы будем говорить, что C_γ покидает G при $\gamma \to \gamma_0$. Пусть рассматривается не этот случай. Тогда по теореме о накоплении можно найти такое H и такую последовательность $\gamma \to \gamma_0$, что все C_γ будут целиком лежать в H и соответствующие начальные значения ξ, η будут сходиться к точке ξ_0, η_0 области H. При этом возможен случай, когда для каждой такой последовательности период $\tau = \tau_\gamma$, соответствующий кривой C_γ, стремится к ∞. Этот случай мы также исключаем из рассмотрения. Тогда можно найти такую подпоследовательность, для которой τ_γ стремится к конечному предельному значению τ_{γ_0}. Величина τ_{γ_0} может быть нулем, так как в противном случае вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных точка ξ_0, η_0 соответствовала бы равновесному решению системы (33), в то время как было предположено, что из области G исключены стационарные точки интеграла E. Тогда вследствие тех же самых теорем непрерывности решения C_γ, принадлежащие названной последовательности, стремятся к решению C_{γ_0} с начальными значениями ξ_0, η_0 и периодом τ_{γ_0}, и это решение, во всяком случае, лежит в H, а следовательно, и в G.

Если ранг матрицы $\mathfrak{D}$ для решения C_{γ_0} равен опять m, то решение C_γ можно, очевидно, продолжить за γ_0. Остается рассмотреть случай, когда ранг меньше m. Поэтому нужно исследовать при старых обозначениях m аналитических уравнений (25) и (26) вблизи $\gamma = \gamma_0$, τ, ξ_k $(k \neq m-1)$, для которых функциональный определитель равен нулю тождественно относительно τ и ξ_k, но в то же самое время при $\gamma \to \gamma_0$ имеется однопараметрическое семейство действительных решений. Тогда путем использования леммы Вейерштрасса можно показать, что существует решение в виде рядов по степеням $(\gamma_0 - \gamma)^{1/p}$ с действительными коэффициентами, где p есть выбранное подходящим образом наименьшее натуральное число. Следовательно, в этом случае имеется точка ветвления порядка $p-1$, и решение можно продолжить и при $\gamma = \gamma_0$. Если p нечетное, то для $\gamma > \gamma_0$ получим опять действительные значения рядов для τ, ξ_k. Напротив, если p четное, то корень $(\gamma_0 - \gamma)^{1/p}$ имеет при $\gamma < \gamma_0$ два различных действительных значения. Следовательно, если в последнем случае γ устремить к γ_0 по другой действительной ветви $(\gamma_0 - \gamma)^{1/p}$, то получится второе семейство периодических решений, которое отлично от первоначального. Поэтому в последнем случае также можно построить аналитическое продолжение решений.

Аналогично можно рассмотреть случай, когда γ убывает от значения γ^*. С другой стороны, можно опять начать процесс продолжения при γ_0 и получить в данном случае другие точки ветвления $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ при действительном продолжении решения в интервале от γ_{k-1} до γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Такое продолжение будет возможным, если не встретится какой-нибудь исключенный из рассмотрения случай, т. е. либо если C_γ покинет область G, либо если τ_γ будет неограниченно возрастать.

Для ограниченной задачи трех тел в качестве G можно выбрать пространство всех действительных x_1, x_2, y_1 и y_2, из которого особые точки $x_1 = -\mu$ и $x_2 = 0$, а также пять стационарных точек функции E выброшены. Если траектория C_γ при $\gamma \to \gamma_1$ покидает область G, то это означает, что выброшенные точки являются точками накопления точек C_γ. Для стационарных точек функции E предельным переходом из C_γ получаем равновесные решения. Для особых точек известно соответствующее регуляризирующее преобразование, которое дает в пределе траектории столкновения и показывает, что и здесь можно построить аналитическое продолжение по γ. Процесс продолжения периодических решений ограниченной задачи трех тел Стремгреном и его сотрудниками был осуществлен численно. Встречающиеся при этом теоретические вопросы подробно разработаны Винтнером [2].

§ 22. Метод неподвижной точки

Нижеследующий метод отыскания периодических решений также берет начало в работах Пуанкаре. Рассмотрим опять систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

которая теперь не зависит от параметра. Пусть функции $f_k(x)$ будут регулярными в области G действительного x-пространства и пусть $x_k(t, \xi)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — решение с начальными значениями $x_k(0, \xi) = \xi_k$. Пусть $x(t, \xi^*)$ при $\xi = \xi^*$ будет периодическим решением, которое целиком лежит в G и не является равновесным. Пусть период этого решения есть $\tau^* > 0$. Так как не все $f_k(\xi^*)$ равны нулю, то можно предположить, что $f_m(\xi^*) \neq 0$. Тогда периодическое решение $x(t, \xi^*)$ пересекает плоскость $x_m = \xi_m^*$ в моменты $t = 0$ и $t = \tau^*$ в точке $x = \xi^*$. Изменим теперь немного начальные значения ξ_k в плоскости $\xi_m = \xi_m^*$ так, чтобы соответствующее решение $x(t, \xi)$ пересекало плоскость $x_m = \xi_m^*$ в момент $t = 0$, а также в момент $t = \tau$, который близок к τ^*. Тогда вследствие теорем о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных имеет место отображение окрестности точки $x = \xi^*$ в плоскости $x_m = \xi_m^*$ на некоторую окрестность этой же точки, причем периодическое решение соответствует неподвижной точке.

Обобщим это рассмотрение. Именно, исходное решение $x(t, \xi^*)$ будем предполагать незамкнутым, но допустим, что оно вторично пересекает плоскость $x_m = \xi_m^*$ в момент $t = \tau^* > 0$. Это означает, что $x_m(\tau^*, \xi^*) = \xi_m^*$ и $f_m\big[x(\tau^*, \xi^*)\big] \neq 0$. Кроме того, будем считать, что решение $x(t, \xi^*)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau^*$ целиком лежит в G. Тогда решения $x(t, \xi)$, соответствующие близким к ξ_k $(k = 1, \ldots, m-1)$ и $\xi_m = \xi_m^*$ начальным значениям, пересекают плоскость $x_m = \xi_m^*$ в момент $t = \tau$, который мало отличается от τ^*, если ξ достаточно близко к ξ^*. Таким путем мы установим аналитическое отображение окрестности точки ξ^* в плоскости $x_m = \xi_m^*$ на окрестность точки $x(\tau^*, \xi^*)$ в той же самой плоскости.

Это рассуждение можно далее обобщить, считая, что концевые точки ξ^*, $x(\tau^*, \xi^*)$ отрезка траектории $x(t, \xi^*)$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau^*)$, лежащего в G, расположены на каких-нибудь двух гладких поверхностных элементах $m - 1$ измерений, которые не касаются самой траектории. Предположим вначале без доказательства, что в G существует такой участок гладкой поверхности F, что для всех точек ξ, принадлежащих F, решение $x(t, \xi)$ лежит целиком в G и встречает F при $t > 0$ по крайней мере еще один раз, и притом каждый раз действительно его пересекает. Пусть $t = \tau > 0$ будет первым моментом, когда $x(t, \xi)$ опять встречает F, тогда соответствие ξ и $x(\tau, \xi) = S\xi$ определяет топологическое отображение S поверхности F в себя. Если решение $x(t, \xi)$

является периодическим, то должно существовать такое натуральное число n, что $S^n\xi = \xi$, и тогда, следовательно, ξ будет неподвижной точкой отображения S^n при соответствующем n. Поэтому нахождение периодических решений сводится к определению неподвижных точек для итерированных преобразований, исходящих из S. Как показывает простой пример аналитического отображения S соответствующей поверхности в себя, при этом может случиться, что все S^n не содержат неподвижных точек. Пуанкаре показал, что существование неподвижных точек S обеспечено уже при весьма простых дополнительных предположениях; эти предположения суть следующие. Пусть F будет плоским кольцом, которому принадлежат также обе границы C_1 и C_2. Пусть соответствие $\xi \to S\xi$ дает топологическое сохраняющее объем отображение F на себя, которое переводит обе границы области в себя. Построим на указанном кольце непрерывную функцию $\varphi(\xi)$, которая представляет величину угла между радиусами, направленными в точку ξ и в точку $S\xi$. Это определение однозначно с точностью до кратных 2π. Мы предположим также, что $\varphi(\xi) \geqslant 0$ на C_1 и $\varphi(\xi) \leqslant 0$ на C_2; это, очевидно, означает, что обе границы при преобразовании вращаются в противоположных направлениях. При таких предположениях, как заметил Пуанкаре [1], существуют по крайней мере две неподвижные точки преобразования S. Впервые доказательство этого утверждения было дано уже после смерти Пуанкаре Биркгофом [2]. Теорема о неподвижной точке представляет интерес и для ограниченной задачи трех тел, так как для достаточно малых значений параметра μ и при фиксированном значении постоянной Якоби γ всегда можно найти участок поверхности F с требуемыми свойствами; это также утверждал Пуанкаре и доказал позднее Биркгоф. Далее, Пуанкаре предполагал, что из его теоремы следует существование по крайней мере двух периодических решений ограниченной задачи трех тел для произвольного μ, расположенного в интервале $0 < \mu < 1$; но до сих пор не удается даже доказать вообще существование нужных участков поверхностей F. Мы не будем входить в подробности теоремы о неподвижной точке Пуанкаре, так как мы будем подробно рассматривать родственную ей теорему Биркгофа, которая кажется более полезной для приложений.

Предварительно исследуем подробнее условие сохранения объема. Предположим, что для решений системы (1) $x(t, \xi)$ отображение $\xi \to x(t, \xi)$ будет сохранять объем при всех t. Как уже было показано в предыдущем параграфе при выводе формулы (19; 10), условие

$$\sum_{k=1}^{m} f_{kx_k} = 0 \tag{2}$$

будет для этого необходимым и достаточным. Предположим опять, что $f_m(\xi^*) \neq 0$ и что решение $x(t, \xi^*)$, лежащее в G, пересекает еще раз плоскость $x_m = \xi_m^*$ при $t = \tau^* > 0$. Рассмотрим на плоскости $x_m = \xi_m^*$ достаточно малую окрестность U точки ξ^* и проследим за кривыми, выходящими из U в момент $t = 0$. Тогда через промежуток времени, близкий к τ^*, получится еще одно пересечение с указанной плоскостью. Новые точки пересечения траектории образуют на плоскости $x_m = \xi_m^*$ окрестность U_1 точки $x(\tau^*, \xi^*)$, которая при вышеупомянутом отображении будет образом U. Обозначим, далее, через B (соответственно через B_1) для достаточно малого $t_0 > 0$ области в G, которые определяются условиями $x = x(t, \xi)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $\xi \in U$ (соответственно $\in U_1$). Образно говоря, B и B_1 суть цилиндры с основаниями U и U_1. Рассмотрим теперь трубку траекторий R, т.е. множество, которое образовано траекториями, соединяющими U и U_1. Если продвинуть каждую точку трубки R вдоль проходящей через нее линии тока в соответствии с уравнениями движения (1), то R по прошествии времени t_0 перейдет в область $R + B_1 - B$. Но из сохранения объема следует, что R и $R + B_1 - B$, а также B и B_1 имеют одинаковые m-мерные объемы. Вводя элемент объема $dx_1 \ldots dx_m = dx$, будем иметь

$$\int_B dx = \int_{B_1} dx. \tag{3}$$

Если ввести подстановкой $x_k = x_k(t, \xi)$ $(k = 1, \ldots, m;\ \xi_m = \xi_m^*)$ вместо $x_1, \ldots, x_m$ новые переменные интегрирования $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и t, то функциональная матрица имеет строки $x_{k\xi_l}$ $(l = 1, \ldots, m-1)$, f_k для $k = 1, \ldots, m$. Соответствующий функциональный определитель имеет при $t = 0$ значение $f_m(\xi) \neq 0$, так как при $t = 0$ квадратная матрица порядка m имеет вид $\|x_{k\xi_l}\| = \mathfrak{E}$. Разделив равенство (3) на t_0 и переходя к пределу при $t_0 \to 0$, получим

$$\int_U f_m(\xi) d\xi = \int_{U_1} f_m(\xi) d\xi \quad (d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}).$$

Допустим, кроме того, что $\psi(x)$ есть интеграл системы (1), не содержащий явно времени, и что производная $\psi_{x_{m-1}}$ отлична от нуля на U и на U_1. Тогда значение $\psi(x)=\gamma$ на каждой траектории является постоянным. Если подстановкой $\psi(\xi)=\gamma$ ввести вместо ξ_{m-1} новую переменную γ, то

$$\psi_{x_{m-1}}(\xi)d\xi_{m-1}=d\gamma.$$

В частности, пусть U будет произведением $(m-2)$-мерной окрестности F точки $\xi_k=\xi_k^*$ $(k=1,\,\ldots,\,m-2)$ и интервала, содержащего точку $\psi(\xi^*)=\gamma^*$. Вследствие инвариантности $\psi(x)$, этот интервал остается неизменным при отображении U на U_1, в то время как F для $\psi(\xi)=\gamma$ имеет образ $F_1=F_1(\gamma)$. Если еще положить

$$g=g(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{m-2},\,\gamma)=\frac{f_m(\xi)}{\psi_{x_{m-1}}(\xi)}\quad(\xi_m=\xi_m^*),$$

то

$$\int\limits_F f\,dv=\int\limits_{F_1} g\,dv\quad(dv=d\xi_1,\,\ldots,\,d\xi_{m-2}).\tag{4}$$

Для системы Гамильтона

$$\dot x_k=E_{y_k},\quad \dot y_k=-E_{x_k}\quad(k=1,\,\ldots,\,n).$$

Имеем $m=2n$, и условия (2) выполняются. Затем, если взять в качестве интеграла $\psi(x,\,y)=E(x,\,y)$ и при соответствующей нумерации координат положить $f_m=-E_{x_n}$, $\psi_{x_n}=E_{x_n}$, то $g=-1$. Следовательно, в силу равенства (4) при отображении F на F_1 объем сохраняется. Пусть теперь, в частности, траектория, соответствующая начальным значениям $x=\xi^*$, $y=\eta^*$, замкнута и имеет период τ^*. Тогда в предположении $E_{x_n}(\xi^*,\,\eta^*)\neq 0$ из уравнений

$$y_n(t,\,\xi,\,\eta)=\eta_n^*,\quad \eta_n=\eta_n^*,\quad E(\xi,\,\eta)=E(\xi^*,\,\eta^*)$$

путем исключения t, ξ_n, η_n получается аналитическое преобразование

$$\xi_k,\,\eta_k\to x_k(t,\,\xi,\,\eta),\,y_k(t,\,\xi,\,\eta)\quad(k=1,\,\ldots,\,n-1),\tag{5}$$

сохраняющее объем в окрестности неподвижной точки ξ_k^*, η_k^*. Если вместо инвариантности объема, выраженной равенством (3), использовать аналогичное свойство некоторых других дифференциальных выражений, введенных Пуанкаре [3], то удается даже доказать, что преобразование (5) будет каноническим. Для случая $n = 2$ это утверждение равносильно уже доказанному сохранению площади. В дальнейшем мы ограничимся случаем $n = 2$, в котором уже содержатся все существенные трудности общего исследования. В следующем параграфе мы рассмотрим аналитическое преобразование, сохраняющее объем.

§ 23. Аналитические преобразования, сохраняющие объем

Рассмотрим преобразование в плоскости (x, y), которое является аналитическим в окрестности некоторой неподвижной точки. Так как без ограничения общности можно принять эту точку за начало координат, то преобразование запишется в виде

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y), \tag{1}$$

где

$$f(x, y) = ax + by + \ldots, \quad g(x, y) = cx + dy + \ldots \tag{2}$$

будут степенными рядами с действительными коэффициентами, не содержащими постоянных членов. Сначала, так же как в § 14, будем рассматривать формальные ряды, не обращая внимания на их сходимость; при этом коэффициенты могут быть произвольными комплексными числами, а x, y рассматриваются как неизвестные. Если предположить еще, что $ad-bc \neq 0$, то тогда все преобразования (1) образуют группу Γ. Эта группа имеет своей подгруппой множество Δ всех тех преобразований, для которых уравнение

$$f_x g_y - f_y g_x = 1$$

справедливо в том смысле, что оно является тождеством относительно степенных рядов; это условие можно рассматривать также как условие сохранения объема. Группа Γ_0 (соответственно Δ_0), которая содержит только сходящиеся в какой-нибудь окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, ряды из Γ (соответственно из Δ) есть опять подгруппа Γ (соответственно Δ).

Если ввести векторы-столбцы $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, то формальное преобразование (1) можно записать в символической форме следующим образом:

$$z_1 = Sz. \tag{3}$$

Сделаем теперь одновременно замену переменных

$$x = \varphi(\xi,\, \eta) = \alpha\xi + \beta\eta + \ldots, \qquad y = \psi(\xi,\, \eta) = \gamma\xi + \delta\eta + \ldots,$$
$$x_1 = \varphi(\xi_1,\, \eta_1), \qquad y_1 = \varphi(\xi_1,\, \eta_1)$$

при условии $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, которую можно записать в символической форме

$$z = C\zeta, \quad z_1 = C\zeta_1, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \zeta_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}.$$

При этом сначала φ и ψ будут формальными степенными рядами, не содержащими постоянных членов. Пусть S сохраняет объем; мы будем рассматривать только те подстановки C, для которых выполняется дополнительное условие

$$\varphi_\xi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi_\xi = \alpha\delta - \beta\gamma. \tag{4}$$

Легко показать, что каждая такая подстановка может быть составлена из одной линейной и одной сохраняющей объем подстановки. Вследствие $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ для подстановки C существует обратная C^{-1}; тогда (3) переходит в

$$\zeta_1 = C^{-1}z_1 = C^{-1}SC\zeta = T\zeta, \quad T = C^{-1}SC.$$

Тогда преобразование T входит в группу Γ и соответственно S входит в Δ. Впрочем, легко заметить, что если подстановка C не удовлетворяет условию (4), то не для каждого сохраняющего объем преобразования S преобразование $C^{-1}SC$ будет также сохранять объем. Цель этого параграфа и заключается в том, чтобы при заданном S соответствующим подбором C установить нормальную форму для T [1].

Прежде всего переведем в нормальную форму линейной подстановкой линейные члены в (1). Обозначим матрицы коэффициентов линейных членов Sz, $C\zeta$ и $T\zeta$ через $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{T}$, тогда

$$\mathfrak{S} = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}, \mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}, \mathfrak{T} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C},$$
$$|\mathfrak{S} - \lambda\mathfrak{E}| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc,$$

и для собственных значений λ и μ матрицы $\mathfrak{S}$ выполняются условия $\lambda + \mu = a + d$, $\lambda\mu = ad - bc$. Если $\mathfrak{S}$ сохраняет площадь, то, в частности,

$ad - bc = 1$, поэтому $\lambda\mu = 1$. Величины a, b, c и d можно предполагать действительными; тогда могут представиться следующие три случая. В гиперболическом случае λ, μ будут действительными и различными; в параболическом случае $\lambda = \mu$; в эллиптическом случае $\overline{\lambda} = \mu \neq \lambda$. В дальнейшем ради упрощения исключим параболический случай, т. е. будем считать $\lambda \neq \mu$. Тогда $\mathfrak{C}$ можно определить так, чтобы $\mathfrak{T}$ имела нормальную форму

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{Vmatrix}.$$

При этом в гиперболическом случае $\mathfrak{C}$ можно выбрать действительной, в то время как в эллиптическом случае оба столбца $\mathfrak{C}$ можно взять комплексно сопряженными.

После выполнения вспомогательной линейной подстановки $z = \mathfrak{C}\zeta$ преобразование $z_1 = Sz$ переходит в следующее:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 = T\zeta, \quad \xi_1 = p(\xi, \eta) = \lambda\xi + \ldots, \\ \eta_1 = q(\xi, \eta) = \mu\eta + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если S действительно, то все коэффициенты функций f и g действительны, так что T в гиперболическом случае также действительно, в то время как в эллиптическом случае выполняется соотношение

$$\overline{p}(\xi, \eta) = q(\eta, \xi). \tag{6}$$

Здесь $\overline{p}$ есть степенной ряд, который получается из степенного ряда p заменой всех его коэффициентов на комплексно сопряженные. Итак, преобразованию (1) линейной подстановкой можно придать форму (5), и T принадлежит группе Γ, а S — подгруппе Δ. При этом возможность сходимости f и g сохраняется, так что тогда T принадлежит Γ_0 (соответственно Δ_0), если это выполняется для S. Если вместо ζ и ζ_1 опять написать z и z_1, тогда

$$\left.\begin{aligned} z_1 = Tz, \quad x_1 = p(x, y) = \lambda x + \sum_{p=2}^{\infty} p_k, \\ y_1 = q(x, y) = \mu y + \sum_{k=2}^{\infty} q_k, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причем p_k, q_k суть однородные многочлены относительно x и y степени k. Подвергнем теперь T произвольному нелинейному преобразованию вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(\xi,\,\eta) = \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k, \\ y &= \psi(\xi,\,\eta) = \eta + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k, \\ z &= C\zeta, \quad z_1 = C\zeta_1; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где φ_k и ψ_k опять являются однородными многочленами степени k по ξ и η. В этой подстановке линейные члены оставлены неизменными, так как линейная часть преобразования (7) имеет уже нормальную форму.

Прежде всего предположим, что условия

$$\lambda^p \mu^q \neq \lambda, \quad \lambda^p \mu^q \neq \mu \tag{9}$$

выполняются для всех пар целых p и q, для которых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q > 1$. Покажем, что тогда существует единственная подстановка вида (8), для которой преобразование $U = C^{-1}TC$ имеет нормальную форму

$$\xi_1 = \lambda\xi, \quad \eta_1 = \mu\eta. \tag{10}$$

Доказательство проведем сравнением коэффициентов. Если требование $CU = TC$ выполнено, то, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\lambda\xi,\,\mu\eta) &= p\bigl[\varphi(\xi,\,\eta),\,\psi(\xi,\,\eta)\bigr], \\ \psi(\lambda\xi,\,\mu\eta) &= q\bigl[\varphi(\xi,\,\eta),\,\psi(\xi,\,\eta)\bigr]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если внести сюда степенные ряды из равенств (7) и (8), то коэффициенты линейных членов в обоих частях одинаковы. Допустим, что все многочлены φ_l и ψ_l $(l = 2,\,\ldots,\,k-1)$ для некоторого $k > 1$ уже однозначно определены с помощью условия, что в уравнениях (11) коэффициенты всех членов степени меньшей, чем k-я совпадают. Это верно для $k = 2$; остается доказать, что если это верно для k, то верно также и для $k + 1$. Сравнение членов k-й степени в уравнениях (11) дает условия

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(\lambda\xi,\,\mu\eta) &= \lambda\varphi_k(\xi,\,\eta) + \ldots, \\ \psi_k(\lambda\xi,\,\mu\eta) &= \mu\psi_k(\xi,\,\eta) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где не написанные явно члены являются однородными многочленами степени k, коэффициенты которых уже известны. Положим

$$\varphi_k(\xi,\,\eta)=\sum_{l=0}^{k}a_l\xi^{k-l}\eta^l,\quad \psi_k(\xi,\,\eta)=\sum_{l=0}^{k}b_l\xi^{k-l}\eta^l, \tag{13}$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k(\lambda\xi,\,\mu\eta)-\lambda\varphi_k(\xi,\,\eta)&=\sum_{l=0}^{k}a_l(\lambda^{k-l}\mu^l-\lambda)\xi^{k-l}\eta^l,\\ \psi_k(\lambda\xi,\,\mu\eta)-\mu\psi_k(\xi,\,\eta)&=\sum_{l=0}^{k}b_l(\lambda^{k-l}\mu^l-\mu)\xi^{k-l}\eta^l.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Так как вследствие условий (9) все выражения $\lambda^{k-l}\mu^l-\lambda$, $\lambda^{k-l}\mu^l-\mu$ отличны от нуля, то действительно возможно выбрать коэффициенты a_l и b_l единственным образом так, чтобы условия (12) удовлетворялись.

Мы ограничимся далее рассмотрением преобразований T, сохраняющих объем. Тогда $\lambda\mu=1$, следовательно, предположение (9) не выполнено. Найдем другую нормальную форму $U=C^{-1}TC$, используя для U вместо преобразования (10) более общую подстановку

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1=u\xi,\quad \eta_1=v\eta,\\ &u=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k}(\xi\eta)^k,\quad v=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k}(\xi\eta)^k\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

с неопределенными коэффициентами α_{2k} и β_{2k}, причем u v будут степенными рядами относительно произведения $\xi\eta=\omega$. Для получения C возьмем опять ряды (8). Вместо уравнений (11) тогда нужно удовлетворить функциональным уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u\xi,\,v\eta)&=p\big[\varphi(\xi,\,\eta),\,\psi(\xi,\,\eta)\big],\\ \psi(u\xi,\,v\eta)&=q\big[\varphi(\xi,\,\eta),\,\psi(\xi,\,\eta)\big].\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Сравнение линейных членов дает

$$\alpha_0=\lambda,\quad \beta_0=\mu. \tag{17}$$

Пусть для нечетных $l>0$ имеем $\alpha_l=\beta_l=0$ и пусть для некоторого $k>1$ путем сравнения коэффициентов при членах, степени которых меньше k, величины φ_l, ψ_l, α_{l-1}, β_{l-1} $(l < k)$ уже определены. Для $k = 2$ это верно. Тогда сравнение членов k-й степени дает условия

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(\lambda\xi,\, \mu\eta) + \alpha_{k-1}(\xi\eta)^{(k-1)/2}\xi = \lambda\varphi_k(\xi,\, \eta) + \ldots, \\ \psi_k(\lambda\xi,\, \mu\eta) + \beta_{k-1}(\xi\eta)^{(k-1)/2}\eta = \mu\psi_k(\xi,\, \eta) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где опять не выписанные явно члены являются однородными многочленами степени k с уже известными коэффициентами. Вследствие равенства $\lambda\mu = 1$ имеем теперь

$$\begin{aligned} \lambda^{k-l}\mu^l - \lambda &= \lambda(\lambda^{k-2l-1} - 1), \\ \lambda^{k-l}\mu^l - \mu &= \lambda^{-1}(\lambda^{k-2l+1} - 1). \end{aligned}$$

Предположим далее, что λ не есть корень из единицы; тогда $\lambda^{k-2l\mp 1} = 1$ только при $k = 2l \mp 1$. Тогда в соответствие с уравнениями (14) и (18) α_{k-1}, β_{k-1}, а также a_l $\left(l \neq \dfrac{k-1}{2}\right)$ и b_l $\left(l \neq \dfrac{k+1}{2}\right)$ могут быть однозначно определены, в то время как для нечетных $k = 2h+1$ коэффициенты a_h и b_{h+1} можно выбирать произвольно. Чтобы определить однозначно коэффициенты, нужно еще предположить, что степенные ряды для

$$\varphi_\xi - \psi_\eta = \sigma(\xi,\, \eta), \quad \varphi_\xi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi_\xi - 1 = \tau(\xi,\, \eta) - 1$$

не содержат степеней $\xi\eta = \omega$. Допустим, что это имеет место для членов степеней ниже $k-1$. При $k = 2$ это утверждение является верным; справедливость утверждения при $k+1$, верного при k четном, получается тривиальным образом. При нечетных $k = 2h+1$ для коэффициентов при ω^h в σ получаются значения $(h+1)(a_h - b_{h+1})$, поэтому

$$a_h = b_{h+1}. \tag{19}$$

Члены степени $k-1$ в τ получаются как $\varphi_{k\xi} + \psi_{k\eta}$ плюс многочлен с уже известными коэффициентами. Чтобы коэффициент при ω^h был равен нулю, $(h+1)(a_h + b_{h+1})$ должно иметь некоторое определенное значение. Тогда с учетом уравнения (19) определяются однозначно и остальные коэффициенты a_h, b_{h+1}.

Таким образом, при заданных условиях найдена такая подстановка C, которая переводит T в нормальную форму $U = C^{-1}TC$, заданную выражением (15). Нужно еще показать, что C сохраняет объем.

Для этого определим в соответствии с преобразованием (15) частные производные

$$\begin{aligned}
\xi_{1\xi} &= u + u_\xi \xi = u + u_\omega \omega,\\
\xi_{1\eta} &= u_\eta \xi = u_\omega \xi^2,\\
\eta_{1\xi} &= v_\xi \eta = v_\omega \eta^2,\\
\eta_{1\eta} &= v + v_\eta \eta = v + v_\omega \omega.
\end{aligned}$$

Из уравнения $CU = TC$, раскрывая функциональный определитель, получаем тождество

$$\tau(u\xi,\, v\eta)\big[(u + u_\omega\omega)(v + v_\omega\omega) - u_\omega v_\omega \omega^2\big] = \tau(\xi,\, \eta), \tag{20}$$

причем при подсчете используется, что T по предположению сохраняет объем. Теперь

$$(u + u_\omega\omega)(v + v_\omega\omega) - u_\omega v_\omega \omega^2 = (uv\omega)_\omega = 1 + \ldots \tag{21}$$

является в силу уравнений (15) и (17) степенным рядом по ω, начинающимся с единицы. В силу уравнений (8) постоянный член $\tau(\xi,\, \eta)$ также равен единице. Мы хотим доказать, воспользовавшись тождеством (20), что $\tau(\xi,\, \eta) = 1$. Пусть степенной ряд

$$\tau(\xi,\, \eta) - 1 = \tau_k(\xi,\, \eta) + \ldots$$

начинается с членов k-го порядка ($k > 0$) и пусть c есть коэффициент при $\omega^{k/2}$ в правой части уравнения (21); тогда сравнение членов k-го порядка в уравнении (20) даст формулу

$$\tau_k(\lambda\xi,\, \mu\eta) + c\,\omega^{k/2} = \tau_k(\xi,\, \eta).$$

Но так как ряд $\tau - 1$ не содержит степеней ω, то $c = 0$; таким образом,

$$\tau_k(\lambda\xi,\, \mu\eta) = \tau_k(\xi,\, \eta).$$

Тогда из

$$\tau_k(\xi,\, \eta) = \sum_{l=0}^{k} \gamma_l \xi^{k-l} \eta^l$$

следует

$$\gamma_l(\lambda^{k-2l} - 1) = 0,$$

поэтому $\gamma_l = 0$ $(2l \neq k)$, так как λ не является корнем из единицы. Но при $2l = k$ также имеем $\gamma_l = 0$, так как тогда $\tau - 1$ не содержит степеней ω. Поэтому действительно $\tau = 1$ и, следовательно, преобразование C сохраняет объем. Вместе с тем из уравнений (20) и (21) опять получается соотношение $(uv\omega)_\omega = 1$, и потому $uv\omega = \omega$, откуда

$$uv = 1. \tag{22}$$

Итак, мы доказали, что сохраняющее объем преобразование T вида (7) посредством подстановки C вида (8), также сохраняющей объем, может быть переведено в нормальную форму $U = C^{-1}TC$ вида (15), если собственное значение λ не есть корень из единицы. Исследуем теперь, насколько C и U определяются через T. Пусть V есть любая подстановка вида (15), сохраняющая объем; тогда $\xi_1 = u_0\xi$ и $\eta_1 = v_0\eta$, причем u_0, v_0 являются степенными рядами по $\omega = \xi\eta$, и

$$(u_0\xi)_\xi(v_0\eta)_\eta - (u_0\xi)_\eta(v_0\eta)_\xi = (u_0v_0\omega)_\omega = 1,$$

откуда следует условие $u_0v_0 = 1$, аналогичное условию (22). Поэтому условие (22) есть необходимое и достаточное условие для сохранения объема при преобразовании (15). При этом можно выбрать для u_0 какой-нибудь степенной ряд по ω, постоянный член которого не равен нулю, и положить $v_0 = u_0^{-1}$. Тогда, очевидно, $\xi_1\eta_1 = \xi\eta$, следовательно, $\xi\eta$ инвариантно при подстановке V. Пусть далее

$$\zeta_1 = V_1\zeta, \quad \xi_1 = u_1\xi, \quad \eta_1 = v_1\eta, \quad u_1v_1 = 1$$

— какая-нибудь вторая подстановка вида V, тогда вследствие инвариантности подстановка V_1V имеет форму

$$\xi_1 = u_1(\omega)u(\omega)\xi, \quad \eta_1 = v_1(\omega)v(\omega)\eta.$$

Отсюда следует, что подстановки V образуют абелеву группу Λ. Если теперь C_0 сохраняет объем и $C_0^{-1}TC_0 = U_0$ также имеет форму (15), то U_0 принадлежит Λ. Положим $C_1 = C_0V$, где V — какой-нибудь элемент группы Λ; тогда получим также $C_1^{-1}TC_1 = U_0$. Так как собственные значения λ и μ матрицы $\mathfrak{S}$ вполне определены их разложениями в ряды, то можно добиться, меняя местами ξ и η, чтобы линейные члены обоих преобразований $\zeta_1 = U\zeta$, $\zeta_1 = U_0\zeta$ совпадали и, следовательно, были равны $\lambda\xi$ и $\mu\eta$. Обозначим через $\mathfrak{C}_0$ матрицу коэффициентов линейных членов $C_0\zeta$; $\mathfrak{C}_0$ будет перестановочной с диагональной матрицей $\mathfrak{T}$. Вследствие $\lambda \neq \mu = \lambda^{-1}$ сама матрица $\mathfrak{C}_0$ будет тогда диагональной. Нужно доказать, что $C_1 = C_0V$ удовлетворяет при соответствующем выборе V поставленным выше условиям для C, которыми C определяется однозначно. Прежде всего постоянный член $\rho = \rho_0 \neq 0$ разложения

$$u_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l \omega^l$$

можно определить однозначно, если потребовать, чтобы C_1 имело форму (8). Все остальные коэффициенты ρ_l $(l > 0)$ еще остаются при этом произвольными. Можно утверждать, что они однозначно определяются рекуррентными формулами при условии, что для степенных рядов $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ соответствующих C_1, разность $\varphi_\xi - \psi_\eta$ не должна содержать членов с ω. Если положить

$$v_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \omega^l,$$

то прежде всего из $u_0v_0 = 1$ следует $\rho_0\sigma_0 = 1$, и затем

$$\rho\sigma_k + \rho^{-1}\rho_k + \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l\sigma_{k-l} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

С другой стороны, если задать ряды, соответствующие C_0:

$$\varphi^*(\xi, \eta) = \rho^{-1}\xi + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k^*,$$

$$\psi^*(\xi, \eta) = \rho\eta + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k^*,$$

то

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi^*(u_0\xi, v_0\eta), \quad \psi(\xi, \eta) = \psi^*(u_0\xi, v_0\eta),$$

таким образом,

$$\varphi_\xi - \psi_\eta = \varphi_\xi^*(u_0\xi, v_0\eta)u_{0\omega}\omega + \varphi_\eta^* v_{0\omega}\eta^2 - \psi_\xi^* u_{0\omega}\xi^2 - \psi_\eta^* v_{0\omega}\omega. \tag{24}$$

Предположим, что для некоторого $k > 0$ величины $\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}$ уже определены с помощью условия, что в правой части уравнения (24) нет членов с $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{k-1}$. Тогда из уравнения (23) $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ получаются с помощью рекуррентных формул однозначно. Приравниванием коэффициентов при ω^k в уравнении (24) нулю получим для $k(\rho^{-1}\rho_k - - \rho\sigma_k)$ заранее установленное известное значение, откуда с помощью уравнения (23) получим, наконец, однозначно ρ_k, и потому сформулированное выше утверждение доказано. Так как вместе с подстановкой C_0V и C_1 также сохраняют объем, то $\tau = \varphi_\xi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi_\xi = 1$, и оно не содержит, в частности, положительных степеней ω. Следовательно, C_1 удовлетворяет всем условиям, установленным для C, что дает $C_0V = = C_1 = C$, $U_0 = U$. Таким образом, мы доказали, что нормальная форма U преобразования T, а следовательно, также преобразования S, определяется однозначно; одновременно мы нашли все сохраняющие объем подстановки, которыми S переводится в U. Наконец, из однозначности U следует, что два преобразования, сохраняющие объем, для которых собственные значения λ и μ не равны корням из единицы, тогда и только тогда могут быть переведены одно в другое с помощью сохраняющей объем подстановки, если они имеют одну и ту же нормальную форму.

Пусть теперь первоначальные ряды f, g преобразования (2) будут действительными, т. е. пусть S действительно; исследуем условия вещественности U и C. В гиперболическом случае T тогда также вещественно; так как $\lambda\mu = 1$, $\lambda \neq \mu$, а λ и μ будут вещественными, то λ заведомо не равно корню из единицы. Далее, из проведенного выше сравнения коэффициентов следует, что U и C также вещественны. Так как $u = \lambda + \ldots$ и $\lambda \neq 0$, то можно единственным способом найти такой степенной ряд

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \omega^k,$$

что

$$u = \pm e^w, \quad v = \pm e^{-w}, \quad \lambda = \pm e^{\gamma_0}.$$

При этом $\gamma_0 \neq 0$, и нормальная форма имеет вид

$$\xi_1 = \pm e^w \xi, \quad \eta_1 = \pm e^{-w}\eta. \tag{25}$$

В эллиптическом случае $\overline{\lambda} = \mu \neq \lambda$ и опять $\lambda_\mu = 1$, следовательно, $|\lambda| = 1$. Мы предположили заранее, что λ не есть корень из единицы, чем параболический случай $\lambda = \mu = \pm 1$ опять исключается. Теперь справедливо условие (6), и из уравнений (16) переходом к комплексно сопряженным коэффициентам получаются формулы

$$\overline{\varphi}(\overline{u}\xi,\, \overline{v}\eta) = q\big[\overline{\psi}(\xi,\, \eta),\, \overline{\varphi}(\xi,\, \eta)\big],$$
$$\overline{\psi}(\overline{u}\xi,\, \overline{v}\eta) = p\big[\overline{\psi}(\xi,\, \eta),\, \overline{\varphi}(\xi,\, \eta)\big].$$

При перестановке ξ и η условие $\xi\eta = \omega$ остается неизменным, следовательно, $\overline{u}$ и $\overline{v}$ также не изменяются. Значит, мы получим решение функциональных уравнений (16), если заменим уже найденное решение u, v, $\varphi(\xi,\, \eta)$, $\psi(\xi,\, \eta)$ на $\overline{v}$, $\overline{u}$, $\overline{\psi}(\eta,\, \xi)$, $\overline{\varphi}(\eta,\, \xi)$. Кроме того, ряды

$$\overline{\psi}(\eta,\, \xi)_\xi - \overline{\varphi}(\eta,\, \xi)_\eta = -\overline{\sigma}(\eta,\, \xi),$$
$$\psi(\overline{\eta},\, \xi)_\xi \varphi(\overline{\eta},\, \xi)_\eta - \overline{\psi}(\eta,\, \xi)_\eta \overline{\varphi}(\eta,\, \xi)_\xi = \overline{\tau}(\eta,\, \xi)$$

не содержат положительных степеней ω, в то время как $\overline{v}$, $\overline{u}$ будут опять рядами только по ω. Из теоремы единственности следует

$$\overline{\varphi}(\eta,\, \xi) = \psi(\xi,\, \eta), \quad \overline{u} = v; \tag{26}$$

принимая во внимание, что $uv = 1$, мы получим

$$u\overline{u} = 1. \tag{27}$$

Если положить

$$\lambda = e^{i\gamma_0}, \quad -\pi < \gamma_0 < \pi, \tag{28}$$

то этим самым степенной ряд

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \omega^k$$

однозначно определяется требованием

$$e^{i\omega} = u, \quad e^{-i\omega} = v.$$

При этом вследствие условия (27) будем иметь

$$e^{i(w-\overline{w})} = 1, \quad w - \overline{w} = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - \overline{\gamma}_k)\omega^k,$$

откуда $w = \overline{w}$ и откуда следует действительность всех γ_k. Итак, нормальная форма S получается в эллиптическом случае следующей:

$$\xi_1 = e^{iw}\xi, \quad \eta_1 = e^{-iw}\eta, \tag{29}$$

причем степенной ряд $w = w(\omega)$ действителен. Чтобы нормальную форму написать для первоначальных вещественных функций, осуществим одновременную линейную подстановку

$$\xi = r + is, \quad \eta = r - is, \quad \xi_1 = r_1 + is_1, \quad \eta_1 = r_1 - is_1. \tag{30}$$

Тогда преобразование (29) переходит в

$$\left.\begin{gathered} r_1 = r\cos w - s\sin w, \quad s_1 = r\sin w + s\cos w, \\ w = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (r^2 + s^2)^k, \end{gathered}\right\} \tag{31}$$

где $\cos w$ и $\sin w$ следует заменить их степенными рядами. Связь с первоначальными неизвестными x, y в преобразовании (1) определяется подстановкой

$$z = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \mathfrak{C} \left\| \begin{matrix} \varphi(\xi,\,\eta) \\ \psi(\xi,\,\eta) \end{matrix} \right\| = \overline{\mathfrak{C}} \left\| \begin{matrix} \psi(\xi,\,\eta) \\ \varphi(\xi,\,\eta) \end{matrix} \right\|.$$

Но так как теперь в силу уравнения (26) справедлива формула $\psi(r + is,\, r - is) = \overline{\varphi}(r - is,\, r + is)$, то очевидно, что переход от r, s к x, y совершается с помощью действительной подстановки с постоянным функциональным определителем $\varepsilon = -2i|\mathfrak{C}| \neq 0$. Так как, кроме того, можно нормированием сделать $|\mathfrak{C}| = i/2$, то можно положить $\varepsilon = 1$, тогда S переведется действительной сохраняющей объем подстановкой в нормальную форму. Следовательно, в предположении, что λ не равно корню из единицы, в гиперболическом и эллиптическом случае для заданного действительного сохраняющего объем преобразования $z_1 = Sz$ можно найти нормальную форму, принадлежащую группе Δ.

Все до сих пор встречавшиеся ряды рассматривались формально без исследования вопроса об их сходимости, и наши формулы являются соотношениями в кольце этих формальных рядов. Предположим теперь, что преобразование S принадлежит Δ_0 и, следовательно, является преобразованием, сохраняющим объем, причем соответствующие ряды сходятся в достаточно малой окрестности начала координат. При первой линейной подстановке $z = \mathfrak{C}\zeta$ сходимость сохраняется. Нужно исследовать, принадлежит ли подстановка C, определенная сравнением коэффициентов в уравнении (16), также к Δ_0, следовательно, сходятся ли найденные ряды $\varphi(\xi,\, \eta)$ и $\psi(\xi,\, \eta)$ в достаточно малой окрестности начала координат. Если ответ на этот вопрос является утвердительным, то тогда нормальная форма $U = C^{-1}TC$, конечно, будет принадлежать Δ_0. Но вопрос о сходимости до сих пор еще не совсем ясен, так как обычный метод мажорант здесь не проходит. В гиперболическом случае решение кажется связанным с поведением аналитических функций $f(x,\, y)$ и $g(x,\, y)$ в целом; все же до сих пор никто не предложил примера, в котором была бы доказана расходимость. В эллиптическом случае такой пример можно построить; удается доказать, что расходимость будет и в общем случае. С другой стороны, тривиален тот факт, что сходимость может иметь место, так как можно определить, например, $T = CUC^{-1}$ с произвольными C, U из Δ_0. До сих пор не существует общего метода для различения случаев сходимости и расходимости функций φ и ψ при заданном S. Нерешенным вопросом является также следующий: всегда ли можно перевести два сохраняющие объем сходящиеся аналитические преобразования из Δ_0 некоторой подстановкой друг в друга, если оба преобразования имеют одну и ту же нормальную форму относительно Δ. В частности, сюда включается также вопрос, всегда ли принадлежит к Δ_0 вместе с T и нормальной формой U также само C.

Рассмотрим теперь нормальные формы при предположении о сходимости. В силу формул (25) в гиперболическом случае $\xi_1\eta_1 = \xi\eta$. Если ξ, η и ξ_1, η_1 будут прямоугольными координатами точек P_0 и P_1, то точка P_0 и ее образ $UP_0 = P_1$ лежат на равносторонней гиперболе, если только P_0 находится в области сходимости ряда w, и эта точка отлична от начала координат. Так как $|\lambda| \neq 1$, то в достаточно малой окрестности G начала координат также и $e^w \neq 1$, поэтому P_0 и P_1 в этой окрестности не совпадают. Если все точки $P_k = UP_{k-1} = U^kP_0$ при $k = 1,\, \ldots,\, n$ также лежат в G, то получится, что они все отличны от P_0. Таким образом, в рассматриваемой окрестности не существует точки, отличной от нулевой, которая была бы неподвижной точкой степени U^n и образы которой при $U,\, \ldots,\, U^{n-1}$ также лежали бы в данной окрестности. Образуя также обратное преобразование U^{-1} и его степени U^l $(l = -1,\, -2,\, \ldots,\,)$, получим, что ни для одной $P_0 \neq (0,\, 0)$ все

$P_k = U^k P_0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$) не лежат в G. Но этот результат можно получить и без использования нормальных форм и притом без предположения о сходимости C, если прямо обратиться к преобразованиям (1) и (2). Вследствие сходимости $f(x, y)$ и $g(x, y)$ в достаточно малом круге $x^2 + y^2 = r^2 \leqslant R^2$ справедливы уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x, y) = ax + by + \vartheta_1 r^2, \\ y_1 &= g(x, y) = cx + dy + \vartheta_2 r^2, \end{aligned} \tag{32}$$

и, соответственно, в круге $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 \leqslant R^2$ для обратных функций справедливы уравнения

$$x = dx_1 - by_1 + \vartheta_3 r^2, \quad y = -cx_1 + ay_1 + \vartheta_4 r^2, \tag{33}$$

причем ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 и ϑ_4 равномерно ограничены. Пусть $0 < \rho \leqslant R$ и пусть для каждого такого ρ существует точка $P_\rho \neq (0, 0)$, такая, что все образы $S^k P_\rho$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ лежат в круге $x^2 + y^2 \leqslant \rho^2$. Тогда то же самое следует для всех предельных точек этой точечной последовательности, т. е. и для ее замыкания H_ρ. Очевидно, $SH_\rho = H_\rho$, т. е. H_ρ инвариантно при S. Пусть теперь $(x, y) = Q_\rho$ есть точка H_ρ, для которой $x^2 + y^2 = r^2$ будет возможно большим. Тогда для $SQ_\rho = (x_1, y_1)$, $S^{-1} Q_\rho = (x_{-1}, y_{-1})$ в соответствии с уравнениями (32) и (33) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} x_1 + x_{-1} &= (a + d)x + (\vartheta_1 + \vartheta_3) r^2, \\ y_1 + y_{-1} &= (a + d)y + (\vartheta_2 + \vartheta_4) r^2, \end{aligned}$$

таким образом,

$$(x_1 + x_{-1})^2 + (y_1 + y_{-1})^2 = (a + d)^2 r^2 + o(r^2) \quad (0 < r \leqslant \rho \to 0);$$

с другой стороны, из неравенства треугольника следует

$$(x_1 + x_{-1})^2 + (y_1 + y_{-1})^2 \leqslant (r_1 + r_{-1})^2 \leqslant 4r^2,$$

где положено $r_{-1}^2 = x_{-1}^2 + y_{-1}^2$. Предельный переход при $\rho \to 0$ даст

$$(a + d)^2 \leqslant 4,$$

и вследствие $a + d = \lambda + \lambda^{-1}$ отсюда следует

$$(\lambda - \lambda^{-1})^2 \leqslant 0,$$

что противоречит предположению, что S является гиперболическим. Поэтому можно найти такой круг $x^2 + y^2 \leqslant \rho^2$ ($\rho > 0$) в области сходимости S и S^{-1}, что никакая точка $P \neq (0,\,0)$ не будет иметь в этом круге всех своих образов $S^k P$ ($k = 0,\,\pm 1,\,\pm 2,\,\ldots$). В частности, не может быть, чтобы образы $S^k P$ при $k = 0,\,\ldots,\,n-1$ лежали в круге и чтобы при этом одновременно выполнялось равенство $S^n P = P$.

Пусть в эллиптическом случае ряд w в преобразовании (31) сходится при $r^2 + s^2 = \rho^2 \leqslant R^2$. Тогда при преобразовании (31) каждый круг радиуса $\leqslant R$ с центром в начале координат переходит сам в себя, поворачиваясь на угол w, зависящий только от радиуса ρ. Если на том же круге лежат неподвижные точки повторенного n раз отображения U^n, то соответствующий угол поворота nw должен быть кратным $2m\pi$ угла 2π, и тогда весь этот круг при отображении U^n переходит сам в себя. Если в степенном ряду w не все коэффициенты γ_1, γ_2, … равны нулю и, следовательно, w не является постоянной, то существует в силу непрерывной зависимости w от радиуса бесконечное множество значений $\rho \leqslant R$, для которых отношение $\frac{w}{2\pi} = \frac{m}{n}$ будет рациональным; тогда каждый такой круг состоит только из неподвижных точек преобразования U^n.

Наиболее интересным является эллиптический случай; мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением только этого случая. В отличие от гиперболического случая для получения результатов здесь существенна нормальная форма и существенна сходимость U. Без предположения о сходимости U не удалось доказать существование инвариантного при преобразовании S однопараметрического семейства кривых, соответствующих упомянутым выше концентрическим окружностям, и надо полагать, что такое семейство вообще в этих условиях не существует. Все же в следующем параграфе будут еще сделаны некоторые выводы в задаче о неподвижной точке без использования нормальных форм. Мы хотим предварительно с помощью сохраняющей объем подстановки, выраженной сходящимися рядами, найти по меньшей мере некоторое приближение к нормальной форме.

Для этой цели мы используем параметрическое представление подстановок из группы Δ, которое получено при исследованиях канонических преобразований в § 3. Для каждой матрицы второго порядка

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix}$$

имеем

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{J}\mathfrak{M} = |\mathfrak{M}|\mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

поэтому функциональная матрица каждого аналитического, сохраняющего объем преобразования будет симплектической. В частности, для подстановки $z = C\zeta$ в уравнениях (8) производные x_ξ в точке $(\xi,\, \eta) = (0,\, 0)$ равны единице, поэтому в силу равенств (3; 4) с помощью порождающей функции $\rho(x,\, \eta)$ можно сделать подстановку

$$y = \rho_x, \quad \xi = \rho_\eta. \tag{34}$$

Отсюда прежде всего следует, что ρ является аналитической функцией в окрестности $x = 0$, $\eta = 0$ и что существует разложение в сходящийся степенной ряд следующего вида:

$$\rho = x\eta + \ldots, \tag{35}$$

где несущественный здесь постоянный член принят равным нулю. В самом деле, предположим, что замена (34) дает также все подстановки, начинающиеся с $x = \xi + \ldots$, $y = \eta + \ldots$, и охваченные группой Δ, содержащей Δ_0, если для ρ все формальные ряды по x, η представлены в форме (35). Без привлечения результатов, изложенных в § 2, это можно представить следующим образом. Если первое уравнение (8) разрешить относительно ξ, то нашу сохраняющую объем подстановку $z = C\zeta$ можно записать в форме

$$\xi = P(x,\, \eta) = x + \ldots, \quad y = Q(x,\, \eta) = \eta + \ldots, \tag{36}$$

где P, Q являются формальными степенными рядами по x, η, причем эти ряды удовлетворяют условиям

$$P\bigl[\varphi(\xi,\, \eta),\, \eta\bigr] = \xi, \quad Q = \bigl[\varphi(\xi,\, \eta),\, \eta\bigr] = \psi(\xi,\, \eta).$$

Отсюда прежде всего следует, что

$$P_x\varphi_\xi = 1, \quad Q_x\varphi_\xi = \psi_\xi, \quad Q_x\varphi_\eta + Q_\eta = \psi_\eta, \tag{37}$$

и вследствие того, что C сохраняет площадь, мы получим также

$$1 = \varphi_\xi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi_\xi = \varphi_\xi Q_\eta, \quad P_x = P_x\varphi_\xi Q_\eta = Q_\eta. \tag{38}$$

Но последнее уравнение дает условие интегрируемости, из которого вытекает существование степенного ряда $\rho(x, y)$ в форме (35) с заданными производными $\rho_x = Q$, $\rho_\eta = P$. При этом в силу уравнений (36) мы получаем представление C в форме (34). Если C при этом действительно, то все коэффициенты разложения ρ получаются действительными числами. Если, наоборот, сделать, замены (34) и (36) с произвольным степенным рядом ρ, имеющим форму (35), то получается $P_x = Q_\eta$ и равенства (37), откуда, очевидно, следует первое уравнение (38). Следовательно, подстановка (34) опять содержится в Δ.

Представим теперь аналитическое, сохраняющее объем преобразование T из уравнений (7) в действительной форме; для этого введем аналогично подстановке (30) вместо x, y новые неизвестные $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2i}(x-y)$. Тогда, вследствие уравнений (38), T переходит в действительное аналитическое преобразование

$$\begin{gathered} z_1 = T^* z, \\ x_1 = x\cos\gamma_0 - y\sin\gamma_0 + \ldots, \\ y_1 = x\sin\gamma_0 + y\cos\gamma_0 + \ldots, \end{gathered}$$

сохраняющее объем, и это можно сделать, как уже было доказано, действительной подстановкой, сохраняющей объем,

$$z = C\zeta, \quad x = \varphi(\xi, \eta) = \xi + \ldots, \quad y = \psi(\xi, \eta) = \eta + \ldots,$$

где в действительную нормальную форму (31) вместо r, s введены ξ, η. Напишем теперь C в форме (34), причем будем считать, что формальный ряд ρ имеет действительные коэффициенты. Чтобы получить действительное сохраняющее объем аналитическое преобразование, для какого-нибудь целого $l \geqslant 0$ сохраним из членов ряда $\rho(x, \eta)$ только члены степени, не большей чем $2l+2$, тогда мы получим многочлен $\rho_l(x, \eta)$ степени $2l+2$. С этим многочленом можно произвести замену

$$y = \rho_{lx}, \quad \xi = \rho_{l\eta}, \tag{39}$$

определяющую также действительную сохраняющую объем подстановку $z = C_l\zeta$, которая, однако, будет теперь сходящейся, согласно теоремам о неявных функциях, и члены которой совпадают с членами в C, имеющими степень не выше $2l+2$. Следовательно, $C_l^{-1}T^*C_l$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi\cos w_l - \eta\sin w_l + \ldots, \\ \eta_1 &= \xi\sin w_l + \eta\cos w_l + \ldots, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$w_l = \sum_{k=0}^{l} \gamma_k(\xi^2+\eta^2)^k, \tag{41}$$

причем не написанные в уравнениях (40) члены будут по крайней мере степени $2l+2$, и все коэффициенты будут действительными. Подобным же образом подстановке S действительным аналитическим преобразованием можно придать форму, члены которой, имеющие степень ниже $2l+2$, совпадают с соответствующими членами нормальной формы. После того как установлено существование многочлена ρ_l, его можно найти прямо из замен (39), (40) и (41) посредством сравнения коэффициентов. При этом, очевидно, вместо предположения о справедливости неравенства $\lambda^k \neq 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ можно ограничиться предположением о справедливости таких неравенств только при $k = 1, \ldots, 2l+2$. Например, в частном случае $l = 1$ достаточно предположений $\lambda^3 \neq 1$, $\lambda^4 \neq 1$.

Для теоремы о неподвижной точке Биркгофа важно потребовать, чтобы ряд w в подстановке (31) содержал не только постоянный член, следовательно, чтобы нормальная форма не сводилась только к повороту на постоянный угол γ_0. Пусть при таком предположении $l > 0$ выбрано таким образом, что $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{l-1} = 0$. Если преобразование (40) опять записать в комплексной форме, причем $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$, $\xi_1 + i\eta_1$, $\xi_1 - i\eta_1$ опять обозначить через ξ, η, ξ_1, η_1, то

$$\xi_1 = p(\xi, \eta) = u\xi + P, \quad \eta_1 = q(\xi, \eta) = v\eta + Q,$$

где

$$u = e^{i\gamma_0 + i\gamma(\xi\eta)^l}, \quad v = u^{-1}, \quad \gamma = \gamma_l \neq 0 \tag{42}$$

и $\overline{p}(\xi, \eta) = q(\eta, \xi)$. Здесь степенные ряды P и Q сходятся в окрестности $\xi = 0$, $\eta = 0$ и начинаются с членов степени $2l+2$. После соответствующей перестановки ξ и η можно предположить, что $\gamma > 0$, тогда линейной подстановкой

$$\xi = \xi^*\gamma^{-\frac{1}{2l}}, \quad \eta = \eta^*\gamma^{-\frac{1}{2l}}$$

можно получить в уравнениях (42) просто $\gamma = 1$.

§ 24. Теорема Биркгофа о неподвижной точке

Будем исходить опять из действительного сохраняющего объем отображения $z_1 = Sz$, имеющего форму (21; 1), (21; 2), причем будем считать, что степенные ряды $f(x,\, y)$, $g(x,\, y)$ сходятся в окрестности начала координат. В эллиптическом случае собственные значения λ, λ^{-1} матрицы

$$\mathfrak{S} = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$$

по модулю равны единице, но не являются числами ± 1. Пусть в предположении $\lambda^k \neq 1$ $(k = 3,\, \ldots,\, 2l+2)$ вычислены инварианты $\gamma_1,\, \ldots,\, \gamma_l$ в уравнениях (21; 31) и пусть γ_l будет первым инвариантом, который не равен нулю. Тогда, согласно результатам конца предыдущего параграфа, существует сходящаяся подстановка $z = C\zeta$, такая, что преобразование $C^{-1}SC = T$ сохраняет объем; эта подстановка имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = p(\xi,\, \eta) = u\xi + P, \quad \eta_1 = q(\xi,\, \eta) = v\eta + Q, \quad uv = 1, \\ u = e^{i(\alpha + r^{2l})}, \quad r^2 = \xi\eta, \quad \overline{p}(\xi,\, \eta) = q(\eta,\, \xi), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем P и Q начинаются с членов степени $2l+2$ и α — действительная постоянная. Чтобы первоначальные переменные x, y были действительными, нужно взять $\eta = \overline{\xi}$, $r = |\xi|$. Докажем, что в каждой произвольно малой окрестности G начала координат плоскости $(x,\, y)$ и для всех достаточно больших целых чисел $n > n_0(G)$ существует неподвижная точка $z \neq 0$ преобразования S^n при $S^k z \in G$ $(k = 0,\, \ldots,\, n-1)$. Это утверждение и является теоремой Биркгофа о неподвижной точке. Приводимое ниже доказательство отличается от данного Биркгофом точным проведением необходимых оценок.

Считая $r > 0$, введем полярные координаты r, φ посредством $\xi = re^{i\varphi}$, $\eta = re^{-i\varphi}$ и обозначим через ξ_k, r_k, φ_k $(k = 0,\, 1, \ldots)$ координаты ξ, r, φ для $\zeta_k = T^k\zeta$. Под $c_1,\, \ldots,\, c_{17}$ будем понимать в дальнейшем соответствующие положительные постоянные, зависящие только от свойств заданного отображения S. Далее, ϑ_0, ϑ_1, … суть функции от r и φ, которые соответствующим образом определяются некоторыми уравнениями. Если не будет повода бояться недоразумений, то символ ϑ будет также применяться для обозначения других различных функций. Пусть c_1 определено таким образом, чтобы ряды P и Q абсолютно сходились в круге $r \leqslant c_1^{-1}$ и удовлетворяли оценке

$$|P| + |Q| \leqslant c_2 r^{2l+2}. \tag{2}$$

Тогда в силу преобразования (1) и оценки (2) выполняются соотношения

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 = \xi_1\eta_1 = r^2 + \vartheta r^{2l+3}, \quad |\vartheta| < c_3, \\ r_1 = r(1+\vartheta r^{2l+1})^{1/2} = r + \vartheta_1 r^{2l+2}, \quad |\vartheta_1| < c_4 \quad (r < c_1^{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Прежде всего докажем следующую вспомогательную теорему.

Если r и натуральное число n удовлетворяют условиям

$$0 < r < \frac{4}{5}c_1^{-1}, \quad nr^{2l+1} < \frac{1}{6l+6}c_4^{-1}, \tag{4}$$

то

$$\left.\begin{gathered} 0 < \frac{3}{4}r < r_k < \frac{5}{4}r < c_1^{-1}, \quad r_k = r + k\vartheta_k r^{2l+2}, \\ |\vartheta_k| < 3c_4 \qquad (k = 0, \ldots, n). \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Доказательство будем вести методом полной индукции по k. Для $k = 0$ утверждение тривиально в силу $\xi_k = \xi \neq 0$, причем можно положить $\vartheta_0 = 0$. Если утверждение доказано для $k < n$, то из соотношений (3) следует оценка

$$r_{k+1} = r_k + \vartheta_1 r_k^{2l+2} = r + k\vartheta_k r^{2l+2} + \vartheta_1 r^{2l+2}(1 + k\vartheta_k r^{2l+1})^{2l+2},$$
$$|r_{k+1} - r| \leqslant r^{2l+2}\left\{k|\vartheta_k| + |\vartheta_1|\left(1 + k|\vartheta_k|r^{2l+1}\right)^{2l+2}\right\}. \tag{6}$$

В соответствии с условиями (4) и по индукционному допущению (5) имеем

$$k|\vartheta_k|r^{2l+1} < \frac{1}{2l+2}, \tag{7}$$

следовательно, выражение, стоящее в фигурных скобках в неравенстве (6) меньше, чем

$$3kc_4 + c_4 e < (3k+3)c_4,$$

откуда следует, что второе утверждение (5) выполняется при $k+1$ вместо k. Далее, в соответствии с неравенствами (4) и (7) получаем

$$r_{k+1} \leqslant r\left[1 + (k+1)|\vartheta_{k+1}|r^{2l+1}\right] < r\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}r < c_1^{-1},$$

$$r_{k+1} \geqslant r\left[1 - (k+1)|\vartheta_{k+1}|r^{2l+1}\right] > r\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}r > 0,$$

чем и заканчивается проведение индукции для доказательства соотношений (5).

Логарифмируя (1), получим выражение

$$\ln r_1 + i\varphi_1 = \ln r + i\varphi + i\alpha + ir^{2l} + \ln\Big(1 + \frac{P}{u\xi}\Big), \tag{8}$$

следовательно, в силу неравенства (2), отделяя мнимую часть, имеем

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 - \varphi = \alpha + r^{2l} + \vartheta r^{2l+1}, \quad |\vartheta| < c_5 \\ (0 < r < c_6^{-1} \leqslant c_1^{-1}) \end{array}\right\} \tag{9}$$

при соответствующем подборе кратных 2π для непрерывной функции $\varphi_1 - \varphi$ от r и φ. Если же

$$0 < r < \frac{4}{5}c_6^{-1}, \quad nr^{2l+1} < \frac{1}{6l+6}c_4^{-1}, \tag{10}$$

то по вспомогательной теореме $0 < r_k < c_6^{-1}$ для $k = 0, \ldots, n$. Можно сделать предположение (10) для r и n, тогда можно применить равенства (9) также вместо ξ к образам этой точки, ξ_k $(k = 0, \ldots, n-1)$, в результате

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \alpha + r_k^{2l} + \vartheta_k r_k^{2l+1}, \quad |\vartheta_k| < c_5.$$

Применяя соотношения (5), получим

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \alpha + r^{2l} + \vartheta_k r^{2l+1}(1 + nr^{2l}),$$
$$|\vartheta_k| < c_7, \quad (k = 0, \ldots, n-1),$$

и далее, суммируя по k,

$$\varphi_n - \varphi = n(\alpha + r^{2l}) + \tau, \tag{11}$$

причем

$$\tau = n\vartheta r^{2l+1}(1 + nr^{2l}), \quad |\vartheta| < c_8. \tag{12}$$

Пусть M и δ — какие-нибудь два положительных числа, удовлетворяющие неравенствам

$$M > 4\pi, \quad \delta < \min\left[\frac{c_4^{-1}}{(6l+6)M}, \frac{4c_6^{-1}}{5}, \frac{\pi c_8^{-1}}{2M(1+M)}\right] \tag{13}$$

и пусть выбрано натуральное число

$$n > M\delta^{-2l}. \tag{14}$$

Зная $n\alpha$, определим целое число g согласно условиям

$$n\alpha = 2g\pi + \beta, \quad -\pi \leqslant \beta < \pi, \tag{15}$$

из которых g и β определяются однозначно. Затем, пусть h есть какое-нибудь натуральное число из интервала

$$1 \leqslant h \leqslant \frac{M}{2\pi} - 1. \tag{16}$$

Тогда требование

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant nr^{2l} - 2h\pi + \beta \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

вследствие неравенств

$$2h\pi - \frac{\pi}{2} - \beta > \frac{\pi}{2} > 0, \quad 2h\pi + \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant 2h\pi + \frac{3\pi}{2} < M \tag{18}$$

определяет для r интервал I_h, который в соответствии с неравенством (14) содержится в интервале $0 < r < \delta$. Закрепим теперь φ, и пусть r, увеличиваясь, пробегает интервал I_h. Тогда $\xi = re^{i\varphi}$ в комплексной плоскости пробегает замкнутый интервал $I_h(\varphi)$ на луче, проходящем через начало координат и образующем с положительным направлением действительной оси угол φ. При этом в силу неравенства (13)

$$0 < r < \delta < \frac{4}{5}c_6^{-1}, \quad nr^{2l+1} < Mr < M\delta < \frac{1}{6l+6}c_4^{-1}. \tag{19}$$

Следовательно, предположение (10) выполнено, и для функции $\tau = \tau(r,\, \varphi)$ в соответствии с формулой (12) получается оценка

$$|\tau| \leqslant |\vartheta| Mr(1+M) < c_8 M\delta(1+M) < \frac{\pi}{2}.$$

В соответствии с соотношениями (11), (15) и (17) выражение

$$F(r,\, \varphi) = \varphi_n - \varphi - 2(g+h)\pi = nr^{2l} - 2h\pi + \beta + \tau$$

имеет теперь на обоих концах интервала $I_h(\varphi)$ противоположные знаки, следовательно, как непрерывная функция r, оно имеет в этом интервале по крайней мере одну перемену знака. Но для

$$\varphi_n - \varphi = 2(g+h)\pi \tag{20}$$

образ $\xi_n = r_n e^{i\varphi_n}$ точки ξ при отображении T^n лежит на том же луче, что и ξ, и притом $0 < r_n < c_6^{-1}$.

Из аналитической зависимости координат ξ_k, η_k от ξ, η следует, что φ_n и $F(r, \varphi)$ будут даже аналитическими по переменным r, φ при $0 < r < \frac{4}{5}c_6^{-1}$. С другой стороны, далее, будет доказано, что частная производная $F_r = \varphi_{nr}$ на всем интервале $I_n(\varphi)$ будет положительной, если, кроме выполнения неравенств (13), потребовать

$$\delta < e^{-c_9 M}, \tag{21}$$

где c_9 будет определено подходящим образом ниже. Все условия для δ будут обязательно выполненными, если предположить, что

$$\delta < e^{-c_{10} M}. \tag{22}$$

При этом предположении уравнение $F(r, \varphi) = 0$ имеет на $I_h(\varphi)$ единственное решение $r = r(\varphi)$, которое по теореме существования для неявных функций дифференцируемо и даже аналитично относительно φ. Если φ пробегает интервал $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то $r = r(\varphi)$ представляет замкнутую гладкую кривую K, которая лежит в круге $0 < r < \frac{4}{5}c_6^{-1}$ и охватывает начало координат. Образ $K_n = T^n K$ кривой K при отображении T^n будет гладкой замкнутой кривой, лежащей в круге $0 < r < c_6^{-1}$; эта кривая охватывает также начало координат, и притом в силу равенства (20) для каждой точки ξ кривой K ее образ ξ_n на кривой K_n лежит на луче, проходящем через нуль и ξ. Если предположить, что кривые K и K_n не имеют общих точек, то одна из них лежит внутри другой; это противоречит условию, по которому отображение T должно сохранять объем. Следовательно, эти кривые имеют по меньшей мере две общие точки. Но тогда для каждой точки пересечения кривых K и K_n имеем $\xi = \xi_n$. Поэтому при сформулированных выше предположениях мы получим по меньшей мере две различные неподвижные точки $\xi \neq 0$ преобразования T^n, причем образы ξ_k ($k = 0, \ldots, n$) лежат, кроме того, в круге $|\xi| < \frac{5}{4}\delta$. Если ввести вместо ξ, η

опять первоначальные координаты x, y и заметить, что M в оценке (22) можно выбрать произвольно большим, то отсюда следует сформулированная выше теорема Биркгофа о неподвижной точке.

При фиксированном n в силу неравенства (17) интервалы I_h, соответствующие различным h, отделены друг от друга. Следовательно, это имеет также место и для неподвижных точек, получающихся при допустимых, удовлетворяющих неравенствам (16), значениях h

$$h = 1,\, 2,\, \ldots,\, \left|\frac{M}{2\pi}\right| - 1.$$

Если в соответствии с неравенством (14) изменить также n, то неподвижные точки, построенные для различных n, h, могут, конечно, совпадать. Но этого не будет при $M > c_{11}$, если n пробегает составные числа, следовательно, это справедливо только для простых чисел. Если $T^m\zeta = T^n\zeta = \zeta$ и наибольший общий делитель $(m,\, n) = 1$, то, выбирая целочисленное решение p, q уравнения $pm + qn = 1$, получим $(T^m)^p(T^n)^q = T$, следовательно, $T\zeta = \zeta$, в то время как в достаточно малой окрестности начала координат единственной неподвижной точкой T будет само начало координат. Из нашего рассмотрения далее следует, что неподвижная точка T^n, если n простое число, будет также неподвижной точкой T^m, если m делится на n.

Остается доказать использованную выше оценку, по которой $\varphi_{nr} > 0$ в интервале $I_h(\varphi)$ при соответствующем выборе c_9. Дифференцируя равенство (8) полным образом и вводя сокращения $\ln r = \rho$, $\ln r_k = \rho_k$ $(k = 0,\, \ldots,\, n)$, имеем

$$d\rho_1 + i\,d\varphi_1 = d\rho + i\,d\varphi + 2ilr^{2l}\,d\rho + r^{2l+1}(\vartheta\,d\rho + \widetilde{\vartheta}\,d\varphi),$$
$$|\vartheta| + |\widetilde{\vartheta}| < c_{12} \quad (0 < r < c_6^{-1}).$$

При предположениях (10) $0 < r_k < c_6^{-1}$ для $k = 0,\, \ldots,\, n$, и потому, соответственно,

$$\left.\begin{aligned} d\rho_{k+1} + i\,d\varphi_{k+1} = d\rho_k + i\,d\varphi_k + 2ilr_k^{2l}\,d\rho_k +&\\ + r_k^{2l+1}(\vartheta_k\,d\rho_k + \widetilde{\vartheta}_k\,d\varphi_k),&\\ |\widetilde{\vartheta}_k| + |\vartheta_k| < c_{12} \quad (k = 0,\, \ldots,\, n-1).& \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Если положить

$$\mathfrak{A}_k = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2lr_k^{2l} & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{B}_k = r_k^{2l+1}\begin{Vmatrix} \vartheta_{1k} & \vartheta_{2k} \\ \vartheta_{3k} & \vartheta_{4k} \end{Vmatrix}, \tag{24}$$

то соотношения (23) можно записать в действительной векторной форме

$$\begin{Vmatrix} d\rho_{k+1} \\ d\varphi_{k+1} \end{Vmatrix} = \mathfrak{M}_k \begin{Vmatrix} d\rho_k \\ d\varphi_k \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{M}_k = \mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k,$$

и при этом

$$|\vartheta_{1k}| + |\vartheta_{2k}| + |\vartheta_{3k}| + |\vartheta_{4k}| < c_{13}.$$

Тогда при

$$\mathfrak{M}_{n-1} \ldots \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_0 = \begin{Vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{Vmatrix} \tag{25}$$

частная производная $\varphi_{nr} = r^{-1}\mu$, так что остается доказать неравенство $\mu > 0$.

В дальнейшем будем обозначать записью $\mathfrak{X} \prec \mathfrak{Y}$ для двух действительных матриц $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ тот факт, что абсолютные значения элементов $\mathfrak{X}$ не больше соответствующих элементов $\mathfrak{Y}$. Очевидно, что все элементы матрицы $\mathfrak{Y}$ неотрицательны. Если положить еще

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

то $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}$ и

$$\mathfrak{A}_k \prec \mathfrak{E} + c_{14} r^{2l} \mathfrak{B} = \mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}_k \prec c_{14} r^{2l+1} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Из перестановочности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ следует далее, что

$$\mathfrak{M}_{n-1} \ldots \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{A}_{n-1} \ldots \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_0 \prec (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^n - \mathfrak{A}^n, \tag{26}$$

$$\left.\begin{gathered} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^n - \mathfrak{A}^n = \mathfrak{B} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{n-k-1} \mathfrak{A}^k \prec \\ \prec n\mathfrak{B}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{n-1} = c_{14} n r^{2l+1} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^{n-1} \mathfrak{B} = \\ = c_{14} n r^{2l+1} (1 + c_{14} r^{2l} + c_{14} r^{2l+1})^{n-1} \mathfrak{B} \prec \\ \prec c_{15} n r^{2l+1} e^{c_{16} n r^{2l}} \mathfrak{B}, \end{gathered}\right\} \tag{27}$$

причем нужно принять во внимание неравенства (10). Далее, из равенств (24) следует оценка

$$\mathfrak{A}_{n-1} \cdots \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma = 2l \sum_{k=0}^{n-1} r_k^{2l} > 2l \Big(\frac{3}{4}\Big)^{2l} n r^{2l} > c_{17}^{-1} n r^{2l}.$$

Поэтому, учитывая также оценки (25), (26) и (27), получим

$$\mu > nr^{2l}(c_{17}^{-1} - c_{15} r e^{c_{16} n r^{2l}}),$$

поэтому действительно $\mu > 0$ в том случае, когда

$$r < (c_{15} c_{17})^{-1} e^{-c_{16} n r^{2l}}.$$

Но это условие в соответствии с оценками (19) и (21) выполнено на $I_h(\varphi)$ для достаточно большого c_9. Следует заметить, что c_9, c_{10} и c_{11} теперь уже точно определены.

Таким образом, теорема Биркгофа [1] о неподвижной точке доказана полностью. В найденном Биркгофом доказательстве теоремы Пуанкаре о неподвижной точке используется та же самая основная идея о построении охватывающей начало координат замкнутой кривой K, точки которой при отображении S^n смещаются только радиально.

Применим теорему Биркгофа к системе Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1,\, 2), \tag{28}$$

для которой известно периодическое решение, не являющееся равновесным. Пусть $x_k(t,\, \xi,\, \eta)$, $y_k(t,\, \xi,\, \eta)$ будет решением с начальными условиями $x_k = \xi_k$, $y_k = \eta_k$ при $t = 0$ и пусть заданное периодическое решение получается для $\xi_k = \xi_k^*$, $\eta_k = \eta_k^*$. Предположим, что соответствующая замкнутая траектория не касается в пространстве $(x,\, y)$ плоскости $y_2 = \eta_2^*$, так что $E_{x_2}(\xi^*,\, \eta^*) \neq 0$. Зафиксируем теперь $\eta_2 = \eta_2^*$ и $E(\xi,\, \eta) = E(\xi^*,\, \eta^*)$ и рассмотрим начальные значения ξ_1, η_1 как независимые переменные в малой окрестности точки $\xi_1 = \xi_1^*$, $\eta_1 = \eta_1^*$. Если продолжить соответствующее решение для возрастающего t до следующего пересечения с плоскостью $y_2 = \eta_2^*$, то, согласно доказанному в § 20, мы получим аналитическое отображение S в двумерной плоскости $(x_1,\, y_1)$, которое сохраняет объем и имеет неподвижную точку $x_1 = \xi_1^*$, $y_1 = \eta_1^*$. При этом имеет место эллиптический случай. Тогда, если существует натуральное число l, такое, что $\lambda^k \neq 1$ $(k = 1,\, \ldots,\, 2l+2)$ и $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{l-1} = 0$, $\gamma_l \neq 0$, то отображение S можно перевести в форму (1) и применить теорему Биркгофа о неподвижной точке. Отсюда следует существование бесчисленного множества периодических решений с тем же самым значением $E(\xi^*,\, \eta^*)$ функции Гамильтона в произвольно малой окрестности исходного решения, и притом существует даже для каждого достаточно большого простого числа n единственное решение, которое замыкается впервые после n оборотов. Если в точке ξ^*, η^* значение $E_{x_2} = 0$, но $E_{y_2} \neq 0$, то после замены x, y на y, $-x$ мы приходим опять к уже рассмотренному случаю.

Как пример рассмотрим ограниченную задачу трех тел. Пусть точки P_1, P_2, P_3 имеют опять массы μ, $1-\mu$, 0 при $0 < \mu < 1$; пусть материальные точки P_1, P_2 обращаются с угловой скоростью, равной 1, около их общего центра инерции и пусть координаты трех материальных точек в соответствующей системе вращающихся координат будут равны $(1-\mu,\, 0)$, $(-\mu,\, 0)$, $(x_1,\, x_2)$. Уравнения движения (19; 28) легко можно записать в канонической форме, если ввести вместо x_3, x_4 переменные $y_1 = x_3 - x_2$, $y_2 = x_1 + x_4$ и положить

$$E = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - F(x_1,\, x_2), \tag{29}$$

где F задано выражением (19; 29). При этом система (19; 28) переходит в систему (28). В § 19 мы применяли метод малого параметра Пуанкаре, причем мы исходили для $\mu = 0$ из периодического решения (19; 30) с $r^3(\omega+1)^2 = 1$ при некоторых ограничительных предположениях для ω, там было доказано существование периодических решений для достаточно малого $\mu > 0$ вблизи исходного решения. Одно из этих решений можно выбрать теперь за исходное для применения теоремы Биркгофа о неподвижной точке; пусть при этом $\mu = \mu_0 > 0$. Периодическое решение (19; 30), соответствующее $\mu = 0$, имеет начальные значения $\xi_1^* = r$, $\eta_1^* = 0$, $\xi_2^* = 0$, $\eta_2^* = r(\omega + 1)$, и при этих значениях производная $E_{y_2}(\xi^*,\, \eta^*) = \eta_2^* - \xi_1^* = r\omega \neq 0$. Поэтому при $\mu = 0$ для периодического решения (19; 30) можно применить метод неподвижной точки. С другой стороны, функция Гамильтона E будет аналитической функцией параметра μ, так что по теореме существования решение $x(t,\, \xi,\, \eta)$, $y(t,\, \xi,\, \eta)$ будет также аналитическим относительно μ. Отсюда, в частности, следует, что для достаточно малого μ_0 и соответствующего периодического решения также можно применить метод неподвижной точки. Если рассматривается эллиптический случай при $\mu = 0$ и если для собственного значения λ и натурального числа l выполнены ранее сформулированные условия $\lambda^k \neq 1$ $(k = 1,\, \ldots,\, 2l+2)$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{l-1} = 0$, $\gamma_l \neq 0$, то это утверждение справедливо вследствие аналитической зависимости от μ также для достаточно малого $\mu = \mu_0$, и притом с равным или меньшим значением l. Поэтому преобразование S нужно вычислить только для $\mu = 0$. Но для этого можно явно разрешить уравнения в вариациях (19; 7), как об этом было упомянуто в § 19: отсюда после элементарных выкладок для преобразования S получаются следующие разложения в ряд:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c\xi_1 + (\omega+1)^{-1}s\eta_1 + \ldots, \\ y_1 &= -(\omega+1)s\xi_1 + c\eta_1 + \ldots, \\ c &= \cos\frac{2\pi}{\omega}, \quad s = \sin\frac{2\pi}{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

причем ξ_1, η_1 будут начальными значениями x_1, y_1 при $t = 0$. Собственные значения матрицы линейных членов равны λ и λ^{-1}, где $\lambda = e^{2\pi i/\omega}$. При этом использованы данные в § 19 предположения $\omega \neq 0, -1, -2$, и считалось справедливым неравенство (19; 32). Если принять также, что

$$\omega \neq 3g^{-1}, \quad \omega \neq 4g^{-1} \quad (g = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{31}$$

то будет иметь место эллиптический случай, и тогда $\lambda^k \neq 1$ для $k = 1, \ldots, 4$. Если в разложениях (30) определить также члены второго и третьего порядков, то можно найти инвариант γ_1 в явном виде, что дает [2] $\gamma_1 = -3\pi(\omega+1)\omega^{-3} \neq 0$, тогда $l = 1$. Общие предположения для $\omega \neq 0$ содержатся в неравенстве (31); при выполнении этих предположений для достаточно малого $\mu > 0$ существует бесконечное множество периодических решений ограниченной задачи трех тел вблизи исходного решения, и притом таких решений, которые замыкаются впервые после многих оборотов и имеют одни и те же значения постоянной Якоби E.

Можно было бы думать, что эти решения можно также следующим образом определить с помощью метода малого параметра. При $\mu = 0$ все решения системы (19; 28) имеют вид конических сечений в плоскости (x_1, x_2), вращающихся с угловой скоростью, равной -1, около фокуса, расположенного в начале координат. В окрестности кругового решения (19; 30) с периодом $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ расположены траектории, которые соответствуют вращающемуся эллипсу. Такая траектория тогда и только тогда замыкается во вращающейся системе координат, если период вращения по эллипсу соизмерим с 2π, следовательно, если $\tau = 2\pi\dfrac{k}{l}$, причем l/k есть рациональное число, близкое к ω. Если l/k — несократимая дробь, то соответствующий период будет $2\pi k$, и траектория замыкается первый раз после $|l|$ оборотов. Если выполнены прежние предположения метода малого параметра, то для достаточно малого μ соответствующие периодические решения существуют. Оказывается, однако, что метод малого параметра нельзя здесь применить в его обычной форме, так как не выполнено предположение о ранге функциональной матрицы, заданной равенством (19; 27). При этом трудность состоит в том, что дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел имеют для $\mu = 0$ интегралы площадей и энергии, в то время как для $\mu > 0$ мы имеем в своем распоряжении только один интеграл Якоби (29).

Глава III
ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ

§ 25. Теоретико-функциональная проблема центра

Начнем с определения понятия устойчивости и неустойчивости. Пусть задано топологическое пространство $\mathfrak{R}$, точки которого обозначим через $\mathfrak{p}$, и пусть $\mathfrak{a}$ есть фиксированная точка пространства $\mathfrak{R}$. Под окрестностями в дальнейшем будем понимать только окрестности точки $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{p}_1 = S\mathfrak{p}$ топологическое отображение окрестности $\mathfrak{U}_1$ на окрестность $\mathfrak{B}_1$, причем точка $\mathfrak{a} = S\mathfrak{a}$ отображается сама в себя. Обратное преобразование $\mathfrak{p}_{-1} = S^{-1}\mathfrak{p}$ переводит $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{U}_1$, и вообще $\mathfrak{p}_n = S^n\mathfrak{p}$ $(n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots)$ будет топологическим отображением окрестности $\mathfrak{U}_n$ на окрестность $\mathfrak{B}_n$, которое имеет $\mathfrak{a}$ неподвижной точкой. Для каждой точки $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ пересечения $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{W}$ найдем последовательно образы $\mathfrak{p}_{k+1} = S\mathfrak{p}_k$ $(k = 0,\ 1, \ldots)$, пока $\mathfrak{p}_k$ находится в $\mathfrak{U}_1$, и равным образом $\mathfrak{p}_{-k-1} = S^{-1}\mathfrak{p}_k$, пока $\mathfrak{p}_{-k}$ лежит в $\mathfrak{B}_1$. Всегда существует максимальное число $k + 1 = n$, такое, что все $\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$ еще лежат в $\mathfrak{U}_1$, но $\mathfrak{p}_n$ там уже не лежит; аналогичное утверждение справедливо для отрицательных индексов. При этом для каждого $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{W}$ имеется или конечная, или бесконечная в одну сторону, или бесконечная в обе стороны последовательность образов $\mathfrak{p}_k = \ldots, \mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots$, причем индекс k последовательно пробегает целые числа.

Назовем отображение S устойчивым в неподвижной точке $\mathfrak{a}$, если для каждой окрестности $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ существует такая ее часть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, для которой все образы $S^n\mathfrak{B}$ $(n = \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ лежат в $\mathfrak{U}$. Неустойчивость определим не просто как логическую противоположность устойчивости, но с помощью более сильного требования, а именно следующим образом. Отображение S называется неустойчивым в неподвижной точке $\mathfrak{a}$, если существует такая окрестность $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$, что для каждой точки $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ из $\mathfrak{U}$ по крайней мере один образ $\mathfrak{p}_n$ лежит вне $\mathfrak{U}$.

Эти определения можно также сформулировать иначе. Точечное множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}$ называется при отображении S инвариантным, если $\mathfrak{M} = S\mathfrak{M}$. Само собой разумеется, что неподвижная точка $\mathfrak{a}$ является инвариантным точечным множеством. Покажем теперь, что S тогда и только тогда устойчиво, если в каждой окрестности $\mathfrak{U}$ содержится инвариантная окрестность $\mathfrak{B}$. Если для каждой окрестности $\mathfrak{U}$ существует окрестность $\mathfrak{B} = S\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, то $\mathfrak{B}$ обладает, очевидно, по определению, свойством устойчивости; тогда, следовательно, S устойчиво. Наоборот, если S предположить устойчивым, то для каждой окрестности $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$ существует окрестность $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{U}$, для которой $S^n\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{U}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Тогда сумма $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_n S^n\mathfrak{Q}$ всех множеств $S^n\mathfrak{Q}$ будет при S инвариантной и будет являться той окрестностью, существование которой требуется доказать. Соответственно покажем, что S тогда и только тогда неустойчиво, если существует окрестность $\mathfrak{U}$, которая не содержит никакого инвариантного множества, кроме неподвижной точки $\mathfrak{a}$. Если существует такая окрестность $\mathfrak{U}$, то этим же свойством обладает и пересечение $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W}$ и, следовательно, можно принять $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$. Тогда, если $\mathfrak{p}$ будет какой-нибудь точкой $\neq \mathfrak{a}$ из $\mathfrak{U}$, то все образы $\mathfrak{p}_n$ не могут лежать в $\mathfrak{U}$, так как иначе $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_n \mathfrak{p}_n$ было бы инвариантным подмножеством $\mathfrak{U}$, которое содержит точку $\neq \mathfrak{a}$. Следовательно, S неустойчиво. Наоборот, если допустить, что S неустойчиво, то существует такая окрестность $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{W}$, что для каждой точки $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ из $\mathfrak{U}$ по крайней мере один образ $\mathfrak{p}_n$ не лежит в $\mathfrak{U}$. Если теперь $\mathfrak{p}$ будет какой-нибудь точкой инвариантного подмножества $\mathfrak{M} = S\mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{U}$, то все образы $\mathfrak{p}_n$ точки $\mathfrak{p}$ также лежат в $\mathfrak{M}$, а следовательно, и в $\mathfrak{U}$, откуда следует, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$. Поэтому доказано и это утверждение.

Следовательно, отображение S, не являющееся неустойчивым, обладает тем свойством, что каждая окрестность содержит инвариантное точечное множество, содержащее не только точку $\mathfrak{a}$, в то время как для устойчивости отображения S каждая окрестность должна содержать даже некоторую инвариантную окрестность. Поэтому каждое устойчивое отображение необходимо является не неустойчивым, но не являющееся устойчивым отображение может и не быть неустойчивым. Отображение S называется смешанным в неподвижной точке $\mathfrak{a}$, если оно там не будет ни устойчивым, ни неустойчивым. То, что смешанные отображения действительно существуют, показывает простой пример аффинного отображения $x_1 = x + y$, $y_1 = y$ в плоскости (x, y), которое каждую точку оси абсцисс имеет своей неподвижной точкой. Ограниченное множество при таком отображении тогда и только тогда инвариантно, если оно лежит на оси абсцисс. Так как для произвольного $r > 0$ круг $x^2 + y^2 < r^2$ не содержит инвариантной окрестности точки $(x, y) = (0, 0)$, кроме инвариантного интервала $-r < x < r$, $y = 0$, то отображение в начале координат не будет ни устойчивым, ни неустойчивым.

Перенесем также определение устойчивости и неустойчивости на систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Пусть $x = \xi^*$ будет равновесным решением, для которого, следовательно, $f_k(\xi^*) = 0$, и пусть в окрестности $x = \xi^*$ выполнены условия Липшица. Обозначим опять через $x(t, \xi)$ решение системы (1) с начальными условиями $x_k = \xi_k$ при $t = 0$. Тогда переходом от ξ к $x(t, \xi)$ при каждом фиксированном t в окрестности неподвижной точки $x = \xi^*$ устанавливается топологическое отображение S_t. Мы получим определение устойчивости и неустойчивости системы (1) для рассматриваемого положения равновесия, если в данных выше определениях заменим $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, S^n и $\mathfrak{p}_n = S^n\mathfrak{p}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ на ξ^*, ξ, S_t и $\xi_t = x(t, \xi)$ с действительной переменной t. При этом нужно, однако, потребовать, чтобы в определении фигурировали только положительные значения t, тогда речь будет идти только об устойчивости и неустойчивости в будущем. Это понятие имеет большое значение в задачах механики. Точно так же переносится очевидным образом и понятие смешанного случая.

Прежде чем переходить к задачам, связанным с устойчивостью дифференциальных уравнений, рассмотрим частный случай, когда S будет плоским конформным отображением. Здесь уже встретятся некоторые характерные трудности, которые еще могут быть преодолены имеющимися в нашем распоряжении методами анализа. Можно без ограничения общности принять, что неподвижной точкой будет начало координат в комплексной плоскости z. Тогда конформное отображение будет задано степенным рядом

$$z_1 = f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \quad (\lambda \neq 0) \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами, который сходится в окрестности точки $z = 0$. Исследуем, когда отображение S будет устойчивым, неустойчивым и смешанным в точке $z = 0$. Сначала предположим, что S устойчиво. Тогда в круге сходимости $\mathfrak{K}$ ряда (2) существует инвариантная окрестность $\mathfrak{B} = S\mathfrak{B}$, которая содержит начало координат. Она может быть несвязной, но тогда она содержит связную инвариантную окрестность. Если $\mathfrak{L}$ есть открытый круг в $\mathfrak{B}$, содержащий начало координат, то сумма множеств всех образов $S^n\mathfrak{L}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ обладает требуемым свойством. Поэтому $\mathfrak{B}$ можно считать связной. Наша цель заключается в том, чтобы найти инвариантную окрестность в $\mathfrak{K}$, которую можно конформно отобразить на круг единичного радиуса. Это можно сделать двумя способами. $\mathfrak{B}$ может быть не односвязной. Тогда возьмем только те точки $\mathfrak{B}$, которые лежат внутри какой-нибудь замкнутой кривой $\mathfrak{C}$, лежащей в $\mathfrak{B}$. Определенное таким образом множество $\mathfrak{U}$ опять является связной окрестностью внутри $\mathfrak{K}$, и легко видеть, что эта окрестность односвязна. Вследствие инвариантности $\mathfrak{B}$ множество $S\mathfrak{C}$ также принадлежит $\mathfrak{B}$, откуда следует инвариантность $\mathfrak{U}$. Тогда, согласно теореме Римана об отображении, множество $\mathfrak{U}$ можно соответствующим конформным преобразованием отобразить на круг $|\zeta| < \rho$, причем $z = 0$ переходит в $\zeta = 0$ и производная z_ζ равна единице в точке $\zeta = 0$. Пусть

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \ldots \quad (|\zeta| < \rho) \tag{3}$$

будет обратным конформным отображением; при этом, следовательно, ряд обязательно сходится в круге $|\zeta| < \rho$. Обозначим отображение (3) через C и получим отображение $T = C^{-1}SC$. Так как область $\mathfrak{U}$ была инвариантной при S, то круг $|\zeta| < \rho$ при конформном отображении T будет, очевидно, инвариантным, и центр этого круга $\zeta = 0$ будет неподвижной точкой. Отсюда, используя известную теорему из теории функций, получим, что T будет линейным отображением вида

$$\zeta_1 = \mu\zeta \quad (|\mu| = 1), \tag{4}$$

т. е. вращением около начала координат. Это заключение можно сделать и без построения множества $\mathfrak{U}$. Построим для области $\mathfrak{B}$ универсальную накрывающую поверхность $\widetilde{\mathfrak{B}}$, которая будет по своему определению односвязной. Эта поверхность имеет более одной краевой точки, так как этим свойством обладает и $\mathfrak{B}$. Тогда конформное отображение S можно распространить и на $\widetilde{\mathfrak{B}}$ таким образом, чтобы было также $S\widetilde{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{B}}$ и чтобы неподвижная точка совпадала с точкой $z = 0$ области $\mathfrak{B}$. Тогда по теореме об отображении можно опять конформно отобразить $\widetilde{\mathfrak{B}}$ на круг в плоскости ζ, для чего следует сделать подстановку (3), причем z теперь будет пробегать накрывающую поверхность $\widetilde{\mathfrak{B}}$, если ζ изменяется на круге $|\zeta| < \rho$. Дальнейшие выводы получаются так же, как и выше.

Соотношение $T = C^{-1}SC$ можно записать в форме $CT = SC$; оно дает с учетом уравнений (2), (3) и (4) тождество $\varphi(\mu\zeta) = f\big[\varphi(\zeta)\big]$, являющееся так называемым функциональным уравнением Шрёдера [1]. Из сравнения линейных членов следует, что $\lambda = \mu$. Если обозначить два определенных выше конформных отображения через C_1 и C_2, то $C_1^{-1}SC_1 = T = C_2^{-1}SC_2$, и преобразование $C_1^{-1}C_2 = C_0$ перестановочно с T. Если теперь λ не является корнем из единицы, то из равенства $C_0T = TC_0$ введением степенного ряда получим, что C_0 является тождественным преобразованием, следовательно, $C_1 = C_2$. Последнее показывает также, что $\mathfrak{B} = \widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{U}$ является односвязным, но это обстоятельство в дальнейшем не используется.

Вследствие равенства (4) получим $|\lambda| = 1$; это равенство является необходимым условием устойчивости S. Покажем теперь, что S тогда и только тогда устойчиво, если $|\lambda| = 1$ и если решением функционального уравнения Шрёдера

$$\varphi(\lambda\zeta) = f\big[\varphi(\zeta)\big] \tag{5}$$

является сходящийся степенной ряд $\varphi(\zeta) = \zeta + \ldots$. То, что это условие является необходимым, следует из предыдущего рассмотрения. Если, наоборот, существует сходящийся степенной ряд $\varphi(\zeta)$, являющийся решением уравнения (5), и если $|\lambda| = 1$, то упомянутое отображение $z_1 = f(z)$ сводится сходящейся подстановкой $z = \varphi(\zeta)$, $z_1 = \varphi(\zeta_1)$ к вращению $\zeta_1 = \lambda\zeta$. Последнее же, очевидно, устойчиво, так как в качестве инвариантных окрестностей можно взять все окружности в плоскости ζ с центром в начале координат. Тогда и $S = CTC^{-1}$ устойчиво в силу сходимости $\varphi(\zeta)$ и сходимости обратного $\varphi(\zeta)$ степенного ряда в достаточно малой окрестности начала координат, следовательно, устойчиво и наше отображение. Поэтому утверждение доказано. Наименование «проблема центра» появилось вследствие того, что в случае устойчивости инвариантными окрестностями являются концентрические круги с центром в начале координат $z = 0$ в плоскости ζ.

Чтобы исследовать, является ли отображение S устойчивым, достаточно посмотреть, возможно ли разрешить функциональное уравнение Шрёдера с помощью сходящегося степенного ряда $\varphi(\zeta) = \zeta + \ldots$. Для этого возьмем $\varphi(\zeta)$ с неопределенными коэффициентами и попробуем получить решение уравнения (5) в виде формального степенного ряда. В предположении, что λ не есть корень из единицы, получим формальное решение сравнением коэффициентов, причем это решение назовем рядом Шрёдера. Пусть $n \geqslant 2$; предположим, что коэффициенты b_k $(1 < k < n)$ уже определены так, что в правой и левой частях уравнения (5) равны все члены степени $k < n$. Это верно для $n = 2$. Если написать уравнение (5) в виде

$$\varphi(\lambda\zeta) - \lambda\varphi(\zeta) = f\left[\varphi(\zeta)\right] - \lambda\varphi(\zeta),$$

то будем иметь

$$\sum_{l=2}^{\infty}(\lambda^l - \lambda)b_l\zeta^l = \sum_{l=2}^{\infty} a_l\varphi^i(\zeta), \tag{6}$$

и потому коэффициент при ζ^n в правой части будет многочленом с рациональными коэффициентами относительно a_l $(l = 2, \ldots, n)$ и уже известных b_k $(k = 2, \ldots, n-1)$, в то время как соответствующий коэффициент в левой части уравнения (6) равен $(\lambda^n - \lambda)b_n$. Так как λ не равно корню из единицы и не равно нулю, то и $\lambda^n - \lambda \neq 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$, поэтому b_n определяется однозначно. Таким образом, мы последовательно получим все коэффициенты ряда Шрёдера $\varphi(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \ldots$, который формально удовлетворяет функциональному уравнению Шрёдера (5).

Прежде чем исследовать сходимость найденного ряда $\varphi(\zeta)$, рассмотрим случай, когда λ есть корень из единицы. Пусть $\lambda^n = 1$ $(n > 0)$, причем также допускается $n = 1$. Тогда, если S устойчиво, то $T = C^{-1}SC$ будет опять иметь нормальную форму $\zeta_1 = \lambda\zeta$. $T^k = C^{-1}S^kC$ дает отображение $\zeta_1 = \lambda^k\zeta$, следовательно, T^n есть тождественное отображение E, и, следовательно, также $S^n = E$. Если, наоборот, $S^n = E$ и $\mathfrak{U}$ является окрестностью точки $z = 0$, лежащей в круге сходимости $\mathfrak{K}$ функции $f(z)$, то можно выбрать какую-нибудь достаточно малую окрестность $\mathfrak{B}$ точки $z = 0$, для которой n образов $S^k\mathfrak{B}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ все еще лежат в $\mathfrak{U}$. Тогда вследствие $S^n\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ сумма $S^k\mathfrak{B}$ будет инвариантной окрестностью внутри $\mathfrak{U}$, откуда следует устойчивость S. Следовательно, в случае $\lambda^n = 1$ $(n > 0)$ отображение S тогда и только тогда устойчиво, если $S^n = E$. В качестве примера рассмотрим отображение

$$z_1 = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \ldots, \quad \lambda = 1,$$

для которого S^n задается в виде

$$z_n = \frac{z}{1-nz} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

и, следовательно, отлично от тождественного. Вследствие того, что $S \neq E$ и $\lambda = 1$, это отображение не является устойчивым. Это можно также сразу обнаружить, положив $z = 1/n$, где натуральное число n может быть сколь угодно большим. Если, с другой стороны, положить $z = ir$, $(0 < r < 1)$, то все $|z_n| < r$, следовательно, все образы r вместе с z образуют инвариантное множество, лежащее в круге $|z| \leqslant r$. Это показывает, что S не является неустойчивым, значит, будет смешанным. Впрочем, неизвестно, может ли представиться случай, когда λ является корнем из единицы и S является неустойчивым. В дальнейшем мы будем предполагать λ не равным корню из единицы.

Исследуем теперь прежде всего сходимость формально образованного ряда Шрёдера $\varphi(z)$ в случае $|\lambda| \neq 1$. Это можно легко сделать с помощью уже применявшегося метода мажорант. Вследствие сходимости ряда (2) существует такое положительное число a, что $|a_{n+1}| < a^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если вместо z_1, z в преобразование (2) ввести az_1, az, то получится опять конформное отображение в форме (2) с тем же значением λ, но для которого теперь

$$|a_{n+1}| < 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Поэтому для доказательства сходимости $\varphi(\zeta)$ можно с самого начала предположить, что неравенство (7) выполнено. Затем, вследствие $|\lambda| \neq 1$, имеем

$$|\lambda^{n+1} - \lambda| > c > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

причем c есть соответствующая положительная постоянная. Теперь вследствие неравенств (7) и (8) из рекуррентного соотношения, получаемого непосредственно после уравнения (6), для определения коэффициентов b_{n+1} ряда Шрёдера получается, что формальное решение $\Phi(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \ldots$ функционального уравнения

$$c(\Phi - \zeta) = \sum_{l=2}^{\infty} \Phi^l \tag{9}$$

есть мажоранта для $\varphi(\zeta)$. Но обращение сходящегося при $|\Phi| < 1$ ряда

$$\zeta = \Phi - c^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} \Phi^l$$

дает ряд, сходящийся в окрестности $\zeta = 0$. Этим доказательство сходимости закончено. Подобно тому, как это было сделано в § 15, здесь также можно дать оценку радиуса сходимости. Мы уже знаем, что вследствие $|\lambda| \neq 1$ отображение S не является устойчивым. Вследствие доказанной таким образом сходимости C мы можем здесь также образовать нормальную форму $C^{-1}SC = T$. Можно даже сразу показать, что отображение $\zeta_1 = \lambda\zeta$ будет неустойчивым. Если рассмотреть точку $\zeta \neq 0$ какой-нибудь ограниченной окрестности $\mathfrak{U}$ точки $\zeta = 0$, то $\zeta_n = \lambda^n\zeta$ вследствие $|\lambda| \neq 1$ не будет лежать в $\mathfrak{U}$ для достаточно больших положительных или отрицательных n. Из неустойчивости T следует неустойчивость $S = CTC^{-1}$. Поэтому для $|\lambda| \neq 1$ отображение S необходимо неустойчиво. Это же можно показать непосредственно, без использования нормальной формы T.

Для дальнейшего рассмотрения можно ограничиться случаем, когда λ по абсолютной величине равно единице, но не является корнем из единицы. В этом случае для исследования сходимости ряда Шрёдера требуются весьма тонкие оценки, к которым мы и переходим. Прежде всего покажем, что те значения λ, для которых при соответствующем выборе сходящегося ряда $f(z) = \lambda z + \ldots$ ряд Шрёдера $\varphi(\zeta)$ расходится, лежат даже всюду плотно на окружности $|\lambda| = 1$ [2]. Для доказательства достаточно взять степенной ряд $f(z)$, все коэффициенты которого a_n $(n = 2, 3, \ldots)$ равны $\pm\frac{1}{n!}$, причем выбор знака определяется рекуррентным образом. Тогда, в частности, $f(z)$ обязательно сходится. Вернемся еще раз к определению b_n из уравнения (6). Там при сравнении коэффициентов получается выражение $(\lambda^n - \lambda)b_n - a_n$ для каждого $n > 1$ как многочлен относительно a_k, b_k при $1 < k < n$. Поэтому соответствующим выбором $a_n = \pm\frac{1}{n!}$ можно, очевидно, получить, что

$$|b_n| \geqslant \frac{1}{n!}|\lambda^n - \lambda|^{-1} = \frac{1}{n!}|\lambda^{n-1} - 1|^{-1} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Пусть теперь при соответствующем выборе λ неравенство

$$|\lambda^n - 1| < (n!)^{-2} \tag{11}$$

выполнено для бесконечного количества натуральных чисел n, и пусть $f(z)$ является степенным рядом, коэффициенты которого a_2, $a_3, \ldots$ определены заданным выше способом. Тогда, с одной стороны, этот ряд сходится для любого z, а, с другой стороны, соответствующий ряд Шрёдера $\varphi(\zeta)$ для каждого $\zeta \neq 0$ расходится, так как в силу неравенств (10) и (11) общий член $b_n\zeta^n$ даже не стремится к нулю. Тогда отображение $z_1 = f(z) = \lambda z + \ldots$ не будет устойчивым. Но неизвестно, что именно имеет место — смешанный случай или неустойчивость.

Теперь покажем еще, что на окружности единичного радиуса существует плотное множество значений λ, которое не содержит точку ± 1 и на котором неравенство (11) выполнено для бесконечно многих n. Если мы положим $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ и выберем для каждого натурального n целое число m, соответствующее условию

$$-\frac{1}{2} \leqslant n\alpha - m < \frac{1}{2}, \tag{12}$$

то

$$|\lambda^n - 1| = |e^{2\pi in\alpha} - 1| = |e^{\pi in\alpha} - e^{-\pi in\alpha}| = 2\bigl|\sin(\pi n\alpha)\bigr| = 2\sin\bigl(\pi|n\alpha - m|\bigr).$$

Тогда вследствие $|n\alpha - m| = \vartheta \leqslant \dfrac{1}{2}$ получаем неравенства $2\vartheta \leqslant \sin\pi\vartheta \leqslant$ $\leqslant \pi\vartheta$ и

$$4\vartheta \leqslant |\lambda^n - 1| \leqslant 2\pi\vartheta \leqslant 7\vartheta. \tag{13}$$

Поэтому достаточно построить в интервале $0 \leqslant \alpha < 1$ всюду плотное множество иррациональных чисел α, для которых неравенства

$$|n\alpha - m| < \frac{1}{7(n\,!)^2}, \quad n > 0 \tag{14}$$

имеют бесконечно много целых решений n и m. Это удается сделать с помощью представления действительных чисел непрерывными дробями. Известно, что для каждого иррационального числа α из интервала $0 < \alpha < 1$ существует такая последовательность натуральных чисел r_1, r_2, …, что последовательность дробей $\frac{p_k}{q_k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, образованная по правилам

$$\left.\begin{aligned} &p_0 = 0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = r_1, \\ &p_k = r_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = r_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

стремится к α. При этом, разумеется, числа r_1, r_2, … определяются величиной α однозначно и называются неполными частными α. Тогда из теории непрерывных дробей следует неравенство

$$|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{r_{k+1}q_k} \leqslant \frac{1}{r_{k+1}} \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{16}$$

Наоборот, каждой заданной последовательности r_1, r_2, $\ldots$ соответствует опять иррациональное число α из интервала $0 < \alpha < 1$ с заданными неполными частными этой непрерывной дроби.

Пусть теперь в интервале $0 < \beta < 1$ задано произвольное иррациональное число β и пусть s_1, s_2, $\ldots$ будут неполными частными его разложения в непрерывную дробь. Пусть далее l есть какое-нибудь фиксированное натуральное число; определим

$$r_k = s_k \quad (0 < k \leqslant l), \quad r_{k+1} = 7(q_k\,!)^2 \quad (k \geqslant l), \tag{17}$$

причем q_0, q_1, $\ldots$, q_k опять можно последовательно найти из уравнений (15). Тогда для непрерывной дроби α с неполными частными r_1, r_2, $\ldots$ справедливо неравенство (16). Так как первые l неполных частных непрерывных дробей α и β совпадают, то и $|q_l\beta - p_l| < q_l^{-1}$. Отсюда следует

$$|\alpha - \beta| \leqslant \left|\alpha - \frac{p_l}{q_l}\right| + \left|\beta - \frac{p_l}{q_l}\right| < 2q_l^{-2} \leqslant 2l^{-2};$$

с другой стороны, в силу соотношений (16) и (17) требование (14) выполнено для бесконечно многих пар $n = q_k$, $m = p_k$ $(k = l,\, l+1,\, \ldots)$. Так как l можно выбрать произвольно большим, то построенные числа $\alpha = \alpha_l$ имеют предел β и так как β произвольно, то множество встречающихся α всюду плотно в единичном интервале.

Пусть Λ есть множество значений $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ на окружности единичного радиуса, для которого решение функционального уравнения Шрёдера $\varphi(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \ldots$ обязательно сходится в окрестности $\zeta = 0$, и притом для любого заданного в окрестности $z = 0$ сходящегося ряда $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \ldots$ Нужно теперь показать, что Λ имеет на единичной окружности линейную меру Лебега 2π и, следовательно, множество A соответствующих α имеет на единичном интервале $0 \leqslant \alpha < 1$ меру Лебега, равную единице. Множество действительных иррациональных чисел α, для которых по крайней мере один сходящийся ряд $f(z)$ с первым коэффициентом $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ приводит к расходящемуся ряду Шрёдера $\varphi(\zeta)$, имеет поэтому меру нуль. В частности, можно сказать, что вообще отображение S устойчиво, если только выполнено необходимое условие $|\lambda| = 1$.

Рассмотрим для заданных положительных чисел ε, μ множество $B(\varepsilon,\,\mu)$ всех чисел α единичного интервала E, для которых неравенства

$$|n\alpha - m| < \varepsilon n^{-\mu}, \quad n > 0 \tag{18}$$

имеют по меньшей мере одно целочисленное решение n, m. Очевидно,

$$B(\varepsilon',\,\mu') \subset B(\varepsilon,\,\mu) \quad (\varepsilon' \leqslant \varepsilon,\, \mu \leqslant \mu').$$

Пусть k пробегает все натуральные числа; образуем пересечение

$$B = \bigcap_k B(k^{-1},\,2) \tag{19}$$

всех $B(k^{-1},\,2)$; тогда

$$B \subset B(\varepsilon,\,2) \tag{20}$$

для каждого ε. Обозначим меру Лебега измеримого множества Γ через $m(\Gamma)$ и оценим сверху меру $B(\varepsilon,\,2)$. Это множество измеримо, так как оно в соответствии с неравенством (18) состоит из соединения суммы счетного числа интервалов, а тогда вследствие равенства (19) B также измеримо. Для каждого решения n, m неравенства (18) справедливо неравенство

$$-\varepsilon < m < n + \varepsilon, \tag{21}$$

если α лежит в E, и, с другой стороны, длина интервалов для α, определенных неравенством (18) при заданных n и m, равна $2\varepsilon n^{-\mu-1}$. Для любого фиксированного натурального числа n величина m, удовлетворяющая неравенству (21), меньше, чем $n + 2\varepsilon + 1$. При использовании соотношения (20) получим

$$m\bigl[B(\varepsilon,\,2)\bigr] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon(n + 2\varepsilon + 1)n^{-3} < 4\varepsilon(\varepsilon+1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2},$$

$$m(B) < \frac{2\pi^2}{3}\varepsilon(\varepsilon+1),$$

следовательно, $m(B) = 0$, так как ε может быть произвольно мало. Если через Δ обозначить множество всех α в E, для которых неравенство (18) имеет решение для каждого выбора ε, μ, то вследствие соотношения (19) множество Δ должно содержаться в B, поэтому тем более $m(\Delta) = 0$. Тогда для дополнительного множества $\Gamma = E - \Delta$ $m(\Gamma) = 1$, и Γ характеризуется тем, что для каждого числа α из Γ существуют два таких положительных числа ε, μ, что для каждого натурального n и целого m всегда

$$|n\alpha - m| > \varepsilon n^{-\mu}. \tag{22}$$

В следующем параграфе будет показано, что для всех α из Γ при произвольном выборе сходящегося ряда $f(z) = \lambda z + \ldots$, где $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, соответствующий ряд Шрёдера также сходится [3]. Но тогда по определению $A \supset \Gamma$, следовательно, справедливо равенство $m(A) = 1$, а это и было нашим утверждением.

§ 26. Доказательство сходимости

Будем использовать введенные в предыдущем параграфе обозначения. Пусть задано α в Γ. Тогда в силу неравенства (23; 22) α иррационально, следовательно, λ не равно корню из единицы. Если положить

$$\rho_n = |\lambda^n - 1|^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и определить m опять из неравенства (23; 12), то из неравенств (23; 13) и (23; 22) следует оценка

$$\rho_n \leqslant \frac{1}{4}|n\alpha - m|^{-1} < \frac{n^\mu}{4\varepsilon},$$

причем ε, μ могут зависеть еще и от α. Для упрощения этого неравенства определим положительное число $\nu < \mu$, сообразно условию

$$\frac{1}{4\varepsilon} < 2^\nu, \tag{1}$$

откуда тогда следует

$$\rho_n < (2n)^\nu \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Определим формальный ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\zeta^n = \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\zeta^n,$$

в котором $c_1 = 1$, уравнением

$$\sum_{n=2}^{\infty} \rho_{n-1}^{-1} c_n \zeta^n = \Phi^2(\zeta) + \Phi^3(\zeta) + \ldots,$$

из которого c_n определяются рекуррентным способом. Именно, сравнение коэффициентов дает формулу

$$c_n = \rho_{n-1} \sum_{\mathfrak{z}_n} c_{n_1} c_{n_2} \ldots c_{n_r} \quad (n = 2,\, 3,\, \ldots), \tag{3}$$

в которой символ $\mathfrak{z}_n$ обозначает, что суммирование распространено по всем целым разбиениям $n_1, n_2, \ldots, n_r$, для которых $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, т. е. каждому n соответствуют по крайней мере два слагаемых. Отсюда все c_n $(n = 2,\, 3,\, \ldots)$ получаются положительными числами. Если теперь сравнить рекуррентную формулу (3) с той, которая получается для b_n из уравнения (23; 6), то вследствие соотношения $|\lambda^n - \lambda| = \rho_{n-1}^{-1}$ $(n = 2,\, 3,\, \ldots)$ с помощью равенства (23; 7) полной индукцией получим неравенство $|b_n| \leqslant c_n$, т. е. $\varphi(\zeta) \prec \Phi(\zeta)$. Поэтому достаточно доказать сходимость $\Phi(\zeta)$. Определим еще один степенной ряд

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \zeta^n = \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n \zeta^n,$$

в котором $\gamma_1 = 1$, функциональным уравнением

$$\psi(\zeta) = \zeta + \psi^2(\zeta) + \psi^3(\zeta) + \ldots = \zeta + \frac{\psi^2}{1 - \psi}$$

или рекуррентной формулой

$$\gamma_n = \sum_{\mathfrak{z}_n} \gamma_{n_1} \gamma_{n_2} \ldots \gamma_{n_r} \quad (n = 2,\, 3, \ldots).$$

Согласно уже использованному при выводе уравнения (23; 9) заключению, ряд $\psi(\zeta)$ сходится в окрестности $\zeta = 0$. Поэтому существует такая положительная постоянная γ, что

$$0 < \gamma_n < \gamma^n \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots). \tag{4}$$

Если, наконец, мы образуем последовательность чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots$, которые рекуррентно определяются формулами

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_n = \rho_{n-1} \max_{\mathfrak{Z}_n} (\delta_{n_1} \delta_{n_2} \ldots \delta_{n_r}) \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

то получим оценку

$$c_n \leqslant \gamma_n \delta_n \quad (n = 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

докажем ее полной индукцией. Для $n = 1$ формула тривиальна. Если считать ее доказанной при $n = 1, 2, \ldots, k-1$, причем $n = k > 1$, то из соотношений (3), (5) и (6) следует оценка

$$c_n \leqslant \rho_{n-1} \sum_{\mathfrak{Z}_n} (\gamma_{n_1} \delta_{n_1}) \ldots (\gamma_{n_r} \delta_{n_r}) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{n-1} \max_{\mathfrak{Z}_n} (\delta_{n_1} \ldots \delta_{n_r}) \sum_{\mathfrak{Z}_n} \gamma_{n_1} \ldots \gamma_{n_r} = \delta_n \gamma_n,$$

и наше утверждение доказано.

Если мы сумеем показать, что для последовательности δ_n, определенной формулами (5), справедливо неравенство

$$\delta_n > \delta^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

при соответствующем числе $\delta > 0$, то из неравенств (4) и (6) будет следовать оценка $c_n < (\gamma\delta)^n$, доказывающая сходимость рядов $\Phi(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ в круге $|\zeta| < (\gamma\delta)^{-1}$. Таким образом, доказательство сходимости приводится к доказательству неравенства (7) для последовательности δ_n. Докажем теперь вместо неравенства (7) более точную оценку

$$\delta_n \leqslant N_2^{n-1} n^{-2\nu} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

при

$$N_1 = 2^{2\nu+1}, \quad N_2 = 8^\nu N_1 = 2^{5\nu+1}, \tag{9}$$

причем ν есть положительное число, введенное неравенством (1). Для последующего доказательства методом индукции существенно, что при переходе от неравенства (7) к неравенству (8) добавлен множитель $n^{-2\nu}$. Если неравенство (8) доказано, то при $\delta = N_2$ неравенство (7) выполняется и ряд $\varphi(\zeta)$ сходится.

Чтобы подготовить доказательство неравенства (8), докажем еще одну оценку. Пусть p и q — целые числа, и пусть $p > q > 0$, тогда

$$\rho_{p-q}^{-1} = |\lambda^{p-q} - 1| = |\lambda^p - \lambda^q| =$$
$$= \bigl|(\lambda^p - 1) - (\lambda^q - 1)\bigr| \leqslant \rho_p^{-1} + \rho_q^{-1} \leqslant \frac{2}{\min(\rho_p,\, \rho_q)},$$

откуда с помощью неравенства (2) получаем неравенство

$$\min(\rho_p,\, \rho_q) \leqslant 2\rho_{p-q} \leqslant 2^{\nu+1}(p-q)^{\nu}. \tag{10}$$

Пусть r также целое число и пусть $r > p$, тогда справедливо неравенство

$$\min(\rho_r,\, \rho_p) \leqslant 2^{\nu+1}(r-p)^{\nu},$$

и, следовательно,

$$\min(\rho_r,\, \rho_p,\, \rho_q) \leqslant 2^{\nu+1} \min\bigl[(r-p)^{\nu},\, (p-q)^{\nu}\bigr]. \tag{11}$$

С помощью последнего неравенства докажем теперь, что для любых $\sigma + 1$ целых чисел $m_0,\, m_1,\, \ldots,\, m_\sigma$, удовлетворяющих условиям $m_0 > m_1 > \ldots > m_\sigma > 0$ и $\sigma \geqslant 0$, выполняется соотношение

$$\rho_{m_0}\rho_{m_1}\ldots\rho_{m_\sigma} < N_1^{\sigma+1}\Bigl[m_0 \prod_{k=1}^{\sigma}(m_{k-1} - m_k)\Bigr]^{\nu}, \tag{12}$$

где N_1 — число, определенное в (9). Для $\sigma = 0$ произведение следует считать равным единице, тогда в силу условия (2) утверждение верно. Предположим, что неравенство (12) верно для $\sigma = k-1$, и докажем его справедливость для $\sigma = k > 0$. Пусть ρ_{m_τ} наименьшее из $\sigma + 1$ чисел $\rho_{m_0},\, \ldots,\, \rho_{m_\sigma}$. Будем различать три случая: $0 < \tau < \sigma$, $\tau = 0$ и $\tau = \sigma$. Если $0 < \tau < \sigma$, т. е. если $k > 1$, то из неравенства (11) следует оценка

$$\rho_{m_\tau} = \min(\rho_{m_{\tau-1}},\, \rho_{m_\tau},\, \rho_{m_{\tau+1}}) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\nu+1} \min\bigl[(m_{\tau-1} - m_\tau)^{\nu}, \quad (m_\tau - m_{\tau+1})^{\nu}\bigr].$$

Полагая для сокращения $m_{\tau-1} - m_\tau = a$, $m_\tau - m_{\tau+1} = b$, получим

$$\min(a,\, b) \leqslant \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{2ab}{a+b},$$

и, следовательно,

$$\rho_{m_\tau} \leqslant 2^{\nu+1}\big[\min(a,\, b)\big]^\nu \leqslant 2^{2\nu+1}\Big(\frac{ab}{a+b}\Big)^\nu =$$
$$= N_1(m_{\tau-1} - m_\tau)^\nu (m_\tau - m_{\tau+1})^\nu (m_{\tau-1} - m_{\tau+1})^{-\nu}.$$

Если положить

$$A = \Big[m_0 \prod_{k=1}^{\sigma} (m_{k-1} - m_k)\Big]^\nu,$$

то по индукционному предположению получим

$$\rho_{m_0}\rho_{m_1}\ldots\rho_{m_\sigma} < \rho_{m_\tau} N_1^\sigma A \times$$
$$\times (m_{\tau-1} - m_{\tau+1})^\nu (m_{\tau-1} - m_\tau)^{-\nu} (m_\tau - m_{\tau+1})^{-\nu} \leqslant N_1^{\sigma+1} A,$$

т. е. неравенство (12) в этом случае справедливо. Но если $\tau = 0$ или $\tau = \sigma$, то из неравенства (10) следуют оценки

$$\rho_{m_0} < N_1(m_0 - m_1)^\nu \quad (\tau = 0),$$
$$\rho_{m_\sigma} < N_1(m_{\sigma-1} - m_\sigma)^\nu \quad (\tau = \sigma),$$

и отсюда по индукционному предположению

$$\rho_{m_0}\rho_{m_1}\ldots\rho_{m_\sigma} < \rho_{m_0} N_1^\sigma A m_1^\nu m_0^{-\nu} (m_0 - m_1)^{-\nu} <$$
$$< N_1^{\sigma+1} A \Big(\frac{m_1}{m_0}\Big)^\nu < N_1^{\sigma+1} A \quad (\tau = 0),$$
$$\rho_{m_0}\rho_{m_1}\ldots\sigma_{m_\sigma} < \rho_{m_\sigma} N_1^\sigma A (m_{\sigma-1} - m_\sigma)^{-\nu} < N_1^{\sigma+1} A \quad (\tau = \sigma),$$

поэтому неравенство (12) доказано полностью.

Вернемся теперь к доказательству неравенства (8), которое запишем в виде $\delta_n \leqslant \omega_n$ при $\omega_n = N_2^{n-1} n^{-2\nu}$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$. Тогда для любых двух натуральных чисел m, n вследствие равенств (9) получим оценку

$$\omega_m \omega_n \omega_{m+n}^{-1} = N_2^{-1}(m+n)^{2\nu}(mn)^{-2\nu} = N_2^{-1}(m^{-1}+n^{-1})^{2\nu} \leqslant N_2^{-1} 2^{2\nu} < 1,$$

следовательно,

$$\omega_m \omega_n < \omega_{m+n}. \tag{13}$$

Доказательство неравенства (8) также проводится методом полной индукции. Для $n = 1$ утверждение вследствие $\delta_1 = \omega_1 = 1$ тривиально. Предположим, что неравенство (8) верно для $n = 1, \ldots, k-1$, и докажем теперь, что оно верно для $n = k > 1$. По определению δ_n [соотношения (5)], существуют натуральные числа $g_1, g_2, \ldots, g_\alpha$, для которых

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_\alpha = n, \quad \alpha > 1, \tag{14}$$

так что

$$\delta_n = \rho_{n-1}\delta_{g_1}\delta_{g_2}\ldots\delta_{g_\alpha}. \tag{15}$$

При этом можно провести нумерацию в порядке убывания: $n > g_1 \geqslant \geqslant g_2 \geqslant \ldots \geqslant g_\alpha > 0$. В случае если $g_1 \leqslant \frac{n}{2}$, мы будем применять равенство (15) в том виде, в котором оно написано. Но если $g_1 > \frac{n}{2}$, следовательно также $g_1 > 1$, то можно даже утверждать в соответствии с равенством (14), что $\frac{n}{2} > g_2 \geqslant g_3 \geqslant \ldots \geqslant g_\alpha > 0$; в этом случае мы будем применять равенство (15), предварительно заменив n на g_1. Это даст нам разложение

$$\delta_{g_1} = \rho_{g_1-1}\delta_{h_1}\delta_{h_2}\ldots\delta_{h_\beta}$$
$$\text{при } n > h_1 + h_2 + \ldots + h_\beta = g_1 > h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_\beta > 0.$$

В случае $h_1 \leqslant \frac{n}{2}$ мы на этом оборвем процесс. В противном случае, если $h_1 > \frac{n}{2}$, тогда опять $h_1 > 1$, $\frac{n}{2} > h_2 \geqslant h_3 \geqslant \ldots \geqslant h_\beta > 0$ и тогда мы разложим с помощью того же самого процесса δ_{h_1}. Так как $n > g_1 > h_1 > \ldots > 0$, то процесс закончится после конечного числа шагов r. Изменим обозначения, полагая $n_0 = n$, $n_1 = g_1$, $n_2 = h_1, \ldots$ Тогда по построению

$$n = n_0 > n_1 > n_2 > \ldots > n_r > \frac{n}{2} \geqslant 1, \quad r \geqslant 0,$$

и мы получим последовательными заменами разложение

$$\delta_n = \prod_{l=0}^{r}(\rho_{n_l-1}\Delta_l), \quad \Delta_l = \delta_{k_1}\delta_{k_2}\ldots\delta_{k_\gamma}, \tag{16}$$

причем для натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_\gamma$ и γ, зависящих также от l, выполняются условия

$$\frac{n}{2} \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_\gamma > 0,$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\gamma = \begin{cases} n_l - n_{l+1} & (l = 0, \ldots, r-1) \\ n_r & (l = r). \end{cases}$$

Из неравенства (13) и из индукционного предположения для $l = 0, \ldots, r-1$ получим оценку

$$\begin{aligned} \Delta_l \leqslant \omega_{k_1}\omega_{k_2}\ldots\omega_{k_\gamma} \leqslant \omega_{k_1+k_2+\ldots+k_\gamma} = \\ = \omega_{n_l-n_{l+1}} = N_2^{n_l-n_{l+1}-1}(n_l-n_{l+1})^{-2\nu}. \end{aligned} \tag{17}$$

Выражение Δ_r можно оценить более точно с помощью неравенства

$$\Delta_r \leqslant \prod_{q=1}^{\gamma}(N_2^{k_q-1}k_q^{-2\nu}) = N_2^{n_r-\gamma}\prod_{q=1}^{\gamma}k_q^{-2\nu}, \tag{18}$$

причем на этот раз $k_1+k_2+\ldots+k_\gamma = n_r$. Если применить неравенство (12) при $\sigma = r$ и $m_l = n_l - 1$ ($l = 0, \ldots, r$) и положить $\gamma = s$, то из соотношений (16), (17) и (18) получится неравенство

$$\left.\begin{aligned} \delta_n < N_1^{r+1}\Bigl(n\prod_{p=1}^{r}(n_{p-1}-n_p)\Bigr)^{\nu}\times \\ \times\prod_{p=1}^{r}\bigl(N_2^{n_{p-1}-n_p-1}(n_{p-1}-n_p)^{-2\nu}\bigr)N_2^{n_r-s}\prod_{q=1}^{s}k_q^{-2\nu} = \\ = N_1^{r+1}N_2^{n-r-s}n^{\nu}\Bigl(\prod_{p=1}^{r}(n_{p-1}-n_p)\prod_{q=1}^{s}k_q^2\Bigr)^{-\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если обозначить, кроме того,

$$\begin{aligned} r+s=t, \quad x_p &= n_{p-1}-n_p \quad (p=1,\ldots,r), \\ y_q &= k_q \qquad\qquad (q=1,\ldots,s), \end{aligned}$$

то

$$\left.\begin{aligned} (x_1+\ldots+x_r)+(y_1+\ldots+y_s) = n > 1, \\ y_1+\ldots+y_s > \frac{n}{2}, \quad y_q \leqslant \frac{n}{2} \quad (q=1,\ldots,s), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

причем в случае $r = 0$ величина x_p не будет совсем входить в соотношения. Из обоих последних неравенств (20) следует, что $s \geqslant 2$, следовательно, $t \geqslant r+2 \geqslant 2$.

Мы покажем ниже, что при условиях (20) для t натуральных чисел x_p, y_q всегда справедливо неравенство

$$\prod_{p=1}^{r}x_p\prod_{q=1}^{s}y_q^2 \geqslant \left(\frac{n}{2t-2}\right)^3. \tag{21}$$

Так как, кроме того, $N_1^{r+1} \leqslant N_1^{t-1}$ и $2t-2 \leqslant 2^{t-1}$, то из неравенств (19) и (21) следует оценка

$$\delta_n < N_1^{t-1} N_2^{n-t} n^{\nu} (2^{1-t} n)^{-3\nu} = N_2^{n-1} n^{-2\nu} = \omega_n,$$

которую и нужно было доказать.

Останется еще доказать утверждение (21) при добавочном условии (20). Для $n \leqslant 2t-2$ утверждение (21) тривиально; поэтому пусть $n > 2t-2$. Если положить $g = [n/2]$, то

$$1 \leqslant t-1 \leqslant g \leqslant g+r.$$

Введем натуральное число $r+(y_1+\ldots+y_s) = \eta$, тогда из неравенств (20) следует оценка $g+r+1 \leqslant \eta \leqslant n$, так что в целом получим

$$2 \leqslant t \leqslant g+1 \leqslant g+r+1 \leqslant \eta \leqslant n. \tag{22}$$

Заметим также, что для нечетных n будет даже строго $t > 2$, и потому $g > 1$, $n > 4$. Для нечетных n из неравенств (20) получается более точно $y_q < \frac{n}{2}$, следовательно,

$$\begin{gathered} y_1 + y_2 < n, \quad (x_1 + \ldots + x_r) + (y_3 + \ldots + y_s) > 0, \\ t-2 = r+s-2 > 0. \end{gathered}$$

Используя величины g, η, из неравенств (20) получим соотношения

$$\left.\begin{gathered} x_1 + \ldots + x_r = n - \eta + r, \quad y_1 + \ldots + y_s = \eta - r, \\ y_q \leqslant g \quad (q = 1, \ldots, s). \end{gathered}\right\} \tag{23}$$

Теперь оценим прежде всего снизу произведения

$$x = \prod_{p=1}^{r} x_p, \quad y = \prod_{q=1}^{s} y_q$$

при условиях (23) и при фиксированном η. Очевидно, что произведение $x_1 x_2$ двух натуральных чисел x_1, x_2 с заданной суммой $x_1 + x_2 = a > 1$ имеет при $x_1 = 1$, $x_2 = a-1$ минимум, так что всегда $x_1 x_2 \geqslant a-1$. Отсюда по индукции следует, что в случае $r > 0$ произведение r натуральных чисел $x_1, \ldots, x_r$ с заданной суммой $a \geqslant r$ при $x_p = 1$ ($p = 1, \ldots, r-1$), $x_r = a - r + 1$ имеет минимум $a - r + 1$. Из соотношений (23) следует

$$x \geqslant n - \eta + 1,$$

и притом это, очевидно, справедливо также при $r = 0$, так как тогда $n = \eta$ и $x = 1$. Для оценки y примем во внимание условия $y_q \leqslant g$. Если $\eta - t + 1 \leqslant g$, то y минимально для фиксированного η при $y_q = 1$ $(q = 1, \ldots, s-1)$, $y_s = \eta - t + 1$, и тогда

$$y \geqslant \eta - t + 1 \quad (\eta - t + 1 \leqslant g).$$

В остальных случаях, когда $\eta - t + 1 > g$, оценку можно провести лучше. Рассмотрение, аналогичное проведенному, показывает, что в этих случаях y достигает своего минимума при $y_q = 1$ $(q = 1, \ldots, s-2)$, $y_{s-1} = \eta - t - g + 2$, $y_s = g$. Условие $y_{s-1} \leqslant g$ действительно при этом выполняется; так как для четных n получается $\eta \leqslant n = 2g$, $t \geqslant 2$, для нечетных n получается $\eta \leqslant n = 2g + 1$, $t \geqslant 3$, то всегда $\eta - t - g + 2 \leqslant g$. При этом получается неравенство

$$y \geqslant g(\eta - t - g + 2)\,(\eta - t + 1 > g).$$

Соединяя оценки для x и y, найдем

$$xy^2 \geqslant \begin{cases} (n - \eta + 1)(\eta - t + 1)^2 & (\eta \leqslant g + t - 1), \\ (n - \eta + 1)(\eta - t - g + 2)^2 g^2 & (\eta \geqslant g + t - 1). \end{cases} \tag{24}$$

Так как вследствие неравенств (22), во всяком случае, $t \leqslant g+1 \leqslant \eta \leqslant n$, то правые части неравенств (24) при заданных условиях являются положительными функциями целочисленного переменного η. Чтобы определить их минимум, оценим снизу многочлен

$$P(z) = (z - a)^\rho (b - z)^\sigma \quad (\rho > 0,\ \sigma > 0)$$

с действительными a и b, предполагая $a < z_1 < z_2 < b$ в интервале $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. Для $a < z < b$

$$P(z) > 0, \quad -\frac{d^2 \ln P(z)}{dz^2} = \rho(z-a)^{-2} + \sigma(b-z)^{-2} > 0,$$

следовательно, $\ln P^{-1}$ является выпуклой функцией, и потому

$$P(z) \geqslant \min\bigl[P(z_1),\ P(z_2)\bigr] \quad (z_1 \leqslant z \leqslant z_2).$$

Эту оценку мы применим при $z = \eta$ к правым частям неравенств (24). В первом случае выберем $z_1 = g + 1$, $z_2 = g + t - 1$, $P(z) = (n - z + {}$ ${} + 1)(z - t + 1)^2$, тогда получим

$$(n - \eta + 1)(\eta - t + 1)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \min\bigl[(n-g)(g-t+2)^2,\ (n-g-t+2)g^2\bigr].$$

Вследствие неравенств $0 \leqslant t-2 \leqslant g-1$ имеем тогда

$$\begin{aligned}(n-g-t+2)g^2-(n-g)(g-t+2)^2 &= \\ &=(t-2)\bigl[(2n-3g)g-(n-g)(t-2)\bigr] \geqslant \\ &\geqslant (t-2)\bigl[(2n-3g)g-(n-g)(g-1)\bigr] = \\ &=(t-2)\bigl[g+(n-2g)(g+1)\bigr] \geqslant t-2 \geqslant 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому

$$(n-\eta+1)(\eta-t+1)^2 \geqslant (n-g)(g-t+2)^2$$
$$(g+1 \leqslant \eta \leqslant g+t-1).$$

В случае справедливости второго неравенства (24) выберем

$$z_1 = g+t-1, \quad z_2 = n, \quad P(z) = (n-z+1)(z-t-g+2)^2$$

и получим

$$P(z_1) = n-g-t+2, \quad P(z_2) = (n-g-t+2)^2 \geqslant P(z_1),$$
$$(n-\eta+1)(\eta-t-g+2)^2g^2 \geqslant (n-g-t+2)g^2$$
$$(g+t-1 \leqslant \eta \leqslant n).$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение (25), в обоих случаях получим

$$xy^2 \geqslant (n-g)(g-t+2)^2. \tag{26}$$

Наконец, чтобы отсюда получить соотношение (21), положим $t = z+1$ и оценим снизу выражение

$$(t-1)(g-t+2) = z(g+1-z).$$

Из неравенств (22) следует, что $1 \leqslant z \leqslant g$, и потому $z(g+1-z) \geqslant g$. Для четных $n=2g$ отсюда получаем

$$(n-g)(g-t+2)^2 = g(g+1-z)^2 \geqslant g^3z^{-2} \geqslant \left(\frac{n}{2z}\right)^3. \tag{27}$$

Для нечетных $n=2g+1$ по одному из ранее сделанных замечаний $t \geqslant 3$, следовательно, $z \geqslant 2$ и $n \geqslant 5$. Тогда в этом случае

$$\begin{aligned}(n-g)(g-t+2)^2 &= (g+1)(g+1-z)^2 \geqslant \\ &\geqslant (g+1)g^2z^{-2} > \left(g+\frac{1}{2}\right)g^2z^{-2} = \\ &= \left(\frac{n}{2z}\right)^3 z\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \geqslant \left(\frac{n}{2z}\right)^3 2\left(1-\frac{1}{5}\right)^2 > \left(\frac{n}{2z}\right)^3.\end{aligned} \tag{28}$$

Из соотношений (26), (27) и (28) следует утверждение (21). Впрочем, из оценок очевидно, что в соотношении (21) равенство имеет место только для случая $n = 2$. Было бы, конечно, желательно данное нами длинное доказательство заменить более коротким.

§ 27. Проблема центра Пуанкаре

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

которая имеет $x = 0$ равновесным решением. Пусть функции $f_k(x)$ будут представлены в окрестности $x = 0$ сходящимися степенными рядами с действительными коэффициентами, не содержащими постоянных членов. Если через $x(t, \xi)$ обозначить решение системы (1) при начальном условии $x(0, \xi) = \xi$, то при каждом фиксированном действительном t соответствие между $x(t, \xi)$ и ξ представляет отображение S_t в достаточно малой окрестности начала координат, причем для этого отображения $\xi = 0$ есть неподвижная точка. Исследуем теперь, когда решение $x = 0$ будет устойчивым, и рассмотрим с помощью определений, данных в начале § 23, преобразование S_t в окрестности начала координат при всех действительных t. Чтобы это исследование сделать возможным, нужно соответствующей заменой переменных

$$x_k = \varphi_k(u) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

перевести систему (1) в наиболее простую форму. При этом φ_k должны быть опять степенными рядами относительно m новых переменных $u_1, \ldots, u_m$, не содержащими постоянных членов; тогда при подстановке (2) начало координат сохраняется. Приводимые нами соображения вполне аналогичны рассуждениям § 21, где для плоского аналитического отображения была установлена нормальная форма, поэтому решим задачу сначала формальными степенными рядами.

Определим, как и в § 14, формальное дифференцирование следующим образом:

$$\dot{x}_k = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{k u_l} \dot{u}_l \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = \varphi_u \dot{u}, \quad \varphi_u = \|\varphi_{ku_l}\|.$$

Примем, что преобразование (2) обратимо. Это означает, что степенной ряд для функционального определителя $|\varphi_u|$ имеет не равный нулю постоянный член, или, другими словами, что коэффициенты линейных частей φ_k имеют определитель, отличный от нуля. Подстановки (2) и (3) переводят систему (1) в

$$\dot{u} = \varphi_u^{-1} f\big[\varphi(u)\big], \tag{4}$$

и, наоборот, обратное преобразование переводит систему (4) в систему (1). Ставится задача об определении такой подстановки (2), чтобы система (4) имела нормальную форму. С этим связан следующий вопрос. Пусть наряду с системой (1) задана вторая система

$$\dot{u}_k = h_k(u) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

причем h_k будут степенными рядами по $u_1, \ldots, u_m$, не содержащими постоянных членов. При каких условиях существует обратимая подстановка, которая переводит систему (1) в систему (5)? Эта задача приводит, очевидно, к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$f\big[\varphi(u)\big] = \varphi_i h(u) \tag{6}$$

для неизвестных рядов φ_k. Необходимое условие для разрешимости уравнения (6) получается сразу после сравнения линейных членов. Если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}$ будут матрицами, которым соответствуют линейные члены $f(x)$, $h(u)$ и $\varphi(u)$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{H}$. Следовательно, у матриц $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ должны быть одинаковые элементарные делители.

В этом параграфе мы ограничимся только случаем $m = 2$. Собственные значения λ и μ матрицы $\mathfrak{F}$ могут быть различными. Если вместо x_1, x_2 написать x, y, системе (1) после осуществления подготовительного линейного преобразования можно придать вид

$$\dot{x} = f(x, y) = \lambda x + \ldots, \quad \dot{y} = g(x, y) = \mu y + \ldots. \tag{7}$$

В случае вещественных собственных значений $\lambda = \overline{\lambda}$, $\mu = \overline{\mu}$, и мы можем предположить, что $f(x, y) = \overline{f}(x, y)$, $g(x, y) = \overline{g}(x, y)$; в случае мнимых значений, когда $\lambda = \overline{\mu}$, можно считать, что $f(x, y) = \overline{g}(y, x)$. Рассмотрение линейной системы $\dot{x} = \lambda x$, $\dot{y} = \mu y$ дает основание думать, что равновесное решение $x = y = 0$ системы (7) только тогда будет устойчивым, если λ и μ будут чисто мнимыми; и это действительно будет установлено в следующем параграфе. Поэтому рассмотрим прежде всего чисто мнимый случай $\mu = \overline{\lambda} = -\lambda$. Нужно показать, что тогда подстановкой вида

$$\left.\begin{aligned} x = \varphi(u, v) = u + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots, \\ y = \psi(u, v) = v + \psi_2 + \psi_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

системе (7) можно придать нормальную форму

$$\dot{u} = pu, \quad \dot{v} = qv,$$

причем p и q будут степенными рядами только относительно произведения $w = uv$. Потребуем еще, чтобы ряды $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ не содержали при $k > 0$ соответственно членов вида uw^k и $w^k v$, и докажем, что тогда существует точно одна подстановка (8). В случае сходимости f, g при условии $p + q = 0$ ряды φ, ψ также окажутся сходящимися.

Итак, нужно найти решения соответствующих уравнению (6) уравнений в частных производных

$$\left.\begin{aligned} \varphi_u pu + \varphi_v qv = f(\varphi, \psi) = \lambda\varphi + \ldots, \\ \psi_u pu + \psi_v qv = g(\varphi, \psi) = -\lambda\psi + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

которые выражаются степенными рядами в форме (8), причем вместо p и q нужно подставить

$$p = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} w^r, \quad q = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} w^r.$$

Положим еще $a_{2r+1} = 0$, $b_{2r+1} = 0$ $(r = 0, 1, \ldots)$. Произведем теперь в уравнениях (9) сравнение коэффициентов. Сравнение линейных членов дает $a_0 = \lambda$, $b_0 = -\lambda$. Для применения метода индукции предположим, что в обеих частях уравнений (9) совпадают члены до степени $k - 1$ $(k > 1)$, откуда однозначно определяются $\varphi_\varkappa$, $\psi_\varkappa$ $(\varkappa < k)$, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ $(\varkappa < k - 1)$. Тогда для членов k-й степени сравнение коэффициентов в уравнениях (9) дает соотношения

$$\left.\begin{aligned}\lambda(\varphi_{ku}u - \varphi_{kv}v - \varphi_k) + a_{k-1}w^{(k-1)/2}u = P_k,\\ \lambda(\psi_{ku}u - \psi_{kv}v - \psi_k) + b_{k-1}w^{(k-1)/2}v = Q_k,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

причем P_k и Q_k являются однородными многочленами относительно u и v степени k, коэффициенты которых выражаются через коэффициенты уже известных $\varphi_\varkappa$, $\psi_\varkappa$ ($\varkappa < k$) и $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ ($\varkappa < k-1$). Прежде всего определим a_{k-1} и b_{k-1}. Для четных k по определению $a_{k-1} = 0$, $b_{k-1} = 0$; поэтому пусть $k = 2r+1$ нечетно. В φ_k (соответственно в ψ_k) по нашему предположению нет членов вида uw^r (соответственно $w^r v$), и из уравнений (10) следует, что a_{k-1} и b_{k-1} можно определить однозначно. Тогда при этом выборе a_{k-1} и b_{k-1} в обеих частях уравнений (10) коэффициенты при $u^{r+1}v^r$ (соответственно при $u^r v^{r+1}$) совпадают. Теперь φ_k и ψ_k уже определены, причем k может быть четным или нечетным. Если $\alpha u^g v^h$, $\beta u^g v^h$ суть члены типа $u^g v^h$ $(g+h=k)$ функций φ_k и ψ_k соответственно, то коэффициенты соответствующих членов в левых частях уравнений (10) равны $\lambda(g-h-1)\alpha$, $\lambda(g-h+1)\beta$. Так как при этом можно предположить, что $g \neq h+1$ и, соответственно, $g \neq h-1$, то отсюда следует, что φ_k и ψ_k определяются однозначно. Таким образом, индукция проведена, и показано, что уравнения (9) можно разрешить с помощью формальных степенных рядов φ, ψ, p и q.

Проведенное здесь сравнение коэффициентов содержит как частный случай $(m = 2)$ соответствующее рассмотрение § 14. Из полученного там результата следовало, что для однозначного определения степенного ряда должны выполняться условия вещественности

$$\varphi(u,\, v) = \overline{\psi}(v,\, u) \quad p(uv) = \overline{q}(uv). \tag{11}$$

С помощью найденной нормальной формы можно теперь легко рассмотреть вопрос об устойчивости равновесного решения. Нужно показать, что это решение тогда и только тогда устойчиво, если

$$p + q = \sum_{r=1}^{\infty}(a_{2r} + b_{2r})w^r = 0,$$

т. е. при

$$a_{2r} + b_{2r} = 0 \quad (r = 1,\, 2,\, \ldots), \tag{12}$$

и что в противном случае будет неустойчивость. Сначала допустим, что условие (12) выполнено не для всех r. Следовательно, пусть

$$p + q = cw^{n-1} + \ldots, \quad c \neq 0, \quad n > 1,$$

причем c в соответствии с условиями (11) является действительным. Если вместо t написать $2c^{-1}t$, то можно положить $c = 2$. Обращаясь к исследованию сходимости, оборвем ряды φ и ψ, соответственно, p и q, на членах порядка $2n-1$, соответственно $2n-2$, и полученное обозначим через $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$. Выполним теперь сходящуюся подстановку $x = \widetilde{\varphi}(u, v)$, $y = \widetilde{\psi}(u, v)$ и из уравнений (9) получим для решений системы (7) соотношения

$$\widetilde{\varphi}_u(u\widetilde{p} - \dot{u}) + \widetilde{\varphi}_v(v\widetilde{q} - \dot{v}) = \ldots, \quad \widetilde{\psi}_u(u\widetilde{p} - \dot{u}) + \widetilde{\psi}_v(v\widetilde{q} - \dot{v}) = \ldots,$$

следовательно,

$$\dot{u} - u\widetilde{p} = \ldots, \quad \dot{v} - v\widetilde{q} = \ldots,$$

где правые части являются сходящимися степенными рядами по u, v, причем эти ряды не содержат членов степени ниже $2n$. Отсюда получается дифференциальное уравнение

$$\dot{w} - 2w^n = \ldots, \tag{13}$$

где правая часть не содержит членов степени ниже $2n+1$. Теперь для действительного решения системы (7) $v = \overline{u}$ и $w = uv \geqslant 0$. Выберем некоторое положительное число r, такое, что для $w < r$ будет иметь место сходимость, тогда уравнение (13) имеет как следствие неравенство

$$\dot{w} \geqslant w^n. \tag{14}$$

Таким образом, w является монотонно возрастающей функцией t, пока $w < r$. Пусть при $t = 0$ будет $0 < w = w_0 < r$. Тогда из неравенства (14) следует, что

$$w - w_0 \geqslant w_0^n t \quad (t > 0);$$

это противоречит для $t = rw_0^{-n}$ предположению $w < r$. Следовательно, имеет место неустойчивость.

Пусть теперь условие (12) выполнено для всех r. В этом случае $q = -p$, и вступает в силу доказательство сходимости из § 15. Вследствие уравнений

$$\dot{u} = pu, \quad \dot{v} = qv, \quad p + q = 0$$

получим, что $w = uv$, p и q не зависят от t; интегрирование дает

$$u = u_0 e^{pt}, \quad v = v_0 e^{qt}. \tag{15}$$

В соответствии с условиями (11) для действительного решения нужно выбрать $v_0 = \overline{u}_0$, тогда p будет чисто мнимым. Если обозначить $u = r + is$ с действительными r и s, то в плоскости (r, s) получаются концентрические окружности, которые равномерно пробегаются за время $2\pi|p|^{-1}$. Это доказывает устойчивость и это же мотивирует название «проблема центра» [1]. Наконец, в силу соотношений (8) и (15) первоначальные координаты получаются сходящимися рядами Фурье по переменной $|p|t$.

Этим самым найден следующий метод, позволяющий решить вопрос об устойчивости равновесного решения системы (7), если $\lambda = -\mu$ будет чисто мнимым, не равным нулю:

Пусть все коэффициенты a_{2r}, b_{2r} $(r = 1, 2, \ldots)$ функций p, q найдены по рекуррентным формулам, тогда нужно установить, все или не все суммы $c_r = a_{2r} + b_{2r}$ равны нулю. При соответствующем выборе единицы времени можно положить $\lambda = i$. Если

$$f(x, y) = ix + \sum_{g+h>1} \alpha_{gh} x^g y^h, \quad g(x, y) = -iy + \sum_{g+h>1} \beta_{gh} x^g y^h,$$

где $\beta_{gh} = \overline{\alpha}_{hg}$ будут степенными рядами для f и g, то c_r является многочленом относительно α_{gh} и β_{gh} $(g + h < 2r + 2)$. В частности, можно принять, что f и g будут многочленами фиксированной степени l; тогда, следовательно, все c_r $(r = 1, 2, \ldots)$ будут многочленами от конечного числа α_{gh} и β_{gh} $(g + h \leqslant l)$. По теореме Гильберта о базисах в полиномиальных идеалах[1] существует такое натуральное число $m = m(l)$, что все c_r можно записать в виде

$$c_r = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{rk} c_k \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

причем коэффициенты γ_{rk} являются многочленами относительно α_{gh} и β_{gh}. Чтобы исследовать, все ли c_r одновременно равны нулю (что

[1] Теорему Гильберта о базисах в полиномиальных идеалах см. в книге: Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, Гостехиздат, 1947 г., т. II, стр. 27. — *Прим. ред.*

является необходимым и достаточным условием устойчивости), нужно разрешить только конечное число уравнений $c_k = 0$ для $k = 1, \ldots, m$. Но из доказательства основной теоремы Гильберта для этого случая еще не получается верхней границы для m как функции l. Для $l = 2$ известно, что $m(2) = 7$ [2–4], а для $l > 2$ действительное определение такой границы от $m(l)$ является интересной нерешенной задачей.

Здесь же нужно заметить, что в случае неустойчивости, следовательно, для $p + q \neq 0$, исследование сходимости рядов φ, ψ, p, q представляет собой также еще не решенную задачу.

§ 28. Теорема Ляпунова

В предыдущем параграфе была рассмотрена устойчивость равновесного решения системы (25; 1) только для случая $m = 2$ и чисто мнимых, не равных нулю собственных значений. Перейдем теперь к исследованию общего случая. Пусть собственными значениями матрицы $\mathfrak{F}$ линейных частей функций $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Теорема Ляпунова [1] гласит:

Если действительные части всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ отличны от нуля, то равновесное решение неустойчиво. Если это решение устойчиво, то все действительные части $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ будут равны нулю.

Доказательство этой теоремы будет нами дано при условии, что все $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны и при других предположениях, которые будут нами делаться в соответствующих местах. Для не рассматриваемого здесь случая кратных корней наше доказательство потребует дополнения, которое делает формулы более сложными, но и в этом случае нет ничего непреодолимого. Как известно, соответствующей линейной подстановкой систему можно привести к виду

$$\dot{x}_k = f_k(x) = \lambda_k x_k = \chi_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

которую и возьмем за основу, причем степенные ряды χ_k начинаются здесь с членов второго порядка. Пусть $\overline{\lambda}_k = \lambda_l$ при $l = l_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, тогда положим $\underline{x}_k = x_l$, и тогда можно предположить выполненными условия вещественности

$$f_k(x) = \overline{f}_l(\underline{x}) \quad (l = l_k;\ k = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Пусть действительная часть λ_k равна ρ_k. Можно считать, что $\rho_1 \leqslant \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots \leqslant \rho_m$; пусть $\rho_p < 0$, но $\rho_{p+1} \geqslant 0$, причем, очевидно, что допускается возможность $p = 0$ и $p = m$. Пусть вначале $p > 0$. Введем подстановки специального вида

$$u_k = x_k - \varphi_k(x_1, \ldots, x_p) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

где φ_k будут формальными степенными рядами первых p переменных $x_1, \ldots, x_p$, которые начинаются с членов второго порядка. Легко видеть, что эти подстановки образуют группу. Если положить

$$g_k(u) = g_k(u_1, \ldots, u_m) = \chi_k + \lambda_k \varphi_k - \sum_{l=1}^{p} \varphi_{k x_l} f_l,$$

причем справа x выражен через u с помощью обратной к (3) подстановки, то система (1) перейдет в

$$\dot{u}_k = \lambda_k u_k + g_k(u) \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Степенные ряды g_k начинаются опять с членов второго порядка. Теперь нужно определить коэффициенты в φ_k таким образом, чтобы ни в один из m рядов $g_1, \ldots, g_m$ не входило произведение степеней $u_1, \ldots, u_p$. Следовательно, должны выполняться уравнения

$$g_k(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

В соответствии с преобразованием (3) $x_1, \ldots, x_p$ являются обратимыми степенными рядами относительно p неизвестных $u_1, \ldots, u_p$ и при $u_{p+1} = 0, \ldots, u_m = 0$, кроме того,

$$x_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_p) \quad (k = p + 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Поэтому уравнения (5) переходят в условия

$$-\lambda_k \varphi_k + \sum_{l=1}^{p} \varphi_{k x_l} \lambda_l x_l = \chi_k - \sum_{l=1}^{p} \varphi_{k x_l} \chi_l \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

тождественные относительно $x_1, \ldots, x_p$, причем $x_{p+1}, \ldots, x_m$ выражены посредством равенств (6). Наоборот, из уравнений (3), (6) и (7) опять следуют уравнения (5). Произведем теперь в уравнениях (7) сравнение коэффициентов. Если $\sigma x_1^{g_1}, \ldots, x_p^{g_p}$ будет членом φ_k и если $g_1 + \ldots + g_p = h > 1$, то сравнение дает

$$\left(-\lambda_k + \sum_{l=1}^{p} g_l \lambda_l\right) \sigma = \gamma,$$

где γ есть многочлен относительно коэффициентов членов менее чем h-й степени относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Здесь нужно сделать следующее ограничивающее предположение: для всех систем неотрицательных целых чисел $g_1, \ldots, g_p$ при $g_1 + \ldots + g_p > 1$ всегда

$$\sum_{l=1}^{p} g_l \lambda_l \neq \lambda_k \quad (k = 1, \ldots, p). \tag{8}$$

Это в действительности будет только конечным числом условий; требование (8), очевидно, выполняется также при $k = p+1, \ldots, m$. Тогда индукцией можно показать, что система (5) имеет единственное решение в виде степенных рядов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Кроме того, в силу условий (2)

$$\varphi_k(x) = \overline{\varphi}_l(\underline{x}) \quad (l = l_k;\ k = 1, \ldots, m).$$

Доказательство сходимости проводится обычным способом. Пусть

$$x_1 + \ldots + x_m = X, \quad \chi_k \prec \frac{c_1 X^2}{1 - c_1 X} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Так как действительные части всех собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ отрицательны и так как требование (8) выполнено, то

$$g_1 + \ldots + g_p < c_2 \left| -\lambda_k + \sum_{l=1}^{p} g_l \lambda_l \right| \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Следовательно, для однозначно определяемого решения $\psi_1, \ldots, \psi_m$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sum_{l=1}^{p} \psi_{k x_l} x_l = c_2 \left(1 + \sum_{l=1}^{p} \psi_{k x_l}\right) \frac{c_1 X^2}{1 - c_1 X} \quad (k = 1, \ldots, m),\\ x_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_p) \quad (k = p+1, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

получим условие $\varphi_k \prec \psi_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Но из уравнений (9) $\psi_1 = \ldots = \psi_m$. Если положить также $x_1 = \ldots = x_p = x$, то, очевидно, достаточно доказать сходимость ряда для решения $\psi(x)$ уравнения

$$x\psi_x = (1 + \psi_x) \frac{c_3 (x + \psi)^2}{1 - c_4 (x + \psi)}.$$

Получающиеся отсюда рекуррентные формулы для коэффициентов степенного ряда ψ показывают, что для $x^{-1}\psi$ мажорирующей функцией Ψ будет решение кубического уравнения

$$\Psi = \frac{c_3 x(1+\Psi)^3}{1 - c_4 x(1+\Psi)}.$$

Наше доказательство сходимости закончено.

В соответствии с уравнениями (4) и (5) для нашего уравнения можно получить частное решение

$$u_k = \begin{cases} c_k e^{\lambda_k t} & (k = 1, \ldots, p) \\ 0 & (k = p+1, \ldots, m). \end{cases} \tag{10}$$

Так как вещественные части величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ отрицательны, то при $t \to -\infty$ уже не будет устойчивого равновесия, если $p > 0$. При замене t на $-t$ собственные значения λ_k заменяются на $-\lambda_k$. Мы доказали, что устойчивость равновесного решения может иметь место только тогда, когда действительные части всех m собственных значений равны нулю, а это и есть второе утверждение теоремы Ляпунова.

Пусть теперь все вещественные части $\rho_1, \ldots, \rho_m$ отличны от нуля, следовательно, $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots \leqslant \rho_p < 0 < \rho_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant \rho_m$. Пусть ε есть положительная постоянная, выбранная достаточно малой, и пусть определены все действительные решения нашей системы, которые для всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 < \varepsilon. \tag{11}$$

Для выражения

$$\sum_{k=p+1}^{m} |u_k|^2 = w \tag{12}$$

в силу уравнений (4) справедливо дифференциальное уравнение

$$\dot{w} = 2 \sum_{k=p+1}^{m} \rho_k |u_k|^2 + \sum_{k=p+1}^{m} \left[u_k \overline{g}_k(\overline{u}) + \overline{u}_k g_k(u) \right],$$

где в правой части в соответствии с уравнениями (5) каждый член второго слагаемого может делиться на произведение двух из переменных u_k, $\overline{u}_k$ $(k = p+1, \ldots, m)$. Так как это слагаемое начинается с членов третьего порядка, то его абсолютное значение в соответствии с соотношениями (11) и (12) для достаточно малого ε не меньше $\rho_{p+1}w$, и потому

$$\dot{w} \geqslant 2 \sum_{k=p+1}^{m} \rho_k |u_k|^2 - \rho_{p+1} w \geqslant \rho_{p+1} w, \quad \frac{d(we^{-\rho_{p+1}t})}{dt} \geqslant 0,$$

т. е. выражение $we^{-\rho_{p+1}t}$ монотонно растет для всех $t \geqslant 0$. С другой стороны, оно стремится к нулю при $t \to \infty$, потому что $\rho_{p+1} > 0$ и $w < \varepsilon$. Следовательно, для найденного решения имеем $w = 0$, $u_k = 0$ $(k = p+1, \ldots, m)$, и из уравнений (4) и (5) следует (10). Наоборот, из решения (10) следует опять условие (11), если выбрать

$$\sum_{k=1}^{p} |c_k|^2 < \varepsilon.$$

Мы нашли все решения, которые остаются при $t \to \infty$ вблизи равновесного решения. Но из их поведения при $t \to -\infty$ следует, что условие (11) выполняется только для самого равновесного решения; следовательно, имеет место неустойчивость, т. е. доказана первая половина теоремы Ляпунова. Затем мы видим, что для устойчивости в будущем необходимо, чтобы собственные значения не имели положительных вещественных частей, и достаточно, чтобы они имели только отрицательные вещественные части. Кроме сделанного с самого начала предположения о том, что собственные значения являются простыми, в ходе исследования предполагалось также выполненным условие, выраженное неравенством (8). Если эти ограничения не принимать во внимание, то можно соответственно обобщить наш подход к нормальной форме, которая задается уравнениями (4) и (5). Но мы не будем этого делать, так как никаких новых точек зрения здесь не возникает.

В частном случае, когда все собственные значения имеют отрицательные действительные части, имеем $p = m$, и если выполнены условия (8), система уравнений (4) становится линейной:

$$\dot{u}_k = \lambda_k u_k \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Случай, когда все вещественные части положительны, можно получить, заменив знак у t. Однако условие для знаков вещественных частей собственных значений нельзя использовать для рекуррентного определения степенных рядов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и можно использовать только для доказательства сходимости этих рядов. Спрашивается, всегда ли можно получить линейную нормальную форму (13) с помощью аналитического преобразования, если все собственные значения различны и условия (8) удовлетворены с m вместо p. Для исследования этого вопроса нужно привлечь те же идеи, что и в первых двух параграфах этой главы, посвященных теоретико-функциональной проблеме центра. Вместо делителей $\lambda^n - \lambda$ $(n = 2, 3, \ldots)$ теперь войдут выражения

$$-\lambda_k + \sum_{l=1}^{m} g_l \lambda_l = A_k(g_1, \ldots, g_m) = A_k \quad (k = 1, \ldots, m)$$

с неотрицательными целыми $g_1, \ldots, g_m$ и $g_1 + \ldots + g_m = h > 1$. С одной стороны, можно дать пример, в котором подпоследовательность $A_k(g_1, \ldots, g_m)$, как и последовательность (23; 11), очень быстро стремится к нулю, откуда тотчас же следует расходимость при соответствующих рядах $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$; с другой стороны, можно провести доказательство в предположении $|A_k| > \varepsilon h^{-\mu}$ $(k = 1, \ldots, m)$, аналогичном условию (23; 22) [2]. Тогда отсюда легко получается, что для преобразования заданной системы (1) в линейную нормальную форму (13) случай расходимости будет в подобных случаях исключением, как и для рядов Шрёдера.

§ 29. Терема Дирихле

Приводимый ниже достаточный критерий устойчивости был дан еще Лагранжем, но доказательство этого критерия было впервые дано для частного случая Дирихле [1] и позднее обобщено Ляпуновым. Рассмотрим опять систему

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

причем $f_k(x)$ будут сходящимися степенными рядами относительно $x_1, \ldots, x_m$ в окрестности начала координат, не содержащими постоянных членов. Тогда теорема об устойчивости гласит:

Если система (1) имеет не зависящий от времени интеграл $g(x)$, который при $x = 0$ имеет относительный экстремум в строгом смысле, то равновесное решение $x = 0$ будет устойчивым.

Заменяя, если понадобится, $g(x)$ на $-g(x)$, можно ограничиться рассмотрением случая минимума, при котором $g(0) < g(x)$ для

$$0 < \sum_{k=1}^{m} x_k^2 = r^2 \leqslant \rho^2$$

и достаточно малого $\rho > 0$. Обозначим опять через $x(t, \xi)$ решение системы (1), которое имеет начальные условия $x(0, \xi) = \xi$; пусть S_t обозначает отображение ξ на $x(t, \xi)$. Пусть далее $0 < \varepsilon < \rho$ и пусть $\mu(\varepsilon) = \mu$ есть минимум $g(x)$ на сфере $r = \varepsilon$, следовательно, $g(0) < \mu$. Пусть $\mathfrak{W}$ будет множеством точек внутри сферы $r < \varepsilon$, в которых $g(x) < \mu$. Это множество является открытым и содержит $x = 0$, следовательно, оно является окрестностью $x = 0$. Если теперь ξ находится в $\mathfrak{W}$, то для $x = x(t, \xi)$ справедливо неравенство $g(x) < \mu$, так как $g(x)$ есть интеграл. Но, кроме этого, x лежит также внутри сферы $r < \varepsilon$, так как иначе в силу непрерывности нашлось бы по меньшей мере одно такое t, что $r = \varepsilon$, и тогда было бы $g(x) \geqslant \mu$. Следовательно, точка $x(t, \xi)$ также принадлежит $\mathfrak{W}$, и, следовательно, $\mathfrak{W}$ будет инвариантно для всех t при отображении S_t. Но отсюда следует устойчивость.

Применим этот критерий к системе Гамильтона

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

и положим, как и раньше, $z_k = x_k$, $z_{k+n} = y_k$. Пусть z обозначает вектор-столбец с составляющими z_l $(l = 1, \ldots, 2n)$ и пусть функция Гамильтона $H(x, y) = (1/2)\ z'\mathfrak{S}z + \ldots$ будет сходящимся в окрестности $z = 0$ степенным рядом, причем $\mathfrak{S}$ будет симметричной матрицей. Тогда H будет интегралом системы (2) и $z = 0$ будет равновесным решением. Если матрица $\mathfrak{S}$ положительна, то функция H имеет при $z = 0$ минимум в строгом смысле. Отсюда следует, что решение $z = 0$ будет тогда устойчивым. Впрочем, может быть и так, что $z'\mathfrak{S}z$ не будет знакоопределенной, и все-таки будет устойчивость. Это показывает при $n = 2$ пример:

$$2H = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2.$$

Для рассмотренных в § 12 решений Лагранжа, которые являются во вращающейся системе координат равновесными, функция Гамильтона имеет в точках равновесия седловину, и критерий Дирихле не дает ответа на вопрос об устойчивости.

Чтобы установить связь между теоремами Дирихле и Ляпунова для канонической системы дифференциальных уравнений, введем для системы (2) собственные значения λ_k $(k = 1, \ldots, 2n)$. Последние, как это следует из § 13, будут корнями уравнения $|\lambda\mathfrak{J}+\mathfrak{S}| = 0$. Пусть теперь $z \neq 0$ есть собственный вектор, соответствующий $\lambda = \lambda_k$, и, следовательно, $(\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S})z = 0$. Тогда

$$\overline{z}'\mathfrak{S}z = -\lambda\overline{z}'\mathfrak{J}z, \tag{3}$$

где через $\overline{z}$ обозначен комплексно сопряженный с z вектор. Так как матрица $\mathfrak{J}' = -\mathfrak{J}$ действительная и альтернированная, то

$$\overline{\overline{z}'\mathfrak{J}z} = z'\mathfrak{J}\overline{z} = -\overline{z}'\mathfrak{J}z,$$

таким образом, число $\overline{z}'\mathfrak{J}z$ будет чисто мнимым. Если теперь матрица $\mathfrak{S}$ положительна, то и $\overline{z}'\mathfrak{S}z > 0$, следовательно, в соответствии с равенством (3), собственное значение λ будет чисто мнимым. В силу теоремы Ляпунова это будет необходимым условием для устойчивости. Приведенный выше простой пример показывает также, что условие Ляпунова может быть выполненным, и, несмотря на это, $z'\mathfrak{S}z$ может не быть знакоопределенной.

§ 30. Нормальная форма системы Гамильтона

Будем исходить опять из канонической системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_k = H_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -H_{u_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

причем функция Гамильтона H представлена в окрестности точки $u_k = 0$, $v_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ сходящимся степенным рядом, который начинается с членов второго порядка и не зависит от t. Если под w понимать вектор-столбец с $2n$ составляющими $w_k = u_k$, $w_{k+n} = v_k$, то разложение H начинается с членов $H = (1/2)w'\mathfrak{S}w + \ldots$, где $\mathfrak{S}$ — некоторая симметрическая матрица порядка $2n$. Корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ соответствующего уравнения $|\lambda\mathfrak{J} + \mathfrak{S}| = 0$ можно занумеровать так, чтобы $\lambda_{k+n} = -\lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; мы будем предполагать, что все они различны.

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы с помощью канонического преобразования в виде степенных рядов установить для заданной системы (1) нормальную форму [1]. Для этого переведем сначала, как и в § 13, в нормальную форму линейные члены правых частей уравнений (1), следовательно, квадратичные члены H. Новые переменные обозначим через x_k, y_k и положим $z_k = x_k$, $z_{k+n} = y_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; пусть z — вектор-столбец с составляющими z_l $(l = 1, \ldots, 2n)$. Подходящей линейной канонической подстановкой $w = \mathfrak{C}z$ системе (1) придадим форму

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

причем

$$H = H_2 + H_3 + \ldots, \quad H_2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k;$$

здесь H_l $(l = 2, 3, \ldots)$ — однородный многочлен степени l относительно $z_1, \ldots, z_{2n}$. Подвергнем далее систему (2) каноническому преобразованию вида

$$\left.\begin{aligned} x_k = \varphi_k(\xi, \eta) = \xi_k + \sum_{l=2}^{\infty} \varphi_{kl}, \\ y_k = \psi_k(\xi, \eta) = \eta_k + \sum_{l=2}^{\infty} \psi_{kl} \quad (k = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где φ_{kl}, ψ_{kl} — однородные многочлены степени l относительно $2n$ новых переменных ξ, η. При этом система (2) переходит в новую систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_k = H_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -H_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где

$$H = \sum_{l=2}^{\infty} H_l\bigl[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)\bigr] = H_2(\xi, \eta) + \ldots. \tag{5}$$

Наложим еще одно ограничение: будем считать, что линейная зависимость

$$g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + \ldots + g_n\lambda_n = 0$$

с целыми $g_1, g_2, \ldots, g_n$ существует только в тривиальном случае $g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 0$. Теперь нужно показать, что при подходящем выборе $2n$ формальных степенных рядов φ_k, ψ_k правая часть равенства (5) будет формальным степенным рядом только относительно n произведений $\omega_k = \xi_k\eta_k$.

Для доказательства представим искомое каноническое преобразование (3) с помощью производящей функции $v(x,\, \eta)$, которая вводится как формальный степенной ряд вида

$$v(x,\, \eta) = v_2 + v_3 + \ldots, \quad v_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k\eta_k.$$

Здесь v_l ($l = 3,\, 4,\, \ldots$) — однородный многочлен степени l относительно x_k, η_k ($k = 1,\, \ldots,\, n$) с неопределенными коэффициентами. Тогда аналогично преобразованию (3; 4) замена

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= v_{\eta_k} = x_k + \sum_{l=3}^{\infty} v_{l\eta_k}, \\ y_k &= v_{x_k} = \eta_k + \sum_{l=3}^{\infty} v_{lx_k} \quad (k = 1,\, \ldots,\, n) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

определяет формальное каноническое преобразование. Если разрешить это преобразование относительно x_k, то оно приобретет форму (3), а тогда рассуждениями § 2 легко показать, что это преобразование формально переводит систему (2) в систему (4), независимо от сходимости рядов. Если подставить вместо x_k, y_k в формулы (6) ряды φ_k, ψ_k, определяемые равенствами (3), то из (6) будет следовать, что для $l = 2,\, 3,\, \ldots$ каждый коэффициент многочленов $\varphi_{kl} + v_{l+1,\, \eta_k}(\xi,\, \eta)$, $\psi_{kl} - v_{l+1,\, x_k}(\xi,\, \eta)$ является многочленом относительно коэффициентов многочленов $v_2,\, \ldots,\, v_l$ с целыми рациональными коэффициентами. Если теперь

$$H = \sum_{l=2}^{\infty} K_l(\xi,\, \eta)$$

будет разложением H по однородным многочленам относительно ξ_k, η_k, то $K_2 = H_2(\xi,\, \eta)$ и

$$K_l = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \bigl[\xi_k v_{lx_k}(\xi,\, \eta) - \eta_k v_{l\eta_k}(\xi,\, \eta)\bigr] + \ldots \quad (l = 3,\, 4,\, \ldots),$$

где коэффициенты невыписанных членов правой части являются многочленами относительно коэффициентов многочленов $v_2, \ldots, v_{l-1}$ и линейными функциями коэффициентов многочленов $H_3, \ldots, H_l$. Если в $v_l(\xi, \eta)$ входит произведение степеней

$$P = \prod_{k=1}^{n} \xi_k^{\alpha_k} \eta_k^{\beta_k}$$

с коэффициентом γ, то вследствие соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\xi_k P_{\xi_k} - \eta_k P_{\eta_k}) = P \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\alpha_k - \beta_k)$$

коэффициентом при P в многочлене K_l будет

$$\varkappa = \gamma\lambda + \ldots, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\alpha_k - \beta_k),$$

причем дальнейшие слагаемые $\varkappa$ являются опять многочленами относительно коэффициентов многочленов $v_2, \ldots, v_{l-1}$ и линейными функциями коэффициентов многочленов $H_3, \ldots, H_l$. По сделанному выше предположению о линейной независимости $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, λ отлично от нуля, если $\alpha_k \neq \beta_k$ хотя бы для одного $k = 1, \ldots, n$, т. е. если P не является произведением только степеней $\omega_k = \xi_k \eta_k$. Следовательно, в этом случае можно однозначно определить γ, потребовав $\varkappa = 0$. Чтобы зафиксировать γ также в остальных случаях $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, потребуем дополнительно, чтобы в выражение

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k y_k - \eta_k x_k)$$

не входили произведения степеней только ω_k, если оно представлено рядом по ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, n)$. Часть ряда, состоящая из членов l-й степени в Φ, будет следующей:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\xi_k v_{l x_k}(\xi, \eta) + \eta_k v_{l \eta_k}(\xi, \eta) \right] + \ldots = l v_l(\xi, \eta) + \ldots \quad (l = 3, 4, \ldots),$$

так что фактически остающиеся γ теперь также определяются однозначно. Поэтому доказано, что точно для одного степенного ряда v формальное каноническое преобразование, заданное соотношениями (6), переводит функцию Гамильтона H в степенной ряд относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и в то же самое время переводит Φ в ряд, который не содержит произведений степеней только ω_k. Коэффициенты многочлена v_l однозначно определяются через коэффициенты многочленов $H_3, \ldots, H_l$, и, следовательно, то же самое справедливо и для коэффициентов многочленов

$$\varphi_{k,l-1}, \psi_{k,l-1} \quad (k = 1, \ldots, n,\ l = 3, 4, \ldots).$$

Для рассмотрения условий вещественности примем во внимание, что $H(z) = H(\mathfrak{C}^{-1}w)$ является действительным степенным рядом относительно $w_1, \ldots, w_{2n}$. Далее, матрицы $\mathfrak{C}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ и $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}^{-1}\overline{\mathfrak{C}}$ являются симплектическими. Каноническое преобразование (3) можно сокращенно записать в виде $z = \varphi(\zeta)$, где ζ — вектор-столбец с $2n$ составляющими ξ_k, η_k $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$H(z) = H(\mathfrak{C}^{-1}w) = \overline{H}(\overline{\mathfrak{C}}^{-1}w) = \overline{H}(\mathfrak{T}^{-1}z).$$

Далее, $H\big(\varphi(\zeta)\big)$ является степенным рядом относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$, и ряд $\Phi(\zeta) = \zeta'\mathfrak{J}z = \zeta'\mathfrak{J}\varphi(\zeta)$ не содержит произведений степеней ω_k. В соответствии с преобразованием (14; 5) линейная подстановка $z = \mathfrak{J}z^*$ дает явно $z_k^* = \rho_k z_l$ $(l = l_k;\ k = 1, \ldots, 2n)$, где $\rho_k = -i$ для чисто мнимых λ_k и $\rho_k = 1$ в остальных случаях. Отсюда или также вследствие уравнений (13; 22) и (13; 23) (без предыдущей нормировки ρ_k) получаем $\omega_k^* = \xi_k^*\eta_k^* = -\omega_k$ для чисто мнимых λ_k и $\omega_k^* = \omega_l$ в противном случае. Поэтому $\overline{H}\big[\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta)\big] = H\big[\mathfrak{T}\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta)\big]$ также будет степенным рядом относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$, в то время как

$$\overline{\Phi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta) = (\mathfrak{T}^{-1}\zeta)'\mathfrak{J}\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta) = \zeta'\mathfrak{J}\mathfrak{T}\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta)$$

не содержит произведений степеней только ω_k. Так как подстановка $z = \mathfrak{T}\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta)$ также каноническая и имеет форму (3), то из доказанной выше теоремы о единственности следует, что она совпадает с $z = \varphi(\zeta)$. Следовательно,

$$\varphi(\zeta) = \mathfrak{T}\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta),\ \overline{H}\big[\overline{\varphi}(\mathfrak{T}^{-1}\zeta)\big] = H\big[\varphi(\zeta)\big]. \tag{7}$$

Пусть теперь подстановка $z = \varphi(\zeta)$ будет сходящейся в окрестности $\zeta = 0$. Чтобы w было действительным, должно быть $\mathfrak{C}z = w = \overline{w} = \overline{\mathfrak{C}}\,\overline{z}$, следовательно, $z = \mathfrak{T}\overline{z}$, что в соответствии с первым уравнением (7) равносильно условию $\zeta = \mathfrak{T}\overline{\zeta}$. Последнее означает, что $\eta_k = i\overline{\xi}_k$ для чисто мнимых λ_k, а в противном случае $\xi_l = \overline{\xi}_k$, $\eta_l = \overline{\eta}_k$ ($l = l_k$; $k = 1, \ldots, n$). Но тогда ω_k будет чисто мнимым для чисто мнимого λ_k и $\omega_l = \overline{\omega}_k$ в противном случае. Так как H является степенным рядом относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$, то система Гамильтона (4) переходит в систему

$$\dot{\xi}_k = H_{\omega_k}\xi_k, \quad \dot{\eta}_k = -H_{\omega_k}\eta_k \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

откуда получаем

$$\dot{\omega}_k = \dot{\xi}_k\eta_k + \xi_k\dot{\eta}_k = 0.$$

Следовательно, ω_k являются интегралами. Тогда производные H_{ω_k} также не зависят от t, и (8) можно непосредственно проинтегрировать

$$\xi_k = \alpha_k e^{H_{\omega_k}t}, \quad \eta_k = \beta_k e^{-H_{\omega_k}t} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

с постоянными α_k, β_k и $\omega_k = \alpha_k\beta_k$. Так как α_k, β_k являются начальными значениями ξ_k, η_k при $t = 0$, то условия вещественности для чисто мнимых λ_k дают $\beta_k = i\overline{\alpha}_k$, или иначе $\alpha_l = \overline{\alpha}_k$, $\beta_l = \overline{\beta}_k$ ($l = l_k$); аналогично ω_k будут тогда чисто мнимыми и соответственно $\omega_l = \overline{\omega}_k$. В силу второго уравнения (7) H_{ω_k} также будут чисто мнимыми и соответственно $H_{\omega_l} = \overline{H}_{\omega_k}$, так что решение (9) в самом деле удовлетворяет условиям вещественности для произвольного действительного t.

Таким образом, в случае сходимости ряда для подстановки, преобразующей систему (1) в нормальную форму (4), интегрирование данной выше системы в окрестности решения $w = 0$, соответствующего положению равновесия, осуществляется полностью. Так как ряд H_{ω_k} начинается с λ_k, то, в частности, для нашего случая еще раз получается формулировка теоремы Ляпунова. Но отсюда можно, наоборот, исследовать устойчивость равновесного решения, если все собственные значения λ_k будут чисто мнимыми, и получить подстановкой показательных функций (9) в $w = \mathfrak{C}\varphi(\zeta)$ представление общего решения u_k, v_k системы (1) через тригонометрические ряды [2–5].

Можно высказать предположение, что упомянутый в § 5 неизвестный метод Дирихле, может быть, был связан с только что высказанным утверждением. Но, к сожалению, этот метод не дает того, что от него сначала можно было ожидать. Прежде всего можно дать пример, подобный примеру § 23 в теоретико-функциональной проблеме центра, в котором, хотя функция Гамильтона H и представлена сходящимся рядом по u_k, v_k, но ряд для $v(x,\,\eta)$ не сходится ни в какой окрестности $x = 0$, $\eta = 0$. Для этого достаточно положить $n = 2$ и $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = i\rho$, где ρ — действительное иррациональное число, которое можно достаточно хорошо аппроксимировать рациональными числами, тогда соответствующим выбором H можно достичь желаемого результата. Мы построим в данном параграфе такой пример. Можно думать также, что расходимость рядов, с помощью которых система Гамильтона преобразуется в нормальную форму, представляет исключение, подобно тому, как это было в § 24 для рядов Шрёдера, или, как это следует из замечания в конце § 26, для общих систем $(25;1)$. Однако недавно было показано [6], что уже для $n = 2$ сходимость рядов для подстановок, переводящих системы Гамильтона в нормальную форму, может иметь место только тогда, когда для коэффициентов H выполнено бесконечное число независимых условий, выраженных аналитическими уравнениями. Поэтому в общем случае имеет место расходимость, а тогда, в частности, оказывается несостоятельным данное в предыдущем абзаце доказательство устойчивости. С другой стороны, общеизвестно, что существуют системы Гамильтона, которые можно перевести в нормальную форму сходящимися рядами; нужно только взять H в виде сходящегося степенного ряда относительно $\omega_1,\,\ldots,\,\omega_n$ и произвести затем какое-нибудь каноническое преобразование, выраженное сходящимися степенными рядами.

Хотя, вообще говоря, ряды для преобразования в нормальную форму расходятся, их все же можно применять для исследования решений системы Гамильтона (1) вблизи равновесного решения. Если положить $\sigma = \mathfrak{C}\zeta$, то в соответствии с первым уравнением (7) каноническое преобразование $w = \mathfrak{C}\varphi(\mathfrak{C}^{-1}\sigma) = \sigma + \ldots$ будет иметь только действительные коэффициенты. Это преобразование задается в силу уравнений $(3;4)$ производящим степенным рядом v. Если этот степенной ряд v оборвать на членах со степенью $l > 1$, то получим действительное аналитическое каноническое преобразование $w = g(\sigma) = \sigma + \ldots$, которое совпадает с предыдущим до членов степени l. Это преобразование, следовательно, переводит заданную функцию Гамильтона H в сходящийся степенной ряд с действительными коэффициентами, члены которого совпадают с членами формального ряда $H\bigl[\varphi(\mathfrak{C}^{-1}\sigma)\bigr]$ по меньшей мере до степени l

включительно. Отбросим теперь в ряде $H\bigl[\mathfrak{C}^{-1}g(\sigma)\bigr]$ все члены выше l-го порядка и сделаем обратную к $w = g(\sigma)$ подстановку, что может дать сходящийся ряд с действительными коэффициентами H^*. Тогда у системы Гамильтона

$$\dot{u}_k = H^*_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -H^*_{u_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

имеется то свойство, что разложения правых частей систем (10) и (1) будут совпадать до членов l-го порядка, и, кроме того, систему (10) по построению можно аналитическим каноническим преобразованием $w = g(\mathfrak{C}\zeta)$ перевести в нормальную форму. Поэтому систему (10) можно в окрестности равновесного решения $w = 0$ полностью проинтегрировать в соответствии с формулами (9). Привлекая обычные оценки из теории дифференциальных уравнений, мы можем использовать этот факт для аппроксимирования решений данной системы (1). Из упомянутого сообщения Дирихле Кронекеру нельзя установить, имеется ли здесь связь с его методом, который, по-видимому, определяет последовательные приближения к решениям дифференциальных уравнений механики.

С помощью сходящегося канонического преобразования $w = g(\mathfrak{C}\zeta)$ заданная функция Гамильтона H превращается в степенной ряд $H = F + G$ по $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$, причем G начинается с членов степени $l+1$, а F является многочленом степени l, который зависит только от произведений $\xi_k\eta_k = \omega_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Пусть все собственные значения λ_k чисто мнимые. Тогда для действительных решений $i^{-1}\xi_k\eta_k = \xi_k\overline{\xi}_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Полагая

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{1/2} = q \geqslant 0,$$

в силу соотношений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= H_{\eta_k} = F_{\omega_k}\xi_k + G_{\eta_k}, \\ \dot{\eta}_k &= -H_{\xi_k} = -F_{\omega_k}\eta_k - G_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

получим дифференциальное уравнение

$$2iq\dot{q} = \sum_{k=1}^{n} (\eta_k G_{\eta_k} - \xi_k G_{\xi_k}).$$

Если теперь $\delta = \delta_l$ достаточно малое положительное число, которое зависит от l, то имеет место оценка

$$|\dot{q}| < A_l q^l \quad (0 < q < \delta),$$

причем A_l и введенные далее B_l, C_l и D_l являются положительными постоянными, зависящими от l. Отсюда интегрированием получаем

$$|q^{1-l} - q_0^{1-l}| \leqslant (l-1)A_l|t| \quad (-T < t < T), \tag{12}$$

если в интервале $-T < t < T$ функция $q = q(t)$ остается все время меньше δ и $q_0 = q(0) > 0$ — начальное значение. Пусть теперь, кроме того,

$$q_0 < \frac{1}{2}\delta, \quad (l-1)A_l q_0^{l-1} T < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Тогда из неравенства (12), используя непрерывность $q(t)$, получим

$$\frac{2}{3}q_0 < q < 2q_0 < \delta, \quad |q - q_0| \leqslant (2l-2)A_l q_0^l |t| \quad (|t| < T).$$

Затем в силу

$$(\xi_k \eta_k)^{\cdot} = \eta_k G_{\eta_k} - \xi_k G_{\xi_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

имеем

$$\bigl|\xi_k\eta_k - (\xi_k\eta_k)_0\bigr| \leqslant B_l q_0^{l+1}|t| \quad (|t| < T).$$

Наконец, интегрирование уравнений (11) дает

$$\bigl|\xi_k - (\xi_k)_0 e^{(F_{\omega_k})_0 t}\bigr| \leqslant C_l\bigl(q_0^l|t| + q_0^{l+2}t^2\bigr) \quad (|t| < T),$$

что в силу неравенств (13) может быть при $l > 2$ сведено к неравенству

$$\bigl|\xi_k - (\xi_k)_0 e^{(F_{\omega_k})_0 t}\bigr| \leqslant D_l q_0^l |t| \quad \Bigl(q_0 < \frac{\delta}{2};\ |t| < \frac{q_0^{1-l}}{(2l-2)A_l}\Bigr). \tag{14}$$

Неравенство (14) дает оценку точности приближения к решениям заданной системы Гамильтона, выраженным тригонометрическими рядами [7]. Ввиду наличия постоянных D_l и A_l, которые могут очень сильно расти вместе с l, эти приближения при постоянном q_0 при $l \to \infty$ имеют, вообще говоря, только характер полусходимости, как это имеет место, например, для известного ряда Стирлинга. В частности, было показано, что

$$\frac{2}{3}q_0 < q < 2q_0 \quad \left(|t| < \frac{q_0^{1-l}}{(2l-2)A_l}\right);$$

это является лишь слабым результатом в нерешенной задаче устойчивости. Если перейти к первоначальным координатам u_k, v_k и положить

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k^2 + v_k^2) = \rho^2, \quad \rho \geqslant 0,$$

то получится следующий результат:

Если для момента времени $t = 0$ расстояние от начала координат $\rho = \rho_0$ меньше ε_l, то $\rho \leqslant 2\rho_0$ по крайней мере для интервала времени длины $\delta_l\rho_0^{1-l}$; при этом ε_l и δ_l $(l = 3, 4, \ldots)$ являются положительными числами, зависящими от l. Чтобы получить наиболее благоприятную оценку, нужно при заданном ρ_0 получить наименьшую верхнюю грань величин $\delta\rho_0^{1-l}$ для значений l с $\varepsilon_l > \rho_0$.

Если преобразование системы Гамильтона (2) в нормальную форму (4) производится сходящимся степенным рядом, то

$$\omega_k = \xi_k\eta_k = x_k y_k + \ldots \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

будут n независимыми интегралами системы (2), сходящимися в некоторой окрестности начала координат. Обобщая это определение, мы будем называть формальный степенной ряд $g(x, y)$, который формально удовлетворяет справедливому для интегралов уравнению

$$\sum_{k=1}^{n}(g_{x_k}H_{y_k} - g_{y_k}H_{x_k}) = 0, \tag{16}$$

также интегралом системы (2). Таким образом, в этом смысле система Гамильтона (2) всегда обладает при сделанных выше предположениях о линейной независимости $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ теми же n интегралами ω_k $(k = 1, \ldots, n)$. Покажем теперь, что каждый интеграл $g(x, y)$ можно записать в виде формального ряда по $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Действительно, так как разложение разности $\omega_k - x_k y_k$ по степеням $x_1, \ldots, y_n$ начинается с кубических членов, то рекуррентным процессом можно построить такой степенной ряд $P(\omega)$ по ω_k, что степенной ряд $h(x,\,y) = g(x,\,y) - P(\omega)$ относительно переменных $x_1,\,\ldots,\,y_n$ не содержит членов вида

$$c(x_1y_1)^{\alpha_1}\ldots(x_ny_n)^{\alpha_n}.$$

Так как $h(x,\,y)$ также является интегралом, то удовлетворяется формальное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}(h_{x_k}H_{y_k} - h_{y_k}H_{x_k}) = 0. \tag{17}$$

Если бы степенной ряд $h(x,\,y)$ не обращался тождественно в нуль, то он содержал бы член наименьшей степени вида $cx_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\alpha_n}y_n^{\beta_n}$, где $c \neq 0$. Из уравнения (17) путем сравнения коэффициентов получим

$$c\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \beta_k)\lambda_k = 0,$$

следовательно, $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 1,\,\ldots,\,n)$. Но это невозможно, так как $h(x,\,y)$ не содержит по построению членов этого вида. Следовательно, $h(x,\,y) = 0$, $g(x,\,y) = P(\omega)$, и утверждение доказано.

Дадим теперь пример такого сходящегося степенного ряда для H, чтобы интеграл $\omega_1 = x_1y_1 + \ldots$ расходился; в частности, тогда получится, что систему Гамильтона, образованную с этой функцией H, нельзя перевести сходящимся каноническим преобразованием в нормальную форму. Для этого положим $n = 2$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = i\rho$ с действительным иррациональным числом ρ, так что условие линейной независимости λ_1, λ_2 выполнено. Положим затем

$$H = i(x_1y_1 + \rho x_2y_2) + \sum_{p,\,q} a_{pq}(x_1^py_2^q + x_2^qy_1^p), \tag{18}$$

где a_{pq} могут принимать только значения $0,\ \pm1$. В частности, пусть $a_{pq} = 0$, если не оба p и q делятся на 4. Тогда в силу вещественности $y_k = i\overline{x}_k$ $(k = 1,\,2)$ и H также действительно. В качестве ρ выберем иррациональное число интервала $0 < \rho < 1$, которое можно достаточно хорошо аппроксимировать рациональными числами; именно, неравенство

$$0 < |p - \rho q| < \frac{1}{q\,!} \tag{19}$$

должно иметь бесконечно много решений в натуральных числах p, q, делящихся на 4. Легко видеть, что число α, построенное в § 23, имеет это свойство. Тогда для интеграла

$$\omega_1 = g(x,\, y) = x_1 y_1 + \sum_{l=3}^{\infty} g_l(x,\, y)$$

выполняется уравнение (16), и из сравнения коэффициентов при членах l-го порядка следует соотношение для составной части g_l функции $g(x,\, y)$

$$x_1 g_{lx_1} - y_1 g_{ly_1} + \rho(x_2 g_{lx_2} - y_2 g_{ly_2}) + i \sum_{p+q=l} p a_{pq} (x_1^p y_2^q - x_2^q y_1^p) = \ldots,$$

где правая часть будет некоторым однородным многочленом l-й степени относительно x_1, y_1, x_2, y_2, коэффициенты которого выражаются только через коэффициенты многочленов $g_3, \ldots, g_{l-1}$ и через a_{pq} при $p + q < l$. Для слагаемых $c_{pq} x_1^p y_2^q$ функции g_l отсюда следует

$$(p - \rho q) c_{pq} + i p a_{pq} = \gamma_{pq}, \tag{20}$$

причем γ_{pq} выражаются через коэффициенты многочленов $g_3, \ldots, g_{l-1}$ и через a_{rs} при $r + s < l$. Выше уже отмечалось, что коэффициенты членов менее чем l-го порядка в канонической подстановке (3) определяются однозначно через коэффициенты членов H до l-го порядка включительно. Следовательно, $g_3, \ldots, g_{l-1}$ также определены в зависимости от a_{rs} при $r + s < l$, и это же тогда имеет место и для γ_{pq}. Пусть теперь p, q будут положительными решениями неравенства (19), делящимися на 4; выберем $a_{pq} = \pm 1$ так, чтобы $|p a_{pq} + i \gamma_{pq}| \geqslant p \geqslant 1$; это можно сделать с помощью неравенства треугольника. Тогда в силу соотношений (19) и (20)

$$|c_{pq}| \geqslant q\,!, \tag{21}$$

и притом это соотношение выполняется для бесконечно многих q. Для всех других пар p, q положим $a_{pq} = 0$. Вследствие неравенств (19) и (21) ряд $g(x,\, y)$ не может сходиться ни в какой окрестности начала координат.

Следовательно, в этом примере преобразование в нормальную форму представляется расходящимся рядом. Но, с другой стороны, квадратичный член

$$i(x_1y_1 + \rho x_2y_2) = -(x_1\overline{x}_1 + \rho x_2\overline{x}_2)$$

функции H является определенно отрицательным, поэтому по теореме Дирихле решение $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ будет устойчивым. Этот результат замечателен тем, что в теоретико-функциональной проблеме центра в случае устойчивости преобразование в нормальную форму всегда задается сходящимся рядом. Для задачи об устойчивости системы Гамильтона аналогичной теоремы не имеется.

Подобным же образом, как и в только что приведенном примере, можно также показать [8], что существует каноническая система дифференциальных уравнений с аналитической функцией Гамильтона H, для которой вообще нет никаких сходящихся интегралов $g(x, y)$, кроме самой H и сходящихся степенных рядов относительно H. В случае $n = 2$ для построения такой функции H можно исходить опять из формул (18) и (19), но при этом $1/q!$ нужно заменить еще более быстро стремящейся к нулю функцией от q. Точнее, любую функцию Гамильтона с квадратичной частью $i(x_1y_1 + \rho x_2y_2)$ произвольно малым изменением коэффициентов членов высших порядков можно превратить в такую, которая уже обладает указанным свойством, т. е. у которой отсутствуют другие сходящиеся интегралы. В связи с этим можно упомянуть теорему Пуанкаре [9]. В ней рассматриваются функции Гамильтона $H(z, \mu)$, которые, кроме $z_1, \ldots, z_{2n}$, зависят еще от параметра μ, причем аналитически около точки $\mu = 0$. Тогда теорема гласит, что при некоторых предположениях относительно $H(z, 0)$ и производной $H_\mu(z, 0)$, которые в общем случае выполнены, не существует других сходящихся степенных рядов по $2n + 1$ переменным $z_1, \ldots, z_{2n}$ и μ, являющихся интегралами системы Гамильтона, соответствующей функции $H(z, \mu)$, кроме степенных рядов по самим H и μ. Однако в теореме Пуанкаре ничего не говорится о фиксированных значениях параметра μ. Мы уже упоминали выше, что система Гамильтона в случае линейно независимых собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ может приводиться к нормальной форме подстановкой, задаваемой расходящимся степенным рядом, если не существует n независимых сходящихся интегралов; здесь мы построили такой пример. Теперь можно было бы думать, что множество чисто мнимых корней λ_k $(k = 1, \ldots, n)$, для которых преобразование в нормальную форму представлено расходящимися рядами, имеет n-мерную меру Лебега, равную нулю, как это было в теоретико-функциональной проблеме центра. Но это не так. Именно, более глубокими исследованиями можно показать, что при произвольном l из каждой функции Гамильтона, которая не сводится к ряду только по $H_2(\zeta)$, произвольно малым изменением коэффициентов при членах порядка выше l-го можно сделать такую, для которой соответствующая каноническая система не имеет преобразования в нормальную форму, представленного сходящимися степенными рядами. Это утверждение, очевидно, не зависит от собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Резюмируем главные результаты по устойчивости систем Гамильтона, причем будем считать n собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различными и отличными от нуля. Если нет ни одного чисто мнимого собственного значения, то по теореме Ляпунова заведомо будет иметь место неустойчивость. Пусть теперь по крайней мере одно собственное значение чисто мнимое и пусть именно λ_1 и будет этим собственным значением, и притом наибольшим по абсолютной величине. Тогда ни одно из $n-1$ чисел $\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$ $(k = 2, \ldots, n)$ не будет целым, и теорема существования § 14 дает однопараметрическое семейство периодических решений в окрестности равновесного решения. Отсюда следует, что положение равновесия не будет неустойчивым. С другой стороны, для устойчивости по теореме Ляпунова необходимо, чтобы все собственные значения были чисто мнимыми. Поэтому здесь будет смешанный случай, когда существуют собственные значения как чисто мнимые, так и не чисто мнимые. Наконец, остается случай, когда все собственные значения являются чисто мнимыми. Если имеется интеграл, который на равновесном решении имеет экстремум в строгом смысле, то по теореме Дирихле будет устойчивость; в частности, это имеет место, если квадратичная часть функции Гамильтона знакоопределенна. Если собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, кроме того, еще линейно независимы, то устойчивость будет иметь место только тогда, когда преобразование в нормальную форму задается сходящимся степенным рядом. Но в этом случае заведомо существует интеграл, который имеет в начале координат минимум, как, например,

$$-i(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = \xi_1\overline{\xi}_1 + \ldots + \xi_n\overline{\xi}_n \quad (\eta_k = i\overline{\xi}_k).$$

При этом все же неизвестно никакого конечного процесса, который позволил бы установить, является ли преобразование к нормальной форме сходящимся или расходящимся. Если каноническое преобразование расходится, и, кроме того, функция Гамильтона не является знакоопределенной, то рассмотренными методами нельзя установить, имеет ли место устойчивость или смешанный случай. Правда, пока неизвестно еще ни одного примера с линейно независимыми чисто мнимыми собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, в котором фактически имел бы место смешанный случай. Следовательно, можно думать, что такой случай вообще не может встретиться.

Применим эти довольно скромные результаты к плоской задаче трех тел. В качестве исходных выберем решения Лагранжа, которые, согласно § 16, во вращающейся системе координат являются равновесными решениями. Возьмем в качестве системы Гамильтона шесть дифференциальных уравнений (16; 27), которые представляют собой результат исключения из уравнений движения интегралов центра инерции и интегралов площадей. Тогда если в случае равностороннего треугольника

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2, \tag{22}$$

то все собственные значения будут чисто мнимыми, а функция Гамильтона не будет знакоопределенной. В этом случае нет метода, который позволил бы установить устойчивость, хотя, во всяком случае, здесь нет неустойчивости. Если, напротив,

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) > (m_1 + m_2 + m_3)^2,$$

то не все собственные значения будут чисто мнимыми, и, следовательно, не будет устойчивости. Для прямолинейных решений всегда имеется действительное собственное значение, следовательно, здесь также не будет устойчивости. Да и фактически в солнечной системе существуют малые планеты, которые образуют с Солнцем и Юпитером примерно равносторонний треугольник[1], и для этих планет выполняются условия (22), но нет малых планет, движение которых хотя бы приблизительно соответствовало прямолинейным решениям.

§ 31. Отображения, сохраняющие объем

Перенесем теперь определение устойчивости равновесного решения на любые другие решения системы дифференциальных уравне-

[1]Как показано в работе Ю. А. Рябова [*Астр. Журн.*, XXXIII, 1956, №6 (1936)], эти малые планеты — троянцы — имеют весьма малое отношение к треугольным точкам либрации. — *Прим. перев.*

ний $\dot{x}_k = f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$. Пусть m функций $f_k(x)$ удовлетворяют условиям Липшица в области $\mathfrak{R}$ m-мерного действительного x-пространства и пусть $x = x(t)$ — некоторое решение нашей системы, которое для всех действительных моментов времени остается в $\mathfrak{R}$. Под окрестностью этого решения будем понимать открытое подмножество $\mathfrak{U}$ множества $\mathfrak{R}$, которое содержит внутри себя всю рассматриваемую траекторию $x = x(t)$. Может случиться, что траектория проходит произвольно близко к каждой точке $\mathfrak{R}$, так что само $\mathfrak{R}$ будет единственной такой окрестностью. Чтобы устранить эту и другие подобные ей трудности, определим устойчивость только для периодических решений $x(t)$. Назовем такое периодическое решение устойчивым, если для каждой окрестности $\mathfrak{U}$ его траектории можно найти такую другую окрестность $\mathfrak{B}$, что траектория, начинающаяся в произвольной точке $\mathfrak{B}$, лежит полностью в $\mathfrak{U}$; при этом очевидно, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$. Соответственно можно обобщить данные в § 23 определения неустойчивости и смешанного случая. В частности, если периодическое решение является равновесным решением, то новые определения совпадают со старыми.

Для системы Гамильтона

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

можно дать более слабое определение устойчивости периодического решения $x = x(t)$, $y = y(t)$. Пусть для этого исходного решения $E = \gamma$ и пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{U}$ определены так же, как и выше. Под окрестностями мы теперь понимаем $(2n-1)$-мерные сечения $\mathfrak{U}_\gamma$ множества $\mathfrak{U}$ поверхностью $E = \gamma$. В соответствии с этим можно говорить об изоэнергетической устойчивости, если для каждой окрестности $\mathfrak{U}_\gamma$ заданной замкнутой траектории существует такая окрестность $\mathfrak{B}_\gamma$, что траектория, начинающаяся в любой точке $\mathfrak{B}_\gamma$, остается в $\mathfrak{U}_\gamma$. Совершенно ясно, что из устойчивости следует изоэнергетическая устойчивость. Соответственно можно определить изоэнергетическую неустойчивость и смешанный случай.

Будем далее рассматривать систему Гамильтона (1) только для $n = 2$ и предположим, что E будет аналититической на $\mathfrak{R}$. Как и в § 20, для периодического решения системы можно определить сохраняющее объем аналитическое отображение S, имеющее начало координат своей неподвижной точкой. Вопрос о наличии изоэнергетической устойчивости, неустойчивости или смешанного случая для исходного решения, очевидно, сводится к вопросу о том, будет ли отображение S в начале координат устойчивым, неустойчивым или смешанным. Напишем аналитическое отображение S, сохраняющее объем, в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= g(x,\, y) = ax + by + \ldots, \\ y_1 &= h(x,\, y) = cx + dy + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где степенные ряды для $g(x,\, y)$ и $h(x,\, y)$ сходятся в некоторой окрестности начала координат и имеют действительные коэффициенты. Для собственных значений λ и μ матрицы линейной части отображения (2) будем иметь $\lambda\mu = 1$, поскольку $ad - bc = 1$.

В гиперболическом случае λ и μ будут действительными и различными. Для этого случая неустойчивость S была уже доказана в § 21. Обобщение этого результата на случай числа измерений, большего двух, было сделано Леви – Чивита [1] и представляет собой аналог первой части теоремы Ляпунова.

В параболическом случае $\lambda = \mu = \pm 1$. Случай $\lambda = \mu = -1$ можно свести к случаю $\lambda = \mu = 1$, если рассматривать вместо S преобразование S^2. Леви – Чивита также исследовал этот случай и установил условие для коэффициентов квадратичных членов преобразования S, которое является необходимым для устойчивости.

В эллиптическом случае $|\lambda| = 1$, $\lambda^2 \neq 1$. Рассмотрим прежде всего тот частный случай, когда λ является корнем целой степени из единицы. Пусть $\lambda^q = 1$ и $\lambda^k \neq 1$ $(k = 1,\, \ldots,\, q-1)$, следовательно, λ будет примитивным q-м корнем из единицы и $q > 2$. Если мы рассмотрим S^q вместо S, то придем опять к параболическому случаю $\lambda = \mu = 1$. Но простое рассуждение показывает, что для преобразования S^q выпадают все члены степеней от второй до $(q-2)$-й, и в соответствии с этим только что упомянутый результат Леви – Чивита дает для $q > 3$ лишь тривиальное следствие. Иначе обстоит дело для $q = 3$; для этого случая Леви – Чивита также рассмотрел ограниченную задачу трех тел. Отображение, сохраняющее объем, которое следует при этом рассматривать, было введено еще в конце в § 22. Если обозначить период исходного решения через $\tau = 2\pi|\omega|^{-1}$, то будем иметь $\lambda = e^{i\tau}$ и, в частности, для $\omega = 3$ получим также $q = 3$. Леви – Чивита определил квадратичные члены преобразования S^3 при $\omega = 3$ и установил, что соотношение, выражающее условие устойчивости, не выполняется, и, следовательно, устойчивости здесь не будет.

Можно даже доказать, что для случая $q = 3$ имеет место неустойчивость S, если не выполнено некоторое простое условие для коэффициентов квадратичных членов. Запишем отображение S в комплексной форме

$$z_1 = \lambda z + az^2 + bz\overline{z} + c\overline{z}^2 + \ldots, \quad z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \tag{3}$$

где степенной ряд относительно z и $\overline{z}$ сходится при достаточно малых значениях $r^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}$, и докажем, что при $c \neq 0$ будет неустойчивость. При этом даже не надо предполагать, что S сохраняет объем. В силу соотношения $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ для итераций S получим

$$z_2 = \lambda^2 z + (\lambda^2 + \lambda)az^2 + (\lambda + 1)bz\overline{z} + 2\lambda c\overline{z}^2 + \ldots,$$
$$z_3 = z + 3\lambda^2 c\overline{z}^2 + \ldots, \quad z_3^3 = z^3 + 9\lambda^2 c(z\overline{z})^2 + \ldots,$$

и, заменяя z, z_1 на ρz, ρz_1, где $\rho\overline{\rho}^{\,-2} = 9\lambda^2 c$, будем иметь

$$z_3^3 = z^3 + (z\overline{z})^2 + \ldots = z^3 + (z\overline{z})^2(1 + \eta r), \tag{4}$$

где $|\eta| r < \frac{1}{2}$ для достаточно малых $r < r_0$. Положим еще

$$S^n z = z_n, \quad z_{3n}^3 = Z_n = X_n + iY_n,$$
$$|z_{3n}|^3 = |Z_n| = R_n \quad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

и пусть для $z = z_0$ при всех n будет $|z_n| < r_0$. Тогда, согласно (4), получим

$$X_{n+1} \geqslant X_n + \frac{1}{2} R_n^{4/3} \geqslant X_n, \tag{5}$$

что означает монотонность последовательности X_n. Так как эта последовательность в силу неравенства $|X_n| \leqslant |Z_n| < r_0^3$ ограничена, то, в частности, разность $X_{n+1} - X_n$ стремится к нулю, как для $n \to \infty$, так и для $n \to -\infty$, следовательно, в силу (5) $R_n \to 0$, а поэтому $X_n \to 0$, следовательно, $X_n = 0$ для всех n и вместе с тем $R_n = 0$ для всех n. Поэтому обязательно $z = 0$, что и доказывает неустойчивость. Впрочем, легко видеть, что для сохраняющего объем отображения S, вообще говоря, $c \neq 0$.

Подобным же образом для произвольного $q > 0$ можно рассмотреть пример неустойчивого отображения, сохраняющего объем [2], при котором λ будет примитивным корнем q-й степени из единицы. Как было показано в § 21, двумерное отображение, сохраняющее объем, можно представить с помощью производящей функции $w = w(x, \eta)$ в виде

$$y = w_x, \quad \xi = w_\eta, \tag{6}$$

если $w_{x\eta} \neq 0$. Мы примем сначала, что $q \neq 4$, следовательно, $\lambda^2 \neq -1$, и положим

$$\begin{gathered}\mu = \overline{\lambda}, \quad 2\sigma = \lambda + \mu \neq 0, \quad \sigma u = x + i\lambda\eta, \quad \sigma v = x - i\mu\eta, \\ 2iw = \frac{\sigma}{2}(\mu u^2 - \lambda v^2) + f(u, v).\end{gathered} \tag{7}$$

Пусть при этом $f(u, v)$ будет многочленом от u и v, начинающимся с членов третьей степени и удовлетворяющим условию $f(v, u) = -\overline{f}(u, v)$. Тогда w будет многочленом от x и η с действительными коэффициентами и $w_{x\eta} = 1 + \ldots$; следовательно, $w_{x\eta} \neq 0$ при $x = 0$, $\eta = 0$. С помощью производящей функции w, согласно (6), получаем формулы

$$2iy = \mu u - \lambda v + \sigma^{-1}(f_u + f_v), \quad 2\xi = u + v + \sigma^{-1}(\lambda f_u - \mu f_v),$$

и, далее, $2i\eta = u - v$, $2x = \mu u + \lambda v$. Полагая $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, напишем преобразование в комплексной форме

$$\left.\begin{aligned} z &= \mu u + \frac{1}{2\sigma}(f_u + f_v), \quad & \overline{z} &= \lambda v - \frac{1}{2\sigma}(f_u + f_v), \\ \zeta &= u + \frac{1}{2\sigma}(\lambda f_u - \mu f_v), \quad & \overline{\zeta} &= v + \frac{1}{2\sigma}(\lambda f_u - \mu f_v), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\zeta = \lambda z - f_v. \tag{9}$$

Поэтому λ и μ будут собственными значениями рассматриваемого отображения. Рассмотрим частный случай

$$f(u, v) = q^{-1}uv(u^q - v^q),$$

который и дает функцию с нужными свойствами. Если обозначить через A_l и B_l сходящиеся степенные ряды относительно z и $\overline{z}$, которые начинаются с членов степени l, то, обращая формулы (8), получим

$$u = \lambda z + A_{q+1}, \quad v = \mu\overline{z} + B_{q+1}.$$

Так как $\lambda^q = 1$, то

$$f_v = q^{-1}u\big[u^q - (q+1)v^q\big] = q^{-1}\lambda z\big[z^q - (q+1)z^q\big] + A_{2q+1},$$

и соотношение (9) дает тогда в явном виде преобразование

$$\zeta = \lambda z\big\{1 + q^{-1}\big[(q+1)\overline{z}^q - z^q\big]\big\} - A_{2q+1}. \tag{10}$$

Нужно доказать, что S неустойчиво в точке $z = 0$.

Из формулы (10) следует

$$\zeta^q = z^q\bigl[1 + (q+1)\overline{z}^q - z^q\bigr] + A_{3q}, \tag{11}$$

откуда, используя сокращенные обозначения

$$z_n = S^n z, \quad z_n^q = Z_n = X_n + iY_n,$$
$$R_n = |Z_n| = |z_n|^q \quad (n = 0,\, \pm1,\, \ldots),$$

при достаточно малом $\delta > 0$ получим оценку

$$X_{n+1} \geqslant X_n + (q+1)R_n^2 - R_n^2 - \bigl|A_{3q}(z_n,\, \overline{z}_n)\bigr| \geqslant X_n + \frac{1}{2}R_n^2,$$

если $R_n < \delta$. Отсюда можно заключить, как и из неравенства (5), что преобразование (10) неустойчиво.

При замене (7) существенно, чтобы было $q \neq 4$, так как иначе $\sigma = 0$. Но если предыдущее отображение S построить для $q = 8$, то собственные значения для S^2 будут примитивными корнями четвертой степени из единицы, и оба преобразования будут, очевидно, одинаково вести себя в смысле устойчивости. Таким образом, показано, что для каждого собственного значения λ, являющегося корнем из единицы, существует сохраняющее объем отображение с собственными значениями λ, $\overline{\lambda}$, которое будет неустойчивым. Данное отображение имеет и дополнительное свойство, а именно оно является алгебраическим.

Остается рассмотреть случай, когда $|\lambda| = 1$, но λ не является корнем из единицы. Как показано в § 21, в этом случае отображение (2) с помощью сохраняющей объем подстановки C, выраженной формальными степенными рядами, можно привести к нормальной форме

$$U = C^{-1}SC, \quad \xi_1 = u\xi, \quad \eta_1 = v\eta. \tag{12}$$

При этом $u = \lambda + \ldots$, $v = \mu + \ldots$ будут формальными степенными рядами по $\omega = \xi\eta$; далее, $uv = 1$, и условие вещественности $v = \overline{u}$ выполнено. В случае сходимости ряда для C действительным значениям первоначальных переменных x, y соответствуют комплексно сопряженные значения ξ, $\eta = \overline{\xi}$, и тогда формулы (12) показывают, что $|\xi_1| = |\xi|$. Следовательно, при этом отображении сохраняются все концентрические окружности в плоскости ξ с центром в точке $\xi = 0$. Отсюда видно, что в случае сходимости ряда для преобразования к нормальной форме U, отображение S будет обязательно устойчиво в точке $x = 0$, $y = 0$.

Но относительно сходимости ряда для подстановки C имеет место положение, аналогичное рассмотренному в § 28 в связи с вопросом о существовании нормальной формы системы Гамильтона. Именно, можно дать примеры сохраняющих объем эллиптических отображений, для которых C расходится, и можно даже установить необходимое условие для сходимости C в виде бесконечного числа независимых аналитических уравнений для коэффициентов разложений (2) функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$. Это показывает, что, как правило, встречается случай расходимости, а случай сходимости является исключением. При изучении теоретико-функциональной проблемы центра было показано, что из устойчивости вытекает сходимость ряда Шрёдера, следовательно, сходимость ряда для преобразования конформного отображения к нормальной форме. Но метод доказательства § 23 нельзя перенести на рассматриваемый случай, так как для сохраняющих объем отображений нет теоремы, аналогичной теореме Римана в теории конформных отображений. Дифференциальное уравнение $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = 1$ не имеет столь хорошо развитой теории, как система $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$. Нужно еще заметить, что неизвестен пример эллиптического преобразования S с $\lambda^n \neq 1$ $(n = 3, 4, \ldots)$, в котором не была бы доказана устойчивость.

Предположим теперь, что формальный степенной ряд, участвующий в нормальной форме (12), не сводится к постоянной, т. е. что не тождественно $u = \lambda$. Тогда теорема Биркгофа о неподвижной точке, доказанная в § 22, гласит, что в каждой окрестности $\mathfrak{U}$ начала координат и для каждого достаточно большого натурального $n > n^0(\mathfrak{U})$ можно найти отличные от начала координат неподвижные точки преобразования S^n, все образы которых при S^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ также лежат в $\mathfrak{U}$. Но отсюда, в частности, следует, что S не является неустойчивым. Следовательно, вообще не будет неустойчивости, если степенной ряд u не равен тождественно постоянной. Остается открытым вопрос о том, имеет ли в этом случае место устойчивость или смешанный случай. Как уже было замечено, не известно примера для смешанного случая, и не известно, будет ли при $u = \lambda$ действительно неустойчивость. Если бы это удалось доказать, то был бы получен пример со сходящимся рядом u и расходящейся подстановкой C; не известно также, возможно ли такое сочетание.

Если мы выразим произведение переменных $\omega = \xi\eta$, входящих в нормальную форму (12), через старые переменные x и y, то получим формальный степенной ряд $\omega = \varphi(x, y)$, который в силу тождества $\xi_1\eta_1 = \xi\eta$ остается инвариантным при данном отображении S. Следовательно, $\varphi(x, y)$ является аналогом интеграла дифференциальных уравнений. Аналогично теореме Дирихле можно легко показать, что S всегда будет устойчивым в окрестности начала координат, когда существует сходящийся степенной ряд по x и y, инвариантный при S, который имеет в начале координат экстремум в строгом смысле. Конечно, опять-таки существуют примеры эллиптических отображений, сохраняющих объем с $\lambda^n \neq 1$ $(n = 3, 4, \ldots)$, для которых вообще не существует таких инвариантных сходящихся рядов.

Таким образом, для случая $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ еще отсутствуют удовлетворительные методы исследования проблемы устойчивости плоского отображения, сохраняющего объем. Прогресс в этом направлении имел бы значение также для вопросов устойчивости систем Гамильтона с произвольным числом степеней свободы. Следует упомянуть еще о нескольких попытках, которые также не были успешными.

Согласно подходу Ферми [3], можно рассуждать следующим образом. В случае устойчивости в каждой окрестности начала координат $\mathfrak{U}$ лежит односвязная инвариантная относительно S окрестность $\mathfrak{B}$. Примем теперь, что $\mathfrak{B}$ имеет границу, которую можно представить уравнением $F(x, y) = 0$. Если написать такое уравнение для семейства окрестностей $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_\gamma$, зависящих от параметра γ, то получится семейство уравнений $F(x, y, \gamma) = 0$. Если эти уравнения удастся разрешить относительно γ и если уравнение $\varphi(x, y) = \gamma$, кроме того, будет аналитическим по x и y, то этим будет доказано существование сходящегося инвариантного степенного ряда, так как при отображении S каждая граница $\varphi(x, y) = \gamma$ переходит в себя. Наконец, следовало бы установить аналитическими методами, что в общем случае сохраняющее объем преобразование S не имеет сходящегося инварианта. Этим самым было бы доказано утверждение, что в общем случае устойчивости не будет. Попытки провести строгое доказательство этого утверждения представляются нам довольно безнадежными. Пока даже не доказано, что границей $\mathfrak{B}$ является кривая, Биркгоф, используя приемы доказательства своей теоремы о неподвижной точке, пытался показать, что $\mathfrak{B}$ будет при достаточно малой окрестности $\mathfrak{U}$ звездообразной, если формальный степенной ряд u, входящий в нормальную форму (12), не сводится только к свободному члену, и что тогда граница $\mathfrak{C}$ области $\mathfrak{B}$ может быть представлена в полярных координатах r, ϑ с помощью сходящегося ряда Фурье

$$r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\vartheta n i}.$$

Если использовать инвариантность $\mathfrak{C}$ при отображении S, то для коэффициентов Фурье c_n получится система из бесконечного числа аналитических уравнений с бесконечным числом неизвестных, и притом эта система должна иметь бесконечно много решений, так как можно выбирать произвольно малую окрестность $\mathfrak{U}$. Однако удовлетворительной трактовки этой системы уравнений не найдено.

Дадим набросок еще одной неудачной попытки. Пусть все произведения степеней $x^k y^l$ $(k + l > 0)$ расположены в каком-либо фиксированном порядке по возрастающим степеням и объединены в вектор-столбец $\mathfrak{z}$ с бесконечно многими составляющими. Пусть соответственно $\mathfrak{z}_1$ будет столбцом из произведений $x_1^k y_1^l$, которые получаются из $x^k y^l$ преобразованием S. Тогда $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{z}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая бесконечная матрица с постоянными элементами. В случае устойчивости существует бесконечная последовательность содержащихся друг в друге инвариантных областей интегрирования $\mathfrak{B}_\gamma$, $(\gamma = 1, 2, \ldots)$, которые стягиваются к началу координат. Если положить

$$\iint\limits_{\mathfrak{B}_\gamma} \mathfrak{z}\, dx\, dy = \mathfrak{c}_\gamma,$$

то

$$\mathfrak{c}_\gamma = \mathfrak{M} c_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, \ldots),$$

поскольку S сохраняет объем и $\mathfrak{B}_\gamma$ инвариантно. Таким образом, задача приводится к исследованию собственных векторов матрицы $\mathfrak{M}$, а здесь и появляются нерешенные вопросы.

Наконец, следует привести еще два простых примера сохраняющих объем эллиптических отображений, более тщательное изучение которых, быть может, приведет к новым точкам зрения на проблему устойчивости. Составим $S = TR$ из двух отображений T и R, сохраняющих объем. Пусть R будет вращением, которое запишем в комплексной форме $\zeta = \lambda z$ с $|\lambda| = 1$; пусть, далее, T имеет в действительных координатах вид $\xi = x + f(y)$, $\eta = y$, где $f(y)$ обозначает сходящийся степенной ряд по y с действительными коэффициентами, начинающийся с членов второго порядка. Очевидно, что S имеет собственные значения λ и $\mu = \overline{\lambda}$ и будет сохранять объем, поскольку T и R также его сохраняют. Если выбрать, в частности, $f(y) = -4y^2$, то T можно записать в комплексной форме $\zeta = z + (z - \overline{z})^2$. При этом для S получается формула

$$\zeta = \lambda z + (\lambda z - \mu \overline{z})^2, \tag{13}$$

а для S^{-1} — формула

$$\lambda z = \zeta - (\zeta - \overline{\zeta})^2;$$

таким образом, речь идет об обратимом целом рациональном, сохраняющем объем отображении S, и все степени S^n $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются многочленами по обеим переменным x и y. При $\lambda = 1$ будем иметь $S = T$, тогда, очевидно, получается смешанный случай. При $\lambda = -1$ отображение S^2 тождественно, и стало быть, S устойчиво. При $\lambda^3 = 1$, $\lambda \neq 1$ преобразование (13) имеет вид (3) с $c = \lambda \neq 0$; следовательно, будет неустойчивость. Пусть теперь $\lambda^2 \neq 1$, $\lambda^3 \neq 1$. Подсчитывая нормальную форму (21; 31) до кубических членов, найдем

$$\gamma_1 = 2i(\lambda + 1)(2\lambda^2 + \lambda + 2)(\lambda^3 - 1)^{-1} \neq 0,$$

если дополнительно предположить, что $2\lambda^2 + \lambda + 2 \neq 0$; следовательно, здесь, во всяком случае, не будет неустойчивости. Но даже в этом простом примере нельзя установить, имеют ли место устойчивость или смешанный случай. Другой простой пример

$$\zeta = \lambda z + \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{4}\left(\frac{\overline{z} + x^2}{1 + x}\right)^2;$$

здесь отображение рационально и сохраняет площадь, но не является бирациональным.

§ 32. Существование инвариантных кривых

В предыдущем параграфе было показано, что эллиптическая неподвижная точка преобразования, сохраняющего площадь, не обязана быть устойчивой. В самом деле, мы построили противоречащие примеры для любого собственного значения λ, являющегося корнем из единицы.

Однако теперь мы хотим показать, что эти примеры в действительности представляют собой исключение. Как было замечено выше, возможный критерий устойчивости нельзя выразить только в терминах собственных значений λ, μ линеаризованного преобразования, следует иметь в виду также и нелинейные члены. Ввиду сказанного в § 23, где шла речь о формальной нормальной форме, мы можем предположить, что наше отображение имеет вид

$$\begin{aligned} r_1 &= r\cos\omega - s\sin\omega + O_{2l+2}, \\ s_1 &= r\sin\omega + s\cos\omega + O_{2l+2}, \\ \omega &= \sum_{k=0}^{l} \gamma_k (r^2+s^2)^k, \end{aligned} \tag{1}$$

где символ O_{2l+2} обозначает сходящийся ряд по степеням r, s с членами порядка $\geqslant 2l+2$. Более точно, если $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2l+2} \neq 1$, то всегда можно посредством сохраняющей площадь аналитической замены привести наше отображение к указанному виду.

Прежде чем получить ограничения на $\lambda = e^{i\gamma_0}$, мы выразим наш критерий устойчивости в терминах коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, присутствующих в нормальной форме (1). Цель этого и следующего параграфов доказать, что если по крайней мере один из коэффициентов γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_l$ не равен нулю, то начало координат устойчиво относительно отображения (1). Из этого, конечно, следует, что для сохраняющего площадь отображения, у которого $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2l+2} \neq 1$ и $\gamma_l \neq 0$ — первый не обращающийся в нуль коэффициент в нормальной форме, начало координат является устойчивой неподвижной точкой, ибо свойство устойчивости сохраняется относительно аналитического преобразования координат. Между прочим, именно при этих предположениях мы доказали в § 24 теорему Биркгофа о неподвижной точке.

Если λ не является корнем из единицы, то из этого результата следует устойчивость всякий раз, когда формальная нормальная форма не линейна, т. е. не все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обращаются в нуль. В этом случае, следуя Биркгофу, мы говорим о неподвижной точке общего эллиптического типа; альтернативный случай является, очевидно, исключительным. Мы можем поэтому сказать, что неподвижная точка общего эллиптического типа всегда устойчива. Для последующих применений важно заметить, что для фиксированного l приходится исключать только конечное число корней из единицы и, следовательно, в конкретных примерах нужно проверять только конечное число условий. Например, если $\lambda^3 \neq 1$, $\lambda^4 \neq 1$ и $\gamma_l \neq 0$, то отображение устойчиво.

Доказательство устойчивости в указанных условиях будет основано на теореме о существовании замкнутых инвариантных кривых, которая и составит содержание этого параграфа. В каждой окрестности неподвижной точки O мы построим замкнутые инвариантные кривые, окружающие O; области, ограниченные этими кривыми, являются инвариантными окрестностями точки O. Таким образом, будет показано, что каждая окрестность неподвижной точки O содержит инвариантную окрестность этой точки, а это, как мы уже видели в § 25, обеспечивает устойчивость.

Если пренебречь добавочными членами O_{2l+2} в (1), то ясно, что такими инвариантными кривыми являются концентрические окружности, заданные равенством $r^2 + s^2 = \mathrm{const}$. Наша задача — показать, что некоторые из этих кривых, у которых $\omega/2\pi$ иррационально, могут быть продеформированы в инвариантные кривые и для самого отображения (1). Для успешной реализации этого подхода решающим обстоятельством оказывается изменение угла поворота в зависимости от изменения радиуса $(r^2+s^2)^{\frac{1}{2}}$ кривой, а это в свою очередь гарантируется предположением $\gamma_l \neq 0$.

После этих предварительных замечаний мы сформулируем и докажем теорему о существовании таких инвариантных кривых в несколько более простой ситуации и вернемся к доказательству устойчивости отображения (1) в § 3. Пусть r, θ обозначают полярные координаты на плоскости. Рассмотрим отображение

$$\theta_1 = \theta + \alpha(r), \quad r_1 = r$$

кольца $A\colon 0 \leqslant \alpha_0 \leqslant r \leqslant b_0$ в себя.

Это отображение оставляет инвариантной каждую окружность с центром в начале координат, поворачивая ее на угол $\alpha(r)$, который, как мы предполагаем, увеличивается вместе с r, так что $\alpha(r)$ — монотонно возрастающая функция. Мы будем называть такое отображение *закручивающим* и будем изучать отображение M:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha(r) + f(\theta, r), \\ r_1 = r + g(\theta, r), \end{cases} \tag{2}$$

близкое к закручивающему. Здесь предполагается, что α, f, g — вещественно-аналитические[1] функции, имеющие период 2π по θ. Для возмущенного отображения (2) мы хотим построить инвариантную кривую вида $r = \psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$. Ясно, что одного условия малости f и g будет для этого недостаточно, в чем можно убедиться, беря в качестве g маленькую положительную константу. В этом случае при применении отображения (2) r всегда возрастает и замкнутой инвариантной кривой не существует. Вместо того чтобы требовать, что отображение сохраняет площадь, мы будем предполагать, что M обладает следующим *свойством пересечения*: любая кривая $\Gamma\colon r = \varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ всегда пересекается со своим образом $M\Gamma$. При этом предположении, а также при условии, что в кольце $a_0 \leqslant r \leqslant b_0$ производная $\alpha'(r) \neq 0$, а f и g малы, мы докажем существование в том же кольце инвариантной кривой. Заметим, что M не обязано отображать кольцо в себя.

Чтобы упростить ситуацию, сделаем преобразование, превращающее $\alpha(r)$ в линейную функцию. Для этого полагаем $y = \dfrac{\alpha(r)}{\gamma}$, где $\gamma = \left|\alpha(b_0) - \alpha(a_0)\right| > 0$ и $x = \theta$. В новых переменных наше преобразование примет вид

$$\begin{cases} x_1 = x + \gamma y + f(x,\, y), \\ y_1 = y + g(x,\, y), \end{cases} \tag{3}$$

где f и g — вещественно-аналитические периодические по x с периодом 2π функции, отличные, вообще говоря, от соответствующих функций в (2). Переменная y изменяется в интервале $a \leqslant y \leqslant b$ длины $b - a = 1$, в то время как параметр γ измеряет длину интервала, в котором меняется угол $\alpha(r)$. Мы можем предположить, что $\gamma \leqslant 1$, так как этого всегда можно добиться соответствующим ограничением нашего первоначального кольца. Поэтому будем считать, что $\alpha(r)$ меняется на интервале длины $\leqslant 1$.

Вещественно-аналитические функции f, g могут быть продолжены в комплексную область $\mathfrak{D}$, которую мы можем выбрать в виде

$$\mathfrak{D}\colon |\operatorname{Im} x| < r_0; \quad y \in \mathfrak{D}', \tag{4}$$

где $\mathfrak{D}'$ — комплексная окрестность отрезка $a \leqslant y \leqslant b$. Кроме того, мы по-прежнему предполагаем, что каждая кривая $y = \varphi(x) = \varphi(x + 2\pi)$

[1] Здесь и далее этим термином обозначаются функции, аналитические в некоторой области $U \subset \mathbf{C}^n$, пересекающейся с вещественным подпространством $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$, и принимающие на $\mathbf{R}^n \cap U$ вещественные значения. — *Прим. ред.*

пересекается со своим образом относительно отображения (3), а также считаем выполненным неравенство $0 < r_0 \leqslant 1$.

При этих предположениях справедлива следующая теорема.

Для каждого положительного ε существует положительное δ, зависящее от ε и $\mathfrak{D}$, но не зависящее от γ, такое, что если в области $\mathfrak{D}$

$$|f| = |g| < \gamma\delta,$$

то отображение M вида (3) *имеет инвариантную кривую*

$$x = \xi + u(\xi), \quad y = v(\xi), \tag{5}$$

где u, v — вещественно-аналитические в комплексной области $|\operatorname{Im}\xi| < \frac{r_0}{2}$ функции, имеющие период 2π.

Более того, параметризация кривой (5) *может быть выбрана так, чтобы индуцированное на этой кривой отображение имело вид*

$$\xi_1 = \xi + \omega,$$

где ω — несоизмеримая с 2π константа, и чтобы функции u, v удовлетворяли неравенству

$$|u| + |v - \gamma^{-1}\omega| < \varepsilon.$$

Прежде чем обратиться к доказательству этой теоремы, которое будет проведено в этом и следующем параграфах, покажем, что можно построить формальные степенные ряды, определяющие инвариантную кривую, предполагая, что функции f, g в (3) аналитически зависят от параметра λ. Пусть

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu f_\nu(x, y), \quad g = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu g_\nu(x, y);$$

потребуем, чтобы свойство пересечения выполнялось при действительных λ, достаточно малых по абсолютной величине, и попытаемся определить функции $u = u(\xi, \lambda)$, $v = v(\xi, \lambda)$ в (5) при помощи разложения в степенные ряды. Дополнительное требование о характере индуцированного отображения на кривой (5) означает, что

$$x_1 = \xi + \omega + u(\xi + \omega, \lambda), \quad y_1 = v(\xi + \omega, \lambda),$$

и приводит к функциональным уравнениям

$$
\begin{aligned}
u(\xi+\omega,\, \lambda) &= u + \gamma v - \omega + f(\xi + u,\, v,\, \lambda),\\
v(\xi+\omega,\, \lambda) &= v + g(\xi + u,\, v,\, \lambda)
\end{aligned}
$$

для u, v. Полагая

$$
u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(\xi), \quad u = \omega\gamma^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n v_n(\xi),
$$

мы получаем для u_n, v_n уравнения

$$
\begin{aligned}
&u_n(\xi+\omega) - u_n(\xi) - \gamma v_n(\xi) = F_n(\xi),\\
&v_n(\xi+\omega) - v_n(\xi) = G_n(\xi),
\end{aligned}
\qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots)
$$

где

$$
F_n(\xi) - f_n(\xi,\, \omega\gamma^{-1}), \quad G_n(\xi) - g_n(\xi,\, \omega\gamma^{-1})
$$

зависят только от членов f_l, g_l, u_l, v_l с индексами $l < n$, которые мы можем рассматривать как уже известные. Мы ищем решения u_n, v_n периода 2π, предполагая, что G_n, F_n имеют тот же самый период и вещественно-аналитичны. Ясно, что такое решение может существовать, только если среднее значение G_n равно нулю; выполнение этого условия, как мы покажем вскоре, есть следствие свойства пересечения. Предполагая на время, что это так, мы приступаем к решению написанных выше уравнений, используя разложения в ряды Фурье. Не обращая внимание на индекс n, мы обозначаем коэффициенты Фурье функций u_n, v_n, F_n, G_n через $\widehat{u}_k$, $\widehat{v}_k$, $\widehat{F}_k$, $\widehat{G}_k$ $(k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots)$ и получаем для них уравнения

$$
e^{ik\omega}\widehat{u}_k - \widehat{u}_k - \gamma\widehat{v}_k = \widehat{F}_k, \quad e^{ik\omega}\widehat{v}_k - \widehat{v}_k = \widehat{G}_k.
$$

Из второго уравнения находим

$$
\widehat{v}_k = \frac{\widehat{G}_k}{e^{ik\omega} - 1} \quad (k \neq 0),
$$

при условии что знаменатели не обращаются в нуль, что будет выполнено, если $\omega/2\pi$ иррационально. При $k = 0$ правая часть $\widehat{G}_0$ есть среднее значение функции G_n, которое по предположению равно 0, так что второе уравнение не налагает никаких ограничений на выбор $\widehat{v}_0$, в то время как первое уравнение требует, чтобы мы взяли

$$\widehat{v}_0 = -\widehat{F}_0 \gamma^{-1}.$$

Наконец, из первого уравнения находим коэффициенты Фурье функции u_n:

$$\widehat{u}_k = \frac{\gamma \widehat{v}_k + \widehat{F}_k}{e^{ik\omega} - 1} = \frac{\widehat{F}_k}{e^{ik\omega} - 1} + \frac{\gamma \widehat{G}_k}{(e^{ik\omega} - 1)^2} \quad (k \neq 0),$$

а $\widehat{u}_0$ остается произвольным. Полученные таким образом ряды Фурье функций u_n, v_n будут действительными при действительных значениях аргументов.

Эти формальные ряды Фурье на самом деле оказываются сходящимися в том случае, когда знаменатели $e^{ik\omega} - 1$ не приближаются к нулю слишком быстро. При условии аналитичности F_n, G_n сходимость будет обеспечена, если потребовать, чтобы $\omega/2\pi$ удовлетворяло такому же арифметическому условию, как число α в «теоретико-функциональной проблеме центра». В самом деле, в этом случае $|e^{ik\omega} - 1|^{-2}$ мажорируется степенью k, в то время как коэффициенты Фурье аналитических функций убывают экспоненциально, так что ряды Фурье для u_n, v_n будут сходиться и их суммы будут вещественно-аналитическими. Мы придадим этому более точный смысл, когда перейдем непосредственно к доказательству сходимости. Пока же по указанным выше соображениям будем считать $\omega/2\pi$ иррациональным и, более того, удовлетворяющим приведенному далее арифметическому условию (6).

Покажем теперь, что среднее значение $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G_n\,d\xi$ действительно обращается в нуль при всех $n > 0$. Предположим, что это не так, и пусть n — наименьший индекс, для которого величина $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G_n\,d\xi = m$ отлична от 0.

Заменив g на $g - m\lambda^n$, мы будем иметь вместо G_n новую функцию $G_n - m$ со средним значением 0, а тогда можно построить усеченные ряды

$$\widetilde{u} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu u_\nu, \quad \widetilde{v} = \omega\gamma^{-1} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu v_\nu$$

так, что члены порядка $\leqslant n$ будут удовлетворять нашим предыдущим уравнениям. Геометрически это означает, что кривая

$$x = \xi + \widetilde{u}(\xi,\, \lambda), \quad y = \widetilde{v}(\xi,\, \lambda)$$

отображается в кривую

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + \widetilde{u} + \gamma\widetilde{v} + f(\xi + \widetilde{u},\, \widetilde{v},\, \lambda) = \xi + \omega + \widetilde{u}(\xi + \omega,\, \lambda) + O(\lambda^{n+1}), \\ y_1 &= \widetilde{v}(\xi,\, \lambda) + g(\xi + \widetilde{u},\, \widetilde{v},\, \lambda) = \widetilde{v}(\xi + \omega,\, \lambda) + m\lambda^n + O(\lambda^{n+1}). \end{aligned}$$

Если первоначальная кривая и ее образ пересекаются при всех действительных λ, то должны существовать значения параметров ξ, ξ', такие, что

$$\begin{aligned} \xi + \widetilde{u}(\xi,\, \lambda) &= \xi' + \widetilde{u}(\xi',\, \lambda) + O(\lambda^{n+1}), \\ \widetilde{v}(\xi,\, \lambda) &= \widetilde{v}(\xi',\, \lambda) + m\lambda^n + O(\lambda^{n+1}). \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений, однако, приводит к тому, что $\xi' = \xi + O(\lambda^{n+1})$, а тогда из второго следует равенство $m = 0$, которое противоречит нашему предположению.

Подводя итог сказанному, мы приходим к выводу, что если выбрать число $\omega/2\pi$ удовлетворяющим арифметическому условию и потребовать выполнения свойства пересечения для нашего отображения, то мы получим формальные степенные ряды, определяющие инвариантную кривую. К сожалению, в общем случае сходимость этих рядов для u, v проверить не удается, и нам придется поэтому поступить по-другому.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы, которое мы сначала проведем для случая $\gamma = 1$. В основе этого доказательства лежит быстро сходящаяся итерационная схема, предложенная Колмогоровым в родственной ситуации и уже примененная нами к более простой задаче в § 26. Эта схема представляет собой последовательность преобразований координат, которые упрощают данное отображение. Применительно к рассматриваемой ситуации мы попытаемся построить последовательность отображений, все более близких к закручивающему отображению $x \to x + y$, $y \to y$, за счет уменьшения добавочных членов f и g в (3). Это будет достигнуто с помощью бесконечной последовательности замен координат, причем области определения этих координат будут круговыми кольцами, стягивающимися к искомой кривой.

Прежде всего для $0 < s_0 < \dfrac{1}{4}$ выберем ω в интервале

$$a + s_0 < \omega < b - s_0$$

так, чтобы удовлетворить бесконечному числу неравенств

$$\left|\frac{\omega}{2\pi}q - p\right| \geqslant \frac{c_0}{q^\mu} \quad (p,\, q = 1,\, 2, \ldots). \tag{6}$$

Здесь c_0 — положительная константа. Для $\mu \geqslant 2$ существование таких ω и c_0 доказано в конце § 25. С этого момента зафиксируем ω и c_0.

Основной шаг итерационной схемы содержится в лемме, которая приведена ниже. Вместе с тем важную роль будут играть оценки различных величин в комплексной плоскости. Отображение (3) мы будем рассматривать в комплексной области

$$\mathfrak{A}\colon |\operatorname{Im} x| < r; \quad |y - \omega| < s, \tag{7}$$

предполагая, что в ней

$$|f| + |g| < d.$$

Здесь r, s, d — положительные константы, удовлетворяющие некоторым ограничениям, приведенным ниже.

Внутри $\mathfrak{A}$ будет рассмотрена меньшая область

$$\mathfrak{B}\colon |\operatorname{Im} \xi| < \rho; \quad |\eta - \omega| < \sigma, \tag{8}$$

где $0 < \rho < r$, $0 < \sigma < s$, и три промежуточные области

$$\mathfrak{A}^{(\nu)}\colon \begin{cases} |\operatorname{Im} x| < r^{(\nu)} = r - \dfrac{r-\rho}{4}\nu; \\ |y - \omega| < s^{(\nu)} = s - \dfrac{s-\sigma}{4}\nu, \end{cases} \quad (\nu = 1,\, 2,\, 3), \tag{9}$$

такие, что

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}^{(1)} \supset \mathfrak{A}^{(2)} \supset \mathfrak{A}^{(3)} \supset \mathfrak{B}.$$

Мы предполагаем, что

$$0 < r \leqslant 1, \quad 0 < 3\sigma < s < \frac{r-\rho}{4}, \quad d < \frac{s}{6}, \tag{10}$$

и требуем, чтобы

$$\theta = c_3(r-\rho)^{-2(\mu+1)}\frac{d}{s} < \frac{1}{7}, \tag{11}$$

где c_3 — положительная константа, которая определяется ниже и зависит только от c_0 и показателя μ в (6). В дальнейшем через $c_1, c_2, \ldots, c_6$ обозначаются некоторые положительные константы, точные значения которых мы указывать не будем, предполагая, однако, что они зависят только от c_0, μ.

Теперь мы в состоянии сформулировать нашу лемму.

При выполнении описанных выше предположений для отображения M, задаваемого формулами (3) *с* $\gamma = 1$, *существует преобразование координат U вида*

$$x = \xi + u(\xi, \eta), \quad y = \eta + v(\xi, \eta), \tag{12}$$

где u, v — вещественно-аналитические в $\mathfrak{A}^{(1)}$ функции периода 2π по ξ, такое, что преобразованное отображение $U^{-1}MU$ имеет вид

$$\xi_1 = \xi + \eta + \varphi(\xi, \eta), \quad \eta_1 = \eta + \psi(\xi, \eta), \tag{13}$$

причем φ, ψ — вещественно-аналитические функции, определенные в области $\mathfrak{B}$, где они удовлетворяют оценке

$$|\varphi| + |\psi| < c_6\Big\{(r-\rho)^{\varkappa}\Big(\frac{d^2}{s} + sd\Big) + \Big(\frac{\sigma}{s}\Big)^2 d\Big\} \tag{14}$$

при $\varkappa = 2\mu + 3$.

Более точно: *U отображает $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}^{(3)}$, M преобразует $\mathfrak{A}^{(3)}$ в $\mathfrak{A}^{(2)}$ и U^{-1} преобразует $\mathfrak{A}^{(2)}$ в $\mathfrak{A}^{(1)}$, так что отображение $U^{-1}MU$ полностью определено в $\mathfrak{B}$. Более того, в $\mathfrak{A}^{(1)}$ функции u, v удовлетворяют неравенству*

$$|u| + |v| < \vartheta s, \tag{15}$$

где θ — величина, определенная в (11).

Откладывая доказательство леммы до следующего параграфа, используем ее теперь для доказательства теоремы о существовании инвариантной кривой. Для достижения цели эта лемма будет применяться последовательно бесконечное число раз, начиная с данного отображения (3), обозначаемого теперь через $M_0 = M$, и ограниченной области

$$\mathfrak{A}_0\colon |\operatorname{Im} x| < r_0; \quad |y - \omega| < s_0,$$

которая при достаточно малом s_0 содержится в области $\mathfrak{D}$, определенной в (4).

Согласно предположению,

$$|f| + |g| < \delta,$$

где δ может быть выбрано достаточно малым; в соответствии с обозначениями леммы полагаем $\delta = d_0$. Преобразуя по лемме отображение M_0 с помощью замены координат $U = U_0$, мы получаем отображение $M_1 = U_0^{-1} M_0 U_0$, определенное в области

$$\mathfrak{A}_1 \colon |\operatorname{Im} x| < r_1; \quad |y - \omega| < s_1,$$

где r_1, s_1 соответствуют параметрам ρ, σ в формулировке леммы. Применяя лемму к новому отображению M_1, мы получаем другую замену координат U_1 и преобразованное отображение $M_2 = U_1^{-1} M U_1$. Поступая таким образом и далее, мы приходим к последовательности отображений

$$M_{n+1} = U_n^{-1} M_n U_n \quad (n = 0,\, 1,\, \ldots), \tag{16}$$

области определения $\mathfrak{A}_{n+1}$ которых задаются, как и область $\mathfrak{A}$, неравенствами (7), если заменить в них r, s на r_{n+1}, s_{n+1}. Нам придется проверить, конечно, что эта последовательность преобразований корректно определена и что M_n все менее отличается от закручивающего отображения. Для этого мы фиксируем величины r_n, s_n, d_n $(n = 0,\, 1,\, \ldots)$, полагая

$$r_n = \frac{r_0}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right), \quad s_n = d_n^{2/3}, \quad d_{n+1} = r_0^{-\varkappa} c_7^{n+1} d_n^{4/3}, \tag{17}$$

где $c_7 \geqslant 2$ — подходящим образом выбранная константа. Таким образом, r_n образуют убывающую последовательность, сходящуюся к положительному числу $r_0/2$, и все рассматриваемые функции будут аналитичны по ξ при $|\operatorname{Im}\xi| < \frac{r_0}{2}$. Последовательность d_n сходится к 0 при условии, что d_0 выбрано достаточно малым. В самом деле, последовательность $e_n = r_0^{-3\varkappa} c_7^{3(n+4)} d_n$ удовлетворяет условию

$$e_{n+1} = e_n^{4/3}$$

и поэтому сходится к нулю, если положить $0 \leqslant e_0 < 1$ или $0 \leqslant d_0 < r_0^{3\varkappa} c_7^{-12}$.

Чтобы показать, что отображение M_n корректно определено в $\mathfrak{A}_n$ и удовлетворяет там подходящей оценке, воспользуемся индукцией.

Предполагая, что M_n определено в $\mathfrak{A}_n$ и удовлетворяет там оценке

$$|f| + |g| < d_n,$$

мы проверим соответствующие утверждения для M_{n+1}. Для этого применим лемму, полагая $r = r_n$, $s = s_n$, $d = d_n$, $\rho = r_{n+1}$, $\sigma = s_{n+1}$. Прежде всего необходимо проверить, конечно, выполнение неравенств (10), (11). Неравенство $3\sigma < s$ следует из

$$\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)^{3/2} = \frac{d_{n+1}}{d_n} = c_7^{-3} e_n^{1/3} \leqslant c_7^{-3} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{18}$$

а так как d_n стремится к 0 быстрее экспоненты, в то время как

$$r - \rho = r_n - r_{n+1} = r_0 2^{-n-2}$$

убывает только экспоненциально, то и вся средняя цепочка неравенств в (10) будет выполняться при достаточно малом d_0. Ясно также, что последнее неравенство из (10) может быть удовлетворено, если положить подходящее ограничение на d_0, в то время как для $\theta = \theta_n$ в (11) мы имеем

$$\theta_n = c_3 (r_n - r_{n+1})^{-2\mu-2} d_n^{1/3},$$

и эта величина также может быть сделана меньше $\frac{1}{7}$, если выбрать d_0 малым. Таким образом, существует положительная константа $d^* = d^*(r_0, c_0, \mu)$, такая, что при $d_0 < d^*$ выполняются неравенства (10), (11), и лемма применима. Она доставляет нам замену U_n, преобразующую $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{n+1}$ в $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$, и преобразованное отображение $M_{n+1} = U_n^{-1} M_n U_n$, определенное в $\mathfrak{A}_{n+1}$. Более того, согласно лемме M_{n+1} может быть представлено в виде (13), а из (14) мы получаем оценку

$$\begin{aligned} |\varphi| + |\psi| &< c_6 \Big\{ (r_n - r_{n+1})^{-\varkappa} \Big(d_n^{4/3} + d_n^{5/3} \Big) + \Big(\frac{d_{n+1}}{d_n} \Big)^{4/3} d_n \Big\} = \\ &= c_6 \Big\{ (r_n - r_{n+1})^{-\varkappa} d_n^{4/3} \Big(1 + d_n^{1/3} \Big) + \Big(\frac{d_{n+1}}{d_n} \Big)^{1/3} d_{n+1} \Big\}, \end{aligned}$$

которая в силу (17), (18) сводится к

$$\begin{aligned} |\varphi| + |\psi| &\leqslant c_6 \Big\{ 2^{\varkappa(n+2)} c_7^{-n-1} \Big(1 + d_n^{1/3} \Big) + \Big(\frac{d_{n+1}}{d_n} \Big)^{1/3} \Big\} d_{n+1} \leqslant \\ &\leqslant c_6 \Big\{ 2^{\varkappa} (2^{\varkappa} c_7^{-1})^{n+1} \Big(1 + d_n^{1/3} \Big) + c_7^{-1} \Big\} d_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как последовательность d_n ограничена, то коэффициент при d_{n+1} в последнем неравенстве может быть сделан меньше 1, если константу c_7 выбрать большой.

Отсюда

$$|\varphi| + |\psi| < d_{n+1},$$

чем индукция и завершается.

Так как U_k отображает область $\mathfrak{A}_{k+1}$ в $\mathfrak{A}_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то преобразование $V_n = U_0 U_1 \ldots U_n$ корректно определено в $\mathfrak{A}_{n+1}$ и, очевидно, переводит M_0 в

$$M_{n+1} = V_n^{-1} M_0 V_n.$$

Кроме того, если мы выразим V_n в виде

$$x = \xi + p_n(\xi, \eta), \quad y = \eta + q_n(\xi, \eta),$$

то p_n, q_n будут аналитическими функциями в области $\mathfrak{A}_{n+1}$. Эта последняя стягивается к области

$$|\operatorname{Im} \xi| < \frac{r_0}{2}, \quad |\eta - \omega| = 0,$$

поскольку $s_n \to 0$, $r_n \to r_0/2$.

Покажем, что последовательности $p_n(\xi, \omega)$, $q_n(\xi, \omega)$ сходятся к аналитическим по ξ в области $|\operatorname{Im} \xi| < \frac{r_0}{2}$ функциям при $n \to \infty$.

В самом деле, из равенства $V_n = V_{n-1} U_n$ следует, что

$$\begin{aligned} p_n &= u_n + p_{n-1}(\xi + u_n, \eta + v_n), \\ q_n &= v_n + q_{n-1}(\xi + u_n, \eta + v_n), \end{aligned}$$

где функции u_n, v_n соответствуют отображению U_n так же, как функции u, v в равенстве (12) — отображению U, и, следовательно,

$$\begin{aligned} p_n &= u_n + u_{n-1} + \ldots + u_0, \\ q_n &= v_n + v_{n-1} + \ldots + v_0. \end{aligned}$$

В членах последних двух сумм не указаны аргументы; хотя они различны, но для доказательства сходимости это не существенно, так как можно оценить верхние грани модулей $|u_n|$, $|v_n|$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$. А именно из (15) следует, что

$$|u_n| + |v_n| < \vartheta_n s_n < \frac{1}{7} s_n,$$

и это приводит к равномерной сходимости функций p_n, q_n в области $|\operatorname{Im}\xi| < r_0/2$ при $\eta = \omega$. Пределы функций p_n и q_n, которые мы обозначаем через $u(\xi)$ и $v(\xi) - \omega$ соответственно, являются вещественно-аналитическими функциями при $|\operatorname{Im}\xi| < r_0/2$ и имеют период 2π по ξ. В силу неравенства $s_{n+1} < \frac{1}{3}s_n$ получаем

$$|p_n| + |q_n| < \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu < \frac{1}{7}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{3^\nu} s_0 < s_0;$$

выберем теперь $d_0 = s_0^{3/2}$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $s_0 < \varepsilon$. Таким образом, существует положительное $\delta = \delta(\varepsilon, r_0, c_0, \omega) < d^*$, такое, что для $d_0 < \delta$

$$|u| + |v - \omega| < \varepsilon$$

при $|\operatorname{Im}\xi| < r_0/2$, что и утверждалось в теореме. Это δ может быть использовано в качестве константы, ограничивающей величину $|f| + |g|$.

Чтобы проверить, что $u(\xi)$, $v(\xi)$ — искомые функции, описывающие инвариантную кривую, перейдем к пределу в соотношении

$$V_n M_{n+1} = M_0 V_n$$

при $n \to \infty$. Так как $d_{n+1} \to 0$, то M_{n+1} сходится к закручивающему отображению $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \eta + \omega$, в то время как сходимость V_n мы только что установили. Следовательно, в пределе получаем соотношения

$$\begin{gathered} \xi + \omega + u(\xi + \omega) = \xi + u(\xi) + v(\xi) + f(\xi + u,\, v), \\ v(\xi + \omega) = v(\xi) + g(\xi + u,\, v), \end{gathered}$$

которые в точности и означают, что кривая (5) инвариантна относительно M_0 и что индуцированное на ней отображение имеет вид

$$\xi_1 = \xi + \eta = \xi + \omega.$$

Этим и завершается доказательство нашей теоремы о существовании инвариантной кривой в случае $\gamma = 1$, если не считать леммы, которая будет доказана в следующем параграфе.

§ 33. Доказательство леммы

Чтобы доказать лемму, которой мы пользовались в предыдущем параграфе, мы должны построить преобразование U, вид которого указан в (1; 12), и вывести требуемые оценки. Выбор U мотивирован желанием преобразовать отображение M вида (1; 3) в закручивающее отображение $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \eta$; как легко проверить, это эквивалентно тому, что функции u, v в (1; 12) удовлетворяют функциональным уравнениям

$$u(\xi + \eta, \eta) = u + v + f(\xi + u, \eta + v),$$
$$v(\xi + \eta, \eta) = v + g(\xi + u, \eta + v).$$

Эти уравнения, однако, нелинейны и в явном виде не решаются. Поэтому мы заменим их линейными уравнениями

$$\begin{cases} u(\xi + \omega, \eta) - u(\xi, \eta) - v(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), \\ v(\xi + \omega, \eta) - v(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) - g^*(\eta), \end{cases} \tag{1}$$

которые вскоре решим и используем для определения U. Здесь g^* обозначает среднее значение $(2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} g(\xi, \eta)\, d\xi$, которое мы вычли из правой части второго уравнения для того, чтобы оно стало разрешимым. Конечно, после такого упрощения отображение $U^{-1}MU$ больше уже не будет закручивающим, но аппроксимирует его достаточно хорошо, так что имеет место оценка (1; 14).

Изучение системы (1) немедленно приводит к разностному уравнению

$$w(x + \omega) - w(x) = h(x), \tag{2}$$

где функции w, h предполагаются аналитическими при $|\operatorname{Im} x| < r$ и имеющими период 2π по x. Это уравнение, очевидно, только тогда имеет решение w, когда среднее значение h^* функции h обращается в нуль. При этих предположениях мы решаем (2) посредством разложения в ряд Фурье. Подставляя

$$h = \sum_{k \neq 0} h_k e^{ikx}, \quad w = \sum_{k \neq 0} w_k e^{ikx},$$

получаем из (2) соотношение

$$w_k = \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1},$$

после чего нужно только проверить сходимость ряда для w. Так как ω удовлетворяет условию $(1;6)$, то знаменатели $e^{ik\omega}-1$ не обращаются в нуль при $k\neq 0$ и даже допускают оценку

$$|e^{ik\omega}-1| = 2\left|\sin\frac{k\omega}{2}\right| \geqslant 4c_0|k|^{-\mu}. \tag{3}$$

С другой стороны, так как h — вещественно-аналитическая функция, то ее коэффициенты Фурье h_k экспоненциально убывают. Действительно,

$$h_k = \frac{1}{2\pi}\int h(x)e^{-ikx}dx,$$

где интеграл берется по пути $\operatorname{Im}x = r'$, $0\leqslant \operatorname{Re}x \leqslant 2\pi$ и, согласно теореме Коши, не зависит от r' при $|r'|<r$. Если $|h|<K$ при $|\operatorname{Im}x|<r$, то

$$|h_k| \leqslant Ke^{kr'},$$

и устремляя r' к $\pm r$, мы получаем оценку

$$|h_k| \leqslant Ke^{-|k|r}. \tag{4}$$

В силу (3), (4) сходимость ряда Фурье для w при $|\operatorname{Im}x|<r$ становится очевидной. Кроме того, в более узкой полосе $|\operatorname{Im}x|<\rho$ $(0<\rho<r)$ мы имеем неравенство

$$|w| \leqslant \sum_{k\neq 0}\left|\frac{h_k}{e^{ik\omega}-1}e^{ikx}\right| \leqslant \frac{K}{c_0}\sum_{k=1}^{\infty}k^{\mu}e^{-k(r-\rho)},$$

приводящее к оценке

$$|w| \leqslant c_1K(r-\rho)^{-\mu-1}\big(|\operatorname{Im}x|<\rho\big).$$

Решение, которое мы построили, было нормализовано так, чтобы его среднее значение равнялось нулю; ясно, что уравнение (2) определяет решение w с точностью до аддитивной постоянной. Последнее утверждение имеет место даже в классе непрерывных функций. Действительно, уравнение $w(x+\omega)-w(x)=0$ приводит к тому, что $w(k\omega)=w(0)$ для всех целых k, и так как множество чисел $k\omega$ по $\operatorname{mod}2\pi$ всюду плотно, то непрерывное решение однородного уравнения есть константа. Обозначим нормализованное решение уравнения (2) со средним значением нуль через $w=Lh$; тогда найденная выше оценка примет вид

$$|Lh| \leqslant c_1K(r-\rho)^{-\mu-1}\big(|\operatorname{Im}x|<\rho,\, 0<\rho<r\big). \tag{5}$$

Эти утверждения могут быть распространены на разностное уравнение

$$w(x+\omega,\, y) - w(x,\, y) = h(x,\, y) - h^*(y),$$

в котором y присутствует в качестве параметра. В этом случае мы опять имеем единственное решение w со средним значением нуль, обозначаемое через Lh, и оценка для него выводится очевидным образом.

Чтобы решить уравнения (1), мы начинаем со второго уравнения, решение которого представляется в виде

$$v(\xi,\, \eta) = v^*(\eta) + Lg$$

с произвольным средним значением $v^*(\eta)$.

Для того чтобы первое уравнение было разрешимо, полагаем $-v^* = f^*$. Отсюда $v = -f^* + Lg$, и в качестве решения первого уравнения мы получаем функцию $u = L(v+f) = L^2 g + Lf$.

Таким образом, решения (1) даются формулами

$$u = Lf + L^2 g, \quad v = -f^* + Lg. \tag{6}$$

Найденные функции мы используем для определения U при помощи (1; 12).

Заметим, что u, v — вещественно-аналитические функции, имеющие период 2π по ξ, и остается проверить требуемую оценку (1; 15) для u, v, равно как и оценку (1; 14) для соответствующих функций φ, ψ.

Сохраняя предположения и обозначения предыдущего параграфа, мы имеем в области $\mathfrak{A}$ неравенство $|f|+|g| < d$, так что последовательно применяя (5) с $r - \dfrac{r-\rho}{16}$ и $r - \dfrac{r-\rho}{8}$ вместо ρ, получим из (6) оценку

$$|u| + |v| < c_2 (r-\rho)^{-2\mu-2} d, \quad \left(|\operatorname{Im}\xi| < r - \frac{r-\rho}{8},\ |\eta - \omega| < s\right)$$

с константой c_2, зависящей только от c_0, μ. Используя оценку Коши для производных u, v в области $\mathfrak{A}^{(1)}$, определенной в (1; 9), имеем

$$|u_\xi| + |v_\xi| < c_3 (r-\rho)^{-2\mu-3} d,$$

$$|u_\eta| + |v_\eta| < c_3 (r-\rho)^{-2\mu-2} \frac{d}{s},$$

где $c_3 > c_2$; здесь мы также использовали, что $3\sigma < s$. С помощью этой константы c_3 определяем

$$\theta = c_3 (r-\rho)^{-2\mu-2} \frac{d}{s}$$

так же, как в (1; 11), и, используя (1; 10), переписываем предыдущие неравенства, справедливые в $\mathfrak{A}^{(1)}$, в виде

$$\begin{cases} |u| + |v| < \theta s, \\ |u_\xi| + |v_\xi| < \theta \dfrac{s}{r-\rho} < \theta, \quad |u_\eta| + |v_\eta| < \theta. \end{cases} \tag{7}$$

Первое неравенство в (7) совпадает с (1; 15), откуда также следует, что U отображает $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}^{(3)}$. В самом деле, если $|\operatorname{Im}\xi| < \rho$, $|\eta - \omega| < \sigma$, то для точки $(x,\, y)$ — образа точки $(\xi,\, \eta)$ — имеем оценку

$$|\operatorname{Im} x| < \rho + \theta s, \quad |y - \omega| < \sigma + \theta s,$$

и для доказательства того, что $(x,\, y)$ лежит в $\mathfrak{A}^{(3)}$, придется только проверить, что

$$\theta s < \frac{r-\rho}{4}, \quad \theta s < \frac{s-\sigma}{4}.$$

Эти же неравенства сразу следуют из (1; 10) при условии, что $\theta < \frac{1}{6}$. Аналогично, чтобы проверить, что M отображает $\mathfrak{A}^{(3)}$ в $\mathfrak{A}^{(2)}$, мы, используя (1, 3), (1, 9), находим, что

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Im} x_1| < r^{(3)} + |\operatorname{Im} y| + d < r^{(3)} + s^{(3)} + d, \\ &|y_1 - \omega| < s^{(3)} + d, \end{aligned}$$

так что остается только проверить неравенства

$$s^{(3)} + d < \frac{r-\rho}{4}, \quad d < \frac{s-\sigma}{4}.$$

Второе из них является очевидным следствием (1; 10); в свою очередь из него, используя снова (1; 10), мы получаем

$$s^{(3)} + d = s - \frac{3(s-\sigma)}{4} + d < s < \frac{r-\rho}{4},$$

что и требовалось.

Наконец, мы покажем, что U^{-1} определено в области $\mathfrak{A}^{(2)}$ и отображает ее в $\mathfrak{A}^{(1)}$. Другими словами, предположив, что $(x,\, y) \in \mathfrak{A}^{(2)}$, мы должны построить решение $(\xi,\, \eta)$ уравнения (1; 12) в $\mathfrak{A}^{(1)}$. Для этой цели используем обычную итерационную схему; определяем ξ_k, η_k по индукции, начиная с $\xi_0 = x$, $\eta_0 = y$ и полагая

$$\xi_{k+1} = x - u(\xi_k, \eta_k), \quad \eta_{k+1} = y - v(\xi_k, \eta_k), \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Мы должны показать, что (ξ_k, η_k) остается в $\mathfrak{A}^{(1)}$. Для $k = 0$ это очевидно; предполагая, что это утверждение будет верно для (ξ_ν, η_ν) с $\nu \leqslant k$, находим из (7), что

$$|\xi_{k+1} - \xi_k| + |\eta_{k+1} - \eta_k| < \theta\bigl(|\xi_k - \xi_{k-1}| + |\eta_k - \eta_{k-1}|\bigr) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно,

$$|\xi_{k+1} - x| + |\eta_{k+1} - y| \leqslant \sum_{n=0}^{k}\bigl(|\xi_{n+1} - \xi_n| + |\eta_{n+1} - \eta_n|\bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-\theta}\bigl(|u| + |v|\bigr) < \frac{\theta}{1-\theta}s.$$

По предположению $\theta < \dfrac{1}{7}$, а значит последняя величина меньше, чем $\dfrac{s}{6}$. Как и раньше, проверяются неравенства

$$\frac{s}{6} < \frac{r-\rho}{4}, \ \frac{s-\sigma}{4},$$

которые гарантируют, что $(\xi_{k+1}, \eta_{k+1}) \in \mathfrak{A}^{(1)}$.

Таким образом, все итерации (ξ_k, η_k) остаются в $\mathfrak{A}^{(1)}$, и так как $\theta < 1$, то они сходятся в той же области к решению (ξ, η). Ясно, что это решение единственно, и наше утверждение о том, что U^{-1} отображает $\mathfrak{A}^{(2)}$ в $\mathfrak{A}^{(1)}$, доказано.

Теперь перейдем к основной части леммы — а именно к проверке оценки (1; 14).

Здесь мы будем уже существенно использовать свойство пересечения, а именно при доказательстве того, что добавочный член g^*, введенный в (1), достаточно мал и не влияет на соответствующую оценку.

Напомним, что отображение (1; 13), которое мы обозначаем символически через N, задается формулой $N = U^{-1}MU$, и уравнение $UN = MU$ в подробной записи имеет вид

$$\xi + \eta + \varphi + u_1 = \xi + u + \eta + v + f(\xi + u, \eta + v),$$
$$\eta + \psi + v_1 = \eta + v + g(\xi + u, \eta + v),$$

где $u_1 = u(\xi + \eta + \varphi, \eta + \psi)$, $v_1 = v(\xi + \eta + \varphi, \eta + \psi)$.

Упрощая эти выражения, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\varphi &= u - u_1 + v + f(\xi + u,\, \eta + v),\\ \psi &= v - v_1 + g(\xi + u,\, \eta + v),\end{aligned}$$

которые неявно определяют функции φ, ψ в области $\mathfrak{B}$. Учитывая уравнения (1), определяющие u, v, мы получаем равенства

$$\begin{cases}\varphi = u(\xi + \omega,\, \eta) - u_1 + f(\xi + u,\, \eta + v) - f(\xi,\, \eta),\\ \psi = v(\xi + \omega,\, \eta) - v_1 + g(\xi + u,\, \eta + v) - g(\xi,\, \eta) + g^*(\eta),\end{cases} \tag{8}$$

на которых основываем наши оценки. Предполагается, конечно, что переменные $(\xi,\, \eta)$ меняются в $\mathfrak{B}$ и поэтому удовлетворяют неравенствам (1; 8).

Вклад функций u, v в правые части уравнений системы (8) может быть оценен при помощи теоремы о среднем значении, а именно:

$$\begin{aligned}\bigl|u(\xi + \omega,\, \eta) - u_1\bigr| \leqslant \sup|u_\xi|\bigl(|\eta - \omega| + |\varphi|\bigr) + \sup|u_\eta|\,|\psi| <\\ < \theta\frac{s}{r - \rho}|\eta - \omega| + \theta\bigl(|\varphi| + |\psi|\bigr),\end{aligned}$$

где верхние грани частных производных u, v берутся в $\mathfrak{A}^{(1)}$, а последнее неравенство следует из (7). Точно такая же конечная оценка получается для соответствующего вклада функции v. Вспоминая, что $|f| + |g| < d$ в $\mathfrak{A}$, мы можем, используя неравенства Коши, оценить по модулю производные функций f, g в $\mathfrak{A}^{(3)}$ величиной $2\frac{d}{s}$, так что, применяя опять теорему о среднем значении и оценку (7), получим неравенство

$$\bigl|f(\xi + u,\, \eta + v) - f(\xi,\, \eta)\bigr| < 2\frac{d}{s}\bigl(|u| + |v|\bigr) < 2\theta d$$

и такую же оценку для соответствующего вклада функции g. Неприятное среднее значение $g^*(\eta)$ аппроксимируем линейной функцией

$$h(\eta) = g^*(\omega) + g^*_\eta(\omega)(\eta - \omega),$$

которую мы оценим позднее, используя свойство пересечения. Из (8) и предыдущих оценок теперь имеем

$$\begin{aligned}|\varphi| + |\psi - h| < 2\theta\bigl(|\varphi| + |\psi - h|\bigr) + 2\theta|h| +\\ + 2\theta\frac{s}{r - \rho}|\eta - \omega| + 4\theta d + |g^* - h|.\end{aligned}$$

Так как $2\theta < \dfrac{1}{3} < 1$, то можно исключить $|\varphi| + |\psi - h|$ из правой части и, вспоминая, что $|\eta - \omega| < \sigma < s$, переписать это неравенство в виде

$$|\varphi| + |\psi - h| < c_4\bigl\{\theta\frac{s}{r-\rho}s + \theta|h| + \theta d + |g^* - h|\bigr\}.$$

Для того чтобы получить предварительные оценки функций $h(\eta)$ и $|g^* - h|$, заметим, что при $|\eta - \omega| < s$ будет $\bigl|g^*(\eta)\bigr| < d$ и поэтому, согласно неравенству Коши, $\bigl|g^*_\eta(\omega)\bigr| < d/s$, в то время как при $|\eta - \omega| < \sigma$ будет $|g^*_{\eta\eta}| < 2d/(s-\sigma)^2$. Следовательно, используя неравенство $3\sigma < s$, имеем при $|\eta - \omega| < \sigma$

$$\bigl|h(\eta)\bigr| < d + \frac{d}{s}\sigma < 2d$$

и

$$|g^* - h| \leqslant \frac{\sigma^2}{2}\sup|g^*_{\eta\eta}| < \Bigl(\frac{\sigma}{s-\sigma}\Bigr)^2 d < 3\Bigl(\frac{\sigma}{s}\Bigr)^2 d.$$

Комбинируя эти оценки с предыдущими, мы теперь получим неравенство

$$|\varphi| + |\psi - h| < c_4\Bigl\{\theta\frac{s}{r-\rho}s + 2\theta d + \theta d + 3\Bigl(\frac{\sigma}{s}\Bigr)^2 d\Bigr\} =$$
$$= c_4\Bigl\{\frac{\theta}{r-\rho}\bigl(s^2 + 3(r-\rho)d\bigr) + 3\Bigl(\frac{\sigma}{s}\Bigr)^2 d\Bigr\} \leqslant c_5\Bigl\{\frac{\theta}{r-\rho}(s^2 + d) + \Bigl(\frac{\sigma}{s}\Bigr)^2 d\Bigr\},$$

которое с учетом соотношения $(1; 11)$ для θ преобразуется к виду

$$|\varphi| + |\psi - h| < c_5\Bigl\{c_3(r-\rho)^{-2\mu-3}\Bigl(sd + \frac{d^2}{s}\Bigr) + \Bigl(\frac{\sigma}{s}\Bigr)^2 d\Bigr\} = Q, \tag{9}$$

где правая часть неравенства является также определением Q.

Предварительная оценка для $|h|$ константой $2d$, однако, недостаточна для достижения необходимой малости остаточного члена, и чтобы получить лучшую оценку, мы используем свойство пересечения, которым обладают преобразования M и $N = U^{-1}MU$. В силу этого свойства каждая кривая $\eta = \mathrm{const}$ пересекается со своим образом относительно преобразования N; в точке пересечения $\eta_1 = \eta$ или $\psi = 0$, так что для каждого действительного η в кольце $|\eta - \omega| < \sigma$ существует действительное $\xi = \xi_0(\eta)$, такое, что $\psi\bigl(\xi_0(\eta),\, \eta\bigr) = 0$. Применяя (9) в такой точке $\bigl(\xi_0(\eta),\, \eta\bigr)$, мы находим, что

$$\bigl|h(\eta)\bigr| < Q \quad (\omega - \sigma < \eta < \omega + \sigma).$$

Следовательно, полагая в определении h сначала $\eta = \omega$, а затем устремляя η к $\omega + \sigma$, мы получим соответственно неравенства $|g^*(\omega)| < Q$ и

$$\left|g^*(\omega) + g^*_\eta(\omega)\sigma\right| \leqslant Q,$$

так что

$$\left|g^*_\eta(\omega)\sigma\right| < 2Q.$$

Отсюда мы заключаем, что для комплексного η в круге $|\eta - \omega| < \sigma$ выполняется оценка

$$\left|h(\eta)\right| \leqslant \left|g^*(\omega)\right| + \left|g^*_\eta(\omega)\right| |\eta - \omega| < 3Q,$$

из которой, согласно (9), следует, что

$$|\varphi| + |\psi| < 4Q.$$

Это приводит к оценке (1; 14) с константой $c_6 = 4c_5(c_3 + 1)$ и завершает доказательство леммы, а следовательно, и теоремы о существовании инвариантной кривой для случая $\gamma = 1$.

Доказательство теоремы для общего случая $0 < \gamma \leqslant 1$ проводится точно таким же путем. Однако при этом приходится следить за тем, как γ входит в различные оценки. Прежде всего, чтобы найти ω в интервале

$$\Delta\colon a\gamma < \omega < b\gamma$$

длины γ нужно модифицировать неравенство (1; 6). Если, для примера, этот интервал содержит целое число p, то неравенство (1; 6) исключает все ω, находящиеся на расстоянии, меньшем $2\pi c_0$ от $2\pi p$; а если к тому же $\gamma < 2\pi c_0$, то весь интервал Δ будет исключен. Поэтому мы заменяем (1; 6) неравенством

$$\left|\frac{\omega}{2\pi} q - p\right| \geqslant \gamma \frac{c_0}{q^\mu}, \tag{10}$$

где c_0 — положительная константа, не зависящая от γ. Покажем, что при $\mu > 1$ и достаточно малом c_0 в любом интервале длины γ существует число ω, обладающее свойством (10). Для этого рассмотрим дополнительное множество Σ тех ω в Δ, в которых (10) нарушается по крайней мере для одной пары целых чисел p, q с $q \geqslant 1$. Чтобы оценить лебегову меру Σ, мы зафиксируем q и рассмотрим все p, для которых интервал

$$\left|\frac{\omega}{2\pi}-\frac{p}{q}\right|<\gamma\frac{c_0}{q^{\mu+1}}$$

пересекает Δ. Так как длина Δ — число $\gamma \leqslant 1$, то ясно, что при достаточно малом c_0 будет самое большее $q+1$ таких целых P, так что мера Σ может быть оценена величиной

$$m(\Sigma)<\sum_{q=1}^{\infty}(q+1)2\gamma\frac{c_0}{q^{\mu+1}}<4\gamma c_0\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\mu}},$$

которая может быть сделана меньше чем $\gamma = m(\Delta)$, если выбрать c_0 достаточно малым. Следовательно, множество $\Delta - \Sigma$ не пусто и в Δ существуют ω, обладающие свойством (10). После замены (1; 6) на (10) нам придется заменить (5) на

$$|Lh| \leqslant \gamma^{-1}c_1K(r-\rho)^{-\mu-1}$$

и (6) на

$$u = Lf+\gamma L^2g, \quad v=-\gamma^{-1}f^*+Lg.$$

Однако, если мы введем $f_0=\gamma^{-1}f$, $g_0=\gamma^{-1}g$, $L_0=\gamma L$, то эти соотношения могут быть выражены в форме

$$u=L_0f_0+L_0^2g_0, \quad v=-f_0^*+L_0g_0,$$

не содержащей γ. Проведенное выше доказательство со всеми оценками переносится на этот случай, если мы заменим функции f, g на $\gamma^{-1}f$, $\gamma^{-1}g$ и аналогично функции φ, ψ на $\gamma^{-1}\varphi$, $\gamma^{-1}\psi$. Условие $|f|+|g|<\delta$ для $\gamma=1$ тогда, конечно, придется заменить условием $|f|+|g|<\gamma\delta$ для $0<\gamma\leqslant 1$. После этого доказательство легко распространяется на общий случай.

В заключение мы заметим, что если отображение (1; 3) зависит непрерывно от действительного параметра λ, т. е. если $f=f(x, y, \lambda)$, $g=g(x, y, \lambda)$, $\gamma=\gamma(\lambda)\neq 0$ — непрерывные функции от λ, например при $|\lambda|\leqslant 1$, то инвариантная кривая также непрерывно зависит от λ. Это следует просто из того факта, что наши приближения будут сходиться равномерно относительно λ. Это наблюдение окажется полезным в последующих параграфах, в которых мы применяем теорему существования к вопросам устойчивости. Доказательство, данное в этом и предыдущем параграфах, является переложением на аналитический случай содержания работы [1], где аналогичная теорема доказана для отображений, имеющих только конечное число производных[1].

§ 34. ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Как мы указывали уже в § 1, теорема о существовании инвариантных кривых может быть применена к проблеме устойчивости эллиптической неподвижной точки, к которой мы теперь возвращаемся. Рассмотрим сохраняющее площадь отображение окрестности неподвижной точки общего эллиптического типа, которое в подходящих координатах может быть выражено в виде

$$\begin{cases} u_1 = u\cos w - v\sin w + O_{2l+2}, \\ v_1 = u\sin w + v\cos w + O_{2l+2}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$w = \gamma_0 + \gamma_l(u^2+v^2)^l, \quad \gamma_l > 0 \quad (l > 0)$$

и O_{2l+2} — степенные ряды по u, v, содержащие только члены порядка $\geqslant 2l+2$. Мы покажем, что для любого достаточно малого в $\varepsilon > 0$ проколотый диск

$$0 < u^2 + v^2 < \varepsilon^2$$

содержит инвариантную кривую, окружающую неподвижную точку $u = v = 0$. Для этой цели введем полярные координаты x, y с помощью равенств

$$u = \varepsilon y^{1/(2l)}\cos x, \quad v = \varepsilon y^{1/(2l)}\sin x.$$

Легко проверить, что отображение в этих координатах принимает форму

$$x_1 = x + \gamma_0 + \gamma_l\varepsilon^{2l}y + O(\varepsilon^{2l+1}), \quad y_1 = y + O(\varepsilon^{2l+1}).$$

Остаточные члены являются здесь вещественно-аналитическими функциями от x, y при $0 < y < 1$, имеющими период 2π по x. Ограничивая y

[1] Необходимое число производных постепенно понижалось от 333 (как у Мозера в [1]) до 5 (H. Rüssmann, Über invariante Kurven differenziertbaren Abbildungen eines Kreisringes (Kleine Nenner I), *Nachr. Akad. Wiss.*, Göttingen, Math.-Phys, Kl., IIa (1970), №5, 67–105). — *Прим. ред.*

на замкнутый интервал, принадлежащий отрезку $[0, 1]$, мы можем теперь применить теорему § 1, полагая $\gamma = \gamma_l \varepsilon^{2l}$ и заменяя y на $y + \gamma_0 \gamma^{-1}$.

Соответствующие остаточные члены оцениваются следующим образом:

$$\frac{|f| + |g|}{\gamma} = \frac{O(\varepsilon^{2l+1})}{\gamma_l \varepsilon^{2l}} = O(\varepsilon),$$

и могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора ε даже в том случае, когда они рассматриваются в подходящей комплексной области, содержащей указанное вещественное кольцо. Наконец, свойство пересечения следует из сохранения площади рассматриваемым отображением; действительно, если бы замкнутая кривая $y = \psi(x)$ при вещественных x, y не пересекала бы кривую, являющуюся ее образом, то две области, ограниченные этими кривыми, имели бы разные площади. Таким образом, из теоремы существования мы заключаем, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ проколотый диск $0 < u^2 + v^2 < \varepsilon^2$ содержит инвариантную кривую Γ, окружающую неподвижную точку $u = v = 0$, и это в свою очередь доказывает устойчивость отображения (1) в этой точке.

Приведенные выше аргументы доказывают существование последовательности инвариантных кривых, сходящихся к неподвижной точке. Нетрудно показать, что в окрестности неподвижной точки существует несчетное множество таких кривых. В самом деле, изложенная в предыдущих двух параграфах конструкция позволяет получить инвариантную кривую для каждого ω, удовлетворяющего неравенствам (2; 10). В то же время по каждой такой кривой число ω однозначно определяется равенством

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\xi + k\omega + u(\xi + k\omega)}{k} = \omega.$$

Здесь x_k — угловая координата k-й итерации $M^k P$ произвольной точки P на кривой, а $u(\xi)$ — та же функция, что и в (1; 5). Кроме того, никакие две из этих кривых не могут пересекаться, так как в противном случае итерации $M^k P$ точки P, принадлежащей их пересечению, должны были бы лежать всюду плотно на обеих кривых, а потому кривые должны были бы совпасть. Таким образом, кривые, соответствующие различным значениям ω, различны, и так как множество допустимых значений для ω есть канторово множество положительной меры, то множество инвариантных кривых, конечно, несчетно. В действительности можно показать, что на плоскости эти кривые образуют множество положительной меры, дополнение которого в круге $u^2 + v^2 < r^2$ имеет меру $o(\pi r^2)$. Следовательно, мы можем сказать, что большинство точек вблизи неподвижной точки принадлежит множеству инвариантных кривых.

Для того чтобы отчетливо представить ситуацию геометрически, рассмотрим отображение (1) без добавочного члена O_{2l+2}. Оно оставляет инвариантной каждую из концентрических окружностей $u^2+v^2 = \text{const}$, и если мы оставим только те окружности, для которых $w = \gamma_0 + \gamma_l(u^2+v^2)^l$ удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{w}{2\pi}q - p\right| \geqslant \gamma_l(u^2+v^2)^l c_0 q^{-\mu}$$

при всех целых p, q с $q \geqslant 1$, то получим канторово множество $\mathfrak{B}$ кривых, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с нашим множеством инвариантных кривых полного отображения (1). Другими словами, если мы умножим добавочные члены в (1) на малый параметр τ, то кривые, принадлежащие канторову множеству $\mathfrak{B}$, сохраняются, по крайней мере при малых τ, оставаясь инвариантными кривыми с тем же самым числом вращения. В областях, дополнительных к нашему канторову множеству инвариантных кривых, поведение, однако, совсем другое, и инвариантные кривые здесь разрушаются при малых возмущениях системы, соответствующей $\tau = 0$. В самом деле, мы увидим далее, что при возмущении системы эти области не могут, вообще говоря, быть заполненными однопараметрическими семействами инвариантных кривых.

Чтобы понять, что происходит в этом дополнительном множестве, рассмотрим кривые, для которых $w/2\pi$ рационально, например равно p/q. При $\tau = 0$ эти кривые состоят из неподвижных точек q-й итерации нашего отображения. При малом возмущении, однако, от этой кривой из неподвижных точек, вообще говоря, сохраняется лишь конечное множество неподвижных точек, и мы можем сказать, что эти кривые разрушаются при возмущении. Ниже мы проиллюстрируем эту ситуацию примером. Некоторые из этих неподвижных точек, существование которых следует из теоремы Биркгофа, будут общего эллиптического типа; в этом случае они в свою очередь обладают окрестностями, значительная часть которых покрыта инвариантными кривыми, которые окружают различные неподвижные точки. Это приводит к иерархии неподвижных точек и инвариантных кривых. Таким образом, геометрия расположения инвариантных кривых вблизи эллиптической неподвижной точки имеет запутанный характер.

Области, дополнительные к канторову множеству, вообще говоря, содержат также гиперболические неподвижные точки, которые еще больше усложняют глобальную картину. Возможно, что эти так называемые области неустойчивости содержат открытые множества, в которых итерации отдельной точки плотны. Впрочем, о поведении отображения в этих областях мало что известно.

Может показаться удивительным, что инвариантные кривые могут быть получены с помощью сходящегося итерационного процесса, в то время как преобразование к нормальной форме, вообще говоря, расходится, особенно если учесть, что конструкция инвариантных кривых также основана на технике преобразований. Ответ на этот кажущийся парадокс прост и состоит в том, что при изучении нормальной формы мы строили разложения в ряды около фиксированной неподвижной точки и интересовались сходимостью в некоторой окрестности этой точки, в то время как построение инвариантной кривой связано с разложением вблизи соответствующей невозмущенной кривой.

Мы теперь дадим простой пример, который иллюстрирует некоторые из предыдущих выводов и в котором преобразование к нормальной форме действительно расходится, в то время как инвариантные кривые существуют. В качестве M возьмем простое полиномиальное отображение

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (x + y^3)\cos\alpha - y\sin\alpha,\\
y_1 &= (x + y^3)\sin\alpha + y\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

которое, как легко видеть, при $\sin 2\alpha \neq 0$ преобразуется к виду (1) с $l = 1$, $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = -\frac{3}{8}$. Таким образом, согласно нашему предыдущему результату существует бесконечно много инвариантных кривых, окружающих начало координат, которое является поэтому устойчивой неподвижной точкой отображения. С другой стороны, как будет сейчас показано, при α, несоизмеримом с 2π, преобразование к нормальной форме расходится. Если предположить, что это преобразование сходится, то существует окрестность начала координат, покрытая однопараметрическим семейством инвариантных кривых, которые являются образами концентрических окружностей $\xi^2 + \eta^2 = \mathrm{const}$. Далее, если P_k — неподвижная точка итерации M^k при некотором $k \geqslant 1$, то, как ясно из природы нормальной формы, вся кривая, проходящая через P_k, состоит из неподвижных точек преобразования M^k, и так как угол вращения $\gamma_0 + \gamma_1(\xi^2 + \eta^2) + \ldots$ не постоянен, то такие неподвижные точки существуют в любой окрестности начала. Таким образом, если бы преобразование к нормальной форме сходилось, то существовало бы бесконечно много k, для которых M^k имеет континуум неподвижных точек, и можно было бы выбрать такое k четным. Мы покажем, однако, что число неподвижных точек M^k конечно, в действительности не больше 3^k, и это противоречие докажет наше утверждение.

Заметим, что обратное отображение M^{-1} снова полиномиально — факт, который верен для любого сохраняющего площадь отображения. При любом целом k обозначим через (x_k, y_k) образ точки (x, y) при отображении M^k, так что неподвижная точка преобразования M^k удовлетворяет уравнениям $x_k = x$, $y_k = y$. Если $k = 2q \geqslant 2$ четно, то мы можем заменить эти два уравнения эквивалентными

$$x_q - x_{-q} = 0, \quad y_q - y_{-q} = 0.$$

Применим теперь теорему Безу, которая утверждает, что если два полинома от x, y не имеют общего множителя, то они имеют только конечное число общих корней, не превышающее произведения их степеней. Легко проверить, что в нашем примере полиномы $x_q - x_{-q}$, $y_q - y_{-q}$ имеют степень 3^q, и их старшие члены будут соответственно

$$a_q\{\cos\alpha y^{3^q} - (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{3^q}\}, \quad a_q \sin\alpha y^{3^q},$$

где

$$a_q = (\sin\alpha)^\beta \neq 0, \quad \beta = 3 + 3^2 + \ldots + 3^{q-1}.$$

Таким образом, они не имеют общего множителя, и мы заключаем, что отображение M^{2q} имеет самое большее $3^{2q} = 3^k$ неподвижных точек.

Этот пример показывает, что ответ на вопрос о сходимости зависит не от теоретико-числовых свойств собственных значений, а скорее от природы нелинейных членов. Это сильно отличается от того, что было нами получено для конформного отображения в § 25, где устойчивость, так же, как и сходимость преобразования к нормальной форме, полностью определялись линейной частью отображения.

Теорема, изложенная в предыдущих двух параграфах, имеет многочисленные применения к гамильтоновым системам с двумя степенями свободы — в особенности к вопросу об устойчивости периодических решений. Как мы видели, задача об изоэнергетической устойчивости такой периодической орбиты может быть сведена к вопросу об устойчивости неподвижной точки некоторого двумерного отображения, сохраняющего площадь. В качестве применения мы еще раз вернемся к много раз обсуждавшейся ограниченной задаче трех тел.

В § 21 мы построили при малых значениях массы μ семейство решений ограниченной задачи трех тел, которые при $\mu = 0$ представляют собой круговые орбиты:

$$x_1 = r\cos(\omega t), \quad x_2 = r\sin(\omega t), \quad r^3(\omega+1)^2 = 1.$$

Это семейство замкнутых орбит параметризовано частотой ω, которая соответствует энергии. Легко проверить, что на любой поверхности постоянной энергии существуют ровно две орбиты подобного типа, одна с $\omega+1>0$ и другая с $\omega+1<0$. Исследуем сначала изоэнергетическую устойчивость этих решений при малых значениях μ. Для этого нам придется рассмотреть связанное с ними сохраняющее площадь отображение, которое мы уже изучали в конце § 24 в связи с применением теоремы Биркгофа о неподвижной точке к этой проблеме. Решающую роль здесь играет то, что условия устойчивости выражаются в терминах конечного числа неравенств

$$\lambda^k \neq 1 \quad (k = 1, \ldots, 2l+2), \quad \gamma_l \neq 0$$

при некотором $l \geqslant 1$. Так как λ, γ_1, γ_2, … — непрерывные (на самом деле даже аналитические) функции μ, при условии что $\lambda^2 \neq 1$, то достаточно проверить эти условия при $\mu = 0$. В этом случае в предположениях $\omega = 3g^{-1}$, $4g^{-1}$, 0 $(g = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ мы получили, что

$$l = 1, \quad \gamma_0 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \gamma_1 = -\frac{3\pi}{r^2\omega^3},$$

и поэтому, если выполнено условие

$$\omega \neq \frac{3}{g}, \frac{4}{g}, 0 \quad (g = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

то рассматриваемые решения являются изоэнергетически устойчивыми при $|\mu| \leqslant \mu_0(\omega)$. На самом деле при тех же самых условиях имеет место даже полная устойчивость, что теперь и будет доказано.

Если мы проведем конструкцию сохраняющего площадь отображения вблизи периодической орбиты, сохранив энергию как независимое переменное, обозначаемое через w, то придем к уравнениям вида

$$u_1 = F(u,\, v,\, w,\, \mu), \quad v_1 = G(u,\, v,\, w,\, \mu), \quad w_1 = w,$$

последнее из которых попросту выражает закон сохранения энергии. Линия $u = v = 0$ состоит из неподвижных точек, устойчивость которых при этом отображении приводит к орбитальной устойчивости соответствующих им периодических решений. Чтобы доказать устойчивость неподвижной точки $p_0 = (0,\, 0,\, w_0)$, мы построим в любой заданной окрестности $\mathfrak{U}$ точки p_0 инвариантную ее окрестность $\mathfrak{B}$ при помощи следующего рассуждения. В $\mathfrak{U}$ можно найти инвариантную кривую, которую мы записываем в виде

$$u^2 + v^2 = R(\theta), \quad w = w_0,$$

где $\theta = \operatorname{arctg} v/u$. Так как наше отображение зависит аналитически, а следовательно, и непрерывно от параметра w, то в действительности можно найти семейство таких кривых

$$u^2 + v^2 = R(\theta,\, w),$$

которые зависят непрерывно от w и поэтому остаются в $\mathfrak{U}$, если $|w - w_0| < \delta$ при достаточно малом положительном δ. Но тогда неравенства

$$u^2 + v^2 < R(\theta,\, w), \quad |w - w_0| < \delta$$

определяют инвариантную окрестность $\mathfrak{B}$ точки p_0, содержащуюся в $\mathfrak{U}$, и таким образом p_0 — устойчивая неподвижная точка. Это показывает, что при условиях (2) наши периодические решения ограниченной задачи трех тел устойчивы при достаточно малом значении параметра μ.

Как мы упоминали в § 31, при $\omega = 3/g$, где g — целое число, не делящееся на 3, Леви–Чивита доказал, что соответствующие орбиты на самом деле неустойчивы. Таким образом, лишь случай $\omega = 4/g$ остается нерассмотренным. Впрочем, если $\omega = 4/g$ и g нечетно — случай, к которому непосредственно наш результат не применим, то можно в действительности доказать устойчивость при достаточно малом μ.

Выразим в других терминах найденные условия устойчивости. Пусть ν_1 — частота обращения тел P_1, P_2 по их орбитам, которую мы более не предполагаем равной единице. При $\mu = 0$ точка P_3 нулевой массы движется по круговой орбите с частотой ν_3 относительно неподвижной системы координат. Частота ω, введенная выше, дается тогда формулой

$$\omega = \frac{\nu_3}{\nu_1} - 1 = \frac{\nu_3 - \nu_1}{\nu_1},$$

и наше условие (2) эквивалентно условию

$$\frac{\nu_1}{\nu_3} \neq \frac{p}{q}, \quad |p - q| \leqslant 4, \tag{3}$$

где p, q — взаимно простые целые числа. Изображая однопараметрическое семейство периодических орбит в виде семейства замкнутых кривых, которые покрывают плоскость подобно семейству концентрических круговых орбит при $\mu = 0$, мы получаем устойчивые орбиты, выделяя из этого семейства те решения, которые соответствуют (3).

Закончим это обсуждение интересным применением к движению астероидов. Астероидами называются малые планеты, которые в большом числе движутся преимущественно между Марсом и Юпитером и образуют приблизительно кольцо вокруг Солнца. Если пренебречь влиянием всех планет, кроме Юпитера, то движение астероидов может быть рассмотрено на основе ограниченной задачи трех тел, где в качестве P_1 берется Юпитер, в качестве P_2 — Солнце и в качестве P_3 — астероид, массой которого мы полностью пренебрегаем. Предполагая, что большинство астероидов движется вблизи круговых периодических орбит в той же самой плоскости, что Солнце и Юпитер, мы можем попытаться применить описанный выше критерий. Для большинства из наблюдаемых астероидов отношение частоты ν_3 их обращения по орбите к частоте Юпитера ν_1 лежит в интервале

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{\nu_1}{\nu_3} \leqslant \frac{1}{2}.$$

В этом интервале значения $\frac{\nu_1}{\nu_3} = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ не удовлетворяют нашему критерию, и около них и в самом деле астероиды встречаются особенно редко. Что же касается $\frac{\nu_1}{\nu_3} = \frac{3}{7}$, то в распределении астероидов здесь можно указать менее резко выраженный «люк», хотя соответствующая периодическая орбита устойчива. Эти «люки» в распределении астероидов, которые были замечены еще в 1866 году Киррквудом, видимо обусловлены, таким образом, неустойчивостью, вызываемой Юпитером, если не принимать во внимание исключительное значение $\frac{3}{7}$. Конечно, эта интерпретация имеет только качественный характер и не позволяет дать какое-нибудь предсказание о ширине этих промежутков. Кроме того, мы не проверили также, будет ли параметр μ достаточно мал[1]. Тем не менее критерий дает нам правильное отношение частот для большинства названных промежутков[2].

§ 35. Устойчивость равновесных решений

В качестве другого применения результата § 1 мы рассмотрим проблему устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Мы будем предполагать, что соответствующая линеаризованная система устойчива, и даже более того, что ее собственные значения $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ чисто мнимы и различны. С помощью подходящего линейного преобразования функция Гамильтона при этих предположениях может быть преобразована к виду $H = H_2 + H_3 + \ldots$, где

$$H_2 = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2,$$

и условия вещественности из § 15 принимают форму $y_k = i\overline{x}_k$ ($k = 1, 2$). Здесь следует различать два существенно разных случая. Первый случай: квадратичная форма H_2 положительно или отрицательно определена, и тогда устойчивость следует непосредственно из теоремы Дирихле. Второй случай: форма H_2 неопределена, другими словами, 0 лежит между λ_1 и λ_2 на мнимой оси, и вопрос об устойчивости нельзя разрешить только с помощью линейных членов дифференциальных уравнений. Это тот случай, к которому мы теперь возвращаемся.

[1] Приблизительно равный отношению масс Юпитера и Солнца, т. е. что-то около $\frac{1}{1000}$. — *Прим. ред.*

[2] А. Д. Брюно в своей статье «Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов», Матем. сб., **83** (1970), №2, 273–312, объясняет появление «люка» с отношением $\frac{\nu_1}{\nu_3} = \frac{3}{7}$ тем, что соответствующая орбита обладает лишь изоэнергетической устойчивостью. Если рассматривать полную окрестность периодической орбиты, то значительная часть проходящих через нее траекторий остается в ней лишь конечное время. В той же статье подробно рассмотрен вопрос о нормальной форме гамильтоновых уравнений в окрестности периодического решения. — *Прим. ред.*

Предполагая, что $\lambda_1/\lambda_2 \neq -p/q$ (p, $q = 1$, 2, 3, 4), мы можем найти координаты (по-прежнему обозначаемые через x_k, y_k), в которых гамильтониан принимает вид

$$H = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \frac{1}{2}\{\mu_{11} w_1^2 + 2\mu_{12} w_1 w_2 + \mu_{22} w_2^2\} + H_5 + \ldots, \qquad (1)$$

где $w_k = x_k y_k$ и μ_{kl} действительны, и условия вещественности задаются в виде $y_k = i\overline{x}_k$. Покажем теперь, что при дополнительном предположении

$$D = \mu_{11}\lambda_2^2 - 2\mu_{12}\lambda_1\lambda_2 + \mu_{22}\lambda_1^2 \neq 0, \qquad (2)$$

которое эквивалентно требованию, чтобы полином

$$H_4 = \frac{1}{2}\{\mu_{11} w_1^2 + 2\mu_{12} w_1 w_2 + \mu_{22} w_2^2\}$$

не делился на $H_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, положение равновесия является устойчивым решением соответствующей гамильтоновой системы. Этот результат принадлежит Арнольду [1].

При доказательстве мы можем предположить, что $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0 > \operatorname{Im}\lambda_1$. Чтобы установить устойчивость, достаточно доказать, что любое решение описанной выше системы с начальными данными из области $|x_1|^2 + |x_2|^2 < \varepsilon^2$ останется в любой момент времени в области $|x_1|^2 + |x_2|^2 < c^2\varepsilon^2$, где $c = 3\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}$ и ε — достаточно малое положительное число. Здесь мы допускаем только решения, которые удовлетворяют условиям вещественности $y_k = i\overline{x}_k$ ($k = 1$, 2), так что $w_k = i|x_k|^2$ и $H_2 = |\lambda_1|\,|x_1|^2 - |\lambda_2|\,|x_2|^2$.

Доказательство будет проведено методом от противного. А именно предположим, что приведенное выше утверждение неверно. Тогда можно найти решение, для которого величина $r(t) = \sqrt{\bigl|x_1(t)\bigr|^2 + \bigl|x_2(t)\bigr|^2}$ такова, что $r(0) < \varepsilon$ и $r(\tau) = c\varepsilon$ для некоторого вещественного τ. Удобно увеличить масштаб, заменив x_k, y_k переменными $\varepsilon^{-1}x_k$, $\varepsilon^{-1}y_k$ ($k = 1$, 2), в которых система дифференциальных уравнений остается канонической, а новый гамильтониан приводится к виду

$$H(x,\, y,\, \varepsilon) = H_2(x,\, y) + \varepsilon^2 H_4(x,\, y) + \varepsilon^3 H_5(x,\, y) + \ldots,$$

где $H_\nu(x,\, y)$ — те же самые однородные полиномы степени ν, которые входили в гамильтониан (1). Наше предположение тогда заключается в том, что существует решение новой системы, удовлетворяющее условию $r(0) < 1$, в то время как для некоторого действительного τ $r(\tau) = c$. При этом утверждается, что при достаточно малом значении ε это предположение приводит к противоречию.

Имея это в виду, произведем редукцию рассматриваемой проблемы, заменив систему дифференциальных уравнений отображением, к которому применима теорема из § 1. Заметим сначала, что функция $H(x, y, \varepsilon)$ постоянна вдоль рассматриваемого нами решения. Ее значение мы обозначим через h. Чтобы оценить эту величину, полагаем $t = 0$ и, учтя неравенства $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ и $r(0) < 1$, находим, что

$$|h| < \big||\lambda_1|\,|x_1|^2 - |\lambda_2|\,|x_2|^2\big| + c_1\varepsilon^2 < |\lambda_1| + c_1\varepsilon^2 < \frac{3}{2}|\lambda_1|$$

при достаточно малом ε. Здесь c_1 и позднее c_2, c_3, c_4, c_5 обозначают положительные константы, которые не зависят от ε и фиксированного нами частного решения. С другой стороны, полагая $t = \tau$, мы имеем

$$|\lambda_1|\,|x_1|^2 - |\lambda_2|\,|x_2|^2 \geqslant -|h| - c_2\varepsilon^2 > -2|\lambda_1|,$$

если ε достаточно мало. Вспоминая, что при $t = \tau$

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = c^2 = \frac{9|\lambda_1|}{|\lambda_2|},$$

исключим $|x_2|^2$ из последних двух соотношений. Это дает нам неравенство

$$\big(|\lambda_1| + |\lambda_2|\big)|x_1|^2 \geqslant |\lambda_2|c^2 - 2|\lambda_1| = 7|\lambda_1| \quad (t = \tau).$$

Теперь из неравенства $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leqslant 2|\lambda_1|$ мы, наконец, получаем

$$|x_1|^2 \geqslant \frac{7}{2} > 3 \quad (t = \tau).$$

Отсюда следует, что для решения, о котором идет речь, функция $\big|x_1(t)\big|^2$ принимает все значения ρ в интервале $1 \leqslant \rho \leqslant 3$, а значит и в интервале $2 \leqslant \rho \leqslant 3$.

Далее, на поверхности постоянной энергии $H = h$ при $|h| < \frac{3}{2}|\lambda_1|$ рассмотрим множество Ω, определенное неравенством $2 \leqslant |x_1|^2 \leqslant 3$ и условиями вещественности $y_k = i\overline{x}_k$ $(k = 1, 2)$. Поскольку $|H| < \frac{3}{2}|\lambda_1|$, мы имеем на этом трехмерном множестве оценку

$$|\lambda_2|\,|x_2|^2 \geqslant |\lambda_1|\,|x_1|^2 - \frac{3}{2}|\lambda_1| - c_3\varepsilon^2 \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_1| - c_3\varepsilon^2 \geqslant \frac{1}{4}|\lambda_1|,$$

из которой следует, что $|x_2| \geqslant \frac{1}{2}$.

Аналогично показывается, что величина x_2 также ограничена в Ω и сверху. Следовательно, в Ω можно определить аргумент $\theta = \operatorname{Im}\log x_2$ с точностью до целого кратного 2π, и мы обозначаем через Σ двумерную поверхность в Ω, определенную сравнением $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Точки в Σ параметризованы действительными и мнимыми частями x_1, а вторая координата $x_2 = |x_2|$ определяется как неявная функция из соотношения $H = h$. На основании оценки

$$\dot{\theta} = \operatorname{Im}\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \operatorname{Im}\frac{H_{y_2}}{x_2} \geqslant \operatorname{Im}\lambda_2 - c_4\varepsilon^2 \geqslant \frac{2}{3}|\lambda_2|,$$

которая выполняется при достаточно малом $\varepsilon > 0$, мы видим, что любое решение нашей системы, расположенное в Ω, в течение промежутка времени $\geqslant 3\pi/|\lambda_2|$ по крайней мере один раз трансверсально пересекает Σ.

Определим теперь отображение S, которое переводит точку на Σ в ближайшую по времени точку пересечения вещественного решения, начинающегося в этой точке, с поверхностью Σ, всякий раз когда такое пересечение существует. Если $t_0 < t_1$ — два последовательных момента времени, при которых такое решение пересекает Σ, то $0 < t_1 - t_0 \leqslant 3\pi|\lambda_2|$. Далее,

$$\frac{d}{dt}|x_1|^2 = 2\operatorname{Re}(\overline{x}_1 H_{y_1}) \leqslant c_5\varepsilon^2.$$

Из этого неравенства мы заключаем, что при $0 < \delta < \dfrac{1}{3}$ для любого δ существует $\varepsilon_\delta > 0$, такое, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ отображение S корректно определено при $2 + \delta \leqslant |x_1|^2 \leqslant 3 - \delta$ и что

$$-\delta < \bigl|x_1(t_1)\bigr|^2 - \bigl|x_2(t_1)\bigr|^2 < \delta.$$

Вспомним теперь, что для решения, существование которого предполагалось, значения $\bigl|x_1(t)\bigr|^2$ покрывают интервал $2 \leqslant \rho \leqslant 3$, и поэтому всякое кольцо $a < |x_1|^2 < b$ в Σ, у которого $b - a \geqslant \delta$, содержит по крайней мере одно пересечение этого решения с Σ. Это приводит к тому, что такое пересечение решения с Σ в области $2 \leqslant |x_1|^2 \leqslant 2 + \delta$ отображается некоторой итерацией S или S^{-1} в точку области $3 - \delta \leqslant |x_1|^2 \leqslant 3$, что, очевидно, невозможно, если существуют замкнутые кривые, инвариантные относительно S в кольце $2 + \delta < |x_1|^2 < 3 - \delta$. Таким образом, наше доказательство будет сразу же завершено, как только мы покажем существование такой инвариантной кривой.

Сведя утверждение об устойчивости к существованию инвариантной кривой для описанного выше отображения S в кольце $2 + \delta \leqslant |x_1|^2 \leqslant 3 - \delta$, проверим теперь предположения, необходимые для применения теоремы существования из § 1. Прежде всего из результатов § 22 мы видим, что S сохраняет интеграл площади

$$\frac{1}{2i} \oint \overline{x}_1 \, dx_1,$$

взятый вдоль замкнутой кривой, и поэтому удовлетворяется требуемое свойство пересечения. Таким образом, остается только проверить, что S хорошо аппроксимируется закручивающим отображением, и так как оценки нужно проводить в комплексной окрестности кольца, то мы начинаем с продолжения вещественного многообразия Σ в комплексную область. Это многообразие было определено в Ω условиями $H = h$ и $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, причем последнее можно заменить условием $y_2 = ix_2$, которое в сочетании с условием вещественности $y_2 = i\overline{x}_2$ приводит к тому, что x_2 — вещественное. Из закона сохранения энергии

$$H = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \varepsilon^2 H_4 + \ldots = h$$

и равенства $y_2 = ix_2$ получаем

$$i\lambda_2 x_2^2 = -\lambda_1 x_1 y_1 + h + O(\varepsilon^2); \tag{3}$$

рассматривая $x_1 y_1$ в комплексной области

$$2 < |x_1|^2 < 3, \quad 2 < |y_1|^2 < 3, \quad |y_1 - i\overline{x}_1| < |x_1|, \tag{4}$$

мы можем из уравнения (3) выразить x_2 как аналитическую функцию других переменных: $x_2 = \varphi(x_1, y_1, h, \varepsilon)$. В самом деле, так как

$$|\lambda_1 x_1 y_1 - h| \geqslant 2|\lambda_1| - |h| > |\lambda_1|/2,$$

то при малом ε правая часть (3) отделена от 0, а так как последнее соотношение в (4) имеет следствием неравенство $\operatorname{Im} x_1 y_1 > 0$, то существует однозначная ветвь квадратного корня из $-\lambda_1 x_1 y_1 + h$, определенная во всей области (4). Таким образом, при малых значениях ε функция φ

определена в области (4), и в соответствии с определением Σ мы выбираем такую ветвь, которая положительна, когда $y_1 = i\overline{x_1}$, $h = \overline{h}$. Комплексное продолжение Σ_c области Σ определяем теперь с помощью аналитических уравнений $y_2 = ix_2$, $x_2 = \varphi(x_1,\, y_1,\, h,\, \varepsilon)$ с комплексными переменными x_1, y_1, меняющимися в пределах области (4).

Комплексное продолжение отображения S получается при помощи сдвига вдоль траектории комплексного решения нашей системы, выходящей из точки на Σ_c до следующей точки ее пересечения с Σ_c. Чтобы аппроксимировать это отображение, мы заменим $H(x,\, y,\, \varepsilon)$ функцией $H^* = H_2 + \varepsilon^2 H_4$, которая зависит только от $w_k = x_k y_k$ $(k = 1,\, 2)$, обозначив поверхность, соответствующую Σ, через Σ^*, а соответствующее отображение, определенное на Σ^*, через S^*. Для построения отображения S^* нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = H^*_{y_k} = H^*_{w_k} x_k, \quad \dot{y}_k = -H^*_{x_k} = -H^*_{w_k} y_k \quad (k = 1,\, 2).$$

Ее решения имеют вид

$$x_k(t) = x_k(0) e^{tH^*_{w_k}}, \quad y_k(t) = y_k(0) e^{-tH^*_{w_k}},$$

где в качестве аргументов в $H^*_{w_k}$ берутся $w_1(0)$, $w_2(0)$. Выбирая начальные значения так, чтобы выполнялось условие $y_2 = ix_2$, определим T как функцию этих начальных значений, такую, что T близко к $2\pi/|\lambda_2|$ и $y_2 = ix_2$ при $t = T$. Ясно, что для этого необходимо, чтобы

$$H^*_{w_2} T = 2\pi i.$$

Искомое отображение, таким образом, задается формулами

$$x_1(T) = x_1(0) e^{iQ}, \quad y_1(T) = y_1(0) e^{-iQ},$$

где

$$Q = 2\pi \frac{H^*_{w_1}}{H^*_{w_2}} = 2\pi \frac{\lambda_1 + \varepsilon^2(\mu_{11} w_1 + \mu_{12} w_2)}{\lambda_2 + \varepsilon^2(\mu_{12} w_1 + \mu_{22} w_2)};$$

последнее выражение после исключения w_2 с помощью интеграла энергии $H^* = h$ приобретает вид

$$Q = 2\pi \Big\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^3} \big(D w_1 + (\mu_{12}\lambda_2 - \mu_{22}\lambda_1) h \big) \Big\} + O(\varepsilon^3),$$

где D — величина, определенная в (2). Следовательно, комплексное продолжение S^* задается равенствами

$$\begin{cases} x_1(T) = x_1(0)e^{i\alpha+\beta x_1(0)y_1(0)} + O(\varepsilon^3), \\ y_1(T) = y_1(0)e^{-i\alpha-\beta x_1(0)y_1(0)} + O(\varepsilon^3), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\alpha = 2\pi\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda_2^3}(\mu_{12}\lambda_2 - \mu_{22}\lambda_1)h\Big), \quad \beta = \frac{2\pi i D}{\lambda_2^3}\varepsilon^3 \neq 0.$$

Наконец мы в состоянии применить теорему существования из § 1. Так как $H(x, y, \varepsilon)$ и H^* отличаются только членами третьего порядка, то легко проверить, что S также имеет форму (5) и при $y_1(0) = i\overline{x}_1(0)$, $2 \leqslant \big|x_1(0)\big|^2 \leqslant 3$ удовлетворяет необходимым предположениям теоремы. Таким образом, мы заключаем, что кольцо $2 + \delta \leqslant |x_1|^2 \leqslant 3 - \delta$ содержит замкнутые кривые, инвариантные относительно S. Этим и завершается доказательство устойчивости положения равновесия, удовлетворяющего условию (2).

Можно было бы надеяться получить аналогичный результат об устойчивости при условии, что квадратичная форма $\mu_{11}w_1^2 + 2\mu_{12}w_1w_2 + \mu_{22}w_2^2$ невырождена, т. е. $\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 \neq 0$. Эта надежда, однако, не оправдывается, как показывает следующий пример. Возвращаясь к общему случаю n степеней свободы, возьмем вектор $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ с неотрицательными целыми координатами, удовлетворяющий условию $|g| = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k \geqslant 3$, и многочлен

$$H^*(w) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k + \sum_{k,\, l=1}^{n} \mu_{kl} w_k w_l,$$

где λ_k чисто мнимы, μ_{kl} действительны и

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k = 0, \quad \sum_{k,\, l=1}^{n} \mu_{kl} g_k g_l = 0. \tag{6}$$

Обозначая произведение

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{g_k}$$

через x^g, мы покажем, что для системы с гамильтонианом

$$H = H^*(w) + x^g + cy^g, \quad w_k = x_k y_k, \quad c = i^{-|g|},$$

подчиненной условиям вещественности $y_k = i\overline{x}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, положение равновесия неустойчиво.

Чтобы это сделать, заметим, что

$$\begin{cases} \dfrac{dw_k}{dt} = -g_k(x^g - cy^g), \\ \dfrac{d}{dt}(x^g + cy^g) = (x^g - cy^g) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H^*_{w_k} g_k, \end{cases}$$

и будем искать решения, которые удовлетворяют соотношениям

$$w_k = ig_k\rho^2 \quad (k = 1, \ldots, n), \quad x^g = -cy^g$$

для некоторой положительной скалярной функции $\rho = \rho(t)$. Учитывая (6) и (7), заключаем, что если эти соотношения выполняются в начальный момент времени, то они будут выполняться и при всех t, для которых решение существует, если только ρ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\rho} = a\rho^{|g|-1}, \quad a = \pm\sqrt{g^g}.$$

Здесь знак a зависит от начальных условий и может быть обращен, если заменить x_k, y_k на τx_k, τy_k, где $\tau^{|g|} = -1$. В любом случае эти решения стремятся к положению равновесия как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, и положение равновесия, таким образом, не устойчиво по отношению к прошлому и будущему.

Ясно, что в этом примере отсутствие устойчивости связано с рациональной зависимостью собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Здесь интересно заметить, что члены четвертого порядка $\sum\limits_{k,\, l} \mu_{kl} w_k w_l$ не влияют на ситуацию, как это было в случае потока с двумя степенями свободы в окрестности периодического решения. Легко видеть, что условия (6) совместимы с предположением, что матрица (μ_{kl}) невырождена. Для примера, если $n = 2$ и

$$H^* = (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)(1 + k_1 w_1 + k_2 w_2),$$

то второе условие в (6) удовлетворяется одновременно с первым, в то время как $\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2 \neq 0$, если $k_1\lambda_2 \neq k_2\lambda_1$. Здесь, конечно, нарушается условие (2),

Критерий устойчивости можно легко обобщить на случай, когда члены четвертого порядка не удовлетворяют условию (2), но аналогичное условие невырожденности выполнено для членов шестого или более высокого порядка. Важно только, чтобы функция $H^*_{w_1}/H^*_{w_2}$ не была бы постоянна на поверхности $H^* = 0$, где H^* — функция переменных w_1, w_2, полученная отбрасыванием членов достаточно высокого порядка у гамильтониана, после того как он приведен к нормальной форме. Если отношение $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ иррационально, то это условие невырожденности может быть сформулировано очень просто. В самом деле, с помощью результатов § 30 мы можем тогда ввести формальным каноническим преобразованием новые переменные ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 так, чтобы гамильтониан $H(x, y)$ превратился в степенной ряд $K = K(\omega_1, \omega_2)$ от произведений $\omega_1 = \xi_1\eta_1$, $\omega_2 = \xi_2\eta_2$. В терминах этой нормальной формы условие невырожденности требует, чтобы $K(\omega_1, \omega_2)$ не делилось на $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$, или другими словами, чтобы функция $K(-\lambda_2\omega_1, \lambda_1\omega_1)$ не была тождественным нулем. При этом условии проверяется, что $K_{\omega_1}/K_{\omega_2}$ не постоянно на множестве, определяемом уравнением $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = 0$, и на основании предыдущих рассуждений мы имеем устойчивое положение равновесия.

Закончим этот параграф применением наших результатов к лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел. Эти решения, которые мы изучали применительно к общей задаче трех тел, сохраняют свое значение также и для ограниченного случая. Мы предполагаем, что P_1, P_2 — частицы масс μ, $1 - \mu$ соответственно, и рассматриваем движение точки P_3 нулевой массы во вращающейся системе координат, в которой P_1, P_2 неподвижны. При этих условиях уравнения для координат (x_1, x_2) точки P_3 имеют гамильтонов вид

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1, 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2y_1 - x_1y_2 - F(x_1, x_2),$$

$$F = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}.$$

Эта система имеет положения равновесия в точках

$$x_1 = \frac{1}{2} - \mu, \quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

которые образуют равносторонние треугольники с точками $(-\mu, 0)$ и $(1-\mu, 0)$, задающими положения тел P_2, P_1 соответственно. Собственные значения λ линеаризованной системы являются корнями уравнения четвертого порядка

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0,$$

которое получается из (18; 4) при $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$, $m_3 = 0$ и имеет две пары чисто мнимых корней, если

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Несложный подсчет показывает, однако, что квадратичная часть H_2 гамильтониана знакопеременна, и поэтому, чтобы решить вопрос об устойчивости, приходится принимать в расчет члены более высокого порядка.

Если исключить те значения μ, для которых $\lambda_1 q - \lambda_2 p = 0$ при $|p| + |q| \leqslant 4$, то гамильтониан можно привести к виду (1), причем величина D в (2) равна

$$-\frac{1}{8}\frac{36 - 541\lambda_1^2\lambda_2^2 + 644\lambda_1^4\lambda_2^4}{(1 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2)(4 - 25\lambda_1^2\lambda_2^2)}$$

и обращается в нуль только для исключительных значений μ_0 в интересующем нас интервале $0 < \mu < \mu_1$, где $\mu_1 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{9}\sqrt{69}\Big)$ — наименьший из корней уравнения $27\mu(1-\mu) = 1$. Значения μ, для которых $\lambda_1 q - \lambda_2 p = 0$ при $|p| + |q| \leqslant 4$, легко определяются. Если мы выберем $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $q > 0$, то $1 \leqslant q < p$ и ограничение $|p| + |q| \leqslant 4$ приводит к двум случаям $(p, q) = (2, 1), (3, 1)$. Вследствие равенства $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1$ это соответствует условию $\lambda_2^2 = -\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}$, которое имеет место при

$$\mu = \mu_2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{45}\sqrt{1833}\Big), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{15}\sqrt{213}\Big).$$

Таким образом, если исключить эти три значения μ_0, μ_2, μ_3 из интервала $0 < \mu < \mu_1$, то мы имеем устойчивость. К исследованию лагранжевых решений теорему Арнольда применил А. М. Леонтович [2], который, впрочем, проверил только, что D не обращается в нуль тождественно по μ. В явном виде D и исключительные значения μ вычислили Депри [3].

§ 36. КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

До сих пор мы использовали инвариантные кривые, найденные в предыдущих параграфах, только для исследования устойчивости. Однако в действительности можно дать и весьма точное описание качественных свойств соответствующих орбит. В то время как неподвижные точки отображения, связанного с потоком, соответствуют периодическим движениям, точки на инвариантных кривых, как будет показано ниже, соответствуют решениям, принадлежащим к специальному классу почти-периодических решений, а именно к так называемым квазипериодическим движениям. Значение этих решений было осознано уже Болем. Сейчас мы переходим к изучению таких решений и к обобщению результатов предыдущих параграфов на случай многих степеней свободы.

Мы будем называть комплексную функцию $f(t)$ *квазипериодической*, если она может быть представлена рядом Фурье специального вида:

$$f(t) = \sum_{k_1,\, \ldots,\, k_s} a_{k_1,\, \ldots,\, k_s} e^{i(k_1\omega_1 + \ldots + k_s\omega_s)t}, \tag{1}$$

где $k_1, \ldots, k_s$ пробегают все целые числа и коэффициенты экспоненциально убывают с ростом $|k| = |k_1| + \ldots + |k_s|$. Для упрощения записи мы вводим векторы $k = (k_1, \ldots, k_s)$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ вместе с их скалярным произведением $(k, \omega) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} k_\nu \omega_\nu$ и соответственно обозначаем коэффициенты через a_k. Действительные числа $\omega_1, \ldots, \omega_s$ можно предполагать рационально независимыми, так как иначе их количество можно было бы уменьшить. Вещественная квазипериодическая функция $f(t)$ характеризуется соотношениями $a_{-k} = \overline{a}_k$.

С каждой квазипериодической функцией $f(t)$ указанного вида мы связываем соответствующую функцию

$$F(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \sum_k a_k e^{i(k,\,\theta)}$$

s переменных, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$. Функция $F(\theta)$ имеет период 2π по каждому переменному и является вещественной, если $a_{-k} = \overline{a}_k$. Более того, согласно нашему предположению об экспоненциальном убывании коэффициентов, функция $F(\theta)$ вещественно-аналитическая. Функция $f(t)$ получается из $F(\theta)$ заменой θ на ωt. Обратно, каждая вещественно-аналитическая функция $F(\theta)$ периода 2π по своим переменным порождает вещественную квазипериодическую функцию $f(t)$, если θ опять заменить на ωt. Чтобы убедиться в этом, следует только показать, что коэффициенты Фурье

$$a_k = (2\pi)^{-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} F(\theta) e^{-i(k,\,\theta)} d\theta_1 \ldots d\theta_s$$

убывают экспоненциально с ростом $|k|$. Так как $F(\theta)$ — вещественно-аналитическая и периодическая функция, то она определена при комплексных значениях θ_ν в области $|\operatorname{Im}\theta_\nu| \leqslant \rho$ для достаточно малого $\rho > 0$ и ограничена там по абсолютной величине константой M. Так как по теореме Коши в качестве пути интегрирования в указанном выше интеграле может быть взят путь $\theta_\nu = x_\nu \pm i\rho$, $0 \leqslant x_\nu \leqslant 2\pi$, $(\nu = 1, \ldots, s)$, то, выбирая знак перед i равным знаку $-k_\nu$, если $k_\nu \neq 0$, и произвольно, если $k_\nu = 0$, мы получаем, что

$$|a_k| \leqslant M e^{-|k|\rho}. \tag{2}$$

Это доказывает экспоненциальное убывание a_k, в то время как вещественность F приводит к тому, что

$$\overline{a}_k = (2\pi)^{-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} F(\theta) e^{i(k,\theta)} d\theta_1 \ldots d\theta_s = a_{-k}.$$

Определенный таким способом класс квазипериодических функций будет обозначаться через $\mathfrak{Q}(\omega)$. Он представляет собой подкласс класса почти-периодических функций, введенных Бором [1], более узкий в двух отношениях: во-первых, частоты являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами только конечного числа частот $\omega_1, \ldots, \omega_s$, тогда как в теории Бора в качестве частот допускается любое счетное множество действительных чисел; во-вторых, требуется, чтобы коэффициенты a_k экспоненциально убывали с ростом $|k|$, что делает $f(t)$, так же как и $F(\theta)$, вещественно-аналитическими функциями, тогда как почти-периодические функции Бора просто ограничены и непрерывны. Этот более узкий класс $\mathfrak{Q}(\omega)$ весьма удобен, однако, применительно к нелинейным задачам небесной механики.

Класс функций $\mathfrak{Q}(\omega)$ зависит, очевидно, от выбора чисел $\omega_1, \ldots, \omega_s$. Более точно он определяется решеткой, порожденной числами $\omega_1, \ldots, \omega_s$, так как $\mathfrak{Q}(\omega)$ не меняется, если вектор ω заменен на вектор $\omega' = U\omega$, где U — целочисленная матрица с определителем ± 1. Ясно, что требование рациональной независимости $\omega_1, \ldots, \omega_s$ сохраняется при таком преобразовании. Ясно также, что всякая квазипериодическая функция из $\mathfrak{Q}(\omega)$ может быть равномерно аппроксимирована в $\mathfrak{Q}(\omega)$ конечной тригонометрической суммой, для чего можно просто обрезать ряд Фурье данной функции $f(t)$, опуская члены с $|k| \geqslant N$ при достаточно большом натуральном N. Вследствие экспоненциального убывания коэффициентов Фурье полученные таким способом тригонометрические суммы будут равномерно сходиться к $f(t)$.

С каждой квазипериодической функцией $f(t)$ мы также связываем среднее значение

$$f^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt.$$

Чтобы доказать существование этого предела, заметим, что для тригонометрического полинома из $\mathfrak{Q}(\omega)$ он заведомо существует и равен

$$a_0 = (2\pi)^{-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} F(\theta)\, d\theta_1 \ldots d\theta_s.$$

Для произвольной же квазипериодической функции $f(t) \in \mathfrak{Q}(\omega)$ существование указанного предела следует из возможности аппроксимировать $f(t)$ такими тригонометрическими полиномами $f_N(t) \in \mathfrak{Q}(\omega)$, для которых $\sup\limits_t \bigl|f(t) - f_N(t)\bigr| = \varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$. В самом деле, вычитая константу из f, мы можем предположить, что коэффициент a_0, соответствующий постоянному члену, равен нулю, и это же предположение тогда будет выполнено для тригонометрического полинома f_N, полученного из $f(t)$ отбрасыванием высших гармоник. Для данного $\delta > 0$ возьмем N столь большим, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon_N < \delta/2$ и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T f_N\,dt\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Так как $f_N^* = 0$, то мы можем найти такое T_δ, чтобы второй член в написанном выше неравенстве был меньше, чем $\delta/2$, при $T > T_\delta$, и поэтому

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f\,dt\right| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \quad (T > T_\delta).$$

Это показывает, что предел левой части при $T \to \infty$ существует и равен 0.

Прежде чем исследовать значение квазипериодических функций для нелинейных гамильтоновых систем, мы рассмотрим простейшее линейное уравнение

$$\dot{y} = f(t),$$

содержащее квазипериодическую функцию $f(t)$ из $\mathfrak{Q}(\omega)$. Если функция $f(t)$ в действительности периодическая, то любое решение этого уравнения есть сумма линейной функции f^*t и периодической функции того же самого периода, что и $f(t)$, так что решение будет периодическим, если $f^* = 0$. Предполагая теперь, что f есть квазипериодическая функция из $\mathfrak{Q}(\omega)$ и имеет среднее значение $f^* = 0$, мы исследуем, лежат ли также решения написанного выше уравнения в $\mathfrak{Q}(\omega)$. Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный, но если потребовать, чтобы при некоторых положительных константах c, μ частоты (k, ω) удовлетворяли неравенствам

$$\bigl|(k, \omega)\bigr| \geqslant c^{-1}|k|^{-\mu} \tag{3}$$

для всех целых $k \neq 0$, то ответ будет утвердительный.

Для доказательства этого предположим, что функция $f(t)$ снова представлена как $F(\omega t)$, а неизвестное решение $y(t)$ как $Y(\omega t)$. Тогда функция $Y(\theta)$ должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$\sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu \frac{\partial Y}{\partial \theta_\nu} = F(\theta). \tag{4}$$

Мы предполагаем здесь, что обе функции $Y(\theta)$, $F(\theta)$ вещественно-аналитичны и имеют период 2π по $\theta_1, \ldots, \theta_s$ и, кроме того, что среднее значение $F(\theta)$ равно 0. В этом случае уравнение (4) легко решается с помощью разложения в ряды Фурье. В самом деле, если положить

$$F(\theta) = \sum_k a_k e^{i(k,\theta)},$$

то решение $Y(\theta)$ уравнения (4) со средним значением 0 имеет вид

$$Y(\theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{i(k,\,\omega)} e^{i(k,\,\omega)},$$

так как $a_0 = 0$. В силу (2), (3), коэффициенты $b_k = -i(k,\,\omega)^{-1} a_k$ экспоненциально убывают, в то время как вещественность функции $F(\theta)$ приводит к тому, что $\overline{b}_k = -b_{-k}$, так что написанный выше ряд представляет вещественно-аналитическую функцию $Y(\theta)$. Таким образом $y(t) = Y(\omega t)$ — решение уравнения $\dot{y} = f(t)$ в $\mathfrak{Q}(\omega)$. Ясно, что общее решение отличается от только что построенного только аддитивной константой.

Решение уравнения (4) в действительности будет принадлежать $\mathfrak{Q}(\omega)$ при более слабых ограничениях на малые знаменатели $(k,\,\omega)$, чем неравенство (3). Однако если на эти частоты не наложить вообще никаких ограничений, то соответствующее решение может быть даже неограниченным. Чтобы привести такой пример, возьмем число $b > 1$ и построим положительное иррациональное число α, удовлетворяющее неравенствам

$$|k_\nu \alpha - l_\nu| < b^{-k\nu}$$

для бесконечного числа положительных целых k_ν, l_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Такое число α может быть легко построено при помощи разложения в непрерывную цепную дробь. Выбирая число α так, чтобы выполнялись неравенства $1 < a^{\alpha+1} < b$, мы полагаем

$$f(t) = \sum_{k,\,l=1}^{\infty} a^{-k-l} \eta_{kl} \sin(k\alpha - l)t,$$

где η_{kl} есть 1, если $k\alpha - l > 0$, и -1, если $k\alpha - l < 0$. Ясно, что функция $f(t)$ принадлежит $\mathfrak{Q}(\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 = \alpha$, $\omega_2 = 1$ и имеет среднее значение 0. Тем не менее функция

$$g(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds = \sum_{k,\,l=1}^{\infty} a^{-k-l}|k\alpha - l|^{-1}\bigl(1 - \cos(k\alpha - l)t\bigr)$$

даже не ограничена, и поэтому, конечно, не является квазипериодической. В самом деле, полагая $\delta_\nu = |k_\nu\alpha - l_\nu|$ и $t_\nu = \frac{\pi}{2\delta_\nu}$, мы имеем

$$g(t_\nu) \geqslant a^{-k_\nu - l_\nu}\delta_\nu^{-1}.$$

Так как $k_\nu + l_\nu = k_\nu(1+\alpha) - (k_\nu\alpha - l_\nu) \leqslant k_\nu(1+\alpha) + 1$ и $\delta_\nu < b^{-k_\nu}$, то отсюда

$$g(t_\nu) > a^{-1}\Bigl(\frac{b}{a^{1+\alpha}}\Bigr)^{k_\nu} \to \infty \quad (k_\nu \to \infty).$$

Впредь мы будем считать, что выполнены ограничения (3) на малые знаменатели (k, ω). Рассуждения из теории меры, подобные тем, которые проводились в § 25, показывают, что почти все действительные векторы ω удовлетворяют таким неравенствам с некоторыми положительными константами, если $\mu \geqslant s$.

Для дальнейшего удобно перечислить некоторые операторы, которые сохраняют квазипериодичность вне связи с неравенствами (3). Во-первых, ясно, что $\mathfrak{Q}(\omega)$ образует векторное пространство над полем действительных чисел, замкнутое как относительно дифференцирования, так и относительно образования произведений и частных, в последнем случае при условии, что знаменатель отделен от 0. Во-вторых, если $\varphi(y_1, \ldots, y_r)$ — вещественно-аналитическая функция, определенная для всех действительных $y_1, \ldots, y_r$, и функции $f_1, \ldots, f_r$ принадлежат $\mathfrak{Q}(\omega)$, то сложная функция $\varphi(f_1, \ldots, f_r)$ также лежит в $\mathfrak{Q}(\omega)$. Точно так же, если функции f, g принадлежат $\mathfrak{Q}(\omega)$, то и функция $f\bigl(t + g(t)\bigr)$ принадлежит $\mathfrak{Q}(\omega)$. В самом деле, если $f(t)$, $g(t)$ получаются из полипериодических функций $F(\theta)$, $G(\theta)$, то $f\bigl(t+g(t)\bigr)$ получается из $F(\theta_1 + \omega_1 G, \ldots, \theta_s + \omega_s G)$.

Наконец, мы утверждаем, что если $f \in \mathfrak{Q}(\omega)$, то функция, обратная к функции $\tau = \alpha t + f(t)$ может быть записана в виде $t = \alpha^{-1}\bigl(\tau + g(\tau)\bigr)$, где $g \in \mathfrak{Q}(\omega/\alpha)$. При этом предполагается, что выполняются неравенства (3) и что функция $\alpha + \dfrac{df}{dt}$ отделена от нуля. Последнее условие приводит к тому, что $\alpha \neq 0$, так как среднее значение $\dfrac{df}{dt}$ равно нулю.

Для доказательства этого утверждения мы можем предположить, что $\alpha = 1$, или, что то же самое, заменить τ на $\alpha\tau$. Если $f(t)$ соответствует функции $F(\theta)$, а неизвестная функция $g(\tau)$ — функции $G(\theta)$, где $g(\tau) = G(\omega\tau)$, $f(t) = F(\omega t)$, то G должно удовлетворять уравнению

$$G(\theta) + F(\theta + \omega G) = 0. \tag{5}$$

Мы заменяем его уравнением

$$G(\theta) + \sigma F(\theta + \omega G) = 0$$

и ищем решение $G = G(\theta;\, \sigma)$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ с периодом 2π по каждому из переменных $\theta_1, \ldots, \theta_s$. Если продифференцировать последнее уравнение по σ, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \varphi(\theta + \omega G;\, \sigma), \quad G(\theta;\, 0) = 0, \tag{6}$$

где

$$\varphi(\theta;\, \sigma) = -F(\theta)\left(1 + \sigma \sum_{\nu=1}^{s} \omega_\nu F_{\theta_\nu}\right)^{-1}.$$

Согласно предположению относительно функции $\alpha + \dfrac{df}{dt}$, знаменатель в правой части последнего выражения отделен от 0, если $\sigma = 1$ и $\theta_\nu = \omega_\nu t$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, и на самом деле даже положителен, так как его среднее значение равно 1. С другой стороны, векторы с компонентами $\omega_\nu t + k_\nu 2\pi$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ при целых k_ν и действительных t всюду плотны в s-мерном евклидовом пространстве, и поэтому знаменатель положителен и отделен от 0 при всех действительных θ и $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Отсюда следует, что $\varphi(\theta;\, \sigma)$ — вещественно-аналитическая функция с периодом 2π по θ_ν.

Решение $G(\theta;\, \sigma)$ строится теперь с помощью стандартной теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы показать, что функция $G(\theta;\, \sigma)$ аналитична, если функция $\sum\limits_{\nu=1}^{s} |\operatorname{Im}\theta_\nu|$ достаточно мала и $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, достаточно проверить, что при продолжении решения мы остаемся в области аналитичности дифференциального уравнения. Предполагая, что φ аналитична в области $|\operatorname{Im}\theta_\nu| < \delta$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ и удовлетворяет в этой области неравенству $\sum\limits_{\nu=1}^{s} |\varphi_{\theta_\nu}| < M$, мы полагаем

$$\rho = \delta e^{-M\|\omega\|},$$

где $\|\omega\| = \max\limits_\nu |\omega_\nu|$, и постараемся доказать, что в области $|\operatorname{Im}\theta_\nu| < \rho$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ функция $G(\theta; \sigma)$ должна удовлетворять оценке $\rho + \|\omega\|\,|\operatorname{Im} G| < \delta$. Отсюда, конечно, вытекают существование и аналитичность решения в этой области. Проверим теперь эту оценку. Так как φ — вещественно-аналитическая функция, то $\overline{\varphi(\theta; \sigma)} = \varphi(\overline{\theta}; \sigma)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{Im} G\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial}{\partial\sigma}(G - \overline{G})\right| = \\ = \frac{1}{2}\left|\varphi(\theta + \omega G; \sigma) - \varphi(\overline{\theta} + \omega\overline{G}; \sigma)\right| \leqslant \\ \leqslant M \max_\nu \left|\operatorname{Im}\theta_\nu + \omega_\nu \operatorname{Im} G\right| < M\bigl(\rho + \|\omega\|\,|\operatorname{Im} G|\bigr), \end{aligned}$$

до тех пор пока оценка $\rho + \|\omega\|\,|\operatorname{Im} G| < \delta$ остается в силе. Предположим, что эта оценка выполняется не во всем интервале $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Так как она, конечно, справедлива при $\sigma = 0$, то в этом случае должно существовать наименьшее число $0 < \sigma^* \leqslant 1$, для которого

$$\max_\theta |\operatorname{Im} G| = \frac{\delta - \rho}{\|\omega\|} \quad (\sigma = \sigma^*),$$

в то время как при $0 \leqslant \sigma < \sigma^*$ имеет место указанное выше дифференциальное неравенство. Из теоремы сравнения мы получаем тогда, что

$$|\operatorname{Im} G| > h(\sigma) \quad (0 < \sigma \leqslant \sigma^*),$$

где $h(\sigma)$ — решение уравнения

$$\frac{dh}{d\sigma} = M\bigl(\rho + \|\omega\| h\bigr), \quad h(0) = 0.$$

Так как

$$h(\sigma^*) = \frac{\rho}{\|\omega\|}(e^{M\|\omega\|\sigma^*} - 1) \leqslant \frac{\rho}{\|\omega\|}(e^{M\|\omega\|} - 1) = \frac{\delta - \rho}{\|\omega\|},$$

то

$$|\operatorname{Im} G| < \frac{\delta - \rho}{\|\omega\|} \quad (\sigma = \sigma^*),$$

что противоречит выбору σ^*. Этим установлена справедливость нашей оценки, и мы заключаем, что решение $G(\theta;\, \sigma)$ уравнения (6) существует для $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, вещественно-аналитично и в силу теоремы единственности имеет период 2π по θ_ν. Легко проверяется, что $G = G(\theta;\, 1)$ — решение нашего первоначального уравнения (5). Таким образом, $g(\tau) = G(\omega\tau;\, 1)$ принадлежит $\mathfrak{Q}(\omega)$, и утверждение о виде обратной функции доказано.

Мы заканчиваем эти предварительные замечания применением последнего результата к нелинейному скалярному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = f(t),$$

где функция f принадлежит $\mathfrak{Q}(\omega)$ и удовлетворяет неравенству $\bigl|f(\tau)\bigr| \geqslant \delta > 0$ для всех τ. Докажем, что любое решение этого уравнения имеет вид $\tau = \alpha t + g(t)$, где α^{-1} — среднее значение функции f^{-1} и g принадлежит $\mathfrak{Q}(\alpha\omega)$. В самом деле, обратная функция $t = t(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dt}{d\tau} = f^{-1}(\tau)$$

и поэтому, как было замечено выше, имеет вид

$$t = \alpha^{-1}\tau + h(\tau),$$

причем функция $h(\tau)$ принадлежит $\mathfrak{Q}(\omega)$, если выполняется условие (3). Следовательно, согласно доказанному нами утверждению об обратной функции, $\tau(t)$ имеет указанный вид.

Теперь мы обратимся к построению квазипериодических решений гамильтоновых систем, начав с неавтономных систем с одной степенью свободы, затем перейдем к системам с двумя и более степенями свободы и закончим некоторыми применениями к задаче трех тел. Сначала рассмотрим систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{7}$$

в которой гамильтониан $H = H(t, x, y; \varepsilon)$ имеет период 2π по независимому переменному t и скаляру x и вещественно-аналитичен по всем четырем своим аргументам, причем y меняется в вещественном интервале $a < y < b$, а параметр ε — в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Наиболее существенное дополнительное предположение состоит в том, что при $\varepsilon = 0$ гамильтониан

$$H(t, x, y; 0) = H^0(y)$$

не зависит от t, x и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 H^0}{\partial y^2} \neq 0 \quad (a < y < b). \tag{8}$$

Покажем, что при этих условиях написанная выше система обладает при достаточно малых $|\varepsilon|$ решениями вида

$$\begin{gathered} x = \theta_2 + F(\theta; \varepsilon), \quad y = G(\theta; \varepsilon), \\ \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad \theta_1 = t, \quad \theta_2 = \alpha t + \theta_2(0), \end{gathered} \tag{9}$$

где функции F, G вещественно-аналитичны по переменным θ и ε и имеют период 2π по θ_1, θ_2, в то время как число α — иррационально. Другими словами, $x - \alpha t$, y — квазипериодические функции, принадлежащие классу $\mathfrak{Q}(1, \alpha)$. Несмотря на то, что сама функция $x(t)$ не является квазипериодической, мы будем называть эти решения квазипериодическими из класса $\mathfrak{Q}(1, \alpha)$. В самом деле, так как x — угловая переменная, то естественно в этой ситуации называть решение $x(t)$, $y(t)$ квазипериодическим из класса $\mathfrak{Q}(\omega_1, \omega_2)$, если для любой вещественно-аналитической функции $f(t, x, y)$ периода 2π по t и x функция $f\bigl(t, x(t), y(t)\bigr)$ принадлежит к $\mathfrak{Q}(\omega_1, \omega_2)$.

Существование таких квазипериодических решений легко устанавливается при помощи теоремы существования из § 1. Для этого мы построим сохраняющее площадь преобразование, отображающее начальные значения $x(0)$, $y(0)$ решения при $t = 0$ в значения $x(2\pi)$, $y(2\pi)$ при $t = 2\pi$. Это отображение определено в замкнутом интервале $a + \delta \leqslant y \leqslant b - \delta$ при достаточно малом δ, вещественно-аналитично в нем и имеет вид

$$\begin{aligned} x(2\pi) &= x(0) + 2\pi H^0_y\bigl(y(0)\bigr) + O(\varepsilon), \\ y(2\pi) &= y(0) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Согласно (8), H_y^0 имеет отличную от 0 производную, так что теорема § 1 применима и мы заключаем, что отображение имеет инвариантную замкнутую кривую

$$x(0) = \xi + u(\xi;\,\varepsilon), \quad y(0) = v(\xi;\,\varepsilon),$$

лежащую в пределах $a + \delta \leqslant y(0) \leqslant b - \delta$, причем на этой кривой отображение задается равенствами

$$\begin{aligned} x(2\pi) &= \xi + 2\pi\alpha + u(\xi + 2\pi\alpha;\,\varepsilon), \\ y(2\pi) &= v(\xi + 2\pi\alpha;\,\varepsilon). \end{aligned} \tag{10}$$

Иррациональное число α здесь играет ту же роль, что и число $\frac{\omega}{2\pi}$ в § 1 и удовлетворяет условию (1; 6).

Покажем теперь, что решения, у которых начальные данные лежат на этой инвариантной кривой, — квазипериодические из класса $\mathfrak{Q}(1,\,\alpha)$. Если $|\varepsilon|$ достаточно мало, то эти решения останутся в области $a < y < b$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и, следовательно, при всех t. Обозначая эти решения через

$$x = \xi + u(t,\,\xi;\,\varepsilon), \quad y = v(t,\,\xi;\,\varepsilon), \tag{11}$$

мы заметим, что u, v — вещественно-аналитические функции по t, ξ, ε и имеют период 2π по ξ, тогда как в силу (10)

$$\begin{aligned} u(2\pi,\,\xi;\,\varepsilon) &= \omega + u(0,\,\xi + \omega;\,\varepsilon), \\ v(2\pi,\,\xi;\,\varepsilon) &= v(0,\,\xi + \omega;\,\varepsilon), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\omega = 2\pi\alpha$.

Более того, мы можем утверждать, что

$$\begin{cases} u(t + 2\pi,\,\xi - \omega,\,\varepsilon) - \omega = u(t,\,\xi;\,\varepsilon), \\ v(t + 2\pi,\,\xi - \omega,\,\varepsilon) = v(t,\,\xi;\,\varepsilon). \end{cases} \tag{13}$$

В самом деле, если $u(t,\,\xi;\,\varepsilon)$, $v(t,\,\xi;\,\varepsilon)$ в (11) заменить соответствующими левыми частями из (13), то полученные в результате функции снова являются решениями нашей системы, начальные данные которых, согласно (12), совпадают с начальными данными первоначальных решений. Следовательно, по теореме единственности для дифференциальных уравнений совпадают и сами решения, откуда и вытекает (13).

Таким образом, функции

$$F(\theta;\,\varepsilon) = u(\theta_1,\,\theta_2 - \alpha\theta_1;\,\varepsilon) - \alpha\theta_1,$$
$$G(\theta;\,\varepsilon) = v(\theta_1,\,\theta_2 - \alpha\theta_1;\,\varepsilon)$$

имеют период 2π по θ_1, θ_2, и, пользуясь ими, можно выразить решение (11) в форме (9) с $\theta_1 = t$, $\theta_2 = \xi + \alpha t$. Это завершает доказательство.

Мы распространим предыдущий результат на автономную гамильтонову систему

$$\dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k} \quad (k = 1,\,2) \tag{14}$$

с двумя степенями свободы, где $H(x,\,y,\varepsilon)$ — вещественно-аналитическая функция по переменным x_1, x_2, y_1, y_2, ε периода 2π по x_1, x_2; $y = (y_1,\,y_2)$ меняется в открытой области $\mathfrak{D}$, а ε — в некоторой окрестности нуля. Основное предположение в этом случае состоит в том, что

$$H^0(y) = H(x,\,y;\,0)$$

не зависит от x и удовлетворяет условию

$$H^0_{y_2y_2}(H^0_{y_1})^2 - 2H^0_{y_1y_2}H^0_{y_1}H^0_{y_2} + H^0_{y_1y_1}(H^0_{y_2})^2 \neq 0 \tag{15}$$

в $\mathfrak{D}$. Рассмотрим теперь поверхность постоянной энергии $H(x,\,y;\,\varepsilon) = h$, где h — такая константа, что множество, задаваемое равенством $H(x,\,y;\,0) = H^0(y) = h$, пересекает $\mathfrak{D}$. Утверждается, что на такой изоэнергетической поверхности существует решение $x(t)$, $y(t)$, которое является квазипериодическим в том смысле, что $f\big(x(t),\,y(t)\big)$ — квазипериодическая функция для любой вещественно-аналитической функции $f(x,\,y)$, имеющей период 2π по x_1, x_2.

Этот результат получается из предыдущего. В силу (15) можно предположить, что функция $H^0_{y_1}$ отделена от 0 в открытой подобласти $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$, и выбирая область $\mathfrak{D}'$, так же как и $|\varepsilon|$, достаточно малыми, мы можем из уравнения $H(x,\,y;\,\varepsilon) = h$ найти $y_1 = -K(x_1,\,x_2,\,y_2;\,\varepsilon)$, где K снова имеет период 2π по x_1, x_2. Более того, так как в уравнении

$$\dot{x}_1 = H_{y_1} \tag{16}$$

функция H_{y_1} отделена от 0, то мы можем из дифференциальных уравнений исключить переменную t и использовать x_1 как независимое переменное. Полученные в результате дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{H_{y_2}}{H_{y_1}}, \quad \frac{dy_2}{dx_1} = -\frac{H_{x_2}}{H_{y_1}}$$

могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial K}{\partial y_2}, \quad \frac{dy_2}{dx_1} = -\frac{\partial K}{\partial x_2}, \tag{17}$$

что проверяется дифференцированием тождества $H(x_1, x_2, -K, y_2; \varepsilon) = h$. Легко проверить также, что функция $K(x_1,\, x_2,\, y_2;\, 0) = K^0(y_2)$ не зависит от x_1, x_2, причем в силу (15)

$$\frac{\partial^2 K^0}{\partial y_2^2} \neq 0.$$

В соответствии с предыдущим результатом уравнение (17) имеет решение вида

$$\begin{cases} x_2 = \theta_2 + F(\theta;\, \varepsilon), \quad y_2 = G(\theta;\, \varepsilon), \\ \theta_1 = x_1, \quad \theta_2 = \alpha x_1 + \theta_2(0), \end{cases} \tag{18}$$

где функции F, G — снова вещественно-аналитические по θ_1, θ_2, ε и имеют период 2π по θ_1, θ_2. Таким образом, эти решения квазипериодически зависят от x_1. Чтобы исследовать их зависимость от t, мы решаем уравнение (16), рассматривая его правую часть как известную квазипериодическую функцию от x_1 класса $\mathfrak{D}(1,\, \alpha)$. Так как функция H_{y_1} отделена от 0 и α удовлетворяет неравенству (1; 6), то, согласно нашим предварительным замечаниям, $x_1(t)$ имеет вид

$$x_1 = \beta(t - t_0) + f(t - t_0),$$

где f лежит в $\mathfrak{D}(\beta,\, \beta\alpha)$ и β^{-1} — среднее значение по x_1 функции $H_{y_1}^{-1}$. Комбинируя это с (18) и используя доказанное раньше утверждение о композиции квазипериодических функций, мы, наконец, получаем

$$\begin{cases} x_k(t) = \theta_k + \widetilde{F}_k(\theta;\, \varepsilon), \quad y_k(t) = \widetilde{G}_k(\theta;\, \varepsilon) \quad (k = 1,\, 2), \\ \qquad \theta_k = \omega_k t + \theta_k(0), \quad \omega_1 = \beta, \quad \omega_2 = \alpha\beta, \end{cases} \tag{19}$$

где функции $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ — вещественно-аналитические по θ_1, θ_2, ε и имеют период 2π по θ_1, θ_2, тогда как отношение частот ω_1, ω_2 иррационально. Это завершает доказательство.

Чтобы интерпретировать полученный результат геометрически, мы можем рассмотреть первую строчку из (19) как вложение двумерного тора в четырехмерное фазовое пространство. Этот тор лежит на фиксированной поверхности постоянной энергии $H(x,\, y;\, \varepsilon) = h$ и инвариантен относительно потока (14) в том смысле, что вектор

$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ — касательный к тору. Следовательно, каждое решение системы (14) с начальными данными на этом торе остается на нем при всех действительных t и система (14) индуцирует дифференциальное уравнение на торе. Согласно второй строчке из (19), это уравнение имеет вид $\dot{\theta}_k \subset \omega_k$, и так как ω_1/ω_2 иррационально, то любая орбита заполняет тор всюду плотно.

Эти утверждения можно обобщить на случай нескольких степеней свободы. Чтобы сформулировать соответствующий результат, положим $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Пусть $H(x, y; \varepsilon)$ — вещественно-аналитическая по своим $2n + 1$ аргументам функция, имеющая период 2π по каждому из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, H определена при всех действительных x; y меняется в n-мерной области $\mathfrak{D}$, а параметр ε — в некоторой окрестности нуля. Кроме того, предполагается, что при $\varepsilon = 0$ функция

$$H(x, y, 0) = H^0(y)$$

не зависит от x, так что при этом значении параметра соответствующая гамильтонова система упрощается:

$$\dot{x}_k = H^0_{y_k}(y), \quad \dot{y}_k = -H^0_{x_k}(y) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Решение этой системы задается равенствами

$$x_k(t) = H^0_{y_k}(v)t + x_k(0), \quad y_k = v_k$$

с любым вектором $v = (v_1, \ldots, v_n)$ из $\mathfrak{D}$; а n уравнений $y_k = v_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ могут рассматриваться в качестве определения n-мерного тора, на котором дифференциальные уравнения имеют вид

$$\dot{x}_k = H^0_{y_k}(v).$$

Таким образом, если вектор v выбран так, что $H^0_{y_k}(v)$ рационально независимы, то решения плотны на этом торе.

Наша цель — найти решения подобного типа при малых значениях ε, и для этого мы сделаем дополнительное предположение о невырожденности гессиана (определителя матрицы вторых производных)

$$\left|H^0_{y_k y_l}\right| \neq 0. \tag{20}$$

Это предположение приводит к тому, что значения градиента $H_y^0(y)$ заполняют с изменением y открытое n-мерное множество. В частности, константы $v_1, \ldots, v_n$ могут быть выбраны так, чтобы числа $\omega_k = H_{y_k}^0(v)$ были рационально независимы и сверх того удовлетворяли бесконечному числу неравенств

$$\left|\sum_{k=1}^{n} j_k \omega_k\right| \geqslant c|j|^{-\mu} \tag{21}$$

для всех целых j_k с $|j| = \sum_{k=1}^{n} |j_k| > 0$, где c, μ — некоторые фиксированные положительные константы. При этих предположениях мы утверждаем, что при малых значениях $|\varepsilon|$ существуют решения соответствующей гамильтоновой системы, которые имеют вид

$$\begin{cases} x_k = \theta_k + F_k(\theta;\, \varepsilon), & y_k = G_k(\theta_k;\, \varepsilon), \\ \theta_k = \omega_k t + \theta_k(0), & (k = 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{22}$$

где F_k, G_k — снова вещественно-аналитические функции периода 2π по $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Эти решения квазипериодичны в том смысле, что для любой вещественно-аналитической функции $f(x, y)$ периода 2π по $x_1, \ldots, x_n$ функция $f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ — квазипериодическая из класса $\mathfrak{Q}(\omega)$. Кроме того, можно показать, что эти квазипериодические решения образуют множество положительной меры в фазовом пространстве. Более точно, если Ω обозначает $2n$-мерное открытое множество точек (x, y), для которых $y \in \mathfrak{D}$, и если δ — заданная положительная константа, то существует положительное $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$, такое, что для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ указанные выше квазипериодические решения в Ω заполняют замкнутое множество S, мера дополнения которого $m(\Omega - S) < \delta m(\Omega)$. В этом смысле мы можем сказать, что большинство решений в Ω — квазипериодические.

Сформулированная теорема принадлежит А. Н. Колмогорову и В. И. Арнольду [2–5]. Полезно отметить, что условие иррациональности (21) налагается не на данную гамильтонову систему, а на вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, выбранный в области изменения H_y^0. Теорема утверждает существование квазипериодических решений в $\mathfrak{Q}(\omega)$, и в связи с этим условие (20), которое обеспечивает возможность контролировать частоты $\omega_k = H_{y_k}^0(v)$ за счет выбора v, является решающим. Имеется еще один вариант этой теоремы, в котором (20) заменяется другим предположением. Вместо требования, согласно которому частоты $H^0_{y_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ пробегают открытое n-мерное множество, можно потребовать, чтобы на фиксированной поверхности постоянной энергии $H^0(y) = h$ отношения $H^0_{y_k}/H^0_{y_1}$ $(k = 2, \ldots, n)$ при $H^0_{y_1} \neq 0$ заполняли $(n-1)$-мерное множество. Это приводит к предположению

$$\begin{vmatrix} H^0_{y_k y_l} & H^0_{y_k} \\ H^0_{y_l} & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{23}$$

которое для $n = 2$ на самом деле совпадает с (15). При этом предположении на заданной поверхности постоянной энергии существуют квазипериодические решения вида (22) с предписанными отношениями частот. Заметим, что ни одно из условий (20), (23) не сводится к другому. Для примера, при $H^{(0)}(y) = y_1 + P(y_2, \ldots, y_n)$ условие (20) нарушается, а (23) выполняется, если гессиан P отличен от 0; с другой стороны, для $n = 2$ функция $H^0(y) = \log(y_1 y_2^{-1})$ при положительных y_1, y_2 удовлетворяет (20), но не удовлетворяет (23).

Доказательство этих теорем основано на той же самой быстро сходящейся итерационной схеме, которая использовалась в § 1 и здесь приводиться не будет. Вместо этого мы, используя предположение (20), получим только формальное разложение по степеням ε для функций $F_k(\theta; \varepsilon)$, $G_k(\theta; \varepsilon)$ из (22), опуская доказательство сходимости.

Начнем с выбора вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, который лежит в области изменения $H^0_y(y)$ при $y \in \mathfrak{D}$ и удовлетворяет условию (21). Существование такого вектора доказывается при условии $\mu \geqslant n$ с помощью рассуждений из теории меры, подобных проведенным в конце § 25. Можно считать, что $H^0_{y_k}(0) = \omega_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, поскольку подходящим сдвигом координаты y этого всегда можно добиться. Чтобы найти искомый инвариантный тор, мы построим каноническое преобразование, которое преобразует переменные (x, y) в (ξ, η) и тор (22) в тор $\eta = 0$. А именно зададим искомое каноническое преобразование с помощью производящей функции $S(x, \eta; \varepsilon)$ равенствами

$$y_k = S_{x_k}, \quad \xi_k = S_{\eta_k} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{24}$$

предполагая, что $S(x, \eta; 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \eta_k$. Чтобы обеспечить желаемую периодичность, мы потребуем, чтобы S_{x_k}, $S_{\eta_k} - x_k$ имели период 2π по $x_1, \ldots, x_n$. Обозначая преобразованный гамильтониан через $\Phi(\xi, \eta; \varepsilon)$, имеем

$$H(x,\, S_x;\, \varepsilon) = \Phi(S_\eta,\, \eta;\, \varepsilon); \tag{25}$$

попытаемся определить функцию S так, чтобы

$$\Phi(\xi,\, 0;\, \varepsilon) = \gamma(\varepsilon), \quad \Phi_{\eta_k}(\xi,\, 0;\, \varepsilon) = \omega_k \quad (k = 1,\, \ldots,\, n), \tag{26}$$

где γ не зависит от ξ. Если это возможно, то преобразованные уравнения

$$\dot{\xi}_k = \Phi_{\eta_k}, \quad \dot{\eta}_k = -\Phi_{\xi_k}$$

обладают решениями

$$\xi_k = \omega_k t + \xi_k(0), \quad \eta_k = 0 \quad (k = 1,\, \ldots,\, n).$$

Выражая эти решения в первоначальных координатах x, y и полагая $\theta_k = \xi_k$, мы тогда получаем искомые квазипериодические решения (22).

Таким образом, наша задача сводится к нахождению производящей функции $S(x,\, \eta;\, \varepsilon)$, для которой преобразованный гамильтониан $\Phi(\xi,\, \eta;\, \varepsilon)$ удовлетворяет (26). Для этой цели достаточно рассматривать только линейные функции по η вида

$$S(x,\, \eta;\, \varepsilon) = a_0(x;\, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{n} \big(x_k + a_k(x;\, \varepsilon)\big)\eta_k, \tag{27}$$

где $a_k(x;\, \varepsilon)$, $(k = 1,\, \ldots,\, n)$ имеет период 2π по $x_1,\, \ldots,\, x_n$, в то время как $a_0(x;\, \varepsilon)$ — функция вида

$$a_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k(\varepsilon) x_k + b_0(x;\, \varepsilon),$$

причем $b_0(x;\, \varepsilon)$ имеет период 2π по $x_1, \ldots, x_n$, а c_k не зависят от x, η. Каноническое преобразование, порождаемое такой функцией $S(x,\, \eta;\, \varepsilon)$, можно легко описать. В самом деле, если $S(x,\, \eta;\, 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \eta_k$, то оно задается явными формулами

$$x = u(\xi;\, \varepsilon), \quad y = v(\xi,\, \varepsilon) + V(\xi;\, \varepsilon)\eta,$$

где $u(\xi;\, \varepsilon)$, $v(\xi;\, \varepsilon)$ — n-мерные векторы, $V(\xi;\, \varepsilon)$ — матрица порядка $n \times n$, причем $u(\xi;\, \varepsilon) - \xi$, $v(\xi;\, \varepsilon)$, $V(\xi;\, \varepsilon)$ имеют период 2π по

$\xi_1, \ldots, \xi_n$. Так как это преобразование каноническое, то матрица V^{-1} равна транспонированной к матрице $u_{k\xi_l}$, а при $\varepsilon = 0$ преобразование становится тождественным.

Чтобы определить функцию $S(x, \eta; \varepsilon)$ с указанными выше свойствами, мы разлагаем ее в степенной ряд по ε и, используя (26), сравниваем коэффициенты в уравнении (25). Этим способом мы докажем существование такого степенного ряда и в то же самое время установим его единственность при дополнительной нормировке

$$S(x, \eta; 0) = \sum_{k=1}^{n} x_k \eta_k, \tag{28}$$

$$b_0^* = a_k^* = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{29}$$

где звездочка обозначает среднее значение, взятое по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Для целого $\lambda \geqslant 0$ обозначим коэффициенты при ε^λ в H, Φ, S, γ соответственно через H^λ, Φ^λ, S^λ, γ^λ и предположим, что $S^0, \ldots, S^{\lambda-1}$, так же, как $\gamma^0, \ldots, \gamma^{\lambda-1}$, уже определены, так что коэффициент при $\varepsilon^0, \ldots, \varepsilon^{\lambda-1}$ в обеих частях (25), (26) согласованы и удовлетворяют соотношениям нормировки (28), (29). Для $\lambda = 1$ это несомненно будет так, если мы начинаем с (28) и полагаем $\gamma^0 = H^0(0)$. Проводя индукцию, мы сравниваем коэффициенты при ε^λ для $\lambda \geqslant 1$ в (25) и получаем

$$\sum_{k=1}^{n} H^0_{y_k}(\eta) S^\lambda_{x_k}(x, \eta) - \Phi^\lambda(x, \eta) = g(x, \eta), \tag{30}$$

где $g(x, \eta)$ — известная вещественно-аналитическая функция периода 2π по $x_1, \ldots, x_n$. Так как мы хотим, чтобы функция Φ удовлетворяла (26), то для коэффициентов при ε^λ получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} H^0_{y_k}(\eta) S^\lambda_{x_k}(x, \eta) - \gamma^\lambda = g(x, \eta) + O\big(|\eta|^2\big).$$

Поэтому, выражая функцию $S^\lambda(x, \eta)$ в виде

$$S^\lambda(x, \eta) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + b(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \eta_k$$

и вводя обозначения

$$\omega_k = H^0_{y_k}(0), \quad \Omega_{kl} = H_{y_k y_l}(0), \quad \partial = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$(c,\, \omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k, \quad g_0(x) = g(x,\, 0), \quad g_k(x) = g_{\eta_k}(x,\, 0),$$

мы приходим к уравнениям

$$\begin{cases} \partial b + (c,\, \omega) - \gamma^\lambda = g_0, \\ \partial a_k + \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \Omega_{lk}(b_{x_l} + c_l) = g_k \quad (k = 1,\, \ldots,\, n). \end{cases} \tag{31}$$

Необходимое условие для существования полипериодического решения b, a_k системы (31), состоящее в том, что средние значения в обеих частях равны, приводит к соотношениям

$$(c,\, \omega) - \gamma^\lambda = g_0^*, \quad \sum_{l=1}^{n} \Omega_{lk} c_l = g_k^* \quad (k = 1,\, \ldots,\, n),$$

которые можно однозначно разрешить относительно $c_1,\, \ldots,\, c_n$ и γ^λ, так как в силу (20) матрица (Ω_{kl}) невырождена. Уравнения (31) тогда приводятся к виду

$$\partial b = g_0 - g_0^*, \quad \partial a_k = h_k(x) - h_k^*,$$

где

$$h_k = g_k - \sum_{l=1}^{n} \Omega_{lk} b_{x_l},$$

а эти уравнения в частных производных имеют в точности тот же вид, что и уравнение (4), рассмотренное в начале этого параграфа. Так как правая часть имеет среднее значение 0, то эти уравнения имеют вещественно-аналитические решения $b,\, a_1,\, \ldots,\, a_n$ периода 2π по $x_1,\, \ldots,\, x_n$, и, более того, эти решения будут единственными, если потребовать, чтобы $b^* = a_k^* = 0$ $(k = 1,\, \ldots,\, n)$.

Таким образом, мы завершили шаг индукции и тем самым доказали существование разложения в формальные степенные ряды для функции $S(x,\, \eta;\, \varepsilon)$.

В качестве простого применения полученных нами результатов рассмотрим ограниченную задачу трех тел. Напомним, что эта задача описывается гамильтонианом

$$E(q, p; \mu) = \frac{1}{2}\Big(\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}\Big) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - F,$$

где

$$F(q, \mu) = (1-\mu)\big\{(q_1+\mu)^2 + q_2^2\big\}^{-1/2} + \mu\big\{(q_1+\mu-1)^2 + q_2^2\big\}^{-1/2}.$$

При $\mu = 0$ она сводится к задаче Кеплера во вращающейся системе координат, а эллиптическим орбитам соответствуют прецессирующие эллипсы. Аналитически эти решения могут быть записаны в форме

$$q_1 + iq_2 = e^{-it} P(\alpha t),$$

где $P(\theta)$ — комплекснозначная функция периода 2π по θ, а частота α связана большой осью $2a$ третьим законом Кеплера $(\alpha+1)^2 a^3 = 1$. Ясно, что для рациональных значений α эти решения — периодические, в то время как для иррациональных α они — квазипериодические из класса $\mathfrak{Q}(1, \alpha)$. Наша цель — найти такие же квазипериодические решения для малых значений μ, стремящиеся к описанным выше решениям при $\mu \to 0$. Для этого удобно ввести так называемые *переменные Делоне* x_1, x_2, y_1, y_2, в которых гамильтониан имеет период 2π по x_1, x_2 и приводится к виду $H^0(y_1, y_2) + O(\mu)$, после чего мы применим наш предыдущий результат о существовании квазипериодических решений.

Чтобы ввести переменные Делоне [6], рассмотрим задачу Кеплера, описываемую гамильтонианом $K = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}$. При отрицательном значении K решения будут эллиптическими; с точностью до поворота они описываются формулами

$$q_1 = a(\cos u - \boldsymbol{e}), \quad q_2 = a\sqrt{1-\boldsymbol{e}^2}\,\sin u,$$

где

$$t - t_0 = a^{3/2}(u - \boldsymbol{e}\sin u).$$

Здесь $2a > 0$ — большая ось эллипса, $0 \leqslant \boldsymbol{e} \leqslant 1$ — его эксцентриситет и $K = -(2a)^{-1}$. При $0 \leqslant \boldsymbol{e} < 1$ введем переменную x_1 равенством

$$x_1 = u - \boldsymbol{e}\sin u.$$

Исключая u, мы можем выразить $q_k = \varphi_k(x_1;\, a,\, \boldsymbol{e})$ $(k = 1,\, 2)$ как периодические функции по x_1 с периодом 2π, используя которые, можно опять получить решение задачи Кеплера, если положить $x_1 = a^{-3/2}(t - t_0)$. Оставшиеся переменные x_2, y_1, y_2 вводятся при помощи равенств

$$a = y_1^2, \quad y_1\sqrt{1 - \boldsymbol{e}^2} = y_2, \tag{32}$$

так чтобы общее эллиптическое решение задачи Кеплера имело вид

$$\begin{cases} q_1 = \psi_1(x,\, y) = \varphi_1 \cos x_2 - \varphi_2 \sin x_2, \\ q_2 = \psi_2(x,\, y) = \varphi_1 \sin x_2 + \varphi_2 \cos x_2, \end{cases} \tag{33}$$

где x_2, y_1, y_2 — постоянные и $\dot{x}_1 = y_1^{-3}$. Эти уравнения служат также определением функций ψ_1, ψ_2. Дополним эти формулы, добавив соотношения

$$p_k = y_1^{-3}\frac{\partial \psi_k(x,\, y)}{\partial x_1} \quad (k = 1,\, 2), \tag{34}$$

и рассмотрим (33), (34) как преобразование координат x_1, x_2, y_1, y_2 в координаты q_1, q_2, p_1, p_2. Чтобы избежать орбит со столкновениями, а также круговых, на которых x_2 теряет смысл, мы ограничиваемся случаем $a > 0$, $0 < \boldsymbol{e} < 1$, или

$$0 < y_2^2 < y_1^2.$$

Можно проверить, что это преобразование каноническое и имеет период 2π по x_1, x_2, в то время как преобразованные дифференциальные уравнения определяются гамильтонианом $K = -(2a)^{-1} = -\frac{1}{2}y_1^{-2}$. Мы ограничимся положительными значениями y_1 и разрешим y_2 принимать значения обоих знаков, так что

$$0 < |y_2| < y_1;$$

случай $y_2 > 0$ соответствует при этом движению против часовой стрелки при возрастании времени, а случай $y_2 < 0$ — движению по часовой стрелке. Переменные x_1, x_2 называются в астрономии соответственно средней аномалией и долготой перигелия.

Применим теперь преобразование (33), (34) к ограниченной задаче трех тел. Чтобы избежать столкновений с телом массы μ, мы требуем выполнения неравенства $a(1+\boldsymbol{e}) < 1$, или в переменных y_1, y_2 неравенства $y_1 < (2-y_2^2)^{-1/2} < 1$. Таким образом, мы ограничиваемся областью $\mathfrak{D}$, в которой

$$0 < |y_2| < y_1 < (2-y_2^2)^{-1/2} < 1.$$

Эта область имеет две компоненты, одна из которых соответствует движению по часовой стрелке, другая — движению против часовой стрелки. Полезно интерпретировать величины $2a$, $\boldsymbol{e}$, связанные с y_1, y_2 через (32), как соответственно главную ось и эксцентриситет осциллирующего эллипса. Легко видеть, что гамильтониан $E(p,\, q;\, \mu)$ приводится к виду

$$H(x,\, y;\, \mu) = H^0(y) + O(\mu), \quad H^0(y) = -\frac{1}{2y_1^2} - y_2,$$

где функция $H(x,\, y;\, \mu)$ аналитична в $\mathfrak{D}$ при достаточно малом μ. Дополнительный член $-y_2$ в $H^0(y)$ обусловлен равномерным вращением системы координат.

Таким образом, вид функции $H(x,\, y;\, \mu)$ позволяет применить к ней наши предыдущие результаты, и так как $H^0(y)$, очевидно, удовлетворяет условию (15), то мы заключаем, что на каждой поверхности постоянной энергии $H(x,\, y;\, \mu) = h$, такой, что множество $H^0(y) = h$ пересекает $\mathfrak{D}$, существуют квазипериодические решения с двумя частотами. Эти решения могут рассматриваться как непрерывные продолжения прецессирующих эллиптических орбит, которые соответствуют $\mu = 0$. Легко видеть, что они обладают следующим свойством: $\big|y_k(t) - y_k(0)\big| < c\mu$ $(k = 1,\, 2)$, справедливым для всех действительных t, где c — константа, не зависящая от t, μ. Другими словами, главная ось и эксцентриситет осциллирующего эллипса мало изменяются со временем, если μ — достаточно мало; в частности, при всех t решения остаются ограниченными и вдоль них отсутствуют столкновения.

Аналогичное утверждение имеет место для других, возможно, не квазипериодических движений. Более точно, мы покажем, что для любого в $\varepsilon > 0$ и любого компактного подмножества $\mathfrak{D}_1$ области $\mathfrak{D}$ существует положительное $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon,\, \mathfrak{D}_1)$, такое, что для $y(0) \in \mathfrak{D}_1$ и $0 \leqslant \mu < \mu_0$

$$\big|y_k(t) - y_k(0)\big| \leqslant \varepsilon \quad (k = 1,\, 2)$$

при всех t. Это снова означает, что для решений, начинающихся в $\mathfrak{D}_1$, форма осциллирующего эллипса мало меняется со временем, если μ мало.

Чтобы доказать только что сформулированное утверждение, рассмотрим совокупность прямоугольников R, определенных неравенствами

$$|y_1 - \eta_1| \leqslant \varepsilon, \quad |y_2 - \eta_2| \leqslant \varepsilon/2, \tag{35}$$

где η лежат в $\mathfrak{S}_1$ и ε выбрано настолько малым, что все эти прямоугольники лежат в $\mathfrak{D}$, в то время как все комплексные y_1, y_2, удовлетворяющие (35), лежат в области аналитичности $H(x,\, y;\, \mu)$ при малом $|\mu|$. Мы утверждаем, что если $\eta = y(0)$, где $x(t)$, $y(t)$ — некоторое решение рассматриваемой системы, то $y(t)$ остается внутри соответствующего R при всех t, при условии что μ достаточно мало. Чтобы проверить это утверждение, мы заметим, что вдоль любого решения функция $H(x,\, y;\, \mu)$ равна константе, которую обозначим через

$$h = H\big(x(0),\, y(0);\, \mu\big) = H^0\big(y(0)\big) + O(\mu).$$

Вдоль кривой $H_0(y) = h$ в $\mathfrak{D}$ мы имеем

$$0 < \frac{dy_1}{dy_2} = y_1^3 < 1,$$

так что если y, y^* — две точки на этой кривой, то

$$|y_1 - y_1^*| \leqslant |y_2 - y_2^*|.$$

Подобным образом, для любых двух четырехмерных векторов x, y и x^*, y^* на поверхности постоянной энергии $H(x, y; \mu) = H(x^*, y^*; \mu) = h$

$$|y_1 - y_1^*| \leqslant |y_2 - y_2^*| + O(\mu), \tag{36}$$

где y и y^* лежат в $\mathfrak{D}$.

Выбрав μ настолько малым, чтобы последний член в предыдущем неравенстве был по модулю меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, мы теперь предположим, что $\eta = y(0)$ и что наше решение $y(t)$ выходит из соответствующего прямоугольника R. Пусть t^* — наименьшее положительное значение t, для которого $y(t)$ лежит на границе R, тогда как при $0 \leqslant t < t^*$ $y(t)$ лежит внутри R. Полагая $y = y(t)$, $y^* = y(0)$ в (36), имеем при $0 \leqslant t \leqslant t^*$

$$\big|y_1(t) - \eta_1\big| < \big|y_2(t) - \eta_2\big| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\left|y_1(t^*) - \eta_2\right| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Другими словами, решение $y(t)$ может выйти из R только через стороны прямоугольника, которые параллельны оси y_1. Но, с другой стороны, этому выходу препятствует инвариантный тор, который мы построили ранее. В самом деле, если применить наши предыдущие результаты к функции $H(x,\, y;\, \mu)$, где вектор y принадлежит одному из прямоугольников R_+ или R_-, определяемых неравенствами

$$|y_1 - \eta_1| < \varepsilon, \quad 0 < \pm(y_2 - \eta_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то условие (15) удовлетворяется, и поэтому каждая из соответствующих областей в четырехмерном пространстве $(x,\, y)$ содержит двумерный инвариантный тор, который лежит на трехмерной поверхности постоянной энергии $H(x,\, y;\, \mu) = h$. Эти торы служат барьером для решения, и $y_2(t)$ не может продвинуться от $y_2 = \eta$ к $y_2 = \eta_2 \pm \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, первое время выхода t^* в действительности не существует и $y(t)$ должно оставаться в R, а поэтому и в $\mathfrak{D}$, для всех $t \geqslant 0$. Те же самые рассуждения, примененные к отрицательным t, теперь завершают доказательство.

В этом доказательстве нам пришлось исключить орбиты с малым эксцентриситетом, но это было сделано только вследствие нашего выбора координат, ибо результат § 3 об устойчивости периодических решений охватывает как раз этот случай. Решающим моментом в наших предыдущих рассуждениях был тот факт, что двумерные инвариантные торы образуют границу открытого множества на трехмерной поверхности постоянной энергии. Для задач с n степенями свободы, при $n > 2$ поверхность постоянной энергии имеет размерность $2n - 1$, и поэтому для границы открытого множества требуется размерность $2n - 2$, в то время как инвариантные торы, согласно теории, имеют только размерность n. По этой причине не существует аналогичной теоремы об устойчивости для случая более чем двух степеней свободы.

Наконец, в качестве задачи с более чем двумя степенями свободы рассмотрим задачу трех тел. Если ограничиться плоским случаем, то исходная задача имеет шесть степеней свободы, но, принимая в расчет интегралы центра масс, мы можем свести ее к случаю четырех степеней свободы. Предполагая, что две из масс, скажем m_1, m_2, малы по сравнению с третьей, которую можно с помощью выбора единицы массы сделать равной 1, Арнольд [7] установил существование квазипериодических решений с четырьмя рационально независимыми частотами. Более точно, предположим, что массы $m_k = \alpha_k \mu$ $(k = 1, 2)$ зависят от единственного малого параметра μ, где α_1, α_2 — фиксированные положительные константы; положение «планет» масс m_1, m_2 относительно «солнца» массы $m_0 = 1$ будем задавать двумя векторами координат и двумя векторами скорости, получая, таким образом, восьмимерное фазовое пространство. Для малых значений μ мы хотели бы получить решения, в которых планеты движутся по орбитам, близким к эллиптическим, по крайней мере на ограниченном интервале времени, и поэтому стоит описывать точки в фазовом пространстве геометрическими величинами, которые соответствуют осциллирующим эллипсам. Обозначая через $2a_k$ большую ось и через $\boldsymbol{e}_k$ эксцентриситет соответствующего эллипса, мы рассмотрим открытое множество Ω вида

$$c_k < a_k < C_k, \quad 0 < \boldsymbol{e}_k < \rho \quad (k = 1, 2)$$

в восьмимерном фазовом пространстве. Утверждение Арнольда тогда заключается в том, что для данных констант α_k, c_k, C_k, удовлетворяющих неравенствам $0 < c_1 < C_1 < c_2 < C_2$, и для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $0 \leqslant \mu < \delta$, $0 < \rho < \delta$ множество Ω содержит замкнутое подмножество S со следующими свойствами: любое решение, начинающееся в S, остается в S при всех действительных t и является квазипериодическим с четырьмя независимыми частотами; S есть объединение четырехмерных инвариантных торов, на каждом из которых решения всюду плотны, а дополнение $\Omega - S$ имеет лебегову меру $m(\Omega - S) < \varepsilon m(\Omega)$. В частности, ни одно из решений на инвариантном множестве S никогда не приводит к столкновениям.

Однако в отличие от ограниченной задачи трех тел здесь уже, вообще говоря, ничего нельзя сказать о поведении решений, начинающихся в дополнительном множестве $\Omega - S$. Например, в то время как для решений, лежащих в S, переменные a_1, a_2 остаются между двумя константами, которые отличаются на величину самое большее порядка μ, возможно, что среди решений, начинающихся в $\Omega - S$, могут существовать исключительные решения, для которых a_1, a_2 изменяются на величины конечного порядка, и это в конце концов может привести к столкновению тел. В самом деле, Арнольд [8] построил замечательный пример гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, в которой явление такого типа имеет место.

Причина различия в поведении решений в общей задаче трех тел и в ограниченной задаче трех тел состоит в том, что четырехмерные инвариантные торы не ограничивают открытые области на семимерной поверхности постоянной энергии. В действительности можно было бы свести эту задачу к задаче с тремя степенями свободы, используя интеграл углового момента, но несоответствие в размерности все равно бы осталось. О поведении решений в течение длительного времени в дополнительном множестве как для задачи трех тел, так и для других систем с более чем двумя степенями свободы мало что известно.

Арнольд распространил эти результаты о квазипериодических движениях для плоской задачи трех тел на общий трехмерный случай и даже для задачи N тел при $N \geqslant 3$. В принципе доказательства основаны на идеях, развитых в предыдущих параграфах, хотя приходится сталкиваться с трудностями, которые обусловлены вырождением системы при $\mu = 0$, приводящим к нарушению условия (20), равно как и условия (23). Более того, некоторые из частот квазипериодических решений стремятся к 0 при $\mu \to 0$. Эти трудности преодолеваются при помощи более тонкой аппроксимации; подробные доказательства см. в [5, 7]. Из недавних книг, в которых обсуждаются вопросы устойчивости, обратим внимание читателя на [9, 10].

§ 37. Теорема о возвращении

Будем исходить из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

в которой функции f_k не должны быть обязательно регулярными, однако в рассматриваемой действительной области определения $\mathfrak{R}$ они являются по меньшей мере непрерывно дифференцируемыми. Пусть также всюду в $\mathfrak{R}$

$$\sum_{k=1}^{m} f_{k x_k} = 0, \tag{2}$$

что, в частности, выполняется для систем Гамильтона. Если обозначить опять через $x(t, \xi)$ решение системы (1), для которого $x(0, \xi) = \xi$, то, согласно § 19, отображение S_t точки ξ в $x(t,\,\xi)$ будет сохранять объем. В дальнейшем следует рассматривать только те начальные точки ξ, для которых траектория $x = x(t,\,\xi)$ будет целиком расположена в области $\mathfrak{R}$ для всех действительных t. Пусть $\mathfrak{M}$ — какое-нибудь множество, состоящее из таких траекторий $x(t,\,\xi)$, причем t пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$; тогда $S_t\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, следовательно, $\mathfrak{M}$ является инвариантным.

В дальнейшем будут использованы некоторые теоремы из теории меры Лебега. Для произвольного множества $\mathfrak{Q}$ в m-мерном пространстве обозначим через $V_a(\mathfrak{Q})$ его внешнюю меру Лебега. Если $\mathfrak{Q}$ измеримо по Лебегу, то $V(\mathfrak{Q})$ будет обозначать меру $\mathfrak{Q}$. Будем в дальнейшем предполагать, что рассматриваемое множество траекторий $\mathfrak{M}$ имеет конечную внешнюю меру $V_a(\mathfrak{M})$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ некоторое измеримое подмножество множества $\mathfrak{M}$ и положим $\mathfrak{A}_n = S_{n\tau}\mathfrak{A}$ $(n = 0,\, \pm 1,\, \ldots)$; при этом τ — какое-нибудь фиксированное положительное число; для краткости будем писать вместо S_τ просто S. Тогда $\mathfrak{A}_n$ также измеримы, и $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{M}$. Для множеств

$$\mathfrak{B}_n = \bigcup_{k\leqslant n} \mathfrak{A}_n \quad (n = 0,\, \pm 1,\, \ldots),$$

в которых объединение берется по всем целым числам $k \leqslant n$, очевидно, справедливо соотношение

$$S\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{A}_{n+1} \supset \mathfrak{B}_n.$$

Поскольку $\mathfrak{B}_n$ является объединением счетного числа измеримых множеств, оно также измеримо и имеет, как подмножество $\mathfrak{M}$, конечную меру. Далее, поскольку S сохраняет объем, то $V(\mathfrak{B}_{n+1}) = V(S\mathfrak{B}_n) = V(\mathfrak{B}_n)$, и поэтому разность $\mathfrak{B}_{n+1} - \mathfrak{B}_n$ имеет меру нуль. Обозначим пересечение всех $\mathfrak{B}_n$ $(n = 0,\, \pm 1,\, \ldots)$ через $\mathfrak{B}_{-\infty}$; в силу $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1}$ будем иметь

$$\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_{-\infty} = \bigcup_{k<0} (\mathfrak{B}_{k+1} - \mathfrak{B}_k),$$

и, следовательно, $\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_{-\infty}$ также имеет меру нуль. Если положить $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_{-\infty}$, то вследствие $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}_0$ получим соотношение

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{D} \cup \big(\mathfrak{A}_0 \cap (\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_{-\infty})\big). \tag{3}$$

Но так как пересечение $\mathfrak{A}\cap(\mathfrak{B}_0-\mathfrak{B}_{-\infty})$ заведомо имеет меру нуль, то в силу соотношения (3) и разность $\mathfrak{A}-\mathfrak{D}$ будет множеством меры нуль, т. е.

$$V(\mathfrak{A}-\mathfrak{D})=0 \quad (\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}_{-\infty}). \tag{4}$$

Чтобы интерпретировать этот результат, рассмотрим все образы $\mathfrak{p}_n=S^n\mathfrak{p}$ точки $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{M}$. Для того чтобы $\mathfrak{p}$ лежало в $\mathfrak{B}_n$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число $k\leqslant n$, для которого $\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}_k$, следовательно, $\mathfrak{p}_{-k}\in\mathfrak{A}$. Таким образом, в частности, $\mathfrak{p}$ тогда и только тогда находится в $\mathfrak{B}_{-\infty}$, если существует последовательность $k\to-\infty$ с тем же самым свойством; это означает, что существует такая последовательность целых чисел $l=l_1,\ l_2,\ \ldots$, стремящаяся к ∞, что $\mathfrak{p}_l\in\mathfrak{A}$. Из соотношения (4) теперь имеем:

В каждом измеримом подмножестве $\mathfrak{A}$ множества $\mathfrak{M}$ лежит равное ему по мере множество $\mathfrak{D}$, все точки которого $\mathfrak{p}$ имеют бесконечно много образов $\mathfrak{p}_l$ $(l=l_1,\ l_2,\ \ldots;\ l\to\infty)$ в $\mathfrak{A}$.

Это и есть теорема Пуанкаре о возвращении [1, 2]. Для случая, когда $\mathfrak{M}$ само измеримо, эту теорему можно сформулировать по-другому. В m-мерном x-пространстве можно задать счетный базис $\mathfrak{C}_1,\ \mathfrak{C}_2,\ \ldots$ открытых множеств, например, рассмотреть все шары с рациональными координатами центров и рациональными радиусами. Тогда пересечения $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{C}_r=\mathfrak{A}_r$ $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ также измеримы. Применим теорему о возвращении к $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_r$ и заметим, что объединение счетного числа множеств меры нуль также является множеством меры нуль. Тогда все точки $\mathfrak{M}$, кроме точек некоторого множества меры нуль, являются предельными точками их образов $\mathfrak{p}_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

При применении теоремы о возвращении нужно иметь в виду, что $\mathfrak{M}$ должно быть инвариантным множеством конечной внешней меры, лежащим в области определения $\mathfrak{R}$. Например, если $f_1=1$, $f_2=0$, $m=2$, то множеством $\mathfrak{R}$ будет вся плоскость, а траекториями будут все прямые, параллельные оси абсцисс; но тогда из конечности $V_a(\mathfrak{M})$ следует, что $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль, так что теорема о возвращении становится бессодержательной. Чтобы для данной системы (1) с помощью теоремы о возвращении получить существенные результаты, нужно столь много знать о поведении траекторий в целом (im Großen), что можно будет доказать существование измеримых инвариантных множеств с положительной конечной мерой. Для этого нужно иметь некоторое инвариантное множество $\mathfrak{M}$ с конечной внешней мерой $V_a(\mathfrak{M})$ и в нем измеримое подмножество $\mathfrak{A}$ с $V(\mathfrak{A}) > 0$; отсюда легко получить, что инвариантное множество, образованное траекториями, проходящими через точки множества $\mathfrak{A}$, измеримо и имеет положительную конечную меру. В качестве примеров можно было бы рассмотреть стационарные несжимаемые потоки в замкнутом сосуде, а также тот случай, когда имеется устойчивое равновесное решение системы (1); здесь в качестве $\mathfrak{M}$ можно выбрать инвариантную окрестность этого решения.

Более глубокое применение дает ограниченная задача трех тел. Пусть, как и ранее, массы трех точек P_1, P_2, P_3 будут $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$, $m_3 = 0$ при $0 < \mu < 1$. Точки P_1 и P_2 вращаются около их центра инерции с угловой скоростью, равной единице; пусть координаты точек P_1, P_2 и P_3 во вращающихся осях будут $(1-\mu,\, 0)$, $(-\mu,\, 0)$ и $(x_1,\, x_2)$, тогда расстояния P_3P_1, P_3P_2 и расстояние между P_3 и началом координат P_0 определяются формулами

$$r_1 = \left\{(x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2\right\}^{1/2},$$
$$r_2 = \left\{(x_1 + \mu)^2 + x_2^2\right\}^{1/2}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Как уже делалось в § 22, положим

$$E = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{\mu}{r_1} - \frac{1-\mu}{r_2} \tag{5}$$

и напишем уравнения движения точки P_3 в канонической форме

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -E_{x_k} \quad (k = 1,\, 2). \tag{6}$$

Отсюда следует $\dot{x}_1 = y_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = y_2 - x_1$, поэтому после исключения y_1, y_2 функция Гамильтона принимает следующий вид:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - G, \tag{7}$$

где

$$G = \frac{1}{2}r^2 + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2}. \tag{8}$$

На каждой траектории E постоянно; это и есть интеграл Якоби.

Для системы (6) определим, как и выше, сохраняющее объем отображение S_t в пространстве четырех переменных x_1, x_2, y_1 и y_2. Область определения $\mathfrak{R}$ состоит из всех точек, не лежащих на двумерных плоскостях $x_1 = 1 - \mu$, $x_2 = 0$ и $x_1 = -\mu$, $x_2 = 0$. Через $\mathfrak{L}$ обозначим множество всех точек (x_1, x_2, y_1, y_2), для которых определенная выражением (5) функция E удовлетворяет неравенству

$$c_1 < -E < c_2; \tag{9}$$

при этом c_1 и c_2 есть две положительные постоянные, для которых $c < c_1 < c_2$ при достаточно большом положительном c. По этому определению $\mathfrak{L}$ будет открытым подмножеством $\mathfrak{R}$, и притом $\mathfrak{L}$ инвариантно, так как E является интегралом. Тогда на траекториях, лежащих в $\mathfrak{L}$, в силу соотношения (7) и (9), всюду выполняется неравенство

$$G = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - E > c_1 > c.$$

Рассмотрим теперь при фиксированном c кривую $G = c$ в плоскости (x_1, x_2), причем G определяется выражением (8); это так называемая предельная кривая Хилла. Для больших c она состоит из трех простых замкнутых частей $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, которые имеют уравнения вида

$$\begin{gathered} r = (2c)^{1/2} + O(c^{-3/2}), \quad r_1 = \mu c^{-1} + O(c^{-2}), \\ r_2 = (1-\mu)c^{-1} + O(c^{-2}) \quad (c \to \infty), \end{gathered}$$

и потому являются приближенно окружностями с радиусами $(2c)^{1/2}$, μc^{-1} и $(1-\mu)c^{-1}$ и центрами P_0, P_1 и P_2. Тогда двумерная область $G > c$ распадается на три непересекающиеся части, а именно внешнюю по отношению $\mathfrak{K}_0$ и внутренние относительно $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, которые мы обозначим через $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Аналогично четырехмерная область $\mathfrak{L}$ распадается на три непересекающиеся части, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, каждая из которых остается инвариантной, так как преобразование S_t непрерывно относительно t. Для применения теоремы о возвращении необходимо, в частности, выбрать $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_1$.

Предыдущее рассмотрение требует еще одного обобщения, так как могут встретиться траектории, при которых будут происходить столкновения. Столкновения P_1 и P_3 можно регуляризировать так же, как это сделано в § 8 для задачи трех тел. Отсюда получается, что траектории столкновения образуют в $\mathfrak{L}_1$ только множество меры нуль, которое можно оставить для наших целей без рассмотрения.

Координаты x_1, x_2 точек из $\mathfrak{L}_1$ принадлежат ограниченному множеству $\mathfrak{F}_1$. В каждой фиксированной точке $(x_1, x_2) \neq (1-\mu, 0)$ из $\mathfrak{F}_1$

функция G конечна, и допустимые ординаты y_1, y_2 определяются условием

$$2(G - c_2) < (y_1 + x_2)^2 + (y_2 - x_1)^2 < 2(G - c_1).$$

Этим неравенством в плоскости $(y_1,\, y_2)$ определяется круговое кольцо, площадь которого не превосходит значения $2\pi(c_2 - c_1)$, не зависящего от x_1, x_2. Так как площадь $\mathfrak{F}_1$ конечна, то мера $V(\mathfrak{L}_1)$ также конечна. В силу теоремы о возвращении получим, что для почти всех начальных значений из $\mathfrak{L}_1$ точка P_3 по прошествии произвольно больших интервалов времени опять будет занимать примерно первоначальное положение и иметь приблизительно первоначальную скорость. То же самое можно сказать о $\mathfrak{L}_2$. Легко также видеть, что соответствующее утверждение справедливо также и для проблемы Хилла.

Идеи, использованные для доказательства теоремы о возвращении, были усовершенствованы Биркгофом [3] и другими авторами для эргодической теории. Но возможность применения этой теории к заданной системе дифференциальных уравнений ограничена трудностями, которые еще более значительны, чем в проблеме устойчивости. В этой связи замечательны результаты, полученные Данжуа [4–6].

В заключение приведем еще одно, восходящее к Шварцшильду [7–9], замечание о задаче n тел, которое проистекает из круга идей теоремы о возвращении. В основу опять кладется система (1), для которой выполнено условие (2). Пусть $\mathfrak{A}$ — открытое множество в области определения $\mathfrak{R}$, мера которого $V(\mathfrak{A})$ конечна. Для каждого $\tau > 0$ обозначим через $\mathfrak{A}^\tau$ множество всех точек $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{A}$, для которых соответствующая траектория во всем интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$ остается в $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{p}^t = S_t\mathfrak{p} \in \mathfrak{A}$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$. Тогда для $0 < \tau_1 < \tau_2$, очевидно, $\mathfrak{A}^{\tau_2} \subset \mathfrak{A}^{\tau_1}$. Пересечение $\mathfrak{A}^\tau$ $(\tau > 0)$ обозначим через $\mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{A}^\tau$ — открытое подмножество множества $\mathfrak{A}$, то множество

$$\bigcap_{\tau>0} \mathfrak{A}^\tau = \lim_{\tau\to\infty} \mathfrak{A}^\tau = \mathfrak{B}$$

измеримо, и мера $V(\mathfrak{B})$ конечна. Точки $\mathfrak{p}$ множества $\mathfrak{B}$ характеризуются тем свойством, что траектории $\mathfrak{p}^t$ для всех положительных t остаются в $\mathfrak{A}$. Мы будем говорить, что множество $\mathfrak{B}$ является множеством точек, остающихся в будущем в $\mathfrak{A}$.[1]

[1] В оригинале трудная для перевода фраза «Wir wollen sagen, die Menge $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{A}$ zuküftig treu». Оборот «zuküftig treu» перекликается с «inhaltstreu» — сохраняющее объем. — *Прим. ред.*

Тогда для каждого $\tau > 0$ определяется множество $\mathfrak{B}^\tau = S_\tau \mathfrak{B}$ и для его точек $\mathfrak{p}$ имеем $\mathfrak{p}^t \in \mathfrak{A}$ $(t \geqslant -\tau)$. Поэтому $\mathfrak{B}^\tau$ является измеримым подмножеством $\mathfrak{B}$, и опять $\mathfrak{B}^{\tau_2} \subset \mathfrak{B}^{\tau_1}$ при $0 < \tau_1 < \tau_2$. Следовательно, множество

$$\bigcap_{\tau>0} \mathfrak{B}^\tau = \lim_{\tau\to\infty} \mathfrak{B}^\tau = \mathfrak{D}$$

также является измеримым подмножеством множества $\mathfrak{B}$. Но из сохранения объема при отображении методом, использованным для доказательства соотношения (4), получаем

$$V(\mathfrak{B} - \mathfrak{D}) = 0. \tag{10}$$

Точки $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{D}$ характеризуются тем свойством, что траектории $\mathfrak{p}^t$ для всех действительных t целиком остаются в $\mathfrak{A}$.

Иными словами, множество $\mathfrak{D}$ остается в $\mathfrak{A}$ все время[1]. Таким образом, формула (10) утверждает, что множество точек, сохраняющихся в будущем в $\mathfrak{A}$, превосходит множество точек, остающихся в течение всего времени в $\mathfrak{A}$, на множество меры нуль. Чтобы это утверждение не было бессодержательным, нужно, конечно, в каждом отдельном случае доказать, что $V(\mathfrak{B}) > 0$, а это может явиться существенной трудностью.

Применим все это к задаче n тел, используя обозначения § 5. Через q_k $(k = 1, \ldots, 3n)$ обозначим прямоугольные координаты n материальных точек $P_1, \ldots, P_n$, со сквозной нумерацией, через p_k обозначим соответствующие импульсы. По теореме о движении центра инерции можно принять, что центр инерции покоится в начале координат. В § 7 для задачи трех тел были введены относительные координаты, и теперь можно аналогично положить $x_k = q_k - q_{3n-3+\varkappa}$, $y_k = p_k$ $(k = 1, \ldots, 3n-3)$, причем $\varkappa = 1, 2, 3$ есть вычет k по модулю 3. Функция Гамильтона есть $H = T - U$, где силовая функция U задана выражением (5; 2), а живая сила T — выражением (5; 10). Тогда в $6n-6$ новых координатах x_k, y_k уравнения движения образуют соответствующую каноническую систему, для которой выполнено условие (2). Если опять обозначить через r_{kl} $(k, l = 1, \ldots, n)$ взаимные расстояния между материальными точками P_k, P_l $(k \neq l)$, то H регулярна относительно рассматриваемых переменных, если все $r_{kl} > 0$. Для произвольно большого числа $s > 1$

[1] В оригинале оборот, аналогичный отмеченному в сноске на стр. 362; «$\mathfrak{D}$ ist $\mathfrak{A}$ dauernd treu». — *Прим. ред.*

построим множество $\mathfrak{A}(s)$, состоящее из всех точек x, y в пространстве $6n-6$ измерений, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$s^{-1} < r_{kl} < s \quad (1 \leqslant k < l \leqslant n), \quad -s < H < s. \tag{11}$$

Это множество открытое. Далее, функция U на $\mathfrak{A}(s)$ ограничена, а значит, ограничена и T, так как $T = H + U$. Следовательно, $\mathfrak{A}(s)$ имеет конечную меру и предыдущая теорема оказывается применимой. Таким образом, множество $\mathfrak{B}(s)$ всех точек, которые в будущем остаются в $\mathfrak{A}(s)$, только на множество меры нуль превосходит множество $\mathfrak{D}(s)$ точек, которые остаются все время в $\mathfrak{A}(s)$. Далее, для $s_1 < s_2$ будет $\mathfrak{A}(s_1) \subset \mathfrak{A}(s_2)$, $\mathfrak{B}(s_1) \subset \mathfrak{B}(s_2)$, $\mathfrak{D}(s_1) \subset \mathfrak{D}(s_2)$, так что можно образовать $\lim\limits_{s\to\infty} \mathfrak{A}(s) = \mathfrak{A}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathfrak{B}(s) = \mathfrak{B}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \mathfrak{D}(s) = \mathfrak{D}$ и получить соответствующее утверждение относительно $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$. В этом случае $\mathfrak{B}$ есть множество тех точек $\mathfrak{p}$, для которых существует такое $s > 1$, не зависящее от t, что траектория $\mathfrak{p}^t$ при всех $t \geqslant 0$ остается в области (11), причем s должно еще зависеть от $\mathfrak{p}$, а для точек из $\mathfrak{D}$ неравенство (11) справедливо при всех действительных t. Так как H является интегралом, высказанное утверждение говорит о том, что для $\mathfrak{B}$ все расстояния r_{kl} для всех будущих моментов времени, а для $\mathfrak{D}$ для всех будущих и прошедших моментов времени остаются между двумя положительными границами, но эти границы должны еще зависеть от начальной точки $\mathfrak{p}$. Траектории, начинающиеся в точках множества $\mathfrak{B}$, можно назвать слабо устойчивыми в будущем, и для $\mathfrak{D}$ — абсолютно слабо устойчивыми. Таким образом получаем, что почти все решения задачи n тел, слабо устойчивые в будущем, должны быть абсолютно слабо устойчивыми, т. е. слабо устойчивыми и в будущем, и в прошедшем.

Если основываться на недоказанном предположении, что планетная система абсолютно слабо устойчива, то можно сделать следующее заключение. Если планетная система захватывает материальную точку, приходящую из бесконечности, например, частицу пыли, то система, образованная добавлением этой частицы, не будет более абсолютно слабо устойчивой. Отсюда следует, что новая система не будет также слабо устойчивой в будущем, если исключить некоторое множество начальных значений, имеющее меру нуль. Следовательно, тогда пылевая частица — или планета, или Солнце, — должны быть опять выброшены, или же произойдет столкновение. Но для обсуждения важности этого результата нужно все же задуматься, действительно ли образуют абсолютно слабо устойчивые решения задачи n тел при $n > 2$ множество положительной меры.

Литература

К § 5

[1] Lejeune Dirichlet G., Werke, Bd. 2, S. 344, Berlin, 1897.

[2] Mittag–Leffler G., Zur Bibliographie von Weierstrass, *Acta math.*, **35**, 29–65 (1912).

[3] Poincarè H., Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta math.*, **13**, 1–271 (1890).

[4] Sundman K. F., Mémoire sur le problème des trois corps, *Acta math.*, **36**, 105–179 (1913).

[5] Bruns H., Über die Integrale des Vielkörper-Problems, *Acta math.*, **11**, 25–96 (1887–1888).

К § 6

[1] Sundman K. F., Recherches sur le problème des trois corps, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **34**, №6 (1907).

[2] Chazy J., Sur centaines trajectoires du problème des n corps, *Bull. astr.*, **35**, 321–389 (1918).

[3] Siegel C. L., Der Dreierstoss, *Ann. of Math.*, **42**, 127–168 (1941).

[4] Levi–Civita T., Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta math.*, **42**, 99–144 (1920).

К § 12

[1] Sundman, K. F., Recherches sur le problème des trois corps. *Acta Soc. Sci. Fennicae*, **34**, №6 (1907).

К § 13

[1] Block, H., Sur une classe de singularités dans le problème de n corps. Thèse pour le doctorat, Lund 1909.

[2] Chazy, J., Sur certaines trajectories du problème des n corps. *Bull. Astron.*, **35**, 321–389 (1918).

[3] Siegel, C. L., Der Dreierstoß, *Ann. Math.*, **42**, 127–168 (1941).

К § 19

[1] Hill G. W., Researches in the lunar theory, *Amer. J. Math.*, **1**, 5–26, 129–147, 245–260 (1878).

[2] Wintner A., Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes, *Math. Z.*, **24**, 259–265 (1926).

К § 20

[1] Siegel C. L., Über eine periodische Lösung im ebenen Dreikörperproblem, *Math. Nachr.*, **4**, 28–35 (1950–1951).

[2] Brown E. W., On the part of the parallactic inequalities in the moon's motion which is a function of the mean motions of the sun and moon, *Amer. J. Math.*, **14**, 141–160 (1892).

[3] Moulton F. R., A class of periodic solutions of the problem of three bodies with application to the lunar theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **7**, 537–577 (1906).

К § 21

[1] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 1, ch. 3, Paris, 321–349 (1932).

[2] Wintner A., Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem, *I. Math. Z.*, **34**, 321–349 (1932).

К § 22

[1] Poincaré H., Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. mat. Palermo*, **33**, 375–407 (1912).

[2] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14**, 14–22 (1913).

[3] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 3, ch. 22, Paris, 1899.

К § 23

[1] Birkhoff G. D., Surface transformations and their dynamical applications, *Acta. math.*, **43**, 1–119 (1922).

К § 24

[1] Birkhoff G. D., Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, *Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* (3), **1**, 85–216 (1935).
[2] Moser J., Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen, *Math. Ann.*, **126**, 325–335 (1953).

К § 25

[1] Schröder E., Über iterierte Functionen, *Math. Ann.*, **3**, 296–322 (1871).
[2] Cremer H., Über die Häufigkeit der Nichtzentren, *Math. Ann.*, **115**, 573–580 (1938).
[3] Siegel C. L., Iteration of analytic functions, *Ann. of Math.*, **43**, 607–612 (1942).

К § 27

[1] Poincaré H., Oeuvres, v. 1, p. 95–114, Paris, 1951.
[2] Dulac H., Détermination et intégration d'une certaine classe d'equations différentielles ayant pour point singulier un centre, *Bull. Sci. math. France* (2), **32**, 230–252 (1908).
[3] Frommer M., Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, *Math. Ann.*, **109**, 395–424 (1934).
[4] Сахарников Н. А., Об условиях Фроммера для существования точки разветвления, *Прикл. мат. мех.*, **12**, 669–670 (1948).

К § 28

[1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2. Изд. АН СССР, М.–Л., 1956.

[2] Siegel C. L., Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, math.-phys. Kl. IIa, 1952, 21–30.

К § 29

[1] Lejeune Dirichlet G., Werke, Bd. 2, S. 5–8, Berlin, 1897.

К § 30

[1] Birkhoff G. D., Dynamical systems, ch. 3, New York, 1927; русский перевод: Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941, гл. 3.

[2] Lindstedt A., Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie, *Записки С.-Петерб. Имп. Акад. наук*, **31**, №4 (1882).

[3] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 2, ch. 9, Paris, 1893.

[4] Whittaker E. T., On the solution of dynamical problems in terms of trigonometric series, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **34**, 206–221 (1902).

[5] Cherry T. M., On the solution of Hamiltonian systems of differential equations in the neighbourhood of a singular point, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **27**, 151–170 (1928).

[6] Siegel C. L., Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, *Math. Ann.*, **128**, 144–170 (1954).

[7] Birkhoff G. D., Stability and the equations of dynamics, *Amer. J. Math.*, **49**, 1–38 (1927).

[8] Siegel C. L., On the integrals of canonical systems, *Ann. of Math.*, **42**, 806–822 (1941).

[9] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 1, ch. 5, Paris, 1892.

К § 31

[1] Levi–Civita T., Sorpa alcuni criteri di instabilità, *Ann. Mat. pura appl.* (3), **5**, 221–307 (1901).

[2] Siegel C. L., Some remarks concerning the stability of analytic mappings, *Univ. nac. Tucumán Rev.* A **2**, 151–157 (1941).

[3] Fermi E., Beweis, daßein mechanisches Normalsystem im allge meinen quasiergodisch ist, *Phys. Z.*, **24** 261–264 (1923).

К § 33

[1] Moser, J., On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss*, Göttingen, math-phys. Kl. (1962), 1–10. [Русский перевод: Математика, **6**: 5 (1962), 51–67.]

К § 35

[1] Арнольд, В. И., Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае, *ДАН*, **137** (1961), №2, 255–257.

[2] Леонтович А. М., Об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел, *ДАН*, **143** (1962), 525–528.

[3] Deprit A., Deprit–Bartolomé A., Stability of the triangular Lagrangian points, *Astron. J.*, **72** (1967), 173–179.

К § 36

[1] Bohr H., Fastperiodische Funktionen, Berlin, 1932.

[2] Колмогоров А. Н., О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *ДАН*, **98** (1954), №4, 527–530.

[3] — Общая теория динамических систем и классическая механика, Международный математический конгресс в Амстердаме, Физматгиз, М., 1961, 187–208.

[4] Арнольд В. И., Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, *УМН*, **18** (1963), №6, 21–86.

[5] — Малые знаменатели. III. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, *УМН*, **18** (1963), №6, 91–192.

[6] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol. 1, chap. 1, Paris, 1892. [Русский перевод: Избранные труды, т. 1, М., 1971.]

[7] Арнольд В. И., О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем, *ДАН*, **145** (1962), 481–490.

[8] — Неустойчивость динамических систем со многими степенями свободы, *ДАН*, **156** (1964), 9–12.

[9] Arnold V. I., Avez A., Problèmes ergodiques de la mecanique classique, Paris, 1967.

[10] Sternberg S., Celestial mechanics, vol. I, II, New York, 1969.

К § 37

[1] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 3, ch. 26, Paris, 1899.

[2] Carathéodory C., Über den Wiederkehrsatz von Poincaré, *Sitzber. Preuß. Akad. Wiss.*, 1919, 580–584.

[3] Birkhoff G. D., Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **17**, 656–660 (1931).

[4] Denjoy A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. pures appl.* (9), **11**, 333–375 (1933).

[5] Kampen E. R., van, The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Amer. J. Math.*, **57**, 142–152 (1935).

[6] Siegel C. L., Note on differential equations on the torus, *Ann. of Math.*, **46**, 423–428 (1945).

[7] Schwarzschild K., Über die Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen, *Astr. Nachr.*, **141**, 1–8 (1896).

[8] Hopf E., Ergodentheorie, *Erg. Math.*, **5**, 48 (1937).

[9] Littlewood J. E., On the problem of n bodies, *Meddel. Lunds Univ. mat. Sem.*, Suppl. M. Riesz, 143–151 (1952).

Именной указатель

Предметный указатель

Карл Людвиг Зигель, Юрген К. Мозер

Лекции по небесной механике

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий
Корректоры М. А. Ложкина, З. Ю. Соболева

Подписано в печать 17.09.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,39. Уч. изд. л. 22,47.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.